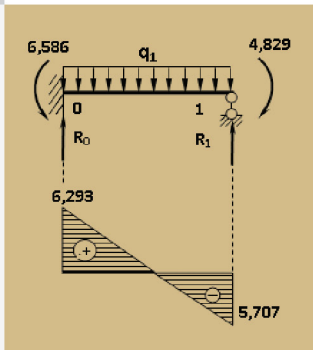
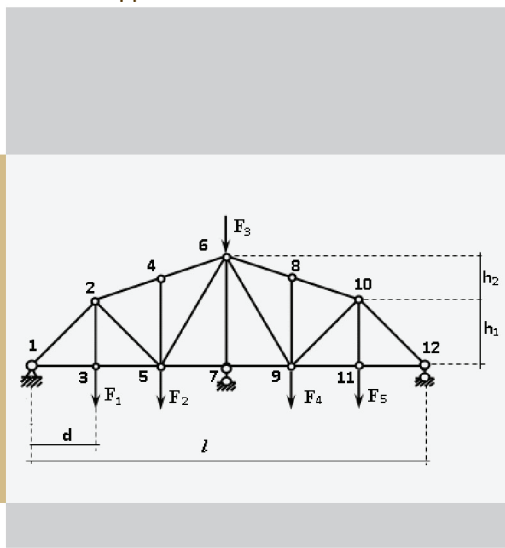
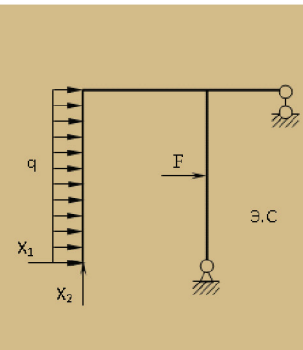


Министерство науки и высшего образования  
Российской Федерации  
Тольяттинский государственный университет  
Архитектурно-строительный институт  
Кафедра «Промышленное,  
гражданское строительство  
и городское хозяйство»

Э.Р. Ефименко

# СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМЫЕ СИСТЕМЫ

Электронное учебно-методическое пособие



© ФГБОУ ВО «Тольяттинский государственный университет», 2019

ISBN 978-5-8259-1411-4

УДК 624.041.2

ББК 38.112

Рецензенты:

д-р техн. наук, профессор, зав. кафедрой ТОСП  
архитектурно-строительного института Самарского  
государственного технического университета *В.П. Попов*;  
канд. техн. наук, доцент кафедры «Промышленное, гражданское  
строительство и городское хозяйство» Тольяттинского  
государственного университета *И.К. Родионов*.

Ефименко, Э.Р. Статически неопределимые системы : электронное учебно-методическое пособие / Э.Р. Ефименко. – Тольятти : Изд-во ТГУ, 2019. – 1 оптический диск.

В учебно-методическом пособии дан краткий теоретический материал для расчета статически неопределимых систем методом сил, методом перемещений, даны примеры расчета статически неопределимой рамы, фермы, балки.

Предназначено для студентов направления подготовки 08.03.01 «Строительство» (профили «Городское строительство и хозяйство», «Промышленное и гражданское строительство») всех форм обучения.

Текстовое электронное издание.

Рекомендовано к изданию научно-методическим советом Тольяттинского государственного университета.

Минимальные системные требования: IBM PC-совместимый компьютер: Windows XP/Vista/7/8; PIII 500 МГц или эквивалент; 128 Мб ОЗУ; SVGA; CD-ROM; Adobe Acrobat Reader.

Редактор *Т.Д. Савенкова*  
Технический редактор *Н.П. Крюкова*  
Компьютерная верстка: *Л.В. Сызганцева*  
Художественное оформление,  
компьютерное проектирование: *И.И. Шишкина*

Дата подписания к использованию  
24.12.2018.

Объем издания 8,55 Мб.

Комплектация издания:  
компакт-диск, первичная упаковка.  
Заказ № 1-53-17.

Издательство Тольяттинского  
государственного университета  
445020, г. Тольятти, ул. Белорусская, 14,  
тел. 8 (8482) 53-91-47, [www.tltsu.ru](http://www.tltsu.ru)

## Содержание

|  |     |
|--|-----|
| ВВЕДЕНИЕ .....   | 5   |
| 1. РАСЧЕТ СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМЫХ СИСТЕМ  |     |
| МЕТОДОМ СИЛ .....  | 6   |
| 1.1. Статическая неопределимость системы .....   | 6   |
| 1.2. Расчет статически неопределимых рам .....   | 7   |
| 1.3. Расчет плоских статически неопределимых ферм .....  | 29  |
| 1.4. Расчет статически неопределимых балок .....   | 47  |
| 2. РАСЧЕТ КИНЕМАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМЫХ СИСТЕМ   |     |
| МЕТОДОМ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ .....  | 62  |
| 2.1. Расчет кинематически неопределимой плоской рамы<br>методом перемещения на действие внешней нагрузки .....                         | 62  |
| 3. РАСЧЕТ СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМЫХ БАЛОК   |     |
| МЕТОДОМ ФОКУСНЫХ ОТНОШЕНИЙ .....   | 87  |
| 3.1. Основные положения расчета неразрезных балок<br>методом фокусных отношений .....  | 87  |
| 3.2. Последовательность выполнения расчета неразрезной<br>балки на временную и постоянную нагрузки<br>методом фокусных отношений ..... | 91  |
| 3.3. Вопросы для самоконтроля .....  | 91  |
| 3.4. Пример расчета балки методом фокусных отношений .....   | 92  |
| 4. РАСЧЕТ СЛОЖНЫХ СТАТИЧЕСКИ<br>НЕОПРЕДЕЛИМЫХ СИСТЕМ .....   | 105 |
| 4.1. Использование симметрии системы .....   | 105 |
| 4.2. Группировка неизвестных усилий .....  | 110 |
| 4.3. Симметричные и обратно симметричные нагрузки .....  | 113 |
| 4.4. Способ преобразования нагрузки .....  | 115 |
| 4.5. Вопросы для самоконтроля .....  | 117 |
| БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК .....   | 118 |
| Приложение А .....   | 119 |
| Приложение Б .....   | 122 |
| Приложение В .....   | 125 |
| Приложение Г .....   | 126 |

## ВВЕДЕНИЕ

Строительная механика – это наука о расчете сооружений на прочность, жесткость и устойчивость.

Проектирование, реконструкция и возведение любого сооружения связано с расчетом на надежность и долговечность, следовательно, строительная механика дает необходимую подготовку для изучения курсов строительных конструкций, зданий и сооружений, мостов и дорог.

Целью расчётов, проводимых методами строительной механики, являются определение усилий в элементах сооружения (изгибающих моментов, поперечных и продольных сил) и перемещений точек сооружения (прогибов, смещений, отклонений) от действующих на сооружение нагрузок и других внешних воздействий.

При изучении строительной механики ставится цель – вооружить будущего специалиста знаниями основных принципов и методов расчёта строительных конструкций и сооружений, привить ему навыки решения задач строительной механики.

Цель данного учебно-методического пособия – помочь студентам в выработке практических навыков решения задач при выполнении контрольных и расчетно-графических работ по строительной механике.

# 1. РАСЧЕТ СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМЫХ СИСТЕМ МЕТОДОМ СИЛ

Статически неопределимыми системами называются системы для определения усилий, в элементах которых кроме уравнений статического равновесия необходимы дополнительные уравнения – уравнения деформации.

Распределение усилий в статически неопределимых системах зависит не только от внешних сил, но и от соотношений между поперечными размерами отдельных элементов. Если элементы системы изготовлены из различных материалов, то распределение усилий зависит также от модулей упругости этих материалов. Поэтому для определения усилий в элементах таких систем необходимо задавать их жесткости. Смещение опор, температурные воздействия и неточность сборки конструкции обычно вызывают в таких системах дополнительные усилия.

Для расчета статически неопределимых систем используют следующие методы:

- метод сил;
- метод перемещений (метод деформаций);
- смешанный метод;
- комбинированный метод.

Для удобства системы, рассчитываемые по методу сил, будем называть статически неопределимыми системами, а по методу перемещений – кинематически неопределимыми системами.

## 1.1. Статическая неопределимость системы

Расчет статически неопределимой системы начинается с анализа ее схемы. Анализ прежде всего необходим для того, чтобы установить степень статической неопределимости системы.

*Степень статической неопределимости ( $n_{ст}$ )* равна числу так называемых лишних связей, удаление которых превращает статически неопределимую систему в статически определимую и геометрически неизменяемую систему. *Геометрически неизменяемой* называется такая система, изменение формы которой возможно лишь в связи с деформациями ее элементов.

Различают внутренне статически неопределимые системы и внешне статически неопределимые системы. *Внутренне статически неопределимые системы* — это системы с тремя опорными стержнями, имеющие лишние внутренние связи. *Внешне статически неопределимые системы* имеют лишние внешние связи (раскосы, затяжки и т. д.). Статически неопределимую систему, имеющую более трех опорных стержней, можно рассматривать и как внешне, и как внутренне, и как одновременно внешне и внутренне статически неопределимую систему — в зависимости от того, какие связи считать лишними.

Каждый *замкнутый контур* системы считается трижды статически неопределимым. Замкнутым называется контур, состоящий из ряда элементов, жестко связанных между собой и образующих замкнутую цепь.

Включение шарнира в узел системы, в котором сходятся два стержня, или же постановка его в любое место на оси стержня нарушает одну связь и снижает общую степень статической неопределимости системы на единицу. Такой шарнир называется одиночным или простым. Кратный шарнир соединяет более двух стержней (дисков). Любой кратный шарнир, эквивалентный  $(n-1)$  одиночному шарниру, снижает степень статической неопределимости системы на  $(n-1)$  единиц, где  $n$  — количество стержней или групп, соединенных кратным шарниром (например, шарнир, соединяющий три стержня, считается за два одиночных шарнира).

## 1.2. Расчет статически неопределимых рам

### 1.2.1. Статическая неопределимость

Расчет статически неопределимых рам начинается с анализа схемы системы и определения степени статической неопределимости. В рамках выделяют внешне статически неопределимые системы и внутренне статически неопределимые системы.

Для конструкций со сложным внутренним структурообразованием степень статической неопределимости вычисляется по формуле (1.1):

$$n_{\text{ст}} = 3m - \text{Ш}, \quad (1.1)$$

где  $n_{ст}$  — степень статической неопределимости системы;  $m$  — число замкнутых контуров в конструкции в предположение отсутствия шарнирных соединений;  $\text{Ш}$  — число одиночных шарниров, «земля» при этом рассматривается как стержень, а группа стержней, не разделенных шарнирами, считается за один стержень.

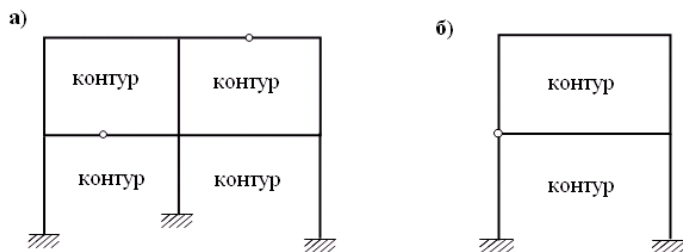


Рис. 1.1

На рис. 1.1, а,  $n_{ст} = 3 \cdot 4 - 2 = 10$ ; на рис. 1.1, б,  $n_{ст} = 3 \cdot 2 - 2 = 4$ .

Для внешне статически неопределимых рам степень статической неопределимости вычисляется по формуле

$$n_{ст} = C_{оп} - 3, \quad (1.2)$$

где  $C_{оп}$  — количество опорных связей (стержней) системы.

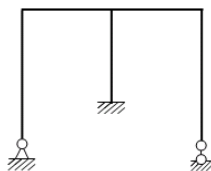


Рис. 1.2

Для рамы, изображенной на рис. 1.2,  $n_{ст} = (2 + 3 + 1) - 3 = 3$ .

Из статически неопределимой системы можно устранить по крайней мере одну связь без нарушения ее геометрической неизменяемости; однако удаление некоторых связей может превратить статически неопределимую систему в геометрически изменяемую систему. Такие связи статически неопределимой системы являются *абсолютно необходимыми* (рис. 1.3).



Связи, удаление которых не превращает статически неопределимую систему в геометрически изменяемую систему, являются *условно необходимыми* (рис. 1.3). У внутренне статически неопределимой системы все опорные стержни являются *абсолютно необходимыми*.



Рис. 1.3

На рис. 1.4, *а*, удалена абсолютно необходимая связь, что привело к геометрической изменяемости системы; на рис. 1.4, *б*, была удалена условно необходимая связь, поэтому система осталась геометрически неизменяемой.

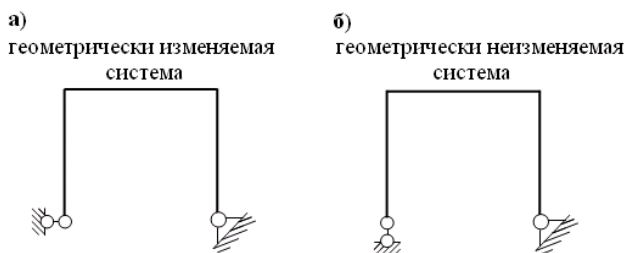


Рис. 1.4

### 1.2.2. Основная и эквивалентная системы. Канонические уравнения метода сил

*Основной системой* называется статически определимая и геометрически неизменяемая система, полученная из заданной системы (рис. 1.5, *а*) путем отбрасывания всех лишних связей (за исключением абсолютно необходимых). Построение основной системы может быть произведено различными способами (рис. 1.5, *б*, *в*). Выбор основной системы является важным этапом расчета, так как от него зависит простота и точность расчета рамы.

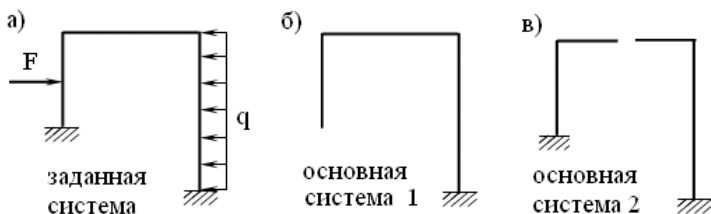


Рис. 1.5

Устранение каких-либо связей не изменяет внутренних усилий, возникающих в системе, и ее деформаций, если к ней прикладываются дополнительные силы и моменты, представляющие собой реакции отброшенных связей. Поэтому если к основной системе кроме заданной нагрузки приложить реакции устраненных связей, то полученная и заданная системы будут эквивалентны. Полученная таким образом система называется *эквивалентной системой* (рис. 1.6, а, б).

В заданной системе в направлении имеющихся жестких связей (в том числе и тех, которые отброшены при переходе к основной системе) перемещений быть не может. Поэтому в эквивалентной системе перемещения по направлениям отброшенных связей должны быть равны нулю.

Следовательно, реакции отброшенных связей должны иметь такие значения, при которых перемещения по их направлениям равнялись бы нулю.

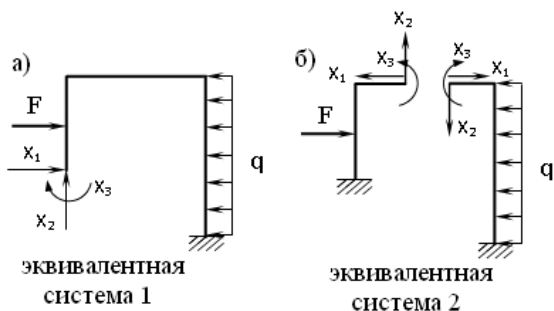


Рис. 1.6

Таким образом, условие равенства эквивалентной и заданной систем математически сводится к удовлетворению системы  $n$  линейных уравнений:

$$\left\{ \begin{aligned} \delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \dots + \delta_{1n}X_n + \Delta_{1F} &= 0 \\ \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \dots + \delta_{2n}X_n + \Delta_{2F} &= 0 \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots &\dots \\ \delta_{n1}X_1 + \delta_{n2}X_2 + \dots + \delta_{nn}X_n + \Delta_{nF} &= 0 \end{aligned} \right. \quad (1.3)$$

Система уравнений (1.3) является теми дополнительными уравнениями деформаций (перемещений), которые позволяют раскрыть статическую неопределимость заданной системы. Данные уравнения называются *каноническими уравнениями метода сил*. Первое из этих уравнений выражает мысль о равенстве нулю перемещения в эквивалентной системе по направлению первой отброшенной связи (по направлению силы или момента  $X_1$ ), второе — по направлению второй отброшенной связи и т. д.

Число уравнений равно числу отброшенных связей, т. е. степени статической неопределимости заданной системы. Так, для заданной системы на рис. 1.5, а, число уравнений равно трем.

В системе канонических уравнений в качестве коэффициентов при неизвестных стоят перемещения основной системы, вызываемые единичными силами или моментами, действующими по направлениям отброшенных связей. Коэффициент  $\delta_{ij}$  представляет перемещение по направлению связи  $i$ , вызванное силой (моментом), равной единице, действующей по направлению связи  $j$ . Коэффициенты  $\delta_{ij}$  носят название *единичных коэффициентов* канонических уравнений. Коэффициент  $\Delta_{iF}$  представляет перемещение по направлению связи  $i$ , вызванное действием заданной внешней нагрузки. Коэффициенты  $\Delta_{iF}$  называются *грузовыми коэффициентами* или *свободными членами* канонических уравнений.

Коэффициенты  $\delta_{ii}$  называются главными коэффициентами, а коэффициенты  $\delta_{ij}$  — побочными. На основании теоремы о взаимности перемещений  $\delta_{ij} = \delta_{ji}$ .

Определяются коэффициенты канонических уравнений с помощью интегралов Мора по формулам (1.4) и (1.5):

$$\delta_{ij} = \sum \int_0^l \frac{\overline{M}_i \cdot \overline{M}_j \cdot dx}{EI}; \quad (1.4)$$

$$\Delta_{ij} = \sum \int_0^l \frac{\bar{M}_i \cdot M_F \cdot dx}{EI}. \quad (1.5)$$

Так как рамы — это конструкции, работающие преимущественно на изгиб, то в выражении интегралов Мора с соблюдением достаточной точности остаются только слагаемые, зависящие от изгибающих моментов.

Для подсчета коэффициентов по формулам (1.4) и (1.5) вычерчиваются единичные эпюры  $M_i$  изгибающих моментов в основной системе, т. е. эпюры от действия  $X_i = 1$ . Отдельно строится грузовая эпюра  $M_F$ . Единичное перемещение  $\delta_{ij}$  вычисляется «перемножением» единичной эпюры  $M_i$  на единичную эпюру  $M_j$ , а грузовое перемещение — «перемножением» единичной эпюры  $M_i$  на грузовую эпюру  $M_F$  по правилу Верещагина или формуле Симпсона.

**Правило Верещагина.** Результат «перемножения» двух эпюр равен произведению площади  $\Omega$  одной из них на ординату  $y_c$  другой (обязательно прямолинейной) эпюры, взятую под центром тяжести площади первой эпюры. При перемножении ставится знак плюс, когда эпюра и ордината под центром ее тяжести, взятая из другой эпюры, имеют одинаковые знаки, и минус, когда разные знаки. Значения площадей и координаты центров тяжести приведены в табл. А.1 прил. А.

Результат выполненного по правилу Верещагина перемножения эпюр для определения искомого перемещения следует разделить на величину  $EI$  (жесткость соответствующего участка при изгибе).

Примеры:

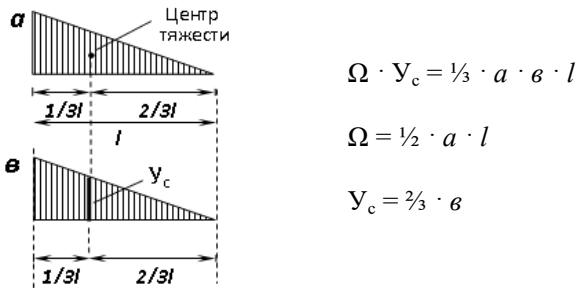
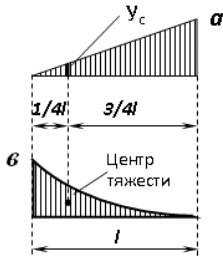


Рис. 1.7

Правилом Верещагина можно пользоваться в том случае, если одна из подынтегральных функций линейна, т. е. одна из «перемножаемых» эпюр прямолинейна, а другая может быть прямолинейной, ломаной или криволинейной (рис. 1.8).

Если эпюра моментов на одном участке меняется, т. е. не является непрерывной и образует две различные подынтегральные функции, то такой участок разбивается на два участка и «перемножение» эпюр производится уже по двум соответствующим участкам.



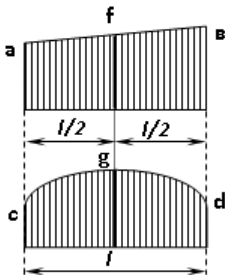
$$\Omega \cdot Y_c = \frac{1}{3} \cdot b \cdot l \cdot \frac{1}{4} \cdot a$$

$$\Omega = \frac{1}{3} \cdot b \cdot l$$

$$Y_c = \frac{1}{4} \cdot a$$

Рис. 1.8

Если обе подынтегральные функции криволинейны на одном участке длиной  $l$ , то для приближенного вычисления интеграла Мора можно пользоваться **формулой Симпсона** (рис. 1.9). С помощью формулы Симпсона можно «перемножать» любые эпюры.



$$\frac{l}{6} (a \cdot c + 4 \cdot f \cdot g + b \cdot d)$$

$f, g$  – середины эпюр

Рис. 1.9

### 1.2.3. Построение окончательной эпюры изгибающих моментов

После вычисления единичных коэффициентов и грузовых членов канонических уравнений эти уравнения решают, в результате чего определяют неизвестные усилия  $X_i$ . После того как лишние неизвестные найдены, эквивалентное состояние будет представлять собой статически определимую систему, находящуюся под действием заданной нагрузки и найденных сил  $X_i$ . Рассчитав эту статически определимую раму, строят для нее эпюры усилий  $M$ ,  $N$ ,  $Q$  известными способами, которыми пользовались при построении эпюр для статически определимых рам.

Существует и другой способ построения эпюры  $M$ . Используя принцип Даламбера, эпюру  $M$  можно построить на основании формулы (1.6):

$$M_{ок} = \bar{M}_1 \cdot X_1 + \bar{M}_2 \cdot X_2 + \dots + \bar{M}_n \cdot X_n + M_F = \sum_{i=1}^n \bar{M}_i \cdot X_i + M_F. \quad (1.6)$$

Таким образом, для получения окончательной эпюры изгибающих моментов ординаты каждой из единичных эпюр умножаются на найденное значение соответствующего неизвестного, все результаты суммируются (по отдельным точкам осей системы) с добавлением к ним ординат грузовой эпюры моментов.

### 1.2.4. Построение эпюр поперечных и продольных сил

После того как решением системы канонических уравнений найдены неизвестные усилия  $X_i$ , эти усилия и заданная внешняя нагрузка могут быть приложены к основной системе. Затем от их совместного действия обычным способом (как в статически определимых системах) могут быть определены поперечные и продольные силы и построены эпюры  $N$ ,  $Q$ .

Поперечные силы в статически неопределимой системе могут быть определены и другим путем – по окончательной эпюре изгибающих моментов и условия равновесия вырезанных стержней. Каждый стержень рамы рассматривается как простая статически определимая балка на двух опорах, с приложенными к ней изгибающими моментами, взятыми с окончательной эпюры изгибающих моментов и заданной внешней нагрузкой. Для каждой такой балки в отдельности строится эпюра поперечных сил. Потом все участки

собираются на раму в целом. Поперечная сила считается положительной, если она дает момент от конца стержня на узел по часовой стрелке, и наоборот.

По эпюре поперечных сил и условия равновесия вырезанных узлов рамы строится эпюра продольных сил  $N$ . Для этого к вырезанным узлам прикладывают поперечные и продольные силы. При этом продольные силы считаем положительными, т. е. направленными от узла. Поперечные силы прикладываются к узлу с учетом полученных значений и знаков, согласно построенной эпюре поперечных сил. К узлу необходимо не забывать прикладывать и внешние силы, если они непосредственно действуют на этот узел. Проектируя приложенные к узлу силы на оси координат, получим два уравнения равновесия (1.7) и (1.8):

$$\sum X = 0; \quad (1.7)$$

$$\sum Y = 0. \quad (1.8)$$

Из уравнений (1.7) и (1.8), зная поперечные силы  $Q$ , находятся продольные силы  $N$ . Начинать определение продольных сил надо с тех узлов, в которых сходятся не более двух стержней с неизвестными продольными силами.

### 1.2.5. Проверки

Важнейшим элементом расчета рам являются различные проверки на каждом этапе расчета.

1. Проверка единичных коэффициентов и свободных членов канонических уравнений. Коэффициенты и свободные члены канонических уравнений представляют собой перемещения, полученные путем перемножения соответствующих эпюр изгибающих моментов. При перемножении эпюр могут быть допущены ошибки, в результате которых значения лишних неизвестных получатся неверными. Ошибки, сделанные при подсчете перемещений, могут быть обнаружены при помощи особых проверок:

а) построчная проверка – проверяются единичные коэффициенты одной строки – одного уравнения, т. е. коэффициент  $\delta_{is}$ , вычисленный по формуле (1.9), должен быть равен коэффициенту  $\delta_{is}$ , вычисленному по формуле (1.10):

$$\delta_{is} = \delta_{i1} + \delta_{i2} + \dots + \delta_{in} = \sum_{j=1}^n \delta_{ij}; \quad (1.9)$$

$$\delta_{is} = \sum_{j=1}^n \int_0^l \frac{\overline{M}_i \overline{M}_s}{EI} dx; \quad (1.10)$$

$$\overline{M}_S = \overline{M}_1 + \overline{M}_2 + \dots + \overline{M}_n = \sum_{i=1}^n \overline{M}_i. \quad (1.11)$$

$\overline{M}_S$  называется суммарной единичной эпюрой изгибающих моментов. Строится в основной системе от действия одновременно всех лишних неизвестных, равных единице. Или путем суммирования всех единичных эпюр;

б) универсальная проверка — проверяются одновременно все единичные коэффициенты, т. е. коэффициент  $\delta_{ss}$ , вычисленный по формуле (1.12), должен быть равен коэффициенту  $\delta_{ss}$ , вычисленному по формуле (1.13):

$$\delta_{ss} = \delta_{11} + \delta_{12} + \dots + \delta_{1n} + \delta_{21} + \delta_{22} + \dots \\ \dots + \delta_{2n} + \dots + \delta_{nn} = \sum_{i,j=1}^n \delta_{ij}; \quad (1.12)$$

$$\delta_{ss} = \sum_{j=1}^n \int_0^l \frac{\overline{M}_s \overline{M}_s}{EI} dx. \quad (1.13)$$

При этом  $\overline{M}_S$  определяется по формуле (1.11);

в) постолбцовая проверка — проверяются свободные члены — коэффициенты одного столбца, т. е. коэффициент  $\Delta_{SF}$ , вычисленный по формуле (1.14), должен быть равен коэффициенту  $\Delta_{SF}$ , вычисленному по формуле (1.15):

$$\Delta_{SF} = \Delta_{1F} + \Delta_{2F} + \dots + \Delta_{nF} = \sum_{j=1}^n \Delta_{iF}; \quad (1.14)$$

$$\Delta_{SF} = \sum_{j=1}^n \int_0^l \frac{\overline{M}_S \overline{M}_F}{EI} dx. \quad (1.15)$$

При этом  $\overline{M}_S$  определяется по формуле (1.11).

2. Проверки правильности построения окончательной эпюры изгибающих моментов:

а) статическая проверка — основана на условии равновесия окончательных моментов во всех узлах рамы согласно формуле (1.16):

$$\sum M = 0; \quad (1.16)$$

б) деформационная проверка — заведомо нулевые перемещения в заданной системе должны получиться равными нулю и при расчете эквивалентной системы, т. е. перемещения, вычисленные по



формуле (1.17), должны получаться равными нулю с погрешностью вычисления не более 3 %.

$$\Delta_{iок} = \sum_{i=1}^n \int_0^l \frac{\bar{M}_i \cdot M_{ок} \cdot dx}{EI}. \quad (1.17)$$

3. Статическая проверка рамы в целом – проверяется рассчитанная рама с учетом найденных опорных реакций, изгибающих моментов, поперечных и продольных сил через уравнения статики (1.18)–(1.20):

$$\Sigma M_K = 0, \quad (1.18)$$

$$\Sigma Y = 0, \quad (1.19)$$

$$\Sigma X = 0. \quad (1.20)$$

Точку К лучше всего подбирать на раме таким образом, чтобы через нее проходило как можно меньше найденных реакций.

### **1.2.6. Последовательность выполнения расчета плоской статически неопределимой рамы методом сил**

1. Определить степень статической неопределимости заданной рамы – формулы (1.1) или (1.2).

2. Выбрать основную систему метода сил и назначить лишние неизвестные усилия. Показать эквивалентную систему.

3. Составить систему канонических уравнений для определения неизвестных усилий от заданной внешней нагрузки – система (1.3).

4. В основной системе построить единичные эпюры изгибающих моментов  $\bar{M}_i$  от действия сил  $\bar{X}_i = 1$  и грузовую эпюру  $M_F$  от действия заданной внешней нагрузки.

5. Вычислить коэффициенты и свободные члены канонических уравнений по формулам Мора, применяя правило Верещагина и формулу Симпсона.

6. Проверить полученные коэффициенты, построив суммарную единичную эпюру изгибающих моментов и вычислив сумму всех единичных коэффициентов, используя формулы (1.11)–(1.13) (универсальная проверка).

7. Проверить полученные свободные члены, вычислив сумму свободных членов, построив суммарную единичную эпюру, используя формулы (1.11), (1.14), (1.15) (постолбцовая проверка).

8. Решить систему канонических уравнений и найти значения неизвестных сил или моментов  $X_i$ . Провести проверку найденного решения, подставив найденные значения в канонические уравнения.

9. Построить окончательную эпюру изгибающих моментов по формуле (1.6).

10. Проверить правильность построения окончательной эпюры:

а) сделать статическую проверку – формула (1.16);

б) выполнить деформационную проверку – формула (1.17).

Если полученная величина  $\Delta_{\text{юк}}$  отлична от нуля, то относительная погрешность вычислений не должна превышать 3 %.

11. Построить окончательную эпюру поперечных сил, используя окончательную эпюру изгибающих моментов и условия равновесия каждого вырезанного из каркаса стержня.

12. Построить окончательную эпюру продольных сил, используя окончательную эпюру поперечных сил и условия равновесия вырезанных узлов рамы.

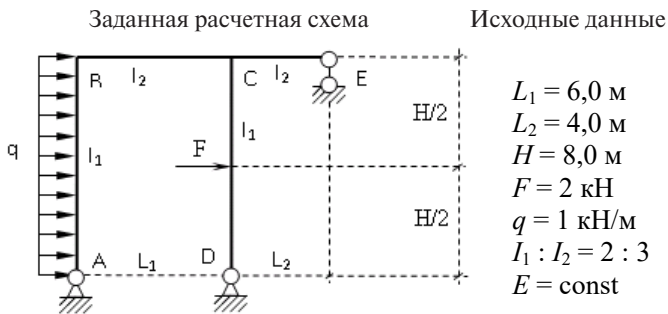
13. Проверить статическое равновесие рамы в целом под действием заданной внешней нагрузки и опорных реакций – формулы (1.18)–(1.20).

### 1.2.7. Вопросы для самоконтроля

1. Дать определение статически неопределимой рамы.
2. Дать определение внутренне и внешне статически неопределимых рам.
3. Написать и пояснить формулы для определения степени статической неопределимости внутренне и внешне статически неопределимых рам.
4. Дать определение основной и эквивалентной систем.
5. Записать канонические уравнения метода сил для дважды статически неопределимой системы. Объяснить физический смысл каждого уравнения и каждого элемента, входящего в уравнения.
6. Порядок определения единичных и грузовых коэффициентов канонических уравнений.

7. Записать и пояснить проверки для единичных и грузовых коэффициентов канонических уравнений.
8. Правила построения окончательной эпюры изгибающих моментов.
9. Деформационная проверка, ее физический смысл.
10. Порядок построения эпюры поперечных сил.
11. Порядок построения эпюры продольных усилий.
12. Взаимная проверка эпюр  $M$ ,  $N$ ,  $Q$ .

### 1.2.8. Пример расчета плоской статически неопределимой рамы методом сил

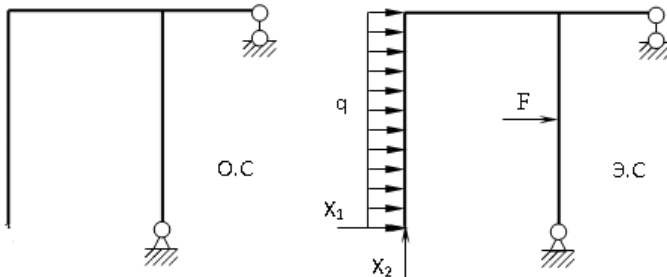


1. Определение степени статической неопределимости заданной рамы. Рама является внешне статически неопределимой системой, следовательно, степень статической неопределимости находится по формуле (1.2)

$$n_{\text{ст}} = C_{\text{он}} - 3 = (2 + 2 + 1) - 3 = 2,$$

т. е. система дважды статически неопределима.

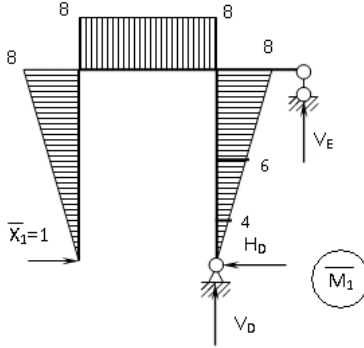
2. Выбор основной и эквивалентной систем метода сил. Назначение лишних неизвестных  $X_1$  и  $X_2$ .



3. Так как  $n_{ст} = 2$ , система канонических уравнений будет иметь следующий вид:

$$\begin{cases} \delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \Delta_{1F} = 0 \\ \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \Delta_{2F} = 0. \end{cases}$$

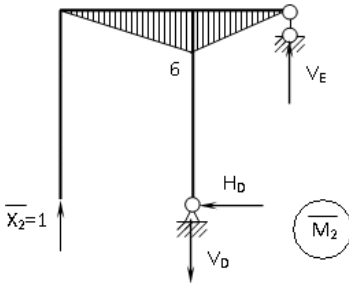
4. Построение единичных и грузовой эпюр изгибающих моментов. Для построения единичных и грузовой эпюр необходимо для каждого состояния найти опорные реакции.



$$\Sigma M_D = 0, -V_E \cdot L_2 = 0, V_E = 0$$

$$\Sigma X = 0, X_1 - H_D = 0, \\ H_D = 1 \text{ кН}$$

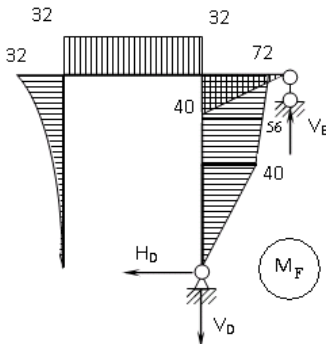
$$\Sigma Y = 0, V_E + V_D = 0, V_D = 0$$



$$\Sigma M_D = 0, X_2 \cdot L_1 - V_E \cdot L_2 = 0, \\ V_E = 1,5 \text{ кН}$$

$$\Sigma X = 0, H_D = 0,$$

$$\Sigma Y = 0, V_E + X_1 - V_D = 0, \\ V_D = 2,5 \text{ кН}$$



$$\Sigma M_D = 0, \\ q \cdot H^2/2 - V_E \cdot L_2 + P \cdot H/2 = 0, \\ V_E = 10 \text{ кН}$$

$$\Sigma X = 0, q \cdot H + P - H_D = 0, \\ H_D = 10 \text{ кН}$$

$$\Sigma Y = 0, V_E - V_D = 0, \\ V_D = 10 \text{ кН}$$

5. Вычисление коэффициентов и свободных членов канонических уравнений.

$$\begin{aligned}\delta_{11} &= \sum_{i=10}^n \int \frac{\overline{M}_1 \cdot \overline{M}_1}{EI} \cdot dx = \frac{1}{EI_1} \cdot \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 8 \cdot \frac{2}{3} \cdot 8 \cdot 2 + \frac{1}{EI_2} \cdot 8 \cdot 6 \cdot 8 = \\ &= \frac{512}{3 \cdot EI} + \frac{384}{3 \cdot EI} = \frac{896}{3 \cdot EI};\end{aligned}$$

$$\delta_{12} = \sum_{i=10}^n \int \frac{\overline{M}_1 \cdot \overline{M}_2}{EI} \cdot dx = -\frac{1}{EI_2} \cdot \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 6 \cdot 8 = -\frac{144}{3 \cdot EI}.$$

На основании теоремы о взаимности перемещений  $\delta_{ij} = \delta_{ji}$ :

$$\delta_{21} = \delta_{12} = -\frac{144}{3 \cdot EI};$$

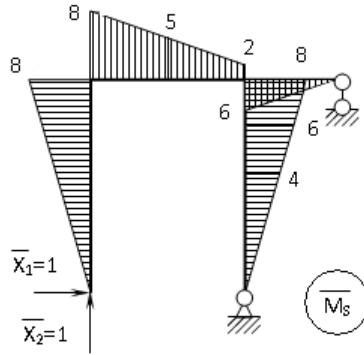
$$\begin{aligned}\delta_{22} &= \sum_{i=10}^n \int \frac{\overline{M}_2 \cdot \overline{M}_2}{EI} \cdot dx = \frac{1}{EI_2} \cdot \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 6 \cdot \frac{2}{3} \cdot 6 + \frac{1}{EI_2} \cdot \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 4 \cdot \frac{2}{3} \cdot 6 = \\ &= \frac{72}{3 \cdot EI} + \frac{48}{3 \cdot EI} = \frac{120}{3 \cdot EI};\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Delta_{1F} &= \sum_{i=10}^n \int \frac{\overline{M}_1 \cdot M_F}{EI} \cdot dx = \\ &= \frac{1}{EI_1} \cdot \frac{1}{3} \cdot 8 \cdot 32 \cdot \frac{3}{4} \cdot 8 + \frac{1}{EI_2} \cdot 8 \cdot 6 \cdot 32 + \frac{1}{EI_1} \cdot \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 4 \times \\ &\times \frac{2}{3} \cdot 40 + \frac{1}{EI_1} \cdot \frac{4}{6} \cdot (72 \cdot 8 + 4 \cdot 56 \cdot 6 + 4 \cdot 40) = \\ &= \frac{768}{3 \cdot EI} + \frac{1536}{3 \cdot EI} + \frac{320}{3 \cdot EI} + \frac{2080}{3 \cdot EI} = \frac{4704}{3 \cdot EI};\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Delta_{2F} &= \sum_{i=10}^n \int \frac{\overline{M}_2 \cdot M_F}{EI} \cdot dx = -\frac{1}{EI_2} \cdot \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 6 \cdot 32 + \frac{1}{EI_2} \cdot \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 4 \cdot \frac{2}{3} \cdot 40 = \\ &= \frac{-576}{3 \cdot EI} + \frac{320}{3 \cdot EI} = -\frac{256}{3 \cdot EI}.\end{aligned}$$

6. Построение суммарной единичной эпюры изгибающих моментов, т. е. производим суммирование эпюр по участкам, характерным точкам:

$$\overline{M}_S = \overline{M}_1 + \overline{M}_2.$$



Выполняем универсальную проверку – формулы (1.11)–(1.13):

$$\delta_{SS} = \sum_{i=1}^n \int_0^l \frac{\overline{M}_S \cdot \overline{M}_S}{EI} \cdot dx =$$

$$= \frac{1}{EI_1} \cdot \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 8 \cdot \frac{2}{3} \cdot 8 \cdot 2 + \frac{1}{EI_2} \cdot \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 4 \cdot \frac{2}{3} \cdot 6 + \frac{1}{EI_2} \cdot \frac{6}{6} \times$$

$$\times (8 \cdot 8 + 4 \cdot 5 \cdot 5 + 2 \cdot 2) = \frac{512}{3 \cdot EI} + \frac{48}{3 \cdot EI} + \frac{168}{3 \cdot EI} = \frac{728}{3 \cdot EI};$$

$$\Sigma \delta_{ij} = \delta_{11} + \delta_{12} + \delta_{21} + \delta_{22} = \frac{896}{3 \cdot EI} - \frac{144}{3 \cdot EI} - \frac{144}{3 \cdot EI} + \frac{120}{3 \cdot EI} = \frac{728}{3 \cdot EI}.$$

$\delta_{SS} = \Sigma \delta_{ij}$ , значит, выполнена универсальная проверка единичных коэффициентов, следовательно, единичные коэффициенты найдены верно.

7. Проводим проверку свободных членов канонических уравнений – постолбцовая проверка – формулы (1.11), (1.14), (1.15).

$$\Delta_{SF} = \sum_{i=1}^n \int_0^l \frac{\overline{M}_S \cdot M_F}{EI} \cdot dx =$$

$$= \frac{1}{EI_1} \cdot \frac{1}{3} \cdot 8 \cdot 32 \cdot \frac{3}{4} \cdot 8 + \frac{1}{EI_2} \cdot 5 \cdot 6 \cdot 32 + \frac{1}{EI_2} \cdot \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 4 \cdot \frac{2}{3} \cdot 40 +$$

$$+ \frac{1}{EI_1} \cdot \frac{4}{6} \cdot (40 \cdot 4 + 6 \cdot 4 \cdot 56 + 72 \cdot 8) + \frac{1}{EI_1} \cdot \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 4 \cdot \frac{2}{3} \cdot 40 =$$

$$= \frac{768}{3 \cdot EI} + \frac{960}{3 \cdot EI} + \frac{320}{3 \cdot EI} + \frac{320}{3 \cdot EI} + \frac{2080}{3 \cdot EI} = \frac{4448}{3 \cdot EI};$$

$$\Sigma \Delta_{iF} = \Delta_{1F} + \Delta_{2F} = \frac{4704}{3 \cdot EI} - \frac{256}{3 \cdot EI} = \frac{4448}{3 \cdot EI}.$$

$\Sigma \Delta_{iF} = \Delta_{SF}$  значит, выполнена постолбцовая проверка, следовательно, свободные члены найдены верно.

8. Решаем систему канонических уравнений:

$$\begin{cases} \frac{896}{3 \cdot EI} X_1 - \frac{144}{3 \cdot EI} X_2 + \frac{4704}{3 \cdot EI} = 0 \\ -\frac{144}{3 \cdot EI} X_1 + \frac{120}{3 \cdot EI} X_2 - \frac{256}{3 \cdot EI} = 0. \end{cases}$$

Сократив оба уравнения на величину  $8/(3 \cdot EI)$ , получим следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} 112X_1 - 18X_2 + 558 = 0 \\ -18X_1 + 15X_2 - 32 = 0. \end{cases}$$

Решая систему уравнений, находим неизвестные:

$$X_1 = -6,080 \text{ кН}; \quad X_2 = -5,162 \text{ кН}.$$

Делаем проверку найденного решения, т. е. подставляем полученные значения  $X_1$  и  $X_2$  в канонические уравнения:

$$112 \cdot (-6,080) - 18 \cdot (-5,162) + 558 = -558,004 + 558 = -0,004 \approx 0$$

$$-18 \cdot (-6,080) + 15 \cdot (-5,162) - 32 = 32,01 - 32 = 0,01 \approx 0.$$

Относительная погрешность первого уравнения:

$$\frac{-0,004}{-558,004} \cdot 100 \% = 0,006 \% < 3 \%$$

Относительная погрешность второго уравнения:

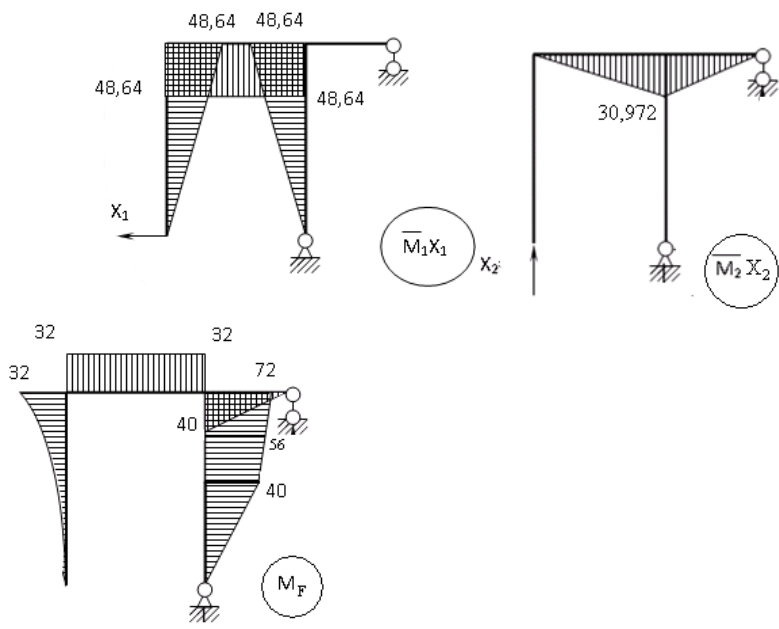
$$\frac{0,01}{32,01} \cdot 100 \% = 0,03 \% < 3 \%$$

Таким образом, решение найдено верно.

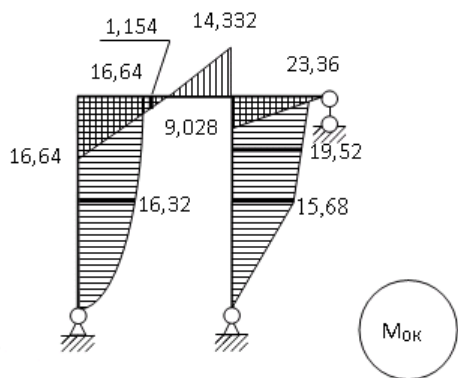
9. Построение окончательной эпюры изгибающих моментов

$$M_{ок} = \overline{M}_1 \cdot X_1 + \overline{M}_2 \cdot X_2 + M_F.$$

Для этого сначала построим эпюры  $\overline{M}_1 \cdot X_1$  и  $\overline{M}_2 \cdot X_2$ , умножив единичных эпюр  $\overline{M}_1$  и  $\overline{M}_2$  на действительные значения эпюры  $X_1$  и  $X_2$ .



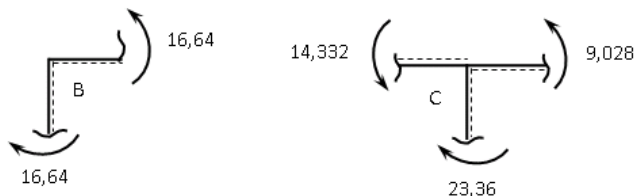
Проведем суммирование полученных эпюр по характерным точкам, получим окончательную эпюру изгибающих моментов.





10. Проверим правильность построения эпюры  $M_{ок}$ :

а) статическая проверка:



$$\Sigma M_B = 0, \quad 16,64 - 16,64 = 0$$

$$\Sigma M_C = 0, \quad -23,36 + 14,322 + 9,028 = 0.$$

Статическая проверка выполнена, так как в узлах сохраняется статическое равновесие;

б) деформационная проверка:

$$\begin{aligned} \Delta_{1ок} &= \sum_{i=1}^n \int_0^l \frac{\overline{M}_1 \cdot M_{ок}}{EI} \cdot dx = \\ &= -\frac{1}{EI_1} \cdot \frac{8}{6} \cdot (0 \cdot 0 + 4 \cdot 4 \cdot 16,32 + 16,64 \cdot 8) - \frac{1}{EI_2} \cdot 8 \cdot 6 \cdot 1,154 + \\ &+ \frac{1}{EI_1} \cdot \frac{4}{6} \cdot (15,68 \cdot 4 + 4 \cdot 6 \cdot 19,52 + 23,36 \cdot 8) + \frac{1}{EI_1} \times \\ &\times \frac{1}{2} \cdot 15,68 \cdot 4 \cdot \frac{2}{3} \cdot 4 = \frac{1}{EI} (-262,827 - 18,464 + 239,36 + 41,913) = \\ &= \frac{1}{EI} (-281,291 + 281,273) = \frac{-0,018}{EI} \approx 0. \end{aligned}$$

Относительная погрешность:

$$\frac{-0,018}{-281,291} \cdot 100 \% = 0,006 \% < 3 \% \text{ — допустимая погрешность.}$$

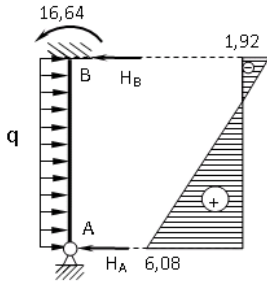
$$\begin{aligned} \Delta_{2ок} &= \sum_{i=1}^n \int_0^l \frac{\overline{M}_2 \cdot M_{ок}}{EI} \cdot dx = \\ &= \frac{1}{EI_2} \cdot \frac{6}{6} \cdot (0 \cdot 16,64 + 4 \cdot 3 \cdot 1,154 - 14,332 \cdot 6) + \\ &+ \frac{1}{EI_2} \cdot \frac{1}{2} \cdot 9,028 \cdot 4 \cdot \frac{2}{3} \cdot 6 = \frac{1}{EI} (-24,048 + 24,075) = \frac{0,027}{EI} \approx 0. \end{aligned}$$

Относительная погрешность:

$$\frac{0,027}{24,075} \cdot 100 \% = 0,11 \% < 3 \% \text{ — допустимая погрешность.}$$

Деформационная проверка выполнена, следовательно, эпюра  $M_{ок}$  построена верно.

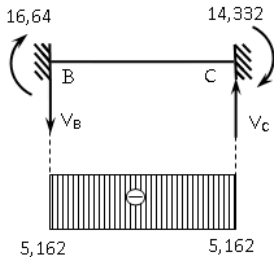
**11.** Построение эпюры поперечных сил на основании построенной эпюры изгибающих моментов  $M_{ок}$



$$\begin{aligned}\Sigma M_A &= 0, \\ -16,64 + q \cdot 8 \cdot 4 - H_B \cdot 8 &= 0, \\ H_B &= 1,92 \text{ кН}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Sigma M_B &= 0, \\ -16,64 - q \cdot 8 \cdot 4 + H_A \cdot 8 &= 0, \\ H_A &= 6,08 \text{ кН}\end{aligned}$$

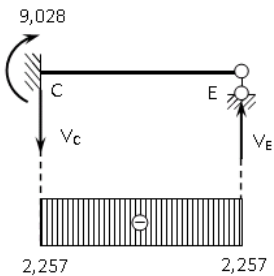
$$\Sigma X = 0, -H_A - H_B + q \cdot 8 = 0, 0 = 0$$



$$\begin{aligned}\Sigma M_B &= 0, \\ -V_C \cdot 6 + 14,332 + 16,64 &= 0, \\ V_C &= 5,162 \text{ кН},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Sigma M_C &= 0, \\ -V_B \cdot 6 + 14,332 + 16,64 &= 0, \\ V_B &= 5,162 \text{ кН},\end{aligned}$$

$$\Sigma Y = 0, V_B + V_C = 0, 0 = 0$$

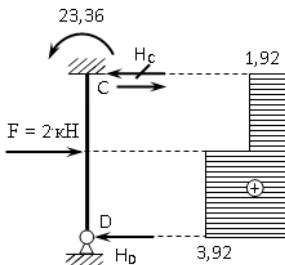


$$\begin{aligned}\Sigma M_C &= 0, 9,028 - V_E \cdot 4 = 0 \\ V_E &= 2,257 \text{ кН}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Sigma M_E &= 0, 9,028 - V_C \cdot 4 = 0 \\ V_C &= 2,257 \text{ кН}\end{aligned}$$

$$\Sigma Y = 0, -V_C + V_E = 0, 0 = 0$$

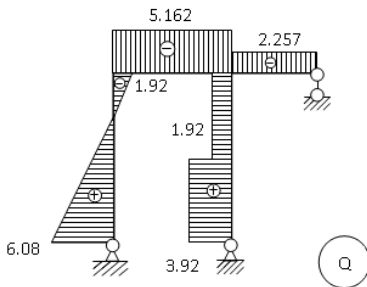
$$\begin{aligned}\Sigma M_C &= 0, \\ -23,36 + H_D \cdot 8 - P \cdot 4 &= 0 \\ H_D &= 3,92 \text{ кН}\end{aligned}$$



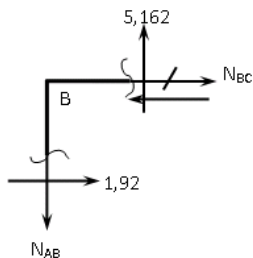
$$\begin{aligned}\Sigma M_D &= 0, \\ -23,36 - H_C \cdot 8 + P \cdot 4 &= 0 \\ H_C &= -1,92 \text{ кН} - \text{значит,} \\ &\text{направление реакции выбрано} \\ &\text{неверно, поэтому меняем его на} \\ &\text{противоположное.}\end{aligned}$$

$$\Sigma X = 0, -H_D + H_C + P = 0, 0 = 0$$

Соберем все участки на раму в целом. Эпюра поперечных сил  $Q$  будет иметь следующий вид:

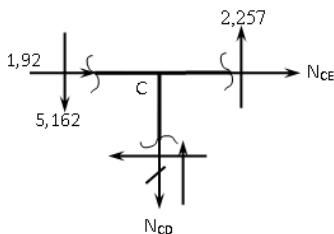


12. Построение эпюры продольных (нормальных) сил  $N$  на основании построенной эпюры поперечных сил:



$\Sigma X = 0, N_{BC} + 1,92 = 0$   
 $N_{BC} = -1,92$  кН – получается, что усилие  $N_{BC}$  направлено в противоположную сторону, т. е. в узел.

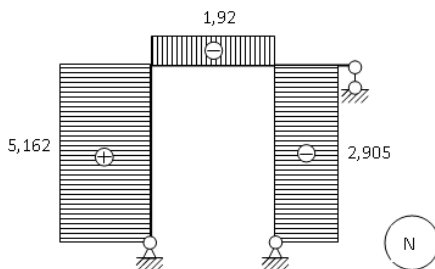
$\Sigma Y = 0, -N_{AB} + 5,162 = 0$   
 $N_{AB} = 5,162$  кН



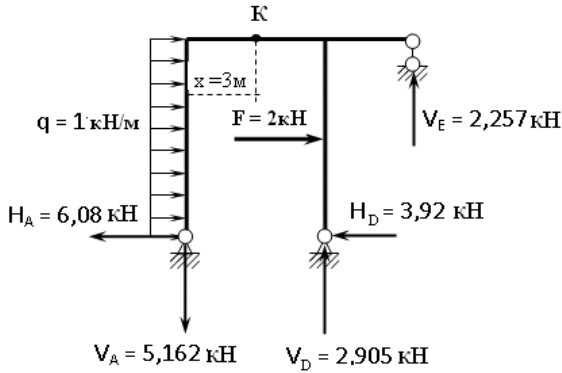
$\Sigma Y = 0,$   
 $N_{CD} - 5,162 + 2,257 = 0$   
 $N_{CD} = -2,905$  кН – направлено в противоположную сторону

$\Sigma X = 0,$   
 $N_{CE} - 1,92 + 1,92 = 0$   
 $N_{CE} = 0$

Соберем все участки на раму в целом. Эпюра продольных сил  $N$  будет иметь следующий вид:



13. Согласно построенным эпюрам  $M$ ,  $N$ ,  $Q$  определяем опорные реакции рамы и составляем условие статического равновесия рамы в целом.



$$\sum X = 0, -H_A - H_D + F + q \cdot H = 0,$$

$$-6,08 - 3,92 + 2 + 1 \cdot 8 = 0,$$

$$0 = 0$$

$$\sum Y = 0, -V_A + V_D + V_E = 0,$$

$$-5,162 + 2,905 + 2,257 = 0,$$

$$0 = 0$$

$$\sum M_K = 0, H_A \cdot 8 - V_A \cdot 3 - F \cdot 4 - q \cdot 8 \cdot 4 - V_D \cdot 3 + H_D \cdot 8 - V_E \cdot 7 = 0,$$

$$6,08 \cdot 8 - 5,162 \cdot 3 - 2 \cdot 4 - 1 \cdot 8 \cdot 4 - 2,905 \cdot 3 + 3,92 \cdot 8 - 2,257 \cdot 7 = 0,$$

$$0 = 0$$

Так как выполнены все уравнения статического равновесия, следовательно, рама рассчитана верно, эпюры  $M$ ,  $N$ ,  $Q$  построены правильно.

### 1.3. Расчет плоских статически неопределимых ферм

#### 1.3.1. Статическая неопределимость

*Статически неопределимой фермой* называется ферма, для определения усилий в элементах которой кроме уравнений статического равновесия необходимы дополнительные уравнения – уравнения деформаций.

Расчет статически неопределимой фермы начинается с анализа ее схемы и определения степени статической неопределимости.

Различают внешне статически неопределимые фермы и внутренне статически неопределимые фермы. *Внутренне статически неопределимые фермы* – фермы с тремя опорными стержнями, имеющие лишние внутренние связи (рис. 1.10, а). *Внешне статически неопределимые фермы* имеют лишние внешние связи (рис. 1.10, б).

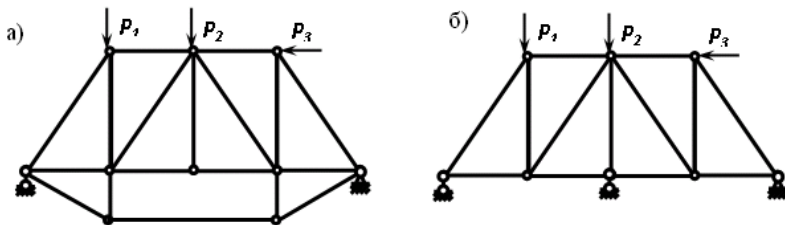


Рис. 1.10

Для внешне статически неопределимых ферм степень статической неопределимости вычисляется по формуле

$$n_{ст} = C_{оп} - 3, \quad (1.21)$$

где  $C_{оп}$  – количество опорных связей (стержней) системы.

Для внутренне статически неопределимых ферм степень статической неопределимости вычисляется по формуле

$$n_{ст} = -W = -(3D - 2Ш - C_{оп}), \quad (1.22)$$

где  $D$  – количество дисков (стержней);  $Ш$  – количество одиночных (простых) шарниров;  $C_{оп}$  – количество опорных связей (стержней) системы.

Для системы, изображенной на рис. 1.10, б, степень статической неопределимости равна:

$$n_{\text{ст}} = C_{\text{оп}} - 3 = 4 - 3 = 1.$$

Для системы, изображенной на рис. 1.10, а, степень статической неопределимости равна:

$$n_{\text{ст}} = -(3D - 2Ш - C_{\text{оп}}) = -(3 \cdot 18 - 2 \cdot 26 - 3) = 1.$$

### 1.3.2. Основная и эквивалентная системы. Канонические уравнения метода сил

*Основной системой* называется статически определимая и геометрически неизменяемая система, полученная из заданной системы путем отбрасывания всех лишних связей (за исключением абсолютно необходимых). Построение основной системы может быть произведено различными способами. Выбор основной системы является важным этапом расчета, так как от него зависит простота и точность расчета фермы.

Устранение каких-либо связей не изменяет внутренних усилий, возникающих в системе, и ее деформаций, если к ней прикладываются дополнительные силы и моменты, представляющие собой реакции отброшенных связей. Поэтому если к основной системе кроме заданной нагрузки приложить реакции устраненных связей, то полученная система и заданная система будут эквивалентны. Полученная таким образом система называется *эквивалентной системой*.

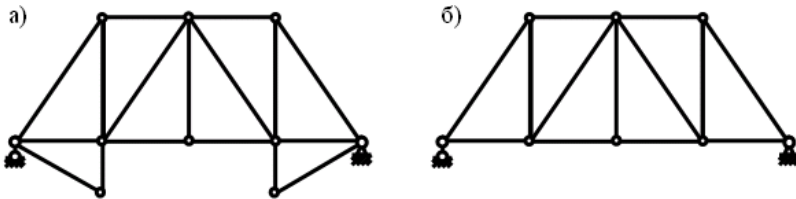


Рис. 1.11

На рис. 1.11, а, изображена основная система, полученная из заданной системы на рис. 1.10, а, путем отбрасывания одного лишнего стержня, вызывающего наибольшие деформации из-за его неразрезанности.

На рис. 1.11, б, изображена основная система, полученная из заданной системы на рис. 1.10, б, путем отбрасывания одного лиш-

него опорного стержня, при этом сохраняется геометрическая симметрия системы для упрощения расчетов.

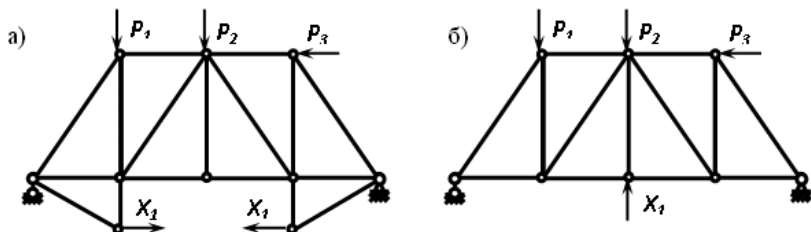


Рис. 1.12

На рис. 1.12, а, показана эквивалентная система для заданной системы, изображенной на рис. 1.10, а, полученная путем прикладывания к основной системе, изображенной на рис. 1.11, а, заданной внешней нагрузки и реакции отброшенной связи  $X_1$ . В данном случае реакцией отброшенной связи является внутреннее усилие (продольное усилие  $N$ ) в отброшенном стержне.

На рис. 1.12, б, показана эквивалентная система для заданной системы, изображенной на рис. 1.10, б, полученная путем прикладывания к основной системе, изображенной на рис. 1.11, б, заданной внешней нагрузки и реакции отброшенной связи  $X_1$ . В данном случае реакцией отброшенной связи является реакция в отброшенном опорном стержне.

В заданных системах (рис. 1.10, а, б) в направлении имеющих жестких связей (в том числе тех связей, которые отброшены при переходе к основной системе) перемещений быть не может. Поэтому в эквивалентной системе перемещения по направлениям отброшенных связей должны быть равны нулю. Следовательно, реакции отброшенных связей должны иметь такие значения, при которых перемещения по их направлениям равнялись бы нулю. Таким образом, условие равенства эквивалентной и заданной систем математически сводится к удовлетворению системы  $n$  линейных уравнений:

$$\begin{cases} \delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \dots + \delta_{1n}X_n + \Delta_{1F} = 0 \\ \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \dots + \delta_{2n}X_n + \Delta_{2F} = 0 \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ \delta_{n1}X_1 + \delta_{n2}X_2 + \dots + \delta_{nn}X_n + \Delta_{nF} = 0. \end{cases} \quad (1.23)$$

Эти уравнения являются теми дополнительными уравнениями деформаций (перемещений), которые позволяют раскрыть статическую неопределимость заданной системы. Данные уравнения являются *каноническими уравнениями метода сил*. Первое из этих уравнений выражает мысль о равенстве нулю перемещения в эквивалентной системе по направлению первой отброшенной связи  $X_1$ , второе — по направлению второй отброшенной связи и т. д.

Число уравнений равно числу отброшенных связей, т. е. степени статической неопределимости заданной системы. Так, для систем, изображенных на рис. 10, *а, б*, система канонических уравнений будет состоять из одного уравнения (1.24), потому что степень статической неопределимости в обоих случаях равна единице.

$$\{\delta_{11}X_1 + \Delta_{1F} = 0. \quad (1.24)$$

В системе канонических уравнений в качестве коэффициентов при неизвестных стоят перемещения основной системы, вызываемые единичными силами, действующими по направлениям отброшенных связей. Коэффициент  $\delta_{ij}$  представляет перемещение по направлению связи  $i$ , вызванное силой, равной единице, действующей по направлению связи  $j$ . Коэффициенты  $\delta_{ij}$  носят название *единичных коэффициентов* канонических уравнений. Коэффициент  $\Delta_{ip}$  представляет перемещение по направлению связи  $i$ , вызванное действием заданной внешней нагрузки. Коэффициенты  $\Delta_{ip}$  называются *грузовыми коэффициентами* или *свободными членами* канонических уравнений.

Коэффициенты  $\delta_{ii}$  называются главными коэффициентами, а коэффициенты  $\delta_{ij}$  — побочными. На основании теоремы о взаимности перемещений  $\delta_{ij} = \delta_{ji}$ .

Определяются коэффициенты канонических уравнений с помощью интегралов Мора по формулам:

$$\delta_{ij} = \sum \int_0^l \frac{\bar{N}_i \cdot \bar{N}_j \cdot dx}{EF} = \sum \frac{\bar{N}_i \cdot \bar{N}_j \cdot l_i}{EF}; \quad (1.25)$$

$$\Delta_{iF} = \sum \int_0^l \frac{\bar{N}_i \cdot \bar{N}_F \cdot dx}{EF} = \sum \frac{\bar{N}_i \cdot \bar{N}_F \cdot l_i}{EF}. \quad (1.26)$$



Так как фермы – это конструкции, работающие преимущественно на сжатие (растяжение), то в выражении интегралов Мора с соблюдением достаточной точности остаются только слагаемые, зависящие от продольных усилий  $N$ .

Для подсчета коэффициентов необходимо знать только величины продольных усилий в стержнях ферм. Для их нахождения используются способы определения продольных усилий в стержнях ферм: способ вырезания узлов, способ моментной точки, способ проекций и определение усилий по признакам нулевых и ненулевых стержней.

### 1.3.3. Построение окончательной эпюры продольных сил

После вычисления единичных коэффициентов и грузовых членов канонических уравнений эти уравнения решают, в результате чего определяют неизвестные усилия  $X_i$ . После того как лишние неизвестные найдены, эквивалентное состояние будет представлять собой статически определимую систему, находящуюся под действием заданной нагрузки и найденных сил  $X_i$ . Рассчитав эту статически определимую ферму, строят для нее эпюру продольных усилий  $N$  известными способами, которыми пользовались при построении эпюр в статически определимых фермах (в фермах обычно эпюру  $N$  не строят, достаточно определить только величины усилий).

Существует и другой способ построения эпюры  $N$ . Используя принцип Даламбера, эпюру  $N$  можно построить на основании формулы (1.27):

$$N_{\text{ок}} = \bar{N}_1 \cdot X_1 + \bar{N}_2 \cdot X_2 + \dots + \bar{N}_n \cdot X_n + N_F = \sum_{i=1}^n \bar{N}_i \cdot X_i + N_F. \quad (1.27)$$

Таким образом, для получения окончательной эпюры продольных сил ординаты каждой из единичных эпюр умножаются на найденное значение соответствующего неизвестного и все результаты суммируются (по отдельным точкам осей системы) с добавлением к ним ординат грузовой эпюры продольных сил.

Так как в ферме достаточно большое количество вычислений, то расчет статически неопределимой фермы лучше всего вести в табличной форме. Таблица для дважды статически неопределимой фермы представлена на рис. 1.13.

| № стержня | $l_i$ | $EF$ | $N_1$ | $N_2$ | $N_F$ | $N_1 N_1 l_i$ | $N_1 N_2 l_i$              | $N_2 N_2 l_i$ | $N_1 N_F l_i$ | $N_2 N_F l_i$ | $N_1 X_1$ | $N_2 X_2$ | $N_{ок}$ | $N_1 N_{ок} l_i$ | $N_2 N_{ок} l_i$ |
|-----------|-------|------|-------|-------|-------|---------------|----------------------------|---------------|---------------|---------------|-----------|-----------|----------|------------------|------------------|
| 1–2       |       |      |       |       |       |               |                            |               |               |               |           |           |          |                  |                  |
| 2–3       |       |      |       |       |       |               |                            |               |               |               |           |           |          |                  |                  |
| 2–4       |       |      |       |       |       |               |                            |               |               |               |           |           |          |                  |                  |
|           |       |      |       |       |       | $\delta_{11}$ | $\delta_{12}, \delta_{21}$ | $\delta_{22}$ | $\Delta_{1F}$ | $\Delta_{2F}$ |           |           |          | 0                | 0                |

Рис. 1.13

### 1.3.4. Проверки

Важнейшим элементом расчета ферм являются различные проверки на каждом этапе расчета.

1. Проверки правильности построения окончательной эпюры продольных усилий:

а) статическая проверка — основана на условии статического равновесия окончательных усилий во всех узлах фермы согласно формулам (1.28) и (1.29).

$$\Sigma X = 0; \quad (1.28)$$

$$\Sigma Y = 0; \quad (1.29)$$

б) деформационная проверка — заведомо нулевые перемещения в заданной системе должны получиться равными нулю и при расчете эквивалентной системы, т. е. перемещения, вычисленные по формуле (1.30), должны получаться равными нулю с погрешностью вычисления не более 3 %.

$$\Delta_{iок} = \sum_{i=1}^n \int_0^l \frac{\bar{N}_i \cdot N_{ок} \cdot dx}{EF} = \sum \frac{\bar{N}_i \cdot N_{ок} \cdot l_i}{EF}. \quad (1.30)$$

2. Статическая проверка фермы в целом — проверяется рассчитанная ферма с учетом найденных опорных реакций и продольных сил через уравнения статики (1.31), (1.32):

$$\Sigma Y = 0; \quad (1.31)$$

$$\Sigma X = 0. \quad (1.32)$$

### 1.3.5. Определение внутренних усилий в стержнях ферм

Фермы — это системы, работающие преимущественно на сжатие (растяжение). Поэтому из внутренних усилий в фермах определяются только продольные усилия. А остальные усилия ( $M$ ,  $Q$ ) настолько малы, что ими можно пренебречь.

В первую очередь в фермах определяются опорные реакции. Для определения опорных реакций ферм используются уравнения статики, т. е. составляются три уравнения равновесия для всей фермы в целом (1.33)–(1.35):

$$\Sigma M_A = 0; \quad (1.33)$$

$$\Sigma M_B = 0; \quad (1.34)$$

$$\Sigma X = 0. \quad (1.35)$$

Для определения внутренних усилий следует выделять сечениями узлы или отдельные части ферм и рассматривать условия их равновесия под действием внешних нагрузок и усилий в рассеченных стержнях (*метод сечений*).

Выделение частей или узлов фермы необходимо производить так, чтобы усилия в элементах определялись наиболее просто.

Различают следующие способы определения внутренних усилий в стержнях ферм: *способ моментной точки; способ вырезания узлов; способ проекций*.

**Способ моментной точки (СМТ).** СМТ применяется в тех случаях, когда удастся рассечь ферму на две части так, чтобы при этом перерезанными оказались три ее стержня, направления осей которых не пересекаются в одной точке (рис. 1.14). Направления осей трех таких перерезанных стержней пересекаются попарно в трех точках, не лежащих на одной прямой. Такие точки являются моментными для соответствующих стержней. *Моментной точкой*  $O_1$  для стержня  $N_1$  является точка пересечения двух оставшихся стержней  $N_2$  и  $N_3$ , попавших в сечение (точкой  $O_2$  для стержня  $N_2$  будет являться точка пересечения двух оставшихся стержней  $N_1$  и  $N_3$ ;  $O_3$  для стержня  $N_3$  — это точка пересечения двух оставшихся стержней  $N_1$  и  $N_2$ ).

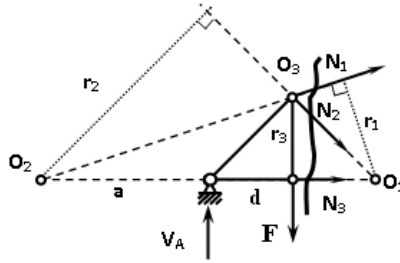


Рис. 1.14

Составляя и решая последовательно уравнения моментов всех внешних и внутренних сил, действующих на отсеченную часть фермы, относительно этих моментных точек [формулы (1.36)–(1.38)], получим усилия в рассеченных стержнях  $N_1, N_2, N_3$ .

$$\Sigma M_{O_1} = 0, \quad V_A \cdot (d + d) + N_1 \cdot r_1 - F \cdot d = 0; \quad (1.36)$$

$$\Sigma M_{O_2} = 0, \quad -V_A \cdot a + N_2 \cdot r_2 + F \cdot (a + d) = 0; \quad (1.37)$$

$$\Sigma M_{O_3} = 0, \quad V_A \cdot d - N_3 \cdot r_3 = 0. \quad (1.38)$$

СМТ удобно пользоваться при расчете ферм, когда можно провести разрез, пересекающий кроме данного стержня (усилие в котором определяется) любое число стержней, сходящихся в одной общей точке, не лежащей на направлении оси данного стержня.

СМТ удобен также и в случаях, когда разрез пересекает более трех стержней, не сходящихся в одной точке, если усилия во всех стержнях, кроме трех, уже известны.

СМТ применим для расчета таких ферм, в которых возможно провести разрезы, пересекающие любое число стержней более трех, если при этом каждый добавочный стержень пересекается дважды.

**Способ вырезания узлов (СВУ).** СВУ применяется при рассмотрении равновесия вырезанных узлов (рис. 1.15). Определение усилий СВУ начинается с вырезания узла, в котором сходятся не более 2-х стержней. При этом условие статического равновесия составляется в виде проекций всех сил и усилий на оси – формулы (1.39), (1.40).

$$\Sigma Y = 0, \quad V_A + N_1 \cdot \sin \alpha = 0; \quad (1.39)$$

$$\Sigma X = 0, \quad N_2 + N_1 \cdot \cos \alpha = 0. \quad (1.40)$$

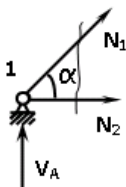


Рис. 1.15

Также можно определить внутренние усилия в стержнях ферм СВУ, вырезая узел, в котором сходится более двух стержней. При этом все усилия в узле, кроме двух, должны быть уже известны.

**Способ проекций (СП).** СП применяется при рассмотрении равновесия части фермы, как и в СМТ, когда два из трех рассеченных стержней параллельны друг другу (т. е. когда для стержня невозможно найти моментную точку) (рис. 1.16). Для стержня  $N_2$  невозможно найти моментную точку (точка находится в бесконечности), так как два параллельных стержня 1 и 3 не пересекаются. Поэтому в данном случае составляется условие равновесия отсеченной части фермы в виде суммы проекций всех сил и усилий, действующих на отсеченную часть, на ось, перпендикулярную к параллельным стержням. В данном случае на ось  $Y$  [формула (1.41)].

$$\Sigma Y = 0, \quad V_A - F_1 - F_2 + N_2 \cdot \sin \alpha = 0. \quad (1.41)$$

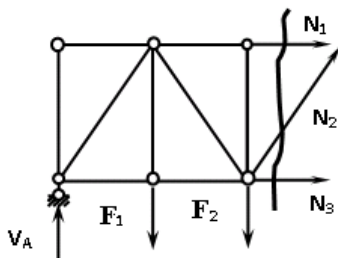
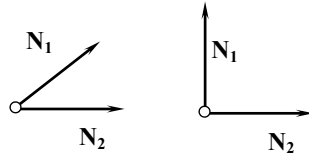


Рис. 1.16

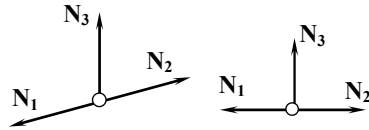
### *Признаки нулевых и ненулевых стержней*

Кроме трех способов определения внутренних усилий в стержнях ферм также используются признаки нулевых и ненулевых стержней для быстрого определения усилий.

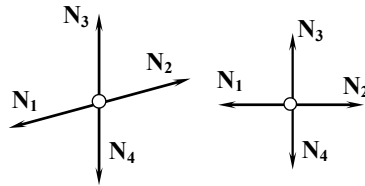
1. Если в узле сходятся два стержня и к этому узлу не приложена внешняя нагрузка, то усилия в этих стержнях равны нулю:  $N_1 = 0, N_2 = 0$ .



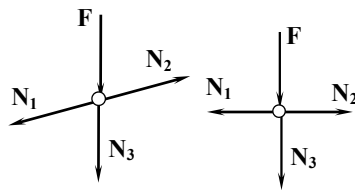
2. Если в узле сходятся три стержня, два из которых лежат на одной прямой, и к этому узлу не приложена внешняя нагрузка, то усилия в этих двух стержнях будут равны по величинам и знакам, а третий равен нулю:  $N_1 = N_2, N_3 = 0$ .



3. Если в узле сходятся четыре стержня, попарно лежащие на одной прямой, и к этому узлу не приложена внешняя нагрузка, то усилия в этих парных стержнях будут равны по величинам и знакам:  $N_1 = N_2, N_3 = N_4$ .



4. Если в узле сходятся три стержня, два из которых лежат на одной прямой, и к этому узлу приложена внешняя нагрузка  $P$ , лежащая на одной прямой с третьим стержнем, то усилия в первых стержнях будут равны по величинам и знакам, а усилие в третьем будет равно силе  $P$  и противоположно по знаку:  $N_1 = N_2, N_3 = -P$ .



### 1.3.6. Последовательность выполнения расчета статически неопределимой фермы методом сил

1. Вычертить в масштабе заданную схему фермы и загрузить ферму в узлах от заданной нагрузки. Пронумеровать узлы.
2. Определить степень статической неопределимости [формулы (1.21) и (1.22)].
3. Выбрать наиболее рациональную основную и эквивалентную системы, назначив лишние неизвестные усилия.

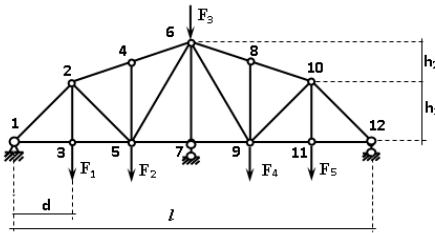
4. Записать канонические уравнения [формула (1.23)].
5. Определить продольные усилия во всех стержнях фермы в единичном состоянии.
6. Определить продольные усилия во всех стержнях фермы в грузовом состоянии.
7. Занести данные в таблицу и определить коэффициенты канонических уравнений.
8. Решить канонические уравнения, найти неизвестные усилия.
9. Определить окончательные продольные усилия во всех стержнях фермы.
10. Выполнить деформационную и статическую проверки.

### **1.3.7. Вопросы для самоконтроля**

1. Дать определение статически неопределимой фермы.
2. Дать определение внешне и внутренне статически неопределимых ферм.
3. Записать формулы для определения степени статической неопределимости для внешне и внутренне статически неопределимых ферм. Пояснить формулы.
4. Дать понятия основной и эквивалентной систем. Привести примеры.
5. Записать канонические уравнения для дважды статически неопределимой фермы. Пояснить физический смысл уравнений.
6. Определение коэффициентов канонических уравнений. Их физический смысл.
7. Каким образом определяются окончательные усилия в стержнях ферм?
8. Виды проверок найденных усилий в стержнях ферм. Их физический смысл.

### 1.3.8. Пример расчета статически неопределимой фермы методом сил

Заданная расчетная схема



Исходные данные

- $F_1 = 3 \text{ кН}$
- $F_2 = 5 \text{ кН}$
- $F_3 = 4 \text{ кН}$
- $F_4 = 5 \text{ кН}$
- $F_5 = 3 \text{ кН}$
- $l = 18 \text{ м}$
- $h_1 = 3 \text{ м}$
- $h_2 = 5 \text{ м}$

1. Определяем степень статической неопределимости.

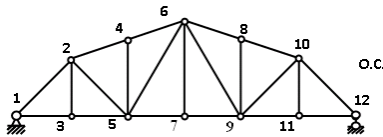
Так как система внешне статически неопределима, то степень статической неопределимости определяем по формуле (1.21):

$$n_{\text{ст}} = C_{\text{оп}} - 3 = 4 - 3 = 1.$$

Таким образом, ферма один раз статически неопределима.

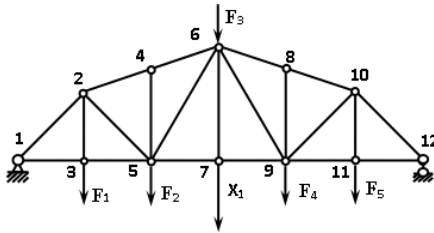
2. Выбираем основную систему.

Так как ферма симметричная, то лучше отбрасывать одну центральную опорную связь, чтобы сохранить геометрическую симметрию системы (рациональный выбор основной системы).



Строим эквивалентную систему.

Прикладываем внешнюю нагрузку и реакцию отброшенной связи (опорного стержня) заменяем неизвестным усилием  $X_1$ .



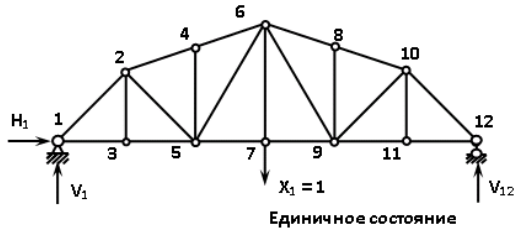


3. Каноническое уравнение метода сил (1.23) примет следующий вид:

$$\delta_{11} X_1 + \Delta_{1F} = 0.$$

4. Определяем внутренние усилия (продольные усилия  $N$ ) во всех стержнях фермы в единичном и грузовом состояниях. Полученные результаты усилий будем заносить в табл. 1.

4.1. Определяем аналитически усилия в каждом стержне в основной системе от действия силы  $X_1 = 1$  (в единичном состоянии). Все расчеты заносим в табл. 1 (столбец 4).



Определяем опорные реакции:

$$\sum X = 0, \quad H_1 = 0,$$

$$\sum M_1 = 0, \quad X_1 \cdot 3d - V_{12} \cdot l = 0, \quad X_1 \cdot 9 - V_{12} \cdot 18 = 0, \quad V_{12} = 0,5 \text{ кН},$$

$$\sum M_{12} = 0, \quad -X_1 \cdot 3d + V_1 \cdot l = 0, \quad -X_1 \cdot 9 + V_1 \cdot 18 = 0, \quad V_1 = 0,5 \text{ кН}.$$

Выполним проверку найденных реакций:

$$\sum Y = 0, \quad V_1 + V_{12} - X_1 = 0, \quad 0 = 0.$$

Реакции найдены верно.

Определяем внутренние усилия во всех стержнях фермы в единичном состоянии, предварительно сделав некоторые вычисления:

$$\cos \alpha = \frac{l_{13}}{l_{12}} = 0,707 \quad \sin \alpha = \frac{l_{23}}{l_{12}} = 0,707$$

(способ вырезания узлов)

$$\sum Y = 0, \quad V_1 + N_{12} \cdot \sin \alpha = 0,$$

$$N_{12} = -V_1 / \sin \alpha$$

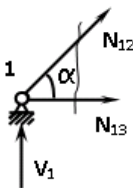
$$N_{12} = -0,5 / 0,707 = -0,707 \text{ кН}$$

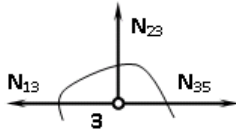
(способ вырезания узлов)

$$\sum X = 0, \quad N_{13} + N_{12} \cdot \cos \alpha = 0$$

$$N_{13} = -N_{12} \cdot \cos \alpha$$

$$N_{13} = 0,707 \cdot 0,707 = 0,5 \text{ кН}$$





(по признакам)

$$N_{35} = N_{13}, N_{35} = 0,5 \text{ кН}$$

$$N_{23} = 0$$

$$\cos \beta = \frac{l_{4K}}{l_{24}} = 0,316 \quad \sin \beta = \frac{l_{2K}}{l_{24}} = 0,949$$

(способ моментной точки)

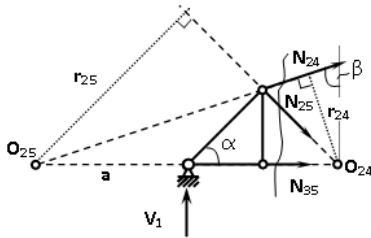
$$\Sigma M_{O_{24}} = 0,$$

$$V_1 \cdot 6 + N_{24} \cdot r_{24} = 0$$

$$N_{24} = -V_1 \cdot 6 / r_{24}$$

$$r_{24} = \sin \beta \cdot l_{45} = 3,795 \text{ м}$$

$$N_{24} = -0,5 \cdot 6 / 3,795 = -0,791 \text{ кН}$$



(способ моментной точки)

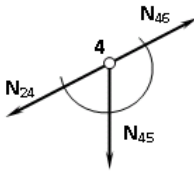
$$\Sigma M_{O_{25}} = 0,$$

$$-V_1 \cdot a + N_{25} \cdot r_{25} = 0$$

$$N_{25} = V_1 \cdot a / r_{25},$$

$$a = 6 \text{ м}, r_{25} = \cos \alpha \cdot (a + 6) = 8,485 \text{ м}$$

$$N_{25} = 0,5 \cdot 6 / 8,485 = 0,354 \text{ кН}$$

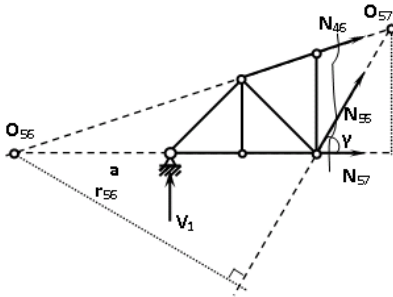


(по признаку 3)

$$N_{46} = N_{24}, N_{46} = -0,791 \text{ кН}$$

$$N_{45} = 0$$

$$\sin \gamma = \frac{l_{67}}{l_{56}} = 0,587$$

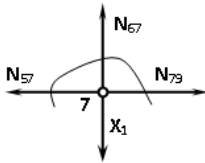


(способ моментной точки)

$$\begin{aligned} \Sigma M_{O_{57}} &= 0, \\ V_1 \cdot 9 - N_{57} \cdot 5 &= 0, \\ N_{57} &= V_1 \cdot 9 / 5, \\ N_{57} &= 0,5 \cdot 9 / 5 = 0,9 \text{ кН} \end{aligned}$$

(способ моментной точки)

$$\begin{aligned} \Sigma M_{O_{56}} &= 0, \\ -V_1 \cdot a - N_{56} \cdot r_{56} &= 0, \\ r_{56} &= \sin \gamma \cdot (a + 6) = 10,29 \text{ м} \\ N_{56} &= -V_1 \cdot a / r_{56} \\ N_{56} &= -0,5 \cdot 6 / 10,29 = -0,292 \text{ кН} \end{aligned}$$

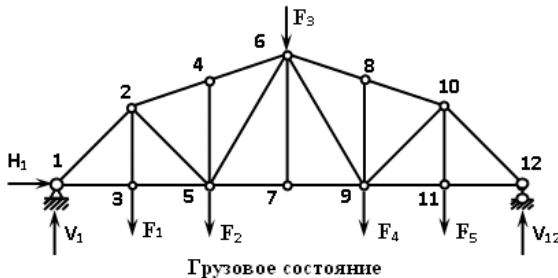


(по признаку 3)

$$\begin{aligned} N_{79} &= N_{57}, N_{79} = 0,9 \text{ кН} \\ N_{67} &= X_1, N_{67} = 1 \text{ кН}. \end{aligned}$$

Так как ферма симметричная и нагрузка также симметричная, то усилия в симметричных стержнях в единичном состоянии будут равны за счет рационального выбора основной системы. Следовательно, рассчитываем только половину фермы, а остальные усилия запишем по аналогии.

4.2. Определяем аналитически усилия в каждом стержне в основной системе от действия заданной внешней нагрузки (в грузовом состоянии). Все расчеты заносим в табл. 1 (столбец 5).



Определяем опорные реакции:

$$\begin{aligned} \Sigma X &= 0, \quad H_1 = 0, \\ \Sigma M_1 &= 0, \quad F_1 \cdot 3 + F_2 \cdot 6 + F_3 \cdot 9 + F_4 \cdot 12 + F_5 \cdot 15 - V_{12} \cdot 18 = 0, \quad V_{12} = 10 \text{ кН}, \\ \Sigma M_{12} &= 0, \quad V_1 \cdot 18 - F_5 \cdot 3 - F_4 \cdot 6 - F_3 \cdot 9 - F_2 \cdot 12 - F_1 \cdot 15 = 0, \quad V_1 = 10 \text{ кН}. \end{aligned}$$

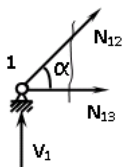
Выполним проверку найденных реакций:

$$\sum Y = 0, \quad V_1 + V_{12} - F_5 - F_4 - F_3 - F_2 - F_1 = 0, \quad 0 = 0.$$

Статическое равновесие сохранено, значит, реакции найдены верно.

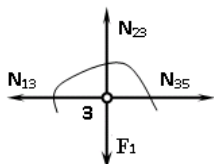
Определяем внутренние усилия во всех стержнях фермы в грузовом состоянии:

$$\cos \alpha = \frac{l_{13}}{l_{12}} = 0,707 \quad \sin \alpha = \frac{l_{23}}{l_{12}} = 0,707$$



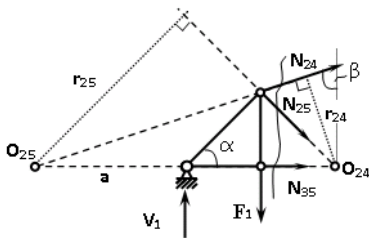
(способ вырезания узлов)  
 $\sum Y = 0, \quad V_1 + N_{12} \cdot \sin \alpha = 0,$   
 $N_{12} = -V_1 / \sin \alpha$   
 $N_{12} = -10 / 0,707 = -14,142 \text{ кН}$

(способ вырезания узлов)  
 $\sum X = 0, \quad N_{13} + N_{12} \cdot \cos \alpha = 0$   
 $N_{13} = -N_{12} \cdot \cos \alpha$   
 $N_{13} = 14,142 \cdot 0,707 = 10 \text{ кН}$



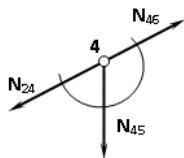
(по признакам)  
 $N_{35} = N_{13}, \quad N_{35} = 10 \text{ кН}$   
 $N_{23} = F_1, \quad N_{23} = 3 \text{ кН}$

$$\cos \beta = \frac{l_{4K}}{l_{24}} = 0,316 \quad \sin \beta = \frac{l_{2K}}{l_{24}} = 0,949$$



(способ моментной точки)  
 $\sum M_{O_{24}} = 0,$   
 $V_1 \cdot 6 + N_{24} \cdot r_{24} - F_1 \cdot 3 = 0$   
 $N_{24} = (F_1 \cdot 3 - V_1 \cdot 6) / r_{24}$   
 $r_{24} = \sin \beta \cdot l_{45} = 3,795 \text{ м}$   
 $N_{24} = -0,5 \cdot 6 / 3,795 = -0,791 \text{ кН}$

(способ моментной точки)  
 $\sum M_{O_{25}} = 0,$   
 $-V_1 \cdot a + N_{25} \cdot r_{25} + F_1 \cdot (a + 3) = 0$   
 $N_{25} = (V_1 \cdot a + F_1 \cdot (a + 3)) / r_{25},$   
 $a = 6 \text{ (м)}, \quad r_{25} = \cos \alpha \cdot (a + 6) = 8,485 \text{ м}$   
 $N_{25} = (10 \cdot 6 - 3 \cdot 9) / 8,485 = 3,889 \text{ кН}$

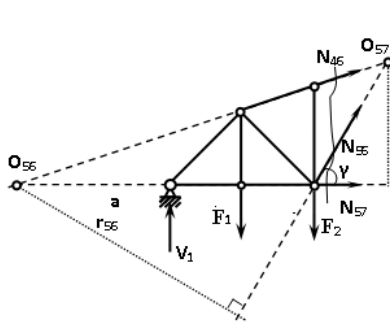


$$\sin \gamma = \frac{l_{67}}{l_{56}} = 0,587$$

(по признаку 3)

$$N_{46} = N_{24}, N_{46} = -13,44 \text{ кН}$$

$$N_{45} = 0$$



(способ моментной точки)

$$\Sigma M_{O57} = 0,$$

$$V_1 \cdot 9 - F_1 \cdot 6 - F_2 \cdot 3 - N_{57} \cdot 5 = 0,$$

$$N_{57} = (V_1 \cdot 9 - F_1 \cdot 6 - F_2 \cdot 3)/5,$$

$$N_{57} = (10 \cdot 9 - 3 \cdot 6 - 5 \cdot 3)/5 = 11,4 \text{ кН}$$

(способ моментной точки)

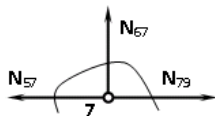
$$\Sigma M_{O56} = 0,$$

$$F_1 \cdot (3 + a) - V_1 \cdot a - F_2 \cdot (6 + a) - N_{56} \cdot r_{56} = 0,$$

$$r_{56} = \sin \gamma \cdot (a + 6) = 10,29 \text{ м}$$

$$N_{56} = (P_1 \cdot (3 + a) - V_1 \cdot a + P_2 \cdot (6 + a))/r_{56}$$

$$N_{56} = (3 \cdot 9 - 10 \cdot 6 + 5 \cdot 12)/10,29 = 2,624 \text{ кН}$$



(по признаку 3)

$$N_{79} = N_{57}, N_{79} = 11,4 \text{ кН}$$

$$N_{67} = 0.$$

Так как ферма симметричная и нагрузка также симметричная, то усилия в симметричных стержнях будут равны. Следовательно, рассчитываем только половину фермы, а остальные усилия запишем по аналогии.

5. Исходя из найденных усилий, рассчитываем таблицу.

Находим коэффициенты канонического уравнения [формулы (1.25), (1.26)]:

$$\delta_{ij} = \sum_0^l \int \frac{\bar{N}_i \cdot \bar{N}_j \cdot dx}{EF} = \sum \frac{\bar{N}_i \cdot \bar{N}_j \cdot l_i}{EF}$$

(суммируем все значения в столбце 4);

$$\Delta_{iF} = \sum_0^l \int \frac{\bar{N}_i \cdot N_F \cdot dx}{EF} = \sum \frac{\bar{N}_i \cdot N_F \cdot l_i}{EF}$$

(суммируем все значения в столбце 5).

6. Из канонического уравнения находим

$$X_1 = -\Delta_{1F}/\delta_{11} = -343,603/27,073 = -12,692 \text{ кН.}$$

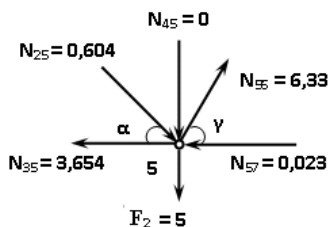
7. Окончательные усилия в каждом стержне определим по формуле (1.28).

Результаты также занесем в табл. 1 (столбцы 8, 9):

$$N_{ок} = \bar{N}_1 \cdot X_1 + N_F.$$

8. Для найденных значений внутренних усилий в стержнях фермы выполним проверки:

а) статическая проверка – любой вырезанный узел должен находиться в состоянии статического равновесия. Для этого вырежем узел, в котором сходится наибольшее количество стержней – узел 5. К данному узлу приложим заданную внешнюю нагрузку и окончательные усилия в рассеченных стержнях с учетом их знаков: усилие направлено в узел, если знак усилия «-», и от узла, если знак усилия «+».



$$\begin{aligned} \Sigma X = 0, & \quad -N_{35} - N_{57} - N_{25} \cdot \cos \alpha + N_{56} \cdot \cos \gamma = 0, \\ & \quad -3,654 - 0,023 + 0,604 \cdot 0,707 + 6,33 \cdot 0,515 = 0,009 \approx 0 \\ \Sigma Y = 0, & \quad -F_2 - N_{25} \cdot \sin \alpha + N_{56} \cdot \sin \gamma = 0, \\ & \quad -5 - 0,604 \cdot 0,707 + 6,33 \cdot 0,587 = 0,0017 \approx 0. \end{aligned}$$

Статическая проверка выполнена;

б) деформационная проверка по формуле (1.30):

$$\Delta_{1ок} = \sum_0^l \int \frac{\bar{N}_1 \cdot N_{ок} \cdot dx}{EF} = \sum \frac{\bar{N}_1 \cdot N_{ок} \cdot l_i}{EF} = 0.$$

Деформационную проверку выполним непосредственно в табл. 1, просуммировав столбец 10.

Проверки выполнены, значит, ферма рассчитана верно.

## Расчет фермы

| № стержня | $\ell_i$<br>длина<br>стержня | EF | $N_1$  | $N_F$   | $N_1 N_1 \ell_i$ | $N_1 N_F \ell_i$ | $N_1 X_1$ | $N_{ок}$ | $N_1 N_{ок} \ell_i$ |
|-----------|------------------------------|----|--------|---------|------------------|------------------|-----------|----------|---------------------|
| 1         | 2                            | 3  | 4      | 5       | 6                | 7                | 8         | 9        | 10                  |
| 1 - 2     | 4,243                        | EF | -0,707 | -14,142 | 2,121            | 42,423           | 8,973     | -5,169   | 15,505              |
| 1 - 3     | 3,000                        | EF | 0,500  | 10,000  | 0,750            | 15,000           | -6,346    | 3,654    | 5,481               |
| 2 - 4     | 3,162                        | EF | -0,791 | -13,440 | 1,978            | 33,615           | 10,039    | -3,401   | 8,505               |
| 2 - 3     | 3,000                        | EF | 0,000  | 3,000   | 0,000            | 0,000            | 0,000     | 3,000    | 0,000               |
| 2 - 5     | 4,243                        | EF | 0,354  | 3,889   | 0,532            | 5,841            | -4,493    | -0,604   | -0,907              |
| 3 - 5     | 3,000                        | EF | 0,500  | 10,000  | 0,750            | 15,000           | -6,346    | 3,654    | 5,481               |
| 4 - 6     | 3,162                        | EF | -0,791 | -13,440 | 1,978            | 33,615           | 10,039    | -3,401   | 8,505               |
| 4 - 5     | 4,000                        | EF | 0,000  | 0,000   | 0,000            | 0,000            | 0,000     | 0,000    | 0,000               |
| 5 - 6     | 5,831                        | EF | -0,292 | 2,624   | 0,497            | -4,468           | 3,706     | 6,330    | -10,778             |
| 5 - 7     | 3,000                        | EF | 0,900  | 11,400  | 2,430            | 30,780           | -11,423   | -0,023   | -0,062              |
| 6 - 7     | 5,000                        | EF | 1,000  | 0,000   | 5,000            | 0,000            | -12,692   | -12,692  | -63,461             |
| 7 - 9     | 3,000                        | EF | 0,900  | 11,400  | 2,430            | 30,780           | -11,423   | -0,023   | -0,062              |
| 6 - 9     | 5,831                        | EF | -0,292 | 2,624   | 0,497            | -4,468           | 3,706     | 6,330    | -10,778             |
| 8 - 9     | 4,000                        | EF | 0,000  | 0,000   | 0,000            | 0,000            | 0,000     | 0,000    | 0,000               |
| 6 - 8     | 3,162                        | EF | -0,791 | -13,440 | 1,978            | 33,615           | 10,039    | -3,401   | 8,505               |
| 9 - 11    | 3,000                        | EF | 0,500  | 10,000  | 0,750            | 15,000           | -6,346    | 3,654    | 5,481               |
| 9 - 10    | 4,243                        | EF | 0,354  | 3,889   | 0,532            | 5,841            | -4,493    | -0,604   | -0,907              |
| 10 - 11   | 3,000                        | EF | 0,000  | 3,000   | 0,000            | 0,000            | 0,000     | 3,000    | 0,000               |
| 8 - 10    | 3,162                        | EF | -0,791 | -13,440 | 1,978            | 33,615           | 10,039    | -3,401   | 8,505               |
| 11 - 12   | 3,000                        | EF | 0,500  | 10,000  | 0,750            | 15,000           | -6,346    | 3,654    | 5,481               |
| 10 - 12   | 4,243                        | EF | -0,707 | -14,142 | 2,121            | 42,423           | 8,973     | -5,169   | 15,505              |
|           |                              |    |        |         |                  |                  |           |          |                     |
|           |                              |    |        |         | $\delta_{11}EF$  | $\Delta_{1P}EF$  | $X_1$     |          |                     |
|           |                              |    |        |         | 27,073           | 343,615          | -12,692   |          | 0,000               |
|           |                              |    |        |         |                  |                  |           |          |                     |

## 1.4. Расчет статически неопределимых балок

### 1.4.1. Уравнения трех моментов. Основная и эквивалентная системы

Статически неопределимые балки называют неразрезными балками. Неразрезной балкой называется брус, перекрывающий ряд пролетов и неразрывно связанный с опорами. Расчет неразрезных балок на шарнирно неподвижных опорах на действие вертикальной нагрузки ничем не отличается от расчета такой же балки на одной неподвижной и остальных подвижных опорах. Неразрезные балки бывают только внешне статически неопределимыми. Неразрезная балка при отсутствии промежуточных шарнирных включений столько раз статически неопределима, сколько имеет промежуточ-

ных опор (при условии шарнирного опирания концов). Степень статической неопределенности определяется по формуле (1.42):

$$n_{\text{ст}} = C_{\text{оп}} - 3. \quad (1.42)$$

Расчет неразрезной балки можно выполнить по общим правилам расчета статически неопределенных систем, применив метод сил. Расчет неразрезных балок производится с помощью уравнений 3-х моментов. Уравнения 3-х моментов — это преобразованные канонические уравнения метода сил для неразрезной балки. Преобразование уравнений происходит за счет выбора основной системы метода сил. В качестве основной системы берется система разрезных балок, полученная из заданной системы включением шарниров в опорные сечения (рис. 1.17, б). За неизвестные принимаются опорные изгибающие моменты  $M_n$  (рис. 1.17, в). Число неизвестных усилий при этом равно числу промежуточных опор (при условии шарнирного опирания по концам балки). Таким образом, для расчета неразрезной балки необходимо составить столько уравнений трех моментов, сколько промежуточных опор (за исключением балок с жестким защемлением).

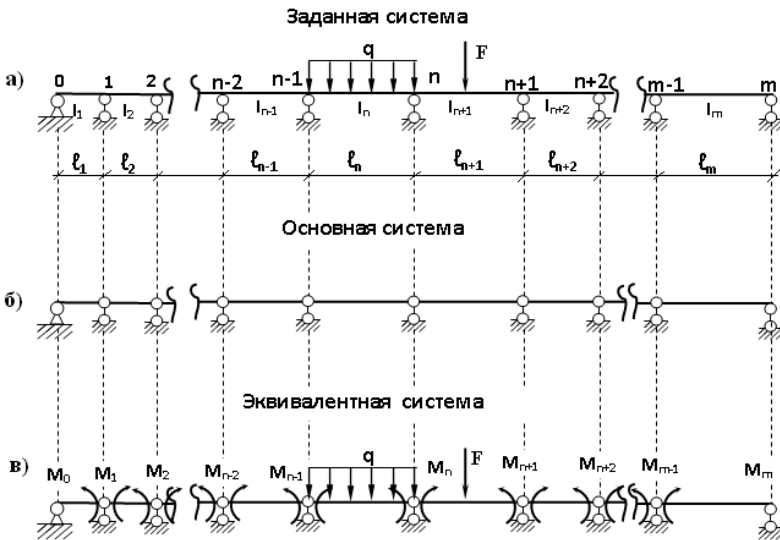


Рис. 1.17



Преимущество выбранной основной системы заключается в том, что эпюры моментов от единичных усилий распространяются в ней только на два соседних пролета (рис. 1.17, *в*), и, стало быть, большее число единичных перемещений (единичных побочных коэффициентов) обращается в нуль.

Таким образом, типовое  $n$ -е каноническое уравнение метода сил с учетом найденных единичных коэффициентов и грузовых членов примет вид формулы (1.43) или (1.44):

$$\begin{aligned} M_{n-1} \cdot \ell'_n + 2M_n \cdot (\ell'_n + \ell'_{n+1}) + M_{n+1} \cdot \ell'_{n+1} = \\ = -6B_n^\Phi \cdot \frac{\ell'_n}{\ell_n} - 6A_{n+1}^\Phi \cdot \frac{\ell'_{n+1}}{\ell_{n+1}}, \end{aligned} \quad (1.43)$$

$$\begin{aligned} M_{n-1} \cdot \ell'_n + 2M_n \cdot (\ell'_n + \ell'_{n+1}) + M_{n+1} \cdot \ell'_{n+1} = \\ = -6B_n^\Phi \cdot \frac{I_c}{I_n} - 6A_{n+1}^\Phi \cdot \frac{I_c}{I_{n+1}}, \end{aligned} \quad (1.44)$$

где  $\ell'_n, \ell'_{n+1}$  — приведенные длины пролетов, которые определяются по формулам (1.45), (1.46):

$$\ell'_n = \ell_n \frac{I_c}{I_n}, \quad (1.45)$$

$$\ell'_{n+1} = \ell_{n+1} \frac{I_c}{I_{n+1}}, \quad (1.46)$$

где  $I_c$  — произвольный момент инерции;  $B_n^\Phi$  — правая опорная реакция пролета  $\ell_n$  от фиктивной нагрузки (правая фиктивная реакция);  $A_{n+1}^\Phi$  — левая опорная реакция пролета  $\ell_{n+1}$  от фиктивной нагрузки (левая фиктивная реакция).

Величины фиктивных реакций определяются по табл. А.2 (прил. А) в зависимости от внешней нагрузки, приложенной в пролете.

Полученное уравнение (1.44) — это *уравнение трех моментов в общем виде*. Уравнение трех моментов выражает отсутствие в упругой линии угла перелома на  $n$ -й опоре, т. е. представляет собой условие неразрезности балки на  $n$ -й промежуточной опоре.

Если неразрезная балка имеет постоянное сечение, т. е.

$$I_1 = I_2 = \dots = I_n = I_{n+1} = \dots = I_c, \text{ и}$$

$$\ell'_1 = \ell_1, \ell'_2 = \ell_2, \dots, \ell'_n = \ell_n, \ell'_{n+1} = \ell_{n+1} \text{ и т. д.,}$$

то уравнение трех моментов примет следующий вид:

$$M_{n-1} \cdot \ell_n + 2M_n \cdot (\ell_n + \ell_{n+1}) + M_{n+1} \cdot \ell_{n+1} = -6B_n^\Phi - 6A_{n+1}^\Phi. \quad (1.47)$$

Если конец неразрезной балки жестко зашечлен, то для применения уравнения трех моментов вводится дополнительный фиктивный пролет:  $\ell_0 \rightarrow 0$ ,  $EI_0 = \infty$ . То есть в основной системе жесткие заделки на крайних опорах условно заменяются дополнительным пролетом бесконечно малой длины и бесконечно большой жесткости (рис. 1.18, б). Если зашечления имеются с двух концов балки, то дополнительные фиктивные пролеты добавляются с двух концов.

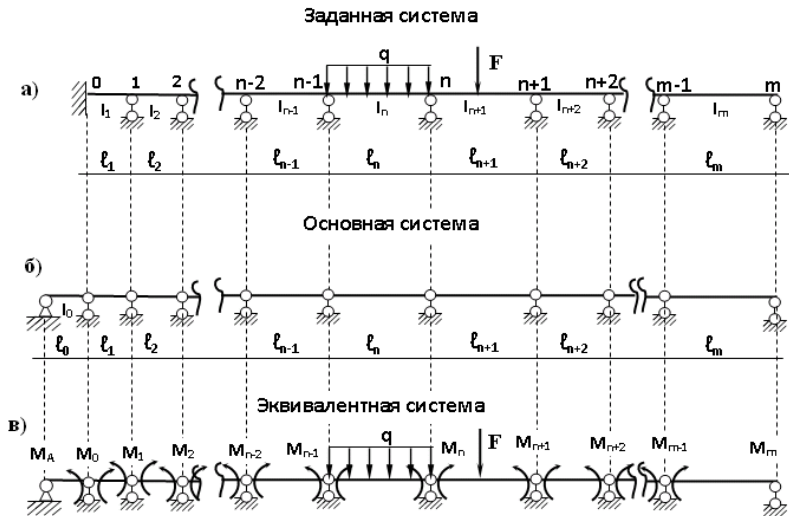


Рис. 1.18

Если у неразрезной балки есть консольные участки, то при построении основной системы метода сил эти участки отбрасываются (рис. 1.19, б) и на эквивалентной системе действие этих участков на балку показывается в виде уже известных моментов и поперечных сил  $M$  и  $Q$  (рис. 1.19, в).

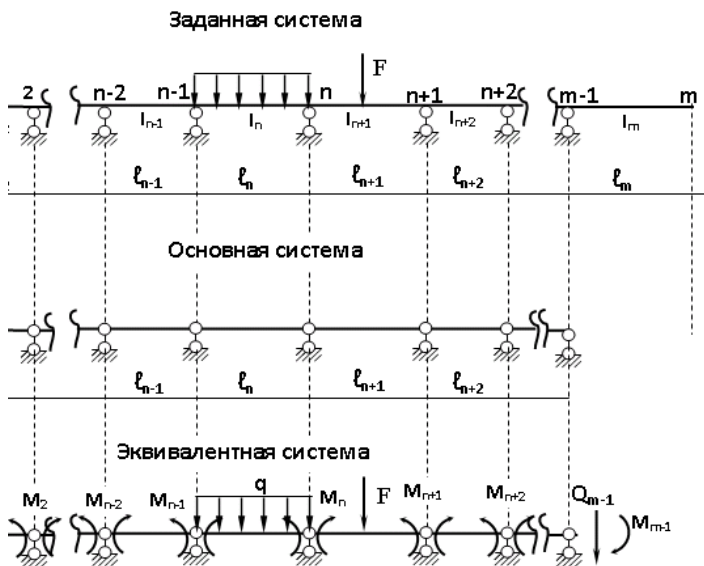


Рис. 1.19

Итак, объединяя все вышесказанное, делаем вывод, что для построения основной системы необходимо:

- 1) отбросить заданную внешнюю нагрузку;
- 2) отбросить консольные участки, если они имеются;
- 3) заменить жесткие заземляющие связи, если они имеются, дополнительными фиктивными пролетами бесконечно малой длины и бесконечно большой жесткости;
- 4) врезать в опорные сечения шарниры (удалить лишние связи).

Для построения эквивалентной системы необходимо приложить к основной системе:

- 1) реакции отброшенных связей, т. е. опорные моменты в опорные сечения в положительном направлении;
- 2) взамен отброшенных консольных участков уже известные поперечные силы и изгибающие моменты с учетом полученных знаков;
- 3) заданную внешнюю нагрузку.

#### 1.4.2. Определение усилий в сечениях неразрезной балки и построение эпюр внутренних усилий

Решая совместно канонические уравнения (уравнения 3-х моментов), находят все неизвестные опорные моменты  $M_1, M_2, \dots, M_n$ .

При расчете неразрезной балки на неподвижную нагрузку конечной целью является построение эпюр изгибающих моментов и поперечных сил.

Для получения эпюр моментов первоначально над опорами неразрезной балки откладывают в виде отрезков опорные моменты  $M_i$  и концы отложенных ординат соединяют прямыми линиями (т. е. строится эпюра изгибающих моментов  $M_{оп}$  от опорных моментов). Затем в однопролетных шарнирно опертых балках (см. основную систему) строятся эпюры моментов от заданной внешней нагрузки  $M_F^0$  для каждого пролета в отдельности. Сложив последние эпюры с соответствующими участками эпюры опорных моментов, получим окончательную эпюру изгибающих моментов  $M_{ок}$  в неразрезной балке [формула (1.48)]:

$$M_{ок} = M_{оп} + M_F^0. \quad (1.48)$$

Аналогично строится эпюра поперечных сил по формуле (1.49):

$$Q_{ок} = Q_{оп} + Q_F^0. \quad (1.49)$$

Возможен и другой способ построения эпюры поперечных сил  $Q_{ок}$ . Этот способ был рассмотрен при расчете статически неопределимых рам методом сил (на основе построенной эпюры изгибающих моментов отдельно по участкам, пролетам).

Изгибающий момент и поперечную силу в произвольном сечении неразрезной балки определяют по формулам (1.50), (1.51):

$$M_x = M_{Fx}^0 + M_n \cdot \frac{x}{\ell_n} + M_{n-1} \cdot \frac{\ell_n - x}{\ell_n}; \quad (1.50)$$

$$Q_x = Q_{Fx}^0 + \frac{M_n}{\ell_n} - \frac{M_{n-1}}{\ell_n}. \quad (1.51)$$

$M_{Fx}^0$  и  $Q_{Fx}^0$  – соответственно изгибающий момент и поперечная сила в рассматриваемом сечении  $x$  однопролетной шарнирно опертой балки с пролетом  $\ell_n$  от заданной внешней нагрузки.

Опорная реакция в неразрезной балке  $R_n$  может быть определена как разность поперечных сил слева и справа от опоры  $n$  по формуле (1.52):

$$R_n = Q_n^{\text{прав}} - Q_n^{\text{лев}}, \quad (1.52)$$

где  $Q_n^{\text{прав}}$  – поперечная сила, возникающая на  $n$ -й опоре в пролете  $\ell_{n+1}$ ;  $Q_n^{\text{лев}}$  – поперечная сила, возникающая на  $n$ -й опоре в пролете  $\ell_n$  (рис. 1.20).

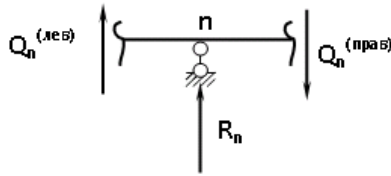


Рис. 1.20

### 1.4.3. Проверки

Важнейшим элементом расчета балок являются проверки на каждом этапе расчета. В балках, в отличие от других систем, выполняется только статическая проверка всей системы в целом.

При статической проверке балки в целом проверяется рассчитанная балка с учетом найденных опорных реакций и заданной внешней нагрузки по формулам (1.53), (1.54):

$$\Sigma M_K = 0, \quad (1.53)$$

$$\Sigma Y = 0. \quad (1.54)$$

Точку  $K$  лучше всего подбирать на балке таким образом, чтобы через нее проходило как можно меньше найденных реакций.

### 1.4.4. Последовательность выполнения расчета неразрезной балки уравнениями трех моментов

1. Определить степень статической неопределенности [формула (1.42)].
2. Выбрать основную и эквивалентную системы.
3. Составить уравнения трех моментов [формулы (1.43), (1.44) или (1.47)].
4. Решить систему уравнений. Найти неизвестные опорные моменты.
5. Построить окончательную эпюру изгибающих моментов [формулы (1.48), (1.50)].

6. Построить окончательную эпюру поперечных сил [формулы (1.49), (1.51)].
7. Определить опорные реакции балки [формула (1.52)].
8. Провести статическую проверку рамы в целом [формулы (1.53), (1.54)].

#### 1.4.5. Вопросы для самоконтроля

1. Дать определение неразрезной балки.
2. Определение степени статической неопределимости балки.
3. Выбор основной системы и построение эквивалентной системы.
4. Записать уравнения 3-х моментов в общем виде, а также для балок постоянного сечения. Физический смысл этих уравнений.
5. Дать понятие фиктивной опорной реакции. Примеры определения фиктивных опорных реакций от различных типов нагружения.
6. Определение изгибающих моментов и поперечных сил в произвольном сечении неразрезной балки.
7. Порядок построения окончательной эпюры изгибающих моментов.
8. Порядок построения окончательной эпюры поперечных сил.
9. Порядок определения опорных реакций в неразрезной балке.
10. Расчет неразрезной балки с зашпеленным концом при помощи уравнения 3-х моментов (отличия расчета).
11. Расчет неразрезной балки с консольными участками при помощи уравнения 3-х моментов (отличия расчета).
12. Порядок расчета неразрезной балки.

#### 1.4.6. Пример расчета неразрезной балки уравнениями трех моментов



Исходные данные:

$$q_1 = 2 \text{ кН/м} \quad q_2 = 3 \text{ кН/м} \quad F = 5 \text{ кН}$$

$$\ell_1 = 6 \text{ м} \quad \ell_2 = 8 \text{ м} \quad \ell_3 = 2 \text{ м}$$

$$I_1 = 2I \quad I_2 = I \quad I_3 = 2I$$

1. Определяем степень статической неопределимости балки [формула (1.42)]:

$$n_{\text{ст}} = C_{\text{оп}} - 3 = (3 + 1 + 1) - 3 = 2.$$

Таким образом, балка дважды статически неопределима. Необходимо отбросить две лишние связи и составить два уравнения (уравнения 3-х моментов).

2. Выбираем основную систему и строим эквивалентную.

На основной системе:

- 1) отбрасываем внешнюю нагрузку;
- 2) врезаем шарниры в опорные сечения;
- 3) отбрасываем консольный участок;
- 4) заменяем жесткую заделку дополнительным пролетом  $\ell_0$  бесконечно малой длины и бесконечно большой жесткости.

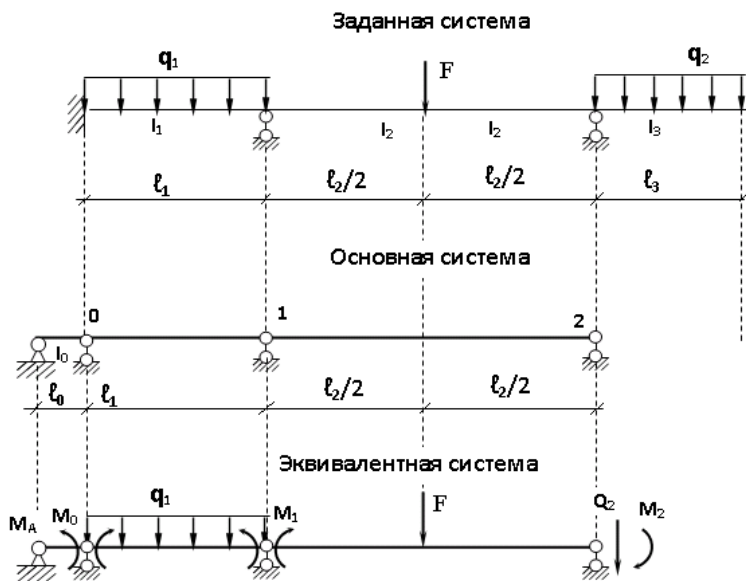
На эквивалентной системе показываем:

- 1) внешнюю нагрузку;
- 2) реакции отброшенных связей (опорные моменты  $M_0$  и  $M_1$ );
- 3) действие консольного участка в виде известного момента  $M_2$  и поперечной силы  $Q_2$ .

Момент  $M_2$  определяется как момент от консольного участка на балку (аналогично определяется и  $Q_2$ ), то есть.

$$M_2 = -q_2 \cdot \ell_3 \cdot \frac{\ell_3}{2} = -3 \cdot 2 \cdot 1 = -6 \text{ кН} \cdot \text{м},$$

$$Q_2 = -q_2 \cdot \ell_3 = -3 \cdot 2 = -6 \text{ кН}.$$



3. Составляем уравнения трех моментов.

Из выбранной основной системы видно, что неизвестными усилиями являются моменты  $M_0$  и  $M_1$ . Момент  $M_A$  равен нулю, так как это момент в крайней шарнирной опоре (момент в шарнире), момент  $M_2$  уже найден.

Так как неизвестными моментами  $M_0, M_1$  являются моменты на 0-й и 1-й опорах соответственно, то уравнения трех моментов составляются для  $n = 0$  и  $n = 1$ . Поскольку балка имеет непостоянное сечение  $I_1 \neq I_2 \neq I_3$ , то будем использовать формулу (1.44).

$$n = 0 \quad M_A \cdot \ell'_0 + 2M_0 \cdot (\ell'_0 + \ell'_1) + M_1 \cdot \ell'_1 = -6B_0^\Phi \cdot \frac{I_c}{I_0} - 6A_1^\Phi \cdot \frac{I_c}{I_1};$$

$$n = 1 \quad M_0 \cdot \ell'_{10} + 2M_1 \cdot (\ell'_1 + \ell'_2) + M_2 \cdot \ell'_2 = -6B_1^\Phi \cdot \frac{I_c}{I_1} - 6A_2^\Phi \cdot \frac{I_c}{I_2}.$$

Перед тем как решать уравнения, сделаем предварительные вычисления всех необходимых величин для этих уравнений:

– примем  $I_c = I_2 = I$  (можно выбрать момент инерции любого другого пролета на балке);

– приведенные длины пролетов [формулы (1.45), (1.46)]:



$$\ell'_0 = \ell_0 \frac{I_c}{I_0} = 0 \cdot \frac{I}{\infty} = 0,$$

$$\ell'_1 = \ell_1 \frac{I_c}{I_1} = 6 \cdot \frac{I}{2I} = 3,$$

$$\ell'_2 = \ell_2 \frac{I_c}{I_2} = 8 \cdot \frac{I}{I} = 8;$$

– фиктивные реакции в соответствии с приложенной нагрузкой в пролете (прил. А, табл. А.2)

1-й пролет – нет нагрузки:

$$A_0^\Phi = B_0^\Phi = 0;$$

2-й пролет – приложена симметрично равномерно распределенная нагрузка  $q_1$ :

$$A_1^\Phi = B_1^\Phi = q_1 \cdot \frac{\ell_1^3}{24} = 2 \cdot \frac{216}{24} = 18 \text{ кНм}^2;$$

3-й пролет – приложена симметрично сосредоточенная сила:

$$A_2^\Phi = B_2^\Phi = F \cdot \frac{\ell_2^2}{16} = 5 \cdot \frac{64}{16} = 20 \text{ кНм}^2.$$

Подставив полученные вычисления в уравнения, получаем следующие уравнения:

$$0 \cdot 0 + 2M_0 \cdot (0 + 3) + M_1 \cdot 3 = -6 \cdot 0 \cdot \frac{I}{\infty} - 6 \cdot 18 \cdot \frac{I}{2I};$$

$$M_0 \cdot 3 + 2M_1 \cdot (3 + 8) - 6 \cdot 8 = -6 \cdot 18 \cdot \frac{I}{2I} - 6 \cdot 20 \cdot \frac{I}{I}.$$

Преобразуя уравнения, получим следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} 6M_0 + 3M_1 = -54 \\ 3M_0 + 22M_1 = -126. \end{cases}$$

4. Решая данную систему уравнений, получаем:

$$M_0 = -6,586 \text{ кН/м},$$

$$M_1 = -4,829 \text{ кН/м}.$$

5. Строим окончательную эпюру изгибающих моментов.

На основании полученных моментов строим эпюру  $M_{\text{оп}}$ :

1) откладываем над 0-й опорой отрезок равный 6,586 (вверх, так как на эпюру изгибающих моментов минус откладывается вверх);

- 2) откладываем над 1-й опорой отрезок равный 4,829 (вверх);
- 3) откладываем над 2-й опорой отрезок равный 6 (вверх);
- 4) соединяем полученные отрезки прямыми линиями.

Для построения эпюры  $M_F^0$  разбиваем балку на отдельные однопролетные балки и для каждой в отдельности строим эпюру изгибающих моментов, используя табл. А.3 (прил. А).

Для получения окончательной эпюры изгибающих моментов  $M_{ок}$  суммируем полученные эпюры по соответствующим участкам: для 0-й опоры:

$$M_{ок(0)} = M_{оп(0)} + M_{F(0)}^0 = -6,586 + 0 = -6,586 \text{ кНм};$$

среднее значение на 1 участке:

$$M_{ок(0ср)} = M_{оп(0ср)} + M_{F(0ср)}^0 = -5,707 + 9 = -3,293 \text{ кНм};$$

для 1-й опоры:

$$M_{ок(1)} = M_{оп(1)} + M_{F(1)}^0 = -4,829 + 0 = -4,829 \text{ кНм};$$

среднее значение на 2 участке:

$$M_{ок(1ср)} = M_{оп(1ср)} + M_{F(1ср)}^0 = -5,414 + 10 = 4,586 \text{ кНм};$$

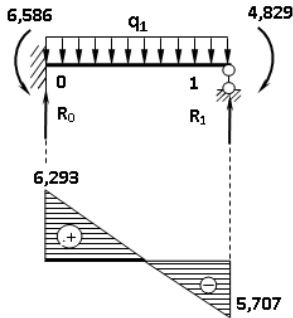
для 2-й опоры:

$$M_{ок(2)} = M_{оп(2)} + M_{F(2)}^0 = -6 + 0 = -6 \text{ кНм}.$$

Полученные ординаты отложим на окончательной эпюре изгибающих моментов, соединяя полученные ординаты линиями, соответствующими приложенной нагрузке.

6. Строим окончательную эпюру поперечных сил.

Для построения эпюры поперечных сил разобьем всю балку на отдельные однопролетные балки (балки на двух шарнирных опорах или балки с одним жестким защемлением) и для каждой балки в отдельности построим эпюру поперечных сил.



$$M_0 = 0,$$

$$-6,586 + 4,829 + q_1 \cdot 6 \cdot 3 - R_1 \cdot 6 = 0,$$

$$R_1 = (-6,586 + 4,829 + 36) / 6,$$

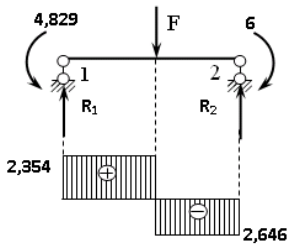
$$R_1 = 5,707 \text{ кН}$$

$$M_1 = 0,$$

$$-6,586 + 4,829 - q_1 \cdot 6 \cdot 3 + R_0 \cdot 6 = 0,$$

$$R_0 = (6,586 - 4,829 + 36) / 6,$$

$$R_0 = 6,293 \text{ кН}$$



$$M_1 = 0,$$

$$6 - 4,829 + F \cdot 4 - R_2 \cdot 8 = 0,$$

$$R_2 = (6 - 4,829 + 20) / 8,$$

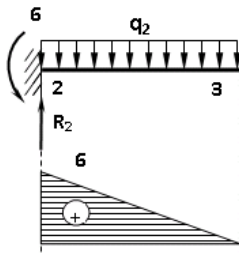
$$R_2 = 2,646 \text{ кН}$$

$$M_2 = 0,$$

$$6 - 4,829 - F \cdot 4 + R_1 \cdot 8 = 0,$$

$$R_1 = (-6 + 4,829 + 20) / 8,$$

$$R_1 = 2,354 \text{ кН}$$



$$M_3 = 0,$$

$$-6 - q_2 \cdot 2 \cdot 1 - R_2 \cdot 2 = 0,$$

$$R_2 = (6 + 6) / 2,$$

$$R_2 = 6 \text{ (т)}$$

7. Определяем опорные реакции по формуле (1.52):

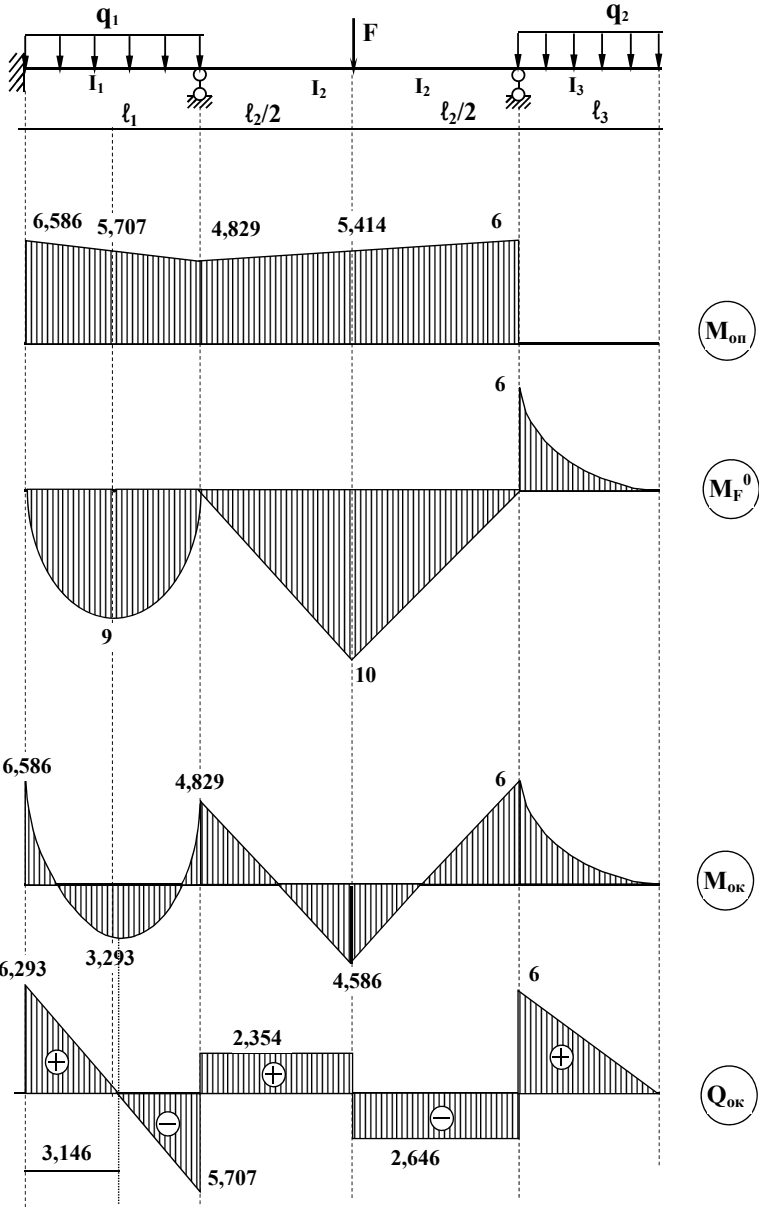
$$R_0 = Q_0^{(\text{прав})} - Q_0^{(\text{лев})} = 6,293 - 0 = 6,293 \text{ кН},$$

$$R_1 = Q_1^{(\text{прав})} - Q_1^{(\text{лев})} = 2,354 - (-5,707) = 8,061 \text{ кН},$$

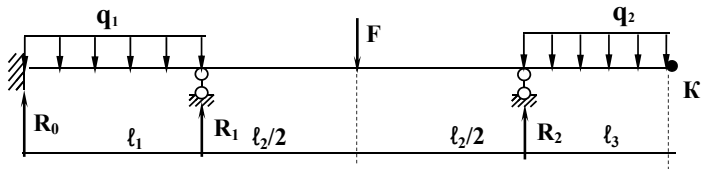
$$R_2 = Q_2^{(\text{прав})} - Q_2^{(\text{лев})} = 6 - (-2,646) = 8,646 \text{ кН}.$$

Так как все значения получились со знаком плюс, значит, все реакции направлены вверх.

Заданная система



8. Проверим статическое равновесие балки в целом [формулы (1.53), (1.54)]:



$$\Sigma Y = 0$$

$$R_0 + R_1 - q_1 \cdot l_1 - F + R_2 - q_1 \cdot l_3 = 0$$

$$6,293 + 8,061 - 2 \cdot 6 - 5 + 8,646 - 3 \cdot 2 = 0,$$

$$0 = 0$$

$$\Sigma M_K = 0$$

$$-M_0 + R_0 \cdot (\ell_1 + \ell_2 + \ell_3) + R_1 \cdot (\ell_2 + \ell_3) - q_1 \cdot \ell_1 \cdot \left( \frac{\ell_1}{2} + \ell_2 + \ell_3 \right) - F \cdot \frac{\ell_2}{2} + \\ + \ell_3) + R_2 \cdot \ell_3 - q_1 \cdot \frac{\ell_3^2}{2} = 0$$

$$-6,586 + 6,293 \cdot 16 + 8,061 \cdot 10 - 2 \cdot 6 \cdot 13 - 5 \cdot 6 + 8,646 \cdot 2 - 3 \cdot 2 = 0$$

$$0 = 0.$$

Выполнены все проверки, следовательно, балка рассчитана верно.

## 2. РАСЧЕТ КИНЕМАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМЫХ СИСТЕМ МЕТОДОМ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ

### 2.1. Расчет кинематически неопределимой плоской рамы методом перемещения на действие внешней нагрузки

#### 2.1.1. Кинематическая неопределимость систем

Кинематически (статически) неопределимыми системами называются системы для определения усилий, в элементах которых кроме уравнений статического равновесия необходимы дополнительные уравнения – уравнения деформации.

Распределение усилий в таких системах зависит не только от внешних сил, но и от соотношений между поперечными размерами отдельных элементов. Если элементы системы изготовлены из различных материалов, то распределение усилий зависит также от модулей упругости этих материалов. Поэтому для определения усилий в элементах таких систем необходимо задавать их жесткости. Смещение опор, температурные воздействия и неточность сборки конструкции, так же как и в статически неопределимых системах, обычно вызывают в таких системах дополнительные усилия.

За неизвестные при расчете статически неопределимых систем методом перемещений принимаются перемещения (углы поворотов узлов и линейные перемещения узлов), а потом устанавливается соответствующее им распределение усилий. В дальнейшем будем называть такие системы *кинематически неопределимыми системами*.

При расчете кинематически неопределимой системы методом перемещений первоначально необходимо установить общее число неизвестных величин, подлежащих определению. Общее число неизвестных называется *степенью кинематической неопределимости системы*.

*Степень кинематической неопределимости системы* равна сумме чисел неизвестных углов поворотов узлов  $n_y$  и неизвестных линейных перемещений узлов  $n_d$ , то есть

$$n_k = n_y + n_d. \quad (2.1)$$

Число неизвестных углов поворота равно числу «жестких» узлов, а поэтому определение  $n_y$  сводится к простому подсчету числа «жестких» узлов системы. При подсчете числа «жестких» узлов не включаются узлы, угловые перемещения которых заданы, например жесткие закрепления, связывающие системы с «землей» (жесткие опоры).

«Жестким» считается такой узел, в котором концы по крайней мере двух из сходящихся в нем стержней жестко связаны между собой. Например, на рис. 2.1, а, узлы 1, 2, 4 – «жесткие», узел 3 – шарнирный, узлы 5, 6 – опорные; на рис. 2.1, б, узел 1 – «жесткий», а узлы 2, 3, 4 – опорные.

Если стержни, сходящиеся в каком-либо узле системы, соединены в несколько жестких групп, шарнирно связанных между собой, то такой узел имеет количество «жестких» узлов, равное числу групп. Например, на рис. 2.1, в, узел 1 имеет два «жестких» узла, так как узел состоит из двух групп, соединенных шарнирно.

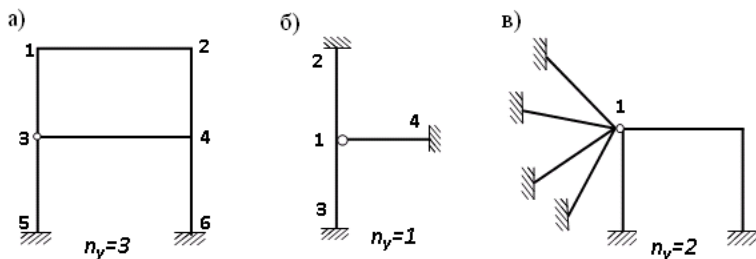


Рис. 2.1

При расчете систем методом перемещений делаются следующие допущения:

- не учитывают деформацию рам от действия продольных и поперечных сил;
- не делают различия между первоначальной длиной прямого стержня и длиной хорды, стягивающей его упругую линию, т. е. первоначальное расстояние между концами каждого прямолинейного стержня сохраняется и после деформации.

Эти допущения позволяют при определении числа линейных неизвестных смещений заменить схему данной системы ее шарнирной схемой путем введения полных шарниров во все узлы и опор-

ные закрепления. Перемещения всех узлов такой системы не являются независимыми, так как смещение одного из них может вызвать смещение ряда других узлов. Поэтому необходимо выделить из них только независимые перемещения.

*Число независимых линейных смещений узлов равно степени геометрической изменяемости системы, полученной из заданной путем введения во все «жесткие» узлы (включая и опорные) полных шарниров.*

$$n_{\text{л}} = W = 3D - 2\Pi - C_{\text{оп}}, \quad (2.2)$$

где  $D$  – количество дисков полной шарнирной схемы;  $\Pi$  – количество простых (одиночных) шарниров полной шарнирной схемы, за исключением опорных;  $C_{\text{оп}}$  – количество опорных связей полной шарнирной схемы.

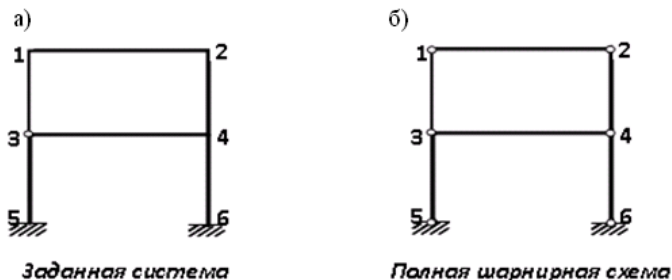


Рис. 2.2

Полная шарнирная схема на рис. 2.2, б, получилась путем введения полных шарниров в узлы 1, 2, 4, 5, 6 заданной схемы на рис. 2.2, а. Согласно формуле (2.2) для заданной системы на рис. 2.2, а, по полной шарнирной схеме на рис. 2.2, б, определяем количество линейных перемещений:

$$n_{\text{л}} = W = 3D - 2\Pi - C_{\text{оп}} = 3 \cdot 6 - 2 \cdot 6 - 4 = 2.$$

Дисками являются стержни 1–2, 1–3, 2–4, 3–4, 3–5, 4–6.

В узле 1 – один простой шарнир;

в узле 2 – один простой шарнир;

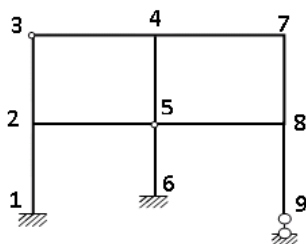
в узле 3 – кратный шарнир, эквивалентный двум простым шарнирам;

в узле 4 – кратный шарнир, эквивалентный двум простым шарнирам.



В опоре 5 – две опорные связи, в опоре 6 – две опорные связи.

Например, для рамы на рис. 2.3 степень кинематической неопределимости равна шести.



$$n_k = 4 + 2 = 6$$

$$n_y = 4$$

$$n_d = 2$$

Рис. 2.3

### 2.1.2. Основная и эквивалентная системы. Канонические уравнения метода перемещений

*Основной системой* называется кинематически определимая и геометрически неизменяемая система, полученная из заданной системы путем наложения дополнительных связей, предотвращающих возможные линейные и угловые перемещения. Основная система с наложенной на нее заданной внешней нагрузкой и реакциями введенных связей называется *эквивалентной системой*.

При расчете методом перемещений система расчленяется на ряд однопролетных статически неопределимых балок. Это достигается введением в нее дополнительных связей. Дополнительно введенные связи делятся:

- 1) на связь, препятствующую повороту «жесткого» узла системы – защемляющая связь (заделка);
- 2) связь, препятствующую линейному смещению узлов системы – дополнительные внутренние элементы или опорные стержни.

Введенные в основную систему метода перемещений защемляющие связи отличаются от обычного абсолютно жесткого защемления (заделки) тем, что препятствуют лишь повороту узла и не лишают его линейной подвижности. Реакции таких связей представляют собой моменты, приложенные в узлах системы (рис. 2.4).



Рис. 2.4

На рис. 2.4, а, связь предотвращает поворот, но не мешает линейному смещению по горизонтали, а на рис. 2.4, б, связь предотвращает поворот, но не мешает линейному смещению по горизонтали и вертикали.

Что касается связей, предотвращающих линейные смещения, то введение таких связей можно осуществить различными путями. Например, можно поставить раскос 1–3 (рис. 2.5, а), или раскос 2–4 (рис. 2.5, б), или наклонный опорный стержень (рис. 2.5, в), или горизонтальный опорный стержень (рис. 2.5, г).

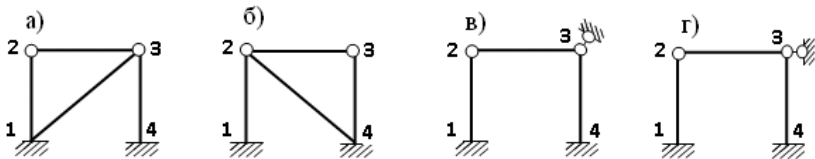


Рис. 2.5

При введении в сооружение дополнительных связей, препятствующих линейному смещению узлов, предпочтение отдается связям, соединяющим узлы с «землей», а не друг с другом, то есть опорным стержням, а не дополнительным элементам сооружения. При наличии в системе горизонтальных или вертикальных стержней рекомендуется вводить горизонтальные или вертикальные опорные стержни (а не наклонные). Например, на схемах рис. 2.5 предпочтительно выбрать систему на рис. 2.5, г.

*Для получения основной системы метода перемещений в заданную систему без нагрузки, во-первых, во все «жесткие» узлы следует ввести заделки, препятствующие повороту узлов, во-вторых, ввести дополнительные связи, препятствующие линейным смещениям.*

Например, на рис. 2.6 основная система получена путем наложения на заданную систему без нагрузки трех дополнительных связей ( $n_k = 3$ ):

- одной, предотвращающей линейное перемещение ( $n_{\text{л}} = 1$ ) – горизонтальный опорный стержень;
- двух, предотвращающих повороты узлов ( $n_{\text{в}} = 2$ ) – две заделки.



Рис. 2.6

Эквивалентную систему метода перемещений, представляющую собой заданную систему с наложенными на нее связями, препятствующими повороту и смещению узлов, можно назвать кинематически определимой.

В статическом отношении эквивалентная система метода перемещений отличается от заданной тем, что в ней возможно появление реактивных моментов во введенных заделках и реактивных усилий в добавленных стержнях (рис. 2.7).

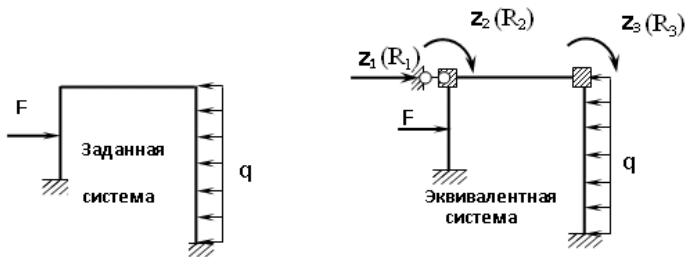


Рис. 2.7

Реактивные моменты и реактивные усилия можно обратить в нуль, если повернуть заделки на углы, равные действительным поворотам узлов, и сместить узлы так, чтобы линейные перемещения их также были равны действительным, т. е. возникающим, в заданной системе.

Отрицание реактивных усилий (сил или моментов) во введенных заделках и стержнях основной системы, т. е. отрицание реак-

тивных усилий по направлениям неизвестных перемещений, лежит в основе уравнений метода перемещений. Таким образом, условие равенства эквивалентной и заданной систем математически сводится к удовлетворению системы  $n$  линейных уравнений:

$$\begin{cases} r_{11}Z_1 + r_{12}Z_2 + \dots + r_{1n}Z_n + R_{1F} = 0 \\ r_{21}Z_1 + r_{22}Z_2 + \dots + r_{2n}Z_n + R_{2F} = 0 \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ r_{n1}Z_1 + r_{n2}Z_2 + \dots + r_{nn}Z_n + R_{nF} = 0 \end{cases} \quad (2.3)$$

Система уравнений (2.3) является теми дополнительными уравнениями деформаций, которые позволяют раскрыть кинематическую неопределимость заданной системы. Данные уравнения называются *каноническими уравнениями метода перемещений*. Первое из этих уравнений выражает мысль о равенстве нулю реактивного усилия в эквивалентной системе в первой дополнительно введенной связи (в опорном стержне), второе — выражает мысль о равенстве нулю реактивного момента в эквивалентной системе во второй дополнительно введенной связи (в заделке) и т. д.

Число уравнений равно числу дополнительно введенных связей, т. е. степени кинематической неопределимости заданной системы. Так, для системы на рис. 2.7 количество уравнений будет равно трем.

Для заданной системы  $Z_1, Z_2, Z_3, \dots, Z_n$  — неизвестные перемещения (линейные смещения узлов или углы поворота узлов).

В системе канонических уравнений в качестве коэффициентов при неизвестных стоят  $r_{11}, r_{12}, r_{13}, \dots, r_{mn}$ , — реактивные усилия в дополнительно введенных стержнях и реактивные моменты в дополнительно введенных заделках основной системы, возникающие от действия единичных линейных смещений и единичных поворотов узлов, а  $R_{1F}, \dots, R_{nF}$  — реактивные усилия в дополнительно введенных стержнях и реактивные моменты в дополнительно введенных заделках основной системы, возникающие от действия заданной внешней нагрузки. Коэффициенты  $r_{ij}$  носят название *единичных коэффициентов* канонических уравнений. Коэффициенты  $R_{iF}$  называются *грузовыми коэффициентами* или *свободными членами* канонических уравнений.

Коэффициенты  $r_{ii}$  называются главными коэффициентами, а коэффициенты  $r_{ij}$  — побочными. На основании теоремы о взаимности перемещений  $r_{ij} = r_{ji}$ .

Для определения коэффициентов и свободных членов системы канонических уравнений метода перемещений необходимо предварительно построить эпюры изгибающих моментов в основной системе от нагрузки и от единичных неизвестных перемещений (по направлениям введенных закреплений). Построение их производится с помощью данных, приведенных в прил. Б.

Определяются коэффициенты канонических уравнений двумя способами:

1) с помощью интегралов Мора по формулам (2.4) и (2.5) (по правилу Верещагина или по формуле Симпсона, используя табл. 1):

$$r_{ij} = \sum_0^l \int \frac{\bar{M}_i \cdot \bar{M}_j \cdot dx}{EI}; \quad (2.4)$$

$$R_{1F} = - \sum_0^l \int \frac{\bar{M}_i \cdot M_F^\circ \cdot dx}{EI}. \quad (2.5)$$

Так как рамы – это конструкции, работающие преимущественно на изгиб, то в выражении интегралов Мора с соблюдением достаточной точности остаются только слагаемые, зависящие от изгибающих моментов;

2) статическим способом, основанным на условии статического равновесия любой отсеченной части рамы. Для этого все коэффициенты и свободные члены канонических уравнений разделим на две группы:

- а) коэффициенты, представляющие реактивные моменты;
- б) коэффициенты, представляющие реактивные усилия.

Коэффициенты и свободные члены, представляющие реактивные моменты во введенных заделках, определяются вырезанием узлов и составлением уравнений равновесия вида (2.6):

$$\Sigma M = 0. \quad (2.6)$$

Коэффициенты и свободные члены, представляющие реактивные усилия во введенных стержнях, можно определить при помощи разреза элементов рамы и составления уравнения равновесия сил, действующих на отсеченную часть:

$$\Sigma T = 0. \quad (2.7)$$

Направление оси  $T$  в формуле (2.7) выбирается так, чтобы уравнение получилось более простым. (Например, если реактивное усилие направлено по горизонтали, то и ось выбирается горизонтальная — ось  $X$ .)

Установим следующее правило знаков для реакций заделок и опорных стержней. Реактивное усилие будем считать положительным, если направление его действия совпадает с принятым направлением поворота или линейного смещения узла.

### 2.1.3. Построение окончательной эпюры изгибающих моментов

После вычисления единичных коэффициентов и грузовых членов канонических уравнений эти уравнения решают, в результате чего определяют неизвестные перемещения  $Z_1, Z_2, Z_3, \dots, Z_n$ . После того как лишние неизвестные найдены, эквивалентное состояние будет представлять собой кинематически определимую систему, находящуюся под действием заданной нагрузки и найденных сил  $Z_i$ . Рассчитав эту кинематически определимую раму, строят для нее эпюры усилий  $M, N, Q$  известными способами, которыми пользовались при построении эпюр для статически определимых рам.

Существует и другой способ построения эпюры  $M$ . Используя принцип Даламбера, эпюру  $M$  можно построить на основании формулы (2.8):

$$M_{ок} = \bar{M}_1 \cdot Z_1 + \bar{M}_2 \cdot Z_2 + \dots + \bar{M}_n \cdot Z_n + M_F = \sum_{i=1}^n \bar{M}_i \cdot Z_i + M_F. \quad (2.8)$$

То есть для получения окончательной эпюры изгибающих моментов ординаты каждой из единичных эпюр умножаются на найденное значение соответствующего неизвестного и все результаты суммируются (по отдельным точкам осей системы) с добавлением к ним ординат грузовой эпюры моментов.

### 2.1.4. Построение эпюр поперечных и продольных сил

После того как решением системы канонических уравнений найдены неизвестные перемещения  $Z_i$ , соответствующие этим перемещениям усилия и заданная внешняя нагрузка могут быть приложены к основной системе. Затем от их совместного действия обычным спосо-

бом (как в статически определимых системах) могут быть определены поперечные и продольные силы и построены эпюры  $N$ ,  $Q$ .

Поперечные силы в системе могут быть определены и другим путем – по окончательной эпюре изгибающих моментов и условия равновесия вырезанных стержней. Каждый стержень рамы рассматривается как простая статически определимая балка на двух опорах с приложенными к ней изгибающими моментами, взятыми с окончательной эпюры изгибающих моментов, и заданной внешней нагрузкой. Для каждой такой балки в отдельности строится эпюра поперечных сил. Потом все участки собираются на раму в целом. Поперечная сила считается положительной, если она дает момент от конца стержня на узел по часовой стрелке, и наоборот.

По эпюре поперечных сил и условия равновесия вырезанных узлов рамы строится эпюра продольных сил  $N$ . Для этого к вырезанным узлам прикладывают поперечные и продольные силы. При этом продольные силы считаем положительными, т. е. направленными от узла. Поперечные силы прикладываются к узлу с учетом полученных значений и знаков, взятых с построенной эпюры поперечных сил. К узлу необходимо прикладывать и внешние силы, если они непосредственно действуют на этот узел. Проектируя приложенные к узлу силы на оси координат, получим два уравнения равновесия (2.9) и (2.10):

$$\sum X = 0, \quad (2.9)$$

$$\sum Y = 0. \quad (2.10)$$

Из данных уравнений, зная поперечные силы  $Q$ , найдем продольные силы  $N$ . Начинать определение продольных сил надо с тех узлов, в которых сходятся не более двух стержней с неизвестными продольными силами.

### 2.1.5. Проверки

Важнейшим элементом расчета рам являются проверки на каждом этапе расчета.

1. Проверка единичных коэффициентов и свободных членов канонических уравнений. Коэффициенты и свободные члены канонических уравнений представляют собой реактивные усилия или

моменты, полученные путем перемножения соответствующих эпюр изгибающих моментов. При перемножении эпюр могут быть допущены ошибки, в результате которых значения лишних неизвестных получатся неверными. Ошибки, сделанные при подсчете коэффициентов, могут быть обнаружены при помощи особых проверок:

а) построчная проверка (проверяются единичные коэффициенты одной строки – одного уравнения), т. е. коэффициент  $r_{is}$ , вычисленный по формуле (2.11), должен быть равен коэффициенту  $r_{is}$ , вычисленному по формуле (2.12):

$$r_{is} = r_{i1} + r_{i2} + \dots + r_{in} = \sum_{j=1}^n r_{ij}; \quad (2.11)$$

$$r_{is} = \sum_{j=1}^n \int_0^l \frac{\overline{M}_i \cdot \overline{M}_s}{EI} dx; \quad (2.12)$$

$$\overline{M}_S = \overline{M}_1 + \overline{M}_2 + \dots + \overline{M}_n = \sum_{i=1}^n \overline{M}_i. \quad (2.13)$$

$\overline{M}_S$  называется суммарной единичной эпюрой изгибающих моментов.

Суммарная единичная эпюра строится в основной системе от действия одновременно всех лишних неизвестных, равных единице. Или путем суммирования всех единичных эпюр по формуле (2.13);

б) универсальная проверка (проверяются одновременно все единичные коэффициенты), т. е. коэффициент  $r_{ss}$ , вычисленный по формуле (2.14), должен быть равен коэффициенту  $r_{ss}$ , вычисленному по формуле (2.15):

$$r_{ss} = r_{11} + r_{12} + \dots + r_{1n} + r_{21} + r_{22} + \dots \quad (2.14)$$

$$\dots + r_{2n} + \dots + r_{nn} = \sum_{i,j=1}^n r_{ij};$$

$$r_{ss} = \sum_{j=1}^n \int_0^l \frac{\overline{M}_s \cdot \overline{M}_s}{EI} dx; \quad (2.15)$$

в) постолбцовая проверка (проверяются свободные члены – коэффициенты одного столбца), т. е. коэффициент  $R_{SF}$ , вычисленный по формуле (2.16), должен быть равен коэффициенту  $R_{SF}$ , вычисленному по формуле (2.17):

$$\sum_{i=1}^n R_{iF} = R_{1F} + R_{2F} + \dots + R_{iF} = R_{SF}; \quad (2.16)$$

$$R_{SF} = - \sum \int_0^l \frac{\overline{M}_S \cdot M_F^0}{EI} dx. \quad (2.17)$$



2. Проверка правильности построения окончательной эпюры изгибающих моментов: статическая проверка — основана на условии равновесия окончательных моментов во всех узлах рамы согласно формуле (2.18):

$$\Sigma M = 0. \quad (2.18)$$

3. Статическая проверка рамы в целом — проверяется рассчитанная рама с учетом найденных опорных реакций, изгибающих моментов, поперечных и продольных сил через уравнения статики (2.19), (2.20), (2.21):

$$\Sigma M_K = 0, \quad (2.19)$$

$$\Sigma Y = 0, \quad (2.20)$$

$$\Sigma X = 0. \quad (2.21)$$

Точку К лучше всего подбирать на раме таким образом, чтобы через нее проходило как можно меньше найденных реакций.

### **2.1.6. Последовательность выполнения расчета плоской кинематически неопределимой рамы методом перемещений**

1. Определить степень кинематической неопределимости заданной рамы по формулам (2.1) и (2.2).
2. Выбрать основную систему метода перемещений. Показать эквивалентную систему с дополнительно наложенными связями.
3. Составить систему канонических уравнений для определения неизвестных перемещений от заданной внешней нагрузки.
4. В основной системе построить единичные эпюры изгибающих моментов  $M_i$  от действия сил  $Z_i = 1$  и грузовую эпюру  $M_F$  от действия заданной внешней нагрузки.
5. Вычислить коэффициенты и свободные члены канонических уравнений статическим способом.
6. Проверить полученные коэффициенты, построив суммарную единичную эпюру изгибающих моментов и вычислив сумму всех единичных перемещений. Выполнить универсальную проверку.
7. Проверить полученные свободные члены, вычислив сумму свободных членов и построив суммарную единичную эпюру (постолбцовая проверка).

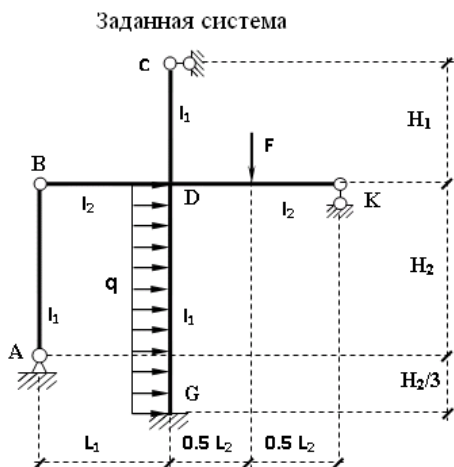
8. Решить систему канонических уравнений и найти значения неизвестных сил  $Z_i$ . Провести проверку найденного решения, подставив найденные значения в канонические уравнения.
9. Построить окончательную эпюру изгибающих моментов по формуле (2.8).
10. Проверить правильность построения окончательной эпюры. Сделать статическую проверку вырезанных узлов.
11. Построить окончательную эпюру поперечных сил, используя окончательную эпюру изгибающих моментов и условия равновесия каждого вырезанного из каркаса стержня.
12. Построить окончательную эпюру продольных сил, используя окончательную эпюру поперечных сил и условие равновесия вырезанных узлов рамы.
13. Проверить статическое равновесие рамы в целом под действием заданной внешней нагрузки и опорных реакций по формулам (2.19)–(2.21).

### 2.1.7. Вопросы для самоконтроля

1. Дать определение кинематически неопределимой рамы.
2. Написать и пояснить формулу для определения степени кинематической неопределимости кинематически неопределимых рам.
3. Дать определение основной и эквивалентной систем.
4. Записать канонические уравнения метода перемещений для дважды кинематически неопределимой системы. Объяснить физический смысл каждого уравнения и каждого элемента, входящего в уравнения.
5. Порядок определения единичных и грузовых коэффициентов канонических уравнений (различными способами).
6. Записать и пояснить проверки для единичных и грузовых коэффициентов канонических уравнений.
7. Правила построения окончательной эпюры изгибающих моментов.
8. Статическая проверка, ее физический смысл.
9. Порядок построения эпюры поперечных сил.
10. Порядок построения эпюры продольных усилий.
11. Взаимная проверка эпюр  $M$ ,  $N$ ,  $Q$ .

### 2.1.8. Пример расчета плоской кинематически неопределимой рамы методом перемещений

Рассчитать заданную раму методом перемещений.



Исходные данные:

$$L_2 = 6,0 \text{ м}$$

$$H_1 = 4,0 \text{ м}$$

$$H_2 = 6,0 \text{ м}$$

$$F = 8 \text{ кН}$$

$$q = 3 \text{ кН/м}$$

$$I_1 : I_2 = 2 : 3$$

$$E = \text{const}$$

1. Определение степени кинематической неопределимости заданной рамы на рисунке.

Степень кинематической неопределимости находится по формуле (2.1):

$$n_k = n_y + n_l = 1 + 1 = 2,$$

$n_y = 1$ , так как «жесткий» узел – только узел  $D$  (все остальные узлы либо опорные, либо шарнирные);

по формуле (2.2):

$$n_l = 3D - 2Ш - C_{оп} = 3 \cdot 5 - 2 \cdot 4 - 7 = 1$$

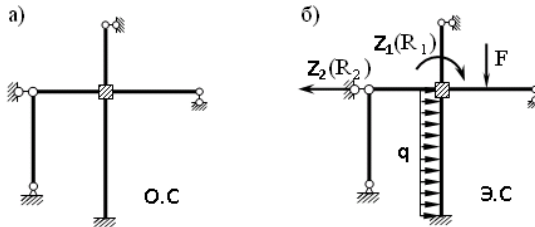
(для полной шарнирной схемы).



Таким образом, система дважды кинематически неопределима.

2. Выбор основной и эквивалентной систем метода перемещений.  
 Назначение неизвестных перемещений  $Z_1$  и  $Z_2$ .

Так как система дважды кинематически неопределима, то в основную систему необходимо ввести две связи. Причем одна должна препятствовать угловому перемещению ( $n_y = 1$ ) – это заделка, введенная в «жесткий» узел, а другая должна препятствовать линейному смещению ( $n_x = 1$ ) – это дополнительный опорный стержень, приложенный в направлении возможного линейного перемещения.



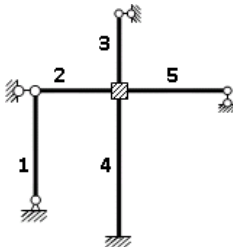
3. Так как степень кинематической неопределимости равна двум, то уравнений в системе будет два. Система канонических уравнений будет иметь следующий вид:

$$\begin{cases} r_{11}Z_1 + r_{12}Z_2 + R_{1F} = 0 \\ r_{21}Z_1 + r_{22}Z_2 + R_{2F} = 0. \end{cases}$$

4. Построение единичных и грузовой эпюр изгибающих моментов.

Для построения единичных и грузовой эпюр используется прил. Б.

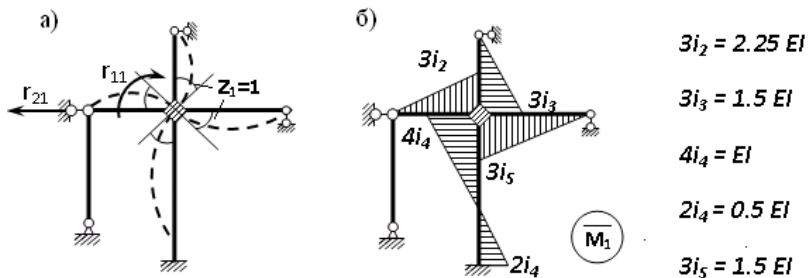
Для построения эпюр моментов необходимо первоначально определить погонные жесткости для каждого участка рамы. Для этого пронумеруем каждый стержень рамы. Погонная жесткость определяется по формуле  $i = EI/L$ ; так как  $I_1 : I_2 = 2 : 3$ , следовательно, примем  $I_1 = 2I, I_2 = 3I$ .



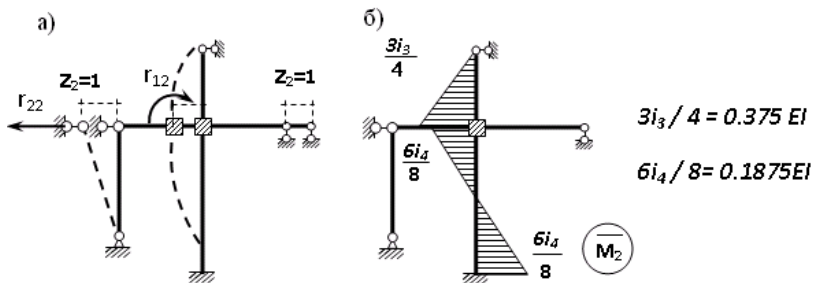
$$\begin{aligned} i_1 &= EI_1 / H_2 = 2EI / 6 = EI / 3 \\ i_2 &= EI_2 / L_1 = 3EI / 4 \\ i_3 &= EI_1 / H_1 = 2EI / 4 = EI / 2 \\ i_4 &= EI_1 / (4H_2 / 3) = 2EI / 8 = EI / 4 \\ i_5 &= EI_2 / L_2 = 3EI / 6 = EI / 2 \end{aligned}$$

Теперь по таблице, исходя из деформированного состояния системы, построим эпюры.

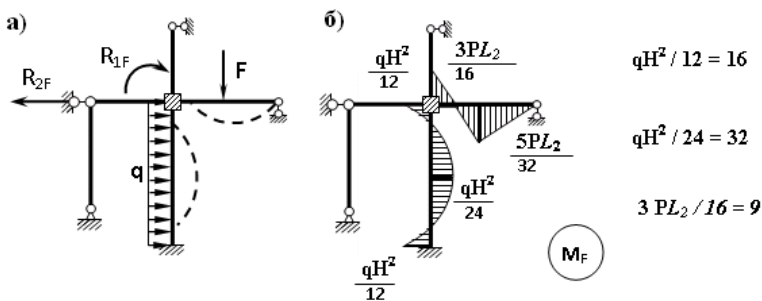
Первую эпюру строим от поворота первой введенной заделки на единичный угол. На рис. *a* изображено деформированное состояние системы, на рис. *б* – первая единичная эпюра:



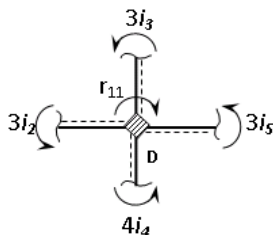
Вторую эпюру строим от линейного смещения узлов на единицу. На рис. *a* изображено деформированное состояние системы, на рис. *б* – вторая единичная эпюра:



Грузовую эпюру строим от заданной внешней нагрузки, при этом эпюра строится только на участках, к которым приложена внешняя нагрузка. На рис. *a* изображено деформированное состояние системы, на рис. *б* – грузовая эпюра:



5. Вычисление коэффициентов и свободных членов канонических уравнений (статический способ).

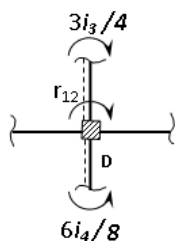


$$\Sigma M_D = 0,$$

$$r_{11} - 3i_2 - 3i_3 - 3i_5 - 4i_4 = 0,$$

$$r_{11} = 3i_2 + 3i_3 + 3i_5 + 4i_4$$

$$r_{11} = 2.25EI + 1.5EI + 1.5EI + EI = 6.25EI$$

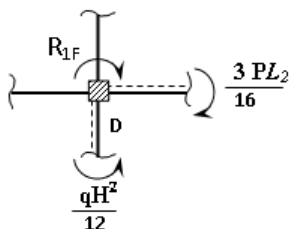


$$\Sigma M_D = 0,$$

$$r_{12} + 3i_3/4 - 6i_4/8 = 0,$$

$$r_{12} = 6i_4/8 - 3i_3/4$$

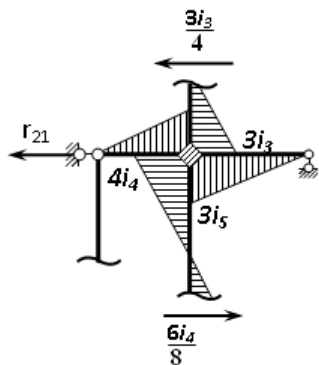
$$r_{12} = 0.1875EI - 0.375EI = -0.1875EI$$



$$\Sigma M_D = 0,$$

$$\frac{3PL_2}{16} + R_{1F} - \frac{qH^2}{12} = 0$$

$$R_{1F} = 7$$



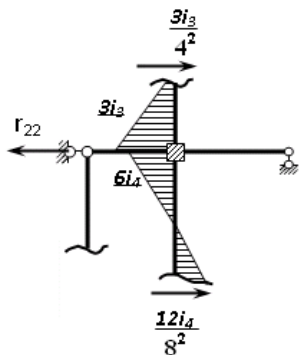
$$\Sigma X = 0,$$

$$-r_{21} - 3i_3/4 + 6i_4/8 = 0,$$

$$r_{21} = 3i_3/4 - 6i_4/8,$$

$$r_{21} = 0.1875EI - 0.375EI = -0.1875EI$$

На основании теоремы о взаимности перемещений должно выполняться условие  $r_{12} = r_{21}$ .

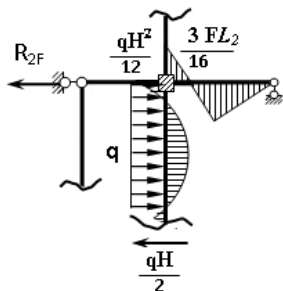


$$\Sigma X = 0,$$

$$-r_{22} + 3i_3/4^2 + 12i_4/8^2 = 0,$$

$$r_{22} = 3i_3/4^2 + 12i_4/8^2,$$

$$r_{22} = 0.09375EI + 0.046875EI = 0.140625 EI$$



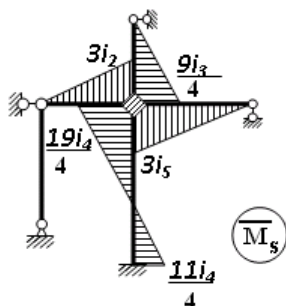
$$-R_{2P} - qH/2 + qH = 0$$

$$R_{2P} = -qH/2 + qH = qH/2$$

$$R_{2P} = 12$$

6. Построение суммарной единичной эпюры изгибающих моментов [формула (2.13)]:

$$\bar{M}_S = \bar{M}_1 + \bar{M}_2$$



Выполним универсальную проверку единичных коэффициентов [формулы (2.14), (2.15)]:

$$\sum_{i,j=1}^2 r_{ij} = r_{11} + r_{12} + r_{21} + r_{22} = 6,25EI - 0,1875EI - 0,1875EI +$$

$$+ 0,140625EI = 6,015625EI;$$

$$r_{ss} = \sum_{j=1}^n \int_0^l \frac{\overline{M}_s \cdot \overline{M}_s}{EI} dx = \frac{1}{EI_2} \cdot \frac{1}{2} \cdot 3i_2 \cdot L_1 \cdot \frac{2}{3} \cdot 3i_2 +$$

$$+ \frac{1}{EI_2} \cdot \frac{1}{2} \cdot 3i_5 \cdot L_2 \cdot \frac{2}{3} \cdot 3i_5 + \frac{1}{EI_1} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{9i_3}{4} \cdot H_1 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{9i_3}{4} +$$

$$+ \frac{1}{EI_1} \cdot \frac{4H_2}{3 \cdot 6} \cdot \left( \frac{19i_4}{4} \cdot \frac{19i_4}{4} + 4 \cdot i_4 \cdot i_4 + \frac{11i_4}{4} \cdot \frac{11i_4}{4} \right) =$$

$$= 2,25EI + 1,5EI + 0,84375EI + 1,421875EI = 6,015625EI;$$

$$\sum_{i,j=1}^2 r_{ij} = r_{ss}.$$

Выполнена универсальная проверка, следовательно, единичные коэффициенты найдены верно.

7. Аналогично выполняется проверка грузовых коэффициентов.
8. Составим систему канонических уравнений:

$$\begin{cases} 6,25EI Z_1 - 0,1875EI Z_2 + 7 = 0 \\ -0,1875EI Z_1 + 0,140625EI Z_2 + 12 = 0. \end{cases}$$

Умножим первое уравнение на 16, а второе уравнение на 64, получим более простую систему уравнений:

$$\begin{cases} 100EI Z_1 - 3EI Z_2 + 112 = 0 \\ -12EI Z_1 + 9EI Z_2 + 768 = 0. \end{cases}$$

Решая данную систему, получим:

$$Z_1 = -3,833 / EI; \quad Z_2 = -90,444 / EI.$$

Делаем проверку найденного решения, т. е. подставляем полученные значения  $Z_1$  и  $Z_2$  в канонические уравнения:

$$100EI \cdot \left( -\frac{3,833}{EI} \right) - 3EI \cdot \left( -\frac{90,444}{EI} \right) + 112 = 0,002 \approx 0;$$

$$-12EI \left( -\frac{3,833}{EI} \right) + 9EI \left( -\frac{90,444}{EI} \right) + 768 = 0.$$

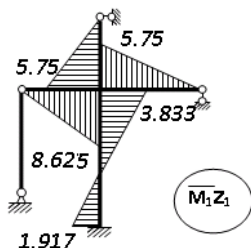


Условие выполнено, значит, решение найдено верно.

9. Построение окончательной эпюры изгибающих моментов [формула (2.8)]:

$$M_{ок} = \bar{M}_1 \cdot Z_1 + \bar{M}_2 \cdot Z_2 \cdot Z_n + M_F.$$

Для этого возьмем первую единичную эпюру и все ее значения (ординаты) умножим на действительную величину  $Z_1 = -3,833/EI$ , при этом жесткости сократятся и останутся только числовые значения. Аналогично возьмем вторую единичную эпюру и все ее значения (ординаты) умножим на действительную величину  $Z_2 = -90,444/EI$ , при этом жесткости сократятся и останутся только числовые значения. Полученные таким образом эпюры сложим вместе с грузовой эпюрой по характерным точкам всей системы.



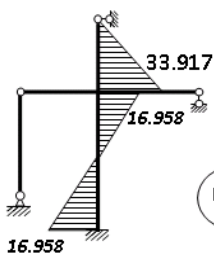
$$3i_2 \cdot 3,833/EI = 2.25 EI \cdot 3,833/EI = 8.625$$

$$3i_3 \cdot 3,833/EI = 1.5 EI \cdot 3,833/EI = 5.75$$

$$4i_4 \cdot 3,833/EI = EI \cdot 3,833/EI = 3.833$$

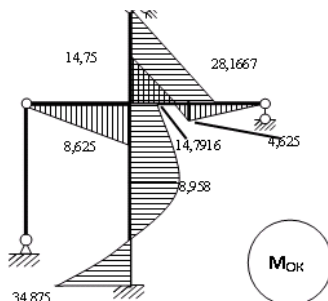
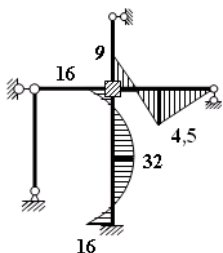
$$2i_4 \cdot 3,833/EI = 0.5 EI \cdot 3,833/EI = 1.917$$

$$3i_5 \cdot 3,833/EI = 1.5 EI \cdot 3,833/EI = 5.75$$



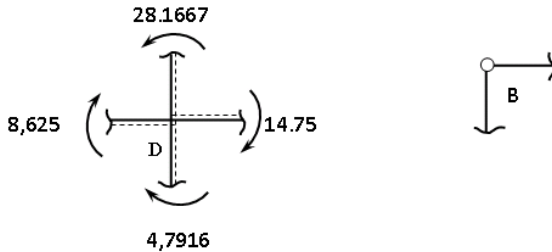
$$3i_3 / 4 \cdot 90,444/EI = 0.375 EI \cdot 90,444/EI = 33.917$$

$$6i_4 / 8 \cdot 90,444/EI = 0.1875 EI \cdot 90,444/EI = 16.958$$



10. Проверяем правильность построения эпюры  $M_{ок}$ .

Статическая проверка:



$$\Sigma M_D = 0, \quad 8,625 - 28,167 + 14,75 + 4,7916 = 0,$$

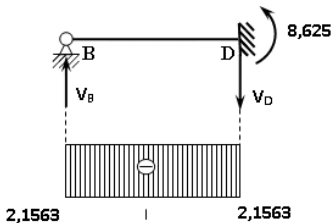
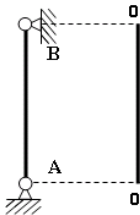
$$28,1667 - 28,1666 = -0,0001 \approx 0,$$

$$\Sigma M_B = 0, \quad 0 = 0.$$

Статическая проверка выполнена, следовательно, эпюра  $M_{ок}$  построена верно.

11. Построение эпюры поперечных сил на основании построенной эпюры изгибающих моментов  $M_{ок}$ .

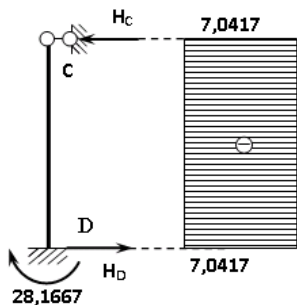
Так как на участке АВ отсутствуют изгибающие моменты и внешняя нагрузка, то эпюра поперечных сил на этом участке будет очерчена нулевой линией.



$$\begin{aligned} \Sigma M_B &= 0, \\ V_C \cdot 4 - 8,625 &= 0, \\ V_C &= 2,1563 \text{ кН} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Sigma M_D &= 0, \\ V_B \cdot 4 - 8,625 &= 0, \\ V_B &= 2,1563 \text{ кН} \end{aligned}$$

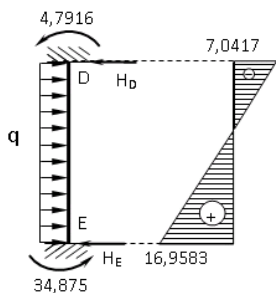
$$\Sigma Y = 0, \quad V_B - V_D = 0, \quad 0 = 0.$$



$$\begin{aligned}\Sigma M_D &= 0, \\ H_C \cdot 4 + 28,1667 &= 0, \\ H_C &= 7,0417 \text{ кН}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Sigma M_C &= 0, \\ -H_D \cdot 4 + 28,1667 &= 0, \\ H_D &= 7,0417 \text{ кН}\end{aligned}$$

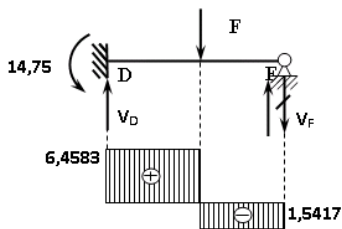
$$\Sigma X = 0, H_D - H_C = 0, 0 = 0.$$



$$\begin{aligned}\Sigma M_D &= 0, \\ -4,7916 - 34,875 - q \cdot 8 \cdot 4 + H_E \cdot 8 &= 0, \\ H_E &= 16,9583 \text{ кН}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Sigma M_E &= 0, \\ -4,7916 - 34,875 + q \cdot 8 \cdot 4 - H_D \cdot 8 &= 0, \\ H_D &= 7,0417 \text{ кН.}\end{aligned}$$

$$\Sigma X = 0, -H_E - H_D + q \cdot 8 = 0, 0 = 0.$$

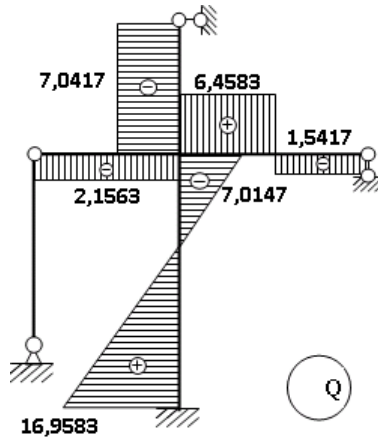


$$\begin{aligned}\Sigma M_D &= 0, \\ V_F \cdot 6 - 14,75 + F \cdot 3 &= 0, \\ V_F &= -1,5417 \text{ кН} - \text{значит,} \\ &\text{направление реакции выбрано} \\ &\text{неверно, поэтому меняем его на} \\ &\text{противоположное.}\end{aligned}$$

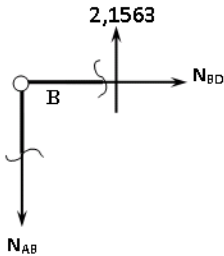
$$\begin{aligned}\Sigma M_F &= 0, \\ V_D \cdot 6 - 14,75 - F \cdot 3 &= 0, \\ V_D &= 6,162 \text{ кН}\end{aligned}$$

$$\Sigma Y = 0, V_D + V_F + F = 0, 0 = 0.$$

Эпюра поперечных сил в целом для рамы будет иметь следующий вид:



12. Построение эпюры продольных (нормальных) сил  $N$  на основании построенной эпюры поперечных сил:



$$\Sigma X = 0, N_{BD} = 0,$$

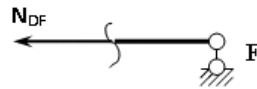
$$\Sigma Y = 0, -N_{AB} + 2,1563 = 0,$$

$$N_{AB} = 2,1563 \text{ кН.}$$



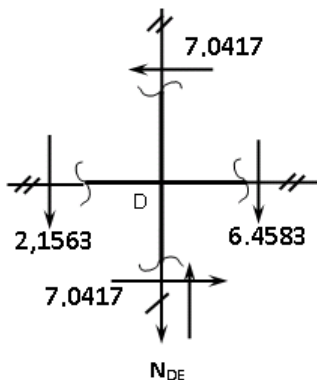
$$\Sigma Y = 0$$

$$N_{CD} = 0$$



$$\Sigma X = 0$$

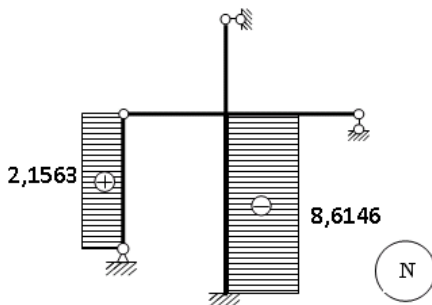
$$N_{DF} = 0$$



$$\begin{aligned} \Sigma Y &= 0, \\ -N_{DE} - 2,1563 - 6,4583 &= 0, \\ N_{CD} &= -8,6146 \text{ кН} - \text{направлено в} \\ &\text{противоположную сторону.} \end{aligned}$$

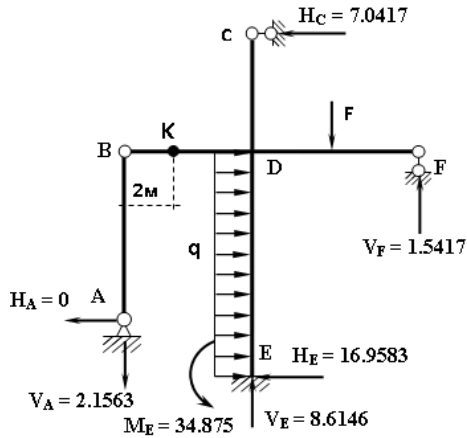
$$\begin{aligned} \Sigma X &= 0, \\ -7,0147 + 7,0147 &= 0, 0 = 0. \end{aligned}$$

Эпюра продольных сил  $N$  в целом для рамы будет иметь следующий вид:



13. Согласно построенным эпюрам  $M$ ,  $N$ ,  $Q$  определяем опорные реакции рамы и составляем условие статического равновесия рамы в целом.

Для этого используем формулы статического равновесия системы в целом (2.19)–(2.21). Вертикальные опорные реакции  $V_A$ ,  $V_E$  определяем по эпюре продольных сил  $N$ , горизонтальные реакции  $H_A$ ,  $H_E$ ,  $H_C$  и вертикальную реакцию  $V_F$  определяем по эпюре поперечных сил  $Q$ , а реакцию  $M_E$  определяем по эпюре изгибающих моментов  $M$ .



$$\Sigma X = 0,$$

$$-H_A + q \cdot 8 - H_E - H_C = 0,$$

$$0 + 3 \cdot 8 - 16,9583 - 7,0417 = 0,$$

$$0 = 0.$$

$$\Sigma Y = 0,$$

$$-V_A + V_E - F + V_F = 0,$$

$$-2,1563 + 8,6146 - 8 + 1,5417 = 0,$$

$$0 = 0.$$

$$\Sigma M_K = 0,$$

$$H_A \cdot 6 - V_A \cdot 2 - q \cdot 8 \cdot 4 - V_E \cdot 2 + H_E \cdot 8 - M_E + F \cdot 5 - V_F \cdot 8 + H_C \cdot 4 = 0,$$

$$0 \cdot 6 - 2,1563 \cdot 2 - 3 \cdot 8 \cdot 4 - 8,6146 \cdot 2 + 16,9583 \cdot 8 - 34,875 +$$

$$+ 8 \cdot 5 - 1,5417 \cdot 8 + 7,0417 \cdot 4 = 0,$$

$$0 = 0.$$

Проверки выполнены, значит, рама рассчитана верно, эпюры  $M$ ,  $N$ ,  $Q$  построены правильно.

### 3. РАСЧЕТ СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМЫХ БАЛОК МЕТОДОМ ФОКУСНЫХ ОТНОШЕНИЙ

#### 3.1. Основные положения расчета неразрезных балок методом фокусных отношений

При расчете неразрезной балки (построении эпюр изгибающих моментов и поперечной силы) на действие временной нагрузки следует воспользоваться методом моментных фокусных отношений. Этим методом можно воспользоваться и в случае загрузки только одного пролета неразрезной балки.

Рассмотрим неразрезную многопролетную балку, нагруженную в одном пролете произвольной нагрузкой (рис. 3.1).

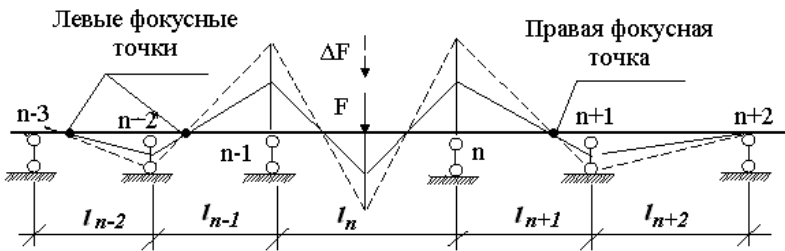


Рис. 3.1

При наложении эпюр изгибающих моментов от различных нагрузок ( $F$  и  $\Delta F$ ) полученные эпюры в ненагруженных пролетах будут проходить через нулевые точки как через фокусы (рис. 3.1). Причем в обоих случаях через одни и те же. При анализе работы такой балки установлено, что в каждом ненагруженном пролете при положении нагрузки справа (или слева) от него эпюра моментов имеет нулевую точку, причем местоположение этой точки постоянно и не зависит от интенсивности и вида загрузки пролета. Эта точка называется моментным фокусом. Различают правые и левые моментные фокусы. Левым (правым) моментным фокусом называется нулевая точка эпюры моментов данного пролета при нагружении одного или нескольких пролетов, расположенных правее (левее) рассматриваемого пролета.

Положение фокусных точек в пролетах определяется фокусным отношением. Под фокусным отношением понимают отношение длин частей данного ненагруженного пролета, на которые он делится фокусной точкой. Различают фокусные отношения справа и слева от нагруженного пролета.

Для определения левых коэффициентов моментно-фокусных отношений балки переменного сечения используется формула (3.1), а для балки постоянного сечения – формула (3.2):

$$k_n^{\text{л}} = 2 + \frac{l_{n-1}'}{l_n} \cdot \left(2 - \frac{1}{k_{n-1}^{\text{л}}}\right); \quad (3.1)$$

$$k_n^{\text{л}} = 2 + \frac{l_{n-1}}{l_n} \cdot \left(2 - \frac{1}{k_{n-1}^{\text{л}}}\right). \quad (3.2)$$

Для определения правых коэффициентов моментно-фокусных отношений балки переменного сечения используется формула (3.3), а для балки постоянного сечения – формула (3.4):

$$k_n^{\text{пп}} = 2 + \frac{l_{n+1}'}{l_n} \left(2 - \frac{1}{k_{n+1}^{\text{пп}}}\right); \quad (3.3)$$

$$k_n^{\text{пп}} = 2 + \frac{l_{n+1}}{l_n} \cdot \left(2 - \frac{1}{k_{n+1}^{\text{пп}}}\right). \quad (3.4)$$

Коэффициенты фокусных отношений всегда положительны. Их величина не зависит от нагрузки, а зависит лишь от геометрической схемы балки, то есть от длин пролетов неразрезной балки. Вычисление коэффициентов фокусных отношений производится: для левых коэффициентов – слева направо ( $k_1^{\text{л}}$ ,  $k_2^{\text{л}}$ ,  $k_3^{\text{л}}$  и т. д.); для правых коэффициентов – справа налево ( $k_5^{\text{пп}}$ ,  $k_4^{\text{пп}}$ ,  $k_3^{\text{пп}}$  и т. д.).

Коэффициенты фокусных отношений в крайних пролетах зависят от способа закрепления балки в этих пролетах (прил. В).

Для любой неразрезной балки, зная величины коэффициентов фокусных отношений, можно вычислить все опорные моменты неразрезной балки.

Опорные моменты по концам загруженного пролета неразрезной балки (рис. 3.2) вычисляются по формулам (3.5), (3.6):

$$M_{n-1} = -6 \cdot \frac{A_n^{\Phi} \cdot k_n^{\text{пп}} - B_n^{\Phi}}{l_n \cdot (k_n^{\text{л}} \cdot k_n^{\text{пп}} - 1)}; \quad (3.5)$$

$$M_n = -6 \cdot \frac{B_n^{\Phi} \cdot k_n^{\text{л}} - A_n^{\Phi}}{l_n \cdot (k_n^{\text{л}} \cdot k_n^{\text{пп}} - 1)}. \quad (3.6)$$



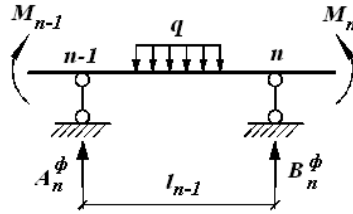


Рис. 3.2

Для нагруженных крайних пролетов шарнирно-опертой неразрезной балки один из моментов нагруженного пролета определяется по сокращенным формулам (3.7), (3.8), а другой – по общим формулам (3.5), (3.6):

если нагружен крайний правый пролет:

$$M_{n-1} = -6 \cdot \frac{A_n^\phi}{l_n k_n^d}; \quad (3.7)$$

если нагружен крайний левый пролет:

$$M_n = -6 \cdot \frac{B_n^\phi}{l_n k_n^{np}}. \quad (3.8)$$

$B_n^\phi$  – правая опорная реакция пролета  $l_n$  от фиктивной нагрузки (правая фиктивная реакция).

$A_{n+1}^\phi$  – левая опорная реакция пролета  $l_{n+1}$  от фиктивной нагрузки (левая фиктивная реакция).

Величины фиктивных реакций определяются по табл. А.2 (прил. А) в зависимости от внешней нагрузки, приложенной в пролете.

Опорные моменты по концам незагруженных пролетов неразрезной балки вычисляются по формулам (3.9), (3.10):

для пролетов, расположенных справа от нагруженного пролета:

$$M_n = -\frac{M_{n-1}}{k_n^{np}}; \quad (3.9)$$

для пролетов, расположенных слева от нагруженного пролета:

$$M_n = -\frac{M_{n+1}}{k_{n+1}^d}. \quad (3.10)$$

По полученным значениям опорных моментов можно построить эпюру изгибающих моментов. Эпюра поперечных сил строится по готовой эпюре изгибающих моментов (см. п. 1.4.2).

Если неразрезная балка кроме постоянной нагрузки загружается временной нагрузкой по различным пролетам, которая может при-

существовать при различных возможных сочетаниях, то необходимо определить такие схемы загрузки, при которых в сечениях балки возникают наибольший и наименьший изгибающие моменты, наибольшая и наименьшая перерезывающая сила. Поэтому при расчете неразрезной балки на постоянную и временную нагрузки в балке строят объемлющую эпюру изгибающих моментов и объемлющую эпюру поперечных сил. Эпюры моментов от постоянной и временной нагрузки являются исходными для построения объемлющей эпюры изгибающих моментов. Подсчет ординат объемлющей эпюры моментов лучше всего проводить в табличной форме.

Все эпюры изгибающих моментов от временной нагрузки необходимо строить в том же масштабе, что и эпюра изгибающих моментов от постоянной нагрузки. Они строятся одна под другой. Для построения объемлющей эпюры изгибающих моментов нужно каждый пролет разбить на три части и подсчитать соответствующие величины ординат изгибающих моментов. Для получения величин максимальных ординат изгибающих моментов ( $M_{\max}$ ) в каждом сечении к моменту от постоянной нагрузки ( $M_{\text{пост}}$ ) прибавляют все положительные ординаты эпюр изгибающих моментов от временной нагрузки [формула (3.11)]. Для получения величин минимальных ординат изгибающих моментов ( $M_{\min}$ ) в каждом сечении к моменту от постоянной нагрузки ( $M_{\text{пост}}$ ) — все отрицательные ординаты от временной нагрузки [формула (3.12)]:

$$M_{\max} = M_{\text{пост}} + \Sigma(+M_{\text{вр}}); \quad (3.11)$$

$$M_{\min} = M_{\text{пост}} + \Sigma(-M_{\text{вр}}). \quad (3.12)$$

Аналогично этому находят значения объемлющей эпюры поперечных сил [формулы (3.13), (3.14)]:

$$Q_{\max} = Q_{\text{пост}} + \Sigma(+Q_{\text{вр}}); \quad (3.13)$$

$$Q_{\min} = Q_{\text{пост}} + \Sigma(-Q_{\text{вр}}). \quad (3.14)$$

### 3.2. Последовательность выполнения расчета неразрезной балки на временную и постоянную нагрузки методом фокусных отношений

1. Вычислить левые и правые коэффициенты фокусных отношений.
2. Загрузить балку постоянной нагрузкой.

Для полученного заграждения балки вычислить:

- фиктивные реакции нагруженного пролета;
- опорные моменты нагруженного пролета;
- опорные моменты ненагруженных пролетов;
- момент в середине нагруженного пролета.

По полученным значениям построить эпюру  $M^{\text{пост}}$ .

По построенной эпюре изгибающих моментов построить эпюру поперечных сил  $Q^{\text{пост}}$ .

3. Загрузить балку временной нагрузкой последовательно во все пролеты балки.

Для каждого заграждения балки вычислить:

- фиктивные реакции нагруженного пролета;
- опорные моменты нагруженного пролета;
- опорные моменты ненагруженных пролетов;
- момент в середине нагруженного пролета.

По полученным значениям построить эпюры  $M_i^{\text{вп}}$ .

По построенным эпюрам изгибающих моментов построить эпюры поперечных сил  $Q_i^{\text{вп}}$ .

4. Построить объемлющую эпюру изгибающих моментов  $M^{\text{об}}$ .
5. Построить объемлющую эпюру поперечных сил  $Q^{\text{об}}$ .

### 3.3. Вопросы для самоконтроля

1. Дать определение неразрезной балки.
2. Дать понятие фокуса.
3. Сформулировать понятие «фокусное отношение».
4. Сформулировать понятие «коэффициент фокусного отношения».
5. Записать формулу для левых коэффициентов фокусного отношения.
6. Записать формулу для правых коэффициентов фокусного отношения.

7. Пояснить формулы для определения моментов нагруженного пролета балки.
8. Пояснить сокращенные формулы для определения моментов нагруженного пролета балки.
9. Пояснить формулы для левых моментов ненагруженных пролетов балки.
10. Пояснить формулы для правых моментов ненагруженных пролетов балки.
11. Дать понятие фиктивной опорной реакции. Примеры определения фиктивных опорных реакций от различных типов нагружения.
12. Сформулировать порядок построения эпюры изгибающих моментов.
13. Сформулировать порядок построения эпюры поперечных сил.
14. Определение изгибающих моментов и поперечных сил в произвольном сечении неразрезной балки.
15. Сформулировать порядок построения объемлющей эпюры изгибающих моментов.
16. Сформулировать порядок построения объемлющей эпюры поперечных сил.

### 3.4. Пример расчета балки методом фокусных отношений

Рассчитать заданную неразрезную балку (рис. 3.3) методом фокусов на постоянную нагрузку  $q_{\text{пост}} = 2,0 \text{ кН/м}$  и последовательное нагружение пролетов временной (подвижной) нагрузкой  $q_{\text{вр}} = 1,5 \text{ кН/м}$ .

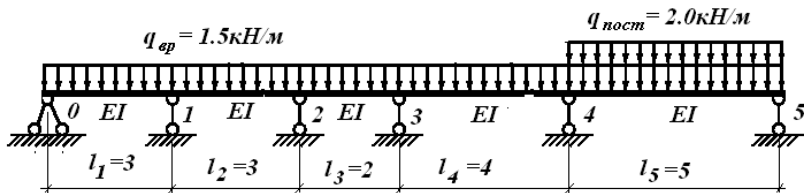


Рис. 3.3

1. По формулам (3.2), (3.4) определяем левые и правые коэффициенты фокусных отношений:

$$k_1^n = \infty \text{ (прил. В)}$$

$$k_2^n = 2 + \frac{l_1}{l_2} \cdot \left(2 - \frac{1}{k_1^n}\right) = 2 + \frac{3}{3} \cdot \left(2 - \frac{1}{\infty}\right) = 4;$$

$$k_3^n = 2 + \frac{l_2}{l_3} \cdot \left(2 - \frac{1}{k_2^n}\right) = 2 + \frac{3}{2} \cdot \left(2 - \frac{1}{4}\right) = 4,62;$$

$$k_4^n = 2 + \frac{l_3}{l_4} \cdot \left(2 - \frac{1}{k_3^n}\right) = 2 + \frac{2}{4} \cdot \left(2 - \frac{1}{4,63}\right) = 2,89;$$

$$k_5^n = 2 + \frac{l_4}{l_5} \cdot \left(2 - \frac{1}{k_4^n}\right) = 2 + \frac{4}{5} \cdot \left(2 - \frac{1}{2,89}\right) = 3,32.$$

$$k_5^{np} = \infty \text{ (прил. В)}$$

$$k_4^{np} = 2 + \frac{l_5}{l_4} \cdot \left(2 - \frac{1}{k_5^{np}}\right) = 2 + \frac{5}{4} \cdot \left(2 - \frac{1}{\infty}\right) = 4,5;$$

$$k_3^{np} = 2 + \frac{l_4}{l_3} \cdot \left(2 - \frac{1}{k_4^{np}}\right) = 2 + \frac{4}{2} \cdot \left(2 - \frac{1}{4,5}\right) = 5,56;$$

$$k_2^{np} = 2 + \frac{l_3}{l_2} \cdot \left(2 - \frac{1}{k_3^{np}}\right) = 2 + \frac{2}{3} \cdot \left(2 - \frac{1}{5,55}\right) = 3,21;$$

$$k_1^{np} = 2 + \frac{l_2}{l_1} \cdot \left(2 - \frac{1}{k_2^{np}}\right) = 2 + \frac{3}{3} \cdot \left(2 - \frac{1}{3,21}\right) = 3,69.$$

2. Построение эпюр изгибающих моментов и поперечных сил от постоянной нагрузки:

а) построение эпюры изгибающих моментов:

– определяем фиктивные реакции загруженного пролета (табл. А.2 прил. А):

$$A_5^\phi = B_5^\phi = q_{\text{пост}} \cdot \frac{\ell_5^3}{24} = 2,0 \cdot \frac{125}{24} = 10,42 \text{ кНм}^2;$$

– определяем моменты нагруженного пролета по формуле (3.6), так как загружен крайний правый пролет по формуле (3.7):

$$M_4 = -6 \cdot \frac{A_5^\phi}{l_5 k_5^n} = -6 \cdot \frac{10,42}{5 \cdot 3,32} = -3,76 \text{ кНм};$$

$$M_5 = -6 \cdot \frac{B_5^\phi \cdot k_5^n - A_5^\phi}{l_5 \cdot (k_5^n \cdot k_5^{np} - 1)} = -6 \cdot \frac{10,42 \cdot 3,32 - 10,42}{5 \cdot (3,32 \cdot \infty - 1)} = 0;$$

– определяем моменты ненагруженных пролетов по формуле (3.10), так как ненагруженные пролеты расположены слева от нагруженного пролета:

$$M_3 = -\frac{M_4}{k_4^{\text{п}}} = -\frac{-3,76}{2,89} = 1,30 \text{ кНм};$$

$$M_2 = -\frac{M_3}{k_3^{\text{п}}} = -\frac{1,3}{4,62} = -0,28 \text{ кНм};$$

$$M_1 = -\frac{M_2}{k_2^{\text{п}}} = -\frac{-0,28}{4} = 0,07 \text{ кНм};$$

$$M_0 = -\frac{M_1}{k_1^{\text{п}}} = -\frac{-0,07}{\infty} = 0;$$

– определяем среднее значение эпюры моментов нагруженного пролета:

$$M_5^{\text{ср}} = \frac{ql_5^2}{8} - \frac{|M_4| + |M_5|}{2} = \frac{2 \cdot 25}{8} - \frac{3,77 + 0}{2} = 4,37 \text{ кНм};$$

– по полученным значениям изгибающих моментов строим эпюру  $M^{\text{пост}}$  (рис. 3.4, а);

б) построение эпюры поперечных сил (рис. 3.5, а):

– порядок расчета и построения эпюры поперечных сил аналогичен порядку при расчете балки уравнением 3-х моментов (см. пример 1.4.6).

3. Построение эпюр изгибающих моментов и поперечных сил от временной нагрузки, расположенной в первом пролете:

а) построение эпюры изгибающих моментов:

– определяем фиктивные реакции нагруженного пролета (табл. А.2 прил. А):

$$A_1^{\phi} = B_1^{\phi} = q_{\text{вп}} \cdot \frac{\ell_1^3}{24} = 1,5 \cdot \frac{27}{24} = 1,69 \text{ кНм}^2;$$

– определяем моменты нагруженного пролета по формуле (3.5), так как нагружен крайний левый пролет по формуле (3.8):

$$M_0 = -6 \cdot \frac{A_1^{\phi} \cdot k_1^{\text{пп}} - B_1^{\phi}}{l_1 \cdot (k_1^{\text{п}} \cdot k_1^{\text{пп}} - 1)} = -6 \cdot \frac{1,69 \cdot 2,69 - 1,69}{3 \cdot (2,69 \cdot \infty - 1)} = 0;$$

$$M_1 = -6 \cdot \frac{B_1^{\phi}}{l_1 k_1^{\text{пп}}} = -6 \cdot \frac{1,69}{3 \cdot 3,69} = -0,91 \text{ кНм};$$

– определяем моменты ненагруженных пролетов по формуле (3.9), так как ненагруженные пролеты расположены справа от нагруженного пролета:

$$M_2 = -\frac{M_1}{k_2^{\text{нп}}} = -\frac{-0,91}{3,21} = 0,28 \text{ кНм};$$

$$M_3 = -\frac{M_2}{k_3^{\text{нп}}} = -\frac{0,28}{5,55} = -0,05 \text{ кНм};$$

$$M_4 = -\frac{M_3}{k_4^{\text{нп}}} = -\frac{-0,05}{4,5} = 0,01 \text{ кНм};$$

$$M_5 = -\frac{M_4}{k_5^{\text{нп}}} = -\frac{-0,01}{\infty} = 0;$$

– определяем среднее значение эпюры моментов нагруженного пролета:

$$M_1^{\text{ср}} = \frac{ql_1^2}{8} - \frac{|M_0| + |M_1|}{2} = \frac{1,5 \cdot 9}{8} - \frac{0,91 + 0}{2} = 1,23 \text{ кНм};$$

– по полученным значениям изгибающих моментов строим эпюру  $M_1^{\text{нп}}$  (рис. 3.4, б);

б) построение эпюры поперечных сил (рис. 3.5, б):

– порядок расчета и построения эпюры поперечных сил аналогичен порядку при расчете балки уравнением 3-х моментов (см. пример 1.4.6).

4. Построение эпюр изгибающих моментов и поперечных сил от временной нагрузки, расположенной во втором пролете:

а) построение эпюры изгибающих моментов:

– определяем фиктивные реакции нагруженного пролета (табл. А.2 прил. А):

$$A_2^\phi = B_2^\phi = q_{\text{вп}} \cdot \frac{\ell_2^3}{24} = 1,5 \cdot \frac{27}{24} = 1,69 \text{ кНм}^2;$$

– определяем моменты нагруженного пролета по формулам (3.5) и (3.6):

$$M_1 = -6 \cdot \frac{A_2^\phi \cdot k_2^{\text{нп}} - B_2^\phi}{l_2 \cdot (k_2^{\text{л}} \cdot k_2^{\text{нп}} - 1)} = -6 \cdot \frac{1,69 \cdot 3,21 - 1,69}{3 \cdot (4 \cdot 3,21 - 1)} = -0,63 \text{ кНм};$$

$$M_2 = -6 \cdot \frac{B_2^\phi \cdot k_2^{\text{л}} - A_2^\phi}{l_2 \cdot (k_2^{\text{л}} \cdot k_2^{\text{нп}} - 1)} = -6 \cdot \frac{1,69 \cdot 4 - 1,69}{3 \cdot (4 \cdot 3,21 - 1)} = -0,85 \text{ кНм};$$

– определяем моменты  $M_3$ ,  $M_4$  и  $M_5$  ненагруженных пролетов по формуле (3.9), так как ненагруженные пролеты расположены справа от нагруженного пролета, и момент  $M_0$  ненагруженного пролета по формуле (3.10), так как ненагруженный пролет расположен слева от нагруженного пролета:

$$M_0 = -\frac{M_1}{k_1^n} = -\frac{-0,63}{\infty} = 0;$$

$$M_3 = -\frac{M_2}{k_3^{np}} = -\frac{-0,85}{5,56} = 0,15 \text{ кНм};$$

$$M_4 = -\frac{M_3}{k_4^{np}} = -\frac{0,15}{4,5} = -0,03 \text{ кНм};$$

$$M_5 = -\frac{M_4}{k_5^{np}} = -\frac{-0,03}{\infty} = 0;$$

– определяем среднее значение эпюры моментов нагруженного пролета:

$$M_2^{cp} = \frac{ql_2^2}{8} - \frac{|M_1| + |M_2|}{2} = \frac{1,5 \cdot 9}{8} - \frac{0,63 + 0,85}{2} = 0,95 \text{ кНм};$$

– по полученным значениям изгибающих моментов строим эпюру  $M_2^{pp}$  (рис. 3.4, в);

б) построение эпюры поперечных сил (рис. 3.5, в):

– порядок расчета и построения эпюры поперечных сил аналогичен порядку при расчете балки уравнением 3-х моментов (см. пример 1.4.6).

5. Построение эпюр изгибающих моментов и поперечных сил от временной нагрузки, расположенной в третьем пролете:

а) построение эпюры изгибающих моментов:

– определяем фиктивные реакции нагруженного пролета (табл. А.2 прил. А):

$$A_3^\phi = B_3^\phi = q_{вр} \cdot \frac{l_3^3}{24} = 1,5 \cdot \frac{8}{24} = 0,5 \text{ кНм}^2;$$

– определяем моменты нагруженного пролета по формулам (3.5) и (3.6):

$$M_2 = -6 \cdot \frac{A_3^\phi \cdot k_3^{np} - B_3^\phi}{l_3 \cdot (k_3^n \cdot k_3^{np} - 1)} = -6 \cdot \frac{0,5 \cdot 5,56 - 0,5}{2 \cdot (4,62 \cdot 5,56 - 1)} = -0,28 \text{ кНм};$$

$$M_3 = -6 \cdot \frac{B_3^\phi \cdot k_3^n - A_3^\phi}{l_3 \cdot (k_3^n \cdot k_3^{np} - 1)} = -6 \cdot \frac{0,5 \cdot 4,62 - 0,5}{2 \cdot (4,62 \cdot 5,56 - 1)} = -0,22 \text{ кНм};$$

– определяем моменты  $M_4$  и  $M_5$  ненагруженных пролетов по формуле (3.9), так как ненагруженные пролеты расположены справа от нагруженного пролета, и моменты  $M_0$  и  $M_1$  ненагруженных пролетов по формуле (3.10), так как ненагруженные пролеты расположены слева от нагруженного пролета:



$$M_1 = -\frac{M_2}{k_2^{\pi}} = -\frac{-0,28}{4} = 0,07 \text{ кНм};$$

$$M_0 = -\frac{M_1}{k_1^{\pi}} = -\frac{0,07}{\infty} = 0;$$

$$M_4 = -\frac{M_3}{k_4^{\text{np}}} = -\frac{0,22}{4,5} = 0,05 \text{ кНм};$$

$$M_5 = -\frac{M_4}{k_5^{\text{np}}} = -\frac{0,05}{\infty} = 0;$$

– определяем среднее значение эпюры моментов нагруженного пролета:

$$M_3^{\text{cp}} = \frac{ql_3^2}{8} - \frac{|M_2| + |M_3|}{2} = \frac{1,5 \cdot 9}{8} - \frac{0,28 + 0,22}{2} = 0,5 \text{ кНм};$$

– по полученным значениям изгибающих моментов строим эпюру  $M_3^{\text{np}}$  (рис. 3.4, з);

б) построение эпюры поперечных сил (рис. 3.5, з):

– порядок расчета и построения эпюры поперечных сил аналогичен порядку при расчете балки уравнением 3-х моментов (см. пример 1.4.6).

6. Построение эпюр изгибающих моментов и поперечных сил от временной нагрузки, расположенной в четвертом пролете:

а) построение эпюры изгибающих моментов:

– определяем фиктивные реакции нагруженного пролета (табл. А.2 прил. А):

$$A_4^{\phi} = B_4^{\phi} = q_{\text{вп}} \cdot \frac{\ell_4^3}{24} = 1,5 \cdot \frac{64}{24} = 4 \text{ кНм}^2;$$

– определяем моменты нагруженного пролета по формулам (3.5) и (3.6):

$$M_3 = -6 \cdot \frac{A_4^{\phi} \cdot k_4^{\text{np}} - B_4^{\phi}}{l_4 \cdot (k_4^{\pi} \cdot k_4^{\text{np}} - 1)} = -6 \cdot \frac{4 \cdot 4,5 - 4}{4 \cdot (2,89 \cdot 4,5 - 1)} = -1,75 \text{ кНм};$$

$$M_4 = -6 \cdot \frac{B_4^{\phi} \cdot k_4^{\pi} - A_4^{\phi}}{l_4 \cdot (k_4^{\pi} \cdot k_4^{\text{np}} - 1)} = -6 \cdot \frac{4 \cdot 2,89 - 4}{4 \cdot (2,89 \cdot 4,5 - 1)} = -0,94 \text{ кНм};$$

– определяем момент  $M_5$  ненагруженного пролета по формуле (3.9), так как ненагруженный пролет расположен справа от нагруженного пролета, и моменты  $M_0$ ,  $M_1$  и  $M_2$  ненагруженных пролетов по формуле (3.10), так как ненагруженные пролеты расположены слева от нагруженного пролета:

$$M_2 = -\frac{M_3}{k_3^л} = -\frac{-1,75}{4,62} = 0,38 \text{ кНм};$$

$$M_1 = -\frac{M_2}{k_2^л} = -\frac{0,38}{4} = -0,09 \text{ кНм};$$

$$M_0 = -\frac{M_1}{k_1^л} = -\frac{-0,09}{\infty} = 0;$$

$$M_5 = -\frac{M_4}{k_5^нп} = -\frac{-0,94}{\infty} = 0;$$

– определяем среднее значение эпюры моментов нагруженного пролета:

$$M_4^{\text{ср}} = \frac{ql_4^2}{8} - \frac{|M_3| + |M_4|}{2} = \frac{1,5 \cdot 9}{8} - \frac{1,75 + 0,94}{2} = 1,65 \text{ кНм};$$

– по полученным значениям изгибающих моментов строим эпюру  $M_4^{\text{вп}}$  (рис. 3.4, д);

б) построение эпюры поперечных сил (рис. 3.5, д):

– порядок расчета и построения эпюры поперечных сил аналогичен порядку при расчете балки уравнением 3-х моментов (см. пример 1.4.6).

7. Построение эпюр изгибающих моментов и поперечных сил от временной нагрузки, расположенной в пятом пролете:

а) построение эпюры изгибающих моментов:

– определяем фиктивные реакции загруженного пролета (табл. А.2 прил. А):

$$A_5^\phi = B_5^\phi = q_{\text{пост}} \cdot \frac{l_5^3}{24} = 1,5 \cdot \frac{125}{24} = 7,81 \text{ кНм}^2;$$

– определяем моменты нагруженного пролета по формуле (3.6), так как загружен крайний правый пролет по формуле (3.7):

$$M_4 = -6 \cdot \frac{A_5^\phi}{l_5 k_5^л} = -6 \cdot \frac{7,81}{5 \cdot 3,32} = -2,82 \text{ кНм};$$

$$M_5 = -6 \cdot \frac{B_5^\phi \cdot k_5^л - A_5^\phi}{l_5 \cdot (k_5^л \cdot k_5^нп - 1)} = -6 \cdot \frac{7,81 \cdot 3,32 - 7,81}{5 \cdot (3,32 \cdot \infty - 1)} = 0;$$

– определяем моменты ненагруженных пролетов по формуле (3.10), так как ненагруженные пролеты расположены слева от нагруженного пролета:

$$M_3 = -\frac{M_4}{k_4^л} = -\frac{-2,82}{2,89} = 0,98 \text{ кНм};$$

$$M_2 = -\frac{M_3}{k_3^л} = -\frac{0,98}{4,62} = -0,21 \text{ кНм};$$

$$M_1 = -\frac{M_2}{k_2^л} = -\frac{-0,21}{4} = 0,05 \text{ кНм};$$

$$M_0 = -\frac{M_1}{k_1^л} = -\frac{0,05}{\infty} = 0;$$

– определяем среднее значение эпюры моментов нагруженного пролета:

$$M_5^{\text{cp}} = \frac{ql_5^2}{8} - \frac{|M_4| + |M_5|}{2} = \frac{1,5 \cdot 25}{8} - \frac{3,77 + 0}{2} = 3,28 \text{ кНм};$$

– по полученным значениям изгибающих моментов строим эпюру  $M_5^{\text{BP}}$  (рис. 3.4, e);

б) построение эпюры поперечных сил (рис. 3.5, e):

– порядок расчета и построения эпюры поперечных сил аналогичен порядку при расчете балки уравнением 3-х моментов (см. пример 1.4.6).

8. После определения моментов в характерных сечениях балки от постоянных нагрузок и временной, расположенной в различных пролетах, в табличной форме (табл. 2) вычисляют по формулам:

$$M_{\text{max}} = M_{\text{пост}} + \sum (+M_{\text{вр}});$$

$$M_{\text{min}} = M_{\text{пост}} + \sum (-M_{\text{вр}}),$$

где  $M_{\text{пост}}$  – изгибающий момент в сечении от постоянной нагрузки;  $\sum(+M_{\text{вр}})$  – сумма положительных изгибающих моментов в сечении от временной нагрузки (отрицательные значения здесь не учитываются);  $\sum(-M_{\text{вр}})$  – сумма отрицательных изгибающих моментов в сечении от временной нагрузки (положительные значения здесь не учитываются).

По вычисленным значениям строят объемлющую эпюру изгибающих моментов. Для этого в характерных точках при каждом нагружении временной и постоянной нагрузками расчетные изгибающие моменты откладывают от горизонтальной оси (отрицательные – вверх, положительные – вниз) и полученные вершины соединяют характерными линиями (отдельно положительные и отдельно отрицательные (рис. 3.6, a)).

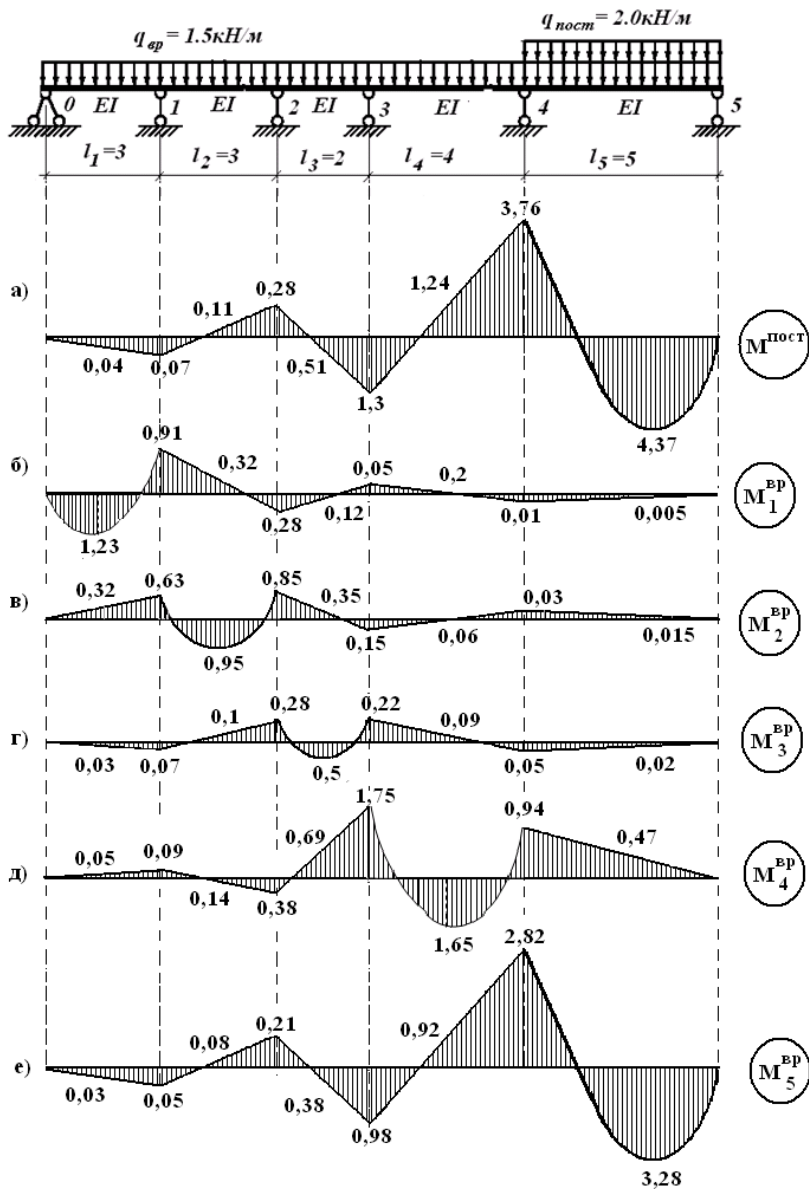


Рис. 3.4

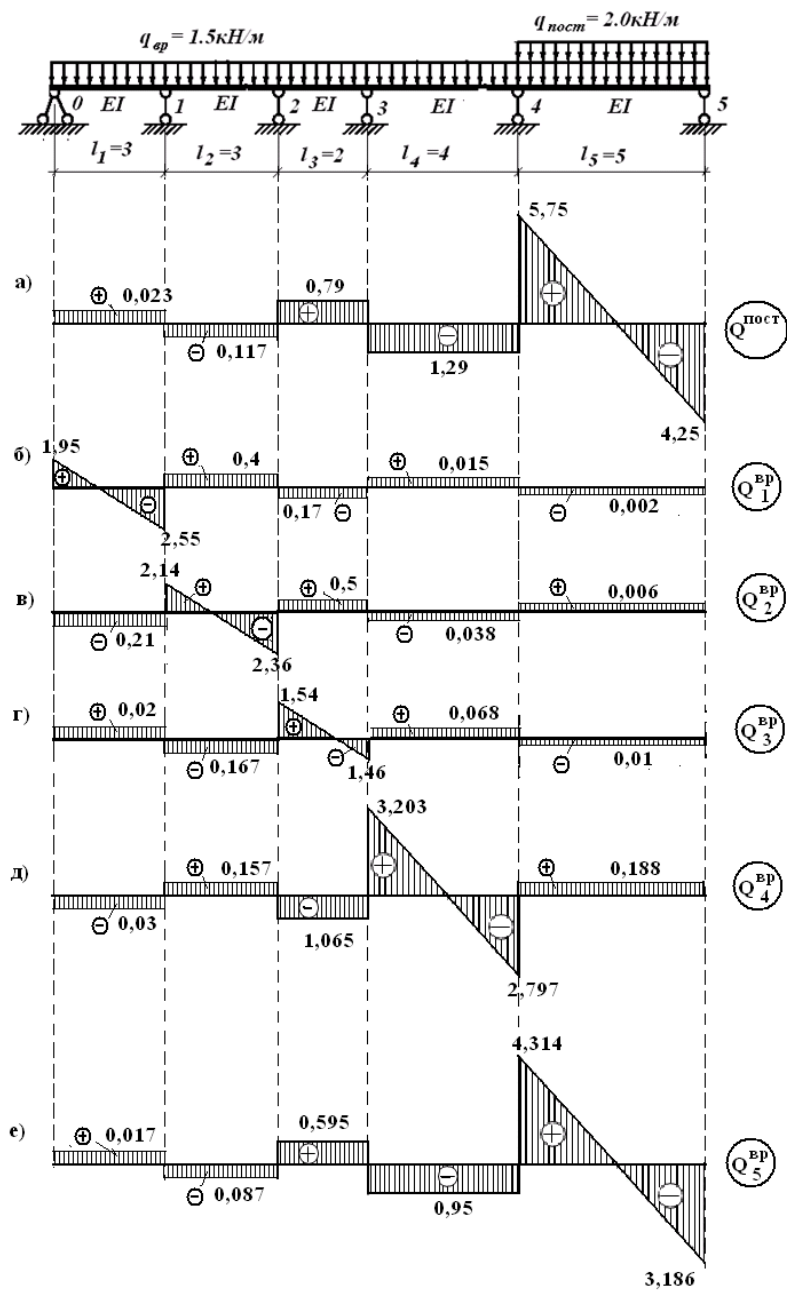


Рис. 3.5

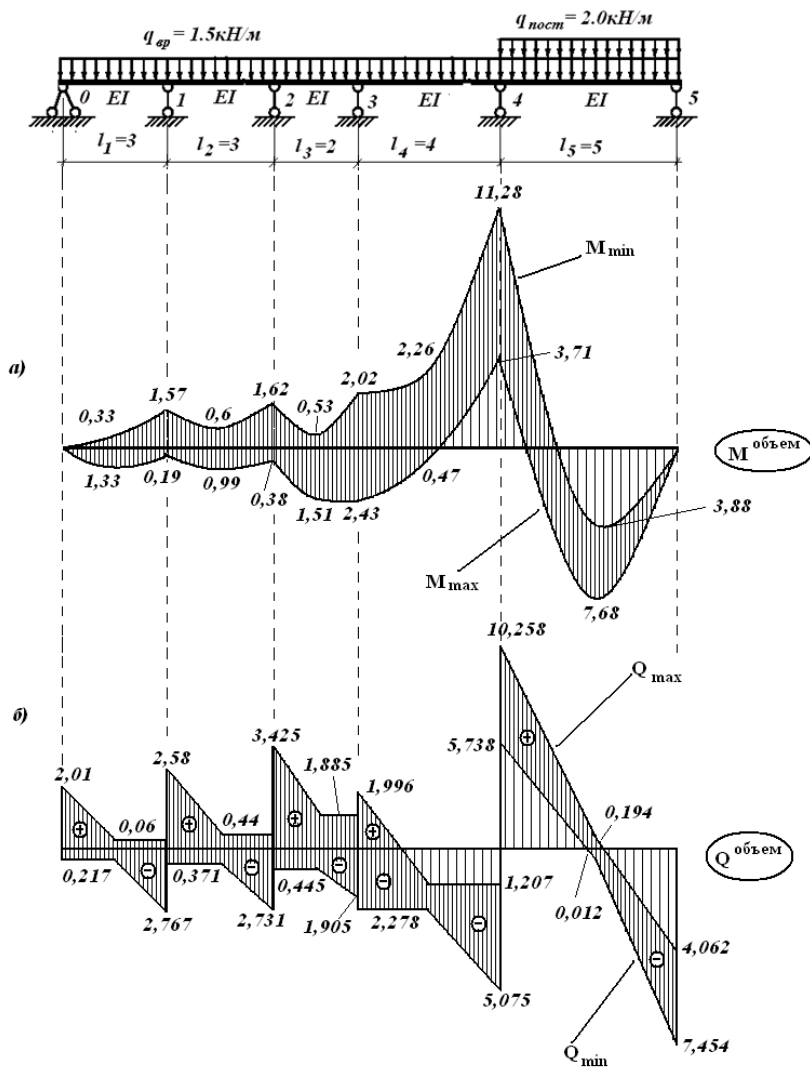


Рис. 3.6

Аналогично этому находят значения объемлющей эпюры поперечных сил по формулам (3.13), (3.14) (табл. 3):

$$Q_{\max} = Q_{\text{пост}} + \sum (+Q_{\text{вр}});$$

$$Q_{\min} = Q_{\text{пост}} + \sum (-Q_{\text{вр}}).$$

Объемлющую эпюру поперечных сил строят аналогичным образом (рис. 3.6, б).

Таблица 2

Определение изгибающих моментов в характерных сечениях  
объемлющей эпюры

| № сечения              | $M_{\text{пост}}$<br>(кНм) | $M$ от временной нагрузки  |                            |                            |                            |                            | $M_{\text{max}}$<br>(кНм) | $M_{\text{min}}$<br>(кНм) |
|------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------|---------------------------|
|                        |                            | $M_1^{\text{вр}}$<br>(кНм) | $M_2^{\text{вр}}$<br>(кНм) | $M_3^{\text{вр}}$<br>(кНм) | $M_4^{\text{вр}}$<br>(кНм) | $M_5^{\text{вр}}$<br>(кНм) |                           |                           |
| 0 опора                | 0,00                       | 0,00                       | 0,00                       | 0,00                       | 0,00                       | 0,00                       | 0,00                      | 0,00                      |
| 1 пролет<br>(середина) | 0,04                       | -0,46                      | -0,32                      | 0,03                       | -0,05                      | 0,03                       | 1,33                      | -0,33                     |
| 1 опора                | 0,07                       | -0,91                      | -0,63                      | 0,07                       | -0,09                      | 0,05                       | 0,19                      | -1,57                     |
| 2 пролет<br>(середина) | -0,11                      | -0,32                      | -0,74                      | -0,10                      | 0,14                       | -0,08                      | 0,99                      | -0,60                     |
| 2 опора                | -0,28                      | 0,28                       | -0,85                      | -0,28                      | 0,38                       | -0,21                      | 0,38                      | -1,62                     |
| 3 пролет<br>(середина) | 0,51                       | 0,12                       | -0,35                      | -0,25                      | -0,69                      | 0,38                       | 1,51                      | -0,53                     |
| 3 опора                | 1,30                       | -0,05                      | 0,15                       | -0,22                      | -1,75                      | 0,98                       | 2,43                      | -2,02                     |
| 4 пролет<br>(середина) | -1,24                      | -0,02                      | 0,06                       | -0,09                      | -1,35                      | -0,92                      | 0,47                      | -2,26                     |
| 4 опора                | -3,76                      | 0,01                       | -0,03                      | 0,05                       | -0,94                      | -2,82                      | -3,71                     | -11,28                    |
| 5 пролет<br>(середина) | -1,89                      | 0,005                      | -0,02                      | 0,02                       | -0,47                      | -1,41                      | 7,68                      | 3,88                      |
| 5 опора                | 0,00                       | 0,00                       | 0,00                       | 0,00                       | 0,00                       | 0,00                       | 0,00                      | 0,00                      |

Таблица 3

Определение поперечных сил в характерных сечениях  
объемлющей эпюры

| № сечения                       | $Q_{\text{пост}}$<br>(кНм) | $Q$ от временной нагрузки |                           |                           |                           |                           | $Q_{\text{max}}$<br>(кНм) | $Q_{\text{min}}$<br>(кНм) |
|---------------------------------|----------------------------|---------------------------|---------------------------|---------------------------|---------------------------|---------------------------|---------------------------|---------------------------|
|                                 |                            | $Q_{\text{вр}}$<br>(кНм)  | $Q_{2\text{вр}}$<br>(кНм) | $Q_{3\text{вр}}$<br>(кНм) | $Q_{4\text{вр}}$<br>(кНм) | $Q_{5\text{вр}}$<br>(кНм) |                           |                           |
| 0 опора                         | 0,023                      | 1,95                      | -0,21                     | 0,02                      | -0,03                     | 0,017                     | 2,01                      | -0,217                    |
| 1 пролет<br>(точка<br>перегиба) | 0,023                      | 0                         | -0,21                     | 0,02                      | -0,03                     | 0,017                     | 0,06                      | -0,217                    |
| 1 опора<br>слева                | 0,023                      | -2,55                     | -0,21                     | 0,02                      | -0,03                     | 0,017                     | 0,06                      | -2,767                    |
| 1 опора<br>справа               | -0,117                     | 0,4                       | 2,14                      | -0,167                    | 0,157                     | -0,087                    | 2,58                      | -0,371                    |
| 2 пролет<br>(точка<br>перегиба) | -0,117                     | 0,4                       | 0                         | -0,167                    | 0,157                     | -0,087                    | 0,44                      | -0,371                    |
| 2 опора<br>слева                | -0,117                     | 0,4                       | -2,36                     | -0,167                    | 0,157                     | -0,087                    | 0,44                      | -2,731                    |
| 2 опора<br>справа               | 0,79                       | -0,17                     | 0,5                       | 1,54                      | -1,065                    | 0,595                     | 3,425                     | -0,445                    |
| 3 пролет<br>(точка<br>перегиба) | 0,79                       | -0,17                     | 0,5                       | 0                         | -1,065                    | 0,595                     | 1,885                     | -0,445                    |
| 3 опора<br>слева                | 0,79                       | -0,17                     | 0,5                       | -1,46                     | -1,065                    | 0,595                     | 1,885                     | -1,905                    |
| 3 опора<br>справа               | -1,29                      | 0,015                     | -0,038                    | 0,068                     | 3,203                     | -0,95                     | 1,996                     | -2,278                    |
| 4 пролет<br>(точка<br>перегиба) | -1,29                      | 0,015                     | -0,038                    | 0,068                     | 0                         | -0,95                     | -1,207                    | -2,278                    |
| 4 опора<br>слева                | -1,29                      | 0,015                     | -0,038                    | 0,068                     | 2,797                     | -0,95                     | -1,207                    | -5,075                    |
| 4 опора<br>справа               | 5,75                       | -0,002                    | 0,006                     | -0,01                     | 0,188                     | 4,314                     | 10,258                    | 5,738                     |
| 5 пролет<br>(точка<br>перегиба) | 0                          | -0,002                    | 0,006                     | -0,01                     | 0,188                     | 0                         | 0,194                     | -0,012                    |
| 5 опора                         | -4,25                      | -0,002                    | 0,006                     | -0,01                     | 0,188                     | -3,186                    | -4,062                    | -7,454                    |



## 4. РАСЧЕТ СЛОЖНЫХ СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМЫХ СИСТЕМ

### 4.1. Использование симметрии системы

При расчете статически неопределимой системы с большим числом неизвестных приходится совместно решать канонические уравнения со многими неизвестными.

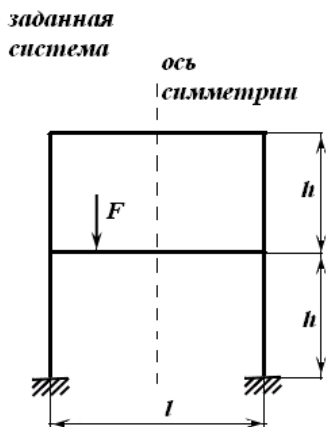


Рис. 4.1

Рассмотрим, например, раму, изображенную на рис. 4.1, состоящую из двух замкнутых контуров и, следовательно, шесть раз статически неопределимую. При расчете этой рамы с помощью основной системы, показанной на рис. 4.2, *а*, и эквивалентной системы на рис. 4.2, *б*, необходимо составить и решить шесть уравнений с шестью неизвестными (система 4.1).

$$\begin{cases} X_1 \cdot \delta_{11} + X_2 \cdot \delta_{12} + X_3 \cdot \delta_{13} + X_4 \cdot \delta_{14} + X_5 \cdot \delta_{15} + X_6 \cdot \delta_{16} + \Delta_{1F} = 0 \\ X_1 \cdot \delta_{21} + X_2 \cdot \delta_{22} + X_3 \cdot \delta_{23} + X_4 \cdot \delta_{24} + X_5 \cdot \delta_{25} + X_6 \cdot \delta_{26} + \Delta_{2F} = 0 \\ X_1 \cdot \delta_{31} + X_2 \cdot \delta_{32} + X_3 \cdot \delta_{33} + X_4 \cdot \delta_{34} + X_5 \cdot \delta_{35} + X_6 \cdot \delta_{36} + \Delta_{3F} = 0 \\ X_1 \cdot \delta_{41} + X_2 \cdot \delta_{42} + X_3 \cdot \delta_{43} + X_4 \cdot \delta_{44} + X_5 \cdot \delta_{45} + X_6 \cdot \delta_{46} + \Delta_{4F} = 0 \\ X_1 \cdot \delta_{51} + X_2 \cdot \delta_{52} + X_3 \cdot \delta_{53} + X_4 \cdot \delta_{54} + X_5 \cdot \delta_{55} + X_6 \cdot \delta_{56} + \Delta_{5F} = 0 \\ X_1 \cdot \delta_{61} + X_2 \cdot \delta_{62} + X_3 \cdot \delta_{63} + X_4 \cdot \delta_{64} + X_5 \cdot \delta_{65} + X_6 \cdot \delta_{66} + \Delta_{6F} = 0 \end{cases} \quad (4.1)$$

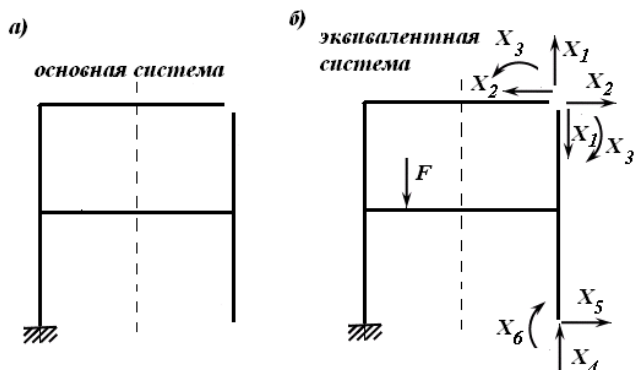


Рис. 4.2

Решение такой системы уравнений требует большой затраты времени. Однако то обстоятельство, что рассматриваемая рама является системой симметричной, у которой не только ее геометрическая схема (образованная осями стержней) имеет ось симметрии, но и жесткости симметрично расположенных элементов равны друг другу, позволяет значительно упростить ее расчет. Упрощение основано на возможности при расчете симметричных систем всегда так выбрать основную систему, чтобы эпюра  $M_i$  от каждого неизвестного  $X_i$  была симметричной или обратно симметричной.

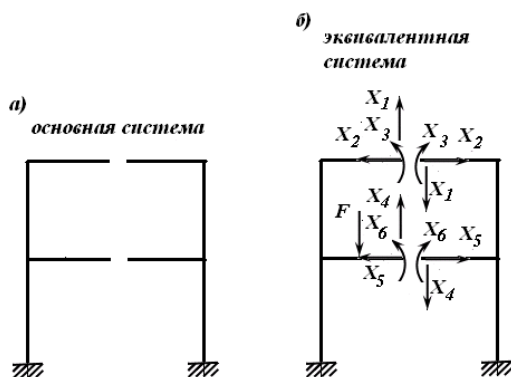


Рис. 4.3

Если при расчете рассматриваемой рамы (рис. 4.1) в качестве основной системы принять, например, изображенную на рис. 4.3, а, то эквивалентная примет вид, показанный на рис. 4.3, б. Тогда эпюры  $M_2, M_3, M_5$  и  $M_6$  от симметричных единичных усилий  $X_2, X_3, X_5$  и  $X_6$  будут симметричными (рис. 4.4, б, в, д, е), а эпюры  $M_1, M_4$  от обратно симметричных единичных усилий  $X_1$  и  $X_4$  (рис. 4.4, а, з) — обратно симметричными (косо симметричными).

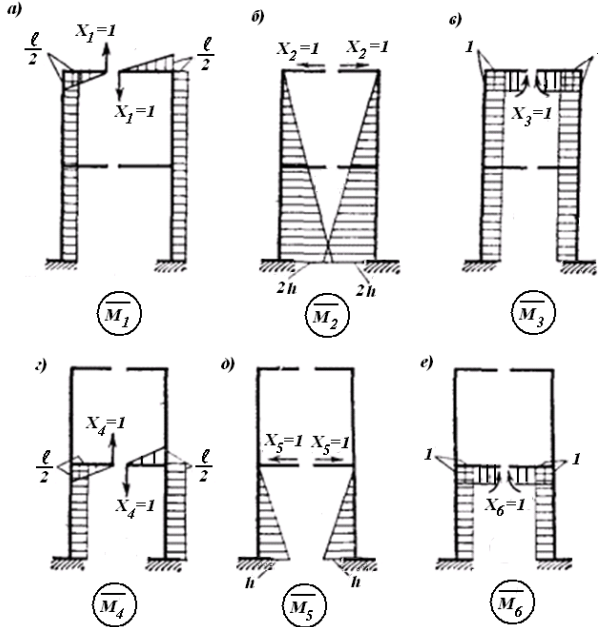


Рис. 4.4

Произведение симметричной эпюры на обратно симметричную эпюру равно нулю. Так, умножив эпюру  $M_1$  (рис. 4.4, а) на эпюру  $M_2$  (рис. 4.4, б), получим формулу (4.2):

$$\delta_{12} = \sum_{i=10}^n \int \frac{\overline{M_1} \cdot \overline{M_2}}{EI} \cdot dx = \frac{1}{EI} \cdot 2h \cdot \frac{2h}{2} \cdot \frac{l}{2} - \frac{1}{EI} \cdot 2h \cdot \frac{2h}{2} \cdot \frac{l}{2} = 0. \quad (4.2)$$

Аналогично для рассматриваемой рамы равны нулю все побочные перемещения, определяемые умножением симметричной эпюры на обратно симметричную эпюру, а именно:  $\delta_{12}, \delta_{13}, \delta_{15}, \delta_{16}, \delta_{21}, \delta_{24}, \delta_{31}, \delta_{34}, \delta_{42}, \delta_{43}, \delta_{45}, \delta_{46}, \delta_{51}, \delta_{54}, \delta_{61}, \delta_{64}$ .

В результате этого система канонических уравнений примет вид (4.3):

$$\begin{cases} X_1 \cdot \delta_{11} + X_4 \cdot \delta_{14} + \Delta_{1F} = 0 \\ X_2 \cdot \delta_{22} + X_3 \cdot \delta_{23} + X_5 \cdot \delta_{25} + X_6 \cdot \delta_{26} + \Delta_{2F} = 0 \\ X_2 \cdot \delta_{32} + X_3 \cdot \delta_{33} + X_5 \cdot \delta_{35} + X_6 \cdot \delta_{36} + \Delta_{3F} = 0 \\ X_1 \cdot \delta_{41} + X_4 \cdot \delta_{44} + \Delta_{4F} = 0 \\ X_2 \cdot \delta_{52} + X_3 \cdot \delta_{53} + X_5 \cdot \delta_{55} + X_6 \cdot \delta_{56} + \Delta_{5F} = 0 \\ X_2 \cdot \delta_{62} + X_3 \cdot \delta_{63} + X_5 \cdot \delta_{65} + X_6 \cdot \delta_{66} + \Delta_{6F} = 0 \end{cases} \quad (4.3)$$

Таким образом, система (4.3) распадется на две независимые системы уравнений (4.4) и (4.5):

$$\begin{cases} X_1 \cdot \delta_{11} + X_4 \cdot \delta_{14} + \Delta_{1F} = 0 \\ X_1 \cdot \delta_{41} + X_4 \cdot \delta_{44} + \Delta_{4F} = 0 \end{cases} \quad (4.4)$$

$$\begin{cases} X_2 \cdot \delta_{22} + X_3 \cdot \delta_{23} + X_5 \cdot \delta_{25} + X_6 \cdot \delta_{26} + \Delta_{2F} = 0 \\ X_2 \cdot \delta_{32} + X_3 \cdot \delta_{33} + X_5 \cdot \delta_{35} + X_6 \cdot \delta_{36} + \Delta_{3F} = 0 \\ X_2 \cdot \delta_{52} + X_3 \cdot \delta_{53} + X_5 \cdot \delta_{55} + X_6 \cdot \delta_{56} + \Delta_{5F} = 0 \\ X_2 \cdot \delta_{62} + X_3 \cdot \delta_{63} + X_5 \cdot \delta_{65} + X_6 \cdot \delta_{66} + \Delta_{6F} = 0 \end{cases} \quad (4.5)$$

Первая из этих систем (4.4) содержит два обратно симметричных неизвестных и два уравнения, а вторая (4.5) — четыре симметричных неизвестных и четыре уравнения. Использование симметрии при выборе основной системы позволило решение системы из шести уравнений с шестью неизвестными заменить решением двух независимых систем, одна из которых содержит два уравнения с двумя неизвестными, а другая — четыре уравнения с четырьмя неизвестными. Это значительно сокращает объем вычислений и поэтому позволяет более точно определить значения неизвестных.

Объем вычислений уменьшается не только в результате упрощения системы канонических уравнений и уменьшения количества подсчитываемых перемещений  $\delta$ , но и потому, что эти перемещения могут теперь определяться перемножением соответствующих эпюр только для элементов одной половины сооружения (с удвоением полученного результата).

Если симметричная рама имеет среднюю стойку, то подсчет перемещений  $\delta$  от обратно симметричных неизвестных производится сначала перемножением соответствующих эпюр для элементов одной половины рамы (без средней стойки); затем полученный результат удваивается и к нему прибавляется результат перемножения эпюр для средней стойки рамы.

Рассмотрим теперь симметричную раму, изображенную на рис. 4.5, а.

Эта рама три раза статически неопределима. На рис. 4.5, б, показан один из возможных вариантов основной системы, а на рис. 4.5, в, соответственно эквивалентная система. Эта основная система несимметрична, так как закрепления нижних концов крайних стоек различны.

Несимметричны и неизвестные усилия  $X_1, X_2, X_3$ . Однако эпюры изгибающих моментов в основной системе от действия неизвестных  $X_1 = 1$  и  $X_2 = 1$  (рис. 4.5, з, д) симметричны, а эпюра от действия неизвестного  $X_3 = 1$  (рис. 4.5, е) обратно симметрична.

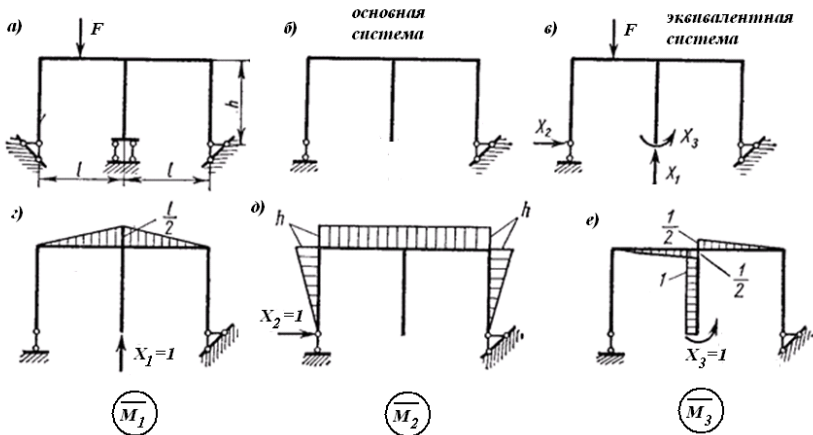


Рис. 4.5

Поэтому система канонических уравнений, состоящая из трех уравнений (при данной основной системе), распадется на две независимые системы уравнений [формулы (4.6), (4.7)], как это имеет место при симметричных и обратно симметричных неизвестных.

$$\begin{cases} X_1 \cdot \delta_{11} + X_2 \cdot \delta_{12} + \Delta_{1F} = 0 \\ X_1 \cdot \delta_{21} + X_2 \cdot \delta_{22} + \Delta_{2F} = 0 \end{cases} \quad (4.6)$$

$$X_3 \cdot \delta_{33} + \Delta_{3F} = 0 \quad (4.7)$$

## 4.2. Группировка неизвестных усилий

При расчете сооружений, имеющих несколько пролетов, невозможно поместить все неизвестные на оси симметрии; поэтому для получения симметричных и обратно симметричных эпюр приходится принимать за неизвестные не отдельные силы, а группы сил.

Для выяснения сущности этого приема рассмотрим шесть раз статически неопределимую раму, изображенную на рис. 4.6, а. Если для ее расчета выбрать основную систему, изображенную на рис. 4.6, б, то эквивалентная система примет вид, показанный на рис. 4.6, в.

Это система с несимметричными лишними неизвестными  $X_1, X_2, X_3, X_4, X_5$  и  $X_6$ , поэтому придется совместно решать шесть уравнений [система (4.8)], так как в этом случае ни одно из значений  $\delta$  не будет равно нулю.

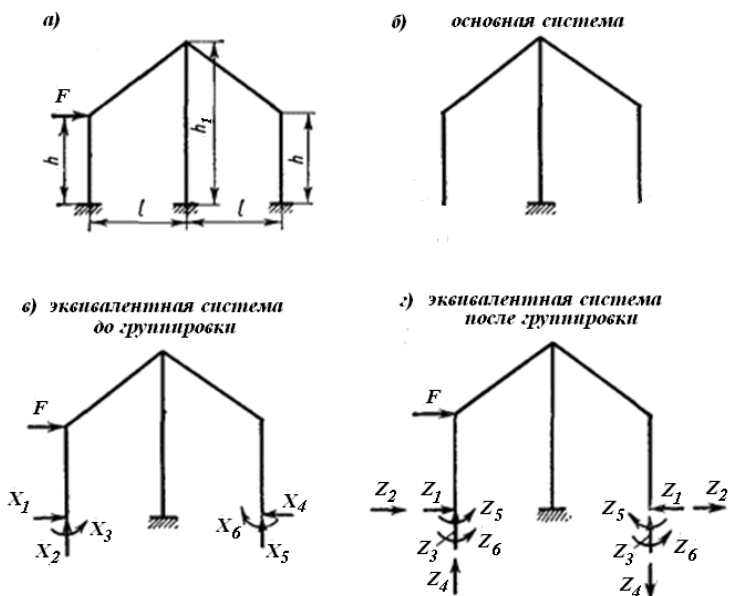


Рис. 4.6

Если же за неизвестные принять не силы  $X_1, X_2, X_3, X_4, X_5$  и  $X_6$ , а группы сил  $Z_1, Z_2, Z_3, Z_4, Z_5$  и  $Z_6$  (рис. 4.6, г) при той же основной системе, то многие коэффициенты окажутся равными нулю, так как будут определяться произведением симметричных эпюр на обрат-

но симметричные эпюры. При этом  $Z_1$  будет представлять собой две одновременно действующие равные и противоположно направленные горизонтальные силы;  $Z_2$  — две равные горизонтальные силы, направленные в одну сторону;  $Z_3$  — две равные вертикальные силы, направленные вверх;  $Z_4$  — две равные вертикальные силы, направленные в противоположные стороны;  $Z_5$  — два равных противоположно направленных момента;  $Z_6$  — два равных момента, действующих в одном направлении.

$$\begin{cases} X_1 \cdot \delta_{11} + X_2 \cdot \delta_{12} + X_3 \cdot \delta_{13} + X_4 \cdot \delta_{14} + X_5 \cdot \delta_{15} + X_6 \cdot \delta_{16} + \Delta_{1F} = 0 \\ X_1 \cdot \delta_{21} + X_2 \cdot \delta_{22} + X_3 \cdot \delta_{23} + X_4 \cdot \delta_{24} + X_5 \cdot \delta_{25} + X_6 \cdot \delta_{26} + \Delta_{2F} = 0 \\ X_1 \cdot \delta_{31} + X_2 \cdot \delta_{32} + X_3 \cdot \delta_{33} + X_4 \cdot \delta_{34} + X_5 \cdot \delta_{35} + X_6 \cdot \delta_{36} + \Delta_{3F} = 0 \\ X_1 \cdot \delta_{41} + X_2 \cdot \delta_{42} + X_3 \cdot \delta_{43} + X_4 \cdot \delta_{44} + X_5 \cdot \delta_{45} + X_6 \cdot \delta_{46} + \Delta_{4F} = 0 \\ X_1 \cdot \delta_{51} + X_2 \cdot \delta_{52} + X_3 \cdot \delta_{53} + X_4 \cdot \delta_{54} + X_5 \cdot \delta_{55} + X_6 \cdot \delta_{56} + \Delta_{5F} = 0 \\ X_1 \cdot \delta_{61} + X_2 \cdot \delta_{62} + X_3 \cdot \delta_{63} + X_4 \cdot \delta_{64} + X_5 \cdot \delta_{65} + X_6 \cdot \delta_{66} + \Delta_{6F} = 0 \end{cases} \quad (4.8)$$

Эпюры изгибающих моментов от указанных единичных групповых сил изображены на рис. 4.7, *г*; из них эпюры  $M_1$ ,  $M_3$  и  $M_5$  — симметричны (рис. 4.7, *а*, *в*, *д*), а эпюры  $M_2$ ,  $M_4$  и  $M_6$  — обратно симметричны (рис. 4.7, *б*, *г*, *е*).

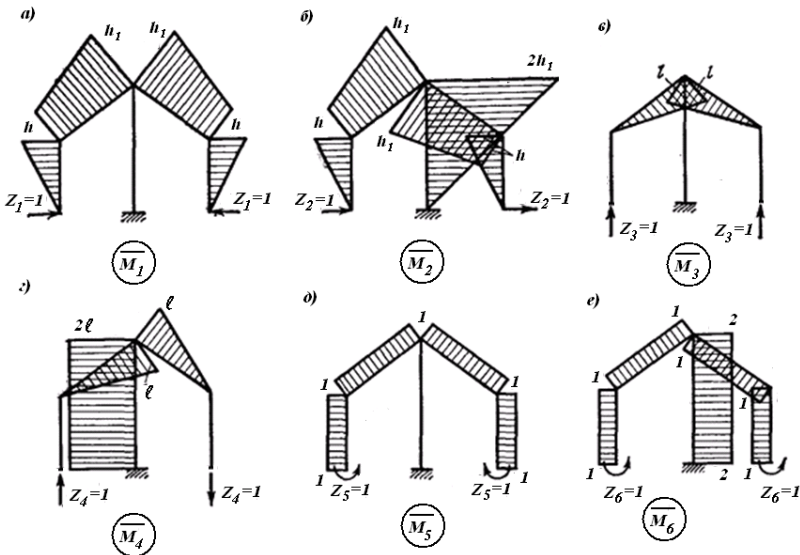


Рис. 4.7

Сопоставив две эквивалентные системы, изображенные на рис. 4.6,  $\vartheta$ ,  $z$ , нетрудно убедиться в том, что между лишними неизвестными  $X$  и  $Z$  существуют следующие зависимости [формулы (4.9)–(4.14)]:

$$Z_1 = \frac{X_1 + X_4}{2}, \quad (4.9)$$

$$Z_2 = \frac{X_1 - X_4}{2}, \quad (4.10)$$

$$Z_3 = \frac{X_2 + X_5}{2}, \quad (4.11)$$

$$Z_4 = \frac{X_2 - X_5}{2}, \quad (4.12)$$

$$Z_5 = \frac{X_3 + X_6}{2}, \quad (4.13)$$

$$Z_6 = \frac{X_3 - X_6}{2}. \quad (4.14)$$

В результате произведенной группировки неизвестных система канонических уравнений (4.8) распадется на две независимые системы, в одну из которых войдут только симметричные [система (4.15)], а в другую – обратно симметричные неизвестные [система (4.16)]. Здесь  $\delta_{ij}$  представляют собой групповые перемещения.

$$\begin{cases} Z_1 \cdot \delta_{11} + Z_3 \cdot \delta_{13} + Z_5 \cdot \delta_{15} + \Delta_{1F} = 0 \\ Z_1 \cdot \delta_{31} + Z_3 \cdot \delta_{33} + Z_5 \cdot \delta_{35} + \Delta_{3F} = 0 \\ Z_1 \cdot \delta_{51} + Z_3 \cdot \delta_{53} + Z_5 \cdot \delta_{55} + \Delta_{5F} = 0 \end{cases} \quad (4.15)$$

$$\begin{cases} Z_2 \cdot \delta_{22} + Z_4 \cdot \delta_{24} + Z_6 \cdot \delta_{26} + \Delta_{2F} = 0 \\ Z_2 \cdot \delta_{42} + Z_4 \cdot \delta_{44} + Z_6 \cdot \delta_{46} + \Delta_{4F} = 0 \\ Z_2 \cdot \delta_{62} + Z_4 \cdot \delta_{64} + Z_6 \cdot \delta_{66} + \Delta_{6F} = 0 \end{cases} \quad (4.16)$$

Таким образом, сложная система уравнений (4.8) благодаря искусственной группировке неизвестных распадается на две более простые (4.15) и (4.16). Объем вычислений уменьшается благодаря этому в несколько раз.

В дальнейшем неизвестные усилия будем обозначать буквой  $X$  независимо от того, являются ли они отдельными или групповыми.

Групповые перемещения определяются, как и обычные (негрупповые) перемещения, т. е. путем перемножения соответствующих эпюр, построенных для основной системы. Определение групповых перемещений не сложнее, чем обычных; оно также производится путем перемножения эпюр для половины рамы с удвоением результата. При наличии в раме средней стойки перемножение эпюр про-



изводится сначала для элементов одной половины рамы (без средней стойки), затем полученный результат удваивается и к нему прибавляется результат перемножения эпюр для средней стойки рамы.

### 4.3. Симметричные и обратно симметричные нагрузки

При действии только симметричной или только обратно симметричной нагрузки на симметричное сооружение задача еще более упрощается, так как в этом случае можно выбрать такую основную систему, что не только все единичные эпюры, но и грузовые будут симметричны или обратно симметричны. Вследствие этого не только многие из коэффициентов при неизвестных, но и некоторые из свободных членов системы канонических уравнений окажутся равными нулю.

Рассмотрим заданную раму (рис. 4.8, а), находящуюся под действием симметричной нагрузки. В ней шесть лишних неизвестных ( $n_{ст} = 6$ ). Соответственно, канонические уравнения будут иметь вид системы (4.8).

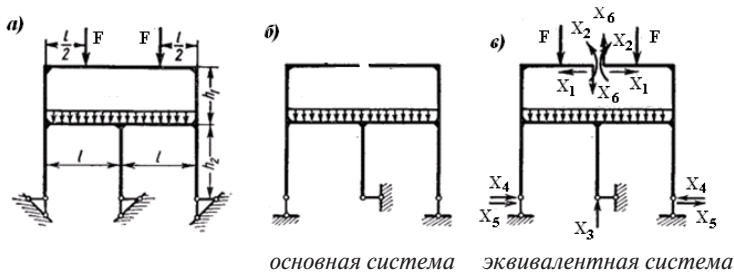


Рис. 4.8

Сделав разрез верхнего ригеля посередине и отбросив три опорных стержня, получим основную систему (рис. 4.8, б) и эквивалентную систему с симметричными и обратно симметричными неизвестными (рис. 4.8, в). Лишние неизвестные, расположенные не на оси симметрии и представляющие собой в данном случае горизонтальные составляющие крайних опорных реакций, сразу разложены на две группы сил —  $X_4$  и  $X_5$  (проведена группировка неизвестных). Эпюры изгибающих моментов для основной системы от всех единичных неизвестных и от нагрузки представлены на рис. 4.9, а–ж.

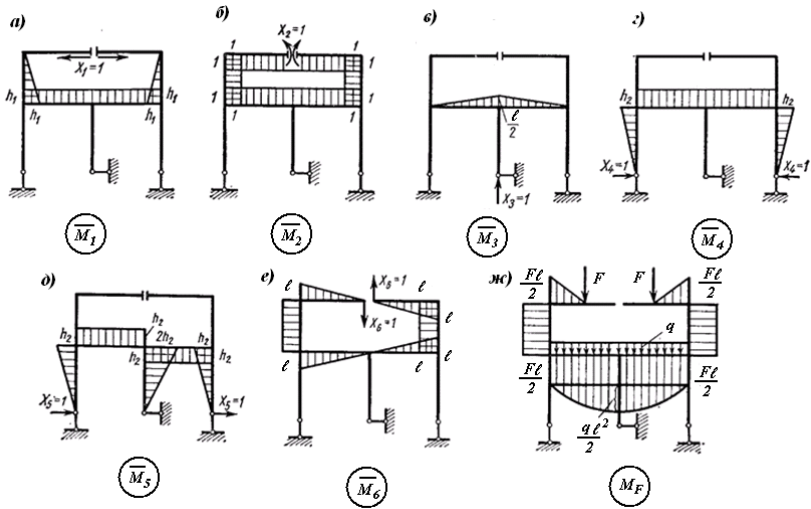


Рис. 4.9

Поскольку все неизвестные усилия были выбраны так, что разделились на две группы усилий – симметричные ( $X_1$ ,  $X_2$ ,  $X_3$  и  $X_4$ ) и обратно симметричные ( $X_5$  и  $X_6$ ), то система канонических уравнений (4.8) распадется на две независимые системы уравнений (4.17) и (4.18).

$$\begin{cases} X_1 \cdot \delta_{11} + X_2 \cdot \delta_{12} + X_3 \cdot \delta_{13} + X_4 \cdot \delta_{14} + \Delta_{1F} = 0 \\ X_1 \cdot \delta_{21} + X_2 \cdot \delta_{22} + X_3 \cdot \delta_{23} + X_4 \cdot \delta_{24} + \Delta_{2F} = 0 \\ X_1 \cdot \delta_{31} + X_2 \cdot \delta_{32} + X_3 \cdot \delta_{33} + X_4 \cdot \delta_{34} + \Delta_{3F} = 0 \\ X_1 \cdot \delta_{41} + X_2 \cdot \delta_{42} + X_3 \cdot \delta_{43} + X_4 \cdot \delta_{44} + \Delta_{4F} = 0 \end{cases} \quad (4.17)$$

$$\begin{cases} X_5 \cdot \delta_{55} + X_6 \cdot \delta_{56} + \Delta_{5F} = 0 \\ X_5 \cdot \delta_{65} + X_6 \cdot \delta_{66} + \Delta_{6F} = 0 \end{cases} \quad (4.18)$$

В системе (4.18) грузовые перемещения  $\Delta_{5F}$  и  $\Delta_{6F}$  равны нулю, так как они определяются перемножением обратно симметричных эпюр  $M_5$  и  $M_6$  с симметричной эпюрой  $M_F$  от нагрузки (рис. 4.9). Следовательно, система уравнений (4.18), содержащая обратно симметричные неизвестные, может быть представлена в виде системы (4.19):

$$\begin{cases} X_5 \cdot \delta_{55} + X_6 \cdot \delta_{56} = 0 \\ X_5 \cdot \delta_{65} + X_6 \cdot \delta_{66} = 0 \end{cases} \quad (4.19)$$

Отсутствие свободных членов указывает на равенство нулю обратно симметричных неизвестных  $X_5$  и  $X_6$ , в чем легко убедиться, подставляя в эту систему значения  $X_5 = 0$  и  $X_6 = 0$ .

Если бы на данную систему (рис. 4.8, *a*) действовала обратно симметричная нагрузка, то, очевидно, были бы равны нулю все симметричные неизвестные ( $X_1, X_2, X_3$  и  $X_4$ ).

Обобщая полученный результат, можно сформулировать два правила:

1) при действии на симметричную систему симметричной нагрузки в ней возникают одни лишь симметричные неизвестные, обратно симметричные неизвестные при этом равны нулю;

2) при действии на симметричную систему обратно симметричной нагрузки в ней возникают одни лишь обратно симметричные неизвестные, а симметричные неизвестные при этом равны нулю.

#### 4.4. Способ преобразования нагрузки

Правила, сформулированные в предыдущем параграфе, могут быть использованы при расчете симметричного сооружения на несимметричную нагрузку, так как любую нагрузку, приложенную к симметричному сооружению, можно разложить на составляющие симметричного и обратно симметричного вида.

Пусть на симметричную систему (рис. 4.10) действуют равномерно распределенная нагрузка интенсивностью  $q$  и сосредоточенная сила  $F$ , приложенные несимметрично. Эта система шесть раз статически неопределима ( $n_{ст} = 6$ ), а значит, имеет шесть неизвестных усилий. Так как в этой системе грузовая эпюра не симметрична и не обратно симметрична, то канонические уравнения примут вид системы (4.8). В этой системе только часть коэффициентов обнулится, и система уравнений распадется на две — симметричную и обратно симметричную.

Разложим нагрузку  $q$  и силу  $F$  на составляющие симметричного (рис. 4.11, *a*) и обратно симметричного (рис. 4.11, *б*) вида. Сумма этих нагрузок в каждой точке оси ригеля равна заданной нагрузке. В самом деле, в результате сложения нагрузок в системах, изображенных на рис. 4.11, *a*, *б*, левый ригель окажется загруженным

лишь равномерно распределенной нагрузкой  $q$ , а правый — сосредоточенной силой  $F$ .

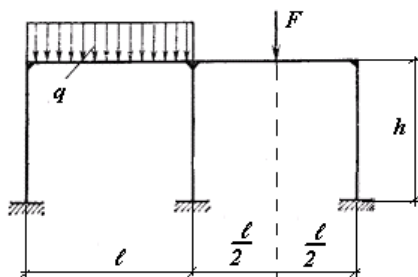


Рис. 4.10

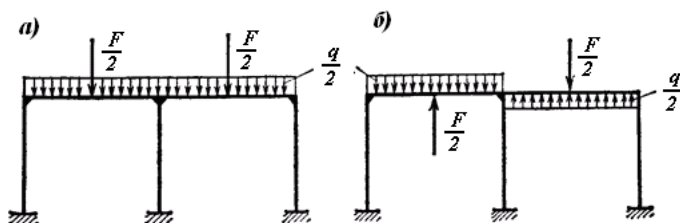


Рис. 4.11

В эквивалентной системе с симметричной нагрузкой (рис. 4.12, *а*) будут действовать одни лишь симметричные неизвестные, а именно групповые силы  $X_1$ ,  $X_2$  и  $X_3$ . Обратные симметричные  $X_4$ ,  $X_5$  и  $X_6$  при этом обращаются в нуль. Канонические уравнения системы (4.8) в этом случае упростятся и примут вид системы уравнений (4.20):

$$\begin{cases} X_1 \cdot \delta_{11} + X_2 \cdot \delta_{12} + X_3 \cdot \delta_{13} + \Delta_{1F} = 0 \\ X_1 \cdot \delta_{21} + X_2 \cdot \delta_{22} + X_3 \cdot \delta_{23} + \Delta_{2F} = 0 \\ X_1 \cdot \delta_{31} + X_2 \cdot \delta_{32} + X_3 \cdot \delta_{33} + \Delta_{3F} = 0 \end{cases} \quad (4.20)$$

В эквивалентной системе с обратно симметричной нагрузкой (рис. 4.12, *б*) будут действовать только обратно симметричные лишние неизвестные  $X_4$ ,  $X_5$  и  $X_6$ , а симметричные  $X_1$ ,  $X_2$  и  $X_3$  при этом обращаются в нуль.

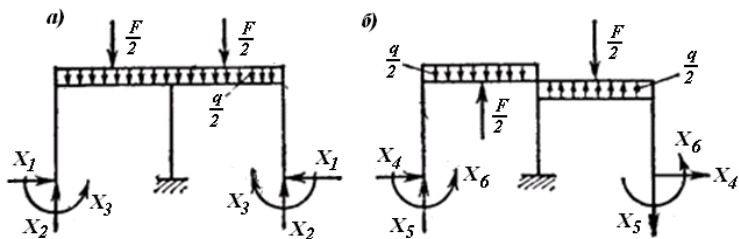


Рис. 4.12

Канонические уравнения (4.8) в этом случае также упростятся и примут вид системы (4.21):

$$\begin{cases} X_4 \cdot \delta_{44} + X_5 \cdot \delta_{45} + X_6 \cdot \delta_{46} + \Delta_{4F} = 0 \\ X_4 \cdot \delta_{54} + X_5 \cdot \delta_{55} + X_6 \cdot \delta_{56} + \Delta_{5F} = 0 \\ X_4 \cdot \delta_{64} + X_5 \cdot \delta_{65} + X_6 \cdot \delta_{66} + \Delta_{6F} = 0 \end{cases} \quad (4.21)$$

Способ преобразования нагрузки путем разложения ее на симметричную и обратно симметричную нагрузки в большинстве случаев не упрощает вычисления грузовых перемещений  $\Delta$  системы канонических уравнений, а потому применение его в таких случаях нецелесообразно.

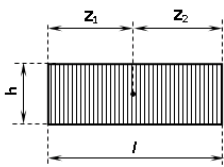
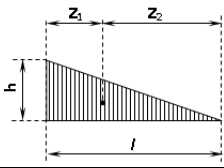
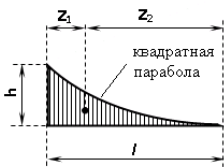
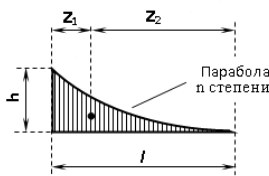
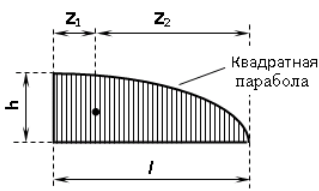
#### 4.5. Вопросы для самоконтроля

1. Пояснить принцип использования симметрии системы.
2. Сформулировать правила упрощения расчетов систем.
3. Указать параметры, за счет которых происходит упрощение расчета сложных систем.
4. Сформулировать принцип группировки неизвестных усилий.
5. Сформулировать правило преобразования нагрузки.

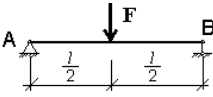
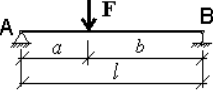
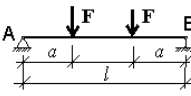
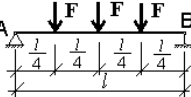
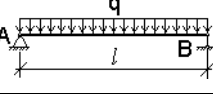
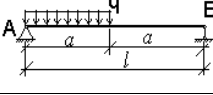
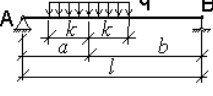
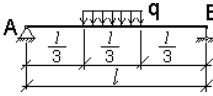
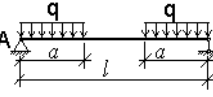
## БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Дарков, А.В. Строительная механика [Электронный ресурс] : учебник / А.В. Дарков, В.А. Шапошников. – 12-е изд., стер. – СПб. : Лань, 2010. – 656 с. – (Учебники для вузов. Специальная литература).
2. Шапошников, Н.Н. Строительная механика [Электронный ресурс] : учебник / Н.Н. Шапошников, Р.Е. Кристалинский, А.В. Дарков; подобщ. ред. Н.Н. Шапошникова. – 13-е изд., перераб. и доп. – СПб. : Лань, 2012. – 704 с. – (Учебники для вузов. Специальная литература).
3. Анохин, Н.Н. Строительная механика в примерах и задачах : учеб. пособие для вузов. В 2 ч. Ч. 1. Статически определимые системы / Н.Н. Анохин. – 2-е изд., доп. и перераб. – М. : АСВ, 2007. – 334 с.
4. Анохин, Н.Н. Строительная механика в примерах и задачах : учеб. пособие для вузов. В 2 ч. Ч. 2. Статически неопределимые системы / Н.Н. Анохин. – 2-е изд., доп. и перераб. – М. : АСВ, 2007. – 464 с.

Координаты центров тяжести и площадей фигур

| Фигура  | Площадь<br>$\Omega$ | Абсциссы центра тяжести |                      |
|---|---------------------|-------------------------|----------------------|
|   |                     | $Z_1$                   | $Z_2$                |
|    | $hl$                | $\frac{l}{2}$           | $\frac{l}{2}$        |
|    | $\frac{hl}{2}$      | $\frac{l}{3}$           | $\frac{2l}{3}$       |
|    | $\frac{hl}{3}$      | $\frac{l}{4}$           | $\frac{3l}{4}$       |
|   | $\frac{hl}{n+1}$    | $\frac{l}{n+2}$         | $\frac{(n+1)l}{n+2}$ |
|  | $\frac{2hl}{3}$     | $\frac{3l}{8}$          | $\frac{5l}{8}$       |

Фиктивные реакции нагруженного пролета

| Расчетная схема, нагрузка   | Фиктивные реакции                 |                                   |
|---|-----------------------------------|-----------------------------------|
|   | $A_n^\phi$                        | $B_n^\phi$                        |
|    | $\frac{Fl^2}{16}$                 | $\frac{Fl^2}{16}$                 |
|    | $\frac{Fab(l+b)}{6l}$             | $\frac{Fab(l+a)}{6l}$             |
|    | $\frac{Fa(l-a)}{2}$               | $\frac{Fa(l-a)}{2}$               |
|    | $\frac{5Fl^2}{32}$                | $\frac{5Fl^2}{32}$                |
|    | $\frac{ql^3}{24}$                 | $\frac{ql^3}{24}$                 |
|   | $\frac{3ql^3}{128}$               | $\frac{7ql^3}{384}$               |
|  | $\frac{qkb(l^2 - b^2 - k^2)}{3l}$ | $\frac{qka(l^2 - b^2 - k^2)}{3l}$ |
|  | $\frac{13ql^3}{648}$              | $\frac{13ql^3}{648}$              |
|  | $\frac{qa^2(3l-2a)}{12}$          | $\frac{qa^2(3l-2a)}{12}$          |

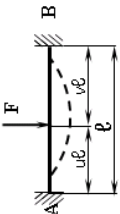
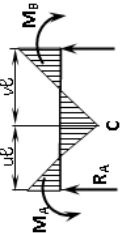
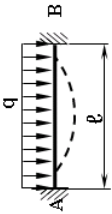
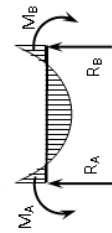
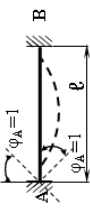
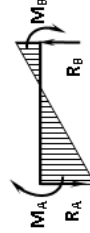

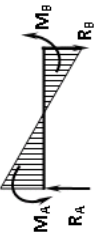


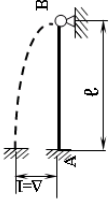
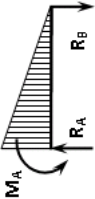
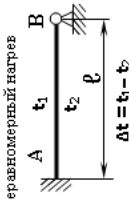
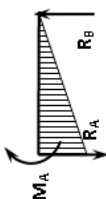
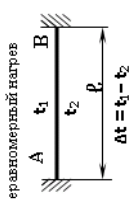
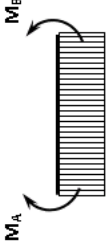
Эпюры статически определимых однопролетных балок

| Шарнирно-опертая по концам балка   | Консольная балка  |
|--|---|
| <p> <math>V_A = F \frac{b}{l}</math>   <math>V_B = F \frac{a}{l}</math><br/> <math>M</math><br/> <math>Q</math> </p>   | <p> <math>V_A = F</math><br/> <math>M_A = F a</math><br/> <math>M</math><br/> <math>Q</math> </p>               |
| <p> <math>V_A = \frac{q l}{2}</math>   <math>V_B = -\frac{q l}{2}</math><br/> <math>M</math><br/> <math>Q</math> </p>  | <p> <math>V_A = q l</math><br/> <math>M_A = \frac{q l^2}{2}</math><br/> <math>M</math><br/> <math>Q</math> </p> |
| <p> <math>V_A = \frac{M}{l}</math>   <math>V_B = -\frac{M}{l}</math><br/> <math>M</math><br/> <math>M</math><br/> <math>Q</math><br/> <i>параллельные</i> </p> | <p> <math>V_A = 0</math><br/> <math>M_A = M</math><br/> <math>M</math><br/> <math>Q</math> </p>                 |

Эторы изгибающих моментов в однопролетных балках

| Схема балки и воздействия на нее | Эпюры изгибающих моментов | $M_A$                       | $M_B$ | $M_C$                              | $R_A$                     | $R_B$                     |
|----------------------------------|---------------------------|-----------------------------|-------|------------------------------------|---------------------------|---------------------------|
|                                  |                           | $F l \frac{v}{2} (1 - v^2)$ | 0     | $\frac{F l}{2} u^2 v (3 - u)$      | $\frac{F v}{2} (3 - v^2)$ | $\frac{F u^2}{2} (3 - u)$ |
|                                  |                           | $\frac{q l^2}{8}$           | 0     | С-средина<br>$\frac{q l^2}{16}$    | $\frac{5 q l}{8}$         | $\frac{3 q l}{8}$         |
|                                  |                           | $\frac{3 E I}{l}$           | 0     | С-средина<br>$\frac{3 E I}{2 l}$   | $\frac{3 E I}{l^2}$       | $\frac{3 E I}{l^2}$       |
|                                  |                           | $\frac{3 E I}{l^2}$         | 0     | С-средина<br>$\frac{3 E I}{2 l^2}$ | $\frac{3 E I}{l^3}$       | $\frac{3 E I}{l^3}$       |

|   |   |           |           |           |            |            |
|---|---|-----------|-----------|-----------|------------|------------|
| <p>Схема балки и воздействия на нее</p>  | <p>Эпюры изгибающих моментов</p>  | $M_A$     | $M_B$     | $M_C$     | $R_A$      | $R_B$      |
|    |                                   | $ql^2/12$ | $ql^2/12$ | $ql^2/12$ | $ql/2$     | $ql/2$     |
|    |                                   | $4EI/l$   | $2EI/l$   | $EI/l$    | $6EI/l^2$  | $6EI/l^2$  |
|    |                                   | $6EI/l^2$ | $6EI/l^2$ | $0$       | $12EI/l^3$ | $12EI/l^3$ |

| Схема балки и воздействия на нее  | Эпюры изгибающих моментов  | $M_A$                          | $M_B$                        | $M_C$                            | $R_A$                           | $R_B$                           |
|---|--|--------------------------------|------------------------------|----------------------------------|---------------------------------|---------------------------------|
|                              |  | $\frac{3EI}{l^2}$              | 0                            | С-середина<br>$\frac{3EI}{2l^2}$ | $\frac{3EI}{l^3}$               | $\frac{3EI}{l^3}$               |
| <p>Неравномерный нагрев</p>  |  | $\frac{3EI\alpha\Delta t}{2h}$ | 0                            | $\frac{3EI\alpha\Delta t}{4h}$   | $\frac{3EI\alpha\Delta t}{2hl}$ | $\frac{3EI\alpha\Delta t}{2hl}$ |
| <p>Неравномерный нагрев</p>  |  | $\frac{EI\alpha\Delta t}{h}$   | $\frac{EI\alpha\Delta t}{h}$ | $\frac{EI\alpha\Delta t}{h}$     | 0                               | 0                               |

Примечание:  $\alpha$  – температурный коэффициент линейного расширения,  $h$  – высота поперечного сечения

Определение коэффициентов фокусных отношений

| Схема опирания крайнего пролета балки | Коэффициенты фокусных отношений |
|---------------------------------------|---------------------------------|
|                                       | $k_n^л = \infty$                |
|                                       | $k_n^л = \infty$                |
|                                       | $k_n^л = \infty$                |
|                                       | $k_n^{np} = 2$                  |
|                                       | $k_n^{np} = \infty$             |
|                                       | $k_n^{np} = \infty$             |

*Общие указания по оформлению расчетно-графических работ*

1. Расчетно-графическая работа (РГР) должна быть выполнена на стандартных листах бумаги формата А4 (210×297 мм).
2. Все записи и расчеты производятся чернилами на одной стороне листа, рисунки выполняются карандашом.
3. Расчеты должны содержать решения в общем (буквенном) виде и числовое решение.
4. Все вычисления производятся с точностью до 0,001.
5. Титульный лист оформляется согласно образцу, приведенному ниже.
6. Полностью выполненная и оформленная РГР сшивается (скорошиватель) и сдается в указанные сроки.

ФГБОУ ВО «ТОЛЬЯТТИНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»  
Архитектурно-строительный институт  
Кафедра «Промышленное, гражданское строительство и городское хозяйство»

**Расчетно-графическая работа № 1**

**«Статически определимые системы»**

Студент Иванов И.И.  
Группа ПГСз-431  
Вариант 4/5  
Проверил Ефименко Э.Р.

Тольятти 2018

На всех листах выполняется рамка:

отступ слева 2 см  
отступ справа 0,5 см  
отступ сверху 0,5 см  
отступ снизу 0,5 см