МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Тольяттинский государственный университет»

Институт математики, физики и информационных технологий
(наименование института полностью)
Кафедра «Высшая математика и математическое образование»
(наименование кафедры)

44.03.05 «Педагогическое образование»
(код и наименование направления подготовки)
«Математика и информатика»
(направленность (профиль))

БАКАЛАВРСКАЯ РАБОТА

на тему **«МЕТОДИКА ОБУЧЕНИЯ РЕШЕНИЮ ПЛАНИМЕТРИЧЕСКИХ ЗАДАЧ ПО ТЕМЕ «ЧЕТЫРЕХУГОЛЬНИКИ» В КУРСЕ ГЕОМЕТРИИ ОСНОВНОЙ ШКОЛЫ»**

Студент Д.В. Наумов ____________________
(И.О. Фамилия) (личная подпись)

Руководитель д.п.н., профессор С.Н.Дорофеев ____________________
(И.О. Фамилия) (личная подпись)

Консультант ст.преподаватель А.В. Прошина ____________________
(И.О. Фамилия) (личная подпись)

Допустить к защите

Заведующий кафедрой д.п.н., профессор, Р.А. Утеева ____________________
(ученая степень, звание, И.О. Фамилия) (личная подпись)

«_____»__________2018 г.

Тольятти 2018

АННОТАЦИЯ

Целью бакалаврской работы является выявление методических особенностей обучения учащихся решению планиметрических задач по теме «Четырехугольники» в курсе геометрии основной школы и разработка системы задач, способствующих формированию умения решать планиметрические задачи по теме «Четырехугольники».

Одним из главных и традиционных разделов планиметрии 7-9 классов является раздел «Четырехугольники». Изучение данной темы достаточно важно и актуально, т.к. в дальнейшем она используется при изучении других разделов геометрии.

Бакалаврская работа состоит из введения, двух глав, заключения и списка литературы.

Объектом исследования является процесс обучения школьников геометрии в основной школе.

Предметом исследования является методика обучения школьников решению планиметрических задач по теме «Четырехугольники» в курсе геометрии основной школы

В дипломной работе раскрыты теоретические и методические основы обучения школьников решению планиметрических задач по теме «Четырехугольники» в курсе геометрии основной школы.

В *Главе I* бакалаврской работы изучается понятие логико-математического анализа тем школьного курса математики. Рассматриваются основные требования к знаниям и умениям учащихся и проводится анализ теоретического и задачного материалов темы «Четырехугольники» в учебниках геометрии разных авторов.

В *Главе II* представлены методические рекомендации по обучению решению планиметрических задач по теме «Четырехугольники» в курсе геометрии основной школы. Особое внимание уделяется системе задач по теме «Четырехугольники», ориентированной на усвоение понятий: прямоугольник и его элементы, параллелограмм и его элементы, трапеция и ее элементы, ромб и его элементы.

Список литературы содержит 40 наименований.

Объем работы составляет 51 страницу.

ABSTRACT

The title of the thesis is "The teaching method of how to solve planimetric tasks on the topic of "Quadrangles" in the course of Geometry in secondary school".

The aim of the work is to reveal the methodological features of teaching pupils to solve planimetric tasks on the topic of "Quadrangles" in the course of Geometry in secondary school and develop a system of tasks, that contribute to formation of the ability to solve planimetric tasks on the topic of "Quadrangles".

One of the main and traditional sections of planimetry for 7-9 grades pupils is "Quadrangles". The study of this topic is quite important and relevant, because it is used while teaching other sections of Geometry.

The object of the thesis is the process of teaching pupils Geometry in secondary school. The subject of the thesis is the method of teaching pupils to solve planimetric tasks on the topic of "Quadrangles" in the course of Geometry in secondary school.

The thesis describes in details theoretical and methodological foundations for teaching pupils solutions of planimetric tasks on the topic of "Quadrangles" in the course of Geometry in secondary school.

Much attention is given to compilation of a system of tasks on the topic of "Quadrangles", focused on the assimilation of concepts, such as: a rectangle and its elements, a parallelogram and its elements, a trapezoid and its elements, a rhombus and its elements. Methodological recommendations for teaching the solution of planimetric tasks on the "Quadrangles" topic in the course of Geometry in secondary school are presented.

The thesis consists of an introduction, 2 chapters, a conclusion and a list of 40 references including 5 foreign sources.

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Актуальность исследования. Геометрия — наука, занимающаяся изучением геометрических фигур и их количественных характеристик. Как известно, школьный курс геометрии делится на планиметрию и стереометрию. В планиметрии изучаются свойства и количественные соотношения фигур на плоскости. Примерами таких фигур являются отрезки, окружности, треугольники, четырехугольники, прямоугольники, многоугольники.

Одним из главных и традиционных разделов планиметрии 7-9 классов является раздел «Четырехугольники». Изучение данной темы достаточно важно и актуально, т.к. в дальнейшем она используется при изучении других разделов геометрии – многоугольников, площадей и т.д. Однако, при изучении данного раздела возникают определённые трудности: при применении свойств, определений и признаков четырёхугольников к доказательству теорем, при решении задач на построение, к решению практических задач.

Проблема исследования: выявление методических особенностей обучения учащихся общеобразовательной школы решению планиметрических задач по теме «Четырехугольники».

Объект исследования: процесс обучения школьников геометрии в основной школе.

Предмет исследования: методика обучения школьников решению планиметрических задач по теме «Четырехугольники» в курсе геометрии основной школы.

Цель бакалаврской работы: выявить методические особенности обучения учащихся решению планиметрических задач по теме «Четырехугольники» в курсе геометрии основной школы и разработать систему задач, способствующих формированию умения решать планиметрические задачи по теме «Четырехугольники».

Задачи исследования:

1. Выделить основные требования к умениям и знаниям школьников по теме «Четырехугольники».

2. Представить анализ теоретического и задачного материалов темы «Четырехугольники» в учебниках геометрии разных авторов.

3. Выявить формы, методы и средства обучения решению геометрических задач.

4. Разработать методические рекомендации по обучению школьников решению планиметрических задач по теме «Четырехугольники» в курсе геометрии основной школы.

5. Составить систему задач по теме «Четырехугольники», ориентированную на усвоение понятий: прямоугольник и его элементы, параллелограмм и его элементы, трапеция и ее элементы, ромб и его элементы.

Методы исследования: изучение и анализ методических пособий, учебной литературы и школьных программ по теме работы; решение задачного материала по теме работы, изучения опыта работы учителей математики, работающих в общеобразовательных школах.

Бакалаврская работа включает в себя: введение, две главы, заключение и список литературы.

Список использованной литературы состоит из 40 источников.

ГЛАВА I. ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ОБУЧЕНИЯ ШКОЛЬНИКОВ РЕШЕНИЮ ПЛАНИМЕТРИЧЕСКИХ ЗАДАЧ ПО ТЕМЕ «ЧЕТЫРЕХУГОЛЬНИКИ» В КУРСЕ ГЕОМЕТРИИ ОСНОВНОЙ ШКОЛЫ

§1. Понятие логико-математического анализа тем школьного курса математики (на примере содержания темы «Четырехугольники»)

Логико-математическим анализом темы называют знание целей обучения содержанию темы и основных результатов обучения, также это знание того, каким объектам и понятиям даются определения, знания формулировок определений. Еще можно добавить, что логико-математический анализ темы – это знание того, какие математические утверждения, несхожие с определениями, есть в теме.

Приступим к логико-математическому анализу нашей темы.

Материал в теме «Четырехугольники» организован на дедуктивной основе, так как всем фигурам, вводимым в теме, даются определения.

1. Основные математические понятия по теме «Четырехугольники», которые изучаются в школьных учебниках геометрии разных авторов:

– «четырехугольником называется фигура, которая состоит из четырех точек и четырех последовательно соединяющих их отрезков. При этом никакие три из данных точек не должны лежать на одной прямой, а соединяющие их отрезки не должны пересекаться»[20, с.72];

– элементы четырехугольника: вершины, стороны, соседние вершины, противолежащие вершины, диагонали, соседние стороны, противолежащие стороны;

– «параллелограммом называется четырехугольник, у которого противолежащие стороны попарно параллельны»[3, с.101] (Рис.1).

Рис.1.Параллелограмм

Свойства параллелограмма:

1. «В параллелограмме противоположные стороны равны и противоположные углы равны»[3, с.101].

2. «Диагонали параллелограмма точкой пересечения делятся пополам» [3, с.101].

Признаки параллелограмма:

1. «Если в четырехугольнике две стороны равны и параллельны, то этот четырехугольник- параллелограмм» [3, с.102].

2. «Если в четырехугольнике противоположные стороны равны, то этот четырехугольник- параллелограмм» [3, с.102].

3. «Если в четырехугольнике диагонали пересекаются и точкой пересечения делятся пополам, то этот четырехугольник- параллелограмм» [3, с.103];

– «прямоугольник – это параллелограмм, у которого все углы прямые»[20, с.76] (Рис. 2). Прямоугольник обладает особым свойством: «Диагонали прямоугольника равны»[3, с. 109] и важным признаком: «Если в параллелограмме диагонали равны, то этот параллелограмм- прямоугольник» [3, с.109];

Рис.2. Прямоугольник

– «ромб – это параллелограмм, у которого все стороны равны»[20, с.76] (Рис.3). У ромба есть особое свойство: «Диагонали ромба взаимно перпендикулярны и делят его углы пополам»[3, с. 109];

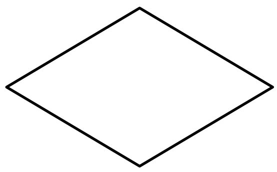

Рис.3. Ромб

– «квадрат – это прямоугольник, у которого все стороны равны»[20, с. 77] (Рис. 4). Свойства квадрата:

1. «У квадрата все углы прямые.

2. Диагонали квадрата равны.

3. Диагонали квадрата пересекаются под прямым углом и являются биссектрисами его углов»[20, с. 77];

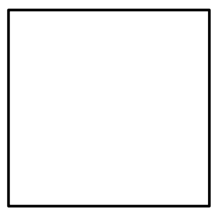

Рис.4. Квадрат

– «средняя линия треугольника – это отрезок, соединяющий середины двух сторон треугольника»[20, с.79];

– «трапецией называется четырехугольник, у которого только две противолежащие стороны параллельны. Эти параллельные стороны называются основаниями трапеции. Две другие стороны называются боковыми»[20, с.80] (Рис.5);

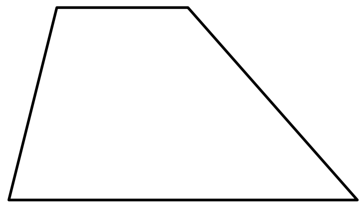

Рис.5. Трапеция

- «трапеция, у которой боковые стороны равны, называется равнобокой. Отрезок, соединяющий середины боковых сторон, называется средней линией трапеции»[20, с.80] (Рис. 6);

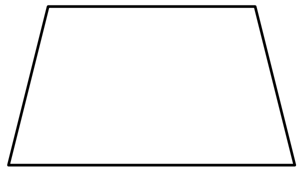

Рис.6. Равнобедренная трапеция

- «трапеция, один из углов которой прямой, называется прямоугольной»[3, с.103] (Рис.7).

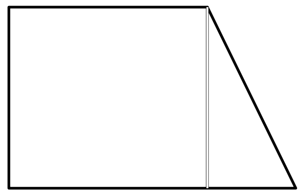

Рис.7. Прямоугольная трапеция

Способы определения вновь вводимых понятий данной темы основываются на указании их характеристического свойства. Этот вид определений построен на логических действиях и операциях установления ближайшего рода, видовых отличий и логической природы связи между родом и видовыми отличиями.

«Рассмотрим, например, определение параллелограмма.

Параллелограммом называется четырехугольник, у которого противоположные стороны параллельны.

Термин – параллелограмм.

Род – четырехугольник.

Видовые отличия: 1) одна пара противоположных сторон параллельна; 2) другая пара противоположных сторон параллельна»[14, с.40]

Все свойства в определении соединены союзом “ и ”; значит, имеет место конъюнктивная основа введения нового понятия. Таким образом, можно построить следующую классификацию четырехугольников (Рис.8) с учетом их видовых различий, существенных признаков и особенностей.

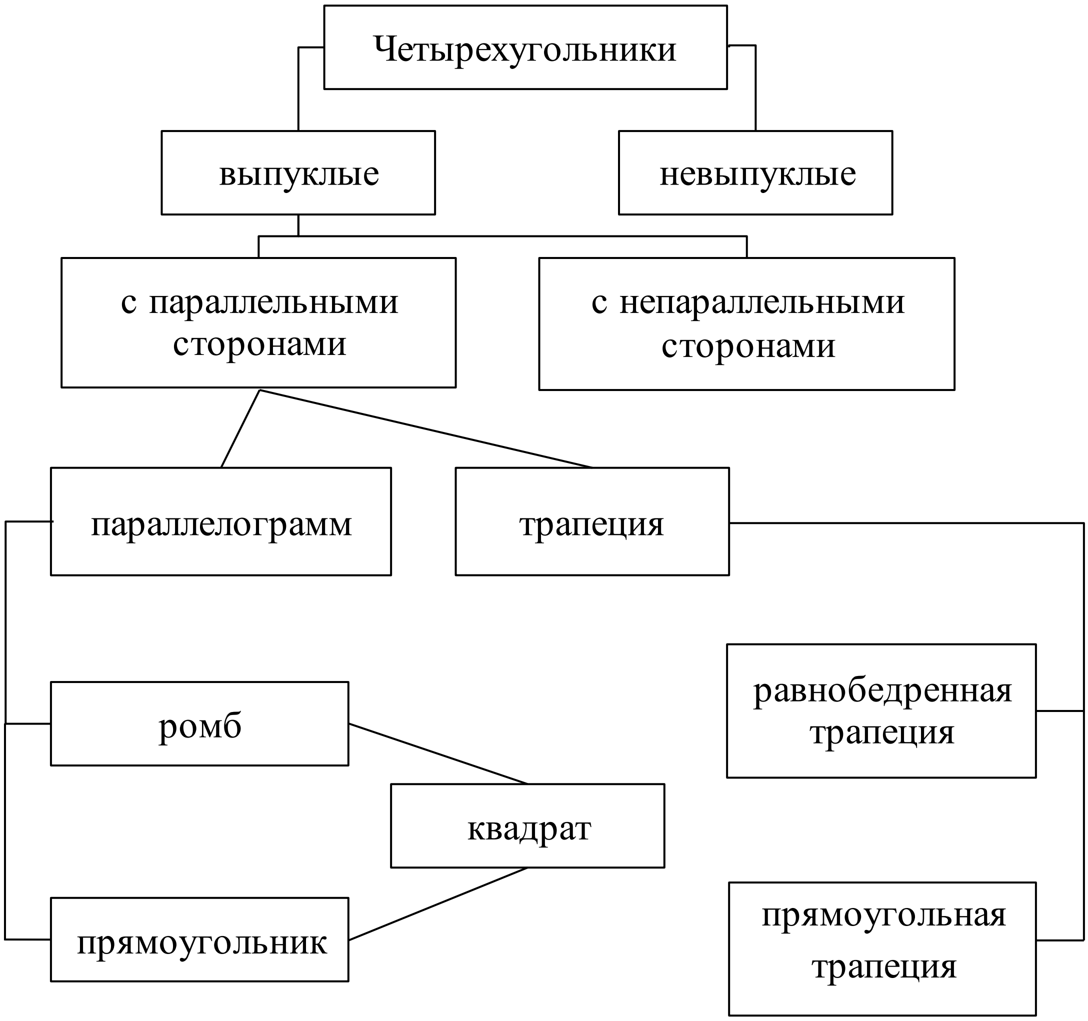

Рис.8. Классификация четырехугольников

2. Основные теоремы по теме «Четырехугольники», которые изучаются в школьных учебниках геометрии разных авторов:

Теорема 1. «Если диагонали четырехугольника пересекаются и точкой пересечения делятся пополам, то этот четырехугольник – параллелограмм»[20, с. 73].

Теорема 2. (обратная Теореме 1). «Диагонали параллелограмма пересекаются и точкой пересечения делятся пополам» [20, с.74].

Теорема 3. «У параллелограмма противолежащие стороны равны, противолежащие углы равны»[20, с.75].

Теорема 4. «Диагонали прямоугольника равны»[20, с.76].

Теорема 5. «Диагонали ромба пересекаются под прямым углом. Диагонали ромба являются биссектрисами его углов»[20, с.76].

Теорема 6.(Фалеса) «Если параллельные прямые, пересекающие стороны угла, отсекают на одной его стороне равные отрезки, то они отсекают равные отрезки и на другой стороне»[20, с.78].

Теорема 7. «Средняя линия треугольника, соединяющая середины двух сторон, параллельна третьей стороне и равна ее половине»[20, с.79].

Теорема 8. «Средняя линия трапеции параллельна основаниям и равна их полусумме»[20, с.80].

Теорема 9. «Параллельные прямые, пересекающие стороны угла, отсекают от сторон угла пропорциональные отрезки»[20, с.81].

§2. Основные требования к знаниям и умениям учащихся по теме «Четырехугольники»

Изучение темы «Четырехугольники» в школьном курсе геометрии должно способствовать:

- освоению учащимися геометрических методов познания окружающего мира;

- формированию представлений о культурных, социальных и исторических факторах становления науки «геометрии»;

- осознанию значения геометрии в повседневной жизни человека;

- формированию представлений о геометрии как универсальном языке науки, части общечеловеческой культуры.

В результате изучения темы «Четырехугольники» в школьном курсе геометрии учащиеся развивают математическое и логическое мышление, овладевают математическими рассуждениями; развивают математическую интуицию; учатся применять математические знания при решении различных задач и оценивать полученные результаты; овладевают умениями решения учебных задач.

Результаты изучения данной темы должны отражать:

1) развитие умений работать с учебным математическим текстом (анализировать, извлекать необходимую информацию), точно и грамотно выражать свои мысли с применением математической терминологии и символики, проводить классификации, логические обоснования, доказательства математических утверждений;

2) формирование представлений о математике как о методе познания действительности;

3) овладение геометрическим языком; развитие умения использовать его для описания предметов окружающего мира; развитие пространственных представлений, изобразительных умений, навыков геометрических построений;

4) формирование умений формализации и структурирования информации, умения выбирать способ представления данных в соответствии с поставленной задачей — таблицы, схемы;

5) развитие умений применять изученные понятия, результаты, методы для решения задач практического характера и задач из смежных дисциплин с использованием при необходимости справочных материалов, компьютера, пользоваться оценкой и прикидкой при практических расчётах;

6) формирование систематических знаний о четырехугольниках и их свойствах, развитие умений моделирования реальных ситуаций на языке геометрии, исследования построенной модели с использованием геометрических понятий и теорем, аппарата алгебры, решения геометрических и практических задач.

В результате реализации данной программы школьники должны

знать: определение параллелограмма, его свойства и признаки; определения прямоугольника, квадрата, ромба, их свойства и признаки; определение трапеции, виды трапеции, средняя линия трапеции;

- уметь: определять вид четырехугольника; применять его свойства при решении задач как прикладного, так и практического характера.

- осуществлять доказательства тех фактов, которые используются при решении той или иной задачи практического или прикладного характера, которые не содержатся в школьных учебниках, включенных в Федеральный перечень учебников, рекомендованных Министерством образования и науки РФ [31];
- изображать требуемый четырехугольник, выполнять чертежи по условию задачи, проводить элементарные дополнительные построения, способствующие результативности поиска решения задачи;
- использовать приобретенные знания и умения в практической деятельности и повседневной жизни: для описания реальных ситуаций на языке геометрии и расчетов;
- вычислять значения геометрических величин (длин сторон, градусные меры углов, площади геометрических фигур, периметра четырехугольников).

Учебные задачи:

- школьники должны знать и уметь формулировать определения понятий всех видов изученных четырехугольников, использовать данные знания при решении геометрических и прикладных задач;
- школьники должны знать свойства (прямые теоремы) и признаки (обратные теоремы) изучаемых четырехугольников, уметь доказывать их и использовать при решении задач;
- школьники должны быть знакомы с классификационной схемой «Виды четырехугольников» и уметь ее использовать при решении задач.

Ниже приведена методическая система, включающая в себя планиметрические задачи по теме «Четырехугольники», ориентированная на формирование у школьников умений и навыков, применять теоретические знания к решению задач. Особенность данной системы состоит в том, что входящие в ее состав планиметрические задачи формулируются на клетчатой бумаге с различными размерами клеток. Данная система задач способствует развитию не только наглядно-образного мышления, но и способствует развитию аналитического мышления. Эта система задач эффективна в обучении школьников геометрическим методам познания окружающего мира как с преобладающим развитием правого полушария, так и преобладающим развитием левого полушария.

1. На клетчатой бумаге с размерами клетки 3×3 задан ромб ABCD (Рис.9). Найти
   1) периметр ромба;
   2) длины диагоналей ромба;
   3) тангенс его острого угла;
   4) тангенс его тупого угла;
   5) радиус окружности, вписанной в ромб.

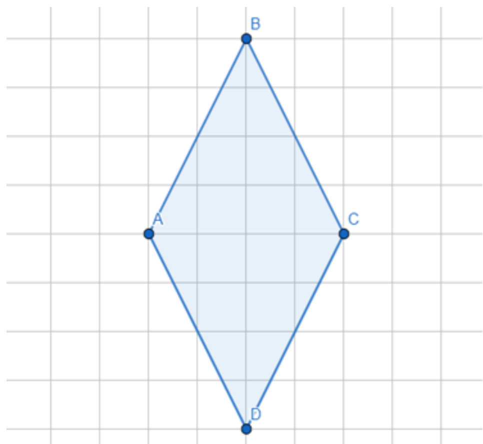

Рис.9. Ромб на клетчатой бумаге

2. На клетчатой бумаге с размерами клетки 3×3 задана трапеция ABCD (Рис. 10). Найти
   1) периметр трапеции;
   2) среднюю линию трапеции;
   3) длины боковых сторон трапеции;
   4) косинусы тупых углов трапеции;
   5) косинусы острых углов трапеции.

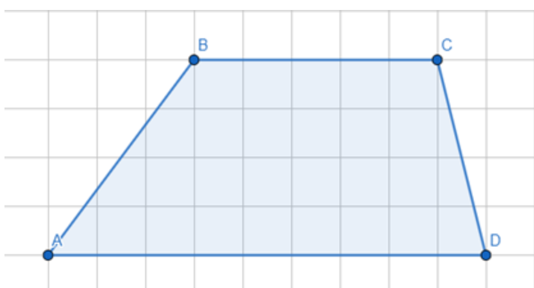

Рис.10. Трапеция на клетчатой бумаге

3. На клетчатой бумаге с размерами клетки 3×3 задан параллелограмм ABCD (Рис. 11). Найти
   1) периметр параллелограмма;
   2) длину диагонали AC;
   3) длину диагонали BD;
   4) тангенс ∠BCD;
   5) синус ∠BAD;

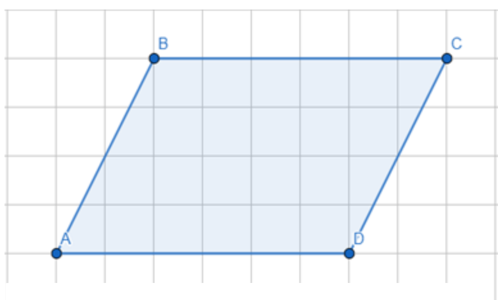

Рис.11. Параллелограмм на клетчатой бумаге

6) косинус ∠ADC;

7) синус угла между его диагоналями.

4. На клетчатой бумаге с размерами клетки 3×3 задан квадрат ABCD (Рис.12). Найти

1) периметр квадрата;

2) длину диагонали AC;

3) радиус окружности, вписанной в квадрат.

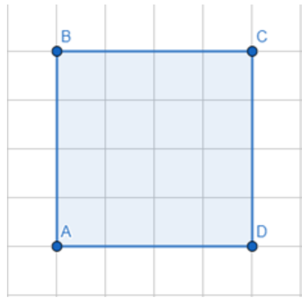

Рис.12. Квадрат на клетчатой бумаге

5. На клетчатой бумаге с размерами клетки 3×3 задан прямоугольник ABCD (Рис.13). Найти

1) периметр прямоугольника ABCD;

2) длину диагонали BD;

3) тангенс угла, образованного диагональю AC со стороной BC;

4) косинус угла, образованного диагональю AC со стороной CD;

5) тангенс угла, образованного диагональю AC со стороной BC;

6) синус угла, образованного его диагоналями.

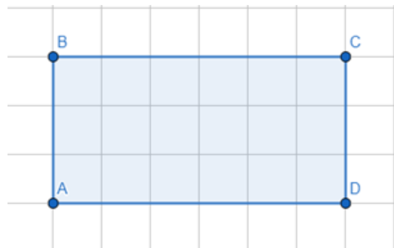

Рис.13. Прямоугольник на клетчатой бумаге

Приведенная методическая система задач, способствует формированию у школьников представления о таких понятиях планиметрии как многоугольник и его числовые характеристики. Прежде всего это периметр многоугольника, площадь многоугольника. В свою очередь формирование представления о многоугольниках обусловливает формирование у школьников представления о таких важных понятиях стереометрии как многогранник, его вершины и грани, развертка многогранника. Обучение школьников посредством разработанной методической системы способствует формированию у школьников тех основ, которые составляют базу обучения координатному и векторно-координатному способу решения планиметрических задач.

§3. Анализ содержания теоретического материала темы «Четырехугольники» в школьных учебниках геометрии

В данном параграфе представим анализ теоретического материала по теме «Четырехугольники» в школьном курсе геометрии 7-9 классов, излагаемом в учебниках различных авторов, включенных в Федеральный перечень учебных пособий, рекомендованных Министерством образования и науки РФ [31].

1. Учебник геометрии Л.С. Атанасяна и др. [3].

Тема «Четырехугольники» изучается в 8 классе. На изучение темы отводится отдельная глава. В 1-ом параграфе этой главы рассматриваются многоугольники. Сначала в пункте 39 приводится определение понятия многоугольника; определения понятий его вершин и сторон; дается определение понятия *n-угольника.* В учебнике приводятся примеры фигур, являющиеся многоугольниками и примеры фигур, не являющиеся ими. Кроме того, в нем рассматривается определения понятий соседних вершин многоугольника и его диагоналей. В конце пункта 39 говорится о том, что «любой многоугольник разделяет плоскость на две части, одна из которых называется внутренней, а другая – внешней областью многоугольника» [3, с. 98].

В пункте 40 1-го параграфа описываются выпуклые многоугольники. Приводится примеры невыпуклого и выпуклого многоугольника. В ходе рассмотрения понятия выпуклого *n-угольника* $A_1A_2A_3 \ldots A_{n-1}A_nA_1$ отмечается, что углы $A_nA_1A_2$, $A_1A_2A_3$, ..., $A_{n-1}A_nA_1$ - это углы данного выпуклого *n-угольника;* как находится сумма углов выпуклого *n-угольника.*

Пункт 41 1-го параграфа посвящен уже самому понятию четырехугольника. Атанасян Л.С. не приводит определения понятия четырехугольника, отмечается, что «каждый четырехугольник имеетс четыре вершины, четыре стороны и две диагонали»[3, с.99]. Далее раскрываются определения противоположных сторон четырехугольника и его вершин.

Рассматриваются примеры понятий выпуклого и невыпуклого четырехугольников. Так как учащимся уже известна сумма углов выпуклого *n-угольника,* то далее приводится следующее утверждение: «Сумма углов выпуклого четырехугольника равна 360°» [3, с. 100].

2-ой параграф посвящен трапеции и параллелограмму. При изучении понятия параллелограмма в пункте 42 приводится определение этого понятия, доказываются свойства параллелограмма.

В 41-м пункте параграфа говорится о признаках параллелограмма. В учебнике рассматриваются три признака параллелограмма, что позволяет более эффективно решать задачи на доказательство.

44 пункт второго параграфа посвящен трапеции. В этом пункте даются определения трапеции, равнобедренной трапеции и прямоугольной трапеции. В учебнике Л.С. Атанасяна [3] также присутствует для изучения теорема Фалеса.

3-ий параграф посвящен ромбу, прямоугольнику и квадрату. Отметим, что определения понятий ромба и прямоугольника даются на основе понятия параллелограмма. Так как прямоугольник и ромб являются параллелограммами, то прямоугольник и ромб обладают всеми его свойствами. Также в данном учебнике имеются особые свойства ромба и прямоугольника. Затем дается определение и свойство квадрата.

Пункт 47 рассказывает об осевой и центральной симметриях. В конце главы предлагается прорешать задачи.

2. «Геометрия, 7-9 класс», авторы И.М. Смирнова, В.А. Смирнов [26].

Авторы учебника рекомендует изучать тему «Четырехугольники» в 8 классе. Данная тема изучается в главе «Параллельность».

В 1-ом параграфе рассматривается понятие параллельных прямых. Сначала приводится определение понятия параллельных прямых, определение понятия секущей. Затем рассматриваются определения понятий соответственных, внутренних односторонних и внутренних накрест лежащих углов. Приводится доказательство признака параллельности двух прямых, и рассматриваются три следствия данной теоремы. Далее рассматривается доказательство теоремы о равенстве внутренних накрест лежащих углов.

Параграф второй посвящен сумме углов многоугольника. Сначала приводится доказательство того, что сумма углов треугольника равна 180^0, далее рассматривается доказательство общего случая.

В следующем параграфе рассматривается параллелограмм. Дается его определение, доказывается его три свойства. Рассмотрен пример на свойство параллелограмма. 4-ый параграф посвящен признакам параллелограмма, в котором приводится доказательство первого и второго признаков параллелограмма. Рассматриваются два примера на применение этих признаков.

В пятом параграфе говорится о прямоугольнике, ромбе и квадрате. Понятия ромба и прямоугольника определяются через понятие параллелограмма. Отмечается, что прямоугольник является частным случаем параллелограмма и обладает всеми его свойствами. Приводится доказательство признака прямоугольника о том, что если в параллелограмме диагонали равны, то он является прямоугольником.

Ромб – это тоже параллелограмм, значит он обладает всеми свойствами параллелограмма. В учебнике описано доказательство признака ромба.

Понятие квадрата определяется через понятие прямоугольника. И.М. Смирнова и В.А. Смирнов отмечают, что квадрат – это тоже ромб, у которого все углы прямые. Делается вывод о том, что квадрат обладает всеми свойствами ромба и прямоугольника.

Авторы учебника описывают понятие средней линии треугольника, дают его определение и доказывают теорему о ней. После этого ими определяется понятие трапеции, а именно: «Трапецией называется четырехугольник, у которого две стороны параллельны». Далее приводится определение средней линии трапеции и видов трапеции; рассматриваются доказательство теоремы о средней линии трапеции и следствие из нее.

В конце главы приводится теорема Фалеса и ее доказательство. В конце главы и каждого из параграфов приводятся вопросы и упражнения.

3. «Геометрия, 7-9 класс», автор И.Ф. Шарыгин [33].

Тема «Четырехугольники» изучается в главе «Подобие». Автор учебника рекомендует изучать эту тему в 8 классе.

1-й параграф данной главы посвящен теме «Параллелограмм, прямоугольник, ромб, квадрат».

В одну теорему объедены свойства и признаки параллелограмма, ее доказательство также приводится. И.Ф. Шарыгин указывает, что из определения понятия прямоугольника следует параллельность противоположных сторон прямоугольника, значит прямоугольник является частным случаем параллелограмма. Затем приводится доказательство теоремы о свойствах прямоугольника.

Свойства и признаки ромба тоже объединены в одну теорему, доказательство которой приводится. Автор учебника отмечает, что квадрат обладает всеми свойствами ромба и прямоугольника, т. к. он является и ромбом, и прямоугольником. Трапеция - еще один вид четырехугольника, изучается после теорем Фалеса и о средней линии треугольника. Определение понятия трапеции дается через понятие четырехугольника, у которого две стороны параллельны, а две другие не параллельны. Затем даются определения оснований, боковых сторон трапеции. Автор доказывает теорему о средней линии трапеции.

Выводы по проведенному анализу теоретической части школьных учебников по геометрии:

1. В каждом школьном учебнике по геометрии изучаются четырехугольники и частные виды четырехугольников (т.е. параллелограмм, трапеция, ромб, прямоугольник, квадрат).

2. Все проанализированные учебники содержат достаточный объем теоретического материала, ориентированного на формирование знаний по теме «Четырехугольники» на базовом уровне. Однако углубление и

расширение этих знаний на продвинутом уровне требует существенного оснащения содержания школьного учебника по геометрии задачами на доказательство.

§4. Анализ задачного материала по теме «Четырехугольники» в школьных учебниках геометрии

В школьном курсе геометрии можно выделить следующую типологию задач:

- задачи на вычисление (алгебраический способ, арифметический способ, комбинированный способ);

- задачи на доказательство (метод от противного, синтетический метод, аналитический метод, аналитико – синтетический метод);

- задачи на построение с помощью циркуля и линейки (метод геометрического места точек, метод элементарных построений, метод параллельного переноса).

Типы задач в учебнике «Геометрия, 7-9 класс», автор Л.С. Атанасян [3].

- Четырёхугольник: определение (п. 41 учебника): №366, №367, №368, №369,370;

- Параллелограмм: определение (п. 42 учебника), признаки (признак № 1 – п. 43 учебника; признак №2 – п. 43 учебника): №371, №372, №373, №374, №375, №376, №377, №379, №380, №382, №383, №394;

- Трапеция: определение, основания, боковые стороны, типы трапеции (п. 44 учебника): №386, №387, №388, №389, №390, №391, №392,№397, №398;

- Прямоугольник: определение (п. 45 учебника): №399, №400, №401, №402, №403, №413;

- Ромб: определение (п. 46 учебника), свойство диагоналей ромба (п. 46 учебника): №404, №405, №406, №407, №408, №409, №414;

- Квадрат: определение (п. 46 учебника), свойства квадрата (№1 и №2 свойства - п. 46 учебника): №410, №411, №412, №415;

Также следует выделить задачи учебника: №378, №384, №385, № 393, №396, где автор показывает ход их решения.

Типы задач в учебнике «Геометрия, 7-9 класс», автор А.В. Погорелов [20].

- Четырёхугольник: определение (п. 50 учебника): №1, №2;

- Параллелограмм: определение (п. 51 учебника), признаки (№ 1 – п. 51 учебника; №2 – задача 18; №3): №3, №4, №17;

- Свойство диагоналей параллелограмма (п. 52 учебника): №5, №6, №7, №22(2), №23(2);

- Свойство противолежащих сторон параллелограмма (п. 53 учебника): №8, №10, №20, №21, №22(1), №23(1);

- Свойство противолежащих углов параллелограмма (п. 53 учебника): №9, №11, №12, №13, №14, №15, №16;

- Прямоугольник: определение (п. 54 учебника): №27, №28, №29, №30, №31, №32;

- Ромб: определение (п. 55 учебника), признаки (№1 – задача 33; №2 – задача 34; №3 – задача 36): №37, №39(1);

- Свойство диагоналей ромба (п. 55 учебника): №35, №38, №39(2);

- Квадрат: определение (№1 – п. 56 учебника, №2), признаки (№1– задача 40; №2): №41, №42, №43, №44, №45,№46, №47;

- Трапеция: определение, основания, боковые стороны, типы трапеции (п. 59 учебника): №60, №61, №62, №63, №64, №71, №72;

- Средняя линия трапеции: определение, свойства (№1, 2) п. 59 учебника: №59, №65, №66, №67, №68, №69, №70;

Также следует выделить задачи учебника №18, №24, №25, № 26, №33, №34, №36, №40,№ 60, так как они являются теоретическим материалом, который выносится за рамки параграфа.

Таким образом, можно утверждать, что все учебники содержат достаточный объем задачного материала, ориентированного на формирование умений и закрепления знаний и навыков по теме «Четырехугольники» на базовом уровне. Однако обучение школьников решению задач на продвинутом уровне требует существенного оснащения задачного материала, предлагаемого в школьных учебниках.

Выводы по первой главе

1. Проведен анализ учебников, включенных в Федеральный перечень учебных пособий, рекомендованных Министерством образования и науки РФ[31]. Установлено, что все учебники содержат достаточный объем теоретического и задачного материала, ориентированного на формирование умений и закрепления знаний и навыков по теме «Четырехугольники» на базовом уровне. Однако обучение школьников решению задач на продвинутом уровне требует существенного оснащения задачного материала, предлагаемого в школьных учебниках.

2. Разработана методическая система задач, способствующая обучению школьников основным понятиям и фактам темы «Четырехугольники», формированию у школьников представления о таких важных понятиях планиметрии как многоугольник и его числовые характеристики, в частности периметр многоугольника, площадь многоугольника. Обучение школьников посредством разработанной методической системы задач на клетчатой бумаге способствует формированию у школьников тех основ, которые составляют базу обучения координатному и векторно-координатному способу решения планиметрических задач.

ГЛАВА II. МЕТОДИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ОБУЧЕНИЯ ШКОЛЬНИКОВ РЕШЕНИЮ ПЛАНИМЕТРИЧЕСКИХ ЗАДАЧ ПО ТЕМЕ «ЧЕТЫРЕХУГОЛЬНИКИ» В КУРСЕ ГЕОМЕТРИИ ОСНОВНОЙ ШКОЛЫ

§5. Формы, методы и средства обучения школьников решению геометрических задач

«Геометрические задачи (к ним в общем случае можно отнести и теоремы, вопросы методики работы с которыми рассмотрены в публикациях М. Б. Воловича, Я. И. Груденова, О. Б. Епишевой, Ю. М. Колягина, Г. И. Саранцева и др.) помогают освоить приемы рассуждений (дедуктивного и индуктивного), являются средством формирования следующих умений:

– на основе наблюдения или обобщения частных (или знакомых) задач выдвигать гипотезу о способе решения;

– анализировать ее текст, выделять условие и заключение;

– осуществлять поиск способа доказательства, решения;

– выстраивать прямое и косвенное доказательство;

– отбирать аргументы и на их основе делать выводы;

– грамотно использовать признаки, свойства, необходимые и достаточные условия.

Перечисленные умения лежат в основе ключевых компетенций и универсальных учебных действий (направленность на формирование которых заложена во ФГОС общеобразовательной школы)»[29, с. 53].

Мищенко Т.М. [18] утверждает, что «уровень геометрической подготовки учащихся и содержание изучаемой темы позволяют определить основную форму работы в виде беседы с активным привлечением школьников на всех этапах урока: при введении нового материала; его закреплении; решении задач»[18, с. 9].

Решая определенную геометрическую задачу, у школьников происходит формирование:

-логически грамотных речевых выражений своих мыслей;

-коммуникативных умений;

-наглядно-образного и абстрактного мышления.

В школьном курсе математики решение геометрических задач чаще всего вызывает большое затруднение у учащихся.

«Они не только не умеют самостоятельно решать задачи, но часто оказываются не в состоянии воспроизвести доказательство, разобранное в учебнике, если несколько видоизменить чертеж или ввести другие буквенные обозначения. В обосновании шагов решения ссылаются не на ту теорему» [30, с. 53].

Методику обучения учащихся решению планиметрических задач можно разделить на три вида:

- методика работы с геометрическими задачами на вычисление;

- методика работы с задачей на построение в школьном курсе планиметрии;

-методика работы с задачей на доказательство.

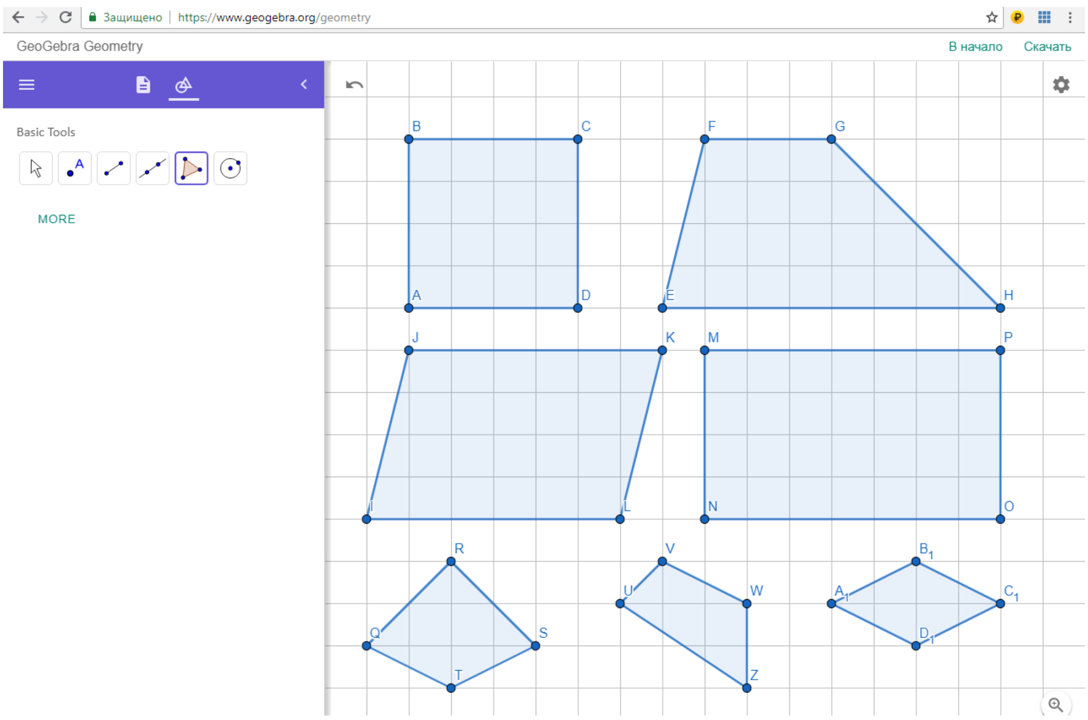

Рис.14. Построение четырехугольников в программе «GeoGebra»

В основе обучения школьников решению планиметрических задач на вычисление, доказательство, построение важную значимость приобретает рисунок (изображение), отражающий наглядное отображение условия и требования задачи. Справедливо отмечают многие учителя-практики, что правильно построенный рисунок (изображение) это наполовину решенная задача. Иногда только правильно построенный рисунок (изображение) может служить основой доказательства или опровержения какого-то факта. Обучать школьников построению правильных изображений одна из сложных задач методики обучения геометрии. Далее приводится один из вариантов использования программного продукта «GeoGebra» с целью обучения школьников построению наглядных, полных и наиболее точных изображений, соответствующих условиям и требованиям данной задачи (Рис.14).

§6. Методические рекомендации по обучению школьников решению геометрических задач по теме «Четырехугольники»

Решение планиметрических задач в школьном курсе геометрии является одним из самых важных этапов усвоения школьниками системы математических знаний в курсе геометрии основной школы, в особенности основных геометрических понятий и связей, которые образуются между ними. Когда школьники работают с геометрической задачей, в частности планиметрической задачей по теме «Четырехугольники», то у них происходит развитие всевозможных творческих способностей, развитие самостоятельного мышления, также у учащихся приобретаются навыки практического применения теоретических знаний по геометрии, которые им обязательно пригодятся при дальнейшем изучении предмета. Как в последнее время показывает педагогическая практика, когда учащиеся решают геометрические задачи, путем не общих и распространенных приемов, то это не дает им положительных результатов, и что в свою очередь вызывает большие затруднения у них.

Когда учитель математики начинает планировать урок, то ему необходимо обратить особое внимание школьников на теорию из учебника, которая нужна при решении геометрических задач по теме «Четырехугольники» и чтобы учащиеся переосмыслили ее содержание на практических занятиях. Данный методический подход поможет школьникам лучше осмыслять и воспринимать конкретный пример, осознанно применять теоретические знания на практике, также он будет способствовать наиболее быстрому закреплению изученного теоретического материала, а приобретенные уже ранее математические знания в области геометрии станут более стабильными и прочными.

Основные этапы, которые можно выделить при решении геометрической задачи по теме «Четырехугольники»:

- первоначально следует изучить условие геометрической задачи;
- построить изображение фигуры;
- проанализировать, каким будет решение геометрической задачи, т.е. найти нужный способ решения;
- выбрать наиболее оптимального путь решения планиметрической задачи;
- решить геометрическую задачу;
-записать ответ и провести исследование полученного нами результата.

Зачастую школьники не проводят исследование полученного ими результата, что в свою очередь приводит к неправильному ответу.

Алгоритм решения планиметрических задач по теме «Четырехугольники», который рекомендуется предложить школьникам на уроке:

- сначала следует изучить условие геометрической задачи. Построить рисунок, который будет соответствовать условию нашей планиметрической задачи;

- школьнику необходимо уяснить, что надо искать в геометрической задаче и какой теоретический материал будет полезен и может понадобиться ему;
- далее из системы опорных геометрических задач стоит выделить наиболее повторяющиеся планиметрические задачи, желательно стоит сопровождать рисунками (изображениями), которые будут входить в ход решения конкретной геометрической задачи;
- школьнику необходимо выяснить, какие из ранее изученных геометрических задач могут понадобиться ему решении конкретной геометрической задачи;
- беря во внимание предыдущий шаг, школьники должны попытаться переформулировать данную задачу. После чего, попробовать решить ее самостоятельно.

Зная систему опорных геометрических (планиметрических) задач, учитель математики четко должен планировать необходимость использования конкретной опорной геометрической (планиметрической) задачи при решении данной геометрической (планиметрической) задачи. Это в свою очередь дает возможность обучить школьников приему «разложения» сложной геометрической (планиметрической) задачи на более простые составляющие геометрической (планиметрической) задачи.

Синтетический и аналитический методы являются основными приемами при решении школьниками геометрических задач.

Используя синтетический методе решения геометрической задачи школьники должны прояснить себе, что синтетическими рассуждениями называют рассуждения с последующим переходом, т.е. с помощью логических умозаключений, от данных условий задачи к ее заключению. Вопрос «Что мы можем узнать исходя из данных условий задачи?» является основным в этом методе.

Используя аналитический метод решения геометрической задачи, школьники должны осознанно представлять себе, что проведенный ими анализ должен состоять в том, что их рассуждения должны начинаться от искомого и заканчиваться данным. Вопрос «Что надо знать, чтобы ответить на главный вопрос задачи?» является основным. Проводя анализ геометрической задачи, следует обращать особое внимание школьников на то, что зачастую условие планиметрической задачи дает своего рода подсказку на очередной основной и ведущий вопрос.

§7. Системы задач по теме «Четырехугольники», ориентированные на усвоение понятий: прямоугольник и его элементы, параллелограмм и его элементы, трапеция и ее элементы, ромб и его элементы

Как было уже отмечено в первой главе учебники и учебные пособия по геометрии, входящие в перечень учебных пособий, рекомендованных Министерством образования и науки, способствуют обучению школьников усвоению теоретических знаний и решению планиметрических задач на базовом уровне. Однако обучению геометрическим методам познания окружающего мира на продвинутом уровне требует разработки особой методической системы планиметрических задач по теме «Четырехугольники», ориентированной на обучение школьников решению творческих задач. Далее мы предлагаем систему задач, обусловливающую обучение школьников основным приемам решения задач продвинутого уровня. При разработке этой системы мы использовали как задачный материал школьных учебников разных авторов, так и задачный материал, содержащийся в пособиях для внеурочной деятельности.

Система задач на тему «Четырехугольник и его элементы»

Задача 1. «Постройте какой-нибудь четырехугольник PQRS. Укажите его противолежащие стороны и вершины»[20, с. 86].

Задача 2. «Докажите, что у четырехугольника, описанного около окружности, суммы противолежащих сторон равны» [20, с. 86].

Система задач на тему «Прямоугольник и его элементы»

Задача 3. «Докажите, что параллелограмм, один из углов которого прямой, является прямоугольником» [3, с. 113].

Задача 4. «Докажите, что если в четырехугольнике все углы прямые, то четырехугольник — прямоугольник» [3, с. 113].

Задача 5. «Докажите, что если у параллелограмма диагонали равны, то он является прямоугольником»[20, с. 88].

Задача 6. «Найдите периметр прямоугольника ABCD, если биссектриса угла A делит сторону: а) BC на отрезки 45,6 см и 7,85 см; б) DC на отрезки 2,7 дм и 4,5 дм» [3, с. 113].

Задача 7. «В прямоугольнике точка пересечения диагоналей отстоит от меньшей стороны на 4 см дальше, чем от большей. Периметр прямоугольника 56 см. Найдите стороны прямоугольника» [20, с. 88].

Система задач на тему «Параллелограмм и его элементы»

Задача 8. «Докажите, что выпуклый четырехугольник ABCD является параллелограммом, если: а) $\angle BAC=\angle ACD$ и $\angle BCA=\angle DAC$; б)$AB \parallel CD$, $\angle A=\angle C$» [3, с. 104].

Задача 9. «Из вершин B и D параллелограмма ABCD, у которого $AB \neq BC$ и угол A острый, проведены перпендикуляры BK и DM к прямой AC. Докажите, что четырехугольник BMDK — параллелограмм» [3, с. 104].

Задача 10. «На сторонах AB, BC, CD и DA четырехугольника ABCD отмечены соответственно точки M, N, P и Q так, что AM=CP, BN=DQ, BM=DP, NC=QA. Докажите, что ABCD и MNPQ — параллелограммы» [3, с. 104].

Задача 11. «Диагонали параллелограмма ABCD пересекаются в точке O. Докажите, что четырехугольник вершинами которого являются середины отрезков OA, OB, OC и OD, — параллелограмм» [3, с. 105].

Задача 12. «Периметр параллелограмма равен 48 см. Найдите стороны параллелограмма, если: а) одна сторона на 3 см больше другой; б) разность двух сторон равна 7 см; в) одна из сторон в два раза больше другой» [3, с. 104].

Задача 13. «Биссектриса угла A параллелограмма ABCD пересекает сторону BC в точке K. Найдите периметр этого параллелограмма, если BK= 15 см, KC=9 см» [3, с. 104].

Задача 14. «Найдите углы параллелограмма ABCD, если: а) $\angle A = 84°$; б)$\angle A-\angle B = 55°$; в) $\angle A + \angle C= 142°$; г) $\angle A = 2\angle B$; д) $\angle CAD=16°$, $\angle ACD = 37°$» [3, с. 104].

Задача 15. «В параллелограмме MNPQ проведен перпендикуляр NH к прямой MQ, причем точка H лежит на стороне MQ. Найдите стороны и углы параллелограмма, если известно, что MH=3см, HQ = 5 см, $\angle MNH=30°$» [3, с. 104].

Задача 16. « Постройте параллелограмм: 1) по двум сторонам и диагонали; 2) по стороне и двум диагоналям»[20, с. 87].

Задача 17. « Постройте параллелограмм: 1) по двум сторонам и углу; 2) по диагоналям и углу между ними» [20, с. 87].

Задача 18. Периметр параллелограмма равен 90 см, острый угол 60°. Диагональ делит его тупой угол на части в отношении 1 к 3. Найти стороны параллелограмма.

Дано: ABCD- параллелограмм (Рис.15), $\angle A=60°$, P_{ABCD}= 90 см, $\frac{\alpha}{\beta} : \frac{1}{3}$

Найти: AD, AB

Решение:

1) $\angle D=180°-60°=120°$,

$\frac{\alpha}{\beta} : \frac{1}{3} \Rightarrow \alpha = 30°$, $\beta = 90°$;

2) Рассмотрим $\triangle ABD$:

$\angle ABD=90°$, $\angle ADB=30°$,

Пусть AB=x, AD=y,

$x= \frac{1}{2} \cdot y$,

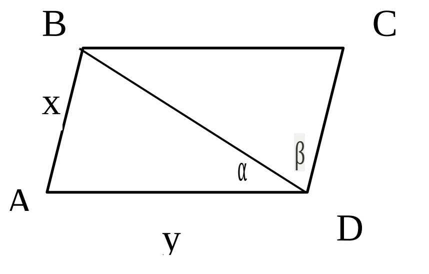

Рис.15. Рисунок к задаче №18

P=2(x+y),

P=2($\frac{1}{2}$·y +y)=3y,

3y=90,

y=30

x= $\frac{1}{2}$·y= $\frac{1}{2}$·30=15,

x=AB=CD=15 см, y=AD=BC=30 см.

Ответ: 15, 30, 15, 30.

Задача 19. Величина одного из углов параллелограмма равна 60°, меньшая диагональ равна $2\sqrt{31}$ см. Длина перпендикуляра, проведенного из точки пересечений диагоналей к большей стороне равна $\frac{\sqrt{75}}{2}$ см. Найти длины сторон и большую диагональ.

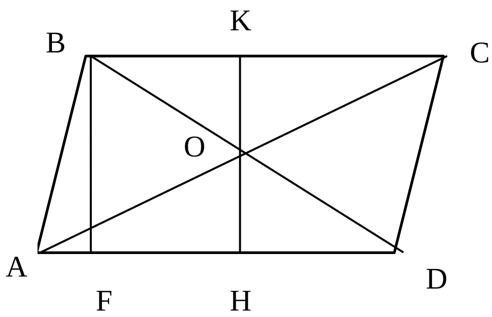

Рис.16. Рисунок к задаче №19

Дано: ABCD- параллелограмм (Рис.16), AC∩BD=O, BD= $2\sqrt{31}$, ∠BAD=60°, OH= $\frac{\sqrt{75}}{2}$ см.

Найти: AB, AD, AC

Решение:

1) OH= $\frac{\sqrt{75}}{2}$ ⇒ KH= $\frac{\sqrt{75}}{2}$ ·2= $\sqrt{75}$ =BF;

2) a= $\frac{h_b}{sin\alpha}$, $\angle\alpha$=60°, h_b= $\sqrt{75}$,

a= $\frac{\sqrt{75}}{sin60°}$ = $\frac{\sqrt{75}\cdot 2}{\sqrt{3}}$ = $\sqrt{25}$ ·2=10=AB;

3) Рассмотрим ∆ABF:

∠F=90°, ∠A=60° ⇒ ∠B=30° ⇒ AF= $\frac{1}{2}$·AB,

AF= $\frac{1}{2}$·10=5;

4) Рассмотрим ∆FBD:

∠F=90° ⇒ ∆FBD-прямоугольный ⇒FD= $\sqrt{BD^2-BF^2}$=7;

5) AD=FD+AF=7+5=12;

6) $\triangle$HOD-прямоугольный, HD= $\sqrt{OD^2 - OH^2} = \frac{7}{2}$;

7) $\triangle$AOH-прямоугольный, AO= $\sqrt{AH^2 + OH^2}$,

AH=AD-HD=12- $\frac{7}{2} = \frac{17}{2}$,

AO= $\sqrt{\frac{289}{4} + \frac{75}{4}} = \frac{2\sqrt{91}}{2} = \sqrt{91} \Rightarrow$ AC=2$\cdot\sqrt{91}$

Ответ: 10; 12; 2$\cdot\sqrt{91}$.

Задача 20. В параллелограмме ABCD: высота, проведенная из вершины B, тупого угла на сторону AD, делит ее в отношении 5 к 3, считая от вершины D. Найти отношение $\frac{AC}{BD}$, если $\frac{AD}{AB}$=2.

Дано: ABCD- параллелограмм (Рис. 17), $\frac{DK}{AH} = \frac{5}{3}$, $\frac{AD}{AB}$=2

Найти: $\frac{AC}{BD}$

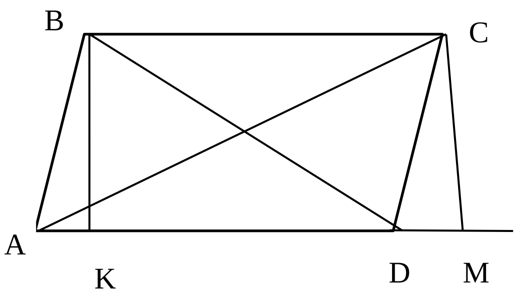

Рис.17.Рисунок к задаче №20

Решение:

1) Пусть AB=x, тогда AD=2x,

AK= $\frac{3}{8} \cdot$AD= $\frac{3}{8} \cdot 2x = \frac{6x}{8} = \frac{3x}{4}$,

KD= $\frac{5}{8} \cdot$AD= $\frac{5}{8} \cdot 2x = \frac{10x}{8} = \frac{5x}{4}$;

2)Рассмотрим $\triangle$ABK:

$BK^2 = AB^2 - AK^2 = x^2 - (\frac{3x}{4})^2 = \frac{7x^2}{16}$;

3)Рассмотрим $\triangle$BKD:

$BD^2 = BK^2 + KD^2 = \frac{7x^2}{16} + (\frac{5x}{4})^2 = \frac{32x^2}{16} = 2x^2$;

4) $AM = \frac{3x}{4} + \frac{3x}{4} + \frac{5x}{4} = \frac{11x}{4}$;

5) $\triangle$ACM: $AC^2 = CM^2 + KD^2 = \frac{7x^2}{16} + \frac{121x^2}{16} = \frac{128x^2}{16} = 8x^2$;

6) $\frac{AC^2}{BD^2} = \frac{8x^2}{2x^2}$, $\frac{AC^2}{BD^2} = 4$, $\frac{AC}{BD} = \frac{2}{1}$

Ответ: $\frac{2}{1}$

Задача 21. В параллелограмме с периметром 32 см проведены диагонали. Разность между периметров двух смежных треугольников равна 8. Найти длины сторон параллелограмма.

Дано: ABCD- параллелограмм (Рис. 18), P_{ABCD}=32 см, P_{ACD} - P_{ACB} = 8см

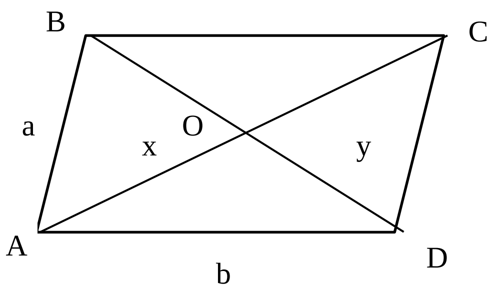

Рис.18.Рисунок к задаче №21

Найти: AB, AD

Решение:

Пусть AO=OC=x, BO=OD=y,

P_{ABCD}=2(a+b),

32=2(a+b),

a+b=16,

(b+y+x)-(a+y+x)=8,

b+y+x-a-y-x=8,

b-a=8,

$$\begin{aligned} a+b&=16, \\ b-a&=8; \end{aligned}$$

a= 16-b,

b-16+b=8,

2b=24,

b= 12 ⇒ a=16-12=4 ⇒

a=AB=CD=4 , b=BC=AD=12

Ответ: 4; 12; 4; 12.

Задача 22. Параллелограмм ABCD, у которого AB=153 см, AD=180 см, высота BE=135 см разделен на три равновеликие фигуры прямыми, перпендикулярными AD. На каком расстоянии от т. A находится точка пересечения этих перпендикуляров с AD?

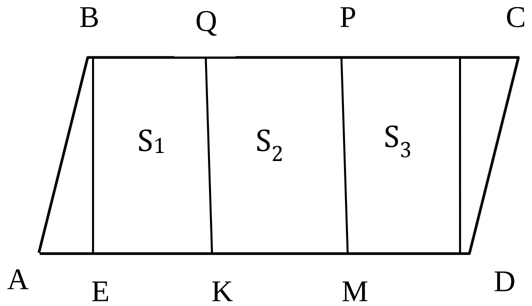

Рис.19.Рисунок к задаче №22

Дано: ABCD- параллелограмм, AB=153 см, AD=180 см, BE=135 см, $S_1=S_2=S_3$, $a\perp AD$, $b\perp AD$ (Рис.19)

Найти: AK, AM

Решение:

1) $S_{ABCD}= AD\cdot BE=180\cdot 135=24300$,

$S_1=S_2=S_3=\frac{24300}{3} = 8100$;

2) Рассмотрим PQKM: QK=PM=135, PQ=KM=y,

$S_2=QP\cdot KQ=135y$,

$8100=135y$,

$y=60 \Rightarrow KM=60$

3) Рассмотрим $\triangle ABE$: $AE = \sqrt{153^2-135^2}= \sqrt{5184}= 72$,

$AD=AE+2x+KM$,

$180=72+2x+60$,

$2x=48$,

$x=24 \Rightarrow EK=MD=24$;

4) AK=AE+EK=72+24=96;

5) AM=AK+KM=96+60=156.

Ответ: AK=96, AM=156.

Система задач на тему «Трапеция и ее элементы»

Задача 23. «Докажите, что отрезок, соединяющий середины боковых сторон трапеции, параллелен основаниям трапеции» [3, с. 106].

Задача 24. «Докажите, что в равнобедренной трапеции: а) углы при каждом основании равны; б) диагонали равны» [3, с. 106].

Задача 25. «Найдите углы B и D трапеции ABCD с основаниями AD и BC, если $\angle A=36°$, $\angle C= 117°$» [3, с. 106].

Задача 26. «Один из углов равнобедренной трапеции равен 68°. Найдите остальные углы трапеции» [3, с. 106].

Задача 27. «Основания прямоугольной трапеции равны a и b, один из углов равен a. Найдите: а) большую боковую сторону трапеции, если a = 4 см, b = 7 см, α=60°; б) меньшую боковую сторону трапеции, если a=10 см, b=15см, α=45°» [3, с. 106].

Задача 28. «Постройте трапецию по основаниям и боковым сторонам» [20, с. 91].

Задача 29. «Постройте трапецию по основаниям и диагоналям» [20, с. 91].

Задача 30. В равнобедренной трапеции известны основания 20 и 12 см. Центр окружности описанной лежит на большем основании. Найти диагональ и боковую сторону.

Дано: ABCD- равнобедренная трапеция, AB=20 см, CD= 12 см, O- центр описанной окружности AO=OB=10 см (Рис.20)

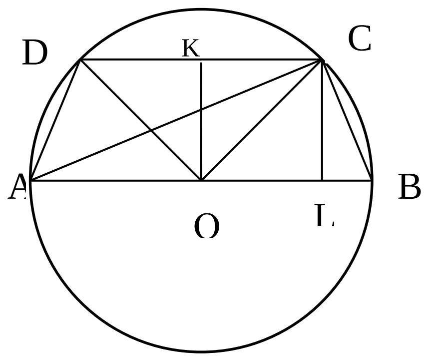

Рис.20.Рисунок к задаче №30

Найти: AC, AD

Решение:

1) OK= $\sqrt{OC^2 - AC^2}$= $\sqrt{10^2 - 6^2}$= $\sqrt{100 - 36}$=

= $\sqrt{64}$ = 8 (по т. Пифагора);

2) OL= $\sqrt{10^2 - 8^2}$= $\sqrt{100 - 64}$= $\sqrt{36}$ = 6 (по т. Пифагора);

3) BL= $\frac{1}{2}$AB-OL= $\frac{1}{2}$·20-6=10-6=4;

4) BC= $\sqrt{CL^2 + BL^2}$= $\sqrt{8^2 + 4^2}$ = $\sqrt{64 + 16}$= $\sqrt{80}$ =4$\sqrt{5}$=AD;

5) AL=AB-LB=20-4=16;

6) AC= $\sqrt{AL^2 + CL^2}$= $\sqrt{16^2 + 8^2}$ = $\sqrt{256 + 64}$= $\sqrt{320}$ =8$\sqrt{5}$.

Ответ: 8$\sqrt{5}$, 4$\sqrt{5}$.

Задача 31. Прямые, содержащие боковые стороны равнобедренной трапеции пересекаются под прямым углом. Площадь трапеции равна 12 см^2, длина высоты равна 2 см. найти длины всех сторон.

Дано: ABCD-равнобедренная трапеция, $S_{ABCD}=12$ см^2, DH= 2 см, $\angle ASB=90°$ (Рис.21)

Найти: AB, BC, CD, AD

Решение:

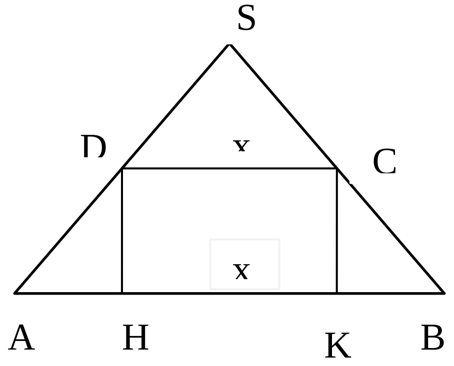

Рис.21.Рисунок к задаче №31

1) Т.к. $DC \parallel AB$, то соответственные углы равны ($\angle 1=\angle 2=\angle 3=\angle 4$), значит $\triangle ADH$-равнобедренный, AH=HD=2;

2) $BC=AD==\sqrt{2^2+2^2}$ = $=\sqrt{4+4}=\sqrt{8}==2\sqrt{2}$;

3) $S_{ABCD}=\frac{1}{2}(DC+AB)\cdot DH=\frac{1}{2}(AB+DC)\cdot 2$,

12=AD+CD;

4) Пусть CD=x, KH=x,

AB+CD=12,

2+x+2+x=12,

2x=8,

$x=4 \Rightarrow CD=4$;

AB=12-CD= 12-4=8

Ответ: 4; 8; $2\sqrt{2}$.

Задача 32. Один из углов трапеции равен 30°, а прямые, содержащие боковые стороны трапеции пересекаются под прямым углом. Найти длины боковых сторон и ее основания, если средняя линия трапеции равна 10 см, а одно из оснований 8 см.

Дано: ABCD- трапеция, BC= 8 см, KL- средняя линия, $\angle A=30°$, $AB \cap CD=S$, $\angle S=90°$ (Рис.22)

Найти: AD, AB, CD

Решение:

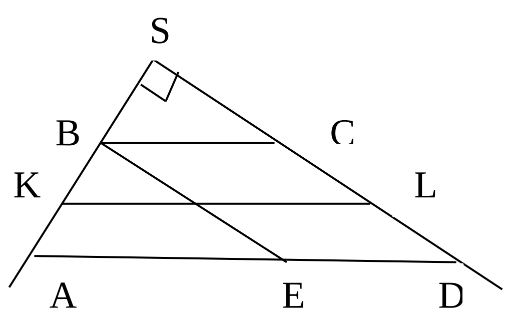

Рис.22. Рисунок к задаче №32

1) KL- средняя линия ⇒ KL= =$\frac{1}{2}$(AD+BC),

10= $\frac{1}{2}$(8+AD),

AD=12;

2) BE‖CD ⇒ ∠ABE= 90°;

3) Рассмотрим △ABE- прямоугольный,

∠A=30° ⇒ BE= $\frac{1}{2}$ AE,

AE=AD-BC=12-8+4=BC,

BE=$\frac{1}{2}$·4=2 ⇒ CD=2

AB= $\sqrt{AE^2-BE^2}$= $\sqrt{4^2-2^2}$= $\sqrt{16-4}$= $\sqrt{12}$ =2 $\sqrt{3}$ (по т. Пифагора).

Ответ: 2 $\sqrt{3}$, 4, 12.

Задача 33. Диагональ прямоугольной трапеции и ее боковая сторона равны. Найти длину средней линии, если высота 2см, а боковая сторона 4 см.

Дано: ABCD- прямоугольная трапеция, AC=BC=4, AD=2 (Рис.23)

Найти: KH

Решение:

1) CD= $\sqrt{AC^2-AD^2}$= $\sqrt{4^2-2^2}$= $\sqrt{16-4}$= = $\sqrt{12}$ =2 $\sqrt{3}$ (по т. Пифагора);

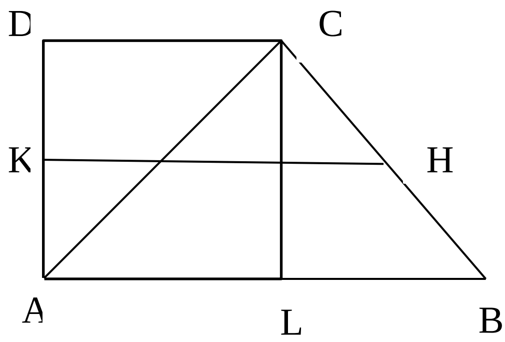

Рис.23. Рисунок к задаче №33

2)AL=CD=2 $\sqrt{3}$ = BL;

3) KH= $\frac{1}{2}$·(AB+CD)= $\frac{1}{2}$·(2 $\sqrt{3}$+ 2 $\sqrt{3}$+ 2 $\sqrt{3}$)= $\frac{6\sqrt{3}}{2}$= 3 $\sqrt{3}$

Ответ: 3 $\sqrt{3}$

Задача 34. Найти боковую сторону равнобедренной трапеции описанной около круга, если известно, что ее площадь равна $32\sqrt{3}$ см^2, а острый угол при основании равен 60°

Дано: ABCD- равнобедренная трапеция, ABCD- описана около окружности, $S_{ABCD}= 32\sqrt{3}$, $\angle A=60°$ (Рис.24)

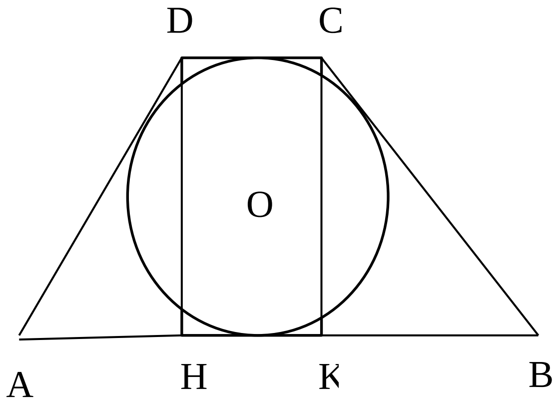

Рис.24. Рисунок к задаче №34

Найти: AD

Решение:

1) Пусть AD=x, тогда AH= $\frac{x}{2}$ (по свойству катета, лежащего против угла 30°);

2) AH=BK= $\frac{x}{2}$;

3) DC+AB=2AD,

$DC+\frac{x}{2}+DC+\frac{x}{2}=2x$,

2DC=x,

$DC=\frac{x}{2}$

4) $S_{ABCD}=\frac{1}{2}\cdot(AB+CD)\cdot h$,

$AB= x+\frac{x}{2}=\frac{3x}{2}$, $DH= x\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}$,

$32\sqrt{3}=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{x}{2}+\frac{3x}{2}\right)\cdot x\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}$,

$32\sqrt{3}=\left(\frac{x}{4}+\frac{3x}{4}\right)\cdot x\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}$,

$64= x\cdot x$,

$x^2= 64$,

x= 8

AD=CB= 8 см

Ответ: 8

Задача 35. Диагонали равнобедренной трапеции взаимно перпендикулярны, ее площадь равна a^2. Найти высоту трапеции.

Дано: ABCD – равнобедренная трапеция, $S_{ABCD}= a^2$ (Рис.25)

Найти: CH

Решение:

1) ACB' : $\angle ACB'=90°$;

2) $S_{ACB'} = \frac{1}{2} \cdot AB' \cdot CH = \frac{1}{2} \cdot (AB+CD) \cdot CH = S_{ABCD}$,

$S_{ACB'} = a^2$;

3) $\angle AB'C = \angle CAB' = 45°$;

4) $\triangle CHB'$: $\angle CHB'=90°$,

$\angle HB'C = \angle HCB' = 45° \Rightarrow CH=HB'= \frac{1}{2} \cdot AB' = \frac{1}{2} \cdot (AB+CD)$;

5) $S_{ACB'} = \frac{1}{2} \cdot AB' \cdot CH$,

$CH^2=a^2$,

$CH=a$

Ответ: a

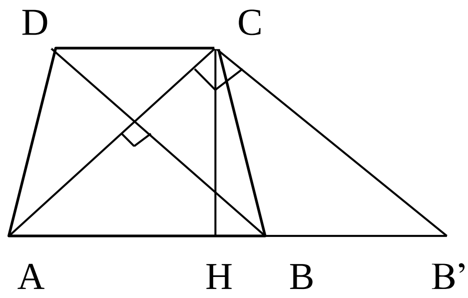

Рис.25. Рисунок к задаче №35

Задача 36. Диагонали равнобедренной трапеции 10 см, площадь 48 см^2. Найти высоту данной трапеции.

Дано: ABCD – равнобедренная трапеция, S_{ABCD}= 48 см^2, AC=BD=10 (Рис. 26)

Найти: CH

1) $S_{AB'C} = S_{ABCD}$,

$S=\frac{1}{2} \cdot AC \cdot B'C \cdot \sin\alpha$,

$\sin\alpha = \frac{24 \cdot 8}{100} = 0,96$,

$\cos^2\alpha = (1-\sin^2\alpha) = 1-0,96^2 = 0,084$,

$\cos\alpha = 0,28$

2) $(AB')^2 = AC^2 + CB'^2 - 2AC \cdot CB' \cdot \cos\angle C$,

$(AB')^2 = 100+100-2 \cdot 100 \cdot 0,28$,

$(AB')^2 = 200-56$,

$(AB')^2 = 144$,

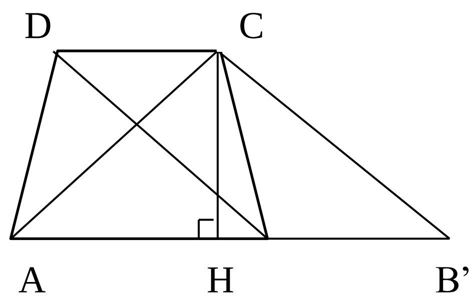

Рис.26. Рисунок к задаче №36

$AB'=12$

3) $S_{ACB'}=\frac{1}{2}\cdot AB'\cdot CH$,

$48=\frac{1}{2}\cdot 12\cdot CH$,

$CH=8$

Ответ: 8

Система задач на тему «Ромб и его элементы»

Задача 37. «Докажите, что параллелограмм является ромбом, если: а) его диагонали взаимно перпендикулярны; б) диагональ является биссектрисой его угла» [3, с. 113].

Задача 38. «В ромбе одна из диагоналей равна стороне. Найдите: а) углы ромба; б) углы, которые диагонали ромба образуют с его сторонами» [3, с. 113].

Задача 39. «Найдите периметр ромба ABCD, в котором $\angle B=60°$, $AC = 10{,}5$ см» [3, с. 113].

Задача 40. «Найдите углы, которые образуют диагонали ромба с его сторонами, если один из углов ромба равен 45°» [3, с. 113].

Задача 41. «Постройте ромб: 1) по углу и диагонали, исходящей из вершины этого угла; 2) по диагонали и противолежащему углу» [20, с. 88].

Задача 42. «Постройте ромб: 1) по стороне и диагонали; 2) по двум диагоналям»[20, с. 88].

Задача 43. Высота ромба, проведенная из вершины тупого угла, делит его сторону на отрезки длиной m и n. Найти диагонали ромба.

Дано: ABCD- ромб, AH- высота, DH=m, HC=n. (Рис.27)

Найти: AC, BD

Решение:

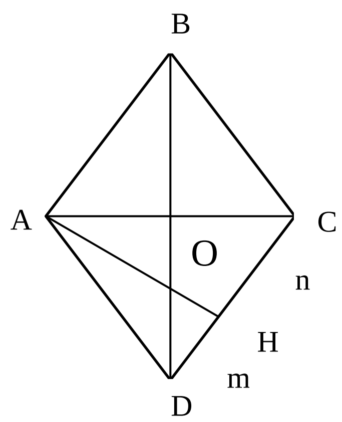

Рис.27. Рисунок к задаче №43

1) Рассмотрим $\triangle AHD$:

$AD=m+n$, $DH=m$,

$AH^2=(m+n)^2-m^2=m^2+2mn+n^2-m^2= 2mn+n^2$;

2) Рассмотрим $\triangle ACH$:

$AH= \overline{2mn+n^2}$, $HC=n$,

$AC= \overline{2mn+n^2+n^2} = \overline{2mn+2n^2}$;

3) $OC= \frac{1}{2}\cdot AC= \frac{\overline{2mn+2n^2}}{2}$;

4) Рассмотрим $\triangle OCD$:

$OD^2=(m+n)^2 - \frac{\overline{2mn+2n^2}}{4} = \frac{4m^2+8mn-4n^2-2mn+2n^2}{4} = \frac{4m^2+6mn-2n^2}{4}$;

5) $BD=2\cdot OD$,

$BD= 2\cdot \overline{\frac{2m^2+3mn+n^2}{2}}$.

Ответ: $AC= \overline{2mn+2n^2}$, $BD= 2\cdot \overline{\frac{2m^2+3mn+n^2}{2}}$.

Задача 44. В ромб, который делится своей диагональю на два равносторонних треугольника, вписана окружность с радиусом 2 см. Найти сторону ромба.

Дано: ABCD- ромб, AC- диагонали, $w(O;2)$, OK=2 (Рис.28)

Найти: AB

Решение:

1) Т.к. $\triangle ABC$ и $\triangle ADC$ –равносторонние $\Rightarrow \angle B= \angle BAC= \angle CAD= \angle CDA= 60°$;

2) Рассмотрим $\triangle BOK$:

$\angle OBK= \frac{1}{2}\cdot \angle B =30°$

$\angle BKO=90°$, $OK=2$, $BO=2\cdot OK=2\cdot 2=4$;

3) $\sin\angle C= \frac{BO}{BC} \Rightarrow BC=\frac{4}{\frac{\overline{3}}{2}} = \frac{8}{\overline{3}} = \frac{8\overline{3}}{3}$ см

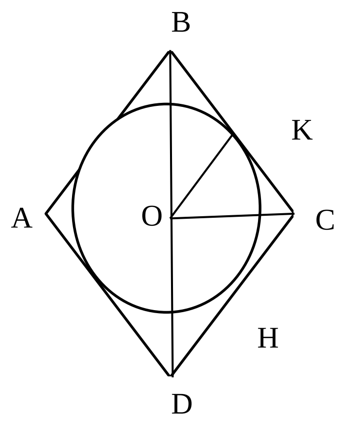

Рис.28.Рисунок к задаче №44

Ответ: $\frac{8\sqrt{3}}{3}$.

Задача 45. Найдите периметр ромба, высота которого равна 7 см, а площадь 84 см^2.

Дано: ABCD- ромб (Рис.29), AH-высота, AH= 7 см, S_{ABCD}= 84 см^2

Найти: P_{ABCD}

Решение:

1) S_{ABCD}=AH·BC,

84= 7·BC,

BC=12;

2) P=2·12+2·12=48 см^2

Ответ: 48

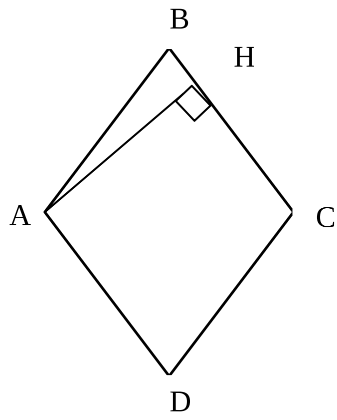

Рис.29. Рисунок к задаче №45

Задача 46. Найдите углы ромба, если его периметр равен 16 см, а площадь 8 см^2.

Дано: ABCD- ромб (Рис.30), P_{ABCD}=16 см, S_{ABCD}= 8 см^2

Найти: ∠A, ∠B, ∠C, ∠D

Решение:

1) P_{ABCD}=4·AB,

16=4AB,

AB=4;

2) S_{ABCD}= AH·BC,

8=AH·4,

AH=2;

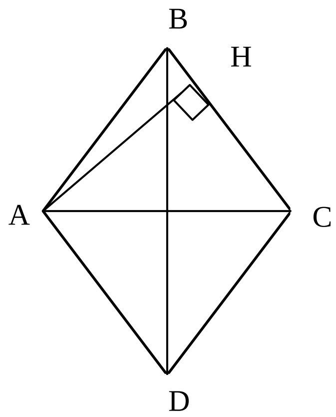

Рис.30.Рисунок к задаче №46

3) Т.к. AH= $\frac{1}{2}$ AB, то ∠B=30° ⇒ ∠B= ∠D=30° ⇒

⇒ ∠A= 180°-30°=150°⇒ ∠A= ∠C= 150°

Ответ: 150°, 30° , 150°, 30°

Система задач на тему «Квадрат и его элементы»

Задача 47. «Докажите, что если диагонали прямоугольника пересекаются под прямым углом, то он является квадратом» [20, с. 88].

Задача 48. «В равнобедренный прямоугольный треугольник, каждый катет которого 2 м, вписан квадрат, имеющий с ним общий угол. Найдите периметр квадрата» [20, с. 89].

Задача 49. «Диагональ квадрата равна 4 м. Сторона его равна диагонали другого квадрата. Найдите сторону последнего» [20, с. 89].

Задача 50. «Дан квадрат, сторона которого 1 м, диагональ его равна стороне другого квадрата. Найдите диагональ последнего» [20, с. 89].

Задача 51. «Является ли четырехугольник квадратом, если его диагонали: а) равны и взаимно перпендикулярны; б) взаимно перпендикулярны и имеют общую середину; в) равны, взаимно перпендикулярны и имеют общую середину?» [3, с. 113].

Задача 52. «В прямоугольном треугольнике проведена биссектриса прямого угла. Через точку пересечения этой биссектрисы с гипотенузой проведены прямые, параллельные катетам. Докажите, что полученный четырехугольник - квадрат» [3, с. 113].

Выводы по второй главе

1. Разработаны методические рекомендации по обучению школьников решению планиметрических задач продвинутого уровня по теме «Четырехугольники» в курсе геометрии основной школы.

2.Составлена методическая система задач по теме «Четырехугольники», ориентированная на усвоение понятий: прямоугольник и его элементы, параллелограмм и его элементы, трапеция и ее элементы, ромб и его элементы. Также она направлена на обучение школьников усвоению знаний и решению планиметрических задач по теме «Четырехугольники» на продвинутом уровне.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Сформулируем основные выводы и полученные результаты проведенного исследования.

1. Проанализировано понятие логико-математического анализа тем школьного курса математики на примере содержания темы «Четырехугольники».

2. Выделены основные требования к умениям и знаниям школьников по теме «Четырехугольники».

3. Проведен анализ учебников, включенных в Федеральный перечень учебных пособий, рекомендованных Министерством образования и науки РФ[31]. Установлено, что все учебники содержат достаточный объем теоретического и задачного материала, ориентированного на формирование умений и закрепления знаний и навыков по теме «Четырехугольники» на базовом уровне. Однако обучение школьников решению задач на продвинутом уровне требует существенного оснащения задачного материала, предлагаемого в школьных учебниках.

4. Разработана методическая система задач, способствующая обучению школьников основным понятиям и фактам темы «Четырехугольники», формированию у школьников представления о таких важных понятиях планиметрии как многоугольник и его числовые характеристики, в частности периметр многоугольника, площадь многоугольника. Обучение школьников посредством разработанной методической системы задач на клетчатой бумаге способствует формированию у школьников тех основ, которые составляют базу обучения координатному и векторно-координатному способу решения планиметрических задач.

5. Выявлены формы, методы и средства обучения решению геометрических задач.

6. Разработаны методические рекомендации по обучению школьников решению планиметрических задач продвинутого уровня по теме «Четырехугольники» в курсе геометрии основной школы.

7.Составлена методическая система задач по теме «Четырехугольники», ориентированная на усвоение понятий: прямоугольник и его элементы, параллелограмм и его элементы, трапеция и ее элементы, ромб и его элементы. Также, данная система направлена на обучение школьников усвоению знаний и решению планиметрических задач по теме «Четырехугольники» на продвинутом уровне.

СПИСОК ИСПОЛЬЗУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1.Александров А.Д. Геометрия. 8 класс: учеб. для общеобразоват. организаций / А.Д. Александров, А.Л. Вернер, В.И. Рыжик. – М.: Просвещение, 2014. – 176 с.

2. Александров А.Д. Геометрия: учеб. пособие для 8 кл. с углубл. изучением математики / А.Д. Александров, А.Л. Вернер, В.И. Рыжик. М: Просвещение, 2002. – 240 с.

3. Атанасян Л. С. Геометрия [Текст]: учеб. для 7-9 кл. общеобразоват. учреждений / Л. С. Атанасян. и др. – М.: Просвещение, 2010. – 384 с.

4. Атанасян Л.С. Изучение геометрии в 7-9 классах. Пособие для учителей / Л.С. Атанасян. и др. – М.: Просвещение, 2009. – 255 с.

5. Бурмистрова Т.А. Геометрия. Сборник рабочих программ. 7 – 9 классы: пособие для учителей общеобразоват. организаций/ составитель Т.А. Бурмистрова. – 2-е изд., дораб. - М.: Просвещение, 2014. – 95 с.

6. Бутузов В. Ф., Кадомцев С. Б., Прасолов В. В. Геометрия. 8 класс. Учебник для общеобразовательных учреждений. (МГУ – школе) – М., 2011, 175 стр.

7. Глейзер Г.Д. Геометрия: Учебник для 8 класса / Г.Д. Глейзер. - М.: Бином. Лаборатория знаний, 2011. - 118 с.

8. Гусев В.А. Методика обучения геометрии: учеб. пособие для студ. высш. пед. учеб. заведений [Текст] / В.А. Гусев, В.В. Орлов, В.А. Панчищина и др.; под ред. В.А. Гусева. – М.: Издат. центр «Академия», 2004. – 368 с.

9. Дорофеев С.Н., Наземнова Н.В. Деятельностный подход к обучению старшеклассников распознаванию геометрических образов [Электронный ресурс]/ Дорофеев С.Н., Наземнова Н.В // Азимут научных исследований: Педагогика и психология. – 2017. №2(19). – С. 52-55. -Режим доступа: https://elibrary.ru/item.asp?id=29655596. – Последнее обновление 28.05.2018.

10. Егерев В.К., Зайцев В.В., Кордемский Б.А. Сборник задач по математики с решениями. 8-11 класс / В.К. Егерев, В.В. Зайцев, Б.А.

Кордемский и др.; Под ред. М.И. Скинави. – М.: ООО «Издательство Оникс»: ООО «Издательство «Мир и Образование»: ООО «Издательство Астрель», 2012. – 624 с.

11. Егидес А.П., Егидес Е.М. Классификационные схемы: технология и способы построения [Электронный ресурс]/ Егидес А.П., Егидес Е.М. // Школьные технологии. – 2012. №3. – С. 71-85. -Режим доступа: https://elibrary.ru/item.asp?id=17743335. – Последнее обновление 28.05.2018.

12. Киселев А. П., Глаголев Н. А. Геометрия: Учебник / А.П. Киселев; Под ред. Н.А. Глаголева. - М.: ФИЗМАТЛИТ, 2013. - 328 с.- Режим доступа: http://znanium.com/bookread2.php?book=439017. – Последнее обновление 27.05.2018.

13. Кытманов, А.М. Математика. Адаптационный курс [Электронный ресурс] : учеб. пособие / А.М. Кытманов, Е.К. Лейнартас, С.Г. Мысливец. — Электрон. дан. — Санкт-Петербург : Лань, 2013. — 288 с. — Режим доступа: https://e.lanbook.com/book/4866. — Последнее обновление 27.05.2018.

14. Лященко Е. И. Лабораторные и практические работы по методике преподавания математики [Текст]: учеб. пособие для студентов физ.-мат. спец. пед. Ин-тов / Е. И. Лященко. и др. – М.: Просвещение, 1988. – 223 с.

15. Майсеня, Л.И. Справочник по математике: основные понятия и формулы [Электронный ресурс] / Л.И. Майсеня. – 2-е изд., перераб. и доп. – Минск: Выш. шк., 2012. – 399 с. - Режим доступа: http://znanium.com/bookread2.php?book=508021. – Последнее обновление 27.05.2018.

16. Малых А.Е. Опорные планиметрические задачи. Треугольники и многоугольники: учеб. пособие/ А.Е. Малых; Перм. Гос. Пед. Ун-т. -Пермь, 2010.- С. 104 - Режим доступа: https://elibrary.ru/item.asp?id=18996790. – Последнее обновление 28.05.2018.

17. Мерзляк А.Г. Геометрия: 8 класс; учебник для учащихся общеобразовательных учреждений / А.Г. Мерзляк, В.Б. Полонский, М.С. Якир. — М. : Вентана-Граф, 2013. — 208 с. : ил.

18. Мищенко Т.М. Дидактические материалы и методические рекомендации для учителя по геометрии: 8 класс: к учебнику Л.С. Атанасяна и др. «Геометрия. 7-9 классы». ФГОС (к новому учебнику) / Т. М. Мищенко. – М.: Издательство «Экзамен», 2016.- 174,[2] с.

19. Петрушко, И.М. Сборник задач по алгебре, геометрии и началам анализа [Электронный ресурс] : учеб. пособие / И.М. Петрушко, В.И. Прохоренко, В.Ф. Сафонов. — Электрон. дан. — Санкт-Петербург : Лань, 2007. — 576 с. — Режим доступа: https://e.lanbook.com/book/311. — Последнее обновление 27.05.2018.

20. Погорелов А.В. Геометрия. 7-9 классы [Текст]: учеб. для общеобразоват. организаций / А.В. Погорелов. – М.: Просвещение, 2014. – 240 с.

21. Примерная основная образовательная программа основного общего образования [Электронный ресурс]. - Режим доступа: http://fgosreestr.ru/registry/primernaya-osnovnayaobrazovatelnaya-programma-osnovnogo-obshhego-obrazovaniya-3/. - Последнее обновление 01.06.2018.

22. Садовников Н.В. Теоретические основы формирования математических понятий в школьном курсе [Электронный ресурс]/ Садовников Н.В. // Итоги прошлого и проблемы настоящего плюс. – 2015. №6(28). – С. 123-126. -Режим доступа: https://elibrary.ru/item.asp?id=24901617. – Последнее обновление 27.05.2018.

23. Саранцев Г.И. Общая методика преподавания математики [Текст]: учеб. пособие для студентов мат. спец. пед. вузов и университетов / Г.И. Саранцев. – Саранск: Тип. «Крас. Окт.», 1999. - 208 с.

24. Слета Ю.О. Структура умения анализировать условие планиметрической задачи учащимися основной школы [Электронный ресурс]/ Слета Ю.О // Наука и школа. – 2017. №2. – С. 175-180. -Режим доступа: https://elibrary.ru/item.asp?id=29072230. – Последнее обновление 28.05.2018.

25. Слета Ю.О. Причины возникновения затруднений у учащихся основной школы при решении планиметрических задач на вычисление [Электронный ресурс]/ Слета Ю.О //Развитие современной науки: теоретические и прикладные аспекты, сборник статей студентов, магистрантов, аспирантов, молодых ученых и преподавателей.. – 2016. – С. 76-78. - Режим доступа: https://elibrary.ru/item.asp?id=26664270. – Последнее обновление 27.05.2018.

26. Смирнова И.М. Геометрия учебник 7-9 классы / И. М. Смирнова, Смирнов. В.А.. – :Мнемозина, 2007. – 382 с.

27. Смирнова И.М. Геометрия. 7-9 классы. Программа и тематическое планирование/ И.М. Смирнова, В.А. Смирнов – Москва, 2012. – 44 с.

28. Совертков П.И. Справочник по элементарной математике: Учебное пособие [Электронный ресурс] : учеб. пособие / П.И. Совертков. — Электрон. дан. — Санкт-Петербург : Лань, 2018. — 404 с. — Режим доступа: https://e.lanbook.com/book/99210. — Последнее обновление 27.05.2018.

29. Темербекова А.А. Методика обучения математике [Электронный ресурс] : учеб. пособие / А.А. Темербекова, И.В. Чугунова, Г.А. Байгонакова. — Электрон. дан. — Санкт-Петербург : Лань, 2015. — 512 с. — Режим доступа: https://e.lanbook.com/book/56173. — Последнее обновление 28.05.2018.

30. Федеральный государственный образовательный стандарт общего основного образования [Электронный ресурс]. - Режим доступа: http://минобрнауки.рф/документы/938. - Последнее обновление 01.06.2018.

31. Федеральный перечень учебников, рекомендуемых к использованию при реализации имеющих государственную аккредитацию образовательных программ начального общего, основного общего, среднего общего образования (с изменениями на 5 июля 2017 года) [Электронный ресурс]. - Режим доступа: http://docs.cntd.ru/document/499087774. - Последнее обновление 01.06.2018.

32. Чичигин, В.Г. Методика преподавания геометрии. Планиметрия [Текст]: пособие для учителей средней школы / В.Г. Чичигин. – М.: Учпедгиз, 1959. – 392 с.

33. Шарыгин И.Ф. Геометрия. 7-9 кл. [Текст]: учеб. для общеобразоват. учреждений / И.Ф. Шарыгин. – М.: Дрофа, 2012. – 462 с.

34. Шестакова Л.Г. Методика обучения школьников работать с математической задачей [Текст]: учебное пособие для студентов/ Л.Г. Шестакова; ФГБОУ ВПО «Соликамский государственный педагогический институт».- Соликамск: СГПИ, 2013.-106 с. - Режим доступа: https://elibrary.ru/item.asp?id=19141062. - Последнее обновление 27.05.2018.

35. Элипханов А-В.И., Гаджимурадов М.А., Абасов Ш.М. Развитие логической культуры учащихся при введении геометрических понятий [Электронный ресурс] / Элипханов А.И., Гаджимурадов М.А., Абасов Ш.М. // Успехи современной науки. – 2016. №12. – С. 102-106. - Режим доступа: https://elibrary.ru/item.asp?id=27712319. – Последнее обновление 28.05.2018.

36. Dinuta N. The Use of Critical Thinking in Teaching Geometric Concepts in Primary School [Электронный ресурс] / Dinuta N. // 2015.- Режим доступа: https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1877042815015517. – Последнее обновление 27.05.2018.

37. Duatepe-Paksu A. Preservice Elementary Teachers' Identification of Necessary and Sufficient Conditions for a rhombus [Электронный ресурс] / Duatepe-Paksu A. // 2012.- Режим доступа: https://www.sciencedirect.com /science/article/pii/S187704281 2017818.– Последнее обновление 28.05.2018.

38. Marchis Iu. Pre-service primary school teachers' elementary Geometry knowledge [Электронный ресурс] / Marchis Iu. // 2012. -Режим доступа: http://dppd.ubbcluj.ro/adn/article_5_2_4.pdf. – Последнее обновление 27.05.2018.

39. Pinzow D. Six Properties of a Parallelogram [Электронный ресурс] // Pinzow D. / 2017. -Режим доступа: https://sciencing.com/six-properties-parallelogram-8168594.html. – Последнее обновление 28.05.2018.

40. Vidermanova K. Practical Geometry Tasks as a Method for Teaching Active Learning in Geometry [Электронный ресурс] / Vidermanova K .// 2015. - Режим доступа: https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1877042815026816. – Последнее обновление 27.05.2018.