МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Тольяттинский государственный университет»

Институт математики, физики и информационных технологий
(наименование института полностью)
Кафедра «Высшая математика и математическое образование»
(наименование кафедры)

44.04.01 «Педагогическое образование»
(код и наименование направления подготовки)
«Математическое образование»
(направленность (профиль))

МАГИСТЕРСКАЯ ДИССЕРТАЦИЯ

на тему **«МЕТОДИКА ОБУЧЕНИЯ ТЕМЕ «ПЛОЩАДИ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ФИГУР» В КУРСЕ ГЕОМЕТРИИ ОБЩЕОБРАЗОВАТЕЛЬНОЙ ШКОЛЫ»**

Студент	Т.М. Бывшева (И.О. Фамилия)	_______________ (личная подпись)
Научный руководитель	И.В. Антонова (И.О. Фамилия)	_______________ (личная подпись)

Руководитель программы д.п.н., профессор, Р.А. Утеева _______________
(ученая степень, звание, И.О. Фамилия) (личная подпись)
«____»__________2018 г.

Допустить к защите

Заведующий кафедрой д.п.н., профессор, Р.А. Утеева _______________
(ученая степень, звание, И.О. Фамилия) (личная подпись)
«____»__________2018 г.

Тольятти 2018

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Актуальность исследования. В настоящее время необходимыми атрибутами профессиональной компетентности любой личности является качественное геометрическое образование, развитые пространственное воображение и логическое мышление. Изучение геометрии также формирует у учащихся умение обосновывать истинность утверждений в любой сфере деятельности [43, С. 4].

Геометрия, как один из предметов школьного курса, занимает одно из главных мест и оказывает значительное влияние на духовное становление личности обучающегося. Обучение геометрии способствует формированию у школьников общечеловеческой культуры, накоплению ими необходимого нравственного и эстетического потенциала; знакомству с явлениями окружающего мира; развитию у них пространственного воображения и творческих способностей; формирует их мировоззрение и интеллект [23].

Вместе с этим, согласно ФГОС среднего общего образования, который ориентирован на обеспечение сформированности у учащихся основ логического, алгоритмического и математического мышления; умений применять полученные знания при решении различных задач; иметь представление о математике как части общечеловеческой культуры, универсальном языке науки, позволяющем описывать и изучать реальные процессы и явления, изучение ими геометрии должно отражать: 1) овладение геометрическим языком; развитие умения использовать его для описания предметов окружающего мира; развитие пространственных представлений, изобразительных умений, навыков геометрических построений; 2) формирование систематических знаний о плоских фигурах и их свойствах, представлений о простейших пространственных телах; развитие умений моделирования реальных ситуаций на языке геометрии, исследования построенной модели с использованием геометрических понятий и теорем, аппарата алгебры, решения геометрических и практических задач [59, С. 13-14].

Методическим аспектам обучения учащихся теме "Площади фигур" в курсе геометрии общеобразовательной школы посвящены исследования Н.М. Бескина [4], Р.В. Гангнуса [10], В.А. Далингера [13-16], П.А. Карасева [20], С.Е. Ляпина [29], В.В. Орлова, Н.С. Подходовой, Н.Л. Стефановой [28], А.А. Темербековой [58] и др.

Проблемы выявления методических особенностей обучения учащихся теме «Площади геометрических фигур» в школьном курсе геометрии рассмотрены в ряде диссертационных исследований. Так, нами определено, что «в диссертации Е.Е. Овчинниковой (2002 г.) описан метод площадей и выделены его характеристики; разработана классификация задач, решаемых с его применением; раскрыта методика обучения методу площадей, включающая в себя серии планиметрических задач; представлена аналогия в применении метода площадей и объемов для планиметрических и стереометрических задач. Ш.С. Гаджиагаевым (2006 г.) обоснована целесообразность и предложены различные пути реализации более раннего изучения площадей геометрических фигур в 5-9 классах по сравнению с традиционной методикой; разработана методика изучения площадей и объемов геометрических фигур на основе реализации принципа укрупнения дидактических единиц в основной школе. М.А. Казаковой (2006 г.) обоснована целесообразность и возможности альтернативного подхода к изучению темы «Площадь» с опорой на понятие «полоса». Ш. Мусавировым (2009 г.); разработана методика введения в курс планиметрии элементов метрологии на доступном для учащихся уровне; предложена конкретная методика единого подхода к изучению геометрических величин в курсе планиметрии и физики» [16].

Таким образом, актуальность темы данного исследования обусловлена сложившимся к настоящему времени *противоречием* между необходимостью обучения учащихся теме «Площади фигур» в курсе геометрии общеобразовательной школы и фактическим состоянием методики ее обучении учащихся на уроках геометрии.

Приведенное противоречие позволило сформулировать **проблема исследования:** каковы методические особенности обучения учащихся теме «Площади геометрических фигур» в курсе геометрии общеобразовательной школы?

Объект исследования: процесс обучения геометрии учащихся общеобразовательной школы.

Предмет исследования: методические особенности обучения учащихся теме «Площади фигур» в курсе геометрии общеобразовательной школы.

Цель исследования заключается в выявлении методических особенностей обучения теме «Площади фигур» учащихся общеобразовательной школы и разработке методических материалов по теме исследования (методического проекта по изучению темы «Площадь поверхности пирамиды»; системы задач).

Гипотеза исследования основана на предположении о том, что разработанные методические материалы, учитывающие методические особенности обучения учащихся теме «Площади фигур» в курсе геометрии общеобразовательной школы, могут повысить качество математической подготовки обучающихся старших классов.

Задачи исследования:

1. Раскрыть методику введения понятия площади.

2. Выявить методические особенности обучения учащихся решению задач по теме «Площади фигур» в школьном курсе геометрии.

3. Рассмотреть методические особенности обучения теме «Площади фигур» учащихся 10-11-х классов общеобразовательной школы.

4. Представить методические рекомендации по обучению теме «Площади фигур» в курсе геометрии общеобразовательной школы.

5. Раскрыть технологию творческих мастерских как одну из форм организации обучения теме «Площади фигур» учащихся старших классов общеобразовательной школы.

6. Разработать системы задач по теме исследования для учащихся 10-11-х классов.

7. Представить результаты педагогического эксперимента.

Для решения поставленных задач применялись такие **методы исследования**, как: анализ работ по истории математики, научной и учебно-методической литературы, школьных программ, учебников, учебных пособий, изучение и обобщение школьной практики; анализ собственного опыта работы в школе.

Основные этапы исследования:

1 семестр (2016/17 уч.г.): анализ ранее выполненных исследований по теме диссертации, анализ школьных учебников, нормативных документов (стандартов, программ), анализ опыта работы школы по данной теме;

2 семестр (2016/17 уч.г.): определение теоретических и методических аспектов исследования по теме диссертации;

3 семестр (2017/18 уч.г.): разработка методики обучения теме «Площадь поверхности пирамиды» учащихся 11-х классов общеобразовательной школы в рамках технологии творческих мастерских;

4 семестр (2017/18 уч.г.): оформление диссертации, корректировка ранее представленных материалов, уточнение аппарата исследования, описание результатов экспериментальной работы, формулирование выводов.

Новизна проведенного исследования заключается в том, что в нем предложены методические рекомендации по обучению теме «Площади фигур» курсе геометрии общеобразовательной школы.

Теоретическая значимость исследования состоит в том, что в нем:

– раскрыта методика введения понятия площади;

– выявлены методические особенности обучения учащихся решению задач по теме «Площади геометрических фигур» в школьном курсе геометрии;

– рассмотрены методические особенности обучения теме «Площади геометрических фигур» учащихся 10-11-х классов общеобразовательной школы.

Практическую значимость результатов исследования составляют методические рекомендации обучения теме «Площади фигур» учащихся 10-11-х классов и разработанные методические материалы (методический проект по изучению темы «Площадь поверхности пирамиды»; системы задач), которые могут быть использованы учителями математики общеобразовательной школы и студентами педагогических направлений подготовки.

На защиту выносятся:

1. Методические рекомендации по обучению учащихся теме «Площади фигур» в курсе геометрии общеобразовательной школы.

2. Технология творческих мастерских как одна из форм организации обучения теме «Площадь поверхности пирамиды» учащихся старших классов общеобразовательной школы.

3. Системы задач по теме «Площади фигур» для учащихся 10-11 классов общеобразовательной школы.

Достоверность результатов и выводов, полученных в ходе проведенного исследования, обеспечивается сочетанием теоретических и практических методов исследования, анализом педагогической практики и личным опытом работы в общеобразовательной школе.

Апробация результатов исследования. Теоретические выводы и практические результаты исследования были апробированы на VIII международной научной конференции "Математика. Образование. Культура" (к 240-летию Карла Фридриха Гаусса), г. Тольятти, апрель 2017; первом этапе научной студенческой конференции “Дни науки” института математики, физики и информационных технологий ТГУ (г. Тольятти, апрель 2018 г.); I Поволжском педагогическом форуме «Система непрерывного педагогического образования: инновационные идеи, модели и перспективы» (г. Тольятти, 27-29 ноября 2017 г.).

Экспериментальная проверка предлагаемых методических рекомендаций была осуществлена в период педагогической и преддипломной практик на базе кафедры высшей математики и математического образования Тольяттинского государственного университета, а также в период производственной практики на базе МБУ «Школа №21» г.о. Тольятти и работы в нем в качестве действующего учителя математики.

Основные результаты исследования отражены в 2 публикациях [6; 17].

Магистерская диссертация состоит из введения, двух глав, заключения, списка литературы (74 наименований) и Приложений.

Объем работы составляет 104 страницы.

ГЛАВА I. ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ АСПЕКТЫ ОБУЧЕНИЯ УЧАЩИХСЯ ТЕМЕ "ПЛОЩАДИ ФИГУР" В КУРСЕ ГЕОМЕТРИИ ОБЩЕОБРАЗОВАТЕЛЬНОЙ ШКОЛЫ

§1. Методика введения понятия площади

Отметим, что «среди различных систем величин, изучаемых в школе на различных этапах обучения, с понятием площади плоской фигуры знакомятся учащиеся уже в начальной школе. На первых этапах обучения речь идет об интуитивном представлении, о площади, а не о строгом математическом обосновании этого понятия или об аксиоматическом его введении. Первоначально у учащихся представление о площади плоской фигуры связывается с подсчетом числа единичных квадратов (то есть квадратов, длины сторон которых равны линейной единице измерения) или долей таких квадратов, которые можно разметить на данной фигуре» [17].

В статье [6] нами описываются подходы к введению понятия площади в общеобразовательной школе, раскрытые в методической литературе 30-70-х годов XX века. Рассмотрим их.

Так, «В.Г. Чичигиным установлено, что в учебной и методической литературе по геометрии для средней школы 20-60-х годов 20 века отсутствовал единый подход к определению понятия площади фигуры, поэтому и обучающиеся, и учителя испытывали большие затруднения при изучении темы «Площади фигур». Автором выделены *три подхода* к определению понятия площади: *1.* Площадь фигуры как часть плоскости, занимаемой этой фигурой (А.Ю. Давидов; Н.А. Извольский). *2.* Площадь простого многоугольника как число, которое определяет размер части плоскости, ограниченной этим многоугольником (Н.А. Глаголев; М.В. Брадис). *3.* Площадь замкнутой фигуры как величина части плоскости, которая заключена внутри многоугольника или какой-нибудь другой плоской замкнутой фигуры (С.А. Богомолов; Н.М. Бескин; Ж. Адамар; А.П. Киселев).

Первое определение понятия площади В.Г. Чичигин относит к неудачным, так как под него в сущности может подходить также понятие многоугольника; *второе определение* – в методическом отношении считает наиболее доступным для учащихся; в *третьем определении* - необходимо дополнительно пояснить определяющее понятие величины, что и представлено, по мнению автора, в книге «Геометрия (систематический курс)» С.А. Богомолова, 1949 г. Кроме того, подчеркивается, что так как в основу изучения измерения линий положено измерение отрезков, то и в основу изучения площадей всех плоских прямолинейных фигур в школьном курсе геометрии может быть положено определение площади прямоугольника или определение площади треугольника» [6, С. 14].

Еще один из методистов 20 века Р.В. Гангнус пишет, что «*третий подход* к определению понятия площади относится к числу трудных для учащихся понятий и для того, чтобы учащиеся усвоили трактовку данного понятия, следует на практических примерах и геометрических фактах показать им эти сопоставления из практической жизни. К примеру, автор предлагает рассмотреть равны или не равны два участка земли или две стены, подлежащие окраске, тем самым подводя учащихся к понятию о *величине ограниченной области*. В пособии приводится шесть аксиом двух фигур, которые имеют равные внутренние области. Приводит это к тому, что внутренняя область фигуры есть понятие категории величины, а площадь есть величина внутренней области фигуры. Далее учащимся предстоит найти меру площади» [10].

Определено, что П.А. Карасев [20, С. 116] при введении понятия площади применяет два вида *измерения*: *прямые* и *косвенные*. Так, «*прямое измерение* – это измерение, при котором нужно измерить границы земельного участка, мерная лента которой, прямо укладывается на границу и сосчитывается число метров, содержащихся в ней. *Косвенное измерение* - это величина, которая после измерения не измеряется, а вычисляется на основании данных, полученных от измерения. То есть, при измерении площади треугольного участка, будут измеряться два отрезка: высота и основание, а площадь треугольника будет вычислена по формуле. В начальной школе учащиеся знакомятся с двумя видами измерения» [17].

Автор подчеркивает, что большое внимание на начальном этапе следует уделить методике изучения площади. Если этого не произойдет, то «у класса проявляются трудности: ученики плохо представляют единицу измерения площади; они представляют, что площадь измеряется линейным метром, в двух направлениях; отсюда получается непонимание, как вычислять площади прямоугольника, могут путать периметр с площадью и так далее. Для того чтобы эти недостатки избежать ученику требуется:

1) самостоятельно составить и иметь при себе таблицу с единицами измерения площадей;

2) четко понимать процесс сравнения измеряемой площади с квадратной единицей. Учитель при подготовке к уроку на изучение площадей должен построить урок таким образом, чтобы ученик, начав измерять площадь прямоугольника прямым способом, почувствовал сложность этого способа и его неудобство и стал использовать косвенный способ измерения площади» [20, С. 119].

Рассмотрим следующий подход к определению понятия площади.

Нами установлено, что «С.Е. Ляпин и др. аналогично Н.А. Глаголеву, под площадью понимают - некоторое число, определяющее размер части плоскости, ограниченной контуром фигуры, то есть когда площадь определяется как положительно число, которое ставится в соответствие каждому многоугольника и выполняются следующие положения:

1) равным многоугольникам соответствуют равные числа;

2) площадь многоугольника, состоящего из нескольких частей, равна сумме площадей этих частей;

3) некоторому определенному многоугольнику соответствует число 1» [17, С. 15].

Еще с начальной школы складывается представление о площади фигуры как о величине части плоскости, ограниченной контуром этой фигуры. В

5 классе ученики при выполнении заданий на нахождение площади прямоугольника находят такое число, которое показывает, из скольких квадратных единиц может быть составлен данный прямоугольник, а уже в 6 классе ученики знакомятся с тем фактом, что площадь прямоугольника может быть выражена дробным числом.

С.Е. Ляпин и др. отмечают, что в 8 классе, при объяснении темы «Площадь многоугольника», задача учителя состоит в том, чтобы систематизировать, дополнить и обосновать те знания и представления учащихся, которые были получены ранее [39, С. 711].

В статье [6] отмечается, что «Н.А. Извольский, описывая вопрос методики измерения площадей многоугольников, обращает внимание на две особенности: 1) необходимости понимания учащимися того, что измерение любой площади (F) можно произвести, полагая площадь (K) за единицу измерения площадей (площадь F измеряется площадью K). Данный процесс связан с большой подготовительной работой, а именно: надо предварительно эти площади превратить в площади прямоугольников с одинаковыми, например, основаниями; 2) установления зависимости между измерением площади той или иной фигуры и измерениями определенных отрезков, которые относятся к ней.

М.М. Шидловская, анализируя курсы геометрии Ж. Адамара, Д.И. Перепелкина, показывает, что в них понятие площади определяется как некоторое положительное число, ставящееся в соответствие каждому многоугольнику, при этом выполняются и доказываются положения о: а) равенстве многоугольников, имеющих равные площади; б) многоугольнике, составленном из нескольких частей, и как следствие число, ему соответствующее, является равным сумме чисел, соответствующих каждой его части; в) площади некоторого многоугольника, принимаемой за единицу. Автор подчеркивает, что построение темы «Площадь многоугольника» в школе не может быть проведено с их учетом; при ее объяснении учитель должен опереться на имеющиеся у учащихся представления и знания, дополнить их, привести определенные обоснования» [16, С. 15].

Вместе с этим, в нашей работе раскрыт подход Н.М. Бескина к проблеме изложения учения о площадях, представленного в школьном курсе геометрии 30-70-х годов XX века.

Так, нами установлено, что автором описывается проблема «изложения учения о площадях, которая сводится к доказательству того, что площади образуют *класс геометрических непрерывных величин*:

1. Для того, чтобы множество $\{a\}$ образовало класс величин необходимо, чтобы множество было упорядоченным. *Упорядоченное множество* – это множество, для каждого из элементов которого должно быть установлено понятие «больше» и «меньше» и для любых двух различных элементов a_1 и a_2 должно иметь место одно из двух соотношений: $a_1 < a_2$ или $a_1 > a_2$. Так же должны быть установлены понятия «суммы» и «разности».

2. Для геометрических величин должно быть установлено понятие «части» и аксиома: если a есть часть b, то $a < b$. *3.* Для *непрерывного класса* величин должна выполняться аксиома Дедекинда, которая гласит: если все точки разбиты на два непустых класса, причем все точки первого класса расположены левее всех точек второго, то существует, либо самая правая точка первого класса, либо самая левая точка второго.

Н.М. Бескин обращает внимание на важную особенность в теории геометрических величин: возможность установить взаимно однозначное соответствие между данным множеством и множеством действительных чисел с сохранением порядка, это значит, что если элементу a_1 данного множества соответствует действительное число p_1, а элементу a_2 - действительное число p_2, то из $a_1 < a_2$ вытекает $p_1 < p_2$» [17].

Нами также были проанализированы действующие учебники геометрии для основной школы Л.С. Атанасяна [8], А.В. Погорелова [37], И.М.

Смирновой [54], И.Ф. Шарыгина [67] на предмет методики определения понятия площади.

В учебном пособии А.В. Погорелова [37] вводится изначально определение *простой геометрической фигуры*, далее автор рассматривает *понятие площади* как *положительную величину*, численное значение которой обладает тремя определенными свойствами. Стоит отметить, что эти свойства у Л.С. Атанасяна рассмотрены отдельно. «1. Равные многоугольники имеют равные площади. 2. Если многоугольник составлен из нескольких многоугольников, то его площадь равна сумме площадей этих многоугольников. 3. Площадь квадрата равна квадрату его стороны» [8, С. 119].

Если сравнивать учебные пособия И.Ф. Шарыгина с Л.С. Атанасяна, то И.Ф. Шарыгин определяет сначала площадь через *характеристику геометрической фигуры*, которая размещена на плоскости или на другой поверхности, после этого вводит определение понятия *площади плоской фигуры* через число, ставящееся в соответствие некоторой ограниченной плоской фигуре. И только потом устанавливает четыре свойства этого числа и выясняет, как его можно найти; последним этапом доказываются два следствия из свойств площади [67, С. 340-341].

И.М. Смирнова под площадью фигуры понимает число, которое получается в ходе измерения и показывает, какое количество раз единичный квадрат и его соответствующие части укладываются в этой фигуре [54].

Таким образом, нами определено, что «в методической литературе понятие *площади* определяли через *площадь замкнутой фигуры* как *величину* части плоскости, которая заключена внутри многоугольника или какой-нибудь плоской замкнутой фигуры; через *площадь фигуры* - как *часть плоскости*, занимаемой этой фигурой или как *величину ее внутренней области*; через *площадь простого многоугольника* - как *число*, которое определяет размер части плоскости, ограниченной этим многоугольником или как некоторое положительное число, ставящееся в соответствие каждому многоугольнику. В действующих учебниках геометрии для основной школы понятие площади вводится как положительная *величина*; *число*, ставящееся в соответствие некоторой ограниченной плоской фигуре; *число*, которое получается в ходе измерения и показывает, какое количество раз единичный квадрат и его соответствующие части укладываются в этой фигуре» [17, С. 17].

§2. Методические особенности обучения учащихся решению геометрических задач по теме «Площадь» в школьном курсе геометрии

Л.П. Шебанова в статье [68] отмечает, что важнейшей задачей обучения математике, как отмечается в ФГОС и программах, является обеспечение прочного и сознательного овладения учащимися математическими знаниями и умениями, нужными в повседневной жизни, достаточными как для изучения в школе, так и для продолжения образования после школы.

Что же такое задача в геометрии? Как показано в исследованиях по теории и методике обучения математике, задача - важнейшее средство формирования системы знаний у учащихся, развития их мышления, обучения их действиям по самостоятельному приобретению знаний. Надежный критерий осознанного и творческого овладения учащимися знаниями, умениями и навыками является умение решать задачи. Автор статьи отмечает, что, несмотря на то, что у учащихся есть формальные знания по геометрии, но при решении задач они испытывают значительные трудности. Умение решать задачи – это сложное составное умение, предполагающее от учащегося умение осуществлять деятельность на каждом этапе решения задачи [68].

В.А. Далингер выделил следующие причины низкого уровня сформированности у учащихся умения решать задачи:

1) роль задач в учебном процессе понимается в узком смысле;

2) количество решаемых учащимися задач наносит ущерб обучающему эффекту;

3) усиленное внимание к оформлению решения, а не к процессу решения задачи;

4) большинство задач, рассматриваемых на уроках, решаются по образцу;

5) практически все рассматриваемые задачи даются учащимся в готовом виде, нет работы над составлением задач и их последующем решении;

6) школьные курсы страдают однообразием типологии задач;

7) мало рефлексивных задач, которые помогают учащимся осознать способы решения;

8) преобладание в учебниках единообразных задач;

9) в учебниках недостает варьирования содержания задач, при сохранении метода их решения;

10) большое число задач, имеющие одну и ту же структуру, в основном структуру малой сложности, в результате которых у учащихся пропадает интерес к задачам и т.д.[68].

Существуют этапы решения геометрических задач. Так, например, Л.П. Шебанова выделяет следующие этапы: анализ условия и требований задачи, поиск плана решения, реализация намеченного плана и обоснование того, что полученный результат удовлетворяет требованиям задачи; анализ проведенного решения и полученного результата.

Автор статьи выделила общую методическую схему обучения учащихся решению математических задач, которая состоит из этапов, которые определяют последовательность действий учителя:

1) *изучение содержания задачи* (выделить данные и искомые, сделать чертеж и т.п.);

2) *краткая запись* (записать данные и искомые задачи);

3) *поиск решения задачи* (установить есть ли похожие задачи с известным способом решения; провести общий анализ условия задачи и т.п.);

4) *план решения*;

6) *запись решения*, используя приемы записи;

7) *проверка решения*;

8) *исследование задачи*;

9) *запись ответа* (полного или краткого);

10) *обобщение способа решения задачи*, другие замечания (выполнить анализ информации, полученной в процессе решения задачи, выделить главное, обобщить, включить в систему прежнего знания о приемах работы над задачей) [65].

У Р.Ю. Костюченко, Н.А. Юдина выделяются только четыре этапа решения задач:

«1) осмысление условия задачи;

2) составление плана решения;

3) осуществление плана решения;

4) изучение найденного решения» [22].

Как отмечает автор, «решение задачи предполагает: 1) план, способ, метод осуществления требования задачи; 2) процесс осуществления требования задачи, процесс выполнения плана решения; 3) результат выполнения плана решения».

Л.П. Шебанова предлагает обучать учащихся решению задач постепенно, в течении длительного периода времени, на основе системно-деятельностного подхода, согласно ФГОС. Для реализации данного процесса в качестве основного средства использовать учебные задания, составленные в соответствии с основными этапами учебной деятельности по решению задач и выделенными действиями по решению задач.

Автор разделила учебные задачи по группам:

1. Учебные задачи, направленные на формирование умения изучать содержание задачи.

2. Учебные задания, направленные на формирование умения осуществлять поиск решения задачи

3. Учебные задачи, направленные на формирование умения оформлять решение

4. Учебные задачи, направленные на формирование умения анализировать полученное решение.

Р.Ю. Костюченко, Н.А. Юдина в своей статье [22] пишут о том, что основополагающим научным методом обучения должна являться, не только строгая логика и дедукция, но и аналогия.

Как отмечается в статье: «Использование в обучении такого метода научного познания, как аналогия, предполагает включенность ученика в процесс добывания знаний и, как следствие этого, более доступное, прочное и осознанное усвоение учебного материала» [22].

Авторы статьи отмечают, что в процессе решения задач у ученика происходит развитие потенциала. В.А. Далингер делает акцент на том, что «если раньше в методике обучения задачи рассматривались на всех этапах урока как цель обучения, то сейчас они рассматриваются как средство организации учебной деятельности учащихся».

При определении понятия «аналогия» Р.Ю. Костюченко и Н.А. Юдина выделяют три подхода «к введению этого понятия, причем, первые два – создают основу, а третий - предопределяет аналогию как метод обучения математике: как понятия, выражающего отношение сходства между различными объектами или явлениями; как формы умозаключения; как метод познания…. Метод аналогии определяется, как метод обучения, при котором обоснованно и целенаправленно реализуются следующие действия:

- составление и нахождение аналогов различных заданных объектов и отношений; составление задач, аналогичных заданным;

- перенос информации о модели на оригинал, в частности проведение рассуждений при решении задачи по аналогии с решением исходной задачи;

- проверка утверждений, сделанных по аналогии» [22].

Автор отмечает, что при решении задач, «метод аналогия» имеет большое значение при составлении плана решения и при изучении найденного решения. Причем, самым сложным этапом решения задач для ученика является – этап составление плана решения.

В.А. Далингер в статье [13] приводит пример таких задач, причем аналогию он предлагает для планиметрических и стереометрических задач. Рассмотрим пример задач.

«**Задача 1.** а) Докажите, что площадь круга равна площади треугольника, основание которого имеет ту же длину, что и окружность, а высота которого равна радиусу окружности;

б) Докажите, что объем шара равен объему пирамиды, площадь основания которой равна площади поверхности шара, а высота пирамиды равна радиусу шара» [13].

С.В. Менькова так же писала про «задачи – аналоги», только называла их «задачи-клоны», у которых, по сути, аналогия выступает на уровне подобия. «Задачи-клоны - задачи, одинаковые по сложности, способу решения, теоретическому базису, равноценные или близкие по трудности... Они являются одном из эффективных приемов организации контроля знаний, как внешнего, так и самоконтроля. Применение таких задач позволяет индивидуализировать контроль и исключить списывание, при этом задачи у всех одинаковой трудности. Задачи-клоны выполняют контрольно-диагностирующей, обучающую, тренировочную функции. В школьном курсе математики встречаются такие темы, которые, для прочного усвоения, требуют решения большого количество задач, отличающихся только числовыми данными. Количество задач для каждого учащегося индивидуально, в зависимости от интеллектуальных способностей и обучаемости каждого ученика. Но, авторы статьи отмечают, что не следует слишком увлекаться решением такого рода заданий, так как это может привести к процессу «натаскивание» учебного материала или заучивание решений» [27].

Автор отмечает, что, следует школьников учить составлять задачи-клоны, «для развития у них творческой активности, которая способствует выработке умений и навыков быстрого нахождении связей между решенными и более трудными новыми задачами» [27].

Следует отметить, что Алексеева Е.Е. в статье [2] так же пишет, что для формирования и развития познавательных, регулятивных и коммуникативных УУД у учащихся необходимо их обучать составлять задачи по геометрии. Причем, в связи с этим, автор предлагает включить в основной курс геометрии дополнительный образовательный модуль «Составление и решение геометрических задач».

Так, «по структуре «задачи-клоны» отличаются друг от друга: числовыми значениями, обозначениями (изменено название фигуры $DABC$, $DKMP$), незначительное варьирование чертежа (например, изменено расположение геометрического объекта, которые не привели к изменению способа решения задачи)» [27].

Иногда при варьировании числовых данных может произойти изменения уровня сложности задачи. В статье автор разбирает примеры, которые были получены неудачным варьированием числовых данных.

Задача 2. «Известны длины трех сторон треугольника: $a=3$, $b=5$, $c=7$. Вычислить площадь треугольника. (Наиболее рациональный способ решения – применение формулы Герона для нахождения площади треугольника)» [27].

Задача 3. «Известны длины трех сторон треугольника: $a=3$, $b=4$, $c=5$. Вычислить площадь треугольника» [27].

В результате варьирование числовых данных изменился способ решения задачи, из-за того, что треугольник оказался прямоугольным, а площадь прямоугольного треугольника находится через произведение катетов.

Задача 4. «Известны длины трех сторон треугольника: $a=1$, $b=4$, $c=5$. Вычислить площадь треугольника» [27].

Данная задача называется задачей-провокацией, так как треугольника с такими сторонами не существует, а, следовательно, задача не имеет решения.

Так же не стоит забывать о содержательных особенностях учебного материала. «Изменения каких-либо условий не должны приводить к серьезному техническому усложнению (упрощению) задачи, к частному случаю, к изменению теоретической основы решения» [27].

С.В. Менькова считает одним из необходимых профессиональных умений современного учителя – это умение составлять задачи-клоны.

Приведем пример «задач-клонов из заданий ЕГЭ «части С».

Задача 5. «Площадь боковой поверхности правильной четырёхугольной пирамиды $SABCD$ равна 104, а площадь полной поверхности этой пирамиды равна 120. Найдите площадь сечения, проходящего через ну S этой пирамиды и через диагональ её основания» [35].

Решение.

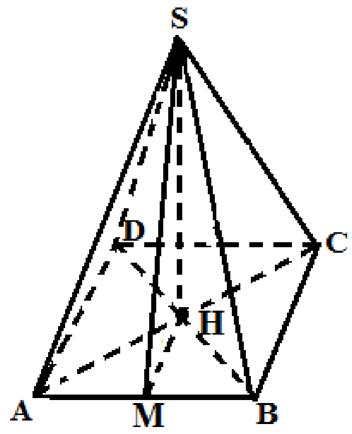


Рис. 1

Искомое сечение, проходящего через вершину S и через диагональ AC, есть треугольник SAC. Площадь основания пирамиды равна $S_{осн} = 120 - 104 = 16$, отсюда $AB = 4$. Площадь боковой грани равна $S_{бок} = \frac{104}{4} = 26$. Пусть SM — высота грани SAB (Рис. 1). Тогда $S_{SAB} = \frac{SM \cdot AB}{2} = SM \cdot 2 = 26 \Rightarrow SM = 13$. Пусть SH – высота пирамиды. Рассмотрим прямоугольный треугольник SMH:

$SH = \sqrt{SM^2 - MH^2} = \sqrt{165}$.

Тогда $S_{SAC} = \frac{SH \cdot AC}{2} = \sqrt{165} \cdot 2\sqrt{2} = 2\sqrt{330}$.

Ответ: $2\sqrt{330}$.

Задача 6. «Площадь боковой поверхности правильной четырёхугольной пирамиды $SABCD$ равна 144, а площадь полной поверхности этой пирамиды равна 180. Найдите площадь сечения, проходящего через ну S этой пирамиды и через диагональ её основания» [35].

Задача решается аналогично предыдущей.

Е.В. Потоскуев надежным помощником при решении геометрических задач видит наглядно и хорошо выполненный рисунок (чертеж), который помогает «понять, представить, проиллюстрировать то, о чем идет речь в задаче, теореме» [39].

Ключ, по мнению автора, к изучению геометрии – это «воплощенное в рисунок интуитивное, живое пространственное воображение в сочетании со строгой логикой мышления» [39].

Прежде чем приступить к решению задачи необходимо сначала наглядно представить, далее вообразить и только потом верно изобразить фигуры, о котором идет речь, причем, очень важным, отмечает автор, для «заданного рисунка» является простота и лаконичность. Чтобы не загромождать рисунок лишними данными, изображать следует только те фигуры (точки, отрезки, окружности и т.д.), которые необходимо при решении задачи [39].

Потоскуев Е.В. приводит примеры, рассмотрим один из них.

Задача 7. «Медиана BH треугольника ABC пересекается с его биссектрисой AM в точке K и делится этой точкой на два равных отрезка. Найдите площадь этого треугольника, если $BH = 16$см, $AM = 20$см» [39].

Решение.

Перед тем, как начать решать данную задачу следует изобразить ΔABC соответствующим ее условию. Допустим, выполнено изображение треугольника ABC

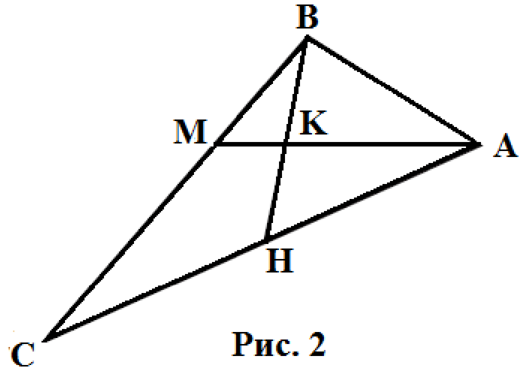


Рис. 2

(Рис. 2). Далее происходит анализ геометрической ситуации: «не в любом треугольнике биссектриса одного его угла делит пополам медиану, проведенную из вершины другого угла» [39].При решении задачи будем рассуждать следующим образом.

При решении задачи будем рассуждать следующим образом.

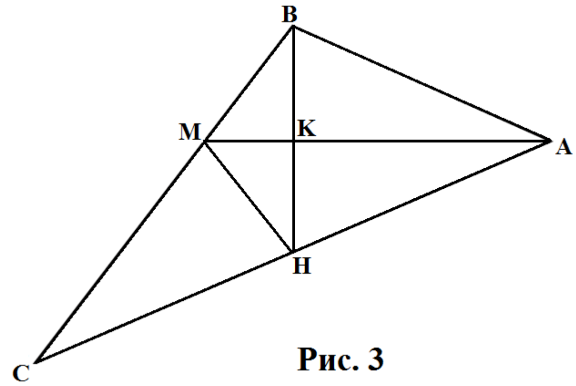


Рис. 3

Так как точка K – середина BH и AM - биссектриса угла BAC, то AK - медиана и биссектриса в ΔABC, отсюда следует, что ΔABC- равнобедренный (!) ($AB = AH$) и AK – его высота. Значит, для решения задачи нужно построить равнобедренный треугольник ABH ($AB = AH$) и его медиану AK, а далее на луче AH построить точку С, такую, что $AC = 2AH$. Получаем ΔABC- искомый, где AM (продолженный отрезок AK до пересечения с BC) – его биссектриса.

Теперь (Рис. 3) получаем другое, верное изображение треугольника ABC и можно приступить к необходимым вычислениями.

Имеем: AK - серединный перпендикуляр отрезка $BH \Rightarrow BK = \frac{1}{2}BH = 8$ - высота ΔABC. Поэтому: $S_{\Delta ABM} = \frac{1}{2}AM \cdot BK = \frac{1}{2} \cdot 20 \cdot 8 = 80$.

Так как $AB = AH$ и BH- медиана ΔABC, то $AC = 2AB$. По свойству биссектрисы угла в треугольнике ABC имеем: $CM : MB = AC : AB = 2:1 \Rightarrow CB : MB = 3:1 \Rightarrow \Delta ABC = 3S_{\Delta ABM} = 3 \cdot 80 = 240$ (см ^{2}).

Ответ: 240 см ^{2}

В другой статье Е.В. Потоскуева отмечается, что помимо правильно изображенного чертежа, при решении задач необходимо еще корректно обосновывать каждый свой шаг. Так как хорошо наглядно выполненный рисунок не дает гарантию, что высказанное утверждение по «картинке» может оказаться верным. И не стоит забывать, что даже, если на ЕГЭ задача будет решена без вычислительных ошибок и получится верный ответ, но не будет логического обоснования решения, это повлечет за собой снижение оценочного балла.

«Для получения высокой оценки за решение стереометрической задачи учащийся должен выработать умение быстро и правильно изображать фигуры, заданные в условии задачи, и корректно обосновывать каждое утверждение, появляющееся при ее решении» [44].

В.И. Тараник в своей статье предлагает пути усиления развивающего эффекта многих задач: «1) постановка дополнительных вопросов; 2) решение задачи рациональным способом; 3) рассмотрение ее частных и предельных случаев; 4) частичным изменением условия данной задачи; 5) изменение места задачи в системе обучения и т.д.» [57].

Автор останавливается на первом пути, и приводит типы вопросов, которые следует использовать при изучении математики: «на сравнение; требующие установления основных характерных черт, признаков понятий и предметов; на установление причинно-следственных связей; требующие подведение частного (особенного) под общее; требующие применения общего к конкретному; требующие установления справедливости обратного утверждения» [57].

Здесь же, автор приводит пример задач, основной функцией которых является обучающая, и при решении которых полезно задавать дополнительные вопросы, которые усиливают развивающий эффект.

Приведем пример такой задачи.

Задача 8. «Основанием пирамиды является прямоугольник со сторонами 10 см и 18 см. Высота пирамиды проходит через точку пересечения диагоналей прямоугольника и равна 12 см. Найдите площадь боковой поверхности пирамиды» [57].

Чтобы правильно решить данную задачу необходимо воспользоваться дополнительными вопросами к задаче: «1. В чём сходство и различие между пирамидой и правильной пирамидой? 2. При каких условиях пирамида будет правильной? 3. Высота пирамиды проходит через центр основания. Будет ли пирамида правильной?» [57].

Таким образом, для эффективного обучения учащихся решение задач, следует:

1) обучать учащихся решению задач постепенно, в течении длительного периода времени, на основе системно-деятельностного подхода (в качестве основного средства использовать учебные задания, составленные в соответствии с основными этапами учебной деятельности по решению задач и выделенными действиями по решению задач);

2) использовать на уроках геометрии задачи-клоны, задачи-аналоги, но не в большом количестве, а также самих детей учить составлять такого рода задачи;

3) на уроках делать акцент на чертежах, т.е. учить учащихся изображать наглядные и хорошо выполненные рисунки к задачам;

4) для усиления развивающего эффекта следует в процессе решения задачи задавать учащимся дополнительные вопросы, которые усиливают развивающий эффект.

§3. Методика обучения теме «Площади геометрических фигур» учащихся 10-11-х классов общеобразовательной школы

Нами были рассмотрены и проанализированы методические пособия [10; 29; 30; 70-74] по теме исследования и выявлены методические особенности обучения данной теме.

В.И. Мишин отмечает, что при выводе формул для вычисления площади поверхности и площади боковой поверхности призмы учитель, демонстрируя развертку поверхности данной призмы, убеждает учащихся, что задача сводится к вычислению площадь полученного многоугольника. Перед тем, как вводить формулу необходимо с учащимися повторить основное свойство площадей («если многоугольник составлен из непересекающихся многоугольников, то его площадь равна сумме площадей составляющих его многоугольников») [30, С. 316].

Следует отметить, что формулу для вычисления площади боковой и полной поверхности прямой призмы учащиеся получают самостоятельно, анализируя развертки поверхностей прямых треугольной, четырехугольной и пятиугольной призм. Формулу для вычисления площади поверхности правильной призмы, учащиеся получают как частный случай.

У Р.В. Гангнуса вводится теорему для нахождения боковой поверхности наклонной призмы: «Боковая поверхность наклонной призмы равна произведению периметра перпендикулярного поперечного сечения на ребро призмы, $S_{бок} = P \cdot l$», где P – периметр перпендикулярного сечения, l – ребро призмы [10, С. 194].

Очень важно, чтобы учащиеся самостоятельно вычертили развертку боковой поверхности какой-либо наклонной призмы, пользуясь моделью наклонной призмой с поперечным сечением. В результате этой работы учащиеся должны увидеть, что в развертке периметр поперечного сечения изображается прямой линией, перпендикулярной к ребрам.

Далее автор предлагает рассмотреть пример практической задачи на применение данной теоремы.

Пример 1. В химической лаборатории вытяжной шкаф имеет деревянную вытяжную трубу в форме наклонной четырехугольной призмы. Вычислить площадь внутренней поверхности вытяжной трубы, которую требуется покрыть свинцом.

Р.В. Гангнус подчеркивает, что площадь боковой поверхности прямой призмы и правильной призмы вычисляется так же по формуле $S_{бок} = P_{\perp} \cdot l$, так как основание прямой призмы одинаково с ее поперечным перпендикулярным сечением.

Так как параллелепипед имеет те же элементы, что и призма, то площадь полной и боковой поверхности его вычисляется, аналогично призме.

Формула для вычисления площади поверхности пирамиды дается с помощью развертки пирамиды. При рассмотрении вопроса о вычислении площади боковой поверхности правильной пирамиды выводится специальная формула, причем, целесообразно эту формулу получить в результате решения специальной задачи на вычисление [30].

Р.В. Гангнус отмечает, что учащиеся должны обратить внимание на то, что в формуле для нахождения площади боковой поверхности правильной пирамиды $S_{бок} = \frac{1}{2} P \cdot h$, где $P-$периметр основания, $h-$апофема пирамиды, входит числовой множитель $\frac{1}{2}$, который можно легко запомнить, если учащиеся уловили связь боковой поверхности пирамиды с площадью треугольника.

Автор также предлагает учащимся дать еще одну формулу, в которую входит площадь Q основания пирамиды и угол α наклона плоскости боковой ее грани к плоскости основания: $S_{бок} = Q : \cos\alpha = Q\sec\alpha$ (кв. ед.). Причем, следует сообщить учащимся, что эти формулы верны и для тех пирамид, основаниями которых «является такой многоугольник, в который можно вписать окружность, и вершина которого которых проектируется в центр вписанной окружности. Так как в данном случае плоскости всех боковых граней пирамиды образуют с плоскостью основания один и тот же угол; высоты боковых граней, проведенные из вершины S пирамиды, все равны, ибо их проекциями являются радиусы вписанной в основании окружности» [30].

Для площади поверхности правильной усеченной $n-$ угольной пирамиды Р.В. Гангнус вводит 3 формулы.

«1. $S_{бок} = \frac{P_n + p_n}{2} \cdot h$, где P_n и p_n-периметры оснований, $h-$апофема правильной усеченной пирамиды.

2. $S_{бок} = P_{ср} \cdot h$, где $P_{ср}-$периметр «среднего» сечения (перпендикулярное к высоте сечение пирамиды, которое проходит через ее середину), $h-$апофема правильной усеченной пирамиды.

3. $S_{бок} = (Q-q) : \cos\alpha = (Q-q) \cdot \sec\alpha$, где Q и $q-$площади большего и меньшего оснований пирамиды, $\alpha-$угол наклона боковых граней пирамиды к плоскости большего ее основания» [10, С. 203] .

В.И. Мишин отмечает, что данный раздел «Пирамида. Усеченная пирамида» богат задачами вычислительного характера и цель учителя при изучение данной темы – выработать у учащихся навыки вычисления площади боковой поверхности различных пирамид [30, С. 322].

Р.В. Гангнус, напротив, пишет, что следует отдавать преимущество задачам, где требуется провести то или иное сечение, это вынуждает учащихся уделять внимание геометрической стороне вопроса, нежели вычислительной. Так же полезны задачи, где встречаются задачи на сочетания призм и пирамид.

С.Е. Ляпин пишет, что формулу для вычисления боковой поверхности цилиндра легко получить с помощью развертки: если развернуть боковую поверхность цилиндра и «выпрямить» ее, то получается прямоугольник [29, С. 728].

Р.В. Гангнус выделяет *два подхода* к вычислению площади боковой поверхности цилиндра:

1. Рассматривается цилиндр как правильная призма с неограниченно большим числом граней. Определяют боковую поверхность прямого кругового цилиндра, т.е. площадь его кривой поверхности как предел, к которому стремится площадь боковой поверхности вписанной в цилиндр или описанной около него правильной призмы при неограниченном удвоении числа граней боковой поверхности. Применяется формула поверхности прямой призмы $S_{\text{бок.пр}} = P \cdot H$ кВ. ед., где P – периметр основания, а H – высота, получают: $S_{\text{бок.ц}} = 2\pi R \cdot H$ кВ. ед., так как $\lim\limits_{n\to\infty} 2\pi R$.

2. Рассматривают боковую поверхность цилиндра как предел боковых поверхностей правильных вписанных или описанных призм при неограниченном удвоении числа их граней, где предварительно доказывается, что поверхности вписанной и описанной призмы имеют общий предел [10, С. 265].

Показывается, что площадь поверхности вписанной призмы имеет предел $S_{в.п.} = p_n \cdot l$, где p_n – периметр вписанного многоугольника – монотонно возрастающая величина, когда n возрастает; отсюда следует, что $S_{в.п.}$ – монотонно возрастающая величина, когда n возрастает. Понятно, что $S_{в.п.} < S_{о.п.}$, и, в частности, если взять поверхность описанной призмы, основанием которой является правильный четырехугольник, то $S_{в.п.} < 8R \cdot H$; отсюда делается вывод, что $S_{в.п.}$ имеет предел; обозначают этот предел через A и получают соотношение $S_{в.п.} = A + \varepsilon_1$, где ε_1 – бесконечно малая.

Далее показывается, что у площадей боковых поверхностей вписанных и описанных призм пределы общие, если n безгранично возрастает.

Действительно,

$$S_{о.п.} = P_n \cdot l$$

$$S_{в.п.} = p_n \cdot l$$

$$S_{о.п.} - S_{в.п.} = P_n \cdot l - p_n \cdot l = l(P_n - p_n)$$

$P_n - p_n$ = бесконечно малой, если n возрастает, а потому $S_{о.п.} - S_{в.п.}$ – бесконечно малая; обозначая последнюю через ε_2, получают $S_{о.п.} = S_{\text{в.п.}} + \varepsilon_2 = A + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 = A + \varepsilon_3$ и, таким образом, $\lim\limits_{n\to\infty} S_{\text{в.п.}} = A$.

После этих рассуждений дается определение: «Боковой поверхностью цилиндра называется общий предел боковых поверхностей вписанных и описанных призм при бесконечном увеличении числа сторон их оснований».

$$S_{бок.ц..} = 2\pi RH = \pi DH.$$

Вычислить площадь поверхности конуса можно двумя способами:

1) с помощью формулы $S_{\text{бок}} = \frac{1}{2} \cdot 2\pi R \cdot l = \pi Rl$ кв. ед.;

2) либо как предел, к которому стремится боковая поверхность правильной n – угольной вписанной в конус или описанной пирамиды при неограниченном удвоении числа ее граней: $S_{\text{бок}} = \lim S = \lim\limits_{n\to\infty}(\frac{1}{2} p_n \cdot l) = \frac{1}{2} l \cdot \lim\limits_{n\to\infty} p_n = \frac{1}{2} l \cdot 2\pi R = \pi Rl$ кв.ед.[10, С. 271].

Так же имеем место быть формула $S_{\text{бок}} = \pi R^2 : \cos\alpha$ кв.ед., где α – угол наклона у плоскости основания.

Если дана усеченная пирамида, то площадь поверхности находится по формуле $S_{\text{бок}} = 2\pi \frac{R+r}{2} \cdot l = 2\pi \cdot r_{\text{ср}} l$, где $r_{\text{ср}}$ – радиус среднего сечения, либо $S_{\text{бок}} = \pi(R+r)(R-r) : \cos\alpha$ кв.ед, где α – угол наклона образующей к плоскости основания [10, С. 275].

В учебном пособии приведена формула, по которой вычислял площадь боковой поверхности усеченного конуса Архимед: «Бокова поверхность усеченного конуса равна площади такого круга, радиус которого является средней пропорциональной между образующей и суммой радиусов оснований $S_{\text{бок.кон}} = \pi[\sqrt{l(R+r)}]^2$ кв.ед.» [10].

Р.В. Гангнус также утверждает, что после того, как выведены формулы для площади боковых поверхностей цилиндра, конуса и усеченного конуса, необходимо дать учащимся обобщенную формулу для вычисления поверхности любого из указанных трех тел, прежде всего для вывода формулы для нахождения площади поверхности шара.

К вычислению площади поверхности шара автор предлагает подойти путем предварительного ознакомления учащихся с вычислением поверхности шарового слоя, которая образует вращением дуги полуокружности вокруг диаметра. За площадь сферы автор принимает предел, к которому стремится площадь поверхности, образованной вращением вокруг того же диаметра правильной n-звенной ломаной линии, вписанной в полуокружность, при $n \to +\infty$ (число сторон неограниченно возрастает) [10, С. 303].

Рассмотрен порядок следования тем в учебных пособиях по геометрии 10-11 классов Л.С. Атанасяна [7], Е.В. Потоскуев, Л.И. Звавич [38, 40], А.В. Погорелова [36], И.Ф. Шарыгина [66], И.М. Смирновой, В.А. Смирнова [52], А.Д. Александрова [1].

У Л.С. Атанасяна в 10 классе в Главе 3 «Многогранники» изучается темы «Призма», «Пирамида», в которых рассматривается площадь поверхности данных тел. В 11 классе в Главе 6 «Цилиндр, конус, шар» изучается отдельным параграфом «Площадь поверхности цилиндра», «Площадь поверхности конуса», «Площадь сферы».

Следует отметить, что автор начинает знакомить учащихся со стереометрией уже в 9 классе, где в Главе 14 «Начальные сведения из стереометрии» вводится формулы для нахождения площади поверхности цилиндра, конуса и шара [7].

Е.В. Потоскуев, Л.И. Звавич в Главе 4 «Плоскости в пространстве» рассмотрен параграф «Площадь ортогональной проекции многоугольника». Далее в 11 классе в Главе 2 «Многогранники» автор рассматривает параграф 11.2 «Боковая и полная поверхность призмы», в параграфе 14.4 - «Площади боковой и полной поверхности пирамиды», в параграфе 14.6 «Усеченная пирамиды» вводится теорема о площади боковой поверхности усеченной пирамиды. В Главе 3 «Фигуры вращения» автор в параграфе 17.3 «Развертка и площадь поверхности цилиндра» и параграфе 18.5 «Развертка и площадь поверхности конуса» вводит теоремы о площади боковой поверхности цилиндра и конуса. Далее в параграфе 19.7 «Площади поверхностей шара и его частей», вводится формула для нахождения площади сферы, площади сегментной поверхности и шарового пояса и площадь поверхности шарового сектора.

В учебном пособии А.В. Погорелова так же рассматривается тема «Площадь ортогональной проекции многоугольника» в главе «Декартовы координаты и векторы в пространстве» в конце 10 класса. Далее в начале 11 классе в Главе 5 «Многогранники» в параграфе 44 «Прямая призма» вводится формула для нахождения площади поверхности прямой призмы, в параграфе «Правильная пирамида» - формула для нахождении площади правильной пирамиды. В отличии от Е.В. Потоскуева, Л.И. Звавича у А.В. Погорелова площадь поверхности цилиндра, конуса и шара изучается не внутри главы «Тела вращения», где происходит знакомство с геометрическими телами цилиндр, конус, шар и его элементами, а в главе 8 «Объемы и поверхности тел вращения».

И.Ф. Шарыгина не рассматривает «Площадь поверхности призмы, пирамиды», с понятием площадь учащиеся встречаются в 11 классе в главе «Объемы и поверхности круглых тел». В этой главе автор знакомит учащихся с формулами площади поверхности цилиндра, конуса и шара. Здесь же учащиеся в параграфе «Площадь сферического пояса» знакомятся с формулами: для нахождения площади части боковой поверхности правильной пирамиды, заключенной между двумя пересекающимися ее плоскостями, параллельными основанию; для нахождения площади части боковой поверхности конуса, заключенной между двумя пересекающимися ее плоскостями, параллельными основанию; для вычисления площади части канонической поверхности; для вычисления сферического пояса.

И.М. Смирнова, А.В. Смирнов не рассматривают площадь поверхности призмы, пирамиды, лишь в 11 классе в главе 6 «Объем и площадь поверхности» в параграфе 48 «Площадь поверхности» автор вводит теорему: «*Площадь поверхности цилиндра*, радиус основания которого равен R и образующая равна b, выражается формулой $S = 2\pi R(R+b)$» с доказательством и в этом же параграфе вводит еще одну теорему: «*Площадь поверхности конуса*, радиус основания которого равен R и образующая равна b, выражается формулой $S = \pi R(R+b)$» и проводит аналогичное доказательство. Далее в параграфе 49 «Площадь поверхности шара и его частей» автор выводит формулу для нахождения площади поверхности шара.

А.Д. Александров так же, как и И.М. Смирнова, А.В. Смирнов рассматривают только площадь поверхности цилиндра, конуса и сферы. Автор в главе 5 «Объемы тел и площади их поверхностей» рассматривает сначала параграф 28.2 «Площадь сферы», где вводит теорему с доказательством. Далее параграф 28.3 «Площади поверхностей цилиндра и конуса», где сначала вводит теорему (с доказательством): «Площадь боковой поверхности цилиндра вращения с высотой H и радиусом R выражается формулой $S_б = 2\pi RH$», а потом теорему, так же, с доказательством: «Площадь боковой поверхности конуса вращения с образующей поверхности L и радиусом основания R выражается формулой $S_б = \pi RL$». После доказательства приводит так же площадь всей поверхности конуса $S = \pi RL + \pi R^2$.

Таким образом, в Таблице 1 представлены понятия, рассматриваемые в учебных пособиях [1; 7, 38; 40; 52; 66].

Таблица 1

Рассматриваемые понятия	Л.С. Атанасян	Е.В. Потоскуев, Л.И. Звавич	А.В. Погорелов	И.Ф. Шарыгин	И.М. Смирнова, В.А. Смирнов	А.Д. Александров
Площадь поверхности ортогональной проекции многоугольника	-	+	+	-	-	-
Площадь поверхности призмы	+	+	+	-	-	-
Площадь поверхности правильной пирамиды	+	+	+	-	-	-
Площадь поверхности цилиндра	+	+	+	+	+	+
Площадь поверхности конуса	+	+	+	+	+	+
Площадь сферы	+	+	+	+	+	+
Площадь сферического пояса	-	-	-	+	-	-

При введении *площади ортогональной поверхности многоугольника* Е.В.Потоскуев, Л.И. Звавич и А.В. Погорелов вводят теорему: «Площадь ортогональной проекции многоугольника на плоскость равна площади проектируемого многоугольника, умноженной на косинус угла между плоскостью многоугольника и плоскостью проекций» [40].

Е.В. Потоскуев, Л.И. Звавич доказывают площадь проекции треугольника, когда одна из сторон проектируемого треугольника параллельна прямой l или лежит на ней, и, когда ни одна из сторон проектируемого треугольника не параллельна прямой l. Далее площадь проекции многоугольника доказывается с помощью разбиения многоугольника в объединение непересекающихся треугольников.

Площадь поверхности прямой призмы в учебниках Л.С.Атанасяна, А.В. Погорелова вводится, через теорему: «Площадь боковой поверхности прямой призмы равна произведению периметра основания на высоту призмы» [7, С. 65].

у Е.В. Потоскуева, Л.И. Звавича вводится точно так же формулировку, только вместо «высоты ребра» употребляется «боковое ребро». Доказательство теоремы у авторов приведено одинаковое, через свойство аддитивности. Так же приведена формула для площади полной поверхности призмы.

У Е.В. Потоскуева, Л.И. Звавича рассмотрена формула для нахождения *площади боковой поверхности наклонной призмы*. Автор сначала вводит понятие «перпендикулярное сечение призмы», далее, принимая боковые ребра призмы за основания параллелограммов (боковые ребра призмы), а «стороны перпендикулярного сечения – за их высоты, получает формулу: $S_{бок} = b \cdot (h_1 + h_2 + h_3 + ... + h_n)$, где b – длины бокового ребра призмы, $h_1, h_2, h_3 ... h_n$ – длины высот боковых граней, которые являются сторонами перпендикулярного сечения» и из этого вытекает формула $S_{бок} = P_{перп.сеч} \cdot b$» [38].

Рассмотрен и случай, когда не существует плоскости, перпендикулярной боковым ребрам наклонной призмы и пересекающей каждое из них, тогда выбирается точка М на продолжении ребра и проводится плоскость, которая перпендикулярна этой прямой. Пересечением этой плоскости и призматической поверхности, является многоугольник, который называется перпендикулярным сечением призматической поверхности, а так как стороны данного многоугольника являются высотами боковых ранней призмы, то $S_{бок} = P_{перп.сеч} \cdot b$. Тем самым доказывается теорема: «Площадь боковой поверхности наклонной призмы равна произведению периметра перпендикулярного сечения призматической поверхности на боковое ребро» [38].

Площадь поверхности правильной пирамиды у Л.С. Атанасяна, Е.В. Потоскуева, Л.И. Звавича и А.В. Погорелова вводится через теорему: «Площадь боковой поверхности правильной пирамиды равна половине произведения периметра основания на апофему» [7, С. 70].

У Е.В. Потоскуева, Л.И. Звавича аналогично, только «половину произведения периметра» авторы называют, как полупериметр. Доказательство теоремы у авторов происходит с помощью свойство аддитивности.

Помимо данной теоремы у Е.В. Потоскуева, Л.И. Звавича вводится еще одна теорема для нахождения площади боковой грани пирамиды: «Если все боковые грани пирамиды наклонены к плоскости основания под углом φ, и высота пересекает основание, то $S_{бок} = \frac{S_{осн}}{\cos}$» [38].

При доказательстве теоремы автор использует теорему о площади ортогональной проекции многоугольника. Этот многоугольник можно разделить на треугольники, так как снование пирамиды является многоугольник, у которого точка O является центром круга, вписанного в основании пирамиды. И тогда эти треугольники будут являться ортогональными проекциями на плоскость основания пирамиды ее соответствующих боковых граней. Сложив почленно равенства, которые выражают площадь каждого треугольника, получается формула $S_{бок} = \frac{S_{осн}}{\cos}$. Автор отмечает, что эта формула так же справедлива для площади основания правильной пирамиды.

Площадь боковой поверхности усеченной пирамиды в учебных пособиях Л.С. Атанасяна и Е.В. Потоскуева, Л.И. Звавича вводится через теорему: «Площадь боковой поверхности правильной усеченной пирамиды равна произведению полусуммы периметров ее оснований на апофему» [7, С. 47].

У авторов доказательство данной теоремы не приводится, автор предлагает учащимся доказать ее самостоятельно, но Е.В. Потоскуев, Л.И. Звавича приводят указание, говоря о том, что для доказательства теоремы достаточно площадь одной из боковых граней пирамиды умножить на их число. В результате получается формула $S_{бок} = \frac{P_1 + P_2}{2} \cdot h$, где P_1, P_2 – периметры нижнего и верхнего оснований усеченной пирамиды, h – ее апофема.

Площадь поверхности цилиндра, конуса и сферы рассмотрены во всех учебных пособиях.

За площадь боковой поверхности цилиндра Л.С. Атанасян, А.В. Погорелов, Е.В. Потоскуев и Л.И. Звавич И.Ф. Шарыгин принимают площадь ее развертки $S = 2\pi Rh$, где R – радиус основания, h – высота цилиндра. И.М. Смирнова, В.А. Смирнов не рассматривают отдельно формулы для нахождения боковой поверхности цилиндра, лишь при доказательстве теоремы о площади полной поверхности цилиндра автор пишет, что разверткой боковой поверхности цилиндра является прямоугольник с основанием $2\pi R$ и высотой b, поэтому площадь боковой поверхности равна $S = 2\pi Rb$. А.Д. Александров вводит теорему: «Площадь боковой поверхности цилиндра вращения с высотой H и радиусом основания R выражается формулой $S_б = 2\pi RH$. Доказательство автор приводит с помощью понятия предельного перехода. Вокруг цилиндра описывается правильная призма, и говорится о том, что объем цилиндра приближенно равен объему призмы, а площадь боковой поверхности цилиндра приближенно равна площади боковой поверхности призмы. При увеличении n – количества сторон у многоугольника, который лежит в основании призмы, величина $\frac{V_n}{(S_б)_n}$ будет сколько угодно мало отличаться от числа $\frac{V_n}{S_б}$. В результате получают формулу $S_б = 2\pi RH$. А.В. Погорелов помимо введения формулы площади боковой поверхности через развертку, приводит аналогичное рассуждение, как А.Д.Александров. Формула для нахождения полной поверхности цилиндра рассмотрены во всех учебниках [1; 9; 47; 66], кроме А.В. Погорелова, И.Ф. Шарыгина и равна $S_{полн} = 2\pi RH + 2\pi R^2 = 2\pi R(R+H)$.

Е.В. Потоскуев, Л.И. Звавич так же в конце параграфа приводят следствие из теоремы о площади боковой поверхности цилиндра: «Пусть цилиндр образован вращением прямоугольника $ABCD$ вокруг его высоты AD. Тогда $S_{\text{бок}} = 2\pi DC \cdot BC$ ».

Площадь поверхности конуса во всех рассматриваемых учебниках рассмотрены аналогично цилиндру. Формула для нахождения площади боковой поверхности цилиндра $S = \pi Rl$, а полной поверхности - $S = \pi Rl + \pi R^2$, где R – радиус основания конуса, l – длина образующей.

Е.В. Потоскуев, Л.И. Звавич приводят следствие из теоремы о площади боковой поверхности конуса: «Пусть конус образован вращением прямоугольного треугольника ABC вокруг катета AC. Тогда $S_{\text{бок}} = \pi \cdot BC \cdot AB$. Если D – середина отрезка AB, то $AB = 2AD$, поэтому $S = 2\pi \cdot BC \cdot AD$».

Следует отметить, что *площадь боковой поверхности усеченного конуса* описана лишь в учебнике А.В. Погорелова, Е.В. Потоскуева и Л.И. Звавича, Л.С. Атанасяна и находится по формуле $S = \pi(R + r)l$, а площадь полной поверхности усеченного конуса – у Е.В. Потоскуева, Л.И. Звавича и находится по формуле $S_{\text{полн}} = \pi(R + r)l + \pi \cdot R^2 + \pi \cdot r^2$.

Е.В. Потоскуев, Л.И. Звавич *площадь сферы* описывают так же, как и Гангнус: «предел, к которому стремится площадь поверхности Ф, образованной вращением вокруг того же диаметра правильной n-звенной ломаной линии, вписанной в полуокружность, при $n \to +\infty$ (число сторон неограниченно возрастает)» [38].

Л.С. Атанасян, И.М. Смирнова и В.А. Смирнов, И.Ф. Шарыгин, А.В. Погорелов при доказательстве формулы нахождения *площади сферы* пользуются формулой для объема шара и понятие предельного перехода. Вокруг шара описывается многогранник, имеющих n граней. Представляют полученный многогранник, который составлен из пирамид, вершины пирамид совпадают с центром шара, а основаниями являются грани многогранника. Объем каждой из пирамид равны, и находят объем всего описанного многогранника, откуда выражают площадь поверхности многогранника. При неограниченном увеличении числа граней многогранника, наибольший размер каждой грани описанного многогранника должен стремиться нулю, а объем описанного многогранника – стремится к объему шара. Находя предел площади поверхности шара, получают формулу $S = 4\pi R^2$.

Площадь поверхности сферического пояса рассмотрен лишь в учебнике И.Ф. Шарыгина. Прежде чем ввести данную формулу автор доказывает несколько вспомогательных утверждений.

1. «Площадь части боковой поверхности правильной пирамиды, заключенной между двумя пересекающимися ее плоскостями, параллельными основанию, может быть найдена по формуле $S = (p_1 + p_2)\cdot d$, где p_1 и p_2 – полупериметры многоугольников, по которым указанные плоскости пересекают нашу пирамиды, d – расстояние между сторонами этих многоугольников, лежащих в одной боковой грани пирамиды» [66, С. 141].

Доказательство справедливости формулы следует из формулы площади трапеции.

2. «Площадь части боковой поверхности конуса, заключенной между двумя пересекающимися ее плоскостями, параллельными основанию, может быть найдена по формуле $S = \pi\cdot(r_1 + r_2)\cdot d$, где r_1 и r_2 – радиусы сечений; d – длина части образующей, заключенной между плоскостями» [66].

Данная формула получается из предыдущей формулы путем предельного перехода.

Далее автор вводит теорему, где описана формула для вычисления площади части канонической поверхности $S = 2\pi Lh$, где h – длина проекции отрезка на прямую m, расположенных в одной плоскости не пересекающихся, и не перпендикулярных; L – длина серединного перпендикуляра к отрезку, заключенного между отрезком и прямой m. Доказательство данного факта было доказано в утверждении 2, так как получившаяся поверхность представляет собой часть боковой поверхности конуса. А после данной теоремы автор вводит теорему о площади сферического пояса: «Площадь сферического пояса может быть найдена по формуле $S = 2\pi Rh$, где R – радиус сферы; h – высота сферического пояса» [66].

В доказательстве данной теоремы у И.Ф. Шарыгина используется формула для вычисления части канонической поверхности.

Таким образом, можно сделать вывод о том, что формула для вычисления *площади поверхности призмы, пирамиды, конуса* дается с помощью развертки. При введении формулы для нахождения *площади боковой поверхности цилиндра* можно так же воспользоваться разверткой, как описано у Л.С. Атанасяна, А.В. Погорелова, Е.В. Потоскуева и Л.И. Звавича, И.Ф. Шарыгин, либо через понятие предельного перехода, описанного у И.М. Смирновой, В.А. Смирнова и А.Д. Александрова. При введении формулы для нахождения *площади сферы* используется понятие предельного перехода. Было выявлено, что наиболее полно раскрыта тема «Площади геометрических фигур» в учебных пособиях Е.В. Потоскуева, Л.И. Звавича и А.В. Погорелова. При введении формулы для нахождения *площади сферы* используется понятие предельного перехода.

ВЫВОДЫ ПО ПЕРВОЙ ГЛАВЕ

Сформулируем основные выводы и полученные результаты по первой главе:

1. В результате анализа методической литературы на методические особенности введения понятия площадь установлено, что понятие площадь определяли: 1) через *площадь замкнутой фигуры* (как *величину* части плоскости, которая заключена внутри многоугольника или какой-нибудь плоской замкнутой фигуры); 2) через *площадь фигуры* (как *часть плоскости*, занимаемой этой фигурой или как *величину ее внутренней области)*; 3) через *площадь простого многоугольника* (как *число*, которое определяет размер части плоскости, ограниченной этим многоугольником или как некоторое положительное число, ставящееся в соответствие каждому многоугольнику).

Так же, проанализировав действующие учебники по геометрии основной школы, выявлено, что понятие площадь вводится: 1) как положительная *величина*; 2) *число*, ставящееся в соответствие некоторой ограниченной плоской фигуре; 3) *число*, которое получается в ходе измерения и показывает, какое количество раз единичный квадрат и его соответствующие части укладываются в этой фигуре.

2. Выявлены методические особенности обучения решению геометрических задач по теме «Площадь геометрических фигур». Для эффективного обучения учащихся решение задач, следует:

1) обучать учащихся решению задач постепенно, в течение длительного периода времени, на основе системно - деятельностного подхода, в качестве основного средства использовать учебные задания, составленные в соответствии с основными этапами учебной деятельности по решению задач и выделенными действиями по решению задач;

2) использовать на уроках геометрии задачи-клоны, задачи-аналоги, но не в большом количестве, а также самих детей учить составлять такого рода задачи;

3) на уроках делать акцент на чертежах, т.е. учить учащихся изображать наглядные и хорошо выполненные рисунки к задачам;

4) для усиления развивающего эффекта следует в процессе решения задачи задавать учащимся дополнительные вопросы.

3. Рассмотрена методика обучения учащихся данной теме, которая показала, что формула для вычисления *площади поверхности призмы, пирамиды, конуса* дается с помощью развертки. При введении формулы для нахождения *площади боковой поверхности цилиндра* можно так же воспользоваться разверткой, либо через понятие предельного перехода. При введении формулы для нахождения *площади сферы* используется понятие предельного перехода.

Выявлено, что наиболее полно раскрыта тема «Площади геометрических фигур» в учебниках Е.В. Потоскуева, Л.И. Звавича и А.В. Погорелова.

ГЛАВА II. МЕТОДИЧЕСКИЕ АСПЕКТЫ ОБУЧЕНИЯ УЧАЩИХСЯ ТЕМЕ "ПЛОЩАДИ ФИГУР" В КУРСЕ ГЕОМЕТРИИ ОБЩЕОБРАЗОВАТЕЛЬНОЙ ШКОЛЫ

§4. Методические рекомендации по обучению теме «Площади фигур» в курсе геометрии общеобразовательной школы

В работе [16] были выявлены методические рекомендации по обучению теме «Площади фигур» в курсе геометрии основной школы. В результате анализов учебной литературы [8; 37; 53; 67], учебных программ [5; 32-34; 53] и анализа статей [15; 48; 55; 56; 63-65], был сделан вывод о том, что «при обучении учащихся теме «Площади фигур» необходимо уделять внимание формированию у учащихся практических навыков вычисления площадей многоугольников в ходе решения задач, так как это является составной частью задач на многогранники в курсе стереометрии; *понятию равновеликости*, с помощью которого упрощается решение многих задач и происходит углубление общих представлений учащихся о методологических основах геометрии; наглядности объяснения нового материала. Доказательства теорем, свойств учителю следует объяснять самостоятельно, привлекая к ним учащихся, «сильным» ученикам давать на дом самостоятельно разбираться с данными доказательствами.

При обучении учащихся теме «Площадь треугольника» полезно использовать статью В.И. Тараненко для составления задач по теме. Кроме того, в ходе обучения учащихся теме «Площади фигур» не стоит ограничиваться рамками учебных программ: учителю вместе с учащимися можно доказать еще один вариант формулы Герона, когда стороны треугольника выражены числами содержащиеся квадратные корни, про который писал А.Ш. Чавчанидзе; Б.С. Прицкер предлагает использовать для решения задач формулу для нахождения площади произвольных выпуклых четырехугольников; учащимся может быть полезна формула Пика, про которую писали Л.К. Сыяповой и А.А. Темербековой и которая формирует рациональность мышления, а так же дает возможность проверить правильность решение математической задачи. Не стоит забывать о повторении учебного материала при обучении данной теме, как о важном звене учебного процесса, про который отмечал Б.Ф. Харитонов» [16].

Рассмотрев перечень учебников геометрии для учащихся 10-11 классов Л.С. Атанасяна [7], Е.В. Потоскуева, Л.И. Звавича [38; 40], И.Ф. Шарыгина [66] и А.Д. Александрова [1], рекомендованных к использованию при реализации имеющих государственную аккредитацию образовательных программ среднего образования, утвержденного приказом Министерства образования и науки Российской Федерации № 253 от 31 марта 2014 г. [61], за основу мы взяли учебник Л.С. Атанасяна.

Согласно Примерной основной образовательной программы среднего общего образования «учащиеся в 10-11 классах по теме «Площади фигур» научатся *на базовом уровне:*

- находить объемы и площади поверхностей простейших многогранников с применением формул;
- находить объемы и площади поверхностей простейших многогранников и тел вращения с применением формул.

на углубленном уровне:

– владеть понятием площади поверхностей многогранников и уметь применять его при решении задач;

– иметь представление о подобии в пространстве и уметь решать задачи на отношение объемов и площадей поверхностей подобных фигур.

– иметь представление о развертке цилиндра и конуса, площади поверхности цилиндра и конуса, уметь применять их при решении задач;

– иметь представление о площади сферы и уметь применять его при решении задач» [47, С. 100-101].

Темы «Площадь геометрических фигур» в курсе геометрии 10-11 классах не изучается отдельной главой, а разбросано по всему учебнику. Помимо площади геометрических фигур, в общеобразовательной школе изучается так же площадь сечения многогранника, которая встречается в задачах из ЕГЭ.

Знакомство с понятием сечения многогранника по учебному пособию Л.С. Атанасяна [7] происходит в 10 классе, при изучении главы «Многогранники» в самом начале главы, а с самим понятием сечения в самом начале 10 класса при изучении параграфа «Тетраэдр и параллелепипед». И.М. Смирнова, В.А. Смирнов [52] сечение многогранника рассматривают отдельным параграфом в 10 классе при изучении второй главы «Параллельность в пространстве». Помимо сечения многогранника, авторы в учебнике вводят определение диагонального сечения, и рассматривает его, как «сечение призмы плоскостью, проходящей через диагональ основания и вершину». Е.В. Потоскуев, Л.И. Звавич [40], А.В. Погорелов [36] не вводят отдельного определения «сечение многогранника», они рассматривают понятие «сечение» отдельно для каждого из геометрических тел и здесь же вводят формулы для нахождения площади поверхности этих тел.

Как отмечает В.А. Далингер, построение сечений многогранников в школе основываются на следующей теореме: «Если изображение любого многогранника полное, то на изображении можно почтроить его сечение, заданное тремя точками» [13].

Важной частью процесса решения задач на построение сечений, пишет автор, «является необходимость определения видимых и невидимых контуров соответствующих построений» [13].

Итак, в первой главе учебника Л.С. Атанасяна в параграфе 4 «Тетраэдр и параллелепипед», после двух уроков изучения темы следует уделить два урока на тему «Задачи на построение сечений». На данных уроках следует ввести понятие секущей плоскости тетраэдра (параллелепипеда).

По учебному пособию Л.С. Атанасяна [7] сначала вводится определение секущей: «Секущая плоскость тетраэдра (параллелепипеда) это любая плоскость, по обе стороны от которой имеются точки данного тетраэдра (параллелепипеда)», далее пишется о том, что «Секущая плоскость пересекает грани тетраэдра (параллелепипеда) по отрезкам». И только потом вводится определение сечения тетраэдра (параллелепипеда): «Многоугольник, сторонами которого являются эти отрезки, называются сечением тетраэдра (параллелепипеда)» [7, С. 27].

С.М. Саакян пишет, что особое внимание следует обратить на тот факт, что «если секущая плоскость пересекает две противоположные грани параллелепипеда по каким-то отрезкам, то эти отрезки параллельны», причем данное утверждение следует обосновать [49, С. 43].

Так же следует требовать от учащихся устного рассказа о ходе построения с соответствующими обоснованиями, с целью развития устной речи учащихся. Так же более сложные задачи, автор предлагает разобрать на факультативных занятиях. На этих же уроках авторы предлагают рассмотреть дополнительно теоремы Менелая и Чевы, которые часто оказываются полезными при решении задач, связанных с сечением тетраэдра некоторой плоскостью [49, С.49].

Данные теоремы рассмотрены в последней главе учебного пособия Л.С. Атанасяна [7] «Некоторые сведения из планиметрии».

В 10 классе по учебному пособию Е.В. Потоскуева, Л.И. Звавича [46] в главе 4 «Плоскости в пространстве» и у Погорелова в главе 4 «Декартовы координаты и векторы в пространстве» дана «теорема о площади ортогональной проекции многоугольника: площадь ортогональной проекции многоугольника на плоскость равна произведению его площади на косинус угла между плоскостью многоугольника и плоскостью проекции» [36]. Формулировка теоремы одинакова и приводится с доказательством в обоих учебниках. По учебному пособию И.М. Смирновой, В.А. Смирнова, В.А. Погорелова и Л.С. Атанасяна данная теорема не дана, но в задачном материале у Л.С. Атанасяна есть задача на нахождении площади проекции треугольника.

В главе 3 «Многогранники» в первом параграфе «Понятие многогранника. Призма» изучается тема «Площадь поверхности призмы». На данную тему отводится 3 часа. По Л.С. Атанасяну вводится теорема: «Площадь боковой поверхности прямой призмы равна произведению периметра основания на высоту призмы» [7, С. 65]. Доказательство теоремы приводится.

Задача урока по данной теме сводится к тому, чтобы доказать теорему о площади боковой поверхности прямой призмы, выработать навыки решения задач на вычисление площадей полной и боковой поверхностей призмы. Особенность данного урока С.М. Саакян видит в том, чтобы при доказательстве теоремы о площади боковой поверхности прямой призмы сделать записи в тетрадь, которые помогут учащимся усвоить данное доказательство. Третий и четвертый урок посвящены повторение теории, решение задач на вычисление площади поверхности призмы. На данных уроках следует повторить определения призмы, её элементов, вывести формулы для боковой поверхности прямой призмы, решать задачи. Полезно на данных уроках использовать фронтальные беседы и опрос учащихся при повторении вопросов теории и здесь следует провести самостоятельную работу по данной теме с целью проверки сформированности навыков решения основных типов задач в [49, С. 91] .

В.А. Яровенко после доказательства теоремы о площади боковой поверхности прямой призмы предлагает составить таблицу 2, в которой приведены данные для вычисления площади боковой поверхности, полной и основания прямой призмы [46, С. 191].

Таблица 2

Правильная призма	$S_{бок}$	$S_{осн}$	$S_{полн}$
Треугольная призма	$3ah$	$\frac{a^2\sqrt{3}}{2}$	$a(3h + a\sqrt{3})$
Четырехугольная призма	$4ah$	a^2	$2ah(h + a)$

Шестиугольная призма	$6ah$	$\frac{3\sqrt{3}}{2}a^2$	$3ah(2h+\sqrt{3}a)$

В задачном материале у Л.С. Атанасяна встречается задача на доказательство формулы для нахождения площади боковой поверхности наклонной призмы, а у Е.В. Потоскуева, Л.И. Звавича вводится теорема о площади боковой поверхности наклонной призмы: «Площадь боковой поверхности наклонной призмы равна произведению периметра перпендикулярного сечения призматической поверхности на боковое ребро» [38, С. 92].

Причем в методическом пособии авторы пишут, что учащиеся должны четко различать понятия «Призма», «Призматическая поверхность», Призматическое тело», так как «не для любой наклонной призмы существует плоскость, перпендикулярная боковым ребрам и пересекающая каждое из этих ребер» [41, С. 53].

Дополнительным параграфом Л.С. Атанасян вводит пространственную теорему Пифагора, которая звучит так: «Если все плоские углы при одной из вершин тетраэдра – прямые, то квадрат площади грани, противолежащей этой вершине, равен сумме квадратов площадей остальных граней» [7, С. 66].

Второй параграф данный главы «Пирамида». На первом уроке вводится понятие пирамиды, рассматриваются элементарные задачи, доказывается теорема о площади боковой поверхности правильной пирамиды: «Площадь боковой поверхности правильной пирамиды равна половине произведения периметра основания на апофему» [7, С. 70].

Доказывать теорему о площади боковой поверхности правильной следует, опираясь на текст учебника. В тетрадях, отмечает С.М. Саакян, следует сделать следующую символическую запись:

«Пусть сторона основания правильной пирамиды равна a, апофема равна d. $S_Д = n \cdot S_Д = n \cdot \frac{1}{2}ad = \frac{1}{2}(n \cdot a) \cdot d$, т.е. $S_{бок} = \frac{1}{2} p \cdot d$, где p – периметр основания пирамиды. Здесь же следует рассмотреть, в первую очередь, задачи на правильную пирамиду, а так же на вычисление элементов и площади поверхности пирамиды. На втором уроке происходит повторение доказательство теоремы о площади боковой поверхности правильной пирамиды и решение задач на правильную пирамиду» [49, С. 96]. С.М. Саакян отмечает, что необходимо обращать внимание учащихся на качество выполнения рисунков к задачам.

Еще два урока, отведенные на тему «Решение задач по теме «пирамида» следует посвятить решению задач на вычисление площади поверхности произвольной пирамиды. Здесь провести самостоятельную работу. И на последнем уроке данного параграфа учащихся знакомят с усеченной пирамидой и с вопросом о вычислении площади ее поверхности.

Теорема звучит следующим образом: «Площадь боковой поверхности правильной усеченной пирамиды равна произведению полусуммы периметров оснований на апофему» [7, С.71]. Доказать формулу площади боковой поверхности правильной усеченной пирамиды автор предлагает самостоятельно.

А.В. Александров в методическом пособии пишет о том, что формулы для вычисления площадей боковых поверхностей призм и пирамид ученики должны уметь вывести самостоятельно, тем самым не перегружая свою память частной информацией [9, С. 39].

Следующая глава по учебнику Л.С. Атанасяна изучается «Цилиндр, конус и шар», в которой на параграф «Цилиндр» и «Конус» отводится по 3 часа. В этих параграфах происходит знакомства учащихся с площадями поверхности данных тел. Причем весь теоретический материал следует дать на первом уроке. А последующие два урока следует посвятить повторению теории и решению задач и провести самостоятельную работу. При изучении площади боковой поверхности цилиндра авторы рекомендуют формулу выводить на основе определения, по которому за площадь боковой поверхности цилиндра принять площадь ее развертки. Данный факт принимается на основе наглядных представлений. Вводить площадь поверхности конуса следует по определению. Учащимся следует наглядно показать, разрезав боковую поверхность конуса по одной из ее образующей и развернуть получившийся круговой сектор на плоскость. В процессе вычисления площади получившегося кругового сектора следует использовать тот факт, что длина дуги сектора равна длине окружности основания конуса, а радиус кругового сектора равен образующей конуса [49, С.115].

Авторы предлагают оформить вычисления следующим образом $S_{бок} = S_{сект} = \frac{\pi\ell^2\alpha}{360} = \frac{\pi\ell\alpha}{180}\cdot\frac{\ell}{2} = L\cdot\frac{\ell}{2} = 2\pi r\cdot\frac{\ell}{2} = \pi r\ell$. На втором уроке следует учащимся вывести формулу для вычисления площади боковой поверхности усеченного конуса, причем полезно обратить внимание учащихся, что осевое сечение усеченного конуса является равнобедренная трапеция. И на этом же уроке целесообразно провести математический диктант, с целью проверки уровня сформированности навыков решения несложных задач [49, С. 119].

А.В. Александров в методическом пособии пишет, что вычисляя площади боковых поверхностей цилиндра вращения и конуса вращения в базовом курсе можно ограничиться интуитивно-наглядным уровнем, то есть взять развертки этих поверхностей и по известным формулам планиметрии вычислить их площади. И благодаря этим знаниям получить формулы для нахождения площади боковых поверхностей цилиндра и конуса и запомнить их. А вот формулы для нахождения полных поверхностей цилиндра и конуса, отмечает автор, запоминать не нужно, так как, зная формулы для вычисления площади боковых поверхностей цилиндра и конуса, ученики должны уметь их выводить самостоятельно [9, С. 40].

Так же отмечается, что «площади боковых поверхностей цилиндра и конуса можно найти, приближая их призмами и пирамидами, описанными вокруг цилиндра и конуса» [9, С. 40].

У Е.В. Потоскуева, Л.И. Звавича в методическом пособии есть пояснение о том, что после теоремы о площади боковой поверхности конуса описано следствие о другом способе вычисления боковой поверхности конуса:

«Пусть конус образован вращением прямоугольного треугольника ABC вокруг катета AC. Тогда $S_{бок} = 2\pi BB \cdot AD$» [41, С. 161].

Следствие нужно обязательно доказать вместе с учащимися, потому что оно будет использовано при выводе формул для вычисления площадей частей поверхности шара [41, С. 113].

Следующий параграф данной главы «Сфера», на который отводится 4 часа. В учебном пособии Л.С. Атанасяна [7], для определения площади сферы пользуются понятием описанного многогранника, а за площадь сферы принимают предел последовательности площадей поверхностей многогранников. Формулу площади сферы следует рассматривать на последнем, четвертом, уроке, но обоснование данной формулу будет дано в следующей главе «Объем шара и площадь сферы» учебника после вывода формулы объёма шара. Причем на изучение темы «Площадь сферы» отведен один урок. Авторы методического пособия предлагают другой вариант вывод формулы площади сферы, нежели рассмотрен в учебнике. Покажем его.

Рассматривается сфера с радиусом R и с радиусом $R+\Delta R$, но с тем же центром. Объём ΔV тела, который заключен между двумя сферами, равен разности объёмов шаров с радиусами $R+\Delta R$ и R, т.е. $\Delta V = \frac{4}{3}\pi(R+\Delta R)^3 - \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi(3R^2 \cdot \Delta R + 3R \cdot (\Delta R)^2 + (\Delta R)^3)$. Разделим ΔV на ΔR и устремим ΔR к нулю. Наглядные представления подсказывают, что при $\Delta R \to 0$ отношение $\frac{\Delta V}{\Delta R}$ стремится к площади S сферы. Таким образом,

$$S = \lim_{\Delta R \to 0} \frac{\Delta V}{\Delta R} = \lim_{\Delta R \to 0} \frac{4}{3}\pi(3R^2 + 3R \cdot \Delta R + (\Delta R)^2) = 4\pi R^2$$ [49, С. 154].

Обращаем внимание, что после каждой главы авторы предлагают на предпоследнем уроке давать учащимся контрольные работы, а на последнем – зачет по всем изученным темам данной главы. Примерные контрольные работы и зачеты есть в данной методичке [49].

У А.В. Погорелова в дополнительной главе 8 «Некоторые сведения из планиметрии» вводятся формулы для нахождения площади треугольников:

формула Герона, формулы для нахождения площади треугольника, через радиус вписанной и описанной окружности.

Между тем, Н.С. Майкова в статье пишет о том, что при изучении темы «Площади многоугольных фигур» особое внимание уделяется формированию практических навыков вычисления площадей. В ходе решения таких задач, учащимся необходимо уметь: «1) оперировать геометрическими понятиями; 2) работать с алгебраическими выражениями; 3) использовать именованные величины» [23].

Автор предлагает в качестве практический заданий рассмотреть задачи на вычисление площадей земельных участков, с использованием межпредметных связей, различными способами:

1. Аналитический способ: «площади земельных участков вычисляются по результатам измерений углов и линий непосредственно на местности или по их функциям (координаты, приращения координат). Площадь земельного участка вычисляется по координатам вершин. Данный способ может быть рассмотрен на уроках по дисциплине «Информационные технологии» при изучении темы «Электронные таблицы» [23].

2. Графический способ: «площадь участка разбивают на ряд простейших геометрических фигур (треугольник, прямоугольник, трапеция) и вычисляют площадь, как сумму площадей элементарных геометрических фигур. Данный способ может быть рассмотрен на уроках геометрии» [23].

3. С помощью палеток: «линейная палетка представляет собой ряд параллельных линий, проведенных на прозрачной основе через 1-2 мм. При использовании палетки, измеряемый контур располагается так, чтобы крайние точки участка располагались на линиях палетки» [23].

Данный способ может быть рассмотрен на уроках истории, при подготовке доклада, который оформляется в текстовом редакторе или презентацию.

4. Механический способ: для определения площадей используют специальный прибор – планиметр. Данный способ может быть рассмотрен на уроках физики.

А.А. Темербекова в статье отмечает, что модернизация образования ключевыми рычагами развития личности выделяет ориентацию на базовые знания. Автор рассматривает пример, в результате решение которого происходит формирование ключевых компетенций, встречающихся в ЕГЭ: задание на нахождение площади фигуры на клетчатой бумаге (сетке). Данная задача направлена на формирование практической направленности математического знания [58].

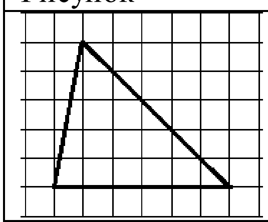
А.А. Темербекова также отмечает, что у данных задачи нет общего правила решения, а тем и заключается ценность такого рода заданий, которые развивают умение «думать, размышлять, анализировать, искать аналогии, развивать мыслительные навыки».

При подготовке учащихся к решению задач на вычисление площади на клетчатой бумаге, учитель систематизирует знания по теме и формирует предметную базу. При этом, очень важно, отмечает автор, при таком объеме формул уметь использовать ту формулу, которая предназначена для решения конкретной задачи. И еще немало важно, уметь решать такие задачи несколькими способами, которые дают гарантию правильного решения задачи.

В данной статье рассматривается пример.

Пример 1. «На клетчатой бумаге с клетками размером 1 см х 1 см изображен треугольник. Найдите его площадь в квадратных сантиметрах» [58]. В таблице 3 представлено решение данной задачи» [58].

Таблица 3

Рисунок	По формуле геометрии	По формуле Пика
	$S=\frac{1}{2}ah$ $S=\frac{1}{2}\cdot 6\cdot 5=15$	$S=\frac{Г}{2}+В-1$ $Г=12; В=10.$ $S=10+\frac{12}{2}-1=15$

Данный пример показывает прием, с помощью которого происходит усиление мотивации обучения. Прием может быть использован для воспитания у учащихся устойчивого интереса к геометрии, так как формула Пика может принести практическую пользу при сдачи ЕГЭ. Так же стоит отметить, что при вычислении площадей фигур от учащихся требуется творческий подход и смекалка [58].

Как пишет В.А. Далингер в статье, при решении задач из ЕГЭ на нахождении площади на клетчатой бумаге, «ошибки связаны с незнанием формул площадей плоских фигур; затруднения в случае, если площадь выражается дробным числом; затруднения в вычислении площади тупоугольного треугольника, когда одна из его сторон, противолежащая острому углу, лежит на вертикальной линии сетки, а основание высоты треугольника лежит на продолжении этой стороны» [16].

Таким образом, при обучении учащихся теме «Площади фигур» следует уделять больше времени формированию практических навыков вычисления площадей. Формулу для вычисления *площади боковой поверхности пирамиды и призмы* учащимся желательно вывести самостоятельно. Формулы для вычисления *площади боковой поверхности цилиндра и конуса* следует вводить на интуитивно-наглядном уровне, то есть взять развертки этих поверхностей и самостоятельно учащимся по известным формулам планиметрии вычислить их площади, и тем самым вывести формулы. Формулу *площади сферы* следует доказывать по учебнику. Не стоит требовать от учащихся знания *формул полной поверхности призмы, пирамиды, цилиндра и конуса*, так как они должны самостоятельно уметь ее выводить.

При повторении вопросов теории необходимо производить фронтальные беседы и опрос учащихся. Необходимо проводить больше уроков, где учащиеся самостоятельно будут решать задачи, при этом необходимо обращать внимание учащихся на качество выполнения рисунков к задачам. Следует требовать от учащихся устного рассказа о ходе построения с соответствующими обоснованиями, с целью развития устной речи учащихся.

§5. Методический проект на тему «Площадь поверхности пирамиды» в общеобразовательной школе

Как отмечает Е.В. Потоскуев «из всех математических дисциплин именно занятие геометрией в наибольшей мере способствует развитию интуиции и воображения, а, следовательно, способствует творческому развитию личности, так как интуиция и воображение – основа любого творчества».

Так же не стоит забывать, что «геометрическое образование благотворно влияет на интеллектуальное развитие личности» [43, С. 5].

Следует отметить, что тема «Площадь поверхности пирамиды» рассмотрена не во всех учебниках геометрии 10-11 класса.

Актуальность выполнения методического проекта по данной теме обусловлена следующими причинами:

1) содержание изучаемого материала по данной теме позволяет включить обучающихся в творческий процесс открытия необходимых знаний;

2) материал, рассматриваемый в теме является традиционным и актуален при подготовке обучающихся к сдаче ЕГЭ (задания №8 из части В, задания 2 из части С).

Цель данного проекта: спроектировать изучение темы «Площадь поверхности пирамиды» в рамках технологии творческих мастерских.

Далее рассмотрим методический анализ теоретического и практического содержаний по теме «Площадь поверхности пирамиды» в рекомендованных Минобрнауки РФ учебниках геометрии 10-11 классах [13].

Для достижения результата были рассмотрены базовые знания учащихся, рассматриваемые сведения, теоретический и задачный материалы по теме «Площадь поверхности пирамиды».

Методический анализ темы.

Базовые знания:

- понятие площади;
- понятие многогранника и его элементов;

– понятие развертки многогранника;

– понятие периметра многоугольника;

– понятие правильной пирамиды;

– понятие двугранного угла;

– теорема о площади ортогональной проекции многоугольника;

– понятие апофемы;

– теорема о трех перпендикулярах;

– теорема Пифагора.

Вводимые понятия:

– свойства параллельных сечений пирамиды;

– понятие усеченной пирамиды;

– формула площади боковой поверхности правильной и усеченной пирамиды;

– формула площади полной поверхности правильной и усеченной пирамиды;

– теорема о площади боковой поверхности правильной пирамиды.

Были проанализированы следующие учебники по геометрии: А.Д. Александрова [1], Л.С. Атанасяна [7], Е.В. Потоскуева, Л.И. Звавича [38], И.Ф. Шарыгина [66].

В учебнике А.Д. Александрова [1] нет теории по данной теме, лишь в задачном материале в графе «Дополняем теорию» встречается задача на доказательство площади боковой поверхности правильной пирамиды.

И.Ф. Шарыгин [66] не ставит задачи определения площади поверхности в общем виде, он ограничивается лишь рассмотрением конкретных поверхностей: боковой поверхности цилиндра, конуса, а также сферы и ее частей. В параграфе 6.5. «Площадь поверхности сферического пояса» рассмотрена лишь формула для нахождения части боковой поверхности правильной пирамиды.

В учебнике Л.С. Атанасяна [7] в главе 3 «Многогранники» в параграфе 2 «Пирамида» сначала происходит знакомство учащихся с пирамидой и ее элементами, а потом вводится определение: «Площадью полной поверхности пирамиды называется сумма площадей всех ее граней (т.е. основания и боковых граней), а площадью боковой поверхности пирамиды – сумма площадей ее боковых граней. Очевидно, $S_{\text{полн}} = S_{бок} + S_{\text{осн}}$ » [7, С. 69].

Далее автор вводит понятие правильной пирамиды и доказывает теорему о площади боковой поверхности правильной пирамиды, формулировка которой выглядит следующим образом: «Площадь боковой поверхности правильной пирамиды равна половине произведения периметра основания на апофему» [7, С. 70].

Завершается данный параграф введением понятия «усеченная пирамида», где после введения всех элементов пирамиды доказывается теорема о площади боковой поверхности усеченной пирамиды: «Площадь боковой поверхности правильной усеченной пирамиды равна произведению полусуммы периметров оснований на апофему» [7, С. 71].

В учебнике Е.В. Потоскуева, Л.И. Звавича [11] в главе 2 «Многогранники» в параграфе 14 «Пирамида» сначала вводится определение пирамиды и ее элементов, различные виды пирамид, определение «правильной пирамиды», признаки правильной пирамиды. После этого, авторы вводят понятие площади боковой поверхности пирамиды: «Площадью боковой поверхности пирамиды (обозначают $S_{бок}$) называется сумма площадей всех ее боковых граней: $S_{бок} = S_1 + S_2 + ... + S_n$, где $S_1, S_2, ..., S_n$ – площади боковых граней пирамиды [38, С. 117].

Понятие площади полной поверхности пирамиды, и теорему о площади боковой поверхности правильной пирамиды вводятся так же, как и в учебнике Л.С. Атанасяна.

Помимо этого, у Е.В. Потоскуева, Л.И. Звавича в учебнике вводится еще одна теорема о площади боковой поверхности пирамиды (с доказательством): «Если все боковые грани пирамиды наклонены к плоскости основания под углом φ, и высота пересекает основание, то $S_{бок} = \dfrac{S_{осн}}{\cos}$» [38, С.118].

Авторы понятие «усеченная пирамиды» и ее элементов, теорему о площади поверхности усеченной пирамиды вводят только после введения свойств параллельных сечений. Формулировка теоремы дана аналогично, как у Л.С. Атанасяна.

У Л.С. Атанасяна и Е.В. Потоскуева, Л.И. Звавича доказательство теоремы о площади боковой поверхности правильной пирамиды не приводится.

Обратим внимание, что у Е.В. Потоскуева, Л.И. Звавича вводится определение полной поверхности усеченной пирамиды: «Полная поверхность усеченной пирамиды – это объединение оснований и боковой поверхности, поэтому для усеченной пирамиды $S_{полн} = S_{бок} + S_1 + S_2$, где S_1 и S_2 – площади большего и меньшего оснований этой пирамиды» [38, С. 122].

Следует отметить, что авторы вводят еще одну формулу для нахождения площади боковой поверхности усеченной пирамиды, у которой все двугранные углы при ребрах большего основания равны φ: $S_{бок} = \dfrac{S_1 - S_2}{\cos\varphi}$.

Тема «Площадь поверхности пирамиды» по учебнику Л.С. Атанасяну изучается в 10 классе, а у Е.В. Потоскуева, Л.И. Звавича – в 11 классе.

Задачный материал.

Анализ задачного материала, рассмотренного в учебниках [1; 7; 42; 66], представлен в Таблице 4.

Таблица 4

Виды задания	**Автор учебника**	
	Атанасян Л.С.	Потоскуев Е.В.
На нахождение площади поверхности правильной пирамиды	257, 258, 264, 265	2.249, 2.250, 2.251, 2.255, 2.256, 2.260, 2.261, 2.262, 2.263, 2.264, 2.266, 2.269, 2.270, 2.271, 2.272, 2.273.
На нахождение площади поверхности произвольной пирамиды	240, 241, 242, 243, 244, 248, 250, 266	2.253, 2.254, 2.258, 2.267, 2.268
На нахождение площади	270	2.275

поверхности усеченной пирамиды		
На нахождение площади сечения	265, 266	2.274, 2.277
На доказательство	247	-
На метод введения вспомогательного элемента	242, 245,257, 258, 268,	2.259, 2.267, 2.270
На прием инвариантность	-	2.259
На метод площадей	-	-

Нами так же был проанализирован задачный материал на применение определенных приемов и методов решения геометрических задач, описанных в статье [18]. Так, было выявлено, что при решении задач по данной теме используются «метод введения вспомогательного элемента»; прием «инвариантность».

В учебниках *не представлен* такой тип задач, как: задачи на метод площадей (отношение площадей и свойства аддитивности).

Вместе с тем, в рассмотренных учебниках и задачниках *представлены* следующие типы задач:

– задачи на нахождение площади поверхности правильной, произвольной и усеченной пирамиды;

– задачи на нахождение площади сечения;

– задачи на доказательство;

– задачи на «метод введения вспомогательного элемента»;

– задачи на применение приема «инвариантность».

Анализ учебников [1; 7; 38; 42; 66] показал, что тема «Площадь поверхности пирамиды» представлена только в учебниках Л.С. Атанасяна и Е.В. Потоскуева, Л.И. Звавича, причем наиболее подробно раскрыта у Е.В. Потоскуева, Л.И. Звавича. Задачный материал в данных учебниках достаточно богатый.

Данный методический проект предназначен для математического профиля. Это обусловлено содержанием темы в примерной основной общеобразовательной программе среднего общего образования на углубленном уровне, разнообразием задачного материала по содержанию и по уровню сложности. Так же, проект поможет повысить интерес к изучению математики и увеличить кругозор учащихся. Кроме этого, при изучении темы «Площадь поверхности пирамиды» осуществляется возможность подготовки учащихся к Единому государственному экзамену по математике профильного уровня (Задания №8, №14) [35; 60].

Основным учебником математики для математического профиля выбран учебник Е.В. Потоскуева, Л.И. Звавича. Для профильного уровня изучения математики на тему «Пирамида» по программе авторов отводится 8 часов [38].

Рассматриваемая в данном проекте тема относится к 2 Главе «Многогранники». Тема вводится после параграфа §14.3 «Правильная пирамида», в котором вводится определение правильной пирамиды, рассматриваются замечательные свойства пирамиды с доказательством, признаки правильной пирамиды, вводится понятие «апофемы» пирамиды.

В авторской программе [43] отмечается, что в результате изучения темы учащиеся должны:

– решать задачи на вычисление площади боковой и полной поверхности правильной и усеченной пирамиды;

– строить сечения пирамид и вычислять их площади;

– используя частные виды пирамид, решать задачи на нахождение площади их боковой и полной поверхности;

– со всеми видами пирамид решать задачи на построение, доказательство и вычисление, сопровождая решение каждой задачи корректной аргументацией.

Проведем анализ практического опыта учителей по теме «Площадь поверхности пирамиды», опубликованный в статьях и учебно-методических пособиях.

В статье С.М. Саакяна и В.Ф. Бутузова «Изучение темы «Многогранники» в курсе X класса» [50] рассмотрены задачи с разобранными решениями сложного уровня на тему «Площадь поверхности пирамиды», а в конце статьи дан набор задач для самоконтроля.

На ведущем образовательном портале «Инфоурок» представлено большое количество конспектов уроков по теме «Площадь поверхности пирамиды» по учебнику Л.С. Атанасяна, В.Ф. Бутузова. На данном сайте представлены конспекты и лекций, и практических занятий, самостоятельные работы, презентации по данной теме.

Учитель математики Н.С. Белогурова предлагает конспект урока «Развертка пирамиды. Площадь поверхности пирамида и усеченной пирамиды», где учащиеся самостоятельно выводят формулу для вычисления площади поверхности пирамиды с помощью модели пирамиды, сделанной учащимися самостоятельно [3].

Так же на сайте «Инфоурок» много конспектов уроков на закрепление данной темы, где осуществляется групповая работа учащихся: каждой группе учащихся дается задача, а после решения учитель предлагает одному представителю от группы у доски защитить решение задачи. Тем самым происходит формирование у учащихся умения выступать перед аудиторией.

На сайте Фестиваль педагогических идей «Открытый урок» представлены так же конспекты уроков по данной теме. Так, например, учитель математики Н.И. Яхьяева предлагает конспект урока по теме «Пирамида», в котором сначала происходит знакомство с пирамидой и ее элементами, а уже после этого учитель предлагает выполнить практическую работу в парах. У каждой пары на парте лежит модель пирамиды, ученикам необходимо сделать необходимые измерения и вычислить площадь поверхности пирамиды. Ученики делают выводы, после которых учитель предлагает решить задачу на площадь поверхности пирамиды, применив полученные знания [69].

На сайте «Решу ЕГЭ» [35] представлен материал для подготовки ЕГЭ по математике. По теме проекта задачи встречаются в задании В8 «Стереометрия» и задании 14 второй части (С2) «Стереометрическая задача». Приведем пример двух задач с решением:

1. «Найдите площадь поверхности правильной четырехугольной пирамиды, стороны, основания которой равны 48 и высота равна 7» [35].

Решение.

$S_{полн} = S_{осн} + S_{бок}$. Так как пирамида правильная (Рис. 4), то в основании лежит квадрат, площадь квадрат равна: $S_{осн} = CD^2 = 48^2 = 2304$.

$S_{бок} = \frac{1}{2} \cdot P \cdot l$.

Найдем апофему пирамиды по теореме Пифагора. В ΔSOK: $SO = 7$, $OK = 24$, тогда $SK = \sqrt{SO^2 + OK^2} = \sqrt{7^2 + 24^2} = \sqrt{49 + 576} = 25$.

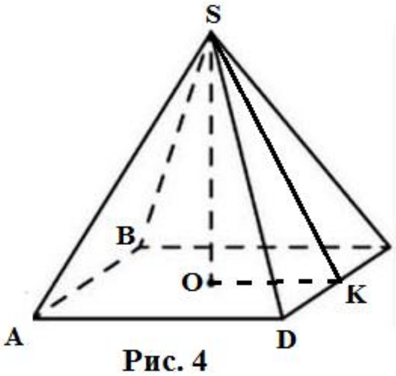


Рис. 4

$S_{бок} = \frac{1}{2} \cdot (48 \cdot 4) \cdot 25 = 2400$, тогда $S_{полн} = 2304 + 2400 = 4304$.

Ответ: 4304 кв. ед.

2. «В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ с ной S сторона основания равна 4. Точка L – середина ребра SC Тангенс угла между прямыми BL и SA равен $2\sqrt{\frac{2}{5}}$.

а) Пусть O – центр основания пирамиды. Докажите, что прямые BO и LO перпендикулярны.

б) Найдите площадь поверхности пирамиды» [35].

Решение.

а) По условию $AO = OC$, $SL = LC$, значит, OL – средняя линия треугольника SAC, $OL \parallel AS$ (Рис.5). По теореме о трех перпендикулярах проекция AS на плоскость основания пирамиды – прямая $AO \perp BD$, значит $AS \perp BD$. Получаем, что $LO \perp BD$.

б) $S_{полн} = S_{бок} + S_{осн}$. Найдем $S_{осн} = AB^2 = 8^2 = 64$. $S_{бок} = \frac{1}{2} \cdot P \cdot l$, где P – пери-

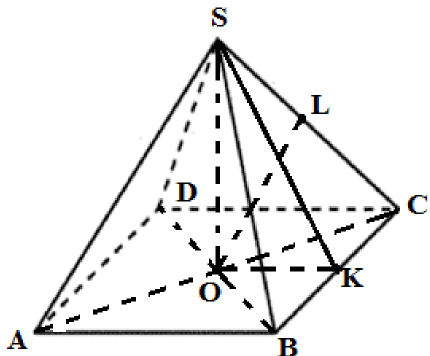


Рис. 5

метр основания, $l-$апофема. Пусть $AS=a$, тогда $OL=\frac{a}{2}$. Найдем, $BO=\frac{1}{2}BD=\frac{1}{2}\cdot 8\sqrt{2}=4\sqrt{2}$. В треугольнике BOL: $tg\angle BLO=\frac{BO}{OL}=\frac{4\sqrt{2}}{\frac{a}{2}}=\frac{8\sqrt{2}}{a}=\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{5}}$,

отсюда $a=4\sqrt{5}$. По теореме Пифагора найдем высоту боковой грани пирамиды: $SK=\sqrt{SB^2-BK^2}=\sqrt{(4\sqrt{5})^2-4^2}=\sqrt{80-16}=\sqrt{64}=8$.

$S_{бок}=\frac{1}{2}\cdot P\cdot l=\frac{1}{2}\cdot(4\cdot 8)\cdot 8=128$, тогда $S_{полн}=128+64=192$.

Ответ: 192 кв.ед.

В элективном курсе Т.И. Карпун «Практикум по решению стереометрических задач» [21] на тему «Пирамида. Усеченная пирамида. Поверхность пирамиды» отводится три часа, в течение которых рассматриваются свойства правильной и усеченной пирамиды, решение задач на нахождение площади поверхности пирамиды.

Таким образом, анализ темы в методической литературе [3; 50; 69], опыт изучения темы посредством элективного курса [21] и Единому Государственному Экзамену [35; 60] показывает интерес к теме «Площадь поверхности пирамиды».

Рассмотрим основные цели и задачи изучения темы «Площадь поверхности пирамиды».

Цель: ввести понятие площади боковой поверхности пирамиды, площади полной поверхности правильной и усеченной пирамиды; учить применять формулы, при решении задач; воспитывать аккуратность при построении рисунков к задачам.

Задачи:

- *формировать* понятие площади боковой и полной поверхности пирамиды;

- *формировать* умение решать задачи на отыскании площади поверхности пирамиды.

Теоретический и практический материал, рассматриваемый в проекте «Площадь поверхности пирамиды», способствует:

- развитию познавательного интереса и мотивации к математике;

- развитию творческих способностей учащихся;

- развитию навыков работы с учебной литературой;

- дополнительно подготовить к государственной итоговой аттестации по материалам и в форме ЕГЭ;

- формирует качества математических знаний, повышая предметные математические компетенции.

В стандарте по математике (профильный уровень) прописано ряд требований к знаниям, умениям и навыка учащихся по теме «Площадь поверхности пирамиды».

«Учащиеся должны:

знать/понимать

– возможности геометрии для описания свойств реальных предметов и их взаимного расположения;

уметь:

- решать геометрические задачи, опираясь на изученные свойства планиметрических и стереометрических фигур и отношение между ними, применяя алгебраический и тригонометрический аппарат;

- проводить доказательственные рассуждения при решении задач, доказывать основные теоремы курса;

- вычислять линейные элементы и углы в пространственных конфигурациях, объемы и площади поверхностей пространственных тел и их простейших комбинаций» [59].

В результате изучения темы «Площадь поверхности пирамиды» ученик должен:

знать/понимать:

- формулы вычисления площадей боковой и полной поверхностей пирамиды и усеченной пирамиды;

- свойство параллельных сечений пирамиды;

уметь:

– строить сечения различных видов пирамид различными методами и находить площади полученных сечений, аргументировано объясняя каждый «шаг решения»;

– находить площади боковой и полной поверхностей различных видов пирамид, корректно аргументируя каждый «шаг решения».

Проведем обоснования целесообразности использования технологии творческих мастерских для реализации данной темы на практике.

Г.К. Селевко пишет о том, что «технологию исповедует группа французских учителей «Французская группа нового воспитания», которая основывается на идеях свободного воспитания Ж.-Ж. Руссо, Л.Толстого, С. Френе, на психологии гуманизма Л.С. Выготского, Ж. Пиаже, К. Роджерса» [51, С. 420].

Как отмечает автор, свое название технология получила от того, что в ней есть мастер. Сам участие во время урока мастер не принимает, он лишь создает алгоритм действий, разворачивающий творческий процесс.

Особенность организации мастерской заключается в том, что она состоит из ряда заданий, которым нужно сделать учащимся, направляя их в нужное русло. Следует отметить, что при выполнении задания учащиеся абсолютно свободны: они сами выбирают путь исследования, средство для достижения цели, темп работы и т.д.

Главное для мастера – это не сообщить и освоить информацию, а передать способы работы [51, С. 421].

Н.Г. Михайлова в своей статье [31] отмечает, что уникальность мастерской заключается в том, что все могут проявить свои таланты. Во время работы проявляется атмосфера открытости, доброжелательности, сотворчества в общении, пробуждение у учащегося личной заинтересованности в изучении проблемы, которые позволяют обеспечить взаимосвязь процессов обучении, самовоспитания и взаимообучения, взаимовоспитания. Что важно, в мастерской оценивание работ ученика происходит через самооценку через афиширование и работу в группах, а не через официальное оценивание работ.

Как пишет Н.Л. Стефанова и др. «*Мастерская состоит из системы заданий*, которая: 1) позволит уйти от информационной формы обучения (передачи информации учителем); 2) включит учащихся в творческий процесс открытия знаний, построения системы новых знаний и включения их в систему имеющихся; 3) предоставит школьникам абсолютную свободу (выбор пути исследования, выбор средств для достижения цели, выбор темпа работы и т. д.)» [28, С. 245].

Существует определенный алгоритм, по которому строится мастерские: «индивидуальная работа по выполнению предложенного задания (на базе имеющихся знаний, использования личного жизненного опыта); работа в парах (обмен результатами индивидуальной работы); работа в группах (выработка общего мнения группы); обмен мнениями в классе (группы представляют итоги своей работы); коррекция (группы вносят исправления и дополнения в свой вариант выполнения задания, учитывая результаты рабы других групп); слово учителя (акцентирование внимания на ключевых моментах, выделение находок, ошибок); обсуждение мастерской (подведение итогов, формулирование нерешенных проблем)» [28, С. 246].

Технология полезна и при изучении новой темы, и при повторении и закреплении изученного материала. Можно сочетать разные варианты работы, начиная с работы в парах и заканчивая работой всего класса [28, С. 245].

С понятием площадь учащиеся знакомятся в основной школе, а с понятием пирамида перед изучением данной темы, поэтому с помощью практико-ориентировочных задач ученикам удастся выявить формулу для вычисления площади поверхности пирамиды и научиться ее применять при решении задач.

Спроектируем изучение темы «Площадь поверхности пирамиды» в рамках технологии творческих мастерских.

В методическом пособии [43] по учебнику Е.В. Потоскуева, Л.И. Звавича [38] авторы выделяют на обучение теме «Пирамида» 8 часов.

Исходя из этого, с учетом выбранной нами технологии мастерских, спроектируем изучение темы «Площадь поверхности пирамиды» для 2-х уроков.

Мастерская 1. **Познание теории по теме «Площадь поверхности пирамиды»**

Цель: формировать понятие площади боковой и полной поверхности пирамиды; «открыть» формулы для нахождения площади боковой и полной поверхности правильной и усеченной пирамиды.

Образовательная задача: ввести определения понятий площади боковой и полной поверхности пирамиды и формулы для нахождения площади боковой и полной поверхностей пирамиды; «открыть» формулы для нахождения для площади боковой поверхности правильной пирамиды, площади боковой и полной поверхностей усеченной пирамиды; формировать понятие «усеченная пирамида».

Развивающая задача: развивать самостоятельность, умение работать в парах.

Воспитательная задача: повышать интерес к предмету, формировать логическое мышление.

Предполагаемые результаты: свободно оперировать понятием площади боковой и полной поверхности пирамиды; знание формул для нахождения площади боковой и полной поверхности правильной и усеченной пирамиды; осознание того, что площадь боковой и полной поверхности пирамиды можно вычислять по-разному: в зависимости от вида пирамиды и их особенностей.

Ход мастерской (45 мин):

1. Организационный момент и ознакомление с планом мастерской – 2 мин.

Учащимся перед этим уроком было дано домашнее задание:

«Сделайте *развертку правильной пирамиды* из бумаги по вариантам: 1 вариант - треугольной пирамиды; 2 вариант – четырехугольной пирамиды; 3 вариант – пятиугольной пирамиды. Подумайте и ответьте письменно в тетради на вопросы:

1. Как найти площадь *боковой поверхности пирамиды*?

2. Как найти площадь *полной поверхности пирамиды*?

3. Очевидно, что площадь боковой поверхности *правильной пирамиды* можно вычислить проще. Назовите вершины пирамиды, запишите формулу для нахождения площади боковой поверхности произвольной пирамиды, преобразуйте формулу. Что получили?» (Приложение 1)

В результате выполнения *домашней работы* предполагаются получить такие ответы учащихся:

1. «Площадь боковой поверхности пирамиды равна сумме площадей ее боковых граней» [38, С. 117].

2. «Площадь полной поверхности пирамиды равна сумме площадей ее боковых граней и площади основания» [38, С. 117].

3. «Площадь боковой поверхности правильной пирамиды равна произведению полупериметра основания на высоту боковой грани (апофему): $S_{\text{бок}} = \frac{1}{2} P \cdot l$, где P – периметр, l – высота боковой грани (апофема)» [38, С. 117].

2. **Фронтальная работа с классом** (выработка общего мнения) – 5 мин.

Обсуждение выполненного домашнего задания.

Учитель задает вопросы учащимся (актуализация знаний).

1. Сформулируйте теорему о трех перпендикулярах.

2. Какими свойствами обладает вписанная и описанная окружность в треугольнике?

3. Сформулируйте теорему о площади ортогональной проекции многоугольника.

В результате устного опроса предполагаются получить такие ответы:

1. «Если на плоскости проведена прямая перпендикулярно проекции наклонной, то эта прямая перпендикулярна и самой наклонной».

2. «а) центром вписанной окружности является точка пересечения биссектрис треугольника;

б) центр описанной окружности является точка пересечения серединных перпендикуляров к сторонам треугольника;

в) у прямоугольного треугольника центр описанной окружности лежит на середине гипотенузы».

3. «Площадь ортогональной проекции многоугольника на плоскость равна площади проектируемого многоугольника, умноженной на косинус угла между плоскостью многоугольника и плоскости проекций $S_{\Delta A_1B_1C_1} = S_{\Delta ABC}\cos$ ».

Учитель: мы находили с вами площадь боковой поверхности произвольной пирамиды, также правильной пирамиды.

Допустим, что все боковые грани пирамиды наклонены к плоскости основания под углом φ, и высота пересекает основание.

Возникает вопрос: чему будет равна площадь ее боковой поверхности.

3. **Индивидуальная работа** (на базе имеющихся знаний) - 10 мин.:

Задание 1 (каждому учащемуся раздается карточка с заданиями).

1. Запишите в тетради тему мастерской «Площадь поверхности пирамиды».

2. В учебнике Е.В. Потоскуева, Л.И. Звавича на стр. 118 изучите теорему 18 и разберите её доказательство.

«Теорема 18. Если все боковые грани пирамиды наклонены к плоскости основания под углом φ, и высота пересекает основание, то $S_{бок} = \frac{S_{осн}}{\cos}$» [38, С. 118].

3. Решите задачу №2.251 из задачника, применив теорему 18.

«2.251. Найдите площадь боковой поверхности правильной треугольной пирамиды, если сторона основания a и боковое ребро образует с плоскостью основания угол в $45°$» [42, С. 69].

Решение задачи получится следующее:

Применяем формулу $S_{бок} = \frac{S_{осн}}{\cos}$.

По формуле площади равностороннего треугольника находим $S_{осн} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$, тогда $S_{бок} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} : \cos 45° = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} : \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{a^2\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$.

Ответ: $\frac{a^2\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$.

Зафиксируйте ответы в тетради. Выполните корректировку записей после обсуждения в паре.

4. Фронтальная работа с классом (выработка общего мнения) – 2 мин.

Учитель обобщает полученные результаты: если все боковые грани пирамиды наклонены к плоскости основания под углом φ, и высота пересекает основание, то площадь ее боковой поверхности будет вычисляться по формуле: $S_{бок} = \frac{S_{осн}}{\cos}$.

Учитель: предположим, что пирамида пересечена плоскостью, параллельной основанию. Возникает вопрос: о какой пирамиде идет речь и как вычислить площадь ее боковой и полной поверхности.

5. Работа в группах – 18 мин

Задание 2 (выдается каждой группе). Обсудите в группе ответы на предложенные вопросы и запишите ответы в тетрадь. Если возникнут затруднения, воспользуйтесь учебником.

1. На какие два многогранника поделилась пирамида на Рис. 6?
2. Что за фигура лежит в плоскости α?
3. Что за фигура лежит в плоскости β?
4. Назовите основания усеченной пирамиды.

5. Что лежит в боковых гранях усеченной пирамиды?

6. Что является высотой усеченной пирамиды?

7. Что является апофемой усеченной пирамиды?

В результате выполнения задания 2 предполагается получить такие ответы:

1. Пирамида $A_1B_1C_1D_1S$ и многогранник $ABCDA_1B_1C_1D_1$.

2. Пирамида $A_1B_1C_1D_1S$.

3. Многогранник $ABCDA_1B_1C_1D_1$.

Учитель: «Говорят, что многогранник $ABCDA_1B_1C_1D_1$ называется усеченной пирамидой».

4. Нижнее основание $ABCD$, верхнее основание $A_1B_1C_1D_1$.

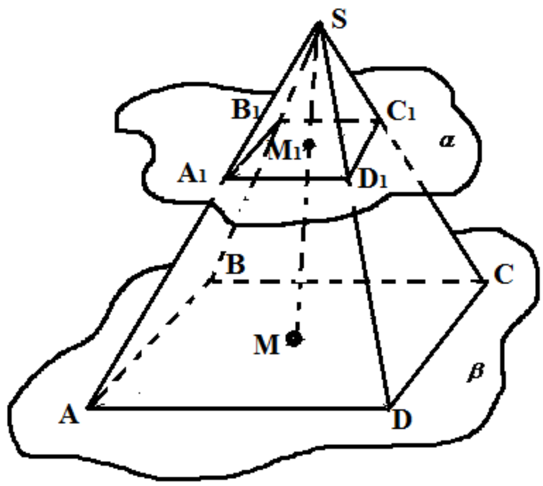


Рис. 6

5. Равнобедренные трапеции.

6. «Высотой усеченной пирамиды называется перпендикуляр, проведенный из какой-нибудь точки одного основания к плоскости другого» [38, С. 121].

7. Высота трапеций, лежащих в боковых гранях, соединяющие середины их оснований.

Задание 3 (выдается каждой группе).

Группа 1. На стр. 132 учебника прочитайте теорему 20 и приведите доказательства данной теоремы.

Группа 2. Докажите формулу для нахождения площади боковой поверхности усеченной пирамиды $S_{бок} = \frac{S_1 - S_2}{\cos}$. На стр. 132 учебника воспользуйтесь подсказкой.

6. **Комментарии учителя** – 5 мин.

7. **Обсуждение мастерской** – 5 мин.

1. «Площадь боковой поверхности правильной пирамиды равна произведению полупериметра основания на апофему пирамиды» [35, С. 117].

Формула: $S_{бок} = \frac{1}{2} P \cdot l$, где P – периметр, l – высота апофема.

2. «Если все боковые грани пирамиды наклонены к плоскости основания под углом φ, и высота пересекает основание, то $S_{бок} = \frac{S_{осн}}{\cos}$» [35, С. 118].

3. «Усеченной пирамидой называется часть полной пирамиды, заключенная между ее основанием и параллельным ему сечением» [35, С. 121].

4. Для нахождения правильной усеченной пирамиды существует 2 формулы:

1) $S_{бок} = \frac{P_1 + P_2}{2} \cdot h$, где P_1, P_2 – периметры нижнего и верхнего оснований усеченной пирамиды, h – ее апофема;

2) $S_{бок} = \frac{S_1 - S_2}{\cos}$, где S_1, S_2 – площади большего и меньшего оснований пирамиды, $\varphi -$ угол наклона бокового ребра к плоскости основания.

8. **Задание на дом** – 2 мин. (§14.4-14.6; подготовить сообщение об истории развития понятия площади фигур в математике). Список рекомендованной литературы [11; 24; 26].

Мастерская 2. **Изучить – значить научиться решать задачи по теме «Площадь поверхности пирамиды»**

Цель: формировать умения применять теоретические знания при решении задач.

Образовательная задача: формировать умения решать задачи.

Развивающая задача: развивать самостоятельность, умение работать в группах.

Воспитательная задача: повышать интерес к предмету, формировать логическое мышление.

Предполагаемые результаты: свободное применение формул площади боковой и полной поверхности при решении задач.

Ход мастерской (45 мин.):

1. Организационный момент и ознакомление с планом мастерской – 2 мин.

2. Индивидуальная работа – 8 мин.

Задание 1. Решите самостоятельно задачи. Обсудите ответ в паре.

Задача 1. Найдите площадь боковой и полной поверхности правильной четырехугольной пирамиды, у которой апофема равна 12, сторона основания 7.

Задача 2. «Найдите площадь боковой поверхности правильной треугольной пирамиды, если ее высота равна 4 см, а апофема 8 см» [42, С. 69].

В результате выполнения задания 1 предполагается получить такое решение задач:

Задача 1. Решение. $S_{бок} = \frac{1}{2} \cdot P \cdot l = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 7 \cdot 12 = 168 \text{см}^2$;

$S_{полн} = S_{осн} + S_{бок} = 7^2 + 168 = 49 + 168 = 217 \ \text{см}^2$.

Ответ: 168 см^2 и 217 см^2.

Задача 2. Решение. $S_{бок} = \frac{1}{2} \cdot P \cdot l$. Так как пирамида правильная (Рис. 7), то в основании ее лежит равносторонний треугольник. Пусть $AC = a$ см, тогда $CH = \frac{a}{2}$ см. Из прямоугольного треугольника DOH найдем OH по теореме Пифагора: $OH = \sqrt{DH^2 - DO^2} = \sqrt{8^2 - 4^2} = 4\sqrt{3}$ см. По свойству медианы равностороннего треугольника, имеем:

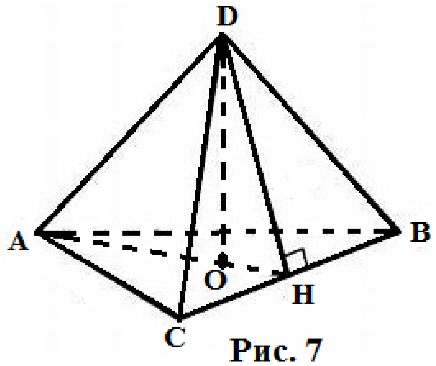


Рис. 7

$AO:\text{OH}=2:1$. Тогда $AH=3\cdot OH=3\cdot 4\sqrt{3}=12\sqrt{3}$ см. По теореме Пифагора в ΔAAH найдем AC: $AC^2=CH^2+AH^2$, $a^2=(\frac{a}{2})^2+(12\sqrt{3})^2$. Решая данное уравнение, находим $a=24$.

$S_{бок}=\frac{1}{2}\cdot(3\cdot 24)\cdot 8=288\,\text{см}^2$.

Ответ: 288 см.

3.Фронтальная работа с классом (выработка общего мнения) – 3 мин.

Учитель:

1. Итак, при решении первой задачи мы использовали понятие площади боковой и полной поверхности правильной четырехугольной пирамиды, применили формулу для вычисления площади боковой поверхности правильной пирамиды $S_{бок}=\frac{1}{2}\cdot P\cdot l$.

2. При решении второй задачи мы использовали понятие площади боковой поверхности правильной треугольной пирамиды, применили так же формулу $S_{бок}=\frac{1}{2}\cdot P\cdot l$, воспользовались свойством медиан равностороннего треугольника, применили теорему Пифагора.

4. Работа в группах – 22 мин.

Обсудите в группе поиск решения предложенных задач. Самостоятельно запишите решение задач. Сверьте ответы в группе.

Задание 2 (карточка выдается каждой группе).

Задача 1. «Основанием пирамиды $DABC$ является треугольник ABC, у которого $AB=AC=13$см, $BC=10$см; ребро AD перпендикулярно к плоскости основания и равно 9 см. Найдите площадь боковой поверхности пирамиды» [9, С. 72].

Задача 2. «Сечение пирамиды, параллельное ее основанию, делит высоту пирамиды в отношении 2:3 (считая от вершины), а площадь сечения меньше площади основания пирамиды на 105 см ^{2}. Найдите площадь основания» [42, С.72].

Задача 3. «Два боковых ребра треугольной пирамиды равны 25 см и 30 см, а сторона основания, заключенная между ними, равна 25 см. Найдите другие стороны основания, если площадь боковой поверхности пирамиды равна 840 см ^{2} и высота проходит через центр вписанной в основание окружности» [42, С. 70].

В результате выполнения задания 2 предполагается получить такое решение задач:

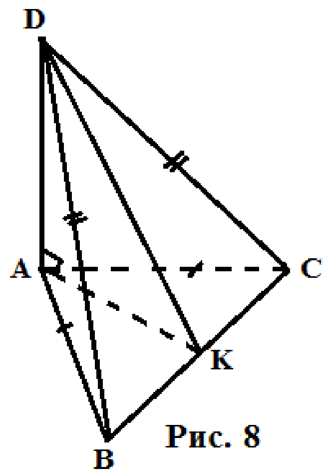


Рис. 8

Задача 1. Решение.

$S_{бок} = S_{\Delta ADB} + S_{\Delta BDC} + S_{\Delta ADC}$. Так как AB и AC являются проекциями наклонных DB и DC, и $AB = AC$, значит, $DB = DC$ (Рис. 8).

$$S_{\Delta ADB} = \frac{1}{2} \cdot AD \cdot AB = \frac{1}{2} \cdot 9 \cdot 13 = 58{,}5 \text{см}^2 .$$

$S_{\Delta ADB} = S_{\Delta ADC}$.

Найдем из треугольника ΔADB: $DB = \sqrt{13^2 + 9^2} = \sqrt{250} = 5\sqrt{10}$. $DB = DC = 5\sqrt{10}$.

Треугольник BDC – равнобедренный, $DK = \sqrt{DB^2 - BK^2} = \sqrt{250 - 25} = 15$.

$$S_{\Delta BDC} = \frac{1}{2} \cdot BC \cdot DK = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 15 = 75.$$

Находим $S_{бок} = 2 \cdot 58{,}5 + 75 = 192$ см ^{2}.

Ответ: 192 см ^{2}.

Задача 2. Решение.

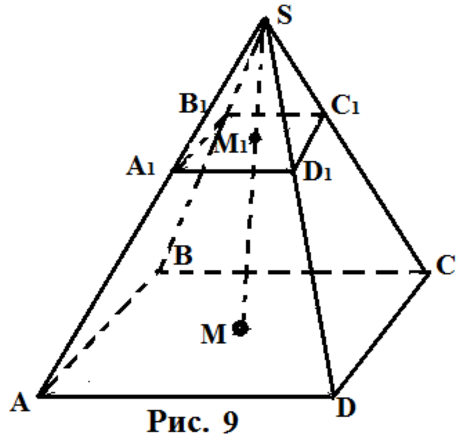


Рис. 9

По условию $S_{осн} = S_{сеч} + 105$. Так как сечению проведено параллельно основанию, то пирамиды $ABCDS$ и $A_1B_1C_1D_1S$ - подобные (Рис. 9). Тогда, $k^2 = \frac{S_{сеч}}{S_{осн}}$. Высота пирамиды $ABCDS$ относится к высоте пирамиды

$A_1B_1C_1D_1S$ как 2:5. Пусть $S_{сеч} = x$, тогда $S_{осн} = x + 105$. Имеем: $\left(\frac{2}{5}\right)^2 = \frac{x}{x+105}$, отсюда находим $x = 20 = S_{сеч}$, тогда $S_{осн} = 20 + 105 = 125$ см ^{2}.

Ответ: 125 см ^{2}

Задача 3. Решение.

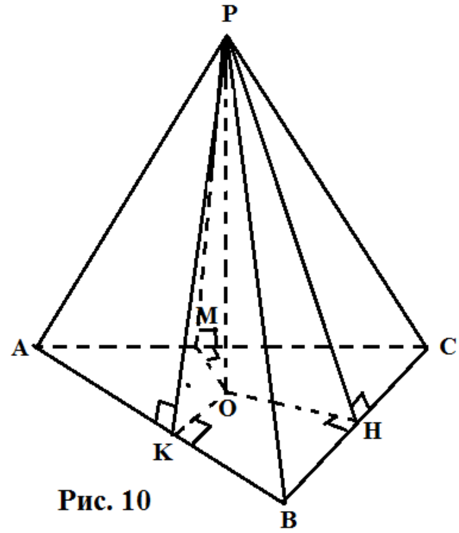


Рис. 10

Пусть в пирамиде $AB = BP = 25$, тогда $AP = 30$ (Рис. 10). Точка O – центр вписанной в треугольник ABC окружности; отрезки $OK = OH = OM = r$, $OK \perp AB$, $OH \perp BC$, $OM \perp AC$. Значит, $PK \perp AB$, $PH \perp BC$, $PM \perp AC$.

Рассмотрим грань пирамиды - треугольник ABP: $S_{\Delta AAB} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot PK$, с другой стороны $S_{\Delta AAB} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, где p – полупериметр треугольника ABP. Приравняем формулы: $\frac{1}{2} \cdot AB \cdot PK = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, отсюда найдем $PK = \frac{2\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{AB} = \frac{2\sqrt{40 \cdot 10 \cdot 15 \cdot 15}}{25} = 24$. Тогда $AK = \sqrt{AP^2 - PK^2} = \sqrt{30^2 - 24^2} = 18$. $AK = AM = 18$, значит, $KB = BH = 25 - 18 = 7$.

Обозначим $CH = x$. Тогда $S_{бок} = \frac{1}{2}(18 + x + 7 + x) \cdot 24 + 300 = 840$, отсюда находим x=10. Тогда $BC = 7 + 10 = 17$, $AC = 18 + 10 = 28$.

Ответ: 17 см, 28 см.

5. **Комментарии учителя** – 5 мин.

Учитель:

1. Итак, при решении первой задачи мы использовали понятие площади боковой поверхности произвольной пирамиды, применили формулу для вычисления площади прямоугольного треугольника $S = \frac{1}{2} a \cdot b$, где a, b – катеты прямоугольного треугольника, применили теорему Пифагора.

2. При решении второй задачи мы использовали понятие площади основания усеченной пирамиды, понятие коэффициенты подобия, методом вспомогательного элемента.

3. При решении третьей задачи использовали понятие площади боковой поверхности треугольной пирамиды, свойство вписанной в треугольник окружности, формулу для нахождения площади треугольника $S = \frac{1}{2} \cdot a \cdot h$, формулу Герона $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, прием «инвариантность» и «метод вспомогательного элемента».

Группа называет ответы к задачам. Учитель сравнивает ответы. Корректировка хода решения задач.

6. Обсуждение мастерской – 3 мин.

Мы с вами сегодня учились применять понятие площади боковой и полной поверхности пирамиды при решении задач.

7. Задание на дом – 2 мин. (Подготовка к проверочной работе: 2.265, 2.273, 2.266)

Итоговый контроль. Так как технология творческих мастерских обычно строятся по определенному алгоритму (индивидуальная работа, работа в парах, работа в группах, обмен мнениями в классе, коррекция, слово учителя и обсуждение мастерской) и на изучение темы «Площадь поверхности пирамиды» дается три часа, целесообразно провести итоговый контроль в форме итоговой проверочной работы на третьем уроке изучении темы.

Контроль должен быть достаточно разнообразен и полон, охватить все этапы обучения. Итоговая проверочная работа должна констатировать уровень знаний и умений, которыми овладел учащийся за время изучения темы «Площадь поверхности пирамиды».

Итоговая проверочная работа состоит из трех заданий:

- *первая задача* связана с нахождением площади боковой поверхности правильной пирамиды (дополнительные знания: т. Пифагора, свойства равностороннего треугольника);

- *вторая задача* - с нахождением площади поверхности усеченной пирамиды (дополнительные знания: свойства вписанных и описанных окружностей, т. Пифагора);

- третья задача - на применение метода «вспомогательного элемента» (применение формулы $S_{бок} = \frac{S_{осн}}{\cos}$).

Критерии оценки:

Задание 1 - 0-3 балла;

Задание 2 – 0-4 балла;

Задание 3 – 0-5 балла.

Отметка «5» ставится за 11-12 баллов; отметка «4» — за 7-9 баллов; отметка «3» — за 3-6 баллов; отметка «2» - за 0-2 балла.

Примерный вариант итоговой проверочной работы по теме «Площадь поверхности пирамиды» составлен с использованием методической литературы [4, 11, 20].

Задача 1. «Сторона правильной треугольной пирамиды равна 6 см, а высота $\sqrt{13}$ см. Найдите площадь боковой поверхности пирамиды» [35].

Задача 2. «В правильной четырехугольной усеченной пирамиде стороны оснований 8 и 2 м. Высота равна 4 м. Найдите полную поверхность усеченной пирамиды» [42, С.89].

Задача 3. «Основание пирамиды - прямоугольный треугольник с катетом $4\sqrt{3}$ см и противолежащим углом $60°$. Все боковые ребра пирамиды наклонены к плоскости основания под углом $45°$. Найдите площадь боковой поверхности пирамиды» [35].

Решение итоговой проверочной работы:

Задача 1.

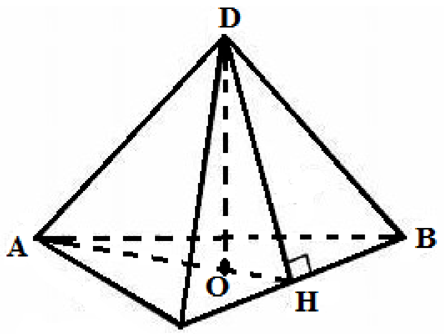


Рис. 11

Решение. Так как треугольник $ABC-$равносторонний, то медианы треугольника делятся в отношении 2:1, считая от вершины (Рис. 11). Значит, $AO:OH=2:1$, тогда $AH=\frac{\sqrt{3}}{2}a=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot 6=\frac{\sqrt{3}}{3}\Rightarrow OH=\sqrt{3}$ (см).

ΔDOH – прямоугольный, найдем DH:

$DH=\sqrt{DO^2+OH^2}=\sqrt{13+3}=4$ (см).

$S_{бок}=\frac{1}{2}P\cdot l=\frac{1}{2}(3\cdot 6)\cdot 4=36$ (см ^{2}).

Ответ: 36 см ^{2}

Задача 2.

Решение. Т.к. точки O и O_1 являются центрами окружностей вписанных в квадраты $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$, тогда OO_1 – высота пирамиды (Рис. 12). Проведем $OK\perp CD$ и $O_1K_1\perp C_1D_1$, получаем OK и O_1K_1 – радиусы вписанных окружностей.

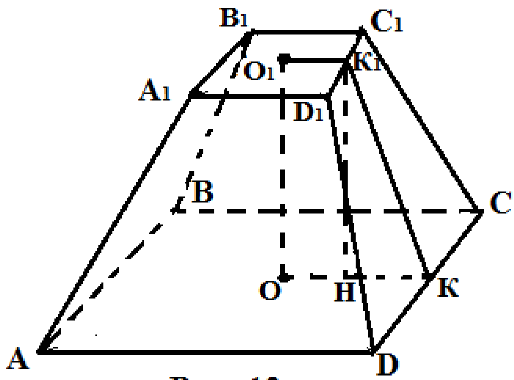


Рис. 12

$OK=\frac{1}{2}AD=4$ (м), $O_1K_1=\frac{1}{2}A_1D_1=1$ (м).

Проведем $K_1H\perp OK$, OO_1K_1K – прямоугольник, у которого $OO_1=HK_1=4$, $O_1K_1=OH=1$, тогда $HK=OK-OH=4-1=3$ (м).

Из ΔK_1KH по т. Пифагора найдем KK_1:

$KK_1=\sqrt{K_1H^2+KH^2}=\sqrt{4^2+3^2}=5$ (м).

$S_{полн}=S_{бок}+S_{осн}$, тогда $S_{бок}=\frac{P_1+P_2}{2}\cdot h=\frac{4\cdot 2+4\cdot 8}{2}\cdot 5=100$ (см ^{2});

$S_{осн}=2^2+8^2=68$ (см ^{2}).

$S_{полн}=68+100=168$ (см ^{2}).

Ответ: 168 см ^{2}

Задача 3.

Решение. Рассмотрим ΔAAB: $\angle ABC=60°$, тогда $\angle CAB=30°$ (Рис. 13). Пусть $BC=x$, тогда $AB=2x$ (т.к. катет, лежит против угла в $30°$).

По т. Пифагора: $AB^2 = BC^2 + CA^2$, $(2x)^2 = (4\sqrt{3})^2 + x^2$, из уравнения находим $x = 4$. Тогда, $CB = 4$ (см).

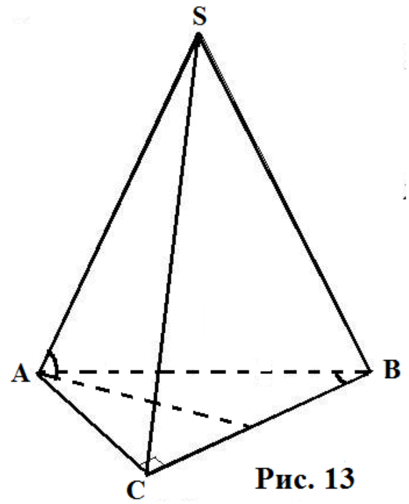


Рис. 13

По формуле, $S_{бок} = \dfrac{S_{осн}}{\cos}$.

Найдем

$$S_{осн} = S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} AC \cdot CB = \frac{1}{2} \cdot 4\sqrt{3} \cdot 4 = 8\sqrt{3} \text{ (см}^2\text{)}.$$

Тогда,

$$S_{бок} = \frac{8\sqrt{3}}{\cos 45^\circ} = 8\sqrt{3} : \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{16\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = 8\sqrt{6} \text{ (см}^2\text{)}.$$

Ответ: $8\sqrt{6}$ см^2

§6. Система задач по теме «Площадь геометрических фигур» в курсе геометрии общеобразовательной школы

Ранее, в [16] были описаны требования к системам упражнений по теме «Площади фигур»:

«1. Задачи по теме должны распределяться по принципу «от простых к сложным».

2. Каждая задача должна адекватно отражать содержание рассматриваемых тем.

3. Предлагаемые задачи должны соответствовать ныне действующим общеобразовательным стандартам.

4. Содержание задач должно быть направлено на привитие умений и навыков, необходимых при вычислении величины площади.

5. Предлагаемые задачи должны быть направлены на применение определенных приемов и методов решения задач по теме «Площадь фигуры» [16].

Отметим, что тема «Площадь фигур» включает такие подтемы, как: «Площадь поверхности призмы», «Площадь поверхности параллелепипеда», «Площадь поверхности пирамиды», «Площадь поверхности цилиндра», «Площадь поверхности конуса», «Площадь сферы», «Площадь сечений геометрических тел», «Площадь поверхности вписанных и описанных многогранников». Поэтому нами будут составлены системы задач по каждой из указанных тем. Ответы и указания к решению см. Приложение 2.

Система задач на тему «Площадь поверхности призмы»

Задача 1. «В правильной $n-$угольной призме сторона основания равна a и высота равна h. Вычислите площади боковой и полной поверхности призмы, если: а) $n=3$, $a=10$см, $h=15$ см; б) $n=4$, $a=12$дм, $h=8$дм; в) $n=6$, $a=23$см, $h=5$дм; г) $n=5$, $a=0{,}4$м, $h=10$см» [9].

Задача 2. «Основанием прямой треугольной призмы служит прямоугольный треугольник с катетами 6 и 8, высота призмы равна 10. Найдите площадь ее поверхности» [35].

Задача 3. «Стороны перпендикулярного сечения наклонной треугольной призмы равны 21 см, 17 см и 10 см; а ее боковое ребро 18 см. Найдите площади боковой и полной поверхностей призмы» [42, С. 37].

Задача 4. «В треугольной призме две боковые грани перпендикулярны. Их общее ребро равно 16 и отстоит от других боковых ребер на 9 и 12. Найдите площадь боковой поверхности этой призмы» [35].

Задача 5. «Диагонали боковых граней прямой треугольной призмы равны 9 см, $10\sqrt{2}$ см и 15 см. Основание призмы – прямоугольный треугольник. Найдите стороны основания и площадь боковой поверхности призмы» [42, С. 40].

Задача 6. «Основание прямой призмы – треугольник со сторонами 5 см и 3 см и углом в $120°$ между ними. Наибольшая из площадей боковых граней равна 35 $см^2$. Найдите площадь боковой поверхности призмы» [7].

Задача 7. «Найдите площадь боковой поверхности правильной четырехугольной призмы, диагональ которой равна a и образует с плоскостью основания угол в $60°$» [42, С. 40].

Задача 8. «Дана правильная призма $ABCA_1B_1C_1$, у которой стороны основания $AB = 4$, а боковое ребро $AA_1 = 9$. Точка M – середина ребра AC, а на ребре AA_1 взята точка T так, что $AT = 5$. Плоскость BTC_1 делит отрезок MB_1 на две части. Найдите длину меньшей из них» [35].

В системе представлены следующие типы задач по теме «Площадь поверхности призмы», №1-8 – на вычисление. При решении задач №5 используется метод введения вспомогательного элемента; №8 – метод площадей (свойство отношения площадей).

Система задач на тему «Площадь поверхности параллелепипеда»

Задача 9. «Во сколько раз увеличится площадь поверхности куба, если его ребро увеличить в три раза?» [35].

Задача 10. «Диагональ куба равна 1. Найдите площадь его поверхности» [60].

Задача 11. «Два ребра прямоугольного параллелепипеда, выходящие из одной вершины, равны 2, 4. Диагональ параллелепипеда равна 6. Найдите площадь поверхности параллелепипеда» [35].

Задача 12. «Два ребра прямоугольного параллелепипеда выходящие из одной вершины, равны 3 и 4. Площадь поверхности этого параллелепипеда равна 94. Найдите третье ребро, выходящее из той же вершины» [35].

Задача 13. «Основанием наклонного параллелепипеда служит прямоугольник со сторонами a и b; боковое ребро c образует со сторонами углы в $60°$. Найдите площадь боковой поверхности параллелепипеда» [7, С. 155].

Задача 14. «В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D$ известны длины ребер $AB = 4$, $BC = 3$, $AA_1 = 2$. Точки P и Q - середины ребер A_1B_1 и CC_1 соответственно. Плоскость APQ пересекает ребро B_1C_1 в точке U.

а) Докажите, что $BU : UC_1$.

б) Найдите площадь сечения параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D$ плоскостью APQ» [35].

В системе представлены следующие типы задач по теме «Площадь поверхности параллелепипеда», как 9-14 – на вычисление. При решении задач №12 используется метод введения вспомогательного элемента; №14 - метод площадей (свойство аддитивности).

Система задач на тему ««Площадь поверхности пирамиды»

Задача 15. «Найдите площадь поверхности правильной четырехугольной пирамиды, стороны которого равны 6 и высота равна 4» [60].

Задача 16. «Во сколько раз увеличится площадь поверхности правильного тетраэдра, если все его ребра увеличить в два раза?» [35].

Задача 17. «Найдите площадь боковой поверхности правильной шестиугольной пирамиды, если сторона ее основания равна a, а площадь боковой грани равна площади сечения, проведенного через вершину пирамиды и большую диагональ основания» [9, С. 74].

Задача 18. «Основанием пирамиды служит треугольники, стороны которого 29 см, 35 см и 48 см. Высота пирамиды проходит через центр вписанной и описанной окружности и меньше высоты боковой грани на 3 см. Найдите площадь полной поверхности пирамиды» [42, С. 71].

Задача 19. «Основанием пирамиды является прямоугольник, диагональ которого равна 8см. Плоскости двух боковых граней перпендикулярны к плоскости основания, а две другие боковые грани образуют с основанием углы $30°$ и $45°$. Найдите площадь поверхности пирамиды» [35].

Задача 20. «В правильной четырехугольной пирамиде $SABC$ с вершиной S сторона основания равна 8. Точка L – середина ребра SC. Тангенс угла между прямыми BL и SA равен $2\sqrt{\frac{2}{5}}$. Найдите площадь поверхности пирамиды» [35].

Задача 21. «Высота правильной треугольной пирамиды равна h, а двугранный угол при стороне основания равен $45°$. Найдите площадь поверхности пирамиды» [7, С. 73].

Задача 22. «Два боковых ребра треугольной пирамиды равны 25 см и 30 см, а сторона основания, заключенная между ними, равна 25 см. Найдите другие стороны основания, если площадь боковой поверхности пирамиды равна 840 см ^{2} и высота проходит через центр вписанной в основание окружности» [42, С. 70].

Задача 23. « PH – перпендикуляр к плоскости треугольника ABH. Из точки H опущен перпендикуляр HM к прямой AB. $\angle HMP = \varphi$. Доказать: $S_{\Delta ABH} = S_{ABP}\cos\varphi$» [35].

В системе представлены следующие типы задач по теме «Площадь поверхности пирамиды», №15-22 – на вычисление, №23 – на доказательство. При решении задач №18-22 используется метод введения вспомогательного элемента, №17, 22 – прием «инвариантность».

Система задач на тему «Площадь поверхности цилиндра»

Задача 24. «Длина окружности основания цилиндра равна 3, высота равна 2. Найдите площадь боковой поверхности цилиндра» [35].

Задача 25. «Площадь осевого сечения цилиндра равна 10 $м^2$, а площадь основания равна 5 $м^2$. Найдите высоту цилиндра» [7, С. 133].

Задача 26. «Диаметр основания цилиндра равен 1 м, высота цилиндра равна длине окружности основания. Найдите площадь боковой поверхности цилиндра» [9, С. 134].

Задача 27. «Площадь полной поверхности цилиндра равна $288\pi\ см^2$. Найдите высоту и радиус основания цилиндра, если известно, что высота на 12 см больше радиуса» [42, С. 88].

Задача 28. «Из квадрата, диагональ которого равна a, свернута боковая поверхность цилиндра. Найдите площадь основания этого цилиндра» [7, С. 134].

Задача 29. «Один цилиндр получен вращением прямоугольника $ABCD$ вокруг прямой AB, а другой цилиндр – вращением этого же прямоугольника вокруг прямой BC. а) Докажите, что площади боковых поверхностей этих цилиндров равны. б) Найдите отношение площадей полных поверхностей этих цилиндров, если $AB = a, BC = b$» [7, С. 135].

Задача 30. «Докажите, что площадь полной поверхности цилиндра, полученного при вращении квадрата вокруг одной из его сторон, равна площади сферы, радиус которой равен стороне квадрата» [9, С. 152].

В системе представлены следующие типы задач по теме «Площадь поверхности цилиндра» №22-27– на вычисление, №29, 30 – на доказательство. При решении задачи №27 использовался метод введения вспомогательного элемента.

Система задач на тему «Площадь поверхности конуса»

Задача 31. «Длина окружности основания конуса равна 3, образующая равна 2. Найдите площадь боковой поверхности конуса» [35].

Задача 32. «Высота конуса равна 6, образующая равна 10. Найдите площадь его полной поверхности, деленную на π» [60].

Задача 33. «Во сколько раз увеличится площадь боковой поверхности конуса, если его образующая увеличится в 3 раза, а радиус основания останется прежним?» [60].

Задача 34. «Площадь осевого сечения конуса равна $0{,}6\,см^2$. Высота конуса равна 1,2 см. Вычислите площадь полной поверхности конуса» [7, С. 139].

Задача 35. «Прямоугольный треугольник с катетами 6 см и 8 см вращается вокруг меньшего катета. Вычислите площади боковой и полной поверхности образованного при этом вращении конуса» [7, С. 140].

Задача 36. «Площадь боковой поверхности конуса равна 80 $см^2$. Через середину высоты конуса проведена плоскость, перпендикулярная к высоте.

Найдите площадь боковой поверхности образовавшегося при этом усеченного конуса» [35].

Задача 37. «Цилиндр радиуса 20 см и конус 24 см имеют равновеликие боковые поверхности, равные высоты и расположены так, что высота цилиндра, проходящая по его оси, совпадает с высотой конуса. Найдите площадь боковой поверхности усеченного конуса, который отсекается от конуса плоскостью, проходящей через линию пересечения боковых поверхностей цилиндра и конуса» [35].

В системе представлены следующие типы задач по теме «Площадь поверхности конуса»; №31-37 – на вычисление. При решении задачи №37 используется прием «инвариантность» и метод введения вспомогательного элемента.

Система задач на тему «Площадь сферы»

Задача 38. «Найдите площадь сферы, радиус которой равен: а) 6 см; б) 2 дм; в) $\sqrt{2}$ м; г) $2\sqrt{3}$ см» [7, С. 152].

Задача 39. «Площадь сферы равна 324 $см^2$. Найдите радиус сферы» [60].

Задача 40. «Объем шара в 27 раз больше объема второго. Во сколько раз площадь поверхности первого шара больше площади поверхности второго?» [35].

Задача 41. «Докажите, что площади двух сфер пропорциональны квадратам их радиусов» [7, С. 152].

Задача 42. «Вычислите радиус круга, площадь которого равна площади сферы радиуса 5 м» [60].

Задача 43. «Вершины треугольника ABC лежат на сфере радиуса 13 см. Найдите расстояние от центра сферы до плоскости треугольника, если $AB = 6$см, $BC = 8$см, $AC = 10$см» [7, С. 151].

В системе представлены следующие типы задач по теме «Площадь трапеции», №38-40, 42-43 – на вычисление, №41 – на доказательство. При решении задач №40, 41– метод площадей (свойство отношения площадей); №42 - прием «инвариантность».

Система задач на тему «Площадь сечений геометрических тел»

Задача 44. «Через среднюю линию основания треугольной призмы проведена плоскость, параллельная боковому ребру. Площадь боковой поверхности отсеченной треугольной призмы равна 8. Найдите площадь боковой поверхности исходной призмы» [35].

Задача 45. «Найдите площадь осевого сечения конуса, радиус основания которого равен 3, а образующая равна 5» [60].

Задача 46. «В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ известны ребра $AB=5$, $AD=4$, $AA_1=9$. Точка O принадлежит ребру BB_1 и делит его в отношении 4:5, считая от вершины B. Найдите площадь сечения этого параллелепипеда плоскостью, проходящей через точки A, O, C_1 » [35].

Задача 47. «В правильной четырехугольной пирамиде $MABC$ с вершиной M стороны основания равны 15, а боковые ребра равны 16. Найдите площадь сечения пирамиды плоскостью, проходящей через точку B и середину ребра MD параллельно прямой AC» [35].

Задача 48. «Высота цилиндра равна 5, а радиус основания 10. Найдите площадь сечения цилиндра плоскостью, проходящей параллельно оси цилиндра на расстояние 6 от нее» [60].

Задача 49. «В треугольной пирамиде $MABC$основанием является правильный треугольник ABC, ребро MB перпендикулярно плоскости основания, стороны основания равны 3, а ребро $MA=6$. На ребре AC находится точка D, а на ребре AM – точка L. Известно, что $AD=AL=2$, и $BE=1$. Найдите площадь сечения пирамиды плоскостью, проходящей через точки E,D,L» [35].

В системе представлены следующие типы задач по теме «Площадь сечений геометрических тел» №44 - 49 – на вычисление, №44- на метод площадей (отношение площадей).

Система задач на тему «Площадь поверхности вписанных и описанных многогранников»

Задача 50. «Правильная четырехугольная призма описана около цилиндра, радиус основания которого равен 2. Площадь боковой поверхности призмы равна 48. Найдите высоту цилиндра» [35].

Задача 51. «Шар вписан в цилиндр. Площадь поверхности шара равна 111. Найдите площадь полной поверхности цилиндра» [35].

Задача 52. «Вершина A куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребром 1,6 является центром сферы, проходящей через точку A_1. Найдите площадь S части сферы, содержащейся внутри куба. В ответе запишите величину $\frac{S}{\pi}$» [35].

Задача 53. «В правильную шестиугольную пирамиду, боковое ребро которой равно 10, а высота равна 6, вписана сфера (Сфера касается всех граней пирамиды). Найдите площадь этой сферы» [60].

Задача 54. «В конус высотой 12 см вписана пирамиды, основанием которой является прямоугольник со сторонами 6 см и 8 см. Найдите отношение площадей полных поверхностей пирамиды и конуса» [7, С. 155].

Задача 55. «Сфера вписана в цилиндр (т.е. она качается оснований цилиндра и каждой его образующей). Найдите отношение площади сферы к площади полной поверхности цилиндра» [7, С. 156].

В системе представлены следующие типы задач по теме «Площадь сечений геометрических тел» №50 - 55 – на вычисление.

§7. Результаты педагогического эксперимента

Был проведен констатирующий эксперимент на базе МБУ «Школа №21» г.о. Тольятти, в период прохождения преддипломной практики (с 05.02 по 04.03.2018 г). В эксперименте участвовало 40 учеников 11-х классов. Ученик учатся по учебному пособию Л.С. Атанасяна.

Цель констатирующего эксперимента – это выявить у учащихся умение решать задачи по теме «Площади геометрических фигур».

Как известно, чтобы окончить школу, необходимо сдать ЕГЭ по математике, как обязательный предмет. Для того, чтобы учащиеся успешно сдали экзамен, им необходимо успешно освоить школьную программу. Нами были проанализированы программа учебника по геометрии Л.С. Атанасяна [49], а именно, что должны знать учащиеся после окончания 11 класса и задания, встречающиеся на ЕГЭ [35] по заданной теме, которые при верном решении обеспечат ученикам хороший балл за работу. Так же были учтены те приемы и методы по теме «Площади фигур», которые используются при решении задач, описанные в нашей статье [18].

В итоге была составлена контрольная работа №1 (Приложение 3), которая была предложена учащимся, где представлены выявленные *типы задач*:

– на измерение площадей (задача №1, в ЕГЭ такие задачи встречается в задании В3);

– на вычисление площади поверхности геометрических тел (задачи №2-3, в ЕГЭ задачи встречается в задании В8);

– на вычисление площади сечения (задача №4, в ЕГЭ задачи встречается в задании С2).

Ниже представлен вариант контрольной работы, где показано решение задач.

1 вариант

Задача 1. «На клетчатой бумаге с размером клетки 1 1 изображен треугольник (Рис. 14). Найдите его площадь» [35].

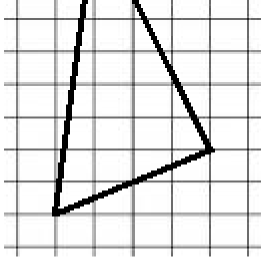


Рис. 14

Решение.

Данную задачу можно решить двумя способами.

I способ: Дан треугольник ABC, достроим эту фигуру до прямоугольника. Воспользуемся свойством аддитивности: площадь искомого треугольника будет равна разности площади достроенного прямоугольника и трех прямоугольных треугольником, гипотенузы которых являются сторонами исходного треугольника.

Получаем:

$$S = S_{\text{пр}} - S_{\Delta 1} - S_{\Delta 2} - S_{\Delta 3} = 9 \cdot 4 - \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 9 - \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 4 - \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 7 = 36 - 4{,}5 - 4 - 10{,}5 = 17 \text{ см}^2$$

II способ: Воспользуемся формулой Пика.

$S = \frac{Г}{2} + В - 1$, где $В -$ количество целочисленных точек внутри треугольника, $Г -$ количество целочисленных точек на границе треугольника.

$Г = 6$, $В = 15$, подставляем данные задачи в формулу и получаем: $S = \frac{6}{2} + 15 - 1 = 17 \text{ см}^2$.

Ответ: 17 см^2

Задача 2. «Найдите площадь поверхности прямой призмы, в основании которой лежит ромб с диагоналями, равными 6 и 8, и боковым ребром, равным 10» [60].

Решение.

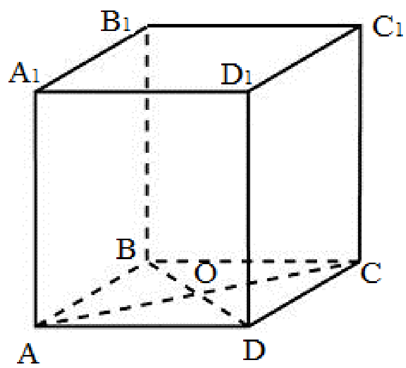


Рис. 15

Найдем сторону ромба, лежащего в основании призмы (Рис. 15). Т.к. диагонали точкой пересечения делятся пополам и пересекаются под прямым углом, найдем через треугольник ABO сторону AB. Треугольник ABO- прямоугольный, сторона $AO = \frac{1}{2} AC = 4$, $BO = \frac{1}{2} BD = 3$.

По теореме Пифагора найдем сторону ромба:

$$AB = \sqrt{AO^2 - BO^2} = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5.$$

Найдем площадь ромба: $S_p = \frac{1}{2} AC \cdot BD = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 6 = 24$.

$S_{\text{бок}} = 4 \cdot 5 \cdot 10 = 200$, тогда: $S = 2S_{\text{осн}} + S_{\text{бок}} = 2 \cdot 24 + 200 = 248$.

Ответ: 248

Задача 3. Высота цилиндра на 12 см больше его радиуса, а площадь полной поверхности равна 288π см^2. Найдите радиус основания и высоту цилиндра [7, С.134].

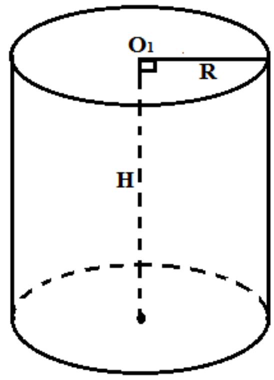


Рис. 16

Решение.

Пусть $R = x$ – см, тогда $H = x + 12$ см (Рис. 16). Площадь полной поверхности цилиндра по формуле равна: $S_{\text{полн}} = 2\pi R(R + H)$, причем, по условию $S_{\text{полн}} = 288\pi$ см^2. Тогда, подставляя в формулу известные данные, получаем: $2x \cdot \pi(x + x + 12) = 288\pi$. Поделим обе части получившегося уравнения на π, раскроем скобки, приведем подобные слагаемые и получим уравнение: $x^2 + 12x - 144 = 0$. Из данного уравнения с помощью дискриминанта найдем корни уравнения $x_1 = -12$ (не удовлетворяет условию $R > 0$), и $x_1 = 6$. Тогда, $R = 6$ см, а $H = 6 + 12 = 18$ см.

Ответ: 6 см, 18 см.

Задача 4 «В правильной четырёхугольной пирамиде $MABCD$ с вершиной M стороны основания равны 6, а боковые рёбра равны 12. Найдите площадь сечения пирамиды плоскостью, проходящей через точку C и середину ребра MA параллельно прямой BD» [35].

Решение.

Пусть точка E — середина ребра MA (Рис. 17). Отрезок CE пересекает плоскость MBD в точке P. В ке MAC точка P является точкой пересечения медиан, следовательно, $MP : PO = 2:1$ где O — центр основания пирамиды. Отрезок FG параллелен BD и проходит через точку P (точка F принадлежит ребру MB, G —ребру MD), откуда

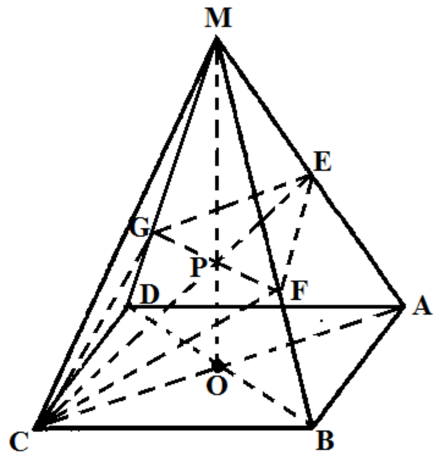


Рис. 17

$$MF:FB=MG:GD=MP:PO=2:1,\ FG=\frac{2}{3}BD=\frac{2\sqrt{2}\cdot AB}{3}=4\sqrt{2}.$$

Четырёхугольник $CFEG$ — искомое сечение. Отрезок CE — медиана треугольника MAC, значит,

$$CE=\frac{\sqrt{2AC^2+2MC^2-MA^2}}{2}=\frac{\sqrt{4AB^2+MC^2}}{2}=6\sqrt{2}.$$

Поскольку прямая AC перпендикулярна плоскости MBD, диагонали CE и FG четырехугольника $CFEG$, следовательно,

$$S_{CFEG}=\frac{CE\cdot FG}{2}=24.$$

Ответ: 24.

В таблице 5 приведены результаты контрольной работы.

Таблица 5

Номер задания	Выполнили верно	Выполнили неверно	Не приступили к заданию
1.	80% (32)	12,5% (5)	7,5% (3)
2.	60% (24)	25% (10)	15% (6)
3.	40% (16)	42,5 (17)	17,5% (7)
4.	7,5% (3)	30% (12)	62,5% (25)

По таблице видно, что затруднения у учащихся связаны с задачами на применение приемов и методов решения задач и на нахождение площади сечения фигур. Так же следует отметить, что *задачи на измерение площадей* имеют решать достаточно высокий процент, по сравнению экспериментом, проводимый в бакалаврской работе [17]; *задачи, на вычисление площади поверхности тел*, где нужно знать формулу и уметь ей воспользоваться умеют решать только - 60%; *задачи на применение приемов и методов* решают 40% учащихся; большие затруднения испытывают учащиеся при решении *задач на нахождение площади сечения*, решили задачу 7,5% учащихся, а больше половины даже не приступили к ее решению.

В результате были выявлены следующие виды ошибок у учащихся.

Задание 1		
Виды ошибок		
Нет подробного объяснения	Вычислительная ошибка	Не правильно записана формула площади
7	3	3
Задание 2		
Виды ошибок		
Нет подробного объяснения	Вычислительная ошибка	Не правильно записана формула площади
2	8	5
Задание 3		
Виды ошибок		
Нет подробного объяснения	Вычислительная ошибка	Не записана формула
2	7	15
Задание 4		
Виды ошибок		
Нет подробного объяснения	Вычислительная ошибка	Неправильно построено сечение
1	1	10

В.А. Гусев предлагает принять расчет коэффициента усвоения учебного материала, для того, чтобы глубже оценить знания и умения учащихся.

Если правильный ответ на вопрос оценить в 1 балл, а неправильный – 0, то коэффициент усвоения учебного материала (К) считается по формуле:

$$К = \frac{Сумма \quad верных \quad ответов}{4 \ (общее \quad число \quad вопросов)}.$$

«При K, равном от 1,00 до 0,90 (или от 100% до 90% правильных ответов), оценка – «5»; при K от 0,80 до 0,70 (или от 80% до 70%), оценка – «4»; при K от 0,60 до 0,50 (от 60% до 50%), оценка – «3»; наконец, при K ниже 0,50 (50%) – оценка «2»» [12, С. 30].

В таблице 6 представлены полученные результаты:

Таблица 6

Оценка	Количество учеников, получивших данную оценку
«5»	7,5% (3)
«4»	20% (8)
«3»	32,5% (13)
«2»	40% (16)

Таким образом, можно сделать вывод о том, что большинство учащихся не умеют решать задач по теме «Площади фигур». Большие проблемы у учащихся с задачами на нахождения площади сечения, так как учащиеся не умеют строить сечения фигур, плохо знают формулы.

ВЫВОДЫ ПО ВТОРОЙ ГЛАВЕ

Сформулируем основные выводы и полученные результаты по второй главе:

1. Выявлено, что при обучении учащихся теме «Площади геометрических фигур» следует:

- уделять больше времени формированию практических навыков вычисления площадей;

- формулу для вычисления *площади боковой поверхности пирамиды и призмы* учащимся желательно вывести самостоятельно;

- формулы для вычисления *площади боковой поверхности цилиндра и конуса* следует вводить на интуитивно-наглядном уровне;

- формулу *площади сферы* следует доказывать по учебнику;

- не стоит требовать от учащихся знания *формул полной поверхности призмы, пирамиды, цилиндра и конуса*, так как они должны самостоятельно уметь ее выводить;

- при повторении вопросов теории необходимо производить фронтальные беседы и опрос учащихся;

- проводить больше уроков, где учащиеся самостоятельно будут решать задачи, при этом необходимо обращать внимание учащихся на качество выполнения рисунков к задачам;

- требовать от учащихся устного рассказа о ходе построения с соответствующими обоснованиями, с целью развития устной речи учащихся.

2. Разработан методический проект по теме «Площади геометрических фигур» в рамках технологии творческих мастерских.

3. Разработаны системы задач по теме «Площади геометрических фигур» в курсе геометрии общеобразовательной школы, которые подобраны с учетом основных знаний и требований, которые предъявляются учащимся после окончания изучения темы и с учетом тех приемов и методов, которые были выделены нами в статье [19].

4. Проведен педагогический эксперимент.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Сформулируем основные выводы и полученные результаты проведенного исследования.

1. Установлено, что «в методической литературе понятие *площади* определяют как *величину* части плоскости, заключенной внутри плоской замкнутой фигуры; через площадь фигуры - как *часть плоскости*, занимаемой этой фигурой; через площадь простого многоугольника - как *число*, определяющее размер части плоскости, ограниченной этим многоугольником» [16].

2. Выделены особенности обучения учащихся решению геометрических задач по теме «Площадь фигур». Определено, что при обучении учащихся решению геометрических задач по теме «Площади фигур» необходимо: обучать учащихся решению задач постепенно, в течение длительного периода времени, на основе системно - деятельностного подхода (в качестве основного средства использовать учебные задания, составленные в соответствии с основными этапами учебной деятельности по решению задач и выделенными действиями по решению задач); использовать на уроках геометрии задачи-клоны, задачи-аналоги, но не в большом количестве, а также самих детей учить составлять такого рода задачи; на уроках делать акцент на чертежах, т.е. учить учащихся изображать наглядные и хорошо выполненные рисунки к задачам; для усиления развивающего эффекта следует в процессе решения задачи задавать учащимся дополнительные вопросы.

3. Рассмотрена методика обучения учащихся теме «Площади фигур», которая показала, что формула для вычисления *площади поверхности призмы, пирамиды, конуса* дается с помощью развертки. При введении формулы для нахождения *площади боковой поверхности цилиндра* можно так же воспользоваться разверткой, либо через понятие предельного перехода. При введении формулы для нахождения *площади сферы* используется понятие предельного перехода.

4. Разработаны методические рекомендации по обучению теме «Площади фигур». Определено, что при обучении учащихся теме «Площади фи-

гур» следует уделять больше времени формированию практических навыков вычисления площадей. Формулу для вычисления *площади боковой поверхности пирамиды и призмы* учащимся желательно вывести самостоятельно; формулы для вычисления *площади боковой поверхности цилиндра и конуса* следует вводить на интуитивно-наглядном уровне; формулу *площади сферы* следует доказывать по учебнику. Не стоит требовать от учащихся знания *формул полной поверхности призмы, пирамиды, цилиндра и конуса*, так как они должны самостоятельно уметь ее выводить. При повторении вопросов теории необходимо производить фронтальные беседы и опрос учащихся; проводить больше уроков, где учащиеся самостоятельно будут решать задачи, при этом необходимо обращать внимание учащихся на качество выполнения рисунков к задачам. Следует требовать от учащихся устного рассказа о ходе построения с соответствующими обоснованиями, с целью развития устной речи учащихся.

5 . Разработан методический проект по теме «Площади фигур» в рамках технологии творческих мастерских.

6 . Разработаны системы задач по теме исследования для учащихся 10-11-х классов, которые включают в себя задачи на вычисления, на доказательства и задачи, связанные с различными приемами и методами, рассмотренные в нашей статье [18].

7. Проведен констатирующий эксперимент, который выявил недостаточный уровень умения решать задачи по теме «Площади фигур».

8. Апробированы некоторые приведенные системы задач в процессе поискового этапа педагогического эксперимента.

Все это дает основание считать, что задачи, поставленные в исследовании, полностью решены.

СПИСОК ИСПОЛЬЗУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Александров А. Д. Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия. Геометрия. 10-11 классы: учеб. для общеобразоват. организаций: базовый и углубл.уровни / А. Д. Александров, А. Л. Вернер, В. И. Рыжик. – М.: Просвещение, 2014. – 255 с.

2. Алексеева Е.Е. Планирование учителем формирования универсальных учебных действий при обучении составлению и решению задач в курсе геометрии [Электронный ресурс]/ Е.Е. Алексеева// Современные проблемы науки и образования. – 2017. – № 6. – С. 16-20. - Режим доступа: https://science-education.ru/ru/article/view?id=27234. – Последнее обновление 14.05.2018.

3. Белогурова Н.С. Урок по теме «Развертка пирамиды. Площадь поверхности пирамида и усеченной пирамиды» 10-й класс [Электронный ресурс]// Ведущий образовательный портал России «Инфоурок». – Режим доступа: https://infourok.ru/. – Последнее обновление 14.04.18.

4. Бескин Н.М. Методика геометрии: учебник для педагогических институтов/ Н.М. Бескин. – М.: Государственное учебно-педагогическое издательство Министерства Просвещения РСФСР, 1947. – 278 с.

5. Бурмистрова Т.А. Геометрия. Сборник рабочих программ. 7-9 классы. — М.: 2011. – 95 с.

6. Бывшева Т.М. К вопросу о методике введения понятия «Площадь» в курс геометрии основной школы/ И.В. Антонова, Т.М. Бывшева// Научное отражение. - 2017. - № 5-6 (9-10). – С. 14-16.

7. Геометрия. 10-11 классы: учеб. для общеобразоват. учреждений : базовый и профил. уровни / [Л.С. Атанасян, В.Ф. Бутузов, С.Б. Кадомцев и др.]. – 22-е изд. – М. : Просвещение, 2013. – 255 с.

8. Геометрия. 7-9 классы: учеб. для общеобразовательных учреждений / [Л.С. Атанасян, В.Ф. Бутузов, С.Б. Кадомцев и др.] – 20-е изд. – М. : Просвещение, 2010. – 384 с.

9. Геометрия. Методические рекомендации. 10-11 классы : Пособие для учителей общеобразоват. организаций / [А. Д. Александров, А.Л. Вернер, В.И. Рыжик, Л.П. Евстафьева]. – М. : Просвещение, 2013. – 144 с.

10. Геометрия: Методическое пособие для высших педагогических учебных заведений и преподавателей средней школы. Часть 2. Стереометрия/ Р.В. Гангнус, Ю.О. Гурвиц (под ред. Проф. Андронова И.К.). – М.: Государственное учено-педагогическое издание, 1935. – 328 с.

11. Глейзер Г.И. История математики в школе 7-8 кл. Пособие для учителей. – М.: Просвещение, 1982. – 240 с.

12. Гусев В.А., Смирнова И.М. Магистерская диссертация по методике преподавания математики: Методические рекомендации. – М.: Прометей, 1996. – 107 с.

13. Далингер В.А. Методика обучения учащихся построению пространственных тел и их сечений на плоскостном чертеже [Электронный ресурс] // Международный журнал экспериментального образования. – 2016. - №12-1. – С. 26-27. Режим доступа: https://elibrary.ru/item.asp?id=27224337 . – Последнее обновление 15.05.18.

14. Далингер В.А. Методические особенности обучения учащихся планиметрии в стереометрической среде [Электронный ресурс]// Современные наукоемкие технологии. – 2012. - №7. – С. 59-61. Режим доступа: https://elibrary.ru/item.asp?id=17914188. – Последнее обновление 15.04.18.

15. Далингер В.А. Об одном способе доказательства // Математика в школе. – 1993. – № 5. – С. 13-14.

16. Далингер В.А., Кузьмин С.Г. Результаты причин ошибок в решении геометрических задач единого государственного экзамена по математике [Электронный ресурс] // Международный журнал экспериментального образования. – 2015. - №3-3. – С. 401-403. Режим доступа: https://elibrary.ru/item.asp?id=23172036

17. Жилкина Т.М. Методика обучения учащихся теме «Площади фигур» в курсе геометрии основной школы/ Т.М. Жилкина: бакалаврская работа по направлению подготовки «Педагогическое образование», направленность (профиль) «Математика и информатика. – Тольятти, ТГУ. – 2016. – 100 с.

18. Жилкина Т.М. Приемы и методы решения задач по теме "Площади фигур" в курсе геометрии основной школы/ И.В. Антонова, Т.М. Жилкина// Математика и математическое образование: сборник трудов по материалам VIII международной научной конференции "Математика. Образование. Культура" (к 240-летию Карла Фридриха Гаусса). - Тольятти: ТГУ, 2017. – С. 215-219.

19. Инфоурок. Ведущий образовательный портал России. Режим доступа: https://infourok.ru/. – Последнее обновление 15.05.18.

20. Карасев П.А. Элементы наглядной геометрии в школе: пособие для учителей / П.А. Карасев. – М.: Государственное учебно-педагогическое издательство Министерства Просвещения РСФСР, 1955. – 212 с.

21. Карпун Т.И. Программа элективного курса «Практикум по решению стереометрических задач» [Электронный ресурс]// Ведущий образовательный портал России «Инфоурок». Режим доступа: https://infourok.ru/. – Последнее обновление 15.05.18.

22. Костюченко Р.Ю., Юдина Н.А. Обучение учащихся аналогии в процессе решения геометрических задач [Электронный ресурс]// Современный проблемы науки и образования. – 2011. - №6. Режим доступа: https://www.science-education.ru/ru/article/view?id=5232. – Последнее обновление: 17.05.18

23. Майкова Н.С. Методика изучения темы «Площади многоугольных фигур» с использованием межпредметных связей при обучении геометрии [Электронный ресурс] // Успехи современной науки и образования. – 2016. - №5. – С.63-64. Режим доступа: https://elibrary.ru/item.asp?id=26098482. – Последнее обновление 15.05.18.

24. Малых А.Е. Площади геометрических фигур: учеб. пособие / А.Е. Малых, М.И. Глухова: Перм. гос. пед. ун-т. – Пермь, 2011. – 108 с.

25. Малых А.Е., Глухова М.И. Изучение площадей многоугольников в средней школе// Математический вестник педвузов и университетов Волго-Вятского региона. – 2012. – № 14. – С.403-408.

26. Малых А.Е., Данилова В.И. Влияние геометрической алгебры Древней Греции на развитие математики [Электронный ресурс] // Вестник Пермского Университета. Серия: Математика. Механика. Информатика. – 2012. - №2. – С. 76-85. Режим доступа: http://elibrary.ru/download/51343972.pdf . - Последнее обновление 16.05.18.

27. Менькова С.В. Математические «задачи-клоны»: сущность, дидактические функции, приемы составления [Электронный ресурс] // Современные проблемы науки и образования. – 2014. - № 4. Режим доступа: https://science-education.ru/ru/article/view?id=13861.- Последнее обновление 17.05.18.

28. Методика и технология обучения математике. Лабораторный практикум: учеб. пособие для студентов математ. факультетов пед. университетов / под науч. ред. В.В.Орлова.. – М.: Дрофа, 2007. - 320 с.

29. Методика преподавания математики в восьмилетней школе: Методическое пособие для высших педагогических учебных заведений и преподавателей средней школы / С.А. Гастева, Б.И. Крельштейн, С.Е. Ляпин, М.М. Шидловская. – М.: Просвещение, 1965. – 745 с.

30. Методика преподавания математики в средней школе. Частная методика: Учеб. пособие для студентов пед. ин-тов по физ.-мат. спец. / А.Я. Блох, В. А. Гусев, Г. В. Дорофеев и др.; Сост. В. И. Мишин. - М.: Просвещение, 1987. – 416 с.

31. Михайлова Н.Г., Торопцева Л.В. Педагогическая технология мастерских, как средство развития творческих способностей обучающихся // Вестник научных конференций. -2016. - №12-4. – С. 118-119.

32. Мищенко Т.М. Дидактические материалы и методические рекомендации для учителя по геометрии: 8 класс: к учебнику Л.С. Атанасяна и др. «Геометрия. 7-9 классы». ФГОС (к новому учебнику) / Т.М. Мищенко. – М.: Издательство «Экзамен», 2016. – 174 с.

33. Мищенко Т.М. Дидактические материалы и методические рекомендации для учителя по геометрии: 9 класс: к учебнику Ф.В. Погорелова «Геометрия. 7-9 классы». ФГОС (к новому учебнику) / Т.М. Мищенко. – М.: Издательство «Экзамен», 2015. – 157 с.

34. Мищенко Т.М. Методическое пособие к учебнику И.Ф. Шарыгина «Геометрия. 7-9 классы». ФГОС (к новому учебнику) / Т.М. Мищенко. – М.: Дрофа, 2013. – 368 с.

35. Образовательный портал для подготовки к экзаменам. – Режим доступа: https://sdamgia.ru/. – Последнее обновление 19.05.18.

36. Погорелов А.В. Геометрия. 10-11 классы : учеб. для общеобразоват. организаций : базовый и проф. уровни / А.В. Погорелов. – 13-е изд. – М. : Просвещение, 2014. – 175 с.

37. Погорелов А.В. Геометрия. 7–9 классы : учеб. для общеобразоват. организаций / А. В. Погорелов – 2-е изд. – М. : Просвещение, 2014. – 240 с.

38. Потоскуев Е. В. Геометрия. 11 кл. : учеб. для общеобразоват. учреждений с углубл. и профильным изучением математики / Е.В. Потоскуев, Л. И. Звавич. – 2-е изд., испр. – М.: Дрофа, 2004. – 368 с.

39. Потоскуев Е.В. В единстве логической и графической культуры залог решения геометрических задач // Математическое образование. – 2012. - №1(61). – С.30-40. URL: https://elibrary.ru/item.asp?id=22543122 (дата обращения 23.03.17)

40. Потоскуев Е.В. Геометрия. 10 кл. : учеб. для общеобразоват. учреждений с углубл. И профильным изучением математики / Е.В. Потоскуев, Л.И. Звавич. – 6-е изд., стереотип. – М. : Дрофа, 2008. – 223.

41. Потоскуев Е.В. Геометрия. 11 кл. : методическое пособие к учебнику Е.В. Потоскуева, Л.И. Звавича «Геометрия. 11 класс» / Е.В. Потоскуев, Л.И. Звавич. – М. :. Дрофа, 2005. – 220 с.

42. Потоскуев Е.В. Геометрия. 11 кл.: Задачник для общеобразовательных учреждений с углубл. и профильным изучением математики / Е. В. Потоскуев, Л. И. Звавич. – 2-е изд., стереотип. – М.: Дрофа, 2004. – 240 с.

43. Потоскуев Е.В. Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия. Геометрия. Углубленный уровень. 10-11 классы. Рабочая программа к линии УМК Е.В. Потоскуева, Л.И. Звавича : учебно-методическое пособие / Е.В. Потоскуева, Л.И. Звавича. – М. : Дрофа, 2017. – 65, [2] с.

44. Потоскуев Е.В. О необходимости аргументации при решении стереометрических задач [Электронный ресурс] // Математическое образование. – 2009. - №4(52). – С. 11-18. Режим доступа: https://elibrary.ru/item.asp?id=28394477. – Последнее обновление 17.05.18.

45. Потоскуев Е.В. О роли геометрии и проблемах при ее изучении в средней и высшей школе // Математика. – 2010. – № 21. – С. 3–7.

46. Поурочные разработки по геометрии: 10 класс / Сост. В.А. Яровенко. – М.: ВАКО, 2010. – 304 с.

47. Примерная основная образовательная программа среднего общего образования. Одобрена решением федерального учебно-методического объединения по общему образованию [Электронный ресурс] / М-во образования и науки РФ. – М.: Просвещение, 2016. – 569 с. Режим доступа: http://fgosreestr.ru/.pdf. – Последнее обновление 16.05.18.

48. Прицкер Б.С. Площадь четырехугольника // Математика в школе. – 1990. – №4. – С. 66-67.

49. Саакян С.М. Геометрия. Поурочные разработки. 10-11 классы: учеб. пособие для общеобразоват. организаций/ С. М. Саакян, В.Ф. Бутузов. – М.: Просвещение, 2017. – 2-е изд., перераб. – 232 с.

50. Саакян С.М., В.Ф. Бутузов. Изучение темы «Многогранники» в курсе X класса// Математика в школе. - 2000. - №2. – С. 19-28.

51. Селевко, Г.К. Современные образовательные технологии: Учебное пособие. – М.: Народное образование, 1998. - С. 173

52. Смирнова И.М. Геометрия. 10-11 класс: учеб. для учащихся общеобразоват. учреждений (базовый и профильный уровни)/ И.М. Смирнова, В.А. Смирнов. – 5-е изд., испр. и доп. – М. : Мнемозина, 2008. – 288 с.

53. Смирнова И.М. Геометрия. 7-9 классы. Программа и тематическое планирование/ И.М. Смирнова, В.А. Смирнов – Москва, 2012. – 44 с.

54. Смирнова И.М. Геометрия. 7-9 классы: учеб. для образоват. учреждений / И. М. Смирнова, В. А. Смирнов. – 3-е изд., стер. – М.: Мнемозина, 2008. – 376 с.

55. Сыяпова Л.К. Площадь трапеции – формулой Пика // Информация и образование: Границы коммуникаций. – 2015. - №7. – С. 223-224. URL: http://elibrary.ru/download/15172860.pdf (дата обращения 8.02.2016).

56. Тараненко В.И. В помощь составителям задач по теме «Площадь треугольника»// Математика в школе . – 1993. – № 3 . – С. 20-22.

57. Тараник В. И. Актуализация развивающей функции задач по стереометрии [Электронный ресурс] // Альманах современной науки и образования. – 2008. - № 1 (8). - 198-200 с. Режим доступа: https://elibrary.ru/item.asp?id=18113087. - Последнее обновление 16.05.18.

58. Темербекова А.А. Математическая подготовка школьников к ЕГЭ: методика определения площади плоской фигуры [Электронный ресурс] // Информация и образование: границы коммуникаций. – 2013. - №5(13). – С. 352-355. Режим доступа: https://elibrary.ru/item.asp?id=21958117. – Последнее обновление 17.05.18.

59. Федеральный государственный образовательный стандарт среднего (полного) общего образования [Электронный ресурс] / М-во

образования и науки РФ. – М.: Просвещение,2012. – 52 с. Режим доступа: https://минобрнауки.рф/documents/2365. - Последнее обновление 17.05.18.

60. Федеральный институт педагогических измерений. – Режим доступа: http://fipi.ru/ .- Последнее обновление 16.05.18.

61. Федеральный перечень учебников, рекомендованных к использованию при реализации имеющих государственную аккредитацию образовательных программ начального общего, основного общего, среднего общего образования» [Электронный ресурс] / Приказ Министерства образования и науки РФ. – М.: Просвещение, 2014. - 164 с. Режим доступа: http://god2015.com/files/Prikaz_253.pdf. - Последнее обновление 15.05.18.

62. Фестиваль педагогических идей «Открытый урок». – Режим доступа: http://festival.1september.ru/. – Последнее обновление 14.05.18.

63. Харитонов Б.Ф. Методика повторения приёмов и методов решения геометрических задач // Математика в школе. – 1990. – № 4. – С. 36-38.

64. Ходот Т. Задачи по геометрии. 7-11 классы// Математика в школе. – 1999 . – № 4 . – С. 7.

65. Чавчанидзе А.Ш. Еще один вариант формулы Герона// Математика в школе. – 2000. – №10. – С. 20-21.

66. Шарыгин И.Ф. Геометрия. 10-11 кл.: учеб. для общеобразоват. учеб.заведений. – М.: Дрофа, 1999. – 208 с.

67. Шарыгин И.Ф. Геометрия. 7-9 кл.: учеб. для общеобразоват. учеб. завед./ И.Ф. Шарыгин. – М.: Дрофа, 2012. – 462 с.

68. Шебанова Л.П. Формирование у учащихся основной школы умения решать геометрические задачи [Электронный ресурс] // Современные проблемы науки и образования. – 2015. - № 4. - Режим доступа: https://www.science-education.ru/ru/article/view?id=21121. – Последнее обновление 14.05.18.

69. Яхьяевой Н.И. Урок математики по теме «Пирамида» 10-й класс [Электронный ресурс]// Фестиваль педагогических идей «открытый урок

2003-2018. – Режим доступа: http://festival.1september.ru/. – Последнее обновление 16.05.18.

70. Learninq To Be. Ed. By Edqar. Paris, 1972, c.7.

71. M. Alessandra Mariotti: Justifying and proving: figural and conceptual aspects// ERCME 97, European Research Conference on Mathematical Education, Proceedings, Podebrady, The Czech Republic. Charles University, Faculty of Education, p.23

72. Frantisek Karina. Geometry in early childhood education in Czechoslovakia. Pythagogas, 33, April 1994, P. 24-32

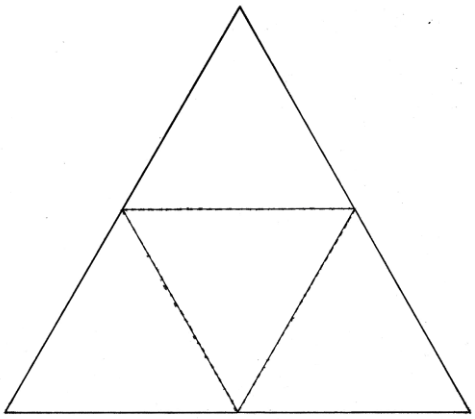
73. Geometry: Learning by Doing Hartwig Meissner SEMT 95 International Symposium Elementary Math Teaching Prague, The Czech Republic Charles University, Faculty of Education, 1995. - 26 p.

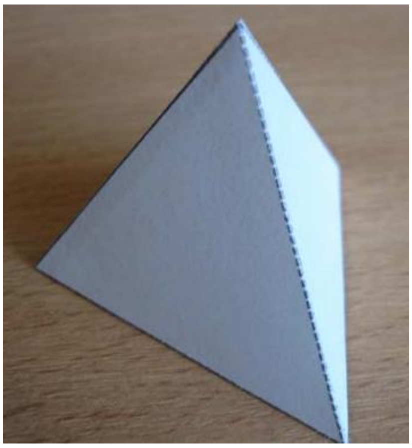
74. Sawyer W. W. mathematicians Delight, Toronto, 1943, c 3.155

Приложение 1

В результате выполнения домашней работы предполагаются получить следующие развертки пирамиды:

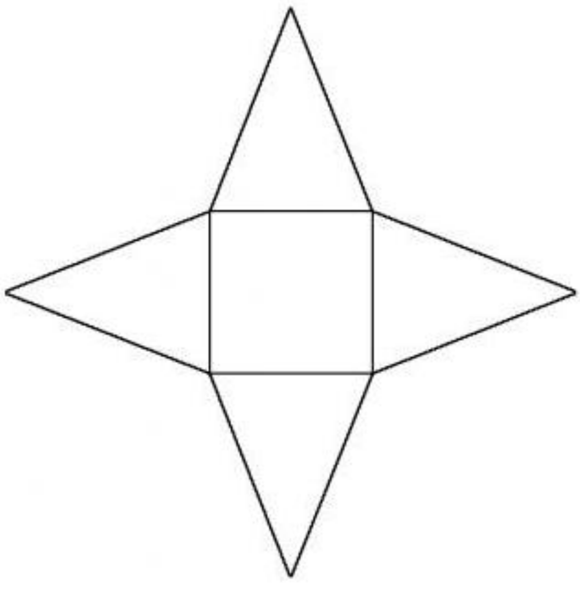
1 вариант:

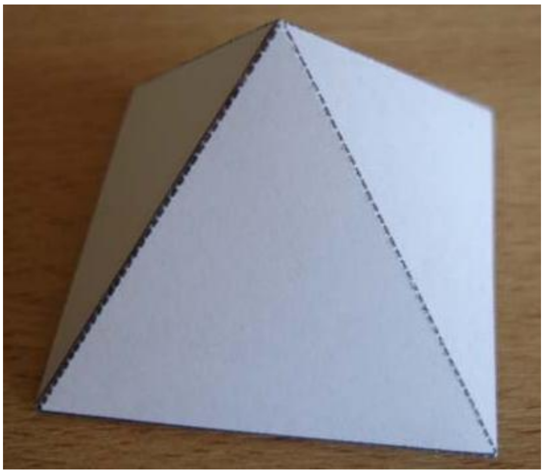




Развертка правильной треугольной пирамиды   Модель пирамиды

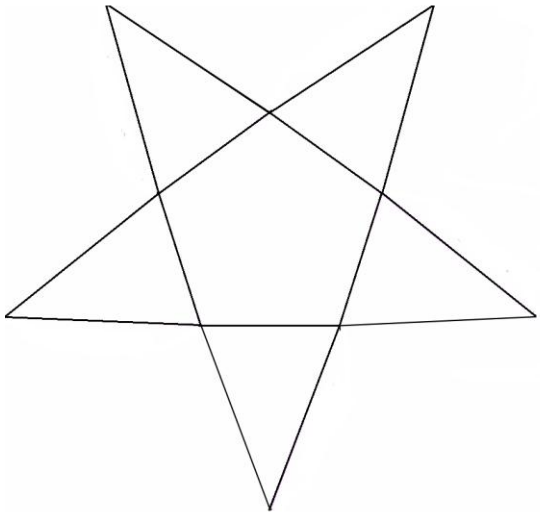
2 вариант:

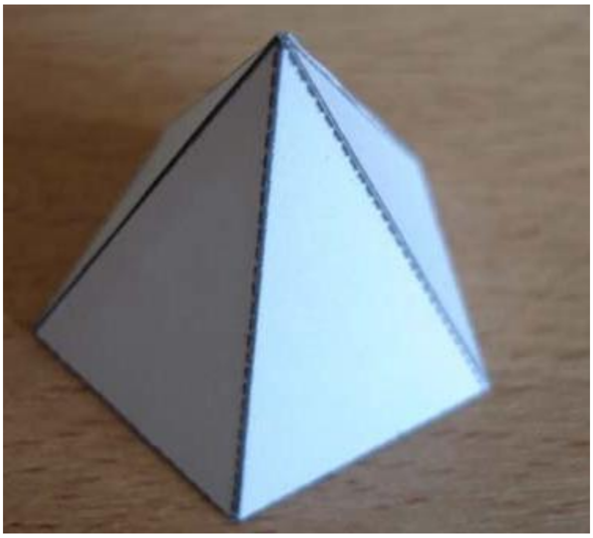




Развертка правильной четырехугольной пирамиды   Модель пирамиды

3 вариант:





Развертка правильной пятиугольной пирамиды

Модель пирамиды

Приложение 2

Ответы и указания решения к системам задач по теме «Площади фигур» в курсе геометрии общеобразовательной школы

Площадь поверхности призмы

1. Ответ: а) $S_{бок} = 450\,см^2$, $S_{полн.пов.} = 536{,}6\,см^2$

б) $S_{бок} = 384\,дм^2$, $S_{полн.пов.} = 672\,дм^2$

в) $S_{бок} = 69\,дм^2$, $S_{полн.пов.} = 96{,}45\,дм^2$

г) $S_{бок} = 0{,}2\,м^2$, $S_{полн.пов.} = 0{,}75\,м^2$

2. Ответ: 288

3. $S_{бок} = l \cdot P$, где l – длина бокового ребра, P – периметр перпендикулярного сечения призмы. Так как $P = 21 + 17 + 10 = 48$, а $l = 18$, то

$$S_{бок} = 18 \cdot 48 = 864 \ (\text{см}^2).$$

Ответ: 864 см ^{2}.

4. *Указание:* Задача сводится к нахождению площади боковой поверхности через формулу $S_{бок} = l \cdot P$, где l – длина бокового ребра, P – периметр перпендикулярного сечения призмы.

Ответ: 576.

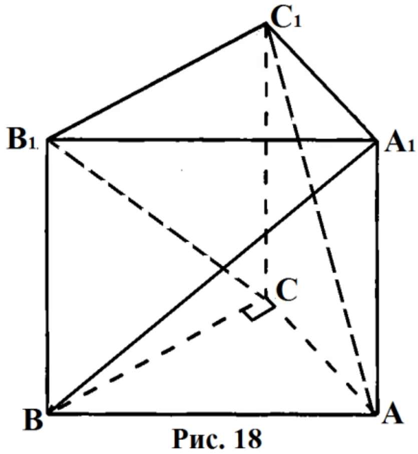


Рис. 18

5. Пусть $A_1B = 15$ см, $A_1C = 10\sqrt{2}$ см, $B_1C = 9$ см, введем вспомогательный элемент $A_1A = B_1D = C_1C = h$ (Рис. 18).

В прямоугольных треугольниках A_1AB, A_1AC, B_1BC имеем: $AB^2 = A_1B^2 - AA^2 = 225 - h^2$; $AC^2 = A_1C^2 - A_1A^2 = 200 - h^2$; $BC^2 = B_1C^2 - B_1B^2 = 81 - h^2$.

Так как ΔAAB – прямоугольный с катетами AC и BC, то $AB^2 = AC^2 + BC^2$. Значит, $225 - h^2 = 281 - 2h^2$, откуда $h^2 = 56$ и $h = 2\sqrt{14}$. Тогда $AB = 13$ см, $AC = 12$ см, $BC = 5$ см и $S_{бок} = (13 + 12 + 5) \cdot 2\sqrt{14} = 60\sqrt{14}$ ($см^2$).

Ответ: 13 см, 12 см, 5 см, $60\sqrt{14}$ $см^2$.

6. Ответ: 75 $см^2$

7. Пусть $BD_1 = a$ - диагональ призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$, тогда $\angle DBD_1 = 60°$ (Рис. 19). В прямоугольном треугольнике BDD_1:

$$\sin\angle DBD_1 = \frac{DD_1}{BD_1} \Rightarrow DD_1 = BD_1 \cdot \sin\angle DBD_1$$, получаем $DD_1 = a \cdot \sin\angle 60 = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

$BD = \frac{1}{2}BD_1 = \frac{a}{2}$ (как катет, лежащий против угла в $30°$). Пусть $AB = AD = x$, тогда по теореме Пифагора получаем: $AB^2 + AD^2 = BD^2$, $x^2 + x^2 = (\frac{a}{2})^2$, отсюда $x = \frac{a\sqrt{2}}{4}$, получаем $AD = \frac{a\sqrt{2}}{4}$.

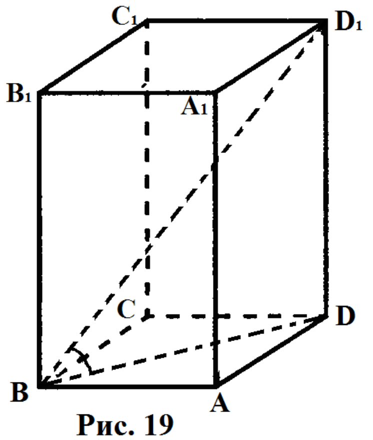


Рис. 19

$$S_{бок} = 4 \cdot AD \cdot DD_1 = 4 \cdot \frac{a\sqrt{2}}{4} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a^2\sqrt{6}}{2}.$$

Ответ: $\frac{a^2\sqrt{6}}{2}$.

8. Рассмотрим плоскость BB_1M_1M (Рис. 20). Отрезок ВК лежит в ней и в плоскости BTC_1, поэтому надо узнать, как отрезок ВК делит отрезок B_1M – диагональ прямоугольника BB_1M_1M со сторонами $BB_1 = 9$, $BM = \frac{4\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}$. При этом $M_1K = \frac{A_1T}{2} = 2$. Пусть O точка пересечения BK и B_1M. Тогда

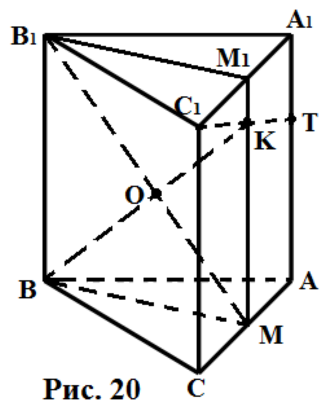


Рис. 20

$$\frac{B_1O}{OM} = \frac{S_{B_1BO}}{S_{BOM}} = \frac{B_1B \cdot BO \cdot \sin\angle B_1BO}{MB \cdot BO \cdot \sin\angle MBO} = \frac{9 \cdot \cos\angle MBO}{2\sqrt{3} \cdot \sin\angle MBO} = \frac{3\sqrt{3}}{2} ctg\angle MBO = \frac{3\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{MB}{MK} = \frac{9}{7}.$$

Поэтому $OM = \frac{7}{16}B_1M = \frac{7}{16}\sqrt{93}$.

Ответ: $\frac{7}{16}\sqrt{93}$.

Площадь поверхности параллелепипеда

9. Ответ: 9

10. Ответ: 2.

11. Ответ: 64.

12. Площадь поверхности параллелепипеда с ребрами a_1, a_2, a_3 вычисляется по формуле $S = 2(a_1a_2 + a_1a_3 + a_2a_3)$. Пусть неизвестное ребро равно x. Подставляя известные величины из условия, получаем: $2(3 \cdot 4 + 3x + 4x) = 94$, отсюда находим $x = 5$.

Ответ: 5.

13. Ответ: $(a+b)\sqrt{3}c$

14. а) Пусть прямые AP и BB_1 пересекаются в точке X (Рис. 21). Тогда точка U - точка пересечения прямых XQ и B_1C_1. Треугольники AXB и PXB_1 подобны, откуда $\frac{XB_1}{XB} = \frac{PB_1}{AB} = \frac{1}{2}$; $B_1X = BB_1 = 2$. Треугольники B_1XU и C_1QU подобны, откуда $\frac{B_1U}{C_1U} = \frac{B_1X}{C_1Q} = 2$; $B_1U = 2C_1U$.

Значит, $B_1U : UC_1 = 2:1$.

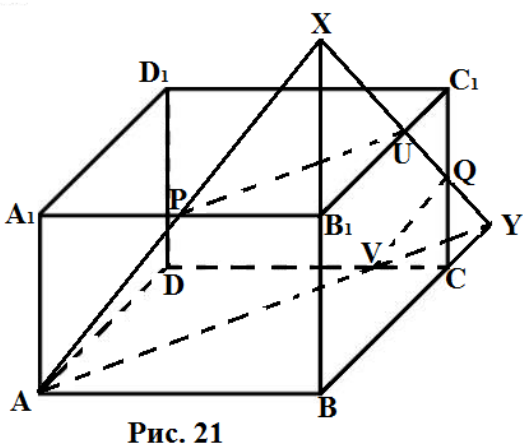


Рис. 21

б) Пусть Y – точка пересечения прямых QX и BC, а V – точка пересечения прямых CD и AY. Тогда пятиугольник $APUQV$ – сечение, площадь которого надо найти.

Треугольники C_1UQ и CYQ равны, откуда $CY = C_1U = 1$.

Треугольники AYB и VYC подобны, откуда $\frac{VC}{AB} = \frac{CY}{BY} = \frac{1}{4}$, $VC = \frac{AB}{4} = 1$.

Четырехугольник $APUY$ – равнобедренная трапеция, в которой $AP = PU = UY = 2\sqrt{2}$, $AY = 4\sqrt{2}$.

Треугольник QYV – равносторонний со стороной $\sqrt{2}$, нетрудно вычислить, что его площадь $S_{QYV} = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Вычислим высоту трапеции $APUY$, $h = \sqrt{AP^2 - (\frac{AY - PU}{2})^2} = \sqrt{6}$. Таким образом, её площадь $S_{APUY} = \frac{2\sqrt{2} + 4\sqrt{2}}{2} \cdot \sqrt{6} = 6\sqrt{3}$. Значит, искомая площадь равна $S_{APUY} - S_{QYV} = 6\sqrt{3} - \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{11\sqrt{3}}{2}$.

Ответ: $\frac{11\sqrt{3}}{2}$

Площадь поверхности пирамиды

15. Ответ: 96

16. Ответ: 4.

17. Пусть $AB = a$, тогда (по свойству диагоналей правильного шестиугольника) $AD = 2a$.

$S_{грани} = \frac{1}{2} AB \cdot MK$; $S_{MAD} = \frac{1}{2} AD \cdot MO$ (Рис. 22).

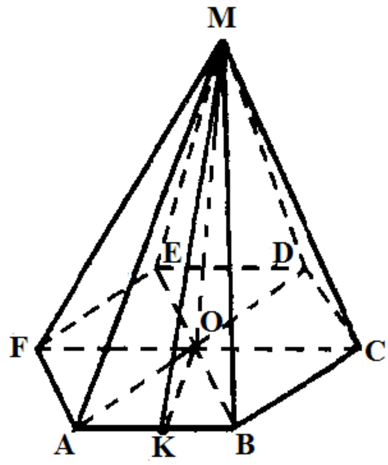


Рис. 22

По условию задачи $\frac{1}{2} a \cdot MK = \frac{1}{2} 2a \cdot MO$, $MK = 2MO$, следовательно, $\angle MKO = 30°$

Из $\Delta AOK : OK = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Из $\Delta MOK : MK = \frac{OK}{\cos 30°}$, $MK = \frac{a\sqrt{3}}{2} : \frac{\sqrt{3}}{2} = a$.

$S_{бок} = \frac{1}{2} 6a \cdot a = 3a^2$.

Ответ: $3a^2$

18. Пусть в пирамиде $PABC$ точка O – центр окружности, вписанной в основание ABC; PK – высота грани PBC. Тогда $OK \perp BC$, $OK = R$ – радиус вписанной в ΔAAB окружности.

Имеем: $S_{\text{полн}} = S_{бок} + S_{осн}$. Найдем ΔAAB и $S_{осн}$.

Полупериметр p основания равен 56, значит $S_{осн} = \sqrt{56 \cdot 27 \cdot 21 \cdot 8} = 504$, поэтому $R = \dfrac{S_{\text{осн}}}{p} = \dfrac{505}{56} = 9$.

Введем вспомогательный элемент, обозначим $PK = x$, тогда $OP = x - 3$. В прямоугольном $\Delta OPK: OK^2 = KP^2 - OP^2$ или $x^2 - (x-3)^2 = 9^2$, откуда $x = 15 = PK$. Тогда $S_{\text{бок}} = p \cdot PK = 56 \cdot 15 = 840$ и $S_{\text{полн}} = 504 + 840 = 1344$ ($см^2$).

Ответ: $1344 см^2$

19. Предположим, что плоскости MAB и MAD перпендикулярны к плоскости основания, тогда линия их пересечения MA перпендикулярна к плоскости основания, т.е. MA - высота пирамиды (Рис. 23).

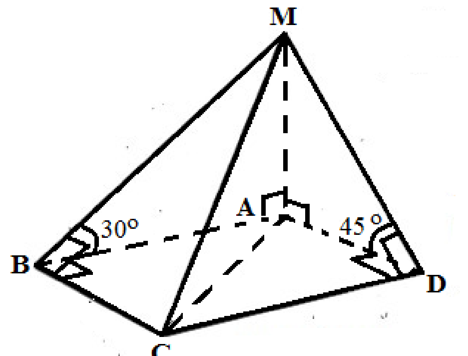


Рис. 23

Так как $CB \perp AB$, то $CB \perp MB$ по теореме о трех перпендикулярах, поэтому угол MBA - линейный угол двугранного угла при ребре CB, $\angle MBA = 30°$.

Аналогично: $AD \perp DC$, $MD \perp DC$, угол MDA– линейный угол двугранного угла при ребре DC, $\angle MDA = 45°$. Треугольники MBC и MDC прямоугольные.

Пусть $MA = x$ см, тогда $MB = 2x$ см, $AB = x\sqrt{3}$ см.

Из ΔMAD: $MA = AD = x$ см, $MD = x\sqrt{2}$ см.

Из $\Delta ABC: AB^2 + BC^2 = AC^2$, $3x^2 + x^2 = 64$, $x^2 = 16$, $x = 4$.

Таким образом: $MA = 4$ см, $AB = DC = 4\sqrt{3}$ см, $MB = 8$ см, $MD = 4\sqrt{2}$ см, $AD = BC = 4$ см.

$$S_{бок} = \frac{1}{2} AB \cdot AM + \frac{1}{2} AD \cdot AM + \frac{1}{2} BC \cdot BM + \frac{1}{2} DC \cdot DM,$$

$$S_{бок} = \frac{1}{2} \cdot 4\sqrt{3} \cdot 4 + \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 4 + \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 8 + \frac{1}{2} \cdot 4\sqrt{3} \cdot 4\sqrt{2} = 24 + 8\sqrt{3} + 8\sqrt{6},$$

$$S_{осн} = 4\sqrt{3} \cdot 4 = 16\sqrt{3}.$$

$$S_{пир} = 24 + 24\sqrt{3} + 8\sqrt{6} = 8(3 + 3\sqrt{3} + \sqrt{6}).$$

Ответ: $8(3+3\sqrt{3}+\sqrt{6})$

20. Пусть $AS=a$. Тогда $BO=\frac{1}{2}BD=4\sqrt{2}$, $OL=\frac{a}{2}$ (Рис. 24). Кроме того, $tg\angle BLO=\frac{BO}{OL}=\frac{8\sqrt{2}}{a}=\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{5}}$, откуда $a=4\sqrt{5}$. Тогда высота боковой грани пирамиды $h=\sqrt{80-16}=8$ и площадь поверхности пирамиды $S=4\cdot\frac{AB\cdot h}{2}+AB^2=4\cdot\frac{8\cdot 8}{2}+8^2=192$.

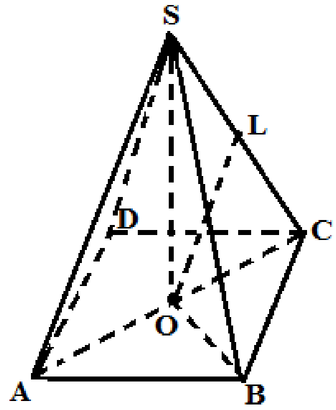


Рис. 24

Ответ: 192.

21. Т.к. $DABC$ – правильная пирамиды, то точка O, являющая основанием высоты DO, есть центр правильного ΔABC (Рис. 25).

Построим $OE\perp BC$ и отрезок DE. По теореме о 3-х перпендикулярах имеем $DE\perp BC$, тогда $\angle DEO$ – линейный угол двугранного угла при основании, $\angle DEO=45°$. В правильной пирамиде все двугранные углы при основании одинаковы.

$DO=OE=h$, тогда $D=h\sqrt{2}$.

$OE=r=h$, где r – радиус вписанной окружности.

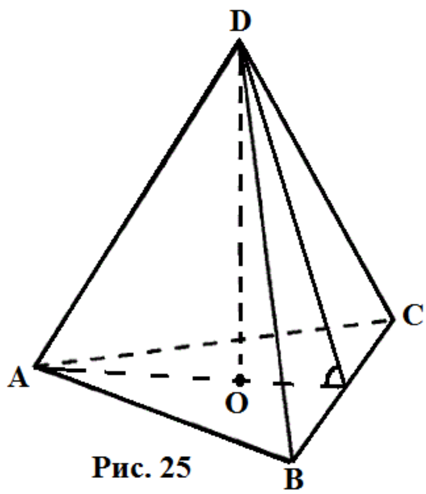


Рис. 25

Пусть сторона правильного ΔAAB равна x.

$S_{ABC}=\frac{x^2\sqrt{3}}{4}$, $p=\frac{3x}{2}$, $r=\frac{S_{ABC}}{p}$,

$r=h==\frac{x\sqrt{3}\cdot 2}{4\cdot 3x}=\frac{x}{2\sqrt{x}}$, $x=2\sqrt{3}\cdot h$, тогда

$S_{ABC}=\frac{(2\sqrt{3}\cdot h)^2\sqrt{3}}{4}=\frac{4\cdot 3\cdot\sqrt{3}\cdot H^2}{4}=3\cdot\sqrt{3}\cdot h^2$, и

$S_{\Delta BCD}=S_{\Delta ADC}=S_{\Delta ABD}=\frac{1}{2}x\cdot DE=\frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{3}h\cdot h\cdot\sqrt{2}=h^2\sqrt{6}$, а $S_{бок}=3S_{\Delta BCD}=3\sqrt{6}h^2$,

значит, $S_{полн}=S_{осн}+S_{бок}=3\sqrt{6}h^2+3\sqrt{3}h^2=3\sqrt{3}h^2\cdot(\sqrt{2}+1)$.

II способ: Указание: воспользоваться формулой: $S_{бок}=\frac{S_{осн}}{\cos\varphi}$.

Ответ: $3\sqrt{3}h^2 \cdot (\sqrt{2}+1)$

22. Пусть в пирамиде $AB = BP = 25$, тогда $AP = 30$ (Рис. 26). Точка O – центр вписанной в треугольник ABC окружности; отрезки $OK = OH = OM = r$, $OK \perp AB$, $OH \perp BC$, $OM \perp AC$. Значит, $PK \perp AB$, $PH \perp BC$, $PM \perp AC$.

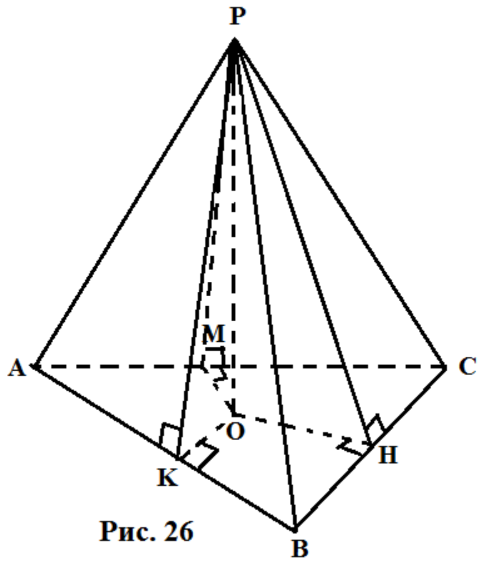


Рис. 26

Рассмотрим грань пирамиды - треугольник ABP: $S_{\Delta ABP} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot PK$, с другой стороны $S_{\Delta ABP} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, где p – полупериметр треугольника ABP. Приравняем формулы: $\frac{1}{2} \cdot AB \cdot PK = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, отсюда найдем $PK = \frac{2\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{AB} = \frac{2\sqrt{40 \cdot 10 \cdot 15 \cdot 15}}{25} = 24$. Тогда $AK = \sqrt{AP^2 - PK^2} = \sqrt{30^2 - 24^2} = 18$. $AK = AM = 18$, значит, $KB = BH = 25 - 18 = 7$.

Обозначим $CH = x$. Тогда $S_{бок} = \frac{1}{2}(18 + x + 7 + x) \cdot 24 + 300 = 840$, отсюда находим x=10. Тогда $BC = 7 + 10 = 17$, $AC = 18 + 10 = 28$.

Ответ: 17 см, 28 см.

23. Доказательство: Треугольник ABH – проекция треугольника ABP. Т.к. HM – перпендикуляр к AB, то и PH – перпендикуляр к AB по теореме о трех перпендикулярах. Значит, угол $\angle HMP$ является линейным угол двугранного угла с ребром AB. ABP – часть боковой поверхности, ABH – часть основания.

Найдем отношение площадей интересующих нас треугольников:

$$\frac{S_{\Delta ABH}}{S_{\Delta ABP}} = \frac{\frac{1}{2} AB \cdot HM}{\frac{1}{2} AB \cdot PM} = \frac{HM}{PM}.$$

Рассмотрим прямоугольный треугольник $PHM : PH$ – гипотенуза, HM – катет, прилежащий к заданному углу φ. Отсюда: $\frac{HM}{PM} = \cos$; $\frac{S_{\Delta ABH}}{S_{\Delta ABP}} = \cos$; $S_{\Delta ABH} = S_{\Delta ABP}\cos$.ч.т.д.

Площадь поверхности цилиндра

24. Ответ: 6.

25. Пусть $S_{\text{сеч}} = 2Rh = 10$, а $S_{\text{осн}} = \pi R^2 = 5$, составим систему

$$\begin{cases} 2Rh = 10 \\ \pi R^2 = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} Rh = 5 \\ \pi R^2 = 5 \end{cases} \Rightarrow R = \frac{5}{h};$$

Во второе уравнение подставляем $R = \frac{5}{h}$ и получаем, $\pi \cdot (\frac{5}{h})^2 = 5$; $\frac{5\pi}{h^2} = 1 \Rightarrow h = \sqrt{5\pi}$ м.

Ответ: $\sqrt{5\pi}$

26. Ответ: π^2 $м^2$

27. Пусть $r = AO$, а $h = AB$. Введем вспомогательный элемент, по условию $AO = x$ см, тогда $AB = (x + 12)$ см.

По формуле $S_{\text{полн}} = 2\pi R(h + R)$, получаем $288\pi = 2\pi x(x + 12 + x)$, отсюда получаем $x_1 = -12$ (по условию $\notin$), $x_2 = 6$, значит $AO = r = 6$ см, а $AB = h = 18$ см.

Ответ: 6 см, 18 см.

28. Ответ: $\frac{d^2}{8\pi}$.

29. Ответ: б) $\frac{b}{a}$.

30. Цилиндр получили в результате вращения $ABCB$.

Пусть $AB = a$, тогда $S_{\text{сф}} = 4\pi a^2$; $S_{\text{осн}} = \pi a^2$; $S_{\text{бок}} = 2\pi \cdot AD \cdot AB$; $S_{\text{полн}} = 2S_{осн} + S_{бок} = 2\pi a^2 + 2\pi a^2 = 4\pi a^2$, значит $S_{\text{сф}} = S_{пол.цилиндра}$. Ч.т.д.

Площадь поверхности конуса

31. Ответ: 3

32. Ответ: 144π

33. Ответ: 3.

34. Площадь полной поверхности вычисляется по формуле $S_{\text{полн}} = \pi \cdot rl + \pi r^2$. $S_{ASB} = \frac{1}{2} AB \cdot SO = \frac{1}{2} \cdot 2r \cdot h = rh$ (Рис. 27),

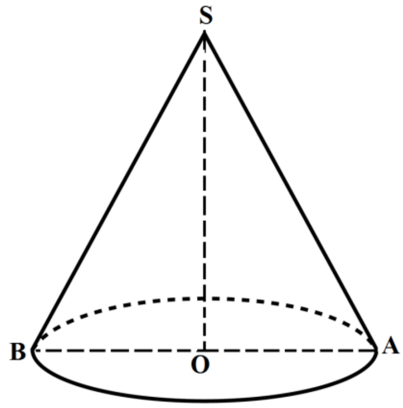


Рис. 27

подставляем данные в формулу и получаем, $0{,}6 = r \cdot 1{,}2 \Rightarrow r = 0{,}5$ см.

По теореме Пифагора $l = \sqrt{h^2 + r^2} = \sqrt{(1{,}2)^2 + (0{,}5)^2} = 1{,}3$ см;

$S_{\text{полн}} = \pi \cdot 0{,}5 \cdot 1{,}3 + \pi \cdot (0{,}5)^2 = \pi \cdot 0{,}5 \cdot 1{,}8 = 0{,}9\pi\ (см^2)$.

Ответ: $0{,}9\pi\ см^2$

35. Ответ: $S_{\text{бок}} = 80\pi\ см^2$, $S_{полн} = 144\pi\ см^2$

36. Ответ: $S_{\text{бок}} = 33\sqrt{2}\pi\ см^2$, $S_{полн} = 33\sqrt{2}\pi + 65\pi\ см^2$

37. На рисунке 28 изображено осевое сечение комбинации цилиндра и конуса, которые имеют общую высоту. CM - диаметр верхнего основания усеченного конуса.

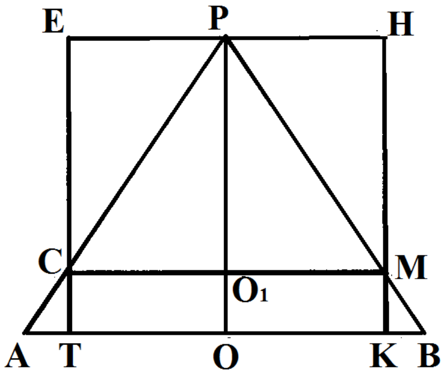


Рис. 28

Обозначим: $h = OP$ – высота цилиндра, $l = BP$ – образующая конуса, $x = KM$ – высота усеченного конуса.

В прямоугольном ΔBOP имеем: $l^2 - h^2 = 24^2$.

Так как $S_{\text{бок.цил}} = S_{бок.кон}$, то $40\pi h = 24\pi l$, поэтому $h = \frac{3}{5} l$. Тогда $l^2 - \frac{9}{25} l^2 = 24^2$, откуда $l = 30$, значит, $h^2 = l^2 - 24^2 = 30^2 - 24^2 = 18^2$, $h = 18$.

Далее, $BK = OB - OK = 24 - 20 = 4$. Из подобия треугольников BOP и BKM имеем: $\frac{OP}{KM} = \frac{OB}{BK}$ или $\frac{18}{x} = \frac{24}{4}$, откуда $x = 3$. Значит, $MB = 5$.

Тогда, $S_{бок.усеч} = \pi \cdot (O_1M + OB) \cdot BM = \pi \cdot (20 + 24) = 220\pi\,(\text{см}^2)$.

Ответ: 220π см^2

Площадь сферы

38. Ответ: а) 144π $см^2$; б) 16π $дм^2$; в) 8π $м^2$; г) 48π $см^2$.

39. Ответ: $\frac{9}{\sqrt{\pi}}$ $см$;

40. Объемы шаров соотносятся как $\frac{V_1}{V_2} = \frac{R_1^3}{R_2^3} = 27$, откуда $\frac{R_1}{R_2} = 3$. Площадь их поверхностей соотносятся как квадраты радиусов: $\frac{S_1}{S_2} = \frac{R_1^2}{R_2^2} = (\frac{R_1}{R_2})^2 = 9$.

Ответ: 9.

41. $S_1 = 4\pi R_1^2$, $S_2 = 4\pi R_2^2$ - площади поверхности первой и второй сферы. Площадь их поверхностей соотносятся, как квадраты радиусов $\frac{S_1}{S_2} = \frac{R_1^2}{R_2^2} = (\frac{R_1}{R_2})^2$. Ч.т.д.

42. $S_{сф} = 4\pi R^2$; $R = 5$ м, тогда $S_{сф} = 4\pi \cdot 5^2 = 100\pi\,(м^2)$.

$S_{кр} = \pi L^2$, где L – радиус круга; $\pi L^2 = \pi \cdot 100 \Rightarrow L = 10$ м.

Ответ: 10 м.

43. Ответ: 12 см.

Площадь сечений геометрических тел

44. Площадь боковой поверхности призмы $S_{бок} = P_{осн} \cdot h$, где P – периметр основания, h – высота боковой грани. Обозначим площадь боковой поверхности исходной призмы $S_{бок1}$, а отсеченной - $S_{бок2}$ (Рис. 29).

$\frac{S_{бок1}}{S_{бок2}} = \frac{P_{осн1} \cdot h}{P_{осн2} \cdot h} = \frac{P_{осн1}}{P_{осн2}}$ (т.к. высота боковой грани у исходной призмы и отсеченной призмы совпадает).

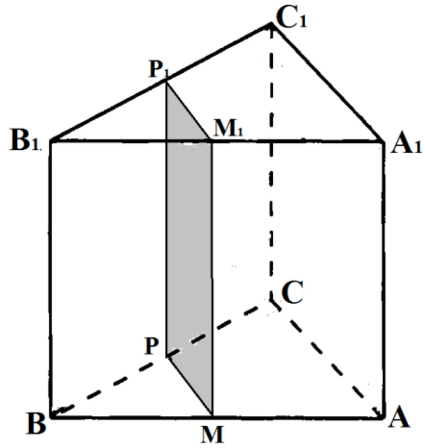


Рис. 29

$P_{осн1} = 2(AA + BC + AC)$, $P_{осн2} = 2(BB + BP + PM)$,

а т.к. $PM = \frac{1}{2}AC$, $BP = \frac{1}{2}BC$, $BM = \frac{1}{2}AB$, то треугольники в основании исходной и отсеченной призм подобны, все их стороны относятся как 1:2. Поэтому $P_{осн2} = \frac{1}{2}P_{осн1}$.

Отсюда следует, что площадь боковой поверхности исходной призмы равна 16.

Ответ: 16.

45. Ответ: 12.

46. Пусть плоскость AOC_1 пересекает ребро DD_1 в точке P. Плоскость сечения пересекает плоскость CC_1D_1 по прямой C_1P, параллельной AO, следовательно, искомое сечение – параллелограмм AOC_1P (Рис. 30).

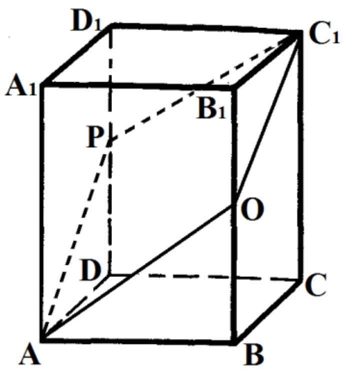


Рис. 30

Треугольники ADP и C_1B_1O равны, следовательно, $DP = B_1O = \frac{5}{9}BB_1 = 5$,

$BO = BB_1 - B_1O = 4$, $AP = \sqrt{AD^2 + DP^2} = \sqrt{41}$,

$AO = \sqrt{AB^2 + BO^2} = \sqrt{41}$.

Значит, AOC_1P - ромб со стороной $\sqrt{41}$ и диагональю $AC_1 = \sqrt{AB^2 + BC^2 + CC_1^2} = \sqrt{122}$.

Тогда диагональ $OP = 2\sqrt{AO^2 - (\frac{AC_1}{2})^2} = \sqrt{42}$.

$S_{AOC_1P} = \frac{AC_1OP}{2} = \sqrt{1281}$.

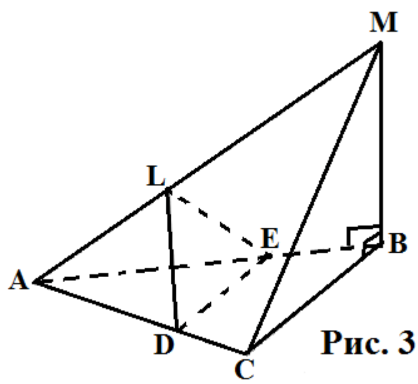


Рис. 31

Ответ: $\sqrt{1281}$

47. Ответ: $85\sqrt{2}$

48. Ответ: 80.

49. Рассмотрим треугольники AMB и CMB, они прямоугольные, имеют общую сторону MB и равные стороны AB и BC, следовательно, эти треугольники равны по двум катетам, значит, $AM = MC = 6$ (Рис. 31). Рассмотрим треугольник AMC_1, воспользовавшись теоремой косинусов, найдем косинус угла CAM:

$\cos\angle CAM = \dfrac{AM^2 + AC^2 - MC^2}{2 \cdot AC \cdot AM} = \dfrac{36 + 9 - 36}{2 \cdot 3 \cdot 6} = \dfrac{1}{4}$. Из треугольника ADL найдем стороной LD: $LD = \sqrt{AD^2 + AL^2 - 2AL \cdot AD \cdot \cos\angle CAM} = \sqrt{4 + 4 - 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot \dfrac{1}{4}} = \sqrt{6}$.

Рассмотрим прямоугольный треугольник ABM. Найдем косинус угла MAB: $\cos\angle MAB = \dfrac{3}{6} = \dfrac{1}{2}$.

Из треугольника ALE найдем сторону LE: $LE = \sqrt{AL^2 + AE^2 - 2 \cdot AL \cdot AE} = \sqrt{4 + 4 - 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot \dfrac{1}{2}} = 2$.

В треугольнике ADE $AE = ED$, следовательно, он равнобедренный, углы при основании равны. $\angle CAB = 60°$, значит, $\angle AED = \angle ADE = 60°$. Следовательно, треугольник $ADE -$ равносторонний, $AD = AE = DE = 2$.

Опустим высоту EH в равнобедренный треугольник LDE на основание LD. Найдем EH: $EH = \sqrt{LE^2 - (\dfrac{LD}{2})^2} = \sqrt{4 - \dfrac{6}{4}} = \dfrac{\sqrt{10}}{2}$.

Треугольник $DLE -$ искомое сечение, найдем площадь: $S_{DLE} = \dfrac{1}{2} EH \cdot LD = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{\sqrt{10}}{2} \cdot \sqrt{6} = \dfrac{\sqrt{15}}{2}$.

Ответ: $\dfrac{\sqrt{15}}{2}$.

Площадь поверхности вписанных и описанных многогранников

50. Ответ: 3.

51. Высота цилиндра равна диаметру шара, а радиус основания цилиндра равен радиусу шара (Рис. 32).

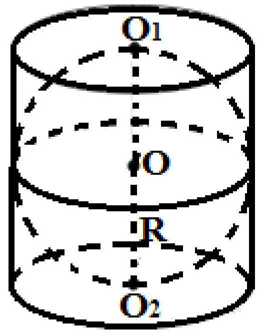


Рис. 32

$S_{осн} = \pi R^2$;

$S_{бок} = 2\pi R \cdot h = 2\pi R \cdot 2r = 4\pi R$;

$S_{полн} = S_{бок} + 2S_{осн} = 4\pi R + 2\pi R^2 = 6\pi R^2$.

Поскольку площадь поверхности шара дается формулой $S_ш = 4\pi R$, имеем $S_{полн} = 1{,}5 \cdot S_ш = 166{,}5$.

Ответ: 166,5.

52. Так как ребро куба равно радиусу сферы, в кубе содержится $\frac{1}{8}$ часть сферы и, соответственно, $\frac{1}{8}$ ее поверхности, равная $\frac{1}{8}S = \frac{1}{8} \cdot 4\pi R^2 = \frac{\pi}{2} \cdot 1{,}6^2 = 1{,}28\pi$.

Ответ: $1{,}28\pi$.

53. Ответ: $64(11 - 4\sqrt{7})\pi$

54. Так как в конус вписана пирамида (Рис. 33). Основанием пирамиды является прямоугольник $ABCD$. Высота $SO \perp (ABCD)$. По условию, $SO = h = 12$ см, $AB = CD = 8$ см; $BC = AD = 6$ см; $OA = OB = r$, тогда $BD = 2r$.

Рассмотрим ΔBAD. По теореме Пифагора найдем BD: $BD = \sqrt{AD^2 + AB^2} = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10$ см, тогда $OA = OB = 5$ см.

Найдем площадь основания конуса: $S_{осн} = \pi r^2 = \pi \cdot 25$ (см^2) .

Рассмотрим ΔSOA. По т. Пифагора найдем SA: $SA = \sqrt{SO^2 + OA^2} = \sqrt{12^2 + 5^2} = 13$ см. Найдем площадь боковой поверхности конуса, у которого $SA = l$: $S_{бок} = \pi Rl = \pi \cdot 5 \cdot 13 = 65\pi$ см^2 . Найдем площадь полной поверхности конуса: $S_{полн} = S_{осн} + S_{бок} = 25\pi + 65\pi = 90\pi$ (см^2).

Площадь основания пирамиды: $S_{осн} = S_{ABCD} = AB \cdot BC = 6 \cdot 8 = 48$ (см^2) .

По теореме о трех перпендикулярах получаем $OK \perp AD$, $OL \perp AB$.

$SK \perp AD$ и $SL \perp AB$. $OK = \frac{1}{2}AB = 4$ см; $OL = \frac{1}{2}BC = 3$ см.

Рассмотрим прямоугольный треугольник ΔSOK. По теореме Пифагора найдем SK: $SK = \sqrt{h^2 + OK^2} = \sqrt{12^2 + 4^2} = 4\sqrt{10}$ (см). Найдем площадь боковой грани пирамиды:

$$S_{\Delta ASD} = \frac{1}{2} SK \cdot DA = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 4\sqrt{10} = 12\sqrt{10} \ (\text{см}^2).$$

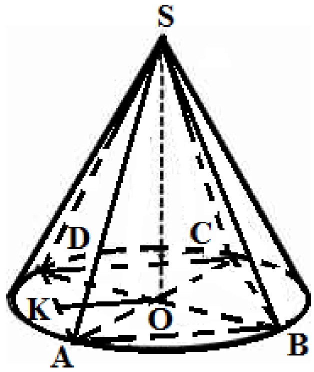


Рис. 33

Рассмотрим прямоугольный треугольник ΔSOL. По теореме Пифагора найдем SL: $SL = \sqrt{h^2 + OL^2} = \sqrt{12^2 + 3^2} = \sqrt{153} = 3\sqrt{17}$ (см).

$$S_{\Delta ASB} = \frac{1}{2} SL \cdot AB = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 3\sqrt{17} = 12\sqrt{17} \ (\text{см}^2).$$

Площадь боковой поверхности пирамиды:

$$S_{бок} = 2(S_{\Delta ASD} + S_{\Delta ASB} = 2 \cdot (12\sqrt{10} + 12\sqrt{17}) = 24 \cdot (\sqrt{10} + \sqrt{17}) \text{см}^2 .$$

Площадь полной поверхности пирамиды:

$$S_{полн} = S_{осн} + S_{бок} = 24 \cdot (\sqrt{10} + \sqrt{17}) + 48 = 24 \cdot (\sqrt{10} + \sqrt{17} + 2) \text{см}^2 .$$

Тогда, $\frac{S_{пир}}{S_{кон}} = \frac{24 \cdot (\sqrt{10} + \sqrt{17} + 2)}{90\pi} = \frac{4 \cdot (\sqrt{10} + \sqrt{17} + 2)}{15\pi}$.

Ответ: $\frac{4 \cdot (\sqrt{10} + \sqrt{17} + 2)}{15\pi}$

55. Ответ: $\frac{2}{3}$.

Приложение 3

Решение варианта 2 контрольной работы для проведения констатирующего эксперимента

1 вариант

Задача 1. «Найдите площадь четырехугольника, изображенного на клетчатой бумаге с размером клетки 1см 1см (Рис. 34). Ответ дайте в квадратичных сантиметрах» [35].

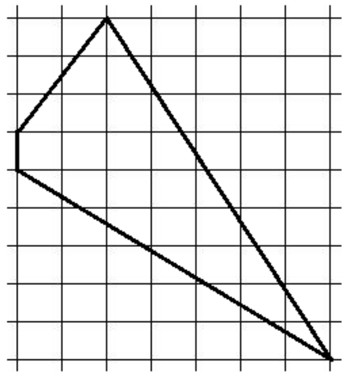


Рис. 34

Решение.

Данную задачу можно решить двумя способами.

I способ: Дан четырехугольник, достроим эту фигуру до прямоугольника. Воспользуемся свойством аддитивности: площадь искомого четырехугольника будет равна разности площади достроенного прямоугольника и трех прямоугольных треугольником, гипотенузы которых являются сторонами исходного треугольника.

Получаем:

$$S = S_{пр} - S_{Д1} - S_{Д2} - S_{Д3} = 7 \cdot 9 - \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 3 - \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 7 - \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 9 = 63 - 3 - 17{,}5 - 22{,}5 = 20\,(см^2)$$

II способ: Воспользуемся формулой Пика.

$S = \frac{Г}{2} + В - 1$, $Г = 6$, $В = 15$, подставляем данные задачи в формулу и получаем: $S = \frac{8}{2} + 17 - 1 = 20$ $(см^2)$.

Ответ: 20 $см^2$

Задача 2. «Найдите площадь поверхности прямой призмы, в основании которой лежит ромб с диагоналями, равными 5 и 12, и боковым ребром, равным 16» [60].

Решение.

Пусть $AC = 12$, $BD = 5$. Найдем сторону ромба, лежащего в основании призмы (Рис. 35). Т.к. диагонали точкой пересечения делятся пополам и пересекаются под прямым углом, найдем через треугольник ABO сторону AB. Треугольник ABO- прямоугольный, сторона $AO = \frac{1}{2}AC = 6$, $BO = \frac{1}{2}BD = 2{,}5$.

По теореме Пифагора найдем сторону ромба:

$AB = \sqrt{AO^2 - BO^2} = \sqrt{6^2 + 2{,}5^2} = 6{,}5$.

Найдем площадь ромба: $S_p = \frac{1}{2}AC \cdot BD = \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 5 = 30$.

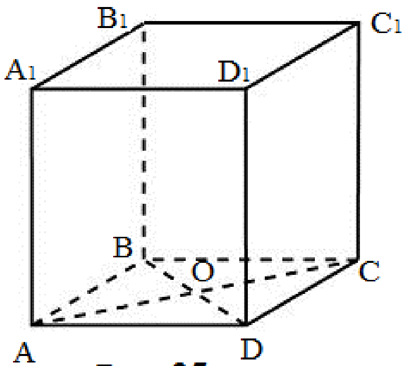


Рис. 35

Площадь боковой поверхности: $S_{бок} = 4 \cdot 6{,}5 \cdot 16 = 416$, тогда площадь полной - $S = 2S_{осн} + S_{бок} = 2 \cdot 30 + 416 = 476$.

Ответ: 476

Задача 3. Высота цилиндра на 5 см больше его радиуса, а площадь полной поверхности равна 500π см^2. Найдите радиус основания и высоту цилиндра [7, С.134].

Решение.

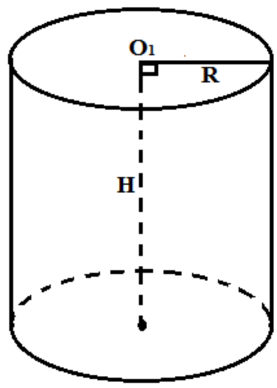


Рис. 36

Пусть $R = x$ – см, тогда $H = x + 5$ см (Рис. 36). Площадь полной поверхности цилиндра по формуле равна: $S_{полн} = 2\pi R(R + H)$, причем, по условию $S_{полн} = 500\pi$ см^2. Тогда, подставляя в формулу известные данные, получаем: $2x \cdot \pi(x + x + 5) = 500\pi$. Поделим обе части получившегося уравнения на π, раскроем скобки, приведем подобные слагаемые и получим уравнение: $2x^2 + 10x - 500 = 0$. Из данного уравнения с помощью дискриминанта найдем корни уравнения $x_1 = -12{,}5$ (не удовлетворяет условию $R > 0$), и $x_1 = 10$. Тогда, $R = 10$ см, а $H = 10 + 5 = 15$см.

Ответ: 10 см, 15 см.

Задача 4. «В правильной треугольной пирамиде $MABC$ с вершиной M высота равны 6, а боковые рёбра равны 9. Найдите площадь сечения пирамиды плоскостью, проходящей через середины сторон AC и BC параллельно прямой MC» [35].

Решение.

Пусть точки F и G – середины ребер BC и AC соответственно (Рис. 37). Построим точки K и L – середины ребер MB и MA соответственно, тогда отрезки FK и GL параллельны отрезку MC. Так как $KF = \frac{1}{2}MC = GL$ (как средняя линия треугольников BMC и AMC), то параллелограмм $FGLK$ – искомое сечение.

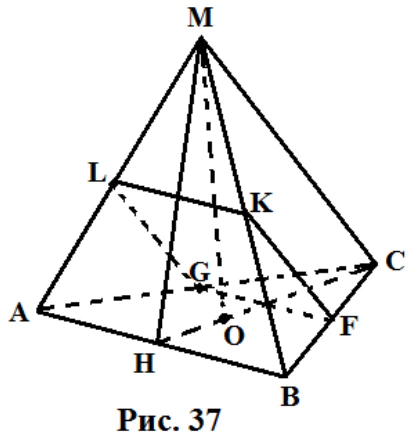


Рис. 37

Докажем, что $FGLK$ – прямоугольник. Пусть MH – высота и медиана треугольника MBA, а CH – медиана и высота треугольника ACB, тогда плоскость MHC перпендикулярна плоскости ACC, это значит, что $MC \perp AB$. Отрезки $KF \parallel MC$, $FG \parallel BA \Rightarrow FGLK$ – прямоугольник.

По условию, $MO = 6$, $MC = 9$. $KF = \frac{1}{2}MC = \frac{9}{2}$. Из прямоугольного треугольника MOC найдем OC: $OC = \sqrt{MC^2 - MO^2} = \sqrt{9^2 - 6^2} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$.

Так как точка O – центр описанного треугольника ABC, $R = OC = 3\sqrt{5}$, то $AB = R\sqrt{3} = 3\sqrt{5} \cdot \sqrt{3} = 3\sqrt{15}$. $LK = \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2} \cdot 3\sqrt{15} = \frac{3\sqrt{15}}{2}$. Тогда,

$$S_{\text{FGLK}} = LK \cdot KF = \frac{3\sqrt{15}}{2} \cdot \frac{9}{2} = \frac{27\sqrt{15}}{4}.$$

Ответ: $\frac{27\sqrt{15}}{4}$.