МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Тольяттинский государственный университет»

Институт математики, физики и информационных технологий
(наименование института полностью)
Кафедра «Высшая математика и математическое образование»
(наименование кафедры)

44.03.05 «Педагогическое образование»
(код и наименование направления подготовки)
«Математика и информатика»
(направленность (профиль))

БАКАЛАВРСКАЯ РАБОТА

на тему **«МЕТОДИКА ФОРМИРОВАНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКИХ ПОНЯТИЙ В КУРСЕ АЛГЕБРЫ ОСНОВНОЙ ШКОЛЫ (НА ПРИМЕРЕ ТЕМЫ «УРАВНЕНИЯ»)»**

Студент	М.Г. Пугачева (И.О. Фамилия)	____________________ (личная подпись)
Руководитель	к.п.н., доцент Н.А. Демченкова (И.О. Фамилия)	____________________ (личная подпись)
Консультант	М.В. Емелина (И.О. Фамилия)	____________________ (личная подпись)

Допустить к защите

Заведующий кафедрой д.п.н., профессор, Р.А. Утеева ______________
(ученая степень, звание, И.О. Фамилия) (личная подпись)

«____»__________2018 г.

Тольятти 2018

АННОТАЦИЯ

Целью бакалаврской работы является выявление методических особенностей формирования математических понятий с помощью взаимосвязанных задач в курсе алгебры основной школы.

Из разделов, посвященных проблеме формирования понятий, можно говорить об огромной роли задач в изучении теории. В последнее время особое внимание в методических исследованиях уделяется взаимосвязанным задачам. Существуют различные подходы к определению понятия «взаимосвязанные задачи». Многообразие трактовок этого понятия приводит к большому количеству рекомендаций по их использованию и конструированию, что затрудняет их применение.

Бакалаврская работа состоит из введения, двух глав, заключения, списка литературы и приложения.

Глава I бакалаврской работы посвящена теоретическим основам формирования математических понятий в курсе алгебры основной школы. В ней приведены различные трактовки понятия и описаны его основные характеристики, выделены виды определений математических понятий и их классификация; определены методические требования к формированию математических понятий и рассмотрен опыт работы учителей по формированию математических понятий школьного курса математики.

В Главе II определены основные подходы к понятию взаимосвязанных задач, выявлены методические особенности формирования понятий с помощью взаимосвязанных задач: линейного, квадратного, рационального и иррационального уравнений, уравнений с модулем и параметром; разработаны циклы взаимосвязанных задач, которые позволяют сформировать каждое из указанных понятий в процессе обучения их решению.

Список литературы содержит 33 наименований.

Объем работы составляет 60 страниц.

ABSTRACT

The title of the given graduation work is «Methodology of forming the understanding of the mathematical concepts in the course of algebra at secondary school (by the example of the topic: «Equations») ».

The aim of the research is to reveal the methodological specifics of forming the understanding of the concepts by means of interrelated exercises in the course of algebra at secondary school.

The object of the graduation work is the process of teaching algebra at secondary school.

The subject of the research is the interrelated exercises as a means of forming the concepts in the course of algebra at secondary school.

The graduation work consists of an introduction, two chapters, conclusions and the list of 33 references.

The first chapter of the graduation work describes the theoretical aspects of forming the understanding of the mathematical concepts in the course of algebra at secondary school. This chapter presents the various interpretations of the concepts, describes the main characteristics of the concepts, present the types of definitions of the mathematical concepts and their classification. This chapter also gives full coverage to the methodical requirements for forming the understanding of the mathematical concepts and describes the teachers' experience in forming the understanding of the mathematical concepts in the mathematics course.

The second chapter of the graduation work highlights the main approaches to the concept of interrelated exercises, explores the methodological specifics of forming the understanding of such concepts as linear, quadratic, rational and irrational equations, as well as equations with a modulus and a parameter. In this chapter, the cycles of the interrelated exercises are developed as well. They allow to form each of the concepts in the process of teaching students to solve them.

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Актуальность исследования. В федеральном государственном образовательном стандарте (ФГОС) среднего общего образования отмечены следующие результаты учащихся, связанные с формированием математических понятий: «Сформированность представлений о математических понятиях как о важнейших математических моделях, позволяющих описывать и изучать разные процессы и явления; понимание возможности аксиоматического построения математических теорий» [28].

Усвоение математических понятий является одним из средств развития мышления учащихся, поэтому формирование математических понятий – одна из важнейших задач обучения математике. Процесс формирования понятий в школьном курсе математики находится в центре внимания многих авторов, среди которых следует выделить исследования Л.В. Виноградовой [3], Т.А. Ивановой [9], Л.О. Денищевой [6], Г.И. Саранцева [23] и др.

Понятия являются одной из основных составляющих содержания любого учебного предмета, в том числе и математики. Изучение математических понятий способствует систематизации знания учащихся, более глубокому усвоению предмета. Формирование понятийного аппарата темы – первостепенная задача учителя математики при изучении любой темы. Все это обусловливает необходимость работы с математическими понятиями, что предполагает внимательное отношение к процессу их формирования.

Отметим, что особенно важную роль в обучении математике играют задачи. Задачи рассматриваются и как цель, и как средство обучения. Из разделов, посвященных проблеме формирования понятий, можно говорить об огромной роли задач в изучении теории. Задачи на формирование понятий способствуют мотивации их введения, направлены на выявление существенных свойств понятия, способствуют усвоению их определений, овладению объемом этого понятия, раскрытию взаимосвязи понятия с другими математическими понятиями, обучению применения данного понятия.

В последнее время особое внимание в методических исследованиях уделяется взаимосвязанным задачам. Существуют различные подходы к определению понятия «взаимосвязанные задачи». Многообразие трактовок этого понятия приводит к большому количеству рекомендаций по их использованию и конструированию, что затрудняет их применение.

Актуальность темы исследования обусловлена тем, что в настоящее время сложилось противоречие между формированием математического понятия и недостаточной разработанностью использования системы взаимосвязанных задач по формированию данного понятия.

Проблема исследования состоит в обосновании методики формирования математических понятий с помощью взаимосвязанных задач в курсе алгебры основной школы.

Объект исследования: процесс обучения алгебре в основной школе.

Предмет исследования: методика формирования математических понятий с помощью взаимосвязанных задач в курсе алгебры основной школы.

Цель исследования: выявить методические особенности формирования математических понятий с помощью взаимосвязанных задач в курсе алгебры основной школы.

Задач исследования:

1. Привести различные трактовки понятия и описать его основные характеристики; представить виды определений математических понятий, их классификацию; выделить основные этапы формирования математических понятий.

2. Определить основные подходы к понятию взаимосвязанных задач; разработать циклы взаимосвязанных задач, которые позволят сформировать каждое из указанных понятий.

3. Выявить методические особенности формирования понятий с помощью взаимосвязанных задач: линейного, квадратного, рационального и иррационального уравнений, уравнений с модулем и параметром.

Для решения задач были использованы следующие **методы исследования:** анализ психолого-педагогической и методической литературы, изучение школьных программ, учебников и учебных пособий.

Теоретическая значимость исследования состоит в том, что в нем выявлены методические особенности формирования математических понятий в курсе алгебры основной школы с помощью циклов взаимосвязанных задач.

Практическая значимость работы заключается в том, что в ней разработаны циклы взаимосвязанных задач, направленные на формирование понятий и обучение решению следующих видов уравнений: линейного, квадратного, рационального и иррационального уравнений, уравнений с модулем и параметром, которые могут быть использованы учителями математики на уроках и студентами в период педагогической практики в общеобразовательной школе.

На защиту выносятся: методические особенности формирования математических понятий в курсе алгебры основной школы с помощью взаимосвязанных задач.

Апробация результатов исследования осуществлена путём выступлений на: научной студенческой конференции «Дни науки в ТГУ» (апрель 2018 г.); XIV всероссийской научно-практической конференции «Артемовские чтения»: «Современное образование: научные подходы, опыт, проблемы, перспективы» (г. Пенза, 18 апреля 2018 г.) [5]; VII Международном интеллектуальном конкурсе студентов, аспирантов, докторантов Discovery Science: University – 2018 (г. Москва, 25 мая 2018 г.); Международной научно-практической конференции «Современное математическое образование: Опыт, проблемы, перспективы» (посвященной 80-летнему юбилею доктора педагогических наук, профессора К.Г. Кожабаева) (8-9 июня 2018 г., Казахстан, г. Кокшетау) [21].

Основные результаты исследования отражены в 2 публикациях [5, 21]

Бакалаврская работа состоит из введения, двух глав, заключения, списка использованной литературы.

Во введении сформулированы основные характеристики исследования: актуальность, проблема, объект, предмет, цель, задачи и методы исследования.

Глава I посвящена теоретическим основам формирования математических понятий в курсе алгебры основной школы. В ней приведены различные трактовки понятия и описаны его основные характеристики, выделены виды определений математических понятий и их классификация; определены методические требования к формированию математических понятий и рассмотрен опыт работы учителей по формированию математических понятий школьного курса математики.

В Главе II определены основные подходы к понятию взаимосвязанных задач, выявлены методические особенности формирования понятий с помощью взаимосвязанных задач: линейного, квадратного, рационального и иррационального уравнений, уравнений с модулем и параметром, и разработаны циклы взаимосвязанных задач, которые позволяют сформировать каждое из указанных понятий в процессе обучения их решению.

В заключении сформулированы основные результаты и выводы проведенного исследования.

Список литературы содержит 33 наименований.

ГЛАВА I. МЕТОДИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ФОРМИРОВАНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКИХ ПОНЯТИЙ В КУРСЕ АЛГЕБРЫ ОСНОВНОЙ ШКОЛЫ

§1. Психолого-педагогические основы формирования понятий

В данном параграфе нами будет рассмотрено математическое понятие, различные подходы к трактовке математического понятия, его основные характеристики.

Высшим познавательным психологическим процессом является мышление. Л.О. Денищева [6] утверждает: «Мышление – высшая ступень человеческого познания, процесса отражения объективной действительности. Именно мышление позволяет получать знание о таких объектах, свойствах и отношениях реального мира, которые не могут быть непосредственно восприняты на чувственной ступени познания. Получение нового знания происходит в сознании человека как выделение определенных сторон и свойств отображаемого объекта и установка соответствующих соотношений с другими объектами, что и определяется в психологии как мышление. Структура отдельных мыслей и их сочетаний определяет формы мышления. Формы мышления отражают формы существования реальных объектов и характеризуются тремя основными видами: понятиями, суждениями и умозаключениями» [6, С. 5].

В логике трактовка «Понятие» следующая: «Форма абстрактного мышления, которая отражает существенные признаки отдельного предмета или класса однородных предметов». «С точки зрения философии понятие – форма мышления о целостной совокупности существенных и несущественных свойств объектов реального мира» [24, С. 110].

Н.Л. Стефанова приводит следующую трактовку понятия, которую целесообразнее всего использовать в методике обучения математике: «Понятие – целостная многоуровневая иерархически организованная структура, включающая образы разной степени обобщенности. Обобщение образов идет по пути выделения существенных свойств понятия». В литературе встречается и термин «существенные признаки», но Н.Л. Стефанова рекомендует использовать слова «свойство», так как «признак» имеет другой смысл в школьном курсе математики [24, С. 110].

В методике при определении понятия всегда выделяются существенные свойства. Это показал анализ методической литературы таких авторов, как Л.О. Денищева [6], Л.В. Виноградова [3], А.А. Темербекова [26]. Большинство авторов придерживаются трактовки понятия, представленной Е.И. Лященко, она трактует понятие как: «Понятие – это форма мышления о целостной совокупности существенных и несущественных свойств объектов реального мира, в частности и математических объектов» [11, С. 38].

«Сформировать понятие об объекте – это значит раскрыть все существенные свойства объекта в их целостной совокупности. Деятельность ученика (субъекта) при этом направлено на изучение математического объекта, а продуктом этой деятельности будет правильное понятие» [11].

Каждое понятие может быть рассмотрено по его содержанию и объему: «Содержание понятия – множество всех существенных свойств данного понятия, т.е. таких свойств, каждый из которых необходим, а все вместе достаточны для утверждения того, что объект принадлежит к определяемому понятию. Объем понятия – множество объектов, к которым применимо данное понятие» [6, С. 9].

Для понятия «уравнение» содержание понятия будет представлено свойством: «Равенство, содержащее одну или несколько переменных», а объем понятия: линейные, квадратные, рациональные, иррациональные и другие уравнения.

Объем понятия – некоторое множество. Если это множество пусто, то мы имеем дело с нулевым, несуществующим понятием (невозможным, противоречивым). Пример такого понятия – «наибольшее натуральное число». Если объем понятия есть множество, состоящее из одного элемента, то такое понятие называется единичным. Пример единичного понятия – «наименьшее натуральное число» (единица). В остальных случаях мы имеем дело с общими понятиями.

Зависимость между содержанием и объемом понятия условно можно назвать обратной. Так, Г.И. Саранцев в учебном пособии «Общая методика преподавания математики» считает, что: «Обобщением понятия называют конструирование нового понятия с большим объемом, чем данное (с меньшим содержанием, чем данное). Ограничением понятия называют конструирование нового понятия с меньшим объемом, чем данное (с большим содержанием, чем данное)» [23, С. 78].

По отношению объемов различают равнозначные понятия, у которых объем полностью совпадает, пересекающиеся понятия, у которых объемы частично пересекаются. И понятия, которые находятся в отношении включения: «Понятие, объем которого содержит объем другого понятия, называют родовым, второе понятие – видовым» [23, С. 79]. Например, понятие «линейное уравнение» является видовым по отношению к понятию «уравнение», а понятие «уравнение» является родовым по отношению к понятию «линейное уравнение». Так, выявление существенных свойств понятия позволяет сознательно сопоставлять объект с тем или иным понятием или классом понятий.

§2. Определения математических понятий, их классификация

Одним из действий изучения математического понятия является действие определение понятия. В различных учебниках методики преподавания математики утверждается, что «определение понятия – это предложение, в котором раскрывается содержание понятия, т.е. совокупность условий, необходимых и достаточных для выделения класса объектов, принадлежащих определяемому понятию» [23, С. 77].

«Определения через ближайший род и видовые отличия» является основным видом определения математических объектов. Е.И. Лященко выделяет следующие виды математических определений в зависимости от особенностей действий, с помощью которых выделяют род и видовые отличия (Схема 1).

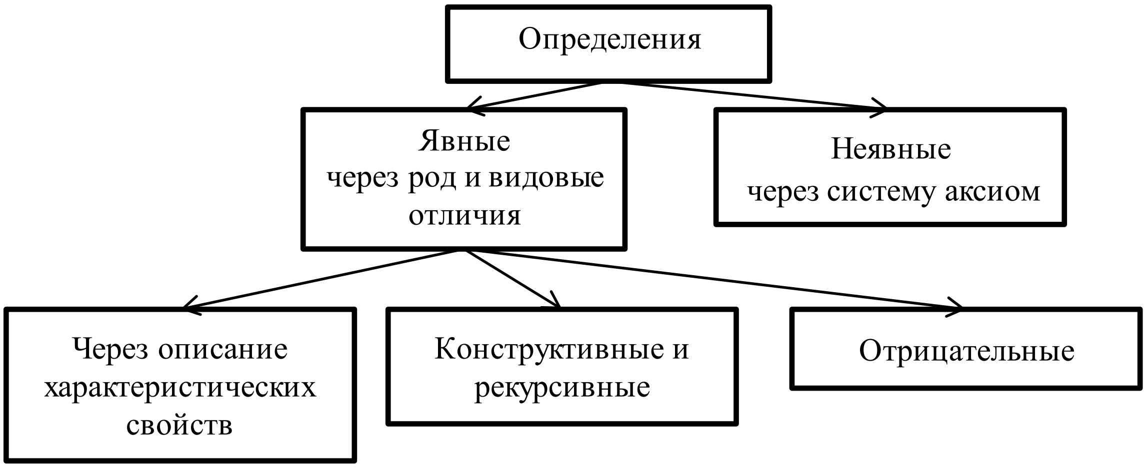

Схема 1. Виды определений

1) «*Определения математических объектов путем указания их характеристического свойства*. Этот вид определений построен на логических действиях и операциях установления ближайшего рода, видовых отличий и логической природы связи между родом и видовыми отличиями» [11, С. 40]. В школьном курсе математики различают *конъюнктивные* определения: $x \in A \Leftrightarrow P_1\ x\ \ \textbf{и}\, P_2\ x\ \ \textbf{и}\dots\textbf{и}\, P_n(x)$. «Данный объект x будет принадлежать классу A, если он обладает всеми свойствами P_1 и P_2 и … и P_n» [26, С. 93]. И дизъюнктивные определения:
$x \in A \Leftrightarrow P_1\ x\ \ \textbf{или}\, P_2\ x\ \ \textbf{или}\dots\textbf{или}\, P_n(x)$. «Данный объект принадлежит классу A, если он обладает хотя бы одним из свойств P_1 и P_2 и … и P_n» [26].

В качестве примера проведем логико-математический анализ определения неправильной дроби: «Дробь, в которой числитель больше знаменателя или равен ему, называется неправильной дробью» [11]. Термин – «неправильная дробь». Род – «дробь». Видовые отличия: 1) числитель больше знаменателя; 2) числитель равен знаменателю. Видовые отличия соединены союзом «или», значит, определение дизъюнктивное

2) «*Конструктивные и рекурсивные определения*. Свойства объекта в таком определении раскрываются путем показа операций его конструирования, т.е. его видовые отличия заданы в виде действий» [11]. Примером конструктивного определения является определение линейной функции: «Линейной функцией называется функция, которую можно задать формулой вида $y = kx + b$, где x – независимая переменная, k и b – числа. Термин – «линейная функция». Род – «функция». Видовые отличия: x – независимая переменная, k и b – числа и $y = kx + b$, т.е. если эти действия между числами и переменной заданы, то имеем линейную функцию. Если действия другие, то нет линейной функции» [11, С. 41].

В рекурсивных определениях указывают некоторые базисные объекты некоторого класса и правила, позволяющие получить новые объекты этого же класса. Примером рекурсивного определения является определение арифметической прогрессии: «Арифметической прогрессией называется последовательность, в которой каждый член, начиная со второго, равен предыдущему, сложенному с одним и тем же числом. Термин – «арифметическая прогрессия». Род – «последовательность». Видовые отличия: $\mathbf{a_1}$ – дан; $\mathbf{a}_2 = \mathbf{a} + \mathbf{d}$ (в общем виде $\mathbf{a}_n$) – дан; $\mathbf{a}_{n+1} = \mathbf{a}_n + \mathbf{d}$. Действия получения последующего члена, если известен предыдущий, указаны в видовых отличиях» [11, С. 42].

3) *Отрицательные* определения (объект задается через отсутствие у него определенных свойств). Примером отрицательного определения является определение скрещивающихся прямых: «Скрещивающиеся прямые – это такие прямые, которые не принадлежат плоскости и не пересекаются. Термин – «скрещивающиеся прямые». Род – «прямые». Видовые отличия: 1) не принадлежат одной плоскости; 2) не пересекаются» [11, С. 42].

Автор делает вывод, что главное в классификации видов школьных определений – это понимание специфики действий, с помощью которых раскрываются видовые отличия [11].

Л.О. Денищева в учебном пособие «Теория и методика обучения математике в школе» кроме основного вида «определения через ближайший род и видовые отличия», утверждает, что математическое понятие может быть правильно определено ещё следующими способами: генетически, индуктивно, интуитивно, через абстракцию [6, С. 11]. Опишем подробнее каждый способ.

1. Широкое распространение в школьном курсе математике получил способ, который указывает на происхождение понятий – это *генетический* способ. В генетических определениях так же указывается тот род, в которому принадлежит определяемое понятие, но вместо видовых отличий описывается процесс, создающий это понятие (окружность, биссектриса).

2. В школе достаточно редко встречается *индуктивный* способ, при котором позволяют из похожих объектов путем применения к ним определенных операций получать новые объекты [26, С. 95]. Примером является определение функции, которая задана на множестве натуральных чисел и строится по схеме [23, С. 80]: $$\begin{gathered} f(0)=0, \\ f(n+1)=f(n)+(n+1). \end{gathered}$$

3. *Интуитивный* способ определения математического понятия применяется, когда его структура является сложной, поэтому приходится более тщательно обрабатывать соответствующий интуитивный образ и переводить понятие на математический язык. «Например, интуитивное понятие предела значения функции в точке формируется на конкретном примере, с помощью такого оборота речи, как «Функция стремится к числу b, когда x стремится к числу a»» [6, С. 15].

4. Способ определения математических понятий *через абстракцию*, при котором выделяют типы объектов через установление между ними отношений тождество, равнозначности, равенства. «Например, натуральное

число n – это характеристика класса эквивалентных конечных множеств, состоящих из n элементов» [26, С. 97].

Цепь определений понятий теории, когда одни понятия определяются через другие, не может быть бесконечной, поэтому должны быть понятия, которые не определяются через другие понятия системы – *неопределяемые понятия.* Их содержание раскрывается через аксиомы [23, С. 81]. В математике это – точка, прямая, плоскость, число, множество и некоторые другие.

Определение может быть правильным (корректным) или некорректным в зависимости от того, удовлетворяет ли оно следующим требованиям:

– «определение должно быть соразмерным, в нем должны быть существенные признаки, необходимые и достаточные для того, чтобы отличить определяемое понятие от всех других понятий;

– определение должно быть минимальным, не содержать излишних требований (в школе иногда отходят от этого требования: прямоугольником называют параллелограмм, у которого все углы прямые);

– определение не должно содержать порочного логического круга (тавтологии). Например, прямым углом называется угол, содержащий 90°; градусом называется $\frac{1}{90}$ часть прямого угла;

– при введении с помощью определений системы понятий необходимо избегать омонимии – использования одного и того же термина в разных смыслах;

– логическое определение есть формула, у которой нельзя убрать или к которой нельзя добавить ни одного слова без искажения ее смысла;

– определение нельзя подменить его признаком, в определении должно быть слово «называется» (распространенная ошибочная формулировка: «если в четырехугольнике противоположные стороны попарно параллельны, то этот четырехугольник – параллелограмм»)» [9, С. 106].

§3. Методика формирования математических понятий в школьном курсе математике

В методической литературе выделяется три способа введения определений математических понятий. В зависимости от уровня развития учащихся, наличия учебного время, характера изучаемого материала, и других факторов учителя выбирают один из следующих способов ознакомления учащихся с новыми определениями математических понятий:

1. Учащиеся готовятся и самостоятельно формулируют новые определения.
2. Учащиеся подготавливаются к сознательному восприятию, к пониманию нового определения, а затем его формулировка сообщается им в готовом виде.
3. Учитель формулирует новое определение без дополнительной подготовки, а далее усилия учащихся концентрирует на его усвоении и закреплении.

Эвристический метод используется в процессе первого и второго способа, т.е. на уроке создается учебная проблема, способствующая «открытию» учащимися новых знаний самостоятельно. Это заинтересовывает учащихся, развивает творческие способности, но занимает дополнительное количество времени, а часто распыляет внимание учащихся на маловажные детали, отвлекает их от главной идеи новой темы. Третий способ в методической литературе иногда осуждается, считается догматическим. Многие учителя успешно используют третий способ наряду с первым и вторым. При их выборе важно учитывать различные факторы и конечный результат. Как правило, введение нового понятия первыми двумя способами протекает более организованно, а учащиеся самостоятельны и активны. Учитель заранее подготавливает и четко выстраивает систему задач, которую ему желательно составлять самостоятельно и учитывать особенности работы в своих классах.

Формирование математических понятий – сложный психологический процесс. Отметим, что процесс формирования понятий не ограничивается его определением, поэтому он осуществляется и протекает в определенной последовательности, имеет длительный по времени характер и иногда даже выходит за рамки школьного обучения.

В пособии «Методика и технология обучения математике» Н.Л. Стефановой выделяются четыре этапа методики работы с математическими понятиями:

– «профессиональный (выполнение логико-математического анализа, который позволит на уроке дать определение в алгоритмизированном виде и отобрать знания, которые необходимо актуализировать);

– подготовительный (актуализация необходимых знаний, связь с субъектным опытом ребенка, мотивация);

– основной (обучающий);

– этап закрепления (применение введенного теоретического материала при решении типовых задач)» [24, С. 120].

А.А. Темербекова утверждает, что методика формирования математических понятий включает следующие этапы:

– введение определения; этот этап осуществляться двумя методами: «конкретно-индуктивным (на основе рассмотрения конкретных примером или задач приходим к новому понятию и его определению) или абстрактно-дедуктивным (определение понятия формулируется сразу после объяснения нового термина)» [26, С. 98];

– усвоение определения, в процессе которого: «реализуются две цели запомнить определение и научиться проверять, подходит объект под рассматриваемое понятие или нет» [26];

– закрепление понятия, в процессе которого: «решаются более сложные задачи, где используются как определение понятия, так и его свойства; в процессе закрепления подводятся итоги, где обсуждается, что нового узнали о понятии, что научились делать, какие виды задач научились решать» [26].

При формировании математических понятий используется четыре этапа: этап мотивации введения понятия, реализован посредством практической задачи (мотивирующей задачи); этап введения определения понятия, конкретно-индуктивным методом; этап усвоения определения понятия; этап закрепления понятия.

Основным средством, которое используется при формировании математических понятий, является математическая задача. Чтобы сформировать какое-либо понятие недостаточно одной задачи, необходима система задач, обеспечивающая всеобъемлющее усвоение учебного материала. Особенности системы задач на формирование математических понятий представлены Г.И. Саранцевым в учебном пособии «Общая методика преподавания математики» [23]. Задачи, связанные с формированием понятий, обычно называют упражнениями. Автор утверждает, что упражнения являются основным средством формирования понятий, и сопоставляет каждому этапу формирования понятия соответствующие ему упражнения (Приложение 1). Г.И. Саранцев отметил, что: «Процесс формирования понятий является динамичным процессом. В зависимости от опыта учащихся, конкретного содержания понятий внимание к этапам формирования может быть различным, некоторые же из них могут отсутствовать» [23, С. 95].

В заключении параграфа ответим на два важных вопроса: «Что означает, что понятие и его определение усвоено? Какие уровни усвоения понятий возможны? Уровни усвоения понятий можно представить в виде следующей последовательности: учащийся узнает понятие; формулирует определение понятия; понимает значение каждого слова, каждой составной части определения, отделяет существенные свойства от несущественных; может привести собственные примеры объектов, подходящих под определение понятия; может доказать, почему некоторый объект подходит под определение, а другой – нет; может использовать понятия в явных ситуациях при решении задач; может использовать понятия в неявных ситуациях, при решении нестандартных задач» [3, С. 28].

§4. Из опыта работы учителей по формированию математических понятий школьного курса математики

Процессы информатизации и компьютеризации общества проникают во все сферы деятельности человека, в том числе и в образовательную сферу. Одной из основных задач современного учителя является формирование знаний, умений и навыков с использованием эффективных средств (к ним так же относятся средства ИКТ), которые соответствуют современным требованиям образовательных стандартов нового поколения. А.В. Топор в статье «Использование информационно-коммуникационных технологий в образовательном процессе начальной школы» дает следующее определение: «ИКТ – совокупность методов, процессов и программно-технических средств, интегрированных с целью сбора, обработки, хранения, распространения, отображения и использования информации. ИКТ включают различные программно-аппаратные средства и устройства, функционирующие на базе компьютерной техники, а также современные средства и системы информационного обмена, обеспечивающие сбор, накопление, хранение, продуцирование и передачу информации» [27].

Наблюдая за работой учителей и обращая особое внимание на процесс формирования математических понятий Ю.А. Лучко [10], выделяет следующие недостатки:

1. Многие учителя опускают этап мотивации при формировании математических понятий.

2. Нередко учителя, формируя математическое понятие, начинают с его определения, не всегда знакомят учеников с логической структурой

определения, редко осуществляют работу по выявлению существенных свойств понятия, предъявляют небольшое количество чертежей и рисунков. Заранее подготовленные плакаты зачастую совпадают с учебными изображениями, не раскрывают свойства понятия, что приводит учащихся к ошибкам в логической структуре определения.

3. Учители требуют заучивать определения, что в дальнейшем, на этапе применения математического понятия, и в процессе решения задач, приводит к проблемам в использовании данного определения.

4. Слишком мало проводится работы с несущественными свойствами понятия, непродуктивно ведется работа с содержанием математического понятия. Поэтому учащиеся, большинство математических понятий, отожествляют с каким либо свойством.

5. Отсутствует отработка умений при оперировании понятиями и их определениями (например, подведение под понятие).

6. Крайне редко реализуется этап систематизации понятий [10].

Ю.А Лучко делает вывод, что работа учащихся с математическим понятием практически не проводится из-за экономии времени. Применение ИКТ могут решить значительную часть проблем при формировании математических понятий, поэтому каждый учитель должен не только владеть методикой формирования математических понятий, но и уметь применять её с использованием ИКТ в своей педагогической деятельности.

В статье [4] И.В. Воинова выделяет функции современных ИКТ, и говорит о том, что в процессе использования ИКТ происходит: «Реализация наглядности; осуществление объективного автоматизированного промежуточного контроля; автоматизированная отработка предметных умений; формирование познавательной самостоятельности учащихся» [4].

Одной из основных принципов обучения является реализация наглядности. Автор отмечает, что потребность в наглядности возрастает при формировании абстрактных математических понятий. Наглядность разумно использовать на этапе выявлении существенных свойств понятия и раскрытии его взаимосвязи с другими математическими понятиями. Поэтому нужно уметь систематизировать данные о понятии и представлять их в форме таблиц, схем, диаграмм. Таблицы можно построить в MS Word, MS Excel, важно уметь форматировать их для того чтобы повысить степень наглядности. На этапе обобщения и систематизации при формировании математических понятий используют создание схем, позволяющих распознавать изучаемые понятия и выделять их виды. Схемы можно создать с помощью группировки геометрических фигур с надписью или как объект SmartArt, причем это можно делать как в MS Word, так и в MS PowerPoint. В MS PowerPoint автор предлагает создать презентацию для объяснения новой темы [4]. Существует высокий опыт использования целого ряда учебных технологий на базе ИКТ, но PowerPoint наиболее популярен среди учителей [31].

Данной теме посвящена статья «Использование информационных технологий при формировании понятия симметрия» [22], С.В. Ракова говорит об актуальности организации процесса обучения геометрии таким образом, чтобы овладение математическими понятиями происходило с использованием ИКТ. Автор утверждает: «Применение компьютерных технологий в преподавании математики волнует сейчас многих учителей. Одной из основных проблем при изучении геометрии в школе является проблема наглядности, связанная с тем, что изображения даже простейших геометрических фигур, выполненные в тетрадях или на доске, как правило, содержат большие погрешности. Современные компьютерные технологии позволяют решить эту проблему» [22].

Так же как и Ю.А. Лучко, С.В. Ракова придерживается мнения, что, по сравнению с традиционной формой ведения урока, использование ИКТ экономит большое количество времени, которое можно использовать для дополнительного объяснения материала или решения задач. Автор отмечает, что компьютер позволяет повысить мотивацию учащихся, а именно: «Усвоение знаний, связанных с большим объёмом цифровой и иной конкретной информации путём активного диалога с персональным компьютером более эффективно и интересно для ученика, чем штудирование скучных страниц учебника. С помощью обучающих программ ученик может моделировать реальные процессы, а значит – видеть причины и следствия, понимать их смысл. Компьютер позволяет устранить одну из важнейших причин отрицательного отношения к учёбе – неуспех, обусловленный непониманием сути проблемы, значительными пробелами в знаниях и т.д. На компьютере ученик получает возможность довести решение любой проблемы до конца, опираясь на необходимую помощь» [22]. Информационно-коммуникационные технологии – это важный инструмент, который сможет помочь учащимся стать более активными на уроке [33] .

Таким образом, использование ИКТ на уроках математики является необходимостью, технология должна быть адаптирована к учебно-методическому процессу, что дает замечательные возможности в обучении [29]. С помощью ИКТ материал для изучения можно сделать более содержательным, урок наглядным и динамичным, а процесс учения более привлекательным и современным для учащихся, что повысит качество обучения и желание учиться. Тем не менее, необходимы дополнительные исследования для изучения того, как учителя могут эффективно использовать ИКТ в своей педагогической деятельности [30].

Выводы по первой главе

В первой главе получены следующие основные выводы и результаты:

1. Приведены различные трактовки понятия и описаны его основные характеристики. Итак, «Понятие – это форма мышления о целостной совокупности существенных и несущественных свойств объектов

реального мира, в частности и математических объектов» [11]. Каждое понятие может быть рассмотрено по его содержанию и объему.

2. Представлены виды определений математических понятий. Основным видом является вид определения через ближайший род и видовые отличия. Также выделены требования к определению правильного (корректного) понятия.

3. Рассмотрены основные этапы по формированию математического понятия. В качестве основных этапов выделены: 1) этап мотивации введения понятия; 2) этап введения определения; 3) этап усвоения определения понятия; 4) этап закрепления понятия. Каждого этапу формирования понятия сопоставлены соответствующие упражнения, реализующие их.

4. Рассмотрен опыт работы учителей по данной теме исследования. Сделан вывод, что использование информационно-коммуникационных технологий делает материал для изучения более содержательным, урок более наглядным и динамичным, а процесс учения более привлекательным и современным для учащихся, что повысит качество обучения и желание учиться.

ГЛАВА II. ВЗАИМОСВЯЗАННЫЕ ЗАДАЧИ КАК СРЕДСТВО ФОРМИРОВАНИЯ ПОНЯТИЙ И ОБУЧЕНИЯ РЕШЕНИЮ УРАВНЕНИЙ В КУРСЕ АЛГЕБРЫ ОСНОВНОЙ ШКОЛЫ

§5. Понятие взаимосвязанных задач в курсе алгебры основной школы

Учителя постоянно работают над тем, чтобы задачи, которые они используют в обучении, принесли максимальную пользу для обучения учеников. Учителя математики столкнулись с двумя проблемами: проблема выбора и проблема надлежащего использования задач в обучении. Педагоги используют свои знания, свой педагогический опыт, для составления систем и совокупностей задач в соответствии с определенными целями. Каждая система или совокупность задач, используемая опытными учителями математиками, имеет свою собственную цель. Учителя проводят своё обучение в соответствии с этими целями [32].

Современные педагоги-математики, такие как М.И. Зайкин, Г.И. Саранцев, Я.И. Груденов и др. утверждают, что эффективность учебной работы зависит от каких задач и в каком порядке они предлагаются ученикам, от роли активности и самостоятельности учащихся в процессе их решения. *Главное – это сами задачи*, а точнее задачные конструкции (системы, циклы, блоки, цепочки и т.п.), подготовленные учителем к уроку. М.И. Зайкин утверждает, что задачи по-настоящему заинтересовывают учащихся решением и приводят их к достижению математических истин, а так же они обеспечивают атмосферу продуктивной поисковой деятельности учащихся [1, С. 45].

В последние десятилетия в методической литературе очень много рассматривается методик конструирования различных «объединений» взаимосвязанных задач, приводятся различные термины для обозначения «объединений» взаимосвязанных задач (Табл. 1) [16].

Таблица 1

Термины для обозначения «объединений» взаимосвязанных задач

Термин	**Автор**	**Определение**
Цепочка взаимосвязанных задач	Н.В. Вахрушева	«Совокупность взаимосвязанных по фабуле, содержанию, по методам решения задач, развивающихся по сюжетной и прикладной линиям» [16].
Цикл взаимосвязанных задач	Г.В. Дорофеев	«Совокупность, содержащая задачи, различные по формулировке и сюжету, но имеющие общее дидактическое назначение, служащие достижению одной цели» [16].
Блок взаимосвязанных задач	Т.М Калинкина	Совокупность задач, которые связаны между собой, объединены одной идеей, опираясь из условия упорядочивания этих задач через аналогию, конкретизацию и обобщения, таким образом, что каждая последующая задача является аналогом предыдущей задачи, либо конкретизирует предыдущую задачу, либо обобщает её, либо использует результат предыдущей задачи.
Серия взаимосвязанных задач	Н.С. Мельник	«Система задач, включающая задачи, объединенные общей идеей решения» [16].
Семья взаимосвязанных задач	Е.А. Молчанова и др.	Совокупность математических объектов, связанных каким-либо отношением.
Система взаимосвязанных задач	Г.И. Саранцев, Ю.М. Колягин, О.Б. Епишева и др.	«Совокупность объектов, взаимодействие которых «вызывает» появление новых, интегративных качеств, не свойственных отдельно взятым образующим систему компонентам» [16].

В данной работе мы остановимся на циклическом подходе к организации задач, который всё чаще применяется в последнее время. А именно на подходе, который описал в статье «О составлении циклов взаимосвязанных задач» [8] Г.В. Дорофеев. Автор отвечал, что: «Учитель, ставящий задачу перед учащимися, рассматривает её как узко частное средство для достижения более общих целей - формирования или закрепления нового понятия, получения новых или активизации старых знаний, демонстрации определенного метода рассуждений и т.п. В связи с этим и возникает проблема создания циклов взаимосвязанных задач, различных по формулировке, по сюжету, но имеющих общее дидактическое назначение, служащих достижению одной цели. В теоретическом плане составление таких циклов не является чем-то существенно новым: именно таким циклом задач, который связан между собой методически и математически, и является всякая система упражнений, направленная на пропедевтику, формирование или закрепление того или иного понятия, утверждения или метода рассуждений» [8, С. 34]

Один из приемов варьирования задач, которому мы будем придерживаться в дальнейшей работе, рассмотрен С.В. Арюткиной [1]. Она утверждает, что каждый цикл можно представить в виде четырех блоков взаимосвязанных задач (Приложение 2).

1. Первый блок – *блок вспомогательных задач*, который: «Обеспечивает актуализацию знаний, необходимых для решения математических задач, а также формирование мотивации изучения обобщенных приемов решения их отдельных видов. А потому в этот блок могут быть включены задания, позволяющие актуализировать основные действия из состава обобщенных приемов решения математических задач» [1]. Заметим, что решить все задачи этого блока каждому ученику класса необязательно. От уровня знаний конкретного учащегося зависит выбор задач.

2. *Блок базисных задач* содержит: «Задачи, предназначенные для выделения состава (образования) обобщенного приема решения каждого вида математических задач. В этот блок могут быть включены только такие задачи, частный прием решения которых содержит все основные действия, входящие в состав обобщенного приема, охватывающие все возможные случаи получения решений. Область образования приема определяется спецификой содержания самих обобщенных приемов решения того или иного вида задач. Поэтому задания этого блока должны принадлежать одному виду и охватывать область образования приема, их количество может варьироваться в зависимости от умения учащихся обобщать полученные теоретические сведения; порядок предъявления задач учащимися подчиняется принципу «от простого к сложному»» [1, С. 59].

3. «*Тренировочные задачи,* предполагающие применение обобщенного приема к решению частных задач стандартного вида и обеспечивающие его усвоение. Включенные в этот блок задачи должны удовлетворять основным условиям усвоения приема: частные приемы их решения включают все действия из состава обобщенного приема и соответствуют основным положениям теории поэтапного формирования умственных действий» [1, С. 59].

4. «*Развивающие задачи,* ориентированные на перенос обобщенного приема, преобразование его состава при решении нестандартных математических задач. Направления преобразования приема определяются возможными качественными и количественными изменениями состава действий обобщенных приемов. При применении обобщенного приема к решению нестандартных задач могут происходить: уменьшение числа действий; увеличение числа действий; качественные изменения состава действий обобщенного приема, связанные с применением обобщенных приемов решения задач, которые, возможно, более рационально могут быть решены другим методом. В этот блок должны быть включены задачи, охватывающие все возможные направления преобразования приема. Например, это могут быть задачи с нестандартной формулировкой; провоцирующие задачи (легко решаемые без применения приема), а также более трудные задачи» [1, С. 60].

Таким образом, цикл задач, во-первых, заключает в себя цель, поставленную учителем, и, во-вторых, намечает структуру ее достижения. В данном параграфе были выявлены основные подходы к понятию взаимосвязанных задач. За основу взят циклический подход, состоящий их четырех блоков взаимосвязанных задач, которые подробно описаны.

§6. Формирование понятий линейного и квадратного уравнений с помощью взаимосвязанных задач, обучение их решению

Прежде чем ввести определение линейного уравнения, ознакомимся с основами теории уравнений. Формирование понятия уравнения включает в себя использование следующих понятий: «уравнение», «корень уравнения», «что значит решить уравнение».

В методике математике, из-за сложности определения понятия уравнения, рекомендуют не формулировать понятие «Уравнение». Достаточно того, что учащиеся понимают термин «что значит решить уравнение», определения которого отличаются только наличием или отсутствием в них термина «множество». «*Решить уравнение* – значит найти множество его корней» [12, С. 101].

Введем теперь одно из самых трудных понятий алгебры - понятие равносильности уравнений: «Уравнения называются равносильными, если множества их корней совпадают» [12, С.102]. Уравнения $x-8=2$ и $x+10=20$ равносильны, так как каждое из уравнений имеет один корень $x=10$. Иначе говоря, уравнения равносильны, если они имеют одни и те же корни или не имеют корней.

При решении уравнений стремятся данное уравнение заменить более простым уравнением, ему равносильным. Ю.Н. Макарычев в учебнике 7 класса [12] использует следующие свойства: «Из данного уравнения получается равносильное ему уравнение, если: перенести слагаемое из одной части уравнения в другую, изменив его знак; обе части уравнения умножить или разделить на одно и то же, отличное от нуля, число; в какой-либо части или в обеих частях уравнения выполнить тождественное преобразование, не меняющее области определения уравнения» [12, С. 102].

В 7 классе необходимо сформулировать понятие о множестве допустимых значений неизвестного в уравнении на более высоком уровне.

П.Б. Талочкин [25] даёт следующее определение: «Областью определения уравнения (областью допустимых значений переменной в уравнении) называется множество численных значений неизвестного, при которых левая и правая части уравнения имеют смысл» [25, С. 24]. Область допустимых значений обозначается символом ОДЗ. Определим ОДЗ для уравнения $\frac{3}{x+2} = \frac{x-2}{x} - 7$. ОДЗ: все действительные числа, кроме $x = 0$ и $x = -2$, так как при этих значениях части уравнения теряют смысл.

1. Линейные уравнения с одной переменной

На этапе мотивации введение понятия линейного уравнения с одной переменной можно осуществить с помощью мотивирующей задачи. Ю.Н. Макарычев в учебнике 7 класса приводит пример следующей задачи: «В равнобедренном треугольнике одна из сторон в 3 раза больше другой. Какова длина каждой из стороны треугольника, если известно, что его периметр равен 119 см?» [12, С.17].

Пусть x см одна из сторон треугольника, тогда вторая сторона равна $3x$ см. Поскольку треугольник равнобедренный и x см быть не может, так как в этом случае сторона треугольника оказалась бы больше суммы двух других сторон, поэтому третья сторона треугольника равна $3x$. По условию задачи, периметр треугольника равен 119 см, значит, $x + 3x + 3x = 119$. Решим полученное уравнение: $7x - 119 = 0$ – линейное уравнение с одной переменной.

Проведем логико-математический анализ определения: «Линейным уравнением с одной переменной x называют уравнение вида $ax + b = 0$, где a и b – любые числа (коэффициенты)» [17, С. 18].

Термин – «линейной уравнение с одной переменной». Род – «уравнение». Видовые отличия: 1) вид $ax + b = 0$; 2) a, b – числа; 3) x – переменная (неизвестная).

Рассмотрим виды линейного уравнения с одной переменной в виде схемы.

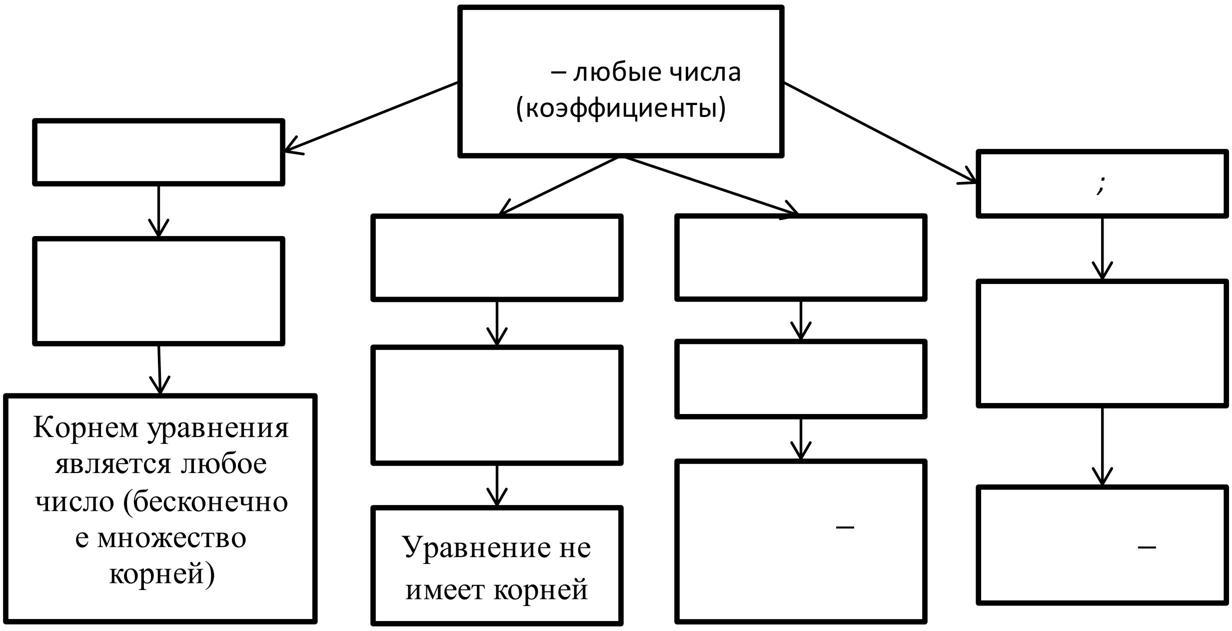

Схема 2. Виды линейного уравнения с одной переменной

В нашей задаче $a \neq 0, b \neq 0$, следовательно, уравнение имеет единственный корень. Найдем его, решив полученное уравнение: $7x - 119 = 0$; $7x = 119$; $x = 17$. $3x = 3 \cdot 17 = 51$. Значит, стороны треугольника равны 17 см, 51 см и 51 см. Ответ: 17, 51, 51.

На этапе усвоения определения понятия линейного уравнения с одной переменной можно предложить учащимся, например, следующие упражнения:

№1. Даны уравнения а) $12x = 0$; б) $0x = 12$; в) $-x = \frac{1}{3}$; г) $0x = 0$; д) $\frac{1}{7}x = 0$; е) $0x = \frac{1}{7}$. Какие из них: 1) имеют единственный корень; 2) не имеют корней; 3) имеют бесконечно много корней?

№2. Составьте какое-либо линейной уравнение, которое: а) имеет единственный корень, равный -3; б) не имеет корней; в) имеет бесконечно много корней.

На этапе закрепления понятия линейного уравнения с одной переменной приведём цикл взаимосвязанных задач, направленный на обучение решению данного вида уравнений, и опишем назначение каждого блока (Табл. 2). Задачи приведены из учебника Ю.Н. Макарычев 7 класс [12] и задачника А.Г. Мордковича 7 класс [18].

Таблица 2

Назначение каждого блока задач обучения решению линейных уравнений с одной переменной

Блоки задач	Назначение задач блока
Вспомогательные задачи	Данные задачи обеспечивают актуализацию таких понятий, как корень уравнения, равносильные уравнения, необходимых для решения линейных уравнений с одной переменной. А так же формируют мотивацию изучения обобщенных приемов решения данного вида уравнений.
Базисные задачи	Данные задачи предназначены для формирования у учащихся обобщенного приема решения линейных уравнений с одной переменной: – выполняя тождественные преобразования выражений и используя свойства уравнений, заданное уравнение с одной переменной свести к равносильному ему линейному уравнению $ax = b$; – найти x, записать ответ.
Тренировочные задачи	Данные задачи приводят к усвоению универсальных учебных действий, способствуют формированию обобщенного приема решения линейных уравнений с одной переменной, позволяют применять обобщенный прием при решении других математических задач.
Развивающие задачи	Данные задачи направлены на использование обобщенного приема при решении нестандартных задач, на преобразование обобщенного приема применительно к другим предложенным нестандартным линейным уравнениям с одной переменной.

Цикл взаимосвязанных задач, направленный на обучение решению линейных уравнений с одной переменной:

Вспомогательные задачи.

№1. Из данных уравнений выберите те, для которых число -12 является корнем: 1) $6x + 72 = 0$; 2) $2x^2 - x = 132$; 3) $x - 12\ \ x = 0$; 4) $x\ \ + x = 0$.

№2. Равносильны ли уравнения: 1) $12x - 2 = 7x + 1$ и $12x + 7x = 1 + 2$; 2) $15\ \ 6 - 0{,}2x\ \ = -\ \ 2 - x$ и $90 - 3x = -2 - x$; 3) $0{,}01x - 0{,}2 = 0$ и $x - 20 = 0$; 4) $3x - \frac{2}{x} + \frac{2}{x} = x + 2$ и $3x = x + 2$?

Базисные задачи.

№3. Решите линейное уравнение: 1) $2x - 4 = 8$; 2) $3\ \ x - 6\ \ = 7x + 10$; 3) $2x + 1\ \ \ 3x - 2\ \ - 6x\ \ x + 4\ \ = 67 - 2x$; 4) $\frac{x+2}{3} - \frac{3x-1}{4} = -2$;

5) $\frac{1+x}{6}+\frac{1-x}{4}=0{,}5x+1$; 6) $x^2-\frac{2x-1\ \ x}{2}=2$.

Тренировочные задачи.

№4. Решите относительно x уравнение, в котором буквой a обозначено не равное нулю число: 1) $\frac{ax+15}{4}=6-a$; 2) $\frac{3ax-1}{12}=\frac{a}{6}$; 3) $\frac{a(x-4)}{2}-\frac{a+1}{3}=1$.

Развивающие задачи

№5. Найдите неизвестное число, если полусумма этого числа и числа $12{,}3$ больше полуразности числа $1{,}5$ и неизвестного числа на 3.

№6. При каких значениях p корнем уравнения $p\ \ x+4\ \ -\ \ 5-p\ \ =16$ является число 2?

2. Квадратные уравнения

Первоначальные знания о некоторых видах квадратных уравнений учащиеся получили еще в 7 классе. Например, уравнение $x^2+6x+9=16$ можно решить, используя формулу сокращённого умножения (формулу квадрата суммы) $\ x+3\ \ ^2=16$, $x+3=4$ или $x+3=-4$. А сам термин «квадратное уравнение» вводится только в 8 классе.

Этап мотивации введения понятия квадратного уравнения можно осуществить посредством практической задачи (мотивирующая задача), чтобы ученикам было понятно, что оно не выдумывается математиками, а появляется как результат практических задач. Например, П.Б. Талочкин в книге «Неравенства и уравнения. Упражнения и методические указания», рекомендует составить уравнения по условию следующей задачи: «С вертолёта, находящегося на высоте 500 м, сбросили груз со скоростью 30 м/сек. На каком расстоянии от земли этот груз будет через 10 сек? (Сопротивление воздуха в расчет не принимать)» [25, С.66].

Эта задача решается по формуле $s=v_0t+\frac{gt^2}{2}$ (уравнение движения тела), где $v_0=30$ м/сек – начальная скорость, $g\approx 9{,}8$ м/сек – ускорение силы тяжести. В нашем случае формула примет вид: $s=30t+4{,}9t^2$. Расстояние груза от земли: $h=500-s=500-\ \ 30\cdot 10+4{,}9\cdot 100\ \ =$

$= -290, h < 0$. Изменим условие задачи надо найти: время, в течение которого груз упадет на землю, определяется из уравнения $s = 30t + 4{,}9t^2 = 500$ или $4{,}9t^2 + 30t - 500 = 0$. В полученном уравнении неизвестное входит во второй степени, т.е. оно является квадратным уравнением. Но ученики ещё не знают способы решения этого уравнения, поэтому мы ограничимся только тем, что мы получили квадратное уравнение. Это будет способствовать заинтересованности учащихся к решению квадратных уравнений.

«Квадратным уравнением называется уравнение вида
$ax^2 + bx + c = 0$, где x – переменная, a, b и c – некоторые числа, причем $a \neq 0$» [13, С. 174].

Проведем логико-математический анализ определения квадратного уравнения: Термин – «квадратное уравнение». Род – «уравнение». Видовые отличия: 1) левая часть является многочленом $ax^2 + bx + c$; 2) правая часть: 0; 3) a, b и c – числа, $a \neq 0$; 4) x – переменная (неизвестная).

Классификация видов квадратных уравнений представлена в Приложении 3.

На этапе усвоения определения понятия квадратного уравнения можно предложить учащимся, например, следующие упражнения:

№1. Является ли квадратным уравнение: а) $-3{,}5x^2 + 6x + 9 = 0$; б) $-x^2 + 6x = 0$; в) $-25x + 1 = 0$; г) $9x^2 - 5 = 0$; д) $8x^2 = 0$?

№2. Преобразуйте уравнение в квадратное и назовите его коэффициенты: а) $3x(x-2) + (x-1)(x+1) = -2$;
б) $(2x-1)^2 - (3x+2)(3x-2) = 0$; в) $(x-4)(x+4) + (2x+1)^2 = 4x$.

№3. Составьте квадратное уравнение, у которого: а) старший коэффициент равен 8, коэффициент при x равен 5, свободный член равен 1; б) старший коэффициент равен -12, коэффициент при x равен 3; в) старший коэффициент равен 1, свободный член равен 4; г) старший коэффициент равен 9, коэффициент при x равен -2, свободный член равен 3.

Для решения квадратного уравнения необходимо ввести следующее определение: «Корнем квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$ $(a \neq 0)$ называют всякое значение переменной x, при котором квадратный трёхчлен $ax^2 + bx + c$ обращается в 0; такое значение переменной x также называют корнем квадратного трёхчлена» [19, С. 142].

На этапе закрепления понятия квадратного уравнения представим цикл взаимосвязанных задач, направленный на обучение решению данного вида уравнений, и опишем назначение каждого блока (Табл. 3). Задачи приведены из учебника Ю.Н. Макарычев 8 класс [13] и задачника А.Г. Мордковича 8 класс [20].

Цикл взаимосвязанных задач, направленный на обучение решению квадратных уравнений:

Вспомогательные задачи.

№1. Найдите значение выражения:

1) $-3 \cdot \sqrt{0,49}$; 2) $\sqrt{25} - \sqrt{49}$; 3) $\sqrt{\frac{36}{49}} - 2$; 4) $2 \cdot \sqrt{12,25} - 0,1 \cdot \sqrt{0,25}$.

№2. Решите уравнение: 1) $x^2 = 12$; 2) $x^2 - 7x = 0$; 3) $5x^2 = 0$;
4) $(x-5)(x-3) = 0$; 5) $\frac{7+x}{1+x^2} = 0$.

Базисные задачи.

№3. Решите уравнения: 1) $-3x^2 + x + 1 = 0$; 2) $6x^2 + 19x = 2x - 12$;
3) $x(5x-3) = 3(2x - 1\frac{1}{3})$; 4) $(2x+1)(x-3) = x(4-x) - 9$;
5) $(2m+3)^2 = (m-1)(m+1)$; 6) $\frac{x}{3} - \frac{x^2}{4} + \frac{1}{6} = \frac{3x}{2} - \frac{4x^2}{3}$;
7) $\frac{5n^2}{6} - \frac{4n}{9} = n + 21\frac{1}{3}$; 8) $\frac{7k-5}{4} = \frac{4k^2-3}{2}$.

Тренировочные задачи.

№4. Решите относительно x уравнение: 1) $ax^2 - 4x + 1 = 0$;
2) $x^2 - 2(a-1)x + a^2 - 2a - 3 = 0$; 3) $(a-4)x^2 + (2a-4)x + a = 0$.

Развивающие задачи.

№5. При каких значениях q уравнение $x^2 - 2\sqrt{2}x + q + 1 = 0$ имеет различные корни?

№6. Существуют ли такие значения переменной, при которых сумма дробей $\frac{x+7}{x-2}$ и $\frac{x-1}{x+2}$ равна 1?

Таблица 3

Назначение каждого блока задач обучения решению квадратных уравнений

Блоки задач	**Назначение задач блока**
Вспомогательные задачи	«Данные задачи обеспечивают актуализацию таких умений, как нахождение значения выражений, содержащих квадратные корни, решение некоторых уравнений второй степени, которые необходимы для решения квадратных уравнений, а так же формируют мотивацию изучения обобщенных приемов решения данного вида уравнений» [5].
Базисные задачи	Данные задачи предназначены для формирования у учащихся обобщенного приема решения квадратных уравнений: – выполняя тождественные преобразования выражений и используя свойства уравнений, заданное уравнение свести к равносильному ему квадратному уравнению $ax^2 + bx + c = 0$, где $a > 0$; – найти дискриминант уравнения, найти x, записать ответ.
Тренировочные задачи	Данные задачи приводят к усвоению универсальных учебных действий, способствуют формированию обобщенного приема решения квадратных уравнений, позволяют применять обобщенный прием при решении других математических задач.
Развивающие задачи	«Данные задачи направлены на использование обобщенного приема при решении нестандартных задач, на преобразование обобщенного приема применительно к другим предложенным нестандартным квадратным уравнениям» [5].

Таким образом, рассмотрена основная теория уравнений, выявлена методические особенности формирования понятий линейного уравнения с одной переменной и квадратного уравнения, и разработаны циклы взаимосвязанных задач, которые позволят сформировать каждое из указанных понятий в процессе обучения учащихся.

§7. Формирование понятий рационального и иррационального уравнений с помощью взаимосвязанных задач, обучение их решению

1. Рациональные уравнения

В данном параграфе рассмотрены рациональные и иррациональные уравнения, но прежде напомним, что: «Алгебраическое выражение, составленное из чисел и переменных с помощью операций сложения, вычитания, умножения, деления и возведения в целую степень, называют рациональным» [19, С. 162].

На этапе мотивации введение понятия рационального уравнения приведем пример практической задачи из учебника 8 класса А.Г. Мордковича: «Лодка прошла 10 км по течению реки и 6 км против течения, затратив на весь путь 2 ч. Чему равна собственная скорость лодки, если скорость течения реки 2 км/ч?» [19, С. 22].

Пусть x км/ч – собственная скорость лодки, тогда по течению реки она плывёт со скоростью $(x+2)$ км/ч, а против течения – со скоростью $(x+2)$ км/ч. По условию на весь путь (т.е. на 10 км по течению и 6 км против течения) суммарно затрачено 2 ч. Значит, $\frac{10}{x+2}+\frac{6}{x-2}=2$ - рациональное уравнение.

Макарычев в учебнике 9 класса даёт определение рационального уравнения: «Рациональным уравнением называют уравнение, обе части которого представляют собой рациональные выражения» [14, С.73].

Рациональное уравнение с одной неизвестной может быть записано в виде $\frac{P(x)}{Q(x)}=0$, где $P\ x$ и $Q(x)$ – многочлены от одной переменной x.

В частности, если $Q(x)$ – многочлен нулевой степени, то рациональное уравнение примет вид $P\ x\ =0$ и называется целым рациональным уравнением. Например, $\frac{x-7}{5}=15$, $\frac{x^2-7}{5}=\frac{x+2}{7}$ – целые рациональные уравнения. Линейные и квадратные уравнения, которые мы рассмотрели в §6, представляют собой целые рациональные уравнения первой и второй степени соответственно.

Если же $Q(x)$ не является многочленом нулевой степени, то рациональное уравнение называется дробно-рациональным. Очевидно, что $\frac{P(x)}{Q(x)} = 0 \leftrightarrow \begin{matrix} P\ x\ = 0, \\ Q(x) \neq 0. \end{matrix}$ Примеры дробно-рациональных уравнений: $\frac{x-7}{x+5} = 2$, $\frac{x^2+9x+17}{x+5} = \frac{x+8}{x}$. «Уточним, что решение дробно-рациональных уравнений сводится к решению целых рациональных уравнений» [7, С. 11].

«Рациональными уравнениями называются уравнения вида $P\ x\ = 0$ или $\frac{P(x)}{Q(x)} = 0$, где $P\ x$ и $Q\ x$ являются многочленами, причем $Q(x) \neq 0$» [7].

Проведем логико-математический анализ определения рационального уравнения: Термин – «рациональное уравнение». Род – «уравнение». Видовые отличия: 1) вид $P\ x\ = 0$ или $\frac{P(x)}{Q(x)} = 0$; 2) $P\ x$ и $Q\ x$ – многочлены; 3) $Q(x) \neq 0$.

На этапе усвоения определения понятия рационального уравнения можно предложить учащимся, например, следующее упражнение: Какие из уравнений являются 1) целыми рациональными уравнениями? 2) дробно-рациональными уравнениями? а) $\frac{2x+3}{5} = 5x$; б) $\frac{2x+3}{5+x} = 4x$; в) $\frac{x^2+6x+8}{x+2} = 0$; г) $x^2 + 6x + 8 = 0$; д) $\frac{x+5}{4} = \frac{x-9}{6}$; е) $\frac{x+5}{4x} = \frac{x-9}{6}$.

На этапе закрепления понятия рационального уравнения приведём цикл взаимосвязанных задач, направленный на обучение решению дробно-рациональных уравнений, и опишем назначение каждого блока (Табл. 4). Задачи приведены из учебника Ю.Н. Макарычев 8 класс [13] и задачника А.Г. Мордковича 8 класс [20].

Таблица 4

Назначение каждого блока задач обучения решению дробно-рациональных уравнений

Блоки задач	Назначение задач блока
Вспомогательные задачи	«Данные задачи обеспечивают актуализацию такого понятия, как область определения уравнения, и актуализацию приема решения целых рациональных уравнений, которые необходимы для решения дробно-рациональных уравнений, а так же формируют мотивацию изучения обобщенных приемов решения данного вида уравнений» [5].
Базисные задачи	Данные задачи предназначены для формирования у учащихся обобщенного приема решения дробно-рациональных уравнений в следующем виде: – привести его к целому уравнению, умножив левую и правую части на общий знаменатель; – решить получившееся целое уравнение; – исключить из множества корней целого уравнения те корни, при которых левая или правая части уравнения не имеют смысла, т.е. обращают в нуль общий знаменатель дробей; – записать ответ.
Тренировочные задачи	Данные задачи приводят к усвоению универсальных учебных действий, способствуют формированию обобщенного приема решения дробно-рациональных уравнений, позволяют применять обобщенный прием при решении других математических задач.
Развивающие задачи	«Данные задачи направлены на использование обобщенного приема при решении нестандартных задач, на преобразование обобщенного приема применительно к другим предложенным нестандартным дробно-рациональным уравнениям» [5].

Цикл взаимосвязанных задач, направленный на обучение решению дробно-рациональных уравнений:

Вспомогательные задачи.

№1. Укажите область определения уравнения: 1) $\frac{2x-1}{x}=0$; 2) $\frac{x-13}{x-2}=0$; 3) $\frac{x-2}{x+3}=\frac{x+3}{x-2}$; 4) $\frac{x}{x-2}-\frac{4}{x+2}=\frac{8}{x^2-4}$.

№2. Решите уравнение: 1) $\frac{5x}{2}-\frac{3x}{5}=1{,}9$; 2) $\frac{x+7}{3}=\frac{2x+3}{5}$; 3) $x-\frac{x+1}{3}=\frac{2x-1}{5}$; 4) $\frac{x^2+3}{4}-\frac{x}{3}=\frac{5x-3}{6}$.

Базисные задачи.

№3. Решите уравнение: 1) $\frac{4}{x}-\frac{x+8}{2x}=\frac{5}{6}$; 2) $\frac{3}{x+2}+\frac{x}{x-2}=1$; 3) $\frac{x-2}{x+2}=\frac{x+3}{x-4}$; 4) $\frac{2}{x}+\frac{x^2+8}{x(x-4)}=\frac{6}{x-4}$; 5) $\frac{x^2+3x}{2(x-3)}+\frac{x+12}{6}=\frac{3x}{x-3}$; 6) $\frac{x^2-7x+6}{x^2+1}+\frac{(x-1)(x-6)}{1-x\quad 1+x\quad +2x^2}=0$; 7) $\frac{3x+1}{3x^2+x}+\frac{x-3}{16x^2-1}=\frac{3}{4x-1}$; 8) $\frac{x+5}{x^2-6x+8}+\frac{1}{x^2-7x+10}=\frac{1}{x-2}$.

Тренировочные задачи.

№4. Для каждого значения a решите уравнение: 1) $\frac{2x+3}{x+4}+\frac{a}{x+1}=2$; 2) $\frac{x+1}{x-1}+\frac{3x+a}{x+1}=4$; 3) $\frac{ax+4}{2x+1}-\frac{x+3}{x+1}=1$.

Развивающие задачи.

№5. Найти координаты точек пересечения графиков функций: $y=\frac{3-2x}{3x-2}$ и $y=-2x+1=3$.

№6. При каких значениях параметра a дробь $\frac{t^2-tc}{a-t}$ ни при каких допустимых значениях t не принимает значения, равного 5?

Представим *методику работы с циклом взаимосвязанных задач*, направленным на обучение решению дробно-рациональных уравнений.

Первый блок – блок *вспомогательных задач*. «Данные задачи обеспечивает актуализацию знаний, необходимых для решения дробно-рациональных уравнений, а также формируют мотивацию изучения обобщенных приемов решения данного вида уравнений» [5].

№1. Укажите область определения уравнения: 3) $\frac{x-2}{x+3}=\frac{x+3}{x-2}$.

Решение. ОДЗ: все действительные числа, кроме $x=-3$ и $x=2$, так как при этих значениях части уравнения теряют смысл.

Ответ: $(-\infty;\ -3)\cup(-3;2)\cup(2;\ +\infty)$.

Данное задание актуализирует такое понятие, как область определения уравнения, умение находить ОДЗ.

№2. Решите уравнение: 3) $x-\frac{x+1}{3}=\frac{2x-1}{5}$.

Решение. Умножим обе части уравнения на общий знаменатель дробей $\frac{x+1}{3}$ и $\frac{2x-1}{5}$ – число 15. Получим: $15x-5x-5=6x-3$; $4x=2; x=\frac{1}{2}$.

Ответ: $\frac{1}{2}$.

Вспомогательная задача №2 актуализирует прием решения целых рациональных уравнений.

«*Базисные задачи* предназначены для формирования у учащихся обобщенного приема решения дробно-рациональных уравнений» [5].

№3. Решите уравнение: $\frac{2}{x}+\frac{x^2+8}{x^2-4x}=\frac{6}{x-4}$.

Решение.

1. Разложим знаменатель второй дроби на множители, получим уравнение $\frac{2}{x}+\frac{x^2+8}{x(x-4)}=\frac{6}{x-4}$; Приведем это уравнение к целому, для чего обе его части умножим на общий знаменатель дроби: $2\ x-4\ +x^2+8=6x$.

2. Выполнив тождественные преобразования и применив свойства уравнений, приведем целое уравнение к равносильному ему квадратному уравнению $x^2-4x=0$. Его корнями являются числа 0 и 4.

3. Числа 0 и 4 обращает в нуль общий знаменатель, поэтому они не являются корнями уравнения.

4. Ответ: корней нет.

Тренировочные задачи приводят к усвоению универсальных учебных действий, способствуют формированию обобщенного приема решения дробно-рациональных уравнений, позволяют применять обобщенный прием при решении других математических задач.

№4. Для каждого значения a решите уравнение: $\frac{2x+3}{x+4}+\frac{a}{x+1}=2$.

1. Приведем данное уравнение к целому, для чего обе его части умножим на общий знаменатель дроби $(x+4)(x+1)$:

$2x+3\quad x+1\ +a\ x+4\ =2(x+4)(x+1)$;.

2. Выполнив тождественные преобразования и применив свойства уравнений, приведем целое уравнение к равносильному ему линейному уравнению: $2x^2+5x+3+a\ x+4\ =(2x+8)(x+1)$;

$2x^2+5x+3+a\ x+4\ =2x^2+10x+8$; $-5x-5+ax+4a=0$;

$x\ a-5\ =5-4a$. Найдем x: $x=\frac{5-4a}{a-5}$.

3. $x \neq -4; x \neq -1$. Числа -4 и -1 обращают в нуль общий знаменатель, значит $\frac{5-4a}{a-5} \neq -4; 0 \neq 15$; $\frac{5-4a}{a-5} \neq -1; a \neq 0$. Также $a \neq 5$.

4. Ответ: если $a \neq 5; a \neq 0$, то $x = \frac{5-4a}{a-5}$; если $a = 5; a = 0$, то нет решений.

«*Развивающие задачи* направлены на использование обобщенного приема при решении нестандартных задач, на преобразование обобщенного приема применительно к другим предложенным нестандартным дробно-рациональным уравнениям» [5].

№5. Найти координаты точек пересечения графиков функций: $y = \frac{3-2x}{3x-2}$ и $y = -2x + 1 = 3$.

Решение.

1. $\frac{3-2x}{3x-2} = -2x + 3$. Приведем данное уравнение к целому, для чего обе его части умножим на общий знаменатель дроби $(3x-2)$:

$3 - 2x - \ \ -2x + 3 \ \ \ 3x - 2 \ \ = 0$.

2. Выполнив тождественные преобразования и применив свойства уравнений, приведем целое уравнение к равносильному ему квадратному уравнению: $2x^2 - 5x + 3 = 0$. Его корнями являются числа $1{,}5$ и 1.

3. При $x_{\mathbf{1}} = 1{,}5$ и $x_2 = 1$ значения выражения $(3x-2)$ не равно нулю. Поэтому $1{,}5$ и 1 являются корнями уравнения.

4. $y_{\mathbf{1}} = -2 \cdot 1{,}5 + 3 = 0$; $y_2 = -2 \cdot 1 + 3 = 1$.

5. Ответ: $\ 1{,}5; 0 \ ; \ 1; 1 \ $.

№6. При каких значениях параметра a дробь $\frac{t^2-tc}{a-t}$ ни при каких допустимых значениях t не принимает значения, равного 5?

Решение.

1. $\frac{t^2-ta}{a-t} = 5$. Приведем данное уравнение к целому, для чего обе его части умножим на общий знаменатель дроби $(a-t)$: $t^2 - ta = 5(a-t)$.

2. Выполнив тождественные преобразования и применив свойства уравнений, приведем целое уравнение к равносильному ему линейному уравнению: $t(t-a)=5(a-t); -t=5; t=5$.

3. $t-a\neq 0$, следовательно, $t\neq a$.

4. Ответ: $a\neq -5$.

2. Иррациональные уравнения

На этапе мотивации введение понятия иррационального уравнения рассмотрим задачу, приводящую к иррациональному уравнению. А.Н. Бекаревич в книге «Уравнения в школьном курсе математики» начинает изучение иррациональных уравнений со следующей задачи: «Гипотенуза прямоугольного треугольника на 2 м больше катета, периметр его равен 12 м. Определить сторону треугольника» [2, С. 12].

Длину одного из катетов можно принять за x метров, тогда легко получим уравнение $2\sqrt{x+1}+x+(x+2)=12$. Учащиеся могут это уравнение привести лишь к виду $\sqrt{x+1}=5-x$, но способ решения им не известен, поэтому ограничимся только тем, что получили иррациональное уравнение.

Проведем логико-математический анализ определения: «Если в уравнении переменная содержится под знаком корня, то уравнение называют иррациональным» [19, С. 220].

Термин – «иррациональное уравнение». Род – «уравнение». Видовые отличия: переменная (неизвестная) содержится под знаком корня.

На этапе усвоения определения понятия иррационального уравнения можно предложить учащимся, например, следующее упражнение: Какие из уравнений являются иррациональными? а) $\sqrt[5]{x^2-8}+\sqrt[3]{x+24}=4$;
б) $\sqrt{x-2}=5$; в) $2x+\sqrt{x}-3=0$; г) $x^2-2\sqrt{5}x+3=0$; д) $\frac{1}{x^{\frac{1}{2}}-3}+\frac{1}{x^{\frac{1}{2}}+3}=\frac{5}{8}$.

Сначала рассмотрим решение уравнений вида $\sqrt[n]{f(x)} = a$, где $f(x)$ – рациональное выражение и a – некоторое число.

Уравнение $\sqrt[n]{f(x)} = a$ при четном n и $a < 0$ не имеет корней, при $a \geq 0$ оно равносильно уравнению $f(x) = a^n$. Это следует из определения арифметического корня. Уравнение $\sqrt[n]{f(x)} = a$ при нечетном n и любом a равносильно уравнению $f(x) = a^n$. Это вытекает из определения корня нечетной степени.

«Рассмотрим способы решения уравнений вида $\sqrt[n]{f(x)} = g(x)$, где $f(x)$ и $g(x)$ – рациональные уравнения и n – четное число, равносильно системе $\begin{cases} f(x) = g^n(x), \\ g(x) \geq 0. \end{cases}$ Уравнение $\sqrt[n]{f(x)} = g(x)$, где $f(x)$ и $g(x)$ – рациональные уравнения и n – нечетное число, равносильно уравнению $f(x) = g^n(x)$» [14].

На этапе закрепления понятия иррационального уравнения приведём цикл взаимосвязанных задач, направленный на обучение решению данного вида уравнений, и опишем назначение каждого блока (Табл. 5). Задачи приведены из учебника Ю.Н. Макарычева 9 класс [14] и задачника А.Г. Мордковича 8 класс [20].

Цикл взаимосвязанных задач, направленный на обучение решению иррациональных уравнений:

Вспомогательные задачи.

№1. Разложите на множители: 1) $x^2 + 10xy + 25y^2$; 2) $36x^2 - 0{,}81$; 3) $9x^2 - 6xy + y^2$; 4) $x - y$.

№2. Укажите область определения уравнения: 1) $y = \sqrt{x - 6}$; 2) $y = \sqrt{\frac{7}{x}}$; 3) $y = \frac{1}{\sqrt{2+x}}$; 4) $y = \sqrt{x}$.

Базисные задачи.

№3. Решите уравнение: 1) $\sqrt{x+2} = 3$; 2) $\sqrt{4x+3} = \sqrt{4x^2 + 5x - 2}$; 3) $\sqrt{7 - 3x} = x + 7$; 4) $\sqrt{4 - 2x} + \sqrt{2 + x} = \sqrt{2x}$; 5) $\sqrt{4 + x\sqrt{x^2 + 40}} = x + 2$;

6) $x^2-25\quad\sqrt{x^2+3x-28}=0$;7) $x-2\quad\sqrt{x+2}=x-2$; 8) $\frac{x+3}{x-1}=\sqrt{3x+1}$;

9) $\sqrt{x-2}\;\sqrt{x+1}=\sqrt{x^2-x-2}$.

Тренировочные задачи.

№4. Для каждого значения b решите уравнение:

$\sqrt{x^2+b}=\sqrt{3x+b-2}$.

Развивающие задачи.

№5. Докажите, что уравнение $\sqrt[4]{2x-3}-5x=\sqrt[4]{27-18x}-7{,}5$ имеет единственный корень, и найдите его.

№6. При каких значениях параметра a уравнение

$x-7\quad\sqrt{x+a}+\sqrt{3a-x}\;=0$ имеет хотя бы один корень?

Таблица 5

Назначение каждого блока задач обучения решению иррациональных уравнений

Блоки задач	**Назначение задач блока**
Вспомогательные задачи	«Данные задачи обеспечивают актуализацию такого умения, как разложение на множители, и актуализацию такого понятия, как область определения уравнения, которые необходимы для решения иррациональных уравнений, а так же формируют мотивацию изучения обобщенных приемов решения данного вида уравнений» [5].
Базисные задачи	Данные задачи предназначены для формирования у учащихся обобщенного приема решения иррациональных уравнений в следующей виде: - возвести обе части уравнения в квадрат; - решить полученное рациональное уравнение; - сделать проверку.
Тренировочные задачи	Данные задачи приводят к усвоению универсальных учебных действий, способствуют формированию обобщенного приема решения иррациональных уравнений, позволяют применять обобщенный прием при решении других математических задач.
Развивающие задачи	«Данные задачи направлены на использование обобщенного приема при решении нестандартных задач, на преобразование обобщенного приема применительно к другим предложенным нестандартным иррациональным уравнениям» [5].

Таким образом, выявлены методические особенности формирования понятий рационального и иррационального уравнений, и разработаны циклы взаимосвязанных задач, которые позволят сформировать каждое из указанных понятий в процессе обучения учащихся.

§8. Формирование понятия уравнения с модулем с помощью взаимосвязанных задач, обучение его решению

В данном параграфе рассмотрены уравнения с модулем, т.е. уравнения, содержащие переменную под знаком модуль. Напомним определение модуля, которое дает учащимся более четкое представление о том, что им надо делать в каждом конкретном случае: сменить ли знак у числа или оставить его без изменения: «Модулем неотрицательного действительного числа x называют само это число: $x = x$; модулем отрицательного действительного числа x называют противоположное число: $x = x$» [19]. Эту формулировку можно записать следующим образом: $x = \begin{matrix} x, x \geq 0, \\ -x, x < 0. \end{matrix}$

Проведем логико-математический анализ определения: «Уравнение с модулем – это уравнение, содержащее переменную под знаком модуля» [19].

Термин – «уравнение с модулем». Род – «уравнение». Видовые отличия: переменная (неизвестная) содержится под знаком модуля.

На этапе усвоения определения понятия уравнения с модулем можно предложить учащимся, например, следующее упражнение: Какие из уравнений $x = 1$, $3x - 2 = 6$, $4 + -5x = 0$, $x^2 - 6x + 10 = x + 10$, $7x^2 - 5x = 2$, $x + 3 - x - 1 = 0$ являются уравнениями с модулем?

Рассмотрим приемы решения уравнений с модулями. Простейшим из таких уравнений является уравнения вида $f(x) = b$, где b – некоторое число. Если $b < 0$, то уравнение $f(x) = b$ не имеет корней. Если $b = 0$, то уравнение $f(x) = b$ равносильно уравнению $f\ x = 0$. Если $b > 0$, то уравнение $f(x) = b$ равносильно совокупности $\begin{matrix} f\ x = b, \\ f\ x = -b, \end{matrix}$ и множеством его корней является объединение множеств корней уравнений, входящих в эту совокупность [14, С. 98].

Остановимся теперь на решении уравнений вида $f(x) = g(x)$. Модули двух чисел равны, если эти числа либо равны, либо являются противоположными. Поэтому уравнение $f(x) = g(x)$ равносильно совокупность $\begin{matrix} f\ x\ = g(x), \\ f\ x\ = -g\ x\ . \end{matrix}$

«Более сложным является случай, когда уравнение имеет вид $f(x) \ = g(x)$. Из определения модуля следует, что корни уравнения должны удовлетворять условию $g(x) \geq 0$. При соблюдении этого условия искомые корни уравнения должны также удовлетворять совокупности $f\ x\ = g(x)$ или $f\ x\ = -g(x)$. Значит, уравнение $f(x) \ = g(x)$ равносильно совокупности двух систем: $\begin{matrix} f\ x\ = g\ x\ , \\ g(x) \geq 0 \end{matrix}$ или $\begin{matrix} f\ x\ = -g\ x\ , \\ g(x) \geq 0. \end{matrix}$ Заметим, что при этом совокупность двух систем можно заменить системой $\begin{matrix} g(x) \geq 0, \\ f\ x\ = g\ x\ , \\ f\ x\ = -g\ x \end{matrix}$» [14, С. 99].

На этапе закрепления понятия уравнения с модулем приведём цикл взаимосвязанных задач, направленный на обучение решению данного вида уравнений, и опишем назначение каждого блока (Табл. 5). Задачи приведены из учебника Ю.Н. Макарычева 9 класс [14] и задачника А.Г. Мордковича 8 класс [20].

Цикл взаимосвязанных задач, направленный на обучение решению уравнений с модулем:

Вспомогательные задачи.

№1. Вычислите: 1) 56; 2) -47; 3) $0{,}999 - 1{,}01$; 4) $\overline{2} - 1$; 5) $\pi - 3{,}14$; 6) $\overline{8} - 4$.

№2. Упростите выражение: 1) $\overline{1 - \ \overline{3}\ ^2}$; 2) $\overline{3 - \ \overline{6}\ ^2}$; 3) $\frac{\overline{x^2-4x+4}}{x-2}$; 4) $\frac{x+3}{\overline{x^2+6x+9}}$; 5) $2 + \ \overline{5} - \ \overline{\ \overline{5} - 3\ ^2}$; 6) $\overline{5 - \ \overline{30}\ ^2} + \overline{6 - \ \overline{30}\ ^2}$.

Базисные задачи.

№3. Решите уравнение: 1) $2x - 1\ = 5$; 2) $x - \ \overline{2}\ = 1 - \ \overline{2}$; 3) $\frac{2x+1}{x-1}\ = 3$; 4) $5 - 2x\ = x + 1$; 5) $x^2 + 5\ = 6x$; 6) $2 - 3x\ = \ 2x + 3$;

7) $x^2 - 6x + 10 \ = \ x + 10$; 8) $x - 3 \ + 3 \ x \ = 17$;

9) $x + 3 \ - \ x - 1 \ = x + 2$; 10) $7 - \ 3x - 1 \ \ = 2$.

Тренировочные задачи.

№4. Решите уравнение для каждого значения параметра p:

1) $x \ = p$; 2) $x + 3 \ = p + 1$; 3) $x - 2 \ = -p$; 4) $1 - x \ = p - 1$.

Развивающие задачи.

№5. Преобразуйте данную функцию, чтобы в записи не использовался знак модуля: 1) $y = \ x - 7$; 2) $y = \ 2x + 4 \ + 3x$; 3) $y = \ x - 1 \ + \ x - 2$.

Таблица 5

Назначение каждого блока задач обучения решению уравнений с модулем

Блоки задач	**Назначение задач блока**
Вспомогательные задачи	Данные задачи обеспечивают актуализацию понятия «модуля действительного числа», и актуализацию таких умений, как раскрытие модуля, преобразование выражений, содержащих модуль, которые необходимы для решения уравнений с модулем, а так же формируют мотивацию изучения обобщенных приемов решения данного вида уравнений.
Базисные задачи	«Данные задачи предназначены для формирования у учащихся обобщенного приема решения уравнений с модулем в следующей виде: - используя определение и свойства модуля числа, освободиться от знака модуля, заменяя данное уравнение равносильным ему уравнением, системой или совокупностью уравнений; - решить полученное уравнение, систему или совокупность уравнений; - записать ответ» [21].
Тренировочные задачи	Данные задачи приводят к усвоению универсальных учебных действий, способствуют формированию обобщенного приема решения уравнений с модулем, позволяют применять обобщенный прием при решении других математических задач.
Развивающие задачи	«Данные задачи направлены на использование обобщенного приема при решении нестандартных задач, на преобразование обобщенного приема применительно к другим предложенным нестандартным уравнениям с модулем» [21].

Таким образом, выявлены методические особенности формирования понятия уравнения с модулем, и разработан цикл взаимосвязанных задач, который позволит сформировать указанное понятие в процессе обучения учащихся.

§9. Формирование понятия уравнения с параметром с помощью взаимосвязанных задач, обучение его решению

В данном параграфе рассмотрены уравнения с параметром.

На этапе мотивации введение понятия уравнения с параметром приведем пример практической задачи: «Два подъемных крана, работая одновременно, разгружали баржу за t часов. За какое время каждый из кранов может разгрузить баржу, если первый из них тратит на это на a часов меньше второго?» [15, С. 169].

Исходя из физического смысла задачи, имеем, что допустимые значения параметром задаются неравенствами $a > 0, t > 0$. Если первый кран может выполнить работу за x часов, то второй – за $(x + a)$ часов. Составляя уравнение, получим: $\frac{1}{x} + \frac{1}{x+a} = \frac{1}{t}$. Так как знаменатели дробей положительны, то получим уравнение $x^2 - \ 2t - a\ x - at = 0$. Данное уравнение – уравнение с параметром, а именно квадратное уравнение относительно переменной x с параметром a.

«Если дано уравнение $f\ x, a\ = 0$, которое надо решать относительно переменной x, и в котором буквой a обозначено произвольное действительной число, то говорят, что задано уравнение с параметром» [19, С. 321]. Параметр в уравнении может быть обозначен любой буквой.

Проведем логико-математический анализ определения уравнения с параметром: Термин – «уравнение с параметром». Род – «уравнение». Видовые отличия: 1) вид $f\ x, a\ = 0$; 2) a – произвольное действительное число; 3) решается относительно переменной x.

На этапе усвоения определения понятия уравнения с параметром можно предложить учащимся, например, следующие упражнения:

№1. Даны уравнения, квадратные относительно переменной x. Укажите уравнения, содержащие и не содержащие параметры.

1) $2ax^2 - 3x + 1 = 0$; 2) $6x^2 + 19x = 2x - 12$; 3) $x^2 - \frac{7x}{a} + 3 = 0$;

4) $3x^2-6x+b=0$; 5) $(2x+1)(x-3)=x(4-x)-9$;

6) $x^2-2\sqrt{2}x+q+1=0$; 7) $x^2-(a+4)x+1=0$.

«*Решить уравнение с параметром* – это значит установить соответствие, позволяющее для любого значения параметра найти соответствующее множество корней» [14, С. 110].

На этапе закрепления понятия уравнения с параметром приведём цикл взаимосвязанных задач, направленный на обучение решению квадратных уравнений с параметром, и опишем назначение каждого блока (Табл. 6). Циклы взаимосвязанных задач, направленные на обучение решению линейных уравнений с параметром и дробно-рациональных уравнений с параметром представлены в Приложении 4. Задачи приведены из учебника Ю.Н. Макарычева 9 класс [14] и задачника А.Г. Мордковича 8 класс [20].

Цикл взаимосвязанных задач, направленный на обучение решению квадратных уравнений с параметром:

Вспомогательные задачи.

№1. При каких значениях переменных a уравнение не определено:

1) $5ax^2-3ax+1=0$; 2) $x^2-\frac{6x}{a}+1=0$;

3) $x^2\sqrt{a^2-2a-3}+x\sqrt{a-3}+5a=0$.

№2. Решите уравнение: 1) $2x^2-7x+5=0$; 2) $9x^2-12x+4=0$; 3) $-3x^2+2x+5=0$.

Базисные задачи.

№3. Решите уравнение с параметром a: 1) $ax^2+4x-2=0$; 2) $x^2-ax+36=0$; 3) $3x^2-6x+a=0$.

Тренировочные задачи.

№4. Решите уравнение относительно x: 1) $ax^2+(1-a)x-1=0$; 2) $x^2-2(a+1)x+4a=0$; 3) $ax^2-(a+5)x+2=0$.

Развивающие задачи.

№5. При каких значениях параметра b уравнение

$2x^2 - \ 2b - 5 \ x + b - 3 = 0$ имеет два корня, принадлежащих промежутку $(-1;1)$?

№6. Для каждого значения параметра a найдите число различных корней уравнения $3x - 1 \quad ax^2 + 3x - 2 \ = 0$.

Таблица 6

Назначение каждого блока задач обучения решению квадратных уравнений с параметром

Блоки задач	Назначение задач блока
Вспомогательные задачи	Данные задачи обеспечивают актуализацию таких умений, как нахождение ОДЗ; решение квадратных уравнений, которые необходимы для решения квадратных уравнений с параметром, а так же формируют мотивацию изучения обобщенных приемов решения данного вида уравнений.
Базисные задачи	«Данные задачи предназначены для формирования у учащихся обобщенного приема решения квадратных уравнений с параметром: – найти промежутки допустимых значений параметра, на которых первый коэффициент обращается в нуль, решить получающиеся линейные уравнения на каждом из них; – найти допустимые значения параметра, для которых значение дискриминанта равно нулю, и решить квадратные уравнения для каждого из найденных значений параметра; – найти допустимые значения параметра, для которых дискриминант принимает положительные значения, решить уравнение; – выписать допустимые значения параметра, для которых уравнение не имеет решений; – записать ответ, перечислив, на каждом из рассмотренных промежутков значений параметра, корни уравнения» [21].
Тренировочные задачи	Данные задачи приводят к усвоению универсальных учебных действий, способствуют формированию обобщенного приема решения квадратных уравнений с параметром, позволяют применять обобщенный прием при решении других математических задач.
Развивающие задачи	«Данные задачи направлены на использование обобщенного приема при решении нестандартных задач, на преобразование обобщенного приема применительно к другим предложенным нестандартным квадратным уравнениям с параметром» [21].

Представим *методику работы с циклом взаимосвязанных задач*, направленным на обучение решению квадратных уравнений с параметром.

Первый блок – блок *вспомогательных задач*. «Данные задачи обеспечивают актуализацию знаний, необходимых для решения квадратных уравнений с параметром, а также формируют мотивацию изучения обобщенных приемов решения данного вида уравнений» [21].

№1. При каких значениях переменных a уравнение не определено $x^2 - \frac{6x}{a} + 1 = 0$.

Ответ: уравнение имеет смысл для всех значений параметра, отличных от нуля; при $a = 0$ уравнение не определено.

Данное задание актуализирует такое умение, как нахождение ОДЗ. Учащиеся находят значения параметра, при которых уравнение не определено. Вспомогательная задача №2 актуализирует прием решения квадратных уравнений.

«*Базисные задачи* предназначены для формирования у учащихся обобщенного приема решения квадратных уравнений с параметром» [21].

№3. Решить уравнение с параметром a: 1) $ax^2 + 4x - 2 = 0$.

Решение.

1. Данное уравнение – квадратное относительно переменной x с параметром a. Допустимыми являются любые действительные значения параметра. Старший коэффициент – параметрический, поэтому рассмотрим случай: если $a = 0$, то возникающее уравнение будет линейным: $4x - 2 = 0$, решим его: $4x = 2; x = \frac{1}{2}$.

2. $a \neq 0$. В этом случае имеем квадратное уравнение, найдем его дискриминант: $D = 16 + 8a$. Если $D = 0; 16 + 8a = 0; 8a = -16; a = -2$, то уравнение имеет два равных корня: $x = \frac{-4}{2a} = 1$.

3. Если $D > 0; 16 + 8a > 0; 8a > -16; a > -2$ и $a \neq 0$, то уравнение имеет два различных корня $x_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{16+8a}}{2a} = \frac{-2 \pm \sqrt{4+2a}}{a}$.

4. Если $D < 0; 16 + 8a < 0; 8a < -16; a < -2$, то нет корней.

5. Ответ: Если $a = 0$, то $x = \frac{1}{2}$; при $a = -2$, $x = 1$; если

$a \in\ -2;0\ \cup\ 0;+\infty$, то $x_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4+2a}}{a}$; при $a < -2$, корней нет.

Тренировочные задачи приводят к усвоению универсальных учебных действий, способствуют формированию обобщенного приема решения квадратных уравнений с параметром, позволяют применять обобщенный прием при решении других математических задач.

№4. Решите уравнение относительно x: 1) $ax^2 + (1-a)x - 1 = 0$.

Решение.

1. Данное уравнение – квадратное относительно переменной x с параметром a. Допустимыми являются любые действительные значения параметра. Старший коэффициент – параметрический, поэтому рассмотрим случай: если $a = 0$, то возникающее уравнение будет линейным: $x - 1 = 0$, решим его: $x = 1$.

2. $a \neq 0$. В этом случае имеем квадратное уравнение, для того чтобы уравнение могло иметь решения, необходимо и достаточно, чтобы дискриминант данного уравнения принимал неотрицательные значения. Вычислим дискриминант: $D = (1-a)^2 + 4a = (a+1)^2$. Так как дискриминант неотрицателен при всех значениях параметра, то уравнение имеет решение также при всех значениях параметра.

3. Если $D = 0$; $(a+1)^2 = 0$; $a = -1$, то уравнение имеет два равных корня: $x = \frac{-(1-a)}{2a} = 1$.

4. $D > 0$, $x = \frac{-(1-a) \pm \sqrt{(a+1)^2}}{2a} = \frac{a-1 \pm (a+1)}{2a}$; $x_1 = \frac{a-1+(a+1)}{2a} = \frac{2a}{2a} = 1$; $x_2 = \frac{a-1-(a+1)}{2a} = \frac{-2}{2a} = -\frac{1}{a}$.

5. Ответ: если $a = 0$ или $a = -1$, то $x = 1$; если $a \neq 0, -1$, то $x_1 = 1, x_2 = -\frac{1}{a}$.

«*Развивающие задачи* направлены на использование обобщенного приема при решении нестандартных задач, на преобразование обобщенного приема применительно к другим предложенным нестандартным квадратным уравнениям с параметром» [21].

№5. При каких значениях параметра b уравнение

$2x^2 - (2b-5)x + b - 3 = 0$ имеет два корня, принадлежащих промежутку $(-1; 1)$?

Решение.

1. Данное уравнение – квадратное относительно переменной x с параметром a. Допустимыми являются любые действительные значения параметра. Старший коэффициент не является параметрическим. Имеем квадратное уравнение, найдем дискриминант:

$D = (2b-5)^2 - 8\ \ b-3\ \ = (2b-7)^2$; $(2b-7)^2 > 0$.

2. $x_1 = \frac{2b-5+2b-7}{4} = \frac{4b-12}{4} = b-3$; $x_2 = \frac{2b-5-2b+7}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$.

3. По условию: $-1 < x_1 < 1$ и $-1 < x_2 < 1$, следовательно, имеем систему: $\begin{matrix} (2b-7)^2 > 0, \\ -1 < b-3 < 1. \end{matrix}$ $\begin{matrix} b > 3{,}5 \text{ или } b < 3{,}5, \\ 2 < b < 4. \end{matrix}$

4. Ответ: $b \in\ \ 2; 3{,}5\ \ \cup\ \ 3{,}5; 4\ \ $.

№6. Для каждого значения параметра a найдите число различных корней уравнения $\ 3x-1\ \ \ ax^2+3x-2\ \ = 0$.

Решение.

1. $\ 3x-1\ \ = 0; x = \frac{1}{3}$, значит, $a \cdot\ \ \frac{1}{3}\ \ ^2 + 3 \cdot \frac{1}{3} - 2 = 0$; $\frac{1}{9}a = 1$;

$a = 9$, следовательно, $9x^2 + 3x - 2 = 0$; $D = 9 - 4 \cdot 9 \cdot\ \ -2\ \ = 81$.

$x_1 = \frac{-3-9}{18} = -\frac{2}{3}$; $x_2 = \frac{-3+9}{18} = \frac{1}{3}$.

1. $\ ax^2 + 3x - 2\ \ = 0$. Данное уравнение – квадратное относительно переменной x с параметром a. Допустимыми являются любые действительные значения параметра. Старший коэффициент – параметрический, поэтому рассмотрим случай: если $a = 0$, то возникающее уравнение будет линейным: $3x - 2 = 0$, **решим его**: $x = \frac{2}{3}$.

2. $a \neq 0$. В этом случае имеем квадратное уравнение, найдем его дискриминант: $D = 9 + 8a$. Если $D = 0$; $9 + 8a = 0$; $a = -\frac{9}{8}$, то $x = \frac{-3}{2a} = \frac{4}{3}$.

3. $D > 0$, $9 + 8a > 0; a > -\frac{9}{8}$, $a \neq 0$, $a \neq 9$, например, $a = 2$, то $2x^2 + 3x - 2 = 0$, $D = 9 + 16 = 25$; $x_1 = \frac{-3-5}{4} = -2$; $x_2 = \frac{1}{2}$.

4. $D < 0$, $a < -\frac{9}{8}$; например, $a = -2$, то $-2x^2 + 3x - 2 = 0$,

$D = 9 - 4 \cdot \ -2 \ \cdot \ -2 \ = 9 - 16 < 0$, корней нет.

5. Ответ: при $a < -\frac{9}{8}$ один корень; при $a = 0; -\frac{9}{8}; 9$ – два корня; при $a > -\frac{9}{8}$, $a \neq 0, a \neq 9$, три корня.

Таким образом, выявлены методические особенности формирования понятия уравнения с параметром, и разработаны циклы взаимосвязанных задач, которые позволят сформировать указанное понятие в процессе обучения учащихся.

Выводы по второй главе

Во второй главе определены основные подходы к понятию «взаимосвязанные задачи». За основу взят циклический подход, описанный Г.В. Дорофеевым. Он утверждает, что: «Цикл взаимосвязанных задач – это совокупность, которая содержит задачи, различные по формулировке и сюжету, но имеющие общее дидактическое назначение, служащие достижению одной цели» [8]. Но автор не приводит способы варьирования самих задач, поэтому мы рассмотрели приём варьирования задач, выдвинутый С.В. Арюткиной, в котором каждый цикл можно представить в виде четырех блоков взаимосвязанных задач: вспомогательные задачи, базисные задачи, тренировочные задачи, развивающие задачи.

Во второй главе так же выявлены методические особенности формирования понятий линейного, квадратного, рационального и иррационального уравнений, и уравнений с модулем и параметром, и разработаны циклы взаимосвязанных задач, которые позволят сформировать каждое из указанных понятий в процессе обучения учащихся. Данные циклы взаимосвязанных задач представлены в виде таблиц в Приложение 4.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В бакалаврской работе:

1. Приведены психолого-педагогические основы формирования понятия и описаны его основные характеристики. Итак, «Понятие – это форма мышления о целостной совокупности существенных и несущественных свойств объектов реального мира, в частности и математических объектов» [11]. Каждое понятие может быть рассмотрено по его содержанию и объему.

2. Представлены виды определений математических понятий. Основным из представленных видов является вид определения через ближайший род и видовые отличия. Выделены требования к определению правильного (корректного) понятия.

3. Рассмотрены основные этапы по формированию математического понятия. В качестве основных этапов выделены: 1) этап мотивации введения понятия; 2) этап введения определения понятия; 3) этап усвоения определения понятия; 4) этап закрепления понятия. Каждого этапу формирования понятия сопоставлены соответствующие упражнения, реализующие их.

4. Рассмотрен опыт работы учителей по данной теме. Сделан вывод, что использование информационно-коммуникационных технологий делает материал для изучения более содержательным, урок более наглядным и динамичным, а процесс учения более привлекательным и современным для учащихся.

5. Определены основные подходы к понятию взаимосвязанных задач. За основу взят циклический подход, описанный Г.В. Дорофеевым, который утверждает, что: «Цикл взаимосвязанных задач – это совокупность, которая содержит задачи, различные по формулировке и сюжету, но

имеющие общее дидактическое назначение, служащие достижению одной цели» [8].

6. Рассмотрен приём варьирования задач, выдвинутый С.В. Арюткиной, в котором каждый цикл можно представить в виде четырех блоков взаимосвязанных задач: «*Вспомогательные задачи*, обеспечивающие актуализацию знаний, необходимых для решения математических задач, а также формирование мотивации изучения обобщенных приемов решения их отдельных видов; *базисные задачи*, предназначенные для выделения состава (образования) обобщенного приема решения каждого вида математических задач; *тренировочные задачи*, предполагающие применение обобщенного приема к решению частных задач стандартного вида и обеспечивающие его усвоение; *развивающие задачи*, ориентированные на перенос обобщенного приема, преобразование его состава при решении нестандартных математических задач» [1].

7. Рассмотрена основная теория уравнений, т.е. описаны такие понятия, как «уравнение», «корень уравнения», «что значит решить уравнение», «равносильные уравнения», «область определения уравнения». Выявлены методические особенности формирования понятий линейного, квадратного, рационального и иррационального уравнений, и уравнений с модулем и параметром, и разработаны циклы взаимосвязанных задач, которые позволят сформировать каждое из указанных понятий в процессе обучения учащихся.

Всё это дает основание считать, что задачи, поставленные в исследовании, полностью решены.

СПИСОК ИСПОЛЬЗУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Арюткина, С.В. Специфика заданий и задачных конструкций информационного контента образовательного web-квеста по математике [Текст]: монография / С.В. Арюткина, С.В. Напалков. – Арзамас: Арзамасский фил. ННГУ, 2015. - 109 с. : ил.

2. Бекаревич, А.Н. Уравнения в школьном курсе математики [Текст]: методическое пособие / А.Н. Бекаревич. – Минск: Народная асвета, 1968. – 152 с.

3. Виноградова, Л.В. Методика преподавания математики в средней школе [Текст]: учеб. пособие / Л.В. Виноградова. – Ростов н/Д.: Феникс, 2005. – 252 с.: ил.

4. Воинова, И.В. Использование офисных технологий при формировании математических понятий / И.В. Воинова // Учебный эксперимент в образовании. – 2014. – № 2 (70). – С. 31-39.

5. Демченкова, Н.А. Взаимосвязанные задачи как средство обучения решению уравнений в курсе алгебры основной школы / Н.А. Демченкова, М.Г. Пугачева // Современное образование: научные подходы, опыт, проблемы, перспективы. Сборник статей XIV Международной научно-практической конференции «Артемовские чтения». Пензенский государственный университет; под общей редакцией М.А. Родионова. – Пенза: Изд-во ПГУ, 2018. – С. 159-165.

6. Денищева, Л.О. Теория и методика обучения математике в школе [Текст]: учебное пособие / Л.О. Денищева, А.Е. Захарова, М.Н. Кочагина и др. – М.: Бином. Лаборатория знаний, 2011. – 247 с.: ил.

7. Деркач, М.И. Методические указания и контрольные задания для подготовки к внешнему независимому оцениванию по математике / М.И. Деркач, Н.А. Деркач. – Севастополь: Изд-во СевНТУ, 2008. – 60 с.

8. Дорофеев, Г.В. О составлении циклов взаимосвязанных задач // Математика в школе. 1983. – №6. С. 34-39.

9. Иванова, Т.А. Теоретические основы обучения математике в средней школе [Текст]: учебное пособие / Т.А. Иванова, Е.Н. Перевощикова, Т.П. Григорьева, Л.И. Кузнецова; Под ред.проф. Т.А. Ивановой. – Н.Новгород: НГПУ, 2003. – 320 с.

10. Лучко, Ю.А. Совершенствование процесса формирования геометрических понятий с использованием информационных технологий / Ю.А. Лучко // Альманах современной науки и образования. – 2008. - № 7. – С. 115-117.

11. Лященко, Е.И. Лабораторные и практические работы по методике преподавания математики [Текст]: учеб. пособие для студентов физ.-мат. спец. пед. ин-тов / Е.И. Лященко, К.В. Зобкова, Т.Ф. Кириченко и др.; Под ред. Е.И. Лященко. – М.: Просвещение, 1988. -223 с.

12. Макарычев, Ю.Н. Алгебра. 7 класс [Текст]: учеб. для учащихся общеобразоват. учреждений / Ю.Н. Макарычев, Н.Г. Миндюк, К.И. Нешков, И.Е. Феоктистов. – 13-е изд., стер. – М. : Мнемозина, 2013. – 336 с. : ил.

13. Макарычев, Ю.Н. Алгебра. 8 класс [Текст]: учеб. для учащихся общеобразоват. учреждений / Ю.Н. Макарычев, Н.Г. Миндюк, К.И. Нешков, И.Е. Феоктистов. – 10-е изд., испр. – М. : Мнемозина, 2010. – 384 с. : ил.

14. Макарычев, Ю.Н. Алгебра. 9 класс [Текст]: учеб. для учащихся общеобразоват. учреждений / Ю.Н. Макарычев, Н.Г. Миндюк, К.И. Нешков, И.Е. Феоктистов. – 7-е изд., испр. И доп. – М. : Мнемозина, 2008. – 447 с.: ил.

15. Мирошин, В.В. Решение задач с параметром. Теория и практика / В.В. Мирошин. – М.: Издательство «Экзамен», 2009. – 286, [2] с.

16. Моденова, М.В. Конструирование систем математических задач / М.В. Моденова // Интеграция образования. – 2009. - № 4. – С. 98-102.

17. Мордкович, А.Г. Алгебра. 7 класс. В 2 ч. Ч. 1. [Текст]: учебник для учащихся общеобразовательных учреждений / А.Г. Мордкович, Н.П. Николаев. – М. : Мнемозина, 2009. – 191 с. : ил.

18. Мордкович, А.Г. Алгебра. 7 класс. В 2 ч. Ч. 2. [Текст]: задачник для учащихся общеобразовательных учреждений / А.Г. Мордкович, Н.П. Николаев. – М. : Мнемозина, 2009. – 207 с. : ил.

19. Мордкович, А.Г. Алгебра. 8 класс. В 2 ч. Ч. 1. [Текст]: учебник для учащихся общеобразовательных учреждений / А.Г. Мордкович, Н.П. Николаев. – 10-е изд., доп. - М. : Мнемозина, 2013. – 256 с. : ил.

20. Мордкович, А.Г. Алгебра. 8 класс. В 2 ч. Ч. 2. [Текст]: задачник для учащихся общеобразовательных учреждений / А.Г. Мордкович и др. – 11-е изд., испр. И доп. – М. : Мнемозина, 2013. – 344 с. : ил.

21. Пугачева, М.Г., Демченкова, Н.А. Обучение решению уравнений с помощью взаимосвязанных задач в курсе алгебры основной школы / Материала международной научно-практической конференции «Современное математическое образование: опыт, проблемы, перспективы».– Казахстан, Кокшетау, 8 июня 2018. – С. 589-594.

22. Ракова, С.В. Использование информационных технологий при формировании понятия симметрия / С.В. Ракова // Международная научно-практическая конференция «Web-технологии в образовательном пространстве: проблема, подходы, перспективы». – 2015. – С. 409-414.

23. Саранцев, Г.И. Методика обучения математике: методология и теория [Текст]: учеб. пособие для студентов бакалавриата высших учебных заведений по направлению «Педагогическое образование» (профиль «Математика») / Г.И. Саранцев. – Казань: Центр инновационных технологий, 2012. – 292 с.

24. Стефанова, Н.Л. Методика и технология обучения математике. Курс лекций [Текст]: пособие для вузов / под научн. ред. Н.Л. Стефановой, Н.С. Подходовой. – М.: Дрофа, 2005. – 416 с. : ил.

25. Талочкин, П.Б. Неравенства и уравнения. Упражнения и методические указания. Из опыта работы учителя. М., «Просвещение», 1970. – 160 с. СТОЛЕТИЕ», 1996 – 320 с.

26. Темербекова, А.А., Чугунова, И.В., Байгонакова, Г.А. Методика обучения математике [Текст]: Учебное пособие / А.А. Темербекова, И.В. Чугунова, И.В. Байгонакова – СПБ.: Издательство «Лань», 2015. – 512 с.: ил.

27. Топор, А.В. Использование информационно-коммуникационных технологий в образовательном процессе начальной школы / А.В. Топор, Е. Белая, Н. Белая // Теория и практика образования в современном мире. – Санкт-Петербург: Реноме, 2014. – С. 101-102.

28. Федеральный государственный образовательный стандарт среднего общего образования. Приказ Мин. образования и науки РФ от 06.10.2009 г. №413.

29. Kaleli-Yilmaz, G. The Views of Mathematics Teachers on the Factors Affecting the Integration of Technology in Mathematics Courses / Gul Kaleli-Yilmaz // Australian Journal of Teacher Education. – 2015. – № 40. – P. 132-148.

30. Liu, P. Technology Integration in Elementary Classrooms: Teaching Practices of Student Teachers / Ping Liu // Australian Journal of Teacher Education. – 2016. - № 41 (3). – P. 87-104.

31. Maharaj-Sharma, R., Sharma, A., & Sharma, A. Using ICT-based Instructional Technologies to Teach Science: Perspectives from Teachers in Trinidad and Tobago / Rawatee Maharaj-Sharma, Aarti Sharma, Aditi Sharma // Australian Journal of Teacher Education. – 2017. - № 42 (10). – P. 23-35.

32. Mohamed, M., Sulaiman, F. Framework of Knowledge and Teaching Skills of Expert Mathematics Teachers in Using Mathematical Examples / Mohini Mohamed, Faridah Sulaiman // Procedia Social and Behavioral Sciences 8. - 2010. – P. 325-331.

33. Uslu, O. Factors Associated with Technology Integration to Improve Instructional Abilities: A Path Model / Oner Uslu // Australian Journal of Teacher Education. - 2018. – № 43 (4). – P. 31-50.

Приложение 1

Схема 1. Этапы формирования понятия и соответствующие ему упражнения

Приложение 2

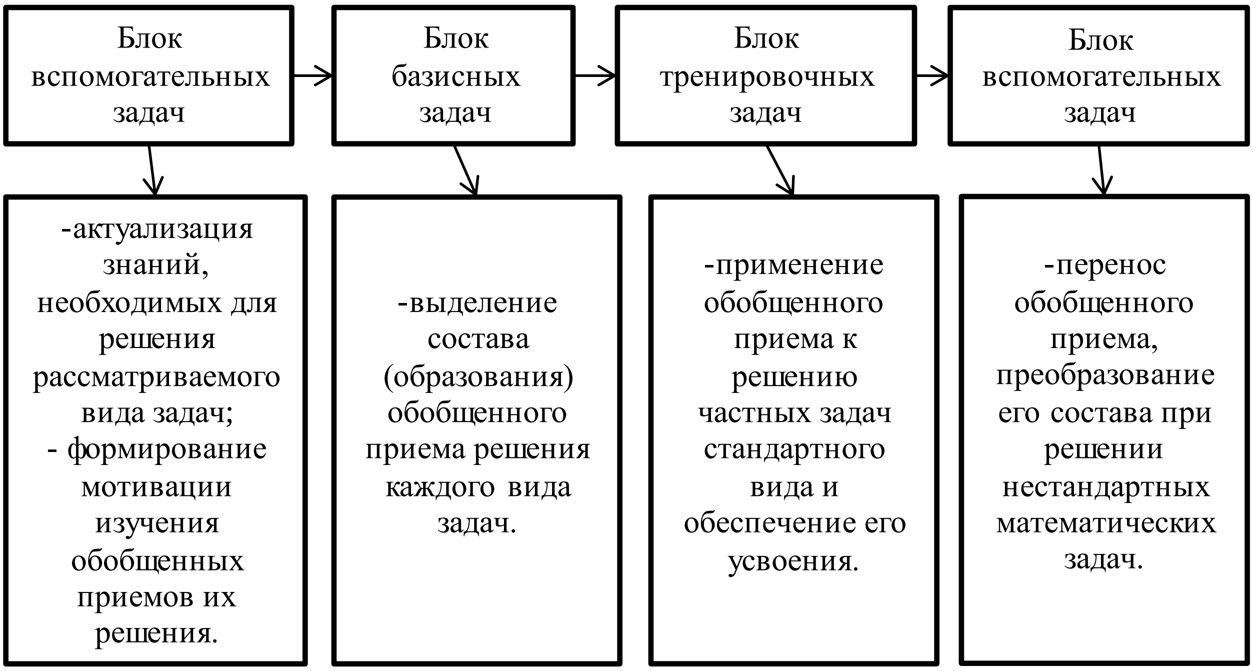

Схема 2. Цикл взаимосвязанных задач

Приложение 3

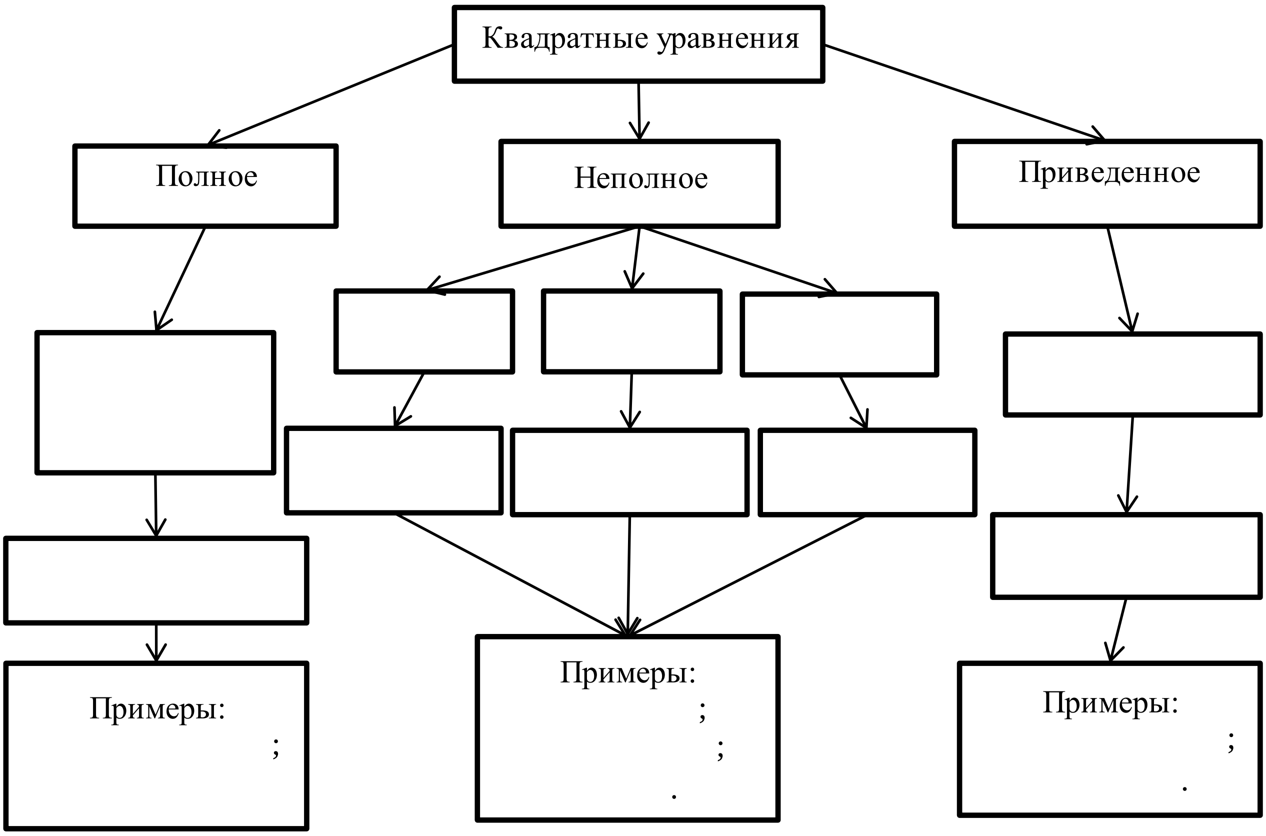

Схема 3. Схема классификации видов квадратных уравнений

Приложение 4

Таблица 1

Цикл взаимосвязанных задач, направленный на обучение решению линейных уравнений с одной переменной

Блоки задач	**Назначение задач блока**
Вспомогательные задачи №1. Из данных уравнений выберите те, для которых число -12 является корнем: 1) $6x+72=0$; 2) $2x^2-x=132$; 3) $x-12\ \ x=0$; 4) $x\ \ +x=0$. №2. Равносильны ли уравнения: 1) $12x-2=7x+1$ и $12x+7x=1+2$; 2) $15\ \ 6-0{,}2x\ \ =-\ \ 2-x$ и $90-3x=-2-x$; 3) $0{,}01x-0{,}2=0$ и $x-20=0$; 4) $3x-\frac{2}{x}+\frac{2}{x}=x+2$ и $3x=x+2$?	Данные задачи обеспечивают актуализацию таких понятий, как корень уравнения, равносильные уравнения и область определения уравнения, необходимых для решения линейных уравнений с одной переменной, а так же формируют мотивацию изучения обобщенных приемов решения данного вида уравнений.
Базисные задачи №3. Решите линейное уравнение: 1) $2x-4=8$; 2) $3\ \ x-6\ \ =7x+10$; 3) $\ 2x+1\ \ \ 3x-2\ \ -6x\ \ x+4\ \ =67-2x$; 4) $\frac{x+2}{3}-\frac{3x-1}{4}=-2$; 5) $\frac{1+x}{6}+\frac{1-x}{4}=0{,}5x+1$; 6) $x^2-\frac{2x-1\ \ x}{2}=2$.	Данные задачи предназначены для формирования у учащихся обобщенного приема решения линейных уравнений с одной переменной: – выполняя тождественные преобразования выражений и используя свойства уравнений, заданное уравнение с одной переменной свести к равносильному ему линейному уравнению $ax=b$; – найти x, записать ответ.
Тренировочные задачи №4. Решите относительно x уравнение, в котором буквой a обозначено не равное нулю число: 1) $\frac{ax+15}{4}=6-a$; 2) $\frac{3ax-1}{12}=\frac{a}{6}$; 3) $\frac{a(x-4)}{2}-\frac{a+1}{3}=1$.	Данные задачи приводят к усвоению универсальных учебных действий, способствуют формированию обобщенного приема решения линейных уравнений с одной переменной, позволяют применять обобщенный прием при решении других математических задач.
Развивающие задачи №5. Найдите неизвестное число, если полусумма этого числа и числа 12,3 больше полуразности числа 1,5 и неизвестного числа на 3. №6. При каких значениях p корнем уравнения $p\ \ x+4\ \ -\ \ 5-p\ \ =16$ является число 2?	Данные задачи направлены на использование обобщенного приема при решении нестандартных задач, на преобразование обобщенного приема применительно к другим предложенным нестандартным линейным уравнениям с одной переменной.

Таблица 2

Цикл взаимосвязанных задач, направленный на обучение решению квадратных уравнений

Блоки задач	Назначение задач блока
Вспомогательные задачи №1. Найдите значение выражения: 1) $-3\cdot\sqrt{0{,}49}$; 2) $\sqrt{25}-\sqrt{49}$; 3) $\sqrt{\frac{36}{49}}-2$; 4) $2\cdot\sqrt{12{,}25}-0{,}1\cdot\sqrt{0{,}25}$. №2. Решите уравнение: 1) $x^2=12$; 2) $x^2-7x=0$; 3) $5x^2=0$; 4) $x^2-6x+9=0$; 5) $(x-5)(x-3)=0$; 6) $\frac{7+x}{1+x^2}=0$.	Данные задачи обеспечивают актуализацию таких умений, как нахождение значения выражений, содержащих квадратные корни, решение некоторых уравнений второй степени, которые необходимы для решения квадратных уравнений, а так же формируют мотивацию изучения обобщенных приемов решения данного вида уравнений/
Базисные задачи №4. Решите уравнения: 1) $-3x^2+x+1=0$; 2) $6x^2+19x=2x-12$; 3) $x(5x-3)=3(2x-1\frac{1}{3})$; 4) $(2x+1)(x-3)=x(4-x)-9$; 5) $(2m+3)^2=(m-1)(m+1)$; 6) $\frac{x}{3}-\frac{x^2}{4}+\frac{1}{6}=\frac{3x}{2}-\frac{4x^2}{3}$; 7) $\frac{5n^2}{6}-\frac{4n}{9}=n+21\frac{1}{3}$; 8) $\frac{7k-5}{4}=\frac{4k^2-3}{2}$.	Данные задачи предназначены для формирования у учащихся обобщенного приема решения квадратных уравнений: – выполняя тождественные преобразования выражений и используя свойства уравнений, заданное уравнение свести к равносильному ему квадратному уравнению $ax^2+bx+c=0$, где $a>0$; – найти дискриминант уравнения, найти x, записать ответ.
Тренировочные задачи №5. Решите относительно x уравнение 1) $ax^2-4x+1=0$; 2) $x^2-2(a-1)x+a^2-2a-3=0$; 3) $(a-4)x^2+(2a-4)x+a=0$.	Данные задачи приводят к усвоению универсальных учебных действий, способствуют формированию обобщенного приема решения квадратных уравнений, позволяют применять обобщенный прием при решении других математических задач.
Развивающие задачи №7. При каких значениях q уравнение $x^2-2\sqrt{2}x+q+1=0$ имеет различные корни? №8. Существуют ли такие значения переменной, при которых сумма дробей $\frac{x+7}{x-2}$ и $\frac{x-1}{x+2}$ равна 1?	«Данные задачи направлены на использование обобщенного приема при решении нестандартных задач, на преобразование обобщенного приема применительно к другим предложенным нестандартным квадратным уравнениям» [5].

Таблица 3

Цикл взаимосвязанных задач, направленный на обучение решению дробно-рациональных уравнений

Блоки задач	**Назначение задач блока**
Вспомогательные задачи №1. Укажите область определения уравнения: 1) $\frac{2x-1}{x}=0$; 2) $\frac{x-13}{x-2}=0$; 3) $\frac{x-2}{x+3}=\frac{x+3}{x-2}$; 4) $\frac{x}{x-2}-\frac{4}{x+2}=\frac{8}{x^2-4}$. №2. Решите уравнение: 1) $\frac{5x}{2}-\frac{3x}{5}=1{,}9$; 2) $\frac{x+7}{3}=\frac{2x+3}{5}$; 3) $x-\frac{x+1}{3}=\frac{2x-1}{5}$; 4) $\frac{x^2+3}{4}-\frac{x}{3}=\frac{5x-3}{6}$.	Данные задачи обеспечивают актуализацию такого понятия, как область определения уравнения, и актуализацию приема решения целых рациональных уравнений, которые необходимы для решения дробно-рациональных уравнений, а так же формируют мотивацию изучения обобщенных приемов решения данного вида уравнений.
Базисные задачи №3. Решите уравнение: 1) $\frac{4}{x}-\frac{x+8}{2x}=\frac{5}{6}$; 2) $\frac{3}{x+2}+\frac{x}{x-2}=1$; 3) $\frac{x-2}{x+2}=\frac{x+3}{x-4}$; 4) $\frac{2}{x}+\frac{x^2+8}{x(x-4)}=\frac{6}{x-4}$; 5) $\frac{x^2+3x}{2(x-3)}+\frac{x+12}{6}=\frac{3x}{x-3}$; 6) $\frac{x^2-7x+6}{x^2+1}+\frac{(x-1)(x-6)}{1-x \quad 1+x \quad +2x^2}=0$; 7) $\frac{3x+1}{3x^2+x}+\frac{x-3}{16x^2-1}=\frac{3}{4x-1}$; 8) $\frac{x+5}{x^2-6x+8}+\frac{1}{x^2-7x+10}=\frac{1}{x-2}$.	Данные задачи предназначены для формирования у учащихся обобщенного приема решения дробно-рациональных уравнений: – привести его к целому уравнению, умножив левую и правую части на общий знаменатель; – решить получившееся целое уравнение; – исключить из множества корней целого уравнения те корни, при которых левая или правая части уравнения не имеют смысла, т.е. обращают в нуль общий знаменатель дробей; – раписать ответ.
Тренировочные задачи №4. Для каждого значения a решите уравнение: 1) $\frac{2x+3}{x+4}+\frac{a}{x+1}=2$; 2) $\frac{x+1}{x-1}+\frac{3x+a}{x+1}=4$; 3) $\frac{ax+4}{2x+1}-\frac{x+3}{x+1}=1$.	Данные задачи приводят к усвоению универсальных учебных действий, способствуют формированию обобщенного приема решения дробно-рациональных уравнений, позволяют применять обобщенный прием при решении других математических задач.
Развивающие задачи №5. Найти координаты точек пересечения графиков функций: $y=\frac{3-2x}{3x-2}$ и $y=-2x+1=3$. №6. При каких значениях параметра a дробь $\frac{t^2-tc}{a-t}$ ни при каких допустимых значениях t не принимает значения, равного 5?	Данные задачи направлены на использование обобщенного приема при решении нестандартных задач, на преобразование обобщенного приема применительно к другим предложенным нестандартным дробно-рациональным уравнениям.

Таблица 4

Цикл взаимосвязанных задач, направленный на обучение решению иррациональных уравнений

Блоки задач	**Назначение задач блока**
Вспомогательные задачи №1. Разложите на множители: 1) $x^2+10xy+25y^2$; 2) $36x^2-0{,}81$; 3) $9x^2-6xy+y^2$; 4) $x-y$. №2. Укажите область определения уравнения: 1) $y=\sqrt{x-6}$; 2) $y=\sqrt{\frac{7}{x}}$; 3) $y=\frac{1}{2+x}$; 4) $y=\sqrt{x}$.	«Данные задачи обеспечивают актуализацию такого умения, как разложение на множители, и актуализацию такого понятия, как область определения уравнения, которые необходимы для решения иррациональных уравнений, а так же формируют мотивацию изучения обобщенных приемов решения данного вида уравнений» [5].
Базисные задачи №3. Решите уравнение: 1) $\sqrt{x+2}=3$; 2) $\sqrt{4x+3}=\sqrt{4x^2+5x-2}$; 3) $\sqrt{7-3x}=x+7$; 4) $\sqrt{4-2x}+\sqrt{2+x}=\sqrt{2x}$; 5) $\sqrt{4+x\sqrt{x^2+40}}=x+2$; 6) $x^2-25\ \sqrt{x^2+3x-28}=0$; 7) $x-2\ \sqrt{x+2}=x-2$; 8) $\frac{x+3}{x-1}=\sqrt{3x+1}$; 9) $\sqrt{x-2}\ \sqrt{x+1}=\sqrt{x^2-x-2}$.	Данные задачи предназначены для формирования у учащихся обобщенного приема решения иррациональных уравнений в следующей виде: - возвести обе части уравнения в квадрат; - решить полученное рациональное уравнение; - сделать проверку.
Тренировочные задачи №4. Для каждого значения b решите уравнение: $\sqrt{x^2+b}=\sqrt{3x+b-2}$.	Данные задачи приводят к усвоению универсальных учебных действий, способствуют формированию обобщенного приема решения иррациональных уравнений, позволяют применять обобщенный прием при решении других математических задач.
Развивающие задачи №5. Докажите, что уравнение $\sqrt[4]{2x-3}-5x=\sqrt[4]{27-18x}-7{,}5$ имеет единственный корень, и найдите его. №6. При каких значениях параметра a уравнение $x-7\ \sqrt{x+a}+\sqrt{3a-x}\ =0$ имеет хотя бы один корень?	«Данные задачи направлены на использование обобщенного приема при решении нестандартных задач, на преобразование обобщенного приема применительно к другим предложенным нестандартным иррациональным уравнениям» [5].

Таблица 5

Цикл взаимосвязанных задач, направленный на обучение решению уравнений с модулем

Блоки задач	**Назначение задач блока**
Вспомогательные задачи №1. Вычислите: 1) 56 ; 2) -47 ; 3) $0{,}999-1{,}01$; 4) $\sqrt{2}-1$; 5) $\pi-3{,}14$; 6) $\sqrt{8}-4$. №2. Упростите выражение: 1) $\sqrt{\left(1-\sqrt{3}\right)^2}$; 2) $\sqrt{\left(3-\sqrt{6}\right)^2}$; 3) $\frac{\sqrt{x^2-4x+4}}{x-2}$; 4) $\frac{x+3}{\sqrt{x^2+6x+9}}$; 5) $2+\sqrt{5}-\sqrt{\left(\sqrt{5}-3\right)^2}$; 6) $\sqrt{\left(5-\sqrt{30}\right)^2}+\sqrt{\left(6-\sqrt{30}\right)^2}$.	Данные задачи обеспечивают актуализацию понятия модуля действительного числа, и актуализацию таких умений, как раскрытие модуля, преобразование выражений, содержащих модуль, которые необходимы для решения уравнений с модулем, а так же формируют мотивацию изучения обобщенных приемов решения данного вида уравнений.
Базисные задачи №3. Решите уравнение: 1) $2x-1 = 5$; 2) $x-\sqrt{2} = 1-\sqrt{2}$; 3) $\frac{2x+1}{x-1} = 3$; 4) $5-2x = x+1$; 5) $x^2+5 = 6x$; 6) $2-3x = 2x+3$; 7) $x^2-6x+10 = x+10$; 8) $x-3 + 3x = 17$; 9) $x+3 - x-1 = x+2$; 10) $7- 3x-1 = 2$.	«Данные задачи предназначены для формирования у учащихся обобщенного приема решения уравнений с модулем в следующей виде: - используя определение и свойства модуля числа, освободиться от знака модуля, заменяя данное уравнение равносильным ему уравнением, системой или совокупностью уравнений; - решить полученное уравнение, систему или совокупность уравнений; - записать ответ» [21].
Тренировочные задачи №4. Решите уравнение для каждого значения параметра p: 1) $x = p$; 2) $x+3 = p+1$; 3) $x-2 = -p$; 4) $1-x = p-1$.	Данные задачи приводят к усвоению универсальных учебных действий, способствуют формированию обобщенного приема решения уравнений с модулем, позволяют применять обобщенный прием при решении других математических задач.
Развивающие задачи №5. Преобразуйте данную функцию, чтобы в записи не использовался знак модуля: 1) $y= x-7$; 2) $y= 2x+4 + 3x$; 3) $y= x-1 + x-2$; 4) $y= x + 2x+4 - 3-x$.	«Данные задачи направлены на использование обобщенного приема при решении нестандартных задач, на преобразование обобщенного приема применительно к другим предложенным нестандартным уравнениям с модулем» [21].

Таблица 6

Цикл взаимосвязанных задач, направленный на обучение решению линейных уравнений с параметром

Блоки задач	**Назначение задач блока**
Вспомогательные задачи №1. При каких значениях переменных a уравнение не определено: 1) $ax=10$; 2) $\frac{x+15}{a}=6$; 3) $\frac{x-a}{a-1}=\frac{x-2}{a}$; 4) $2a-1\ \ x=2a^2-5a+2$. №2. Решите уравнение: 1) $8x=7$; 2) $15x=7$; 3) $-11x=7$; 4) $0x=7$.	Данные задачи обеспечивают актуализацию таких умений, как нахождение ОДЗ; решение линейных уравнений, которые необходимы для решения линейных уравнений с параметром, а так же формируют мотивацию изучения обобщенных приемов решения данного вида уравнений.
Базисные задачи №3. Решите уравнение с параметром a: 1) $5a-x=0$; 2) $8x=8a+6$; 3) $ax=a+6$; 4) $a\ \ a-2\ \ x=a^2-4$; 5) $a^2x-x=a^2+4a-5$.	«Данные задачи предназначены для формирования у учащихся обобщенного приема решения линейных уравнений с параметром $f\ \ a\ \ x=g(a)$: – найти множество значений параметра, на котором коэффициент при переменной обращается в нуль; выделить на нем промежутки значений параметра, на которых свободных член равен нулю (отличен от нуля); – решить получающиеся линейные уравнения на каждом из найденных промежутков, записать ответ, перечислив все значения параметра» [21].
Тренировочные задачи №4. Решите уравнение относительно x: 1) $\frac{x}{a-2}=x-1$; 2) $\frac{x-a}{a-1}=\frac{x-2}{a}$; 3) $\frac{x+8}{a}-a=\frac{x-4}{2}$; 4) $\frac{x}{a-1}-x=\frac{5}{a+1}$; 5) $\frac{3x-1}{a}-\frac{1}{a+1}=x$.	Данные задачи приводят к усвоению универсальных учебных действий, способствуют формированию обобщенного приема решения линейных уравнений с параметром, позволяют применять обобщенный прием при решении других математических задач.
Развивающие задачи №5. При каких значениях параметра b имеют общий корень уравнения: 1) $3x+7=0$ и $2x-b=0$; 2) $2x=3b-1$ и $3x=5b+7$? №6. При каких значениях параметра b уравнение $\frac{5x}{6}-b=\frac{1}{3}$ имеет: 1) положительный корень; 2) корень, принадлежащий промежутку $(-1;4)$?	«Данные задачи направлены на использование обобщенного приема при решении нестандартных задач, на преобразование обобщенного приема применительно к другим предложенным нестандартным линейным уравнениям с параметром» [21].

Таблица 7

Цикл взаимосвязанных задач, направленный на обучение решению квадратных уравнений с параметром

Блоки задач	Назначение задач блока
Вспомогательные задачи №1. При каких значениях переменных a уравнение не определено: 1) $5ax^2-3ax+1=0$; 2) $x^2-\frac{6x}{a}+1=0$; 3) $x^2\sqrt{a^2-2a-3}+x\sqrt{a-3}+5a=0$. №2. Решите уравнение: 1) $2x^2-7x+5=0$; 2) $9x^2-12x+4=0$; 3) $-3x^2+2x+5=0$.	Данные задачи обеспечивают актуализацию таких умений, как нахождение ОДЗ; решение квадратных уравнений, которые необходимы для решения квадратных уравнений с параметром, а так же формируют мотивацию изучения обобщенных приемов решения данного вида уравнений.
Базисные задачи №3. Решите уравнение с параметром a: 1) $ax^2-4x+1=0$; 2) $x^2-ax+36=0$; 3) $3x^2-6x+a=0$.	«Данные задачи предназначены для формирования у учащихся обобщенного приема решения квадратных уравнений с параметром: – найти промежутки допустимых значений параметра, на которых первый коэффициент обращается в нуль, решить получающиеся линейные уравнения на каждом из них; – найти допустимые значения параметра, для которых значение дискриминанта равно нулю, и решить квадратные уравнения для каждого из найденных значений параметра; – найти допустимые значения параметра, для которых дискриминант принимает положительные значения, решить уравнение; – выписать допустимые значения параметра, для которых уравнение не имеет решений; – записать ответ, перечислив, на каждом из рассмотренных промежутков значений параметра, корни уравнения» [21].
Тренировочные задачи №4. Решите уравнение относительно x: 1) $ax^2+(1-a)x-1=0$; 2) $x^2-2(a+1)x+4a=0$; 3) $ax^2-(a+5)x+2=0$.	Данные задачи приводят к усвоению универсальных учебных действий, способствуют формированию обобщенного приема решения квадратных уравнений с параметром, позволяют применять обобщенный прием при решении других математических задач.
Развивающие задачи №5. При каких значениях параметра b уравнение $2x^2-(2b-5)x+b-3=0$ имеет два корня, принадлежащих промежутку $(-1;1)$? №6. Для каждого значения параметра a найдите число различных корней уравнения $(3x-1)(ax^2+3x-2)=0$.	«Данные задачи направлены на использование обобщенного приема при решении нестандартных задач, на преобразование обобщенного приема применительно к другим предложенным нестандартным квадратным уравнениям с параметром» [21].

Таблица 8

Цикл взаимосвязанных задач, направленный на обучение решению дробно-рациональных уравнений с параметром

Блоки задач	Назначение задач блока
Вспомогательные задачи №1. При каких значениях переменных a уравнение не определено: 1) $\frac{5a}{a}=x$; 2) $\frac{3-x}{a+2}=\frac{5}{a-5}$; 3) $\frac{3ax^2-x-2}{a+2}=\frac{5}{a-5}$; 4) $\frac{x-6}{x-a}=0$. №2. Решите уравнение: 1) $\frac{x}{x+1}-\frac{1}{x-1}=\frac{2}{x^2-1}$; 2) $\frac{x}{x}=1$; 3) $\frac{x}{x+2}+\frac{1}{x^2-2x}=\frac{2}{x^3-4x}$.	Данные задачи обеспечивают актуализацию таких умений, как нахождение ОДЗ; решение дробно-рациональных уравнений, которые необходимы для решения дробно-рациональных уравнений с параметром, а так же формируют мотивацию изучения обобщенных приемов решения данного вида уравнений.
Базисные задачи №3. Решите уравнение с параметром а: 1) $\frac{x-3}{x+a}=0$; 2) $\frac{ax+4}{x+2}=2$; 3) $\frac{x^2+5x+6}{x-a}=0$; 4) $x+3+\frac{2}{x}=2a-\frac{a^2-3a}{x}$; 5) $\frac{6}{x^2-16}-\frac{1}{x-4}=\frac{3a}{4+x}$.	«Данные задачи предназначены для формирования у учащихся обобщенного приема решения дробно-рациональных уравнений с параметром: – умножить обе части уравнения на общий знаменатель дробей; – решить полученное целое уравнение с параметром; – исключить из его корней те, которые обращают в нуль общий знаменатель дробей; – записать ответ» [21].
Тренировочные задачи №4. Решите уравнение относительно y: 1) $\frac{5a}{y-a}-\frac{5y}{y+a}=7$; 2) $\frac{10-a}{y+3}+\frac{6}{y^2-9}=\frac{2}{y-3}$; 3) $\frac{6-y}{y+2}-\frac{2}{y-a}+1=0$; 4) $\frac{3y}{2y-b}-\frac{4b}{y+b}-1=0$.	Данные задачи приводят к усвоению универсальных учебных действий, способствуют формированию обобщенного приема решения дробно-рациональных уравнений с параметром, позволяют применять обобщенный прием при решении других математических задач.
Развивающие задачи №5. При каких значениях параметра b уравнение $\frac{2}{1-x}=b-5$ имеет единственный корень и этот корень принадлежит промежутку $(-1;1)$? №6. Найдите целые значения параметра a, при которых уравнение $1+\frac{3ax-13x}{x^2-a^2}=\frac{13a-3a^2}{a^2-x^2}$ имеет единственный корень и этот корень принадлежит промежутку $(-5;5)$.	«Данные задачи направлены на использование обобщенного приема при решении нестандартных задач, на преобразование обобщенного приема применительно к другим предложенным нестандартным дробно-рациональным уравнениям с параметром» [21].