МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«Тольяттинский государственный университет»

Институт математики, физики и информационных технологий
(наименование института полностью)
Кафедра «Высшая математика и математическое образование»
(наименование кафедры)

44.03.05 «Педагогическое образование»
(код и наименование направления подготовки)
«Математика и информатика»
(направленность (профиль))

БАКАЛАВРСКАЯ РАБОТА

на тему **«МЕТОДИКА ОБУЧЕНИЯ РЕШЕНИЮ КВАДРАТНЫХ НЕРАВЕНСТВ В КУРСЕ АЛГЕБРЫ ОСНОВНОЙ ШКОЛЫ»**

Студент О.Л. Маликова ____________________
(И.О. Фамилия) (личная подпись)

Руководитель к.п.н., доцент Н.А. Демченкова ____________________
(И.О. Фамилия) (личная подпись)

Консультант ст.преподаватель А.В. Прошина ____________________
(И.О. Фамилия) (личная подпись)

Допустить к защите

Заведующий кафедрой д.п.н., профессор, Р.А. Утеева ______________
(ученая степень, звание, И.О. Фамилия) (личная подпись)

«____»__________2018 г.

Тольятти 2018

АННОТАЦИЯ

Целью бакалаврской работы является выявление методических особенностей обучения теме «Квадратные неравенства» в курсе алгебры основной школы.

Тема «Квадратные неравенства» занимает значимое место в курсе алгебры основной школы. Это объясняется тем, что неравенства широко используются в различных разделах математики, в решении прикладных задач. Данная тема богата по содержанию теоретического материала, разнообразию задач и способов их решения, по способам ее применения при изучении других тем. Также задачи по теме «Квадратные неравенства» включены в основной государственный экзамен.

Бакалаврская работа состоит из введения, двух глав, заключения и списка литературы.

Глава I посвящена изучению теоретических основ обучению теме «Неравенства» в курсе алгебры основной школы. В ней содержится материал из истории развития неравенств, цели темы, содержание теоретического материала, типология задач с решенными примерами. Проанализированы учебники трех авторов и рассмотрены работы учителей.

Глава II содержит методы, формы и средства обучения квадратным неравенствам; методические рекомендации; типологию задач основного государственного экзамена по теме «Квадратные неравенства»; методические разработки.

В заключении сформулированы основные выводы и результаты выпускной квалификационной работы.

Список литературы содержит 43 наименование.

Объем работы составляет 56 страниц.

ABSTRACT

The title of the thesis is «Teaching methods of how to solve quadratic inequality in the secondary school Algebra course».

The aim of the graduation work is methodological analysis of theoretical and practical tasks material on the topic of «Inequalities» in the secondary school course of Algebra.

The object is a process of teaching Mathematics in secondary school.

The subject is inequalities in the secondary school course of Algebra.

The first part of the thesis describes some historical facts about Mathematics as a general science (in particular the history of such mathematical symbols as «more», «less», «equality» etc.), theoretical material on the topic of «Quadratic inequalities» and analysis of schoolbooks from the point of view of the researched issue. We deal with the role of inequalities in Mathematics and show typology of tasks with inequalities. We describe in detail the properties of inequalities and how they are presented in schoolbooks.

The second part of the thesis is focused on methodology of teaching quadratic inequalities in the secondary school course of Algebra. This part gives common and particular guidelines. The author provides a test of their own design. Also the author explains what skills of solving quadratic inequalities can help to pass the basic part of Unified State Examination.

Finally, I present my own methodological development on the topic of quadratic inequality in secondary school.

The thesis consists of the amount of 56 pages, containing 1 table, 33 figures and the list of 43 references including 5 foreign sources.

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Актуальность исследования. Тема «Квадратные неравенства» занимает значимое место в курсе алгебры основной школы. Это объясняется тем, что неравенства широко используются в различных разделах математики, в решении прикладных задач. Данная тема богата содержанием теоретического материала, разнообразием задач и способов их решения. Также задачи по теме «Квадратные неравенства» включены в основной государственный экзамен.

Основная задача учителя – научить решать квадратные неравенства. При решении неравенств ученики, чаще всего, пользуются алгоритмами, но правила равносильных преобразований неравенств не всегда очевидны. При изучении свойств и теорем по теме нужно наглядно их объяснять и приводить доказательства.

В курсе алгебры с квадратными неравенствами учащиеся сталкиваются почти так же часто, как и с уравнениями. К примеру, квадратные неравенства используются для определения монотонности, нахождения промежутков знакопостоянства функции и изучении других свойств функции [4].

Целью темы «Квадратные неравенства» является изучение и применение алгоритма решения квадратных неравенств, формирование навыков по применению изученных алгоритмов и методов решения неравенств.

В федеральном государственном образовательном стандарте основного общего образования перечислены предметные результаты изучения темы «Квадратные неравенства»: знание определения квадратного неравенства, алгоритмов его решения с помощью метода интервалов и графика квадратичной функции; применение алгоритмов при решении задач [35].

Проблема исследования состоит в выявлении методических особенностей обучения решению квадратных неравенств в курсе алгебры основной школы.

Объект исследования: процесс изучения алгебры в курсе основной школы.

Предмет исследования: методика обучения решению квадратных неравенств в курсе алгебры основной школы.

Цель бакалаврской работы: выявить методические особенности обучения теме «Квадратные неравенства» в курсе алгебры основной школы; разработать дидактический материал по теме.

Задачи исследования:

1. Рассмотреть историю развития неравенств.

2. Сформулировать цели темы «Квадратные неравенства» в курсе алгебры основной школы.

3. Рассмотреть теоретический и задачный материал темы «Квадратные неравенства», провести анализ школьных учебников.

4. Составить типологию задач по теме «Квадратные неравенства».

5. Изучить статьи, методические разработки и рекомендации учителей.

6. Описать методы, формы и средства используемые при обучении теме «Квадратные неравенства».

7. Привести методические рекомендации для обучения теме «Квадратные неравенства».

8. Рассмотреть задачи основного государственного экзамена, содержащие квадратные неравенства и составить их типологию.

9. Представить методические разработки по теме исследования.

Методы исследования: изучение и анализ школьных программ, учебной литературы и методических пособий по теме работы, решение примеров.

Теоретическая значимость работы заключается в том, что в ней представлены теоретические основы обучения квадратным неравенствам: место и цели обучения теме, анализ содержания теоретического и практического материала в учебниках разных авторов.

Практическая значимость исследования состоит в том, что в нем представлены методические рекомендации изучения темы «Квадратные неравенства» и методические разработки, которые можно использовать учителям математики при обучении теме; составлена типология задач основного государственного экзамена.

На защиту выносятся: методические рекомендации обучения решению квадратных неравенств в курсе алгебры основной школы.

Апробация результатов исследования осуществлена путём выступлений на: научной студенческой конференции «Дни науки в ТГУ» (апрель 2018 г.); XIV всероссийской научно-практической конференции «Артемовские чтения»: «Современное образование: научные подходы, опыт, проблемы, перспективы» (18 апреля 2018, г. Пенза).

Бакалаврская работа содержит введение, две главы, заключение и список литературы.

Во введении обозначены основные характеристики исследования.

Глава I посвящена изучению теоретических основ обучения теме «Квадратные неравенства» в курсе алгебры основной школы. В ней содержится: материал из истории развития неравенств; цели темы; содержание теоретического материала; типология задач с решенными примерами; проанализированы учебники трех авторов и рассмотрены работы учителей.

Глава II посвящена методическим основам обучения теме «Квадратные неравенства». В ней содержатся: методические рекомендации обучению квадратным неравенствам в основной школе; типология задач основного государственного экзамена по теме «Квадратные неравенства»; методические разработки данной темы.

В заключении сформулированы основные выводы и результаты выпускной квалификационной работы.

Список использованной литературы состоит из 43 источника.

ГЛАВА I. ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ОБУЧЕНИЯ КВАДРАТНЫМ НЕРАВЕНСТВАМ В КУРСЕ АЛГЕБРЫ ОСНОВНОЙ ШКОЛЫ

§ 1. Из истории развития неравенств в курсе алгебры основной школы

Понятия «больше» и «меньше» вместе с понятием равенства появились в связи с необходимостью сравнения различных величин. Например, известно, что понятиями неравенства пользовались древние греки. Архимед, занимаясь вычислением длины окружности, рассматривал правильный 96-угольник и выяснил, что «периметр всякого круга равен утроенному диаметру с избытком, который меньше седьмой части диаметра, но больше десяти семьдесят первых». Данную оценку Архимеда можно записать символами:

$$3\frac{10}{71} < \pi < 1\frac{1}{7}.$$

Ряд неравенств приводится в главном труде древнегреческого математика Евклида. В своем трактате он доказывает, что «среднее геометрическое двух положительных чисел не больше их среднего арифметического», то есть верно неравенство [17, с.250]:

$$\overline{ab} \le \frac{a+b}{2}.$$

Также Евклид доказывал, что в пропорции $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, где все переменные положительные числа, существует неравенство $a + d > b + c$.

Однако все эти рассуждения проводили словесно, опираясь в большинстве случаев на геометрическую терминологию. Употребление букв и разных других математических символов появилось не сразу, а в результате долгого развития математики. Оно по-настоящему началось лишь в 15 веке, до этого все величины, математические действия, условия и доказательства выражались практически одними словами. Алгебру тех времен, поэтому называют риторической, то есть словесной [17].

Всем известный знак равенства «=» предложил уэльский врач и математик Роберт Рекорд в 1557 году в книге «The Whetstone of Witte», до этого математики предлагали самые разные обозначения, но, в конечном счете, символ предложенный Рекордом закрепился в математике. Сам автор пояснял, что нет в мире ничего более равного, чем два параллельных отрезка одинаковой длины. Изначально распространению знака мешало то, что так обозначали параллельность прямых линий. Знак равенства предложенный Рекордом стал общеупотребительными лишь в 18 веке, после того, как знаком стали пользоваться Лейбниц и его последователи.

Исходя из знака равенства другой англичанин – Томас Хэрриот усовершенствовал алгебраическую символику и ввел знак неравенства. Символы > (больше) и < (меньше) появились в книге «Практика аналитического искусства», вышедшей посмертно в 1631 году. Хэрриот обосновывал нововведение так: если две величины не равны, то отрезки, фигурирующие в знаке равенства, уже не параллельны, а пересекаются. Пересечение может иметь место справа (>) или слева (<). Томас Хэрриот был не только математиком, но и астрономом, этнографом, картографом и переводчиком, посетившим Северную Америку. Есть версия, что символы он придумал, увидев популярную среди индейцев татуировку в виде знаков > и < наложенных вместе.

Несмотря на то что знаки неравенства были предложены через 74 года после предложенного Рекордом знака равенства, они вошли в употребление намного раньше последнего. Одна из причин этого в том, что типографии применяли в то время для знаков неравенства уже имевшуюся у них латинскую букву V, тогда как наборного знака равенства (=) у них не было, а изготовлять его тогда было нелегко [9, с.164]. Леонард Эйлер в своих записях 1743 года использовал перевернутые знаки радикала для обозначения символов больше и меньше, а немецкий математик Авраам Готтгельф Кестнер использовал знак зодиака овна. Также иногда в печати использовали знак угла, несмотря на тот факт, что этот знак уже активно использовался в геометрии [39].

Символы ≤ и ≥ нестрогого сравнения предложил Валлис в 1670 году. Первоначально черта была выше знака сравнения, а не под ним, как сейчас. Общее распространение эти символы получили в 1734 году, после поддержки французского математика Пьера Бугера, у которого они приобрели современный вид [9].

В данном параграфе была рассмотрена история возникновения неравенств и их символики.

§ 2. Место и цели обучения темы «Квадратные неравенства»

Цели темы «Квадратные неравенства»: изучить определение квадратного неравенства, вывести алгоритм решения, научить решать квадратные неравенства графическим методом, алгебраическим, методом интервалов, с помощью схематичного построения параболы.

Работа с простейшими числовыми неравенствами начинается в начальной школе на уроках математики в сочетании с изучением арифметического материала. Выполняемые задачи сводятся к сравнению чисел и выражений. Ученики учатся правильно определять отношения больше, меньше или равно и читать их.

В первом классе задания могут сводиться к сравнению количества изображенных предметов. Затем, изучаются и сравниваются числа, после изучения арифметики сравнивают простые выражения, также могут появляться задачи со сравнением различных величин и проверки правильности знака отношений. Изучение и решение множества различных упражнений на сравнение чисел и выражений, с одной стороны, способствуют формированию понятий о равенствах и неравенствах простых чисел, с другой стороны усвоению знаний о нумерации и арифметических действиях, а также выработке вычислительных навыков.

В курсе алгебры неравенства встречаются в 8 классе, после изучения числовых множеств, в частности множества действительных чисел. Обучение начинается с понятия числовых неравенств и их свойств, далее идет решение линейных и квадратных неравенств, применение неравенств в исследовании функции и построении числовых интервалов [28].

При решении неравенств ученик должен свободно владеть понятием числового неравенства, знать что значит «решить неравенство», помнить и использовать свойства неравенств.

Изучая различный материал темы «Неравенства», ученик научится:

– проверять справедливость числовых неравенств;

– проверять, является ли решением неравенства данное число;

– изображать на числовой прямой решения неравенств;

– применять свойства числовых неравенств в ходе решения задач;

– решать линейные и квадратные неравенства с одной переменной;

– решать системы неравенств [28, с.86];

– рассматривать неравенство как важнейшую математическую модель для описания и изучения разнообразных реальных ситуаций;

– решать текстовые задачи с помощью неравенств;

– применять неравенства для решения задач из других разделов курса, задач из смежных дисциплин [7, с.15].

После прохождения школьного курса алгебры по теме «Неравенства» ученик получит возможность:

– использовать разнообразные приёмы доказательства неравенств;

– использовать широкий спектр специальных приёмов решения неравенств;

– уверенно применять аппарат неравенств для решения разнообразных задач из математики, смежных предметов, реальной практики [28, с.94].

В данном параграфе определено место темы «Неравенства» в школьной программе и сформулированы цели изучения темы «Квадратные неравенства».

§ 3. Анализ содержания теоретического материала темы «Квадратные неравенства» в учебниках разных авторов

Рассмотрим теоретический материал по теме «Квадратные неравенства».

Определение 1. Квадратным неравенством называется неравенство вида: $ax^2 + bx + c > 0$, где a, b, c – некоторые числа и а $\neq 0$ (вместо знака больше может стоять любой другой знак неравенства) [18].

Существует четыре метода решения квадратных неравенств: с помощью «схематичного» построения параболы, методом интервалов, с помощью метода выделения полного квадрата, графический метод.

1. Метод решения квадратных неравенств с помощью «схематичного» построения параболы.

Чтобы решить квадратное неравенство с помощью «схематичного» построения параболы нужно сделать схематичный график: определить, куда направлены ветви параболы, а также точки пересечения с осью x, если они есть и посмотреть по чертежу, где функция $y = ax^2 + bx + c$ принимает положительные и отрицательные значения, записав в ответ значения удовлетворяющие условию задачи [18].

Рассмотрим решение квадратного неравенства на примере.

Пример 1. Решить неравенство: $3x^2 - 7x + 4 < 0$,

Приравняем левую часть неравенства к нулю и решим квадратное уравнение: $3x^2 - 7x + 4 = 0$.

$$a = 3, b = -7, c = 4,$$

$$D = b^2 - 4ac = (-7)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 4 = 49 - 48 = 1,$$

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a} = \frac{7 + 1}{2 \cdot 3} = \frac{8}{6} = \frac{4}{3},$$

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a} = \frac{7 - 1}{2 \cdot 3} = \frac{6}{6} = 1.$$

Отметим два найденных корня на числовой прямой. Проведем схематично параболу через эти точки, ветви параболы направлены вверх (рис. 1).

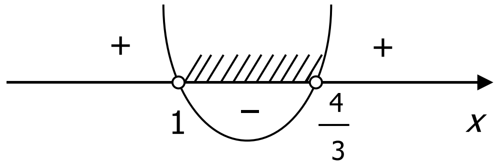

Рис. 1. Рисунок к примеру 1

По схеме графика видим, что отрицательные значения функция принимает на промежутке $\left(1;\frac{4}{3}\right)$.

Ответ: $\left(1;\frac{4}{3}\right)$.

Но у квадратного уравнения не всегда существуют два различных действительных корня.

Теорема 1. Если квадратное уравнение не имеет действительных корней, и a > 0, то при любых значениях x выполняется неравенство

$$ax^2 + bx + c > 0.$$

Теорема 2. Если квадратное уравнение не имеет действительных корней, и a < 0, то при любых значениях x выполняется неравенство

$$ax^2 + bx + c < 0.$$

Рассмотрим случай, когда дискриминант отрицательное число [18].

Пример 2. Решить неравенство: $2x^2 + x + 67 > 0$.

Приравняем левую часть к нулю и найдем корни уравнения.

$$2x^2 + x + 67 = 0,$$

$$a = 2, b = 1, c = 67,$$

$$\mathcal{D} = b^2 - 4ac = 4 - 536 = -532.$$

Получили отрицательный дискриминант, значит, действительных корней нет. Следовательно, график функции не имеет точек пересечения с осью *x*. Ветви параболы направлены вверх, сделаем схематичный набросок графика этой функции (рис. 2).

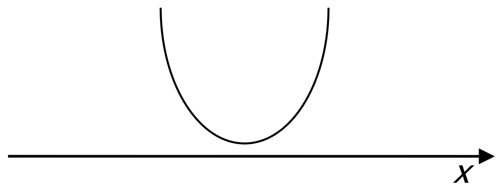

Рис. 2. Рисунок к примеру 2

По графику видим, что при любом значении x график функции расположен выше оси x, следовательно, при всех значениях x выполняется неравенство $2x^2 + x + 67 > 0$.

Ответ: (–∞; +∞).

Итак, для решения квадратных неравенств с помощью схематичного построения параболы используем следующий алгоритм:

1. Находим корни квадратного трехчлена;

2. Строим схематично график квадратичной функции, через точки пересечения или касания с осью x;

3. По графику находим промежутки, на которых функция принимает значение удовлетворяющее условию задачи.

2. Решение квадратных неравенств методом интервалов.

Для решения неравенства методом интервалов используем такой алгоритм:

1. Находим нули функции и отмечаем их на числовой прямой;

2. Получив числовую прямую разбитую на промежутки, определяем знак функции на каждом из промежутков;

3. Выбираем только те промежутки, в которых функция принимает значение удовлетворяющее условию задачи.

Рассмотрим решение квадратного неравенства с помощью метода интервалов на примере.

Пример 3 [18]. Решить неравенство методом интервалов.

$$x^2 - 5x + 4 \geq 0,$$

$$x^2 - 5x + 4 = 0,$$

$$a = 1, b = -5, c = 4,$$

$$\mathcal{D} = b^2 - 4ac = \ -5\ ^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4 = 25 - 16 = 9,$$

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a} = \frac{5+3}{2} = \frac{8}{2} = 4\,, \qquad x_2 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a} = \frac{5-3}{2} = 1.$$

Отметим точки x=1 и x=4, они разбивают числовую ось на три промежутка. И расставим знаки на каждом интервале, подставляя любое значение из интервала в заданную функцию (рис. 3).

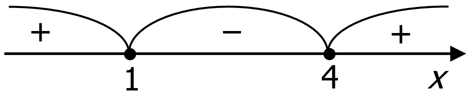

Рис. 3. Рисунок к примеру 3

В ответ выбираем интервалы, на которых функция положительна.

Ответ: (–∞; 1] ∪ [4; +∞).

3. Решение квадратных неравенств с помощью метода выделения полного квадрата.

Для этого нужно выделить полный квадрат из квадратичной функции и проанализировать полученное выражение. Рассмотрим этот метод на примере.

Пример 4. Решить неравенство с помощью метода выделения полного квадрата: $x^2 + 6x + 11 > 0$.

$$x^2 + 6x + 11 = (x^2 + 6x + 9) + 2 = (x+3)^2 + 2.$$

Нам нужно найти значения больше нуля. Проанализировав полученное выражение, видим, что при любых x будет выполняться неравенство

$$(x+3)^2 + 2 > 0.$$

Ответ: (–∞; +∞).

Стоит отметить, что в учебниках общеобразовательной школы при изучении темы «Квадратные неравенства» этот метод не рассматривается, но он может быть использован на факультативных занятиях, для сильных учеников.

4. Решение квадратных неравенств графическим методом.

При графическом решении квадратных неравенств необходимо построить график квадратичной функции и по графику найти значения, удовлетворяющие условию задачи.

Отличительной особенностью этого метода является то, что решать квадратное уравнение не надо, но нужно построить точный график.

Пример 5. Решить неравенство графически: $x^2 - 2x - 3 \leq 5$.

Построим графики функции $y = x^2 - 2x - 3$ и $y = 5$ (рис. 4).

x	-2	-1	0	1	2	3	4
у	5	0	-3	-4	-3	0	5

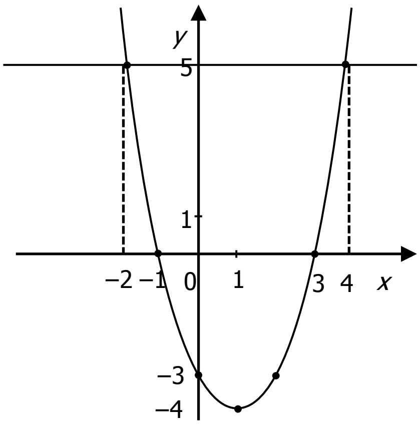

Рис. 4. Рисунок к примеру 5

По графику определим промежуток, исходя из условия задачи.

Ответ: $[-2; 4]$.

Рассмотрим содержание теоретического материала по теме «Квадратные неравенства» в учебниках алгебры 8 и 9 классов с целью анализа изложения материала по теме. Приведем сравнительный анализ содержания и логики построения темы в таблице (Табл. 1) [19].

В учебниках Ю.Н. Макарычева [18] тема «Квадратные неравенства» представлена только в 9 классе, в главе II «Уравнения и неравенства с одной переменной». Теме отводится 6 параграф, который разделяется на пункты.

Изучение темы начинается сразу с определения неравенств второй степени с одной переменной и рассмотрения метода решения с помощью схематичного построения параболы на трех примерах, после которых выделяется алгоритм решения.

В следующем пункте рассматривается решение неравенств методом интервалов, где приводится теоретический материал с примерами.

Таблица 1

Анализ учебников по теме «Квадратные неравенства»

учебник Ю.Н. Макарычева	учебники А.Г. Мордковича	учебник Ш.А. Алимова
Содержание темы		
9 класс. - решение неравенств второй степени с одной переменной; - решение неравенств методом интервалов.	*8 класс.* - решение квадратных неравенств. *9 класс.* - линейные и квадратные неравенства.	*8 класс.* - квадратное неравенство и его решение; - решение квадратного неравенства с помощью графика квадратичной функции; - метод интервалов.
Подготовительная задача		
–	–	«Стороны прямоугольника равны 2 и 3 см. Обе стороны увеличили на одинаковое количество сантиметров так, что площадь прямоугольника стала больше 12 сантиметров. Как изменилась каждая сторона?» [1].
Определение квадратного неравенства		
«Неравенства вида $ax^2 + bx + c > 0$ или $ax^2 + bx + c < 0$, где a, b, c – некоторые числа и $a \neq 0$ называют неравенствами второй степени с одной переменной» [18].	«Квадратным неравенством $ax^2 + bx + c > 0$, где $a \neq 0$. (Вместо знака больше может стоять любой другой знак неравенства)» [20].	«Если в левой части неравенства стоит квадратный трехчлен, а справа ноль, то такое неравенство называют квадратным» [1].
Алгоритм решения квадратных неравенств		
«Для решения неравенств вида $ax^2 + bx + c > 0$ и $ax^2 + bx + c < 0$ поступают следующим образом: - находят дискриминант квадратного трехчлена и выясняют, имеет ли трехчлен корни; - если трехчлен имеет корни, то отмечают их на оси x и через отмеченные точки проводят схематически параболу, ветви которой направлены вверх при $a > 0$ или вниз при $a < 0$; - находят на оси x промежутки, для которых точки параболы расположены выше оси x, или ниже оси x» [18].	В учебнике А.Г. Мордковича, алгоритм решения не выделен.	«Для решения квадратного неравенства с помощью графика нужно: - определить направление ветвей параболы по знаку первого коэффициента квадратичной функции; - найти действительные корни соответствующего квадратного уравнения или установить, что их нет; - построить эскиз графика квадратичной функции, используя точки пересечения (или касания) с осью Ox, если они есть; - по графику определить промежутки, на которых функция принимает нужные значения» [1].

В учебниках А.Г. Мордковича тема «Квадратные неравенства» затрагивается и в 8 и в 9 классе.

В учебнике 8 класса тема входит в главу V «Неравенства», где ей отводится только один параграф, который начинается сразу с определения. Затем идет рассмотрение графика квадратичной функции, с помощью которого объясняется что значит «решить неравенство».

Рассмотрев первый пример с помощью метода построения параболы, автор переходит к объяснению метода решения квадратных неравенств с помощью схематичного построения графика и выводит алгоритм решения.

Отдельно рассматриваются две теоремы с доказательствами, относящиеся к случаю, когда при решении неравенства оказывается, что квадратное уравнение не имеет корней. Приводятся примеры.

Следующий пример в параграфе иллюстрирует решение с помощью метода интервалов. Автор указывает, что подробнее этот метод будет рассмотрен позднее [20].

В 9 классе у А.Г. Мордковича продолжается изучение темы «Квадратные неравенства» в главе I, первом параграфе. Приводится изученный ранее теоретический материал для актуализации знаний. Рассматриваются примеры с решением с помощью схематичного построения параболы и метода интервалов. Так же нужно сказать, что в параграфе «Системы неравенств» встречаются системы, содержащие квадратные неравенства [23].

В учебнике Ш.А. Алимова [1] за 8 класс теме «Квадратные неравенства» посвящена последняя, VI глава, которая разделена на три параграфа. Изучение темы начинается с мотивирующей задачи, при решении которой составляется квадратное неравенство. Далее приводится определение квадратного неравенства и решения неравенств на примерах.

В следующем параграфе подробно разбирается способ решения квадратных неравенств с помощью графика квадратичной функции. Этот метод разобран на трех примерах, а после их решения представлен алгоритм.

В заключительном параграфе главы приводится метод интервалов, который поясняется на четырех примерах.

В 9 классе учебника Ш.А. Алимова [2] тема квадратные неравенства не рассматривается, значит не выделены часы на повторение и дальнейшее изучение темы неравенств, и учителю придётся использовать дополнительный методический материал при подготовке к основному государственному экзамену.

В учебниках А.Г. Мордковича и Ш.А. Алимова теоретический материал изложен подробнее и доступнее для учащихся, чем у Ю.Н. Макарычева. В учебнике Ш.А. Алимова больше графиков и чертежей в теоретической части. Но только у А.Г. Мордковича теоретический материал представлен отдельно от задачного, что является удобным с моей точки зрения и представлено много примером с подробным решением.

Таким образом, я бы рекомендовала учебник А.Г. Мордковича, так как в нем подробно излагается теория, тема разбираются на конкретных примерах.

В этом параграфе изучен теоретический материал по теме «Квадратные неравенства» представлены четыре метода их решения. Также рассмотрены учебники трех авторов: Ш.А. Алимова, Ю.Н. Макарычева и А.Г. Мордковича, и проанализирована представленная в них теория по теме исследования.

§ 4. Анализ содержания задачного материала, типология задач по теме «Квадратные неравенства»

Рассмотрим задачный материал в различных учебниках по теме «Квадратные неравенства».

В учебнике Ш.А. Алимова [1] после параграфов идут упражнения по теме. Предлагаются задачи на усвоение определения квадратного неравенства, на решение квадратных неравенств различными способами:

графическим, методом интервалов, с помощью схематичного построения графика квадратичной функции.

Макарычев Ю.Н. [18] в своем учебнике также представляет задачи после теоретического материала, который он разделяет на задачи обязательного уровня, рекомендуемые для домашней работы и более сложные задачи. Встречается различная формулировка заданий (решить неравенства, найти множество решений неравенства).

Тема квадратных неравенств в учебниках А.Г. Мордковича [21, 24] рассматривается в 8 и 9 классах. Задачный материал представлен отдельно от теоретического. В задачниках данного автора представлено большое количество различных упражнений с квадратными неравенствами.

Проанализировав задачный материал в учебниках алгебры основной школы, выделим основные типы задач по теме «Квадратные неравенства».

I тип. Квадратные неравенства стандартного вида.

а) $x^2 - 3x + 2 \leq 0$; б) $-x^2 + 3x + 4 > 0$;

в) $x^2 + 12x \geq -36$; г) $-2x^2 + 6x - 4.5 \leq 0$.

II тип. Неполные квадратные неравенства.

а) $x^2 - 2x > 0$; б) $x^2 - 25 \leq 0$;

в) $-x^2 + 7 < 0$; г) $4x^2 - 9 > 0$.

III тип. Неравенства, приводимые к виду $ax^2 + bx + c > 0$, с помощью тождественных преобразований.

а) $x(x+1) < 2(2-2x-x^2)$; б) $(x+5)^2 \geq 0$;

в) $(5-x)(1-x) + 4 > 0$; г) $(x-4)(x+3) < 2x-1$.

IV тип. Дробно-рациональные неравенства второй степени.

а) $\dfrac{x^2 - x}{x^2 - 4} > 0$; б) $\dfrac{x^2 + 2x - 3}{x^2 - 3x - 4} \geq 0$;

в) $\dfrac{(x+4)^2}{2x^2 - 3x + 1} \geq 0$; г) $\dfrac{9x^2 + 6x + 1}{25 - x^2} \leq 0$.

V тип. Квадратные неравенства под знаком модуля.

а) $|6x^2 - 2x + 1| \leq x + 1$;

б) $x^2 - 2x - 5 \ \geq -2x - 5;$

в) $x^2 - 7x + 3 \ < \ 2x^2 + 5x - 10$.

VI тип. Квадратные неравенства под корнем.

а) $\sqrt{5x - x^2 + 6} > 0;$

б) $\sqrt{x^2 - 6x + 9} > 3;$

в) $x\sqrt{x^2 - 7x + 1} \geq 0.$

Отдельно рассматриваются системы неравенств, содержащие квадратные.

Приведем решения примеров каждого типа.

Пример 6 [1]. Решить неравенство

$$-3x^2 - 6x + 45 < 0,$$

$$-3x^2 - 6x + 45 = 0,$$

$$a = -3, b = -6, c = 45,$$

$$D = b^2 - 4ac = (-6)^2 - 4 \cdot (-3) \cdot 45 = 36 + 540 = 576 = 24^2,$$

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a} = \frac{6 + 24}{2(-3)} = \frac{30}{-6} = -5,$$

$$x_2 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a} = \frac{6 - 24}{2(-3)} = \frac{-18}{-6} = 2.$$

Отобразим полученные значения на числовой оси (рис. 5).

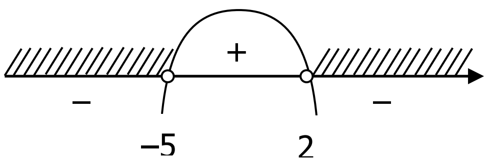

Рис. 5. Рисунок к примеру 6

Ответ: (–∞; –5) ∪ (2; +∞).

Пример 7 [11, с.175]. Решить неравенство

$$x^2 - 4x + 6 > 0,$$

$$x^2 - 4x + 6 = 0,$$

$$a = 1, b = -4, c = 6,$$

$$D = b^2 - 4ac = (-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6 = 16 - 24 = -8,$$

$D < 0$, **нет действительных корней** (рис. 6).

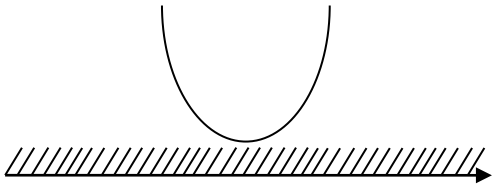

Рис. 6. Рисунок к примеру 7

Ответ: (–∞;+∞).

Пример 8. Решить неравенство: $25x^2 - 10x + 1 > 0$.

$$(5x - 1)^2 = 0;$$

$x = \frac{1}{5}$ (рис. 11).

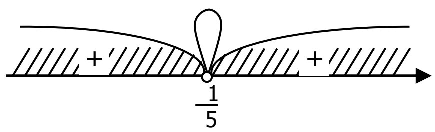

Рис. 7. Рисунок к примеру 8

Ответ: $x \in (-\infty; \frac{1}{5}) \cup (\frac{1}{5}; +\infty)$.

Пример 9 [1]. Решить неравенство:

$$x^2 - 16x + 64 \leq 0,$$

$$x^2 - 16x + 64 = 0.$$

$$a = 1, b = -16, c = 64,$$

$$D = b^2 - 4ac = (-16)^2 - 4 \cdot 6 \cdot 64 = 256 - 256 = 0,$$

$$x_1 = x_2 = \frac{-b}{2a} = \frac{16}{2} = 8.$$

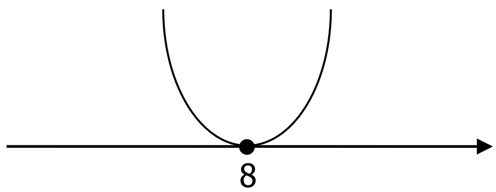

Рис. 8. Рисунок к примеру 9

Ответ: {8}.

Пример 10 [42]. Решить неравенство: $-4x^2 - x \leq 0$.

$$4x^2 + x \geq 0,$$

$$4x^2 + x = 0 \Rightarrow x(4x + 1) = 0,$$

$$x = 0, x = -\frac{1}{4} \text{ (рис. 10).}$$

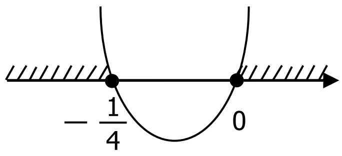

Рис. 9. Рисунок к примеру 10

Ответ: $\left(-\infty; -\frac{1}{4}\right] \cup [0; +\infty)$.

Пример 11 [43]. Решить неравенство:

$$4 - x^2 \geq \frac{1}{2}(2 - x)^2,$$

$$4 - x^2 \geq \frac{1}{2(4 - 4x + x^2)}$$

$$4 - x^2 \geq 2 - 2x + \frac{1}{2}x^2$$

$$-\frac{3}{2}x^2 + 2x + 2 \geq 0$$

$$3x^2 - 4x - 4 \leq 0,$$

$$3x^2 - 4x - 4 = 0,$$

$$D = 16 + 48 = 64,$$

$$x_1 = \frac{4+8}{2 \cdot 3} = \frac{12}{6} = 2, \qquad x_2 = \frac{4-8}{2 \cdot 3} = \frac{-4}{6} = -\frac{2}{3},$$

Построим схематично параболу (рис. 10).

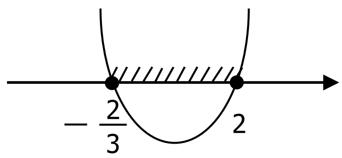

Рис. 10. Рисунок к примеру 11

Ответ: $[-\frac{2}{3}; 2]$.

Пример 12 [24]. Решить неравенство

$$\frac{9x^2 + 6x + 1}{25 - x^2} \geq 0,$$

Разложим числитель и знаменатель по формулам сокращенного умножения.

$$\frac{(3x+1)^2}{(5-x)(5+x)} \geq 0.$$

Найдем нули числителя и нули знаменателя неравенства.

$$3x+1=0 \Rightarrow 3x=-1 \Rightarrow x=-\frac{1}{3}.$$

Нули знаменателя: $x=5, x=-5$.

Отметим все точки на числовой прямой и определим знак на полученных интервалах (рис. 11).

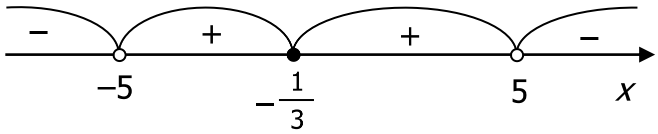

Рис. 11. Рисунок к примеру 12

Ответ: (–5; 5).

Пример 13 [24]. Решить неравенство:

$$\frac{6x^2-5x+4}{6x^2-x-2} \geq 1,$$

$$\frac{6x^2-5x+4}{6x^2-x-2} - 1 \geq 0,$$

$$\frac{6x^2-5x+4-6x^2+x+2}{6x^2-x-2} - 1 \geq 0,$$

$$\frac{-4x+6}{6x^2-x-2} \geq 0,$$

$$\frac{4x+6}{6x^2-x-2} \leq 0.$$

Найдем нули функции:

$$4x-6=0,$$

$$x=\frac{3}{2},$$

$$6x^2-x-2=0,$$

$$D=1+48=49,$$

$$x_1=\frac{1+7}{12}=\frac{2}{3},$$

$$x_2=\frac{1-7}{12}=-\frac{1}{2}.$$

Отметим нули функции на числовой прямой (рис. 12) и выпишем в ответ промежутки, где функция принимает отрицательные значения.

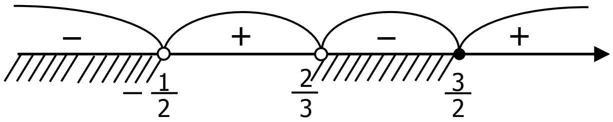

Рис. 12. Рисунок к примеру 13

Ответ: $(-\infty;-\frac{1}{2})\cup(\frac{2}{3};\frac{3}{2}]$.

Пример 14 [30]. Решите неравенство:

$$\frac{x^4-5x^3+3x-25}{x^2-5x}\geq x^2-\frac{1}{x-4}+\frac{5}{x},$$

$$\frac{x^4-5x^3+3x-25}{x^2-5x}\geq x^2-\frac{1}{x-4}+\frac{5}{x}\Longrightarrow x^2+\frac{3x-25}{x\ \ x-5}-\frac{5}{x}\geq x^2-\frac{1}{x-4}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\frac{3x-25-5\ \ x-5}{x\ \ x-5}+\frac{1}{x-4}\geq 0\Rightarrow\frac{-2x}{x\ \ x-5}+\frac{1}{x-4}\geq 0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ \begin{array}{l}\frac{1}{x-4}-\frac{2}{x-5}\geq 0,\\ x\neq 0.\end{array}\Longrightarrow\ \begin{array}{l}(x-5-\frac{2\ \ x-4}{x-4\ \ \ x-5}\geq 0,\\ x\neq 0.\end{array}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ \begin{array}{l}\frac{3-x}{x-4\ \ \ x-5}\geq 0,\\ x\neq 0.\end{array}\Rightarrow\ \begin{array}{l}x<0,\\ 0<x\leq 3,\\ 4<x<5.\end{array}$$

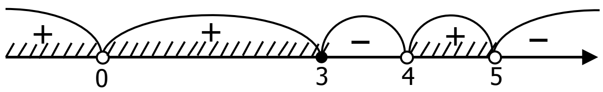

Рис. 13. Рисунок к примеру 14

Ответ: $(-\infty;0)\cup(0;3]\cup(4;5)$.

Пример 15 [24]. Решить неравенство:

$$x^2-3x+2\ \leq 2x-x^2,$$

$$x^2 - 3x + 2 \geq 0$$
$$x^2 - 3x + 2 \leq 2x - x^2$$
$$x^2 - 3x + 2 < 0$$
$$-\ x^2 - 3x + 2\ \ \leq 2x - x^2,$$

$$x^2 - 3x + 2 \geq 0,$$

$$x^2 - 3x + 2 = 0,$$

$$D = b^2 - 4ac = 9 - 8 = 1,$$

$$x_{\mathbf{1}} = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a} = \frac{3+1}{2} = \frac{4}{2} = 2,$$

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a} = \frac{3-1}{2} = 1;$$

$$x^2 - 3x + 2 \leq 2x - x^2 \Rightarrow 2x^2 - 5x + 2 \leq 0 \Rightarrow 2x^2 - 5x + 2 = 0,$$

$$D = b^2 - 4ac = 25 - 16 = 9,$$

$$x_{\mathbf{1}} = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a} = \frac{5+3}{2 \cdot 2} = \frac{8}{4} = 2,$$

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a} = \frac{5-3}{2 \cdot 2} = \frac{1}{2}.$$

Получили решение первой системы: $\frac{1}{2};1\ \cup\ 2$ (рис. 14);

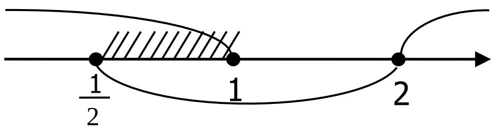

Рис. 14. Рисунок к примеру 15

$$x^2 - 3x + 2 < 0,$$

$$x_{\mathbf{1}} = 2, x_2 = 1;$$

$$-(x^2 - 3x + 2) \leq 2x - x^2,$$

$$-x^2 + 3x - 2 - 2x + x^2 \leq 0,$$

$$x - 2 \leq 0 \Rightarrow x \leq 2;$$

Получили решение второй системы: $1;2$ (рис. 15)

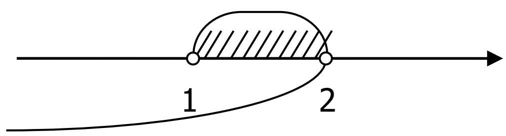

Рис. 15. Рисунок к примеру 15

Объединив решения обоих систем, получим решение заданного неравенства.

Ответ: $\frac{1}{2};2$.

Пример 16 [24]. Решить неравенство: $\sqrt{x^2-x-12}<x$.

Это неравенство равносильно системе

$$\begin{cases} x^2-x-12\geq 0 \\ x>0 \\ \left(\sqrt{x^2-x-12}\right)^2<x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-x-12\geq 0 \\ x>0 \\ x^2-x-12<x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-x-12\geq 0 \\ x>0 \\ x>-12 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x-4)(x+3)\geq 0 \\ x>0 \\ x>-12 \end{cases},$$

$$x^2-x-12=0,$$

$$D=1+48=49,$$

$$x_1=\frac{1+7}{2}=4, x_2=\frac{1-7}{2}=-3.$$

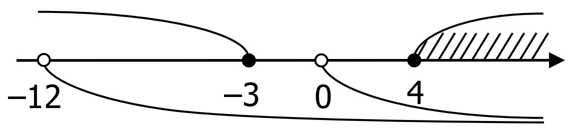

Рис. 16. Рисунок к примеру 16

Ответ: [4;+∞).

В данном параграфе проанализирован задачный материал по теме «Квадратные неравенства» в различных учебниках алгебры основной школы. Составлена типология задач и приведены решения разных типов задач.

§ 5. Из опыта работы учителей по данной теме

Во время изучении темы «Квадратные неравенства» учащиеся сталкиваются с определенным рядом проблем.

А.В. Боровских [5] в своей статье «Предметные и метапредметные проблемы школьного курса математики. Тема неравенства» сравнивает задачи с неравенствами с лабиринтом, из которого школьникам очень сложно выбраться. Автор выделяет проблему о смене представлений в теме «Неравенства». Возникает сразу несколько трудностей, например переход от оперирования числами к переменным величинам.

Другая проблема заключается в задании «решить» неравенство. У учеников создается устойчивое мнение, что «решить» – значит выполнить действия по определенному алгоритму и прийти к ответу. Но по мере усложнения примеров и задач алгоритмы их решения тоже усложняются и становятся разнообразными, до такой степени, что запомнить их все просто невозможно. Поэтому нужно не только обучать решать неравенства по алгоритму, но и самостоятельно искать новые пути решения.

Ещё одна проблема заключается в том, что правила равносильных преобразований неравенств не всегда очевидны. При изучении свойств и теорем по теме нужно объяснять их наглядно.

М.В. Фалилеева подчеркивает, что в школе не выделяется отдельно понятие неравенство с параметром: «Ни в энциклопедии элементарной математики, ни государственном образовательном стандарте нет понятия «неравенство с параметром», не представлены методы их решения. Поскольку параметризировать можно любую математическую задачу, получаем, что все уравнения и неравенства делятся на две группы – без параметров и с параметрами» [34].

В своей статье «Методические аспекты обучения решению уравнений и неравенств с параметрами» она говорит, что решение задач с параметрами является обобщением и систематизацией знаний и опыта учащихся на более высоком уровне деятельности. Именно поэтому задачи с параметрами должны быть в каждой теме, включая квадратные неравенства, с разобранными примерами и системой упражнений.

Этой же проблеме посвящена статья Е.И. Нуну [25] «Квадратные уравнения и неравенства с параметрами», в которой приведен анализ учебников и выделены различные типы задач с параметрами. Автор пишет, что задачи с параметрами относятся к такому классу задач, где алгоритмы отсутствуют или являются неприменимыми. Поэтому эти задачи требуют умений проводить различные самостоятельные логические действия.

В статье «Об обучении решению квадратных уравнений без использования формулы корней» Коржевина Е.К. [15] пишет на основе своего опыта работы экспертом на едином государственном экзамене, о том, что решая квадратные уравнения, учащиеся совершают очень много вычислительных ошибок и описок из-за невнимательности. Возможность быстро и правильно решить квадратное уравнение очень важно при решении более сложных задач, а также квадратных неравенств.

«Все полные квадратные уравнения, корни которых являются рациональными числами можно решать без использования формулы корней» [15]. В своей статье Коржевина Е.К. приводит три теоремы, на которых основано решение полных квадратных уравнений без использования формулы корней и рассматривает несколько примеров с решением.

Также приводится эксперимент, в результате которого делается вывод о повышении эффективности обучения при отработке способов решения квадратных уравнений без использования формулы корней.

Изучение темы «Квадратные неравенства» требует от учащихся проявлять умения сравнивать, анализировать, обобщать и действовать по аналогии, пользуясь алгоритмом. Также учащиеся используют логические законы и правила, перебор случаев и различные схемы метода «от противного». Об этом в своей статье пишет Панкратова Л.В. и иллюстрирует это на примерах. Она приходит к выводу, что: «изучение неравенств нацеливает учащихся на грамотное использование правил логического вывода, демонстрирует способы построения рассуждений и построения умозаключений» [26].

Шестаков С. в статье «Решаем неравенства» подробно рассматривает метод интервалов, приводит алгоритм решения и способы разложения на множители, и группировку при решении неравенств [37].

А в статье «Решаем неравенства. Часть 2» он рассматривает неравенства с модулем. В статье представлены: метод равносильных преобразований, метод интервалов, метод введения новой переменной, применение геометрического смысла модуля, метод знакотождественных множителей и применение свойств функции. В каждом пункте приведены примеры с решениями.

Особое внимание заслуживает метод знакотождественных множителей, который не выделяется в школьных учебниках, но может быть использован в сильных классах или на факультативных занятиях. На примере сразу видно, насколько этот метод рациональнее метода промежутков. Суть метода состоит в том, что: «любой из множителей в левой части неравенства являющийся разностью модулей двух алгебраических выражений, можно заменить разностью квадратов этих выражений (учитывая при необходимости ОДЗ каждого из таких выражений)» [38].

Для подготовки к основному государственному экзамену можно использовать программу «Обобщающее повторение темы «Решение неравенств и систем неравенств» при подготовке к ОГЭ», разработанную учителем математики, М.Л. Симаньковой [31].

Программа содержит теоретический и практический материал, в который входят упражнения для закрепления знаний и тестовые задания. Также есть тест для определения начального уровня учащихся, который называется «стартовая диагностика».

Отдельно хочется выделить работу Н.М. Епифановой [12] «Неравенства в текстовых задачах», потому что, на мой взгляд, очень мало внимания уделяется задачам, которые решаются с помощью неравенств при изучении данной темы.

В своей работе Епифанова Н.М. выделила различные виды задач, решение которых сводится к составлению и решению неравенств первой и второй степени, также приводит много примеров с решениями.

Выводы по первой главе

В первой главе представлены теоретические основы обучения квадратным неравенствам:

1. Рассмотрена история развития неравенств и их символики.

2. Сформулированы цели темы «Квадратные неравенства» в курсе алгебры основной школы, определено её место.

4. Рассмотрен теоретический материал темы «Квадратные неравенства», проанализированы школьные учебники разных авторов.

5. Выполнен анализ содержания задачного материала, составлена типология задач по теме «Квадратные неравенства», рассмотрены примеры с решениями.

6. Изучены статьи, методические разработки и рекомендации учителей.

ГЛАВА II. МЕТОДИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ОБУЧЕНИЯ КВАДРАТНЫМ НЕРАВЕНСТВАМ В КУРСЕ АЛГЕБРЫ ОСНОВНОЙ ШКОЛЫ

§6. Методы, формы, средства обучения квадратным неравенствам в курсе алгебры основной школы

Процесс обучения является взаимодействием содержания, целей, методов, форм и средств обучения.

«Методы обучения – это упорядоченная деятельность педагога и учащихся, направленная на достижение заданной цели обучения» [27, с. 470].

Существует много различных классификаций методов обучения, выделим некоторые из них. Классификация, основанная на источниках знаний, включает в себя наглядные, словесные и практические методы обучения. Также существует классификация, основанием которой является характер познавательной деятельности. Она содержит такие методы как: репродуктивный, объяснительно-иллюстративный, эвристический, исследовательский [29].

Я.И. Груденов выделяет следующие методы обучения: метод целесообразных задач, эвристический метод, вопросно-ответный метод, алгоритмический метод, метод элементарных и неэлементарных задач, объяснительно-иллюстративный метод [10].

Все эти методы обучения формировались на протяжении многих лет и сейчас основная задача учителя – это применять и комбинировать на практике различные методы в зависимости от учебной цели задачи.

При изучении темы «Квадратные неравенства» наиболее используемыми методами являются алгоритмический метод и метод целесообразных задач.

Алгоритмический метод заключается в решении задач по определенному, изученному ранее алгоритму.

Определить алгоритм можно как понятное предписание, которое указывает, какие операции и в какой последовательности нужно выполнять для решения задач определенного типа [32, С.56]. Алгоритм должен включать в себя последовательность выполняемых шагов, необходимые пояснения и рекомендации для его выполнения. При этом он должен быть максимально компактным.

Для решения квадратных неравенств, в школьных учебниках приводится алгоритм решения, используя который учащиеся могут самостоятельно решить упражнения.

Задача учителя – детально разобрать этот алгоритм с учащимися, рассмотреть каждый шаг, на примере показать и объяснить как его использовать. Также учитель должен напоминать учащимся, что при использовании алгоритма нужно его запоминать и контролировать каждый выполняемый шаг. Это поможет избежать типичных ошибок.

Суть метода целесообразных задач состоит в том, что учащимся предлагаются подготовительные задачи, которые могут подготовить к изучению новой темы, к пониманию определения или теоремы, а также самостоятельному решению задач.

Я.И. Груденов советует при использовании этого метода подбирать меньше подготовительных задач, но чтобы каждая могла рассматриваться несколько раз для изучения различных учебных элементов [10].

Например, с помощью метода целесообразных задач учащимся можно показать особенности решения некоторых квадратных неравенств.

Усвоение учебного материала учащимися происходит с помощью различных форм обучения. Понимание учителем содержания форм обучения дает возможность повышать эффективность обучения. Форма обучения зависит от многих аспектов: целей, содержания, методов и средств обучения.

Под формой обучения подразумевается способ организации учебной деятельности учащихся. Формы обучения бывают: индивидуальной, групповой, фронтальной и коллективной.

Под *индивидуальной* формой обучения подразумевается работа учителя с каждым учеником. То есть, перед каждым учеником ставится такая цель или задача, решение которой он добивается лично. Выполнение задания каждый учащийся осуществляет самостоятельно, но учитель, с учетом уровня знаний, может оказывать помощь.

Оценивается деятельность каждого ученика также отдельно, в сравнении с его прямыми результатами и определенными нормами для данных заданий. При этой форме обучения основная задача учителя – организация самостоятельной деятельности каждого ученика и ее контроль.

Групповая форма обучения отличается тем, что учащиеся разбиваются на группы и поставленная цель выполняется коллективно, с участием каждого члена группы. Итоги подводятся относительно деятельности целой группы.

При *фронтальной* форме обучения учитель работает одновременно со всем классом. Перед классом ставится одинаковая учебная задача и учитель, вместе с учащимися ее достигает, с помощью объяснения материала или прорешивания заданий на доске.

При *коллективной* форме обучения учащимся предлагается общее задание, выполнять которое они должны самостоятельно, без помощи учителя. Задача учителя – направлять деятельность учащихся в нужное русло, мотивировать их к самостоятельному достижению цели, подтолкнуть общему обсуждению задания друг с другом. Итог работы подводится для всего класса в целом [33].

Во время изучения темы «Квадратные неравенства» в основном используются фронтальная (при изучении нового материала), коллективная (на уроках закрепления) и индивидуальная (при проверке знаний) формы обучения.

Немаловажную роль при проведении урока имеют средства обучения.

Средствами обучения являются все материалы, которые использует учитель в учебном процессе.

При изучении темы «Квадратные неравенства» используются основные средства обучения, такие как, учебник, задачник, тетрадь, а также могут быть использованы дополнительные средства обучения, дидактические материалы (алгоритм решения квадратного неравенства, памятка по нахождению дискриминанта и корней квадратного уравнения, раздаточные материалы), презентация урока.

Средства обучения облегчают восприятие и усвоение материала учащимися. Но слишком частое их использование может привести к ухудшению развития абстрактного мышления учащихся [14].

С помощью средств обучения реализуется принцип наглядности. Любое наглядное пособие принесет больше пользы, если учащиеся будут регулярно с ним работать, а еще лучше, если сами его изготовят [6, с.82].

В современном мире каждому учителю необходимо обладать знаниями по работе с интерактивными средствами, ведь они позволяют улучшить образовательный процесс: повысить индивидуализацию обучения, наглядность учебного материала, расширить формы представления информации и способы ее обработки.

С помощью современных интерактивных средств можно привлечь интерес учащихся к обучению темы «Квадратные неравенства». Сейчас общедоступны готовые мультимедийные продукты, например образовательные диски. Тема «Квадратные неравенства» содержится на диске «Алгебра, 7-9 класс» и включает в себя задачи, тесты, самостоятельные работы [8].

В данном параграфе описаны методы, формы и средства, используемые при обучении теме «Квадратные неравенства».

§7. Методические рекомендации обучения решению квадратных неравенств

Для учителя важно предвидеть возможные ответы учащихся на задания, а также распространенные ошибки, которые могут совершать учащиеся. Необходимо знание учебных программ, и умение выявлять основные цели и задачи обучения [40].

При изучении темы «Квадратные неравенства» необходимо учитывать методические рекомендации, для лучшего усвоения темы и устранения стандартных ошибок.

1. Перед изучением темы «Квадратные неравенства» целесообразно вспомнить решение квадратных уравнений и график квадратичной функции, для актуализации знаний.

2. При изучении определения квадратных неравенств необходимо акцентировать внимание учащихся на том, что квадратное неравенство может иметь неполный вид и разобрать решения таких неравенств на примерах.

3. Нужно подробно рассмотреть и обобщить случаи расположения графика и оси x, в зависимости от знака первого коэффициента и дискриминанта [3]. Полезно иметь в кабинете таблицы с графиками, где проиллюстрированы все возможные случаи расположения параболы относительно оси x.

4. При решении неравенства стандартного вида, у которого первый коэффициент отрицательный рекомендуется всегда умножать обе части неравенства на -1. Это поможет избежать ошибок при вычислении корней квадратного трехчлена и при выборе промежутков по схеме графика [36].

Важно помнить о смене знака неравенства на противоположный, это правило изучалось ещё при решении линейных неравенств, но действует также и при решении квадратных [41].

5. Следует объяснить учащимся, что при решении квадратных неравенств метод интервалов не стоит использовать, если этого не сказано в условии задачи. Гораздо важнее понять и освоить метод схематичного построения параболы, который является наглядным представлением решения неравенства [22].

6. Использование математических упражнений и задач позволяет определить уровень знаний учащихся. Упражнения и задачи должны быть расположены в порядке возрастания сложности.

Перед изучением темы «Квадратные неравенства» учитель может дать учащимся краткий тест, с помощью которого выявит уровень подготовленности учащихся к изучению новой темы. Также этот тест может служить актуализацией знаний учащихся, если сразу после тестирования разобрать задания вместе с учениками.

7. Поиск способа решения является основным компонентом решения задачи. «Научить учащихся решать задачи – значить научить их осознанному поиску способа решения» [13, С.8].

Целесообразно сначала дать возможность учащимся решить задачу самостоятельно, на основании изученной теории, по аналогии с уже известными примерами. Затем можно проанализировать решение задачи с помощью ответов на вопросы учителя. Далее учитель должен показать и объяснить своё решение, сопровождая его устными указаниями и советами. Здесь важно понять и закрепить полученные знания.

Учитель может предложить решить квадратные неравенства на основе имеющихся знаний, со своей помощью.

Можно предложить решить неравенство:

Пример 17 [18]. $2x^2 - 7x + 6 > 0$.

Учащимся можно подсказать, что сначала нужно рассмотреть функцию, графиком которой является парабола, и найти точки ее пересечения с осью x. На основе имеющихся знаний, учащиеся могут решить уравнение и построить график этой функции (рис. 17).

$$2x^2 - 7x + 6 = 0,$$

$$D = b^2 - 4ac = 7^2 - 4 \cdot 2 \cdot 6 = 49 - 48 = 1,$$

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a} = \frac{7+1}{2 \cdot 2} = \frac{8}{4} = 2, x_2 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a} = \frac{7-1}{2 \cdot 2} = \frac{6}{4} = 1{,}5.$$

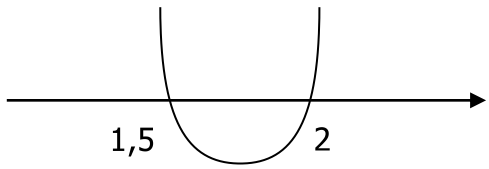

Рис. 17. Рисунок к примеру 17

После построения графика, учителю нужно обратить внимание на то, что в задании нужно найти такие значения *x*, которые будут удовлетворять неравенству. А это значит, что в данном примере значение функции должно быть больше нуля. То есть в ответ войдут два промежутка, на которых ветви параболы выше оси *x*.

Также следует обратить внимание на знак неравенства, в данном примере это строго больше нуля. Значит, в ответ запишем промежутки, не включая точки пересечения с осью *x*.

Ответ: $(-\infty; 1{,}5) \cup (2; +\infty)$.

Затем учитель должен проанализировать полученное решение вместе с учащимся. Задать наводящие вопросы и вместе с учениками вывести алгоритм решения квадратных неравенств.

После составления алгоритма учитель решает на доске еще один пример, строго по составленному плану, подробно объясняя каждый шаг и контролируя усвоение этапов алгоритма учащимися.

8. Для закрепления знаний и отработки навыков решения квадратных неравенств учащимся нужно предложить различные задания, например отличающиеся по формулировке условия: решить неравенство; найти множество решений неравенства; найдите, при каких значения *x* трехчлен принимает положительные (отрицательные) значения. Также нужно показать, что обозначение переменной может быть разным (*x*, *y*, *z*, *t*, …).

9. При решении самостоятельной или контрольной работы целесообразно ставить перед учащимися задачу решить задание наиболее рациональным способом, либо решить несколькими способами.

Сейчас урок математики является постоянно развивающейся формой организации занятий. Чаще всего выделяется типология уроков, в зависимости от дидактических целей: урок изучения нового материала, урок закрепления, урок проверки и оценки знаний, комбинированный урок [16].

Каждый тип урока будет отличаться по структуре. Но каждый урок должен обладать некоторыми признаками:

– содержание урока строится с опорой на ранее изученный материал и становится некоторой основой для изучения следующих тем;

– в процессе обучения происходит разделение учащихся в зависимости от способностей, склонностей, что показывает необходимость дифференцированного обучения;

– урок должен быть построен так, чтобы все учащиеся могли усвоить основной материал;

– теоретический материал в процессе изучения математики в основном усваивается при решении задач, поэтому теория не изучается отдельно от практики [29].

Подготовка учителя к урокам начинается с тематического планирования учебного процесса.

Качественному обучению предшествует хорошее планирование. То есть, учителя лучше всего могут удовлетворить потребности учащихся, когда у них есть определенное видение того, как должен проходить урок, что должны знать ученики после изучения темы [40].

Представим схему для тематического планирования:

– ознакомление с программой и постановка задач изучения темы;

– изучения содержания учебного материала по теме, определение основных знаний, умений, навыков, которые должны будут усваивать учащиеся;

– определение видов уроков, разработка логики раскрытия темы;

– разбиение всей темы на количество уроков, в соответствии с программой (количество часов, отведенных на изучение темы);

– определение основных задач каждого урока;

– выбор методов, форм и средств, необходимых для решения намеченных задач;

– выбор оптимального темпа обучения для урока;

– отбор материала и выбор методов для домашней работы учащихся [28, с.240].

Я.И. Груденов [10] выделяет два возможных способа изучения решения квадратных неравенств: самостоятельный разбор примеров из учебника; объяснение способа решения учителем. И рассматривает более подробно первый из способов.

На основе примера решения квадратного неравенства из учебника нужно составить задание для учащихся. Так как ученикам нужно научиться решать подобные примеру квадратные неравенства, то можно поставить перед ними такую задачу: рассмотрите приведенный в учебнике пример и на его основе составьте алгоритм решения.

После выполнения этого задания учащимися нужно сравнить составленный ими алгоритм с предлагаемым учителем.

Я.И. Груденов предлагает такое дидактическое правило: «сначала учитель ставит конкретное задание, которое должны будут выполнять учащиеся по ходу ознакомления с материалом. Только после уяснения учащимися этого задания им предлагается читать соответствующий параграф учебника, слушать объяснение учителя или вызванного ученика» [10, с.47].

В этом параграфе приведены методические рекомендации для обучения теме «Квадратные неравенства», представлена примерная схема для тематического планирования.

§8. Типология задач основного государственного экзамена по теме «Квадратные неравенства».

В данном параграфе рассмотрим тестовые варианты основного государственного экзамена. Квадратные неравенства встречаются в 6, 14 и 21 задании. Задания номер 6 и 14 базового уровня сложности, на решение которых отведено примерно по 5 минут, а задания под номером 21 являются повышенного уровня сложности, на которое отводится 15-20 минут.

Выделим основные типы задач базового уровня.

I тип. На каком из рисунков изображено решение неравенства

а) $4x - x^2 \leq 0$ (рис. 18);

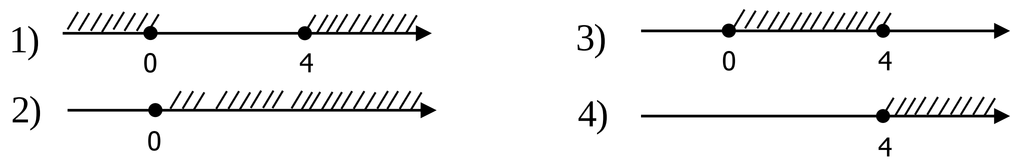

Рис. 18. Варианты ответов к заданию под буквой «а»

б) $2x-5 \quad x+3 \ \geq 0$ (рис. 19);

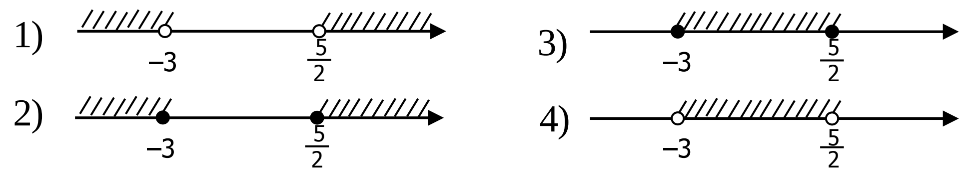

Рис. 19. Варианты ответов к заданию под буквой «б»

в) $81x^2 > 64$ (рис. 20);

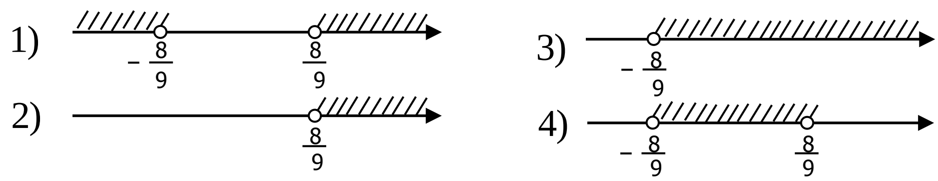

Рис. 20. Варианты ответов к заданию под буквой «в»

г) $x^2 - 4x + 3 \geq 0$ (рис. 21).

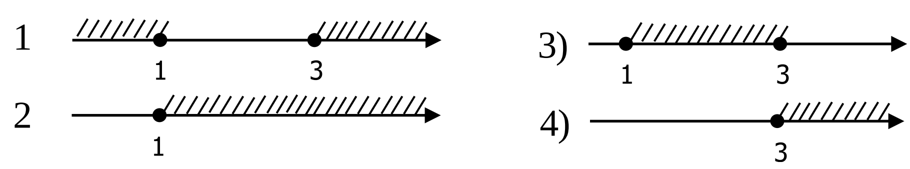

Рис. 21. Варианты ответов к заданию под буквой «г»

II тип. Решение какого из данных неравенство изображено на рисунке?

а) на рисунке 22.

1) $x^2 + 4 < 0$;

2) $x^2 - 4 > 0$;

3) $x^2 + 4 > 0$;

4) $x^2 - 4 < 0$.

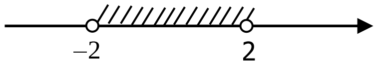

Рис. 22. Рисунок к заданию под буквой «а»

б) на рисунке 23.

1) $x^2 - 6x < 0$;

2) $x^2 - 6x > 0$;

3) $x^2 + 36x < 0$;

4) $x^2 - 36x > 0$.

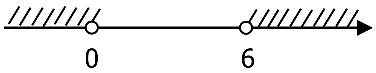

Рис. 23. Рисунок к заданию под буквой «б»

в) на рисунке 24.

1) $x^2 - 3x - 4 \geq 0$;

2) $x^2 - 3x + 4 < 0$;

3) $x^2 - 3x + 2 \geq 0$;

4) $x^2 - 3x + 4 < 0$.

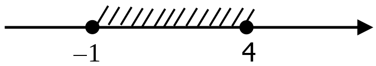

Рис. 24. Рисунок к заданию под буквой «в»

III тип. Решите неравенство:

а) $x^2 - 25 < 0$:

1) $(-\infty; +\infty)$;

2) нет решений;

3) $(-5; 5)$;

4) $(-\infty; -5) \cup (5; +\infty)$.

б) $x^2 - 4x < 0$:

1) $[0; 4]$;

2) $(-\infty; 0) \cup (4; +\infty)$;

3) $(0; 4)$;

4) $-\infty; 0 \ \cup [4; +\infty)$.

в) $x^2 - 7x + 12 \geq 0$:

1) $[3; 4]$;

2) $-\infty; -3 \ \cup [4; +\infty)$;

3) $[4; +\infty)$;

4) $[3; +\infty)$.

IV тип. Укажите неравенство, которое

а) не имеет решений:

1) $x^2 - 64 \leq 0$; 3) $x^2 - 64 \geq 0$;

2) $x^2 + 64 \geq 0$; 4) $x^2 + 64 \leq 0$.

б) решением которого является любое число:

1) $x^2 - 15 < 0$; 3) $x^2 + 15 < 0$;

2) $x^2 + 15 > 0$; 4) $x^2 - 15 > 0$.

Также выделим типы задач повышенного уровня сложности, это задачи из 2 части и рассмотрим их решения.

I тип. Целые рациональные неравенства.

а) $x - 3 \quad 2x + 3 \quad < -7$; в) $x - 8 \ ^2 < \ \overline{3}(x - 8)$;

б) $4x - 6 \ ^2 \geq \ 6x - 4 \ ^2$; г) $x^2 \ \ -x^2 - 64 \ \leq 64(-x^2 - 64)$.

II тип. Дробно-рациональные неравенства.

а) $\frac{x^2}{3} \geq \frac{3x+3}{4}$; б) $\frac{12}{x^2-7x-8} \leq 0$; в) $\frac{-19}{x+5 \ ^2-6} \geq 0$.

III тип. Системы, содержащие квадратные неравенства.

а) $\begin{matrix} x^2 + 4x - 5 < 0 \\ x^2 - 4 \leq 0 \end{matrix}$;

б) $\begin{matrix} 6x + 2 \ \ - 6(x + 2) \ > 2x \\ x - 7 \quad x + 6 \ \ < 0 \end{matrix}$;

в) $\begin{matrix} \frac{24-3x}{8+ \ 5-2x \ ^2} \geq 0 \\ 22 - 9x \leq 43 - 2x \end{matrix}$.

Пример 18. Решить неравенство: $\frac{-19}{x+5 \ ^2-6} \geq 0$;

$$x + 5 \ ^2 - 6 \neq 0,$$

$$x^2 + 10x + 25 - 6 \neq 0 \Rightarrow x^2 + 10x + 19 \neq 0,$$

$$D = 100 - 76 = 24,$$

$$x_1 = \frac{-10 + \ \overline{24}}{2} = \frac{-10 + 2 \ \overline{6}}{2} = \frac{2 \ -5 + \ \overline{6}}{2} = -5 + \ \overline{6},$$

$$x_2 = \frac{-10 - \ \overline{24}}{2} = \frac{-10 - 2 \ \overline{6}}{2} = \frac{2 \ -5 - \ \overline{6}}{2} = -5 - \ \overline{6}.$$

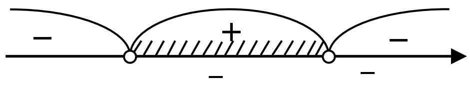

Рис. 25. Рисунок к примеру 18

Ответ: $(-5-\sqrt{6};-5+\sqrt{6})$.

Пример 19. Решить неравенство: $\frac{x^2}{3} \geq \frac{3x+3}{4}$;

$$\frac{x^2}{3} \geq \frac{3x+3}{4} \Rightarrow \frac{x^2}{3} - \frac{3x+3}{4} \geq 0 \Rightarrow \frac{4x^2-3(3x+3)}{12} \geq 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{4x^2-9x-9}{12} \geq 0 \Rightarrow 4x^2-9x-9=0,$$

$$D = 81+144 = 225,$$

$$x_1 = \frac{9+15}{2\cdot 4} = \frac{24}{8} = 3, x_2 = \frac{9-15}{2\cdot 4} = \frac{-6}{8} = -\frac{3}{4}.$$

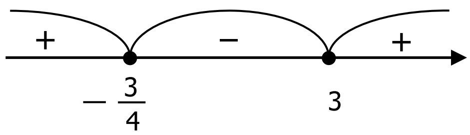

Рис. 26. Рисунок к примеру 19

Ответ: $\left(-\infty;-\frac{3}{4}\right] \cup [3;+\infty)$.

Пример 20. Решить неравенство: $(4x-6)^2 \geq (6x-4)^2$;

$$16x^2-48x+36 \geq 36x^2-48x+16,$$

$$-20x^2 \geq -20 \Rightarrow 20x^2 \leq 20 \Rightarrow x^2 \leq 1,$$

$$-1 \leq x \leq 1.$$

Ответ: $[-1;1]$.

Пример 21. Решить неравенство: $(x-3)(2x+3) < -7$;

$$(x-3)(2x+3) < -7 \Rightarrow (x-3)(2x+3)+7 < 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2x^2+3x-6x-9+7 < 0 \Rightarrow 2x^2-3x-2 < 0,$$

$$2x^2-3x-2=0,$$

$$D = 9+16 = 25,$$

$$x_1 = \frac{3+5}{2\cdot 2} = \frac{8}{4} = 2, x_2 = \frac{3-5}{2\cdot 2} = \frac{-2}{4} = -\frac{1}{2}.$$

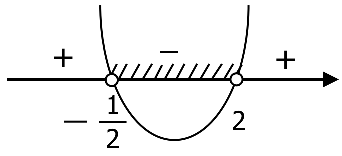

Рис. 27. Рисунок к примеру 21

Ответ: $(-\frac{1}{2};2)$.

Пример 22. Решить неравенство: $(x-8)^2<\sqrt{3}(x-8)$.

$$(x-8)^2-\sqrt{3}(x-8)<0\Rightarrow (x-8)^2-\sqrt{3}(x-8)=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow (x-8)(x-8)-\sqrt{3}(x-8)=0\Rightarrow (x-8)((x-8)-\sqrt{3}))=0,$$

$$x=8, x=8+\sqrt{3}$$

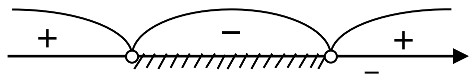

Рис. 28. Рисунок к примеру 22

Ответ: $(8;8+\sqrt{3})$.

Пример 23. Решить систему неравенств:

$$\begin{cases} x^2+4x-5<0 \\ x^2-4\le 0 \end{cases}$$

Решим отдельно оба неравенства системы.

$$1.\ x^2+4x-5<0,$$

$$x^2+4x-5=0, D=16+20=36,$$

$$x_1=\frac{-4+6}{2}=1, x_2=-\frac{10}{2}=-5$$

$$2.\ x^2-4\le 0$$

$$x^2-4=0\Rightarrow x^2=4\Rightarrow x=\pm 2$$

Отметим решения неравенств на одной числовой прямой и запишем в ответ их пересечение (рис. 29).

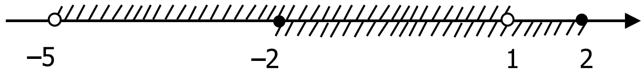

Рис. 29. Рисунок к примеру 23

Ответ: $[-2;1)$.

Для успешного решения этих задач учащимся необходимо знать алгоритм решения квадратных неравенств, формулу нахождения дискриминанта, формулы нахождения корней квадратного уравнения, свойства квадратичной функции, уметь схематично строить график.

В данном параграфе проанализированы задачи основного государственного экзамена, содержащие квадратные неравенства, и составлена их типологию; приводятся решения задач повышенного уровня сложности.

§9. Методические разработки по теме «Квадратные неравенства» в курсе алгебры основной школы

Для контроля знаний по теме часто используются самостоятельные и контрольные работы. Приведем авторскую самостоятельную работу по теме «Квадратные неравенства», разделенную на три уровня сложности.

1 уровень сложности:

1. Решите неравенство:

   а) $x^2+5x-6>0$; в) $2x^2-6x+5\leq 0$;

   б) $3x^2-5x+4\geq 0$; г) $x^2-3x<0$.

2. Решите неравенство графически:

   а) $x^2+2x-3<0$; б) $3x^2+x-2<0$.

3. Решите неравенство методом интервалов:

   а) $x+1\ \ (x-2)\ \ x^2+1\ \ \geq 0$; б) $\frac{x^2+2x}{x-3}\leq 0$.

2 уровень сложности:

1. Решите неравенство:

   а) $6x^2-x-1>0$; в) $x\ \ x-7\ \ -18>7\ \ 9-x\ \ $;

   б) $-2x^2+x+1\leq 0$; г) $-5x^2+8x-5<0$.

2. Решите неравенство графически:

   а) $-x^2+x+2<0$; б) $x^2\geq 4x-3$.

3. Решите неравенство методом интервалов:

$$2x^2+4 \quad x-2 \;^2 \; x^2+4x+3 \;\; \leq 0;$$

3 уровень сложности:

1. Решите неравенство:

а) $6x^2-11x+3<0;$

б) $\frac{x^2-5x+13}{x+4} \leq 1.$

в) $x \;\; x+5 \;\; -76>5 \;\; x-8 \;\;;$

г) $\frac{x^2+3x-3}{x+2} \leq 3;$

2. При каких значениях *x* имеет смысл выражение:

а) $\overline{x^2-2x-35}+\frac{1}{\overline{10-x}};$

б) $\overline{x^2+4x-45}+\frac{1}{\overline{11-x}}.$

3. Решите неравенство методом интервалов:

а) $\frac{x-3 \;\; -2}{x^2-2x-48} \geq 0;$

б) $x^4+13x^2+36 \geq 0.$

В слабом классе целесообразно порешать однотипные задачи для подготовки, разобрать решение вместе с учителем.

Примеры для подготовки (1 уровень):

1. Решите неравенство:

а) $2x^2+5x-3 \geq 0$ (рис. 30);

$$a=2; b=5; c=-3.$$

$$D=b^2-4ac=5^2-4\cdot 2\cdot \;\; -3 \;\; =25+24=49,$$

$$x_1=\frac{-b+\;\;\overline{D}}{2a}=\frac{-5+7}{2\cdot 2}=\frac{1}{2}, x_2=\frac{-b-\;\;\overline{D}}{2a}=\frac{-5-7}{2\cdot 2}=-\frac{12}{4}=-3;$$

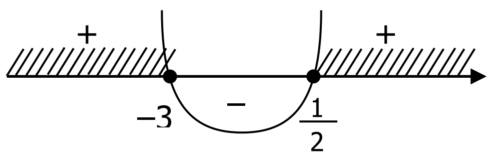

Рис. 30. Рисунок к неравенству «а»

Ответ: $x \in \ -\infty;-3 \ \cup \ \frac{1}{2};+\infty$.

б) $x^2 + 4x \geq 0$ (рис. 31);

$$x^2 + 4x = 0 \Rightarrow x \ \ x + 4 \ \ = 0 \Rightarrow x = 0, x + 4 = 0;$$

$$x = -4;$$

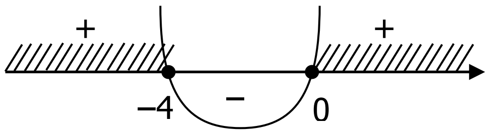

Рис. 31. Рисунок к неравенству «б»

Ответ: $x \in \ -\infty;-4 \ \cup \ 0;+\infty$.

2. Решите неравенство графически (рис. 32):

$$x^2 - 2x - 3 > 0 \Rightarrow x^2 > 2x + 3,$$

$$y_1 = x^2, y_2 = 2x + 3;$$

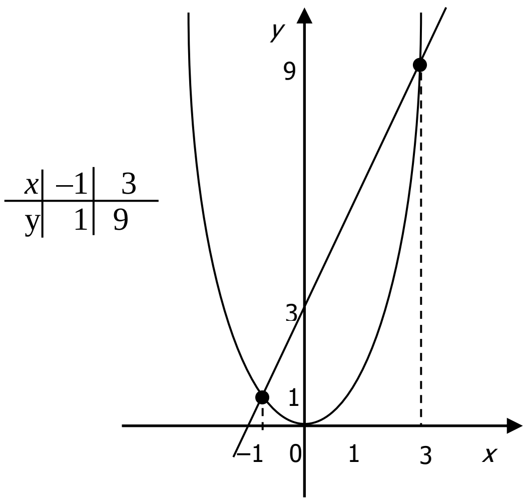

Рис. 32. Решение неравенства графически

Ответ: $x \in \ -\infty;-1 \ \cup \ 3;+\infty$.

3. Решите неравенство методом интервалов (рис. 33):

$$(x - 3)(x + 1) \ \ x^2 + 4 \ \ \leq 0;$$

$$x - 3 = 0, \qquad x + 1 = 0, \qquad x^2 + 4 = 0;$$

$$x = 3, \qquad x = -1, \qquad x^2 = -4;$$

$$x = \emptyset.$$

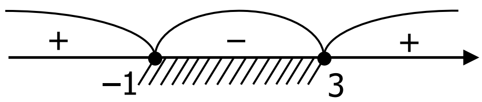

Рис. 33. Решение неравенства методом интервалов

Ответ: $x \in (-1;3)$.

После проведения данной самостоятельной работы необходимо проанализировать ошибки учащихся и разобрать их вместе с учениками.

В этом параграфе приводятся методические разработки по теме «Квадратные неравенства» в виде самостоятельной работы, разделенной на три уровня сложности, с подготовительными заданиями с решением для первого уровня.

Выводы по второй главе

Во второй главе представлены методические основы обучения теме «Квадратные неравенства»:

1. Рассмотрены методы, формы и средства, используемые при обучении теме «Квадратные неравенства».

2. Приведены методические рекомендации для обучения теме «Квадратные неравенства».

3. Проанализированы задачи основного государственного экзамена, содержащие квадратные неравенства и составлена их типология.

4. Приводятся решения задач повышенного уровня сложности.

5. Приводятся методические разработки по теме «Квадратные неравенства» в виде самостоятельной работы, разделенной на три уровня сложности, с подготовительными заданиями с решением для первого уровня.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Неравенства имеют не только важное для учеников теоретическое значение, но и служат практическим целям в дальнейшем. Овладевая различными приемами решения квадратных неравенств, ученик сможет находить ответы на задачи из других тем курса алгебры.

В ходе выпускной квалификационной работы получены следующие результаты:

1. Приведены краткие факты из истории появления и распространения современной символики неравенств;

2. Сформулированы цели темы «Квадратные неравенства» в курсе алгебры основной школы, определено её место;

4. Проанализирован теоретический материал темы «Квадратные неравенства», рассмотрены примеры решения неравенств;

5. Представлены различные типы задач после анализа задачного материала курса алгебры основной школы;

6. Изучены статьи, методические разработки и рекомендации учителей;

7. Рассмотрены методы, формы и средства используемые при обучении теме «Квадратные неравенства»;

8. Приведены методические рекомендации для обучения теме «Квадратные неравенства»;

9. Проанализированы задачи основного государственного экзамена, содержащие квадратные неравенства и составлена их типологию;

10. Приводятся решения задач повышенного уровня сложности;

11. Приводятся методические разработки по теме «Квадратные неравенства» в виде самостоятельной работы, разделенной на три уровня сложности, с подготовительными заданиями с решением для первого уровня.

Типологию задач и методические разработки можно использовать при подготовке к самостоятельной и контрольной работе по теме «Квадратные неравенства» и основному государственному экзамену.

СПИСОК ИСПОЛЬЗУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Алимов, Ш.А. Алгебра. 8 класс [Текст]: учебник для общеобразовательных учреждений / Ш.А. Алимов, Ю.В. Сидоров. – 19-е изд. – М.: Просвещение, 2012. – 255 с.

2. Алимов, Ш.А., Алгебра. 9 класс [Текст]: учебник для общеобразовательных учреждений / Ш.А. Алимов, Ю.М. Колягин, Ю.В. Сидоров.- 17-е изд. – М.: Просвещение, 2012. – 287 с.

3. Бабенко, С.П. Алгебра. 9 класс: Разработки уроков [Текст] / С.П. Бабенко. – Харьков: «Ранок», 2011. – 256 с.

4. Блох, А.Я. Методика преподавания математики в средней школе [Текст]: Частная методика: Учебное пособие для студентов педагогических институтов по физ.-мат. специальностям / А.Я. Блох, В.А. Гусев, Г.В. Дорофеев.; Сост. В.И. Мишин. – М.: Просвещение, 1987. – 416 с.

5. Боровских, А.В. Предметные и метапредметные проблемы школьного курса математики. Тема «Неравенства» [Электронный ресурс] / А.В. Боровских, В.Е. Веревкина // Наука и школа. – 2015. – № 5. – С. 77-87. – Режим доступа: https://elibrary.ru/item.asp?id=24852670. - Последнее обновление 23.01.2018.

6. Брадис, В.М. Методика преподавания математики в средней школе / В.М. Брадис; под ред. А.И. Маркушевича. – М.: Государственное учебно-педагогическое издательство министерства просвещения РСФСР, 1954. – 504 с.

7. Бурмистрова, Т.А. Алгебра. Сборник рабочих программ. 7-9 классы [Текст]: пособие для учителей общеобразовательных организаций / Т.А. Бурмистрова. – 2-е изд. – М.: Просвещение, 2014. – 96 с.

8. Ганжа, И.П. Информатизация образовательного пространства учителя математики [Электронный ресурс] / И.П. Ганжа // Педагогический университетский вестник Алтая. – 2006. – №1. – С. 328-332. – Режим доступа: https://elibrary.ru/item.asp?id=21479406. – Последнее обновление 03.06.2018.

9. Глейзер, Г.И. История математики в школе [Текст]: пособие для учителей / Г.И. Глейзер – М.: Просвещение, 1964. –375 с.

10. Груденов, Я.И. Совершенствование методики работы учителя математики [Текст]: книга для учителя / Груденов Я.И. – М.: Просвещение, 1990. – 224 с.

11. Дорофеев, Г.В. Алгебра. 9 класс [Текст]: учебник для общеобразовательных учреждений / Г.В. Дорофеев, С.Б. Суворова, Е.А. Бунимович.; под ред. Г.В. Дорофеева. – 5-е изд. – М.: Просвещение, 2010. – 304 с.

12. Епифанова, Н.М. Неравенства в текстовых задачах: учебное пособие [Электронный ресурс] / Н.М. Епифанова. – Ярославь: ЯГПУ им. К.Д. Ушинского, 2007. – 45 с. – Режим доступа: https://elibrary.ru/item.asp?id=29807097. – Последнее обновление 29.05.2018.

13. Епишева, О.Б. Учить школьников учиться математике: Формирование приемов учебной деятельность [Текст]: книга для учителя / О.Б. Епишиева, В.И. Крупич. – М.: Просвещение, 1990. – 128 с.

14. Колягин, Ю.М. Методика преподавания математики в средней школе [Текст]: общая методика. Учебное пособие для студентов физико-математических факультетов педагогических институтов / Ю.М. Колягин, В.А. Оганесян, В.Я. Саннинский и др. – М.: Просвещение, 1975. – 462 с.

15. Коржевина, Е.К. Об обучении решению квадратных уравнений без использования формул корней [Электронный ресурс] / Е.К. Коржевникова, Т.Н. Матыцина, Н.Л. Марголина // Вестник Костромского государственного университета. Серия: Педагогика. Психология. Социокинетика. – 2017. – С. 128-130. – Режим доступа: https://cyberleninka.ru/article/n/ob-obuchenii-resheniyu-kvadratnyh-uravneniy-bez-ispolzovaniya-formuly-korney. – Последнее обновления 15.05.2018.

16. Лященко, Е.И. Лабораторные и практические работы по методике преподавания математике [Текст]: Учебное пособие для студентов физико-математических специальностей педагогических институтов / Е.И. Лященко,

К.В. Зобкова, Т.Ф. Кириченко и др; под ред. Е.И. Лященко. – М.: Просвещение, 1988. – 233 с.

17. Макарычев, Ю.Н. Алгебра. 8 класс [Текст]: учебник для общеобразовательных учреждений / Ю.Н. Макарычев, Н. Г. Миндюк, К.И. Нешков, С.Б. Суворова; под ред. С.А. Теляковского. 19-е изд. – М.: Просвещение, 2013. – 287 с.

18. Макарычев, Ю.Н. Алгебра. 9 класс [Текст]: учебник для общеобразовательных учреждений / Ю.Н. Макарычев, Н.Г. Миндюк, К.И. Нешков, С.Б. Суворова; под ред. С.А. Теляковского. 21-е изд. – М.: Просвещение, 2014. – 271 с.

19. Маликова, О.Л. Методический анализ содержания темы «Неравенства» в курсе алгебры основной школы / О.Л. Маликова // Современное образование: научные подходы, опыт, проблемы, перспективы. Сборник статей XIV Международной научно-практической конференции «Артемовские чтения». Пензенский государственный университет; под общей редакцией М.А. Родионова. – Пенза: Изд-во ПГУ, 2018. – С. 191-194.

20. Мордкович, А.Г. Алгебра. 8 класс: в 2 частях. Часть 1 [Текст]: учебник для учащихся общеобразовательных учреждений / А.Г. Мордкович, Л.А. Александрова, Т.Н. Мишустина. – 12-е изд., испр. и доп. – М.: Мнемозина, 2015. – 215 с.

21. Мордкович, А.Г. Алгебра. 8 класс: в 2 частях. Часть 2 [Текст]: задачник для учащихся общеобразовательных учреждений / А.Г. Мордкович, Л.А. Александрова, Т.Н. Мишустина. – 12-е изд., испр. и доп. – М.: Мнемозина, 2015. – 271 с.

22. Мордкович, А.Г. Алгебра. 8 класс [Текст]: методическое пособие для учителя / А. Г. Мордкович. – М.: Мнемозина, 2010. – 77 с.

23. Мордкович, А.Г. Алгебра. 9 класс: в 2 частях. Часть 1 [Текст]: учебник для учащихся общеобразовательных учреждений / А.Г. Мордкович, П.В. Семенов. – 12-е изд., стер. – М.: Мнемозина, 2015. – 232 с.

24. Мордкович, А.Г. Алгебра. 9 класс: в 2 частях. Часть 2 [Текст]: задачник для учащихся общеобразовательных учреждений / А.Г. Мордкович, Л.А. Александрова, Т.Н. Мишустина. – 12-е изд., стер. – М.: Мнемозина, 2015. – 223 с.

25. Нуну, Е.И. Квадратные уравнения и неравенства с параметрами [Электронный ресурс] / Е.И. Нуну // Студенческая наука и XXI век. – 2016. – № 13. – С. 33-35. – Режим доступа: https://elibrary.ru/item.asp?id=27386022. - Последнее обновление 18.01.2018.

26. Панкратова, Л.В. Научно-образовательный потенциал математических неравенств [Электронный ресурс] / Л.В. Панкратова // Математический вестник педвузов и университетов волго-вятского региона. – 2014. – №16. – С. 238-243. – Режим доступа: https://elibrary.ru/item.asp?id=28101355. - Последнее обновление 27.01.2018.

27. Подласый, И.П. Педагогика: Новый курс [Текст]: Учебник для студентов высших учебных заведений: в 2 книгах. Книга 1: Общие основы. Процесс обучения / И.П. Подласый. – М.: Гуманитарный издательский центр ВЛАДОС, 2003. – 576 с.

28. Примерная основная образовательная программа основного общего образования. Одобрена решением федерального учебно-методического объединения по общему образованию / М-во образования и науки РФ. – М.: Просвещение, 2015. – 560 с. [Электронный ресурс]. – Режим доступа: http://fgosreestr.ru/wp-content/uploads/2015/06.pdf. – Последнее обновление 30.01.2018.

29. Саранцев, Г.И. Методика обучения математике: методология и теория [Текст]: учеб. пособие для студентов бакалавриата высших учебных заведений по направлению «Педагогическое образование» (профиль «Математика») / Г.И. Саранцев. – Казань: Центр инновационных технологий, 2012. – 292 с.

30. Сдам ГИА: решу ОГЭ и ЕГЭ. Образовательный портал для подготовки к экзаменам [Электронный ресурс] / Д.Д.Гущин. – Режим доступа: https://sdamgia.ru. – Последнее обновление 31.05.2018.

31. Симанькова, М.Л. Обобщающее повторение темы «Решение неравенств и систем неравенств» при подготовке к ОГЭ [Электронный ресурс] / М.Л. Симанькова; учитель математики ГБОУ 143. – Электрон. текстовые дан. – Спб.: [б.и.], 2016. – Режим доступа: pedsovet.org/core/file/get/id/234977. – Последнее обновление 29.05.2018.

32. Стефанова, Н.Л. Методика и технология обучения математике. Лабораторный практикум [Текст]: учебное пособие для студентов математических факультетов педагогических университетов / Н.Л. Стефанова, Н.С. Подходова, В.В. Орлов и др. – М.: Дрофа, 2007. – 320 с.

33. Утеева, Р.А. Формы учебной деятельности учащихся на уроке [Текст]: / Р.А. Утеева // Научно-теоретический и методический журнал: Математика в школе. – 1995. – №2. – С. 33

34. Фалилеева, М.В. Методические аспекты обучения решению уравнений и неравенств с параметрами [Электронный ресурс] / М.В. Филеева // Фундаментальные исследования. – 2013. – № 4-5. – С. 1230-1235. – Режим доступа: http://www.fundamental-research.ru/ru/article/view?id=31396. – Последнее обновление 29.05.2018.

35. Федеральный государственный образовательный стандарт основного общего образования: Приказ Мин. образования и науки РФ от 17.12.2010 г. №1897. [Электронный ресурс]. – Режим доступа: https://минобрнауки.рф/документы/543 – Последнее обновление 30.01.2018.

36. Шестаков, С. ЕГЭ 2018. ЕГЭ 2018. Математика. Неравенства и системы неравенств. Задача 15 (профильный уровень) [Текст] / С. Шестаков. – М.: МЦНМО, 2018. – 352 с.

37. Шестаков, С. Решаем неравенства [Электронный ресурс] / С. Шестаков. // Математика. Методический журнал для учителей математики. – 2015. – №2. – С. 56-60. – Режим доступа:

http://pets.scainlain.ru/0Yagubov/vk/neravenstva_02_metod_intervalov_i_razlozhenie_na_m.pdf. – Последнее обновление 29.05.2018.

38. Шестаков, С. Решаем неравенства [Электронный ресурс] / С. Шестаков. // Математика. Методический журнал для учителей математики. – 2015. – №11. – С. 56-62. – Режим доступа: https://yaroslavka-school.edu.yar.ru/metod_dot__sluzhba/matematika_2015-11.pdf. – Последнее обновление 29.05.2018.

39. Cajori F. A history of mathematical notations. Vol. 2. / F. Cajori. – NY: Cosimo Classics, 2007. – 392 p.

40. Davidson, A. The priorities and challenges of primary teachers' knowledge in their mathematics planning [Electronic resource] / Aylie Davidson // Conference: Proceedings of the 39th annual conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia, At Adelaide. – USA, 2016. – 8 p. Mode of access: https://www.researchgate.net/publication/310380602. – Last update 03.06.2018.

41. Stapel, E. Solving Quadratic Inequalitie. Concepts. Examples [Electronic resource] / Elizabeth Stapel // PurpleMath. – 2012. – Mode of access: http://www.purplemath.com/modules/ineqquad.htm. – Last update 01.06.2018.

42. The Free High School Science Texts: Textbooks for High School Students Studying the Sciences Mathematics Grades 10-12 / FHSST Authors. – FHSST, 2008. – 624 p.

43. Zawaira, A., Hitchcock, G. A primer for mathematics competitions. – New York, 2009. – 360 p.