МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Тольяттинский государственный университет»

Институт математики, физики и информационных технологий
(наименование института полностью)
Кафедра «Высшая математика и математическое образование»
(наименование кафедры)

44.03.05 «Педагогическое образование»
(код и наименование направления подготовки)
«Математика и информатика»
(направленность (профиль))

БАКАЛАВРСКАЯ РАБОТА

на тему **«МЕТОДИКА ОБУЧЕНИЯ РЕШЕНИЮ ИРРАЦИОНАЛЬНЫХ НЕРАВЕНСТВ В КУРСЕ АЛГЕБРЫ ОСНОВНОЙ ШКОЛЫ»**

Студент Е.С. Калиберова ____________________
(И.О. Фамилия) (личная подпись)

Руководитель к.п.н., доцент И.В. Антонова ____________________
(И.О. Фамилия) (личная подпись)

Консультант ст.преподаватель А.В. Прошина ____________________
(И.О. Фамилия) (личная подпись)

Допустить к защите
Заведующий кафедрой д.п.н., профессор, Р.А. Утеева ______________
(ученая степень, звание, И.О. Фамилия) (личная подпись)
«_____»___________2018 г.

Тольятти 2018

АННОТАЦИЯ

Целью бакалаврской работы является раскрытие методических особенностей обучения теме «Иррациональные неравенства» в курсе алгебры основной школы и составление учебных заданий по теме исследования для организации самостоятельной работы учащихся.

Тема «Неравенства» считается довольно значимой частью изучения математики в школьном курсе. «Иррациональные неравенства» - это наиболее сложный раздел алгебры, изучаемый в школьной программе, так как на его изучение отведено крайне мало времени. Изучение темы «Иррациональные неравенства» включает в себя теоретический материал и решение неравенств с помощью различных методов.

Бакалаврская работа состоит из введения, двух глав, заключения, списка литературы.

В *Главе I* приведен анализ содержания программы и школьных учебников в курсе алгебры основной школы по теме исследования, представлены методы решения иррациональных неравенств, выделены типы иррациональных неравенств на основе методов их решения, представлена типология задач.

В Главе II представлены методические аспекты обучения решению иррациональных неравенств в курсе алгебры основной школы, рассмотрены методические рекомендации по обучению их решению. Разработаны учебные задания как средство организации самостоятельно работы учащихся, проведен анализ пособий для подготовки учащихся к ОГЭ по математике.

Список литературы содержит 31 наименование. Объем работы составляет 50 страниц.

ABSTRACT

The title of the graduation project is the teaching method for solving irrational inequalities in secondary school algebra course. This final work is aimed at solving irrational inequalities.

The aim of the work is to reveal the methodological peculiarities of teaching the topic "Irrational inequalities" in the course of algebra in secondary school and to create comprehension exercises on the researched topic to organize a self-training and independent work of students.

The object of the graduation work is the process of teaching algebra in secondary school.

The subject of the diploma paper is the methodological feature of teaching "Irrational inequalities" in the course of algebra in secondary school.

The graduation work describes in details methods for solving irrational inequalities in the course of algebra of secondary school. We first discuss history of the development of irrational inequalities. The readers' attention is also drawn to the methods of solving irrational inequalities and the possibility of their application. We then analyze algebra school textbooks for grade 9. We also report the results of experiments conducted to explore ways to solve irrational inequalities.

Overall, the results suggest that the theme "Irrational inequalities" is one of the most complex sections of algebra studied in the school curriculum. The work done allows students to fully master the ability to solve irrational inequalities, and avoid making mistakes when solving them.

The list of literature contains 31 titles.

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Актуальность исследования. В век новых технологий довольно увеличилась степень воздействия окружающего мира на подрастающее поколение. Происходит переоценка ценностей, расслоение общества, изменение психологического стереотипа людей. Школа – это часть общества и в ней, как в капельке воды, отражается та же проблема, что и во всей России.

Соответственно меняются и задачи педагога. Теперь он должен быть не только источником информации, который дает знания, но и организатором самообразования школьников, который побуждает их к творческому поиску. Учителю надо искать индивидуальный путь, что может быть осуществлено лишь в результате совместной творческой деятельности педагога и школьника.

Математика – это царица наук. Задача педагога – это начиная с первого урока научить учеников любить и понимать данный предмет. В математике заложена огромная возможность для развития мышления ребенка в процессе его обучения. Тема «Иррациональные неравенства» - это трудный материал для школьников. Для того чтобы овладеть необходимыми навыками решения иррациональных неравенств, требуется определенное количество времени, а так как оно ограничено, то усвоить тему в полной мере ученикам не удается. Ошибки в решении данных неравенств могут допускать даже учащиеся, у которых не возникало проблем с решением иррациональных уравнений. При решении иррациональных неравенств возникает необходимость в равносильных преобразованиях. Именно это усложняет процесс решения неравенств. Так же иррациональные неравенства встречаются в основном государственном экзамене по математике.

Проблема исследования состоит в выявлении методических особенностей обучения теме «Иррациональные неравенства» в курсе алгебры основной школы.

Объект исследования: процесс обучения алгебре в курсе основной школы.

Предмет исследования: методические особенности обучения теме «Иррациональные неравенства» в курсе алгебры основной школы.

Цель бакалаврской работы: раскрыть методические особенности обучения теме «Иррациональные неравенства» в курсе алгебры основной школы и составить учебные задания по теме исследования для организации самостоятельной работы учащихся.

Задачи исследования:

1. Рассмотреть историю развития иррациональных неравенств в математике.

2. Выявить основные требования к знаниям и умениям учащихся по теме исследования.

3. Выполнить анализ теоретического материала по теме «Иррациональные неравенства» в учебниках алгебры.

4. Составить типологию задач по теме «Иррациональные неравенства».

5. Представить методические рекомендации по обучению теме «Иррациональные неравенства» в курсе алгебры основной школы.

6. Выполнить анализ задач ОГЭ по теме исследования.

7. Подобрать учебные задания по теме «Иррациональные неравенства» для организации самостоятельной работы учащихся основной школы.

Методы исследования: изучение и анализ школьных программ, учебной литературы и методический пособий, по теме работы, решение примеров.

Теоретическая значимость: в ходе данного исследования были выявлены методические особенности обучения теме «Иррациональные неравенства» в курсе алгебры основной школы.

Практическая значимость результатов исследования состоит в разработке методических рекомендаций по обучению теме «Иррациональные неравенства» учащихся основной школы и учебных задания для организации их самостоятельной работы, которые могут использоваться на уроках при обучении данной теме в школьном курсе алгебры и студентами педагогических направлений подготовки.

На защиту выносится: 1. Методические рекомендации по обучению теме «Иррациональные неравенства» в курсе алгебры основной школы. 2. Учебные задания по данной теме для организации самостоятельной работы учащихся.

Бакалаврская работа состоит из введения, двух глав, заключения.

Во введении рассмотрены основные характеристики исследования: проблема, цель, задачи, объект, предмет и методы исследования.

В первой главе изучается история возникновения иррациональных неравенств. Рассматриваются основные понятия, связанные с решением иррациональных неравенств в различных учебниках алгебры разных авторов. Представлены типы задач.

Вторая глава посвящена методическим основам обучения решению иррациональных неравенств в курсе алгебры основной школы. Представлены методические рекомендации по обучению теме «Иррациональные неравенства» в курсе алгебры основной школы. Выполнен анализ задач ОГЭ по теме исследования. Подобраны учебные задания по теме «Иррациональные неравенства» для организации самостоятельной работы учащихся основной школы.

В заключении представлены основные результаты и выводы проведенного исследования. Список литературы содержит 31 наименование. Объем работы составляет 50 страниц.

ГЛАВА I. ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ОБУЧЕНИЯ РЕШЕНИЮ ИРРАЦИОНАЛЬНЫХ НЕРАВЕНСТВ В КУРСЕ АЛГЕБРЫ ОСНОВНОЙ ШКОЛЫ

§ 1. Из истории развития иррациональных неравенств в математике

Автор книги « Сущность математики» А. Фосс утверждает, что открытие *иррациональности* является одной из важнейших причин возникновения математических теорий. Указано что, «термин «рациональное» (число) происходит от латиноамериканского слова ratio, что в переводе с греческого слова «логос» означает отношение. В отличие от рациональных чисел, числа, выражающие отношение несоизмеримых величин были названы еще в древности иррациональными, т.е. нерациональными (по - гречески «алогос»)» [22].

Иррациональное число – это бесконечная непериодическая десятичная дробь. С возникновением новых задач знаний о действительных, целых, натуральных и рациональных чисел было недостаточно, поэтому возникла острая необходимость введения новой концепции. Впервые это нововведение коснулось уравнений. Без данной концепции некоторые уравнения не имеют решения.

В VII веке до нашей эры индийские ученые выяснили, что при обозначении квадратных корней в некоторых величинах возникают затруднения. Впервые существование подобных чисел описал пифагореец Гиппас, который занимался изучением равнобедренного прямоугольного треугольника. Концепция иррациональных чисел очень важна, так как ее применение внесло существенный вклад в математическую систему.

Д. Стивелл доводит до сведения читателей, что иррациональные числа употребляются как полноправные объекты алгебры. Впервые стали использовать иррациональные числа ученые стран Среднего Востока. В начале XII в. Омар Хайям, обсуждая «Начала» Евклида и исследуя общую теорию отношения Евдокса, расширил понятие числа до положительного действительного числа.

Автором отмечается, что значение открытия *иррациональности* в математике трудно переоценить. «В математику, едва ли не впервые, вошла сложная теоретическая абстракция, не имеющая аналога в донаучном общечеловеческом опыте. Вслед за иррациональностью числа были открыты многие другие иррациональности. Так, Теодор из Кирены (V в. до н.э.) смог установить иррациональность квадратного корня из чисел 3,5,6,…,17, не являющихся полным квадратом, Теэтет (410-369 до н.э.) представил первую классификацию иррациональностей. В древнегреческой математике после появления иррациональностей возник ряд серьёзных трудностей, связанных как с теоретико-числовом, так и в геометрическом плане» [19].

Задачи, стоящие перед алгеброй в первом тысячелетии ее развития были решены в начале XIX в. Кремер говорит о том, что «были разработаны правила буквенного исчисления для рациональных и иррациональных выражений, выяснен вопрос о разрешимости уравнений в радикалах и построена строгая теория комплексных чисел» [12]. Исходя из этого казалось, что решение новых классов алгебраических уравнений и доказательство новых алгебраических тождеств станут гораздо проще. Однако развитие алгебры пошло другим путем: наука о буквенном исчислении и уравнениях стала общей наукой об операциях и их свойствах. Например, *иррациональные уравнения* и *неравенства* можно рассмотреть как над полем комплексных чисел, так и над полем действительных чисел.

Таким образом, в данном параграфе приведены исторические аспекты возникновения понятия *иррациональных чисел* и *иррациональных неравенств* в алгебре, показано значение *открытия иррациональности*.

§ 2. Основные требования к знаниям и умениям учащихся по теме « Иррациональные неравенства»

В *федеральном государственном образовательном стандарте основного общего образования* предметные результаты в области « Математика» отражают:

1) «формирование представлений о математике, как о методе познания действительности, позволяющем описывать и изучать реальные процессы и явления;

2) развитие умений работать с учебным математическим текстом (анализировать, извлекать необходимую информацию), точно и грамотно выражать свои мысли с применением математической терминологии и символики, проводить классификации, логические обоснования, доказательства математических утверждений;

3) развитие представлений о числе и числовых системах от натуральных до действительных; овладение навыками устных, письменных, инструментальных вычислений;

4) овладение системой функциональных понятий, развитие умения использовать функционально графические представления для решения различных математических задач, для описания и анализа реальных зависимостей;

5) развитие умений применять изученные понятия, результаты, методы для решения задач практического характера и задач из смежных дисциплин с использованием при необходимости справочных материалов, компьютера, пользоваться оценкой и прикидкой при практических расчетах» [21].

В *Примерной программе основного общего образования* приводятся следующие планируемые результаты по теме «Неравенства» в 7- 9 классах на различных уровнях. Так, учащийся научится:

1) на базовом уровне:

- «оперировать понятиями: равенство, числовое равенство, уравнение, корень уравнения, решение уравнения, числовое неравенство, неравенство, решение неравенства;

- проверять справедливость числовых равенств и неравенств;

- решать линейные неравенства и несложные неравенства, сводящиеся к линейным;

- решать системы несложных линейных уравнений, неравенств;

- проверять, является ли данное число решением уравнения (неравенства);

- изображать решения неравенств и их систем на числовой прямой.

В повседневной жизни при изучении других предметов:

- «Составлять и решать линейные уравнения при решении задач, возникающих в других учебных предметах» [16].

2) на базовом и углубленном уровне:

- «оперировать понятиями: уравнение, неравенство, корень уравнения, решение неравенства, равносильные уравнения, область определения уравнения (неравенства, системы уравнений или неравенств);

- решать линейные уравнения и уравнения, сводимые к линейным с помощью тождественных преобразований;

- решать квадратные уравнения и уравнения, сводимые к квадратным с помощью тождественных преобразований;

- решать дробно-линейные уравнения;

- решать простейшие иррациональные уравнения вида $\sqrt{f(x)} = a$, $\sqrt{f(x)} = \sqrt{g(x)}$;

- решать уравнения вида $x^n = a$;

- решать уравнения способом разложения на множители и замены переменной;

- использовать метод интервалов для решения целых и дробно-рациональных неравенств;

- решать линейные уравнения и неравенства с параметрами;

- решать несложные квадратные уравнения с параметрами;

- решать несложные системы линейных уравнений с параметрами;

- решать несложные уравнения в целых числах.

В повседневной жизни и при изучении других предметов:

- «составлять и решать линейные и квадратные уравнения, уравнения, к ним сводящиеся, системы линейных уравнений, неравенств при решении задач других учебных предметов;

- выполнять оценку правдоподобия результатов, получаемых при решении линейных неравенств и квадратных уравнений и систем линейных уравнений и неравенств при решении задач других учебных предметов;

- выбирать соответствующие уравнения, неравенства или их системы для составления математической модели заданной реальной ситуации или прикладной задачи;

- уметь интерпретировать полученный при решении уравнения, неравенства или системы результат в контексте заданной реальной ситуации или прикладной задачи» [16].

3) на углубленном уровне:

- «свободно оперировать понятиями: уравнение, неравенство, равносильные уравнения и неравенства, уравнение, являющееся следствием другого уравнения; уравнения, равносильные на множестве; равносильные преобразования уравнений;

- решать разные виды уравнений и неравенств и их систем, в том числе некоторые уравнения 3 и 4 степеней, дробно-рациональные и *иррациональные*;

- понимать смысл теорем о равносильных и неравносильных преобразованиях уравнений и уметь их доказывать;

- владеть разными методами решения уравнений, неравенств и их систем, уметь выбирать метод решения и обосновывать свой выбор;

- использовать *метод интервалов* для решения неравенств, в том числе дробно-рациональных и включающих в себя *иррациональные выражения*;

- решать алгебраические уравнения и неравенства и их системы с параметрами алгебраическим и графическим методами;

- владеть разными методами доказательства неравенств;

- изображать множества на плоскости, задаваемые уравнениями, неравенствами и их системами.

В повседневной жизни и при изучении других предметов:

- «составлять и решать уравнения, неравенства, их системы при решении задач других учебных предметов;

- выполнять оценку правдоподобия результатов, получаемых при решении различных уравнений, неравенств и их систем при решении задач других учебных предметов;

- составлять и решать уравнения и неравенства с параметрами при решении задач других учебных предметов;

- составлять уравнение, неравенство или их систему, описывающие реальную ситуацию или прикладную задачу, интерпретировать полученные результаты» [16].

На основании Примерной программы основного общего образования можно сделать вывод, что тема «Иррациональные неравенства» изучается в 9 классе в курсе алгебры с углубленным изучением математики.

§ 3. Анализ содержания теоретического материала темы в учебниках алгебры 9 классов

Ответим, что в курсе алгебры 9 классов с углубленным изучением математики входят такие разделы, как: «Неравенства» и «Системы неравенств». Раздел « Неравенства» включает в себя следующие темы: « Числовые неравенства. Свойства числовых неравенств. Проверка справедливости неравенств при заданных значениях переменной. Неравенство с переменной. Строгие и нестрогие неравенства. Доказательства неравенств. Неравенства о средних для двух чисел. Понятие о решении неравенства. Множество решений неравенства. Представление о равносильности неравенств. Линейное неравенство и множество его решений. Решение линейных неравенств. Линейное неравенство с параметром. Квадратное неравенство и его решения. Решение квадратных неравенств: использование свойств и графика квадратичной функции, метод интервалов. Запись решения квадратного неравенства. Простейшие иррациональные неравенства вида: $\overline{f(x)} > a$; $\overline{f(x)} < a$; $\overline{f(x)} > \overline{g(x)}$. Обобщенный метод интервалов для решения неравенств» [16, с. 362].

В раздел «Системы неравенств» входят темы: «Системы неравенств с одной переменной. Решение систем неравенств с одной переменной: линейных, квадратных, дробно-рациональных, *иррациональных*. Изображение решения системы неравенств на числовой прямой. Запись решения системы неравенств. Неравенство с двумя переменными. Представление о решении линейного неравенства с двумя переменными. Графическая интерпретация неравенства с двумя переменными. Графический метод решения систем неравенств с двумя переменными» [16, с. 363].

В учебниках алгебры основной школы приведено определение понятия *иррационального неравенства*, а также рассмотрены методы решения иррациональных неравенств. Так, в пособии Б.В. Соболя «под иррациональным неравенством понимается неравенство, в котором неизвестные величины находятся под знаком корня» [18].

Рассмотрим методы решения иррациональных неравенств, которые описаны в учебных пособиях по математике для общеобразовательных школ.

Методы решения иррациональных неравенств

1. Возведение обеих частей неравенства в одну и ту же степень.

Суть данного метода состоит в преобразовании к рациональным неравенствам путем возведения обеих частей неравенства в степень. Приведем пример решения иррационального неравенства с помощью данного метода.

Решите неравенство: $\overline{-2x + 1} > 11$.

Решение. Возведем обе части в квадрат. Получим:

$-2x + 1 > 121$; $-2x > 120$; $x < -60$.

Ответ: $x \in (-\infty;-60)$.

2. Метод интервалов.

Этот метод считается самым универсальным для решения неравенств. Он подходит практически для всех видов неравенств. Алгоритм решения состоит из следующих этапов: «необходимо найти область определения функции, затем отметить в этой области нули функции, которые разбивают область определения на промежутки, внутри каждого из которых функция определена, непрерывна и сохраняет знак. Для того, что бы определить знак функции на конкретном промежутке нужно найти знак в любой точке этого промежутка» [11].

Приведем пример решения иррациональных неравенств с помощью метода интервалов.

Решить неравенство $\sqrt{24+2x-x^2} < x$.

Решение. Данное неравенство равносильно системе неравенств:

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ 24+2x-x^2 \geq 0 \\ 24+2x-x^2 < x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ -(x-6)(x+4) \geq 0 \\ (x-4)(x+3) > 0 \end{cases}$$

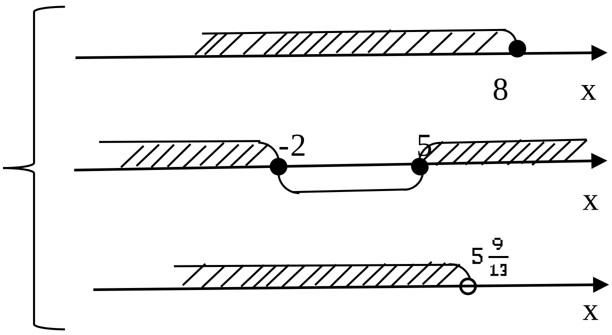

Рис.1. Решение неравенства методом интервалов.

Ответ: $x \in \ -\infty;2 \ \cup \ 5;5\frac{9}{13}$.

3. Сведение к равносильной системе.

О.Ю. Черкасов считает, что «основным методом решения иррациональных неравенств является сведение исходного неравенства к равносильной системе рациональных неравенств или совокупности систем рациональных неравенств» [24].

Простейшие иррациональные неравенства подразделяются на виды:

a) $\sqrt{f(x)} < g(x)$ или $\sqrt{f(x)} \le g(x)$;

b) $\sqrt{f(x)} > g(x)$ или $\sqrt{f(x)} \ge g(x)$;

c) $\sqrt{f(x)} > \sqrt{g(x)}$ **или** $\sqrt{f(x)} \ge \sqrt{g(x)}$.

Рассмотрим каждый вид. Иррациональное неравенство $\sqrt{f(x)} < g(x)$ или $\sqrt{f(x)} \le g(x)$ равносильно системе неравенств $\begin{cases} f(x) \ge 0, \\ g(x) > 0, \\ f(x) < g^2(x) \end{cases}$ **или** $\begin{cases} f(x) \ge 0 \\ g(x) \ge 0 \\ f(x) \le g^2(x) \end{cases}$. Первое неравенство в данной системе является условием существования корня в исходном неравенстве, второе неравенство системы показывает условие, при котором данное неравенство нужно возвести в квадрат. Третье неравенство – это результат возведения исходного неравенства в степень. Пример неравенства данного вида и его решение.

Решить неравенство $\sqrt{x + 18} < 2 - x$.

Решение. Данное неравенство равносильно совокупности двух систем

$$\begin{cases} x + 18 \ge 0, \\ 2 - x \ge 0, \\ x + 18 < (2 - x)^2. \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \ge -18, \\ x \le 2, \\ x^2 - 5x - 14 > 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -18 \le x < 2, \\ \left[\begin{array}{l} x < -2, \\ x > 7, \end{array} \right. \end{cases} \Leftrightarrow -18 \le x < -2.$$

Ответ: $x \in [-18;-2)$.

Следующий вид иррационального неравенства $\sqrt{f(x)} > g(x)$ или $\sqrt{f(x)} \ge g(x)$ равносильно двум системам неравенства

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} f(x) > g^2(x), \\ g(x) \ge 0, \end{cases} \\ \begin{cases} f(x) \ge 0, \\ g(x) < 0, \end{cases} \end{array} \right. \text{ или } \left[\begin{array}{l} \begin{cases} f(x) \ge g^2(x), \\ g(x) \ge 0, \end{cases} \\ \begin{cases} f(x) \ge 0, \\ g(x) \le 0, \end{cases} \end{array} \right. .$$

Начнем с первой системы. Первое неравенство показывает результат возведения начального неравенства в квадрат, а второе задает условие, которое позволяет это сделать.

Вторая система подходит для случая, когда правая часть отрицательна, и возведение в квадрат невозможно. Но левая часть начального неравенства является арифметическим корнем, значит неотрицательна при всех значениях x x, на которых она определена. Таким образом, исходное неравенство может выполняться при всех x, при которых существует левая часть.

Пример. Решить неравенство $\sqrt{x^2+x-2} > x$.

Решение. Данное неравенство равносильно совокупности двух систем

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x<0, \\ x^2+x-2 \ge 0, \end{cases} \\ \begin{cases} x \ge 0, \\ x^2+x-2 > x^2 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x<0, \\ \left[\begin{array}{l} x \le -2, \\ x \ge 1, \end{array}\right. \end{cases} \\ \begin{cases} x \ge 0, \\ x > 2, \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \le -2, \\ x > 2. \end{array}\right.$$

Ответ: $x \in (-\infty; -2 \cup 2; +\infty$.

Иррациональное неравенство вида $\sqrt{f(x)} > \sqrt{g(x)}$ **или** $\sqrt{f(x)} \ge \sqrt{g(x)}$ равносильно системе неравенств $\begin{cases} f(x) > g^2(x), \\ g(x) > 0, \end{cases}$ **или** $\begin{cases} f(x) \ge g^2(x), \\ g(x) < 0. \end{cases}$ Обе части начального неравенства являются неотрицательными при любых x, на которых они определены, значит его можно возвести в квадрат. Первое неравенство – это результат возведения в степень начального неравенства, в второе неравенство – это условие существования корня, при котором видно, что неравенство $f(x) \ge 0$ автоматические выполняется.

Приведем пример неравенства данного вида и его решение.

Решить неравенство $\sqrt{2x+1} > \sqrt{2-3x}$.

Решение. Данное неравенство равносильно системе

$$\begin{cases} 2x+1 > 2-3x, \\ 2-3x \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > \frac{1}{5}, \\ x \le \frac{2}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \frac{1}{5} < x \le \frac{2}{3}.$$

Ответ: $\frac{1}{5} < x \le \frac{2}{3}$.

4. Введение новой переменной.

Этот метод применяется как при решении иррациональных уравнений, так и при решении иррациональных неравенств. В ряде случаев метод приводит к упрощению неравенств. Обычно новая переменная – это радикал, который входит в неравенство. При этом получается рациональное неравенство [25]. Приведем пример решения иррационального неравенства с помощью метода введения переменной.

Решить неравенство $\frac{3-x}{15-x} < 1$.

Решение. Введем новую переменную $\sqrt{15-x} = t, t > 0$.

Тогда $x = 15 - t^2$ и для переменной *t* получаем рациональное неравенство

$$\begin{array}{c} \frac{3-(15-t^2)}{t} < 1 \\ t > 0, \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{c} \frac{t^2 - t - 12}{t} < 0 \\ t > 0, \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{c} \frac{(t-4)(t-3)}{t} < 0 \\ t > 0 \end{array} \Leftrightarrow 0 < t < 4.$$

Нужно сделать обратную замену и найти *x*:

$$0 < \sqrt{15-x} < 4 \Leftrightarrow 0 < 15 - x < 16 \Leftrightarrow -1 < x < 15.$$

Ответ: $x \in \; -1; 15$.

Рассмотрев основные методы решения иррациональных неравенств, используемые в методической литературе приведем анализ учебников разных авторов для классов с углубленным изучением математики в 9 классе. Результаты анализа представлены ниже в Таблице 1, в которой рассматриваются основные понятия и определения по теме, методы решения иррациональных неравенств.

В учебнике Н.Я. Виленкина изучение темы «Иррациональные неравенства» начинается с основных правил решения иррациональных неравенств. Далее вводится *понятие иррациональных неравенств*, *виды простейших иррациональных неравенств* и *теоремы*, применяемые для их решения: «1. Если обе части неравенства возвести в степень с нечетным показателем, оставив знак неравенства без изменения, то полученное неравенство равносильно исходному. 2. Если обе части неравенства возвести в четную степень, оставив знак неравенства без изменения, то полученное неравенство равносильно исходному лишь в том случае, когда каждая часть этих неравенств неотрицательна» [4, с. 202].

Теория по данной теме изложена подробно, автор приводит пять примеров решения иррациональных неравенств, которые решает с помощью возведения обеих частей неравенства в одну и ту же степень, сведения к равносильной системе.

Таблица 1

Изучение темы «Иррациональные неравенства» в учебниках 9 классов

Алгебра, углубленное изучение, Н.Я. Виленкин	Алгебра, углубленное изучение, Ю.Н. Макарычев	Алгебра, углубленное изучение, А.Г. Мордкович	Алгебра; Н.В. Богомолов
Количество часов на изучение темы			
3	4	3	3
Последовательность рассматриваемого материала			
- «дробно рациональные уравнения; - системы уравнений с двумя переменными; - уравнения и системы уравнений с параметрами; - рациональные неравенства; -иррациональные уравнения; -иррациональные неравенства» [4, с. 382].	- «решение иррациональных уравнений; - решение иррациональных неравенств» [14, с. 446].	- «рациональные неравенства; - множества и операции над ними; - системы неравенств; - совокупности неравенств; - неравенства с модулями; - иррациональные неравенства» [15, с. 254].	- «линейные неравенства; - системы линейных неравенств; - квадратные уравнения; - квадратные неравенства. - иррациональные уравнения и иррациональные неравенства» [3, с. 397].
Введение понятия иррационального неравенства			
«Иррациональные неравенства – это неравенства, в которых неизвестное содержится под знаком радикала» [4, с. 201].	«Иррациональные неравенства – это неравенства, которые содержат переменную под знаком корня или в которых переменная входит в основание степени с дробным показателем» [14, с. 271].	«Неравенство вида $\overline{f(x)} < \ x$. Решения такого неравенства должны удовлетворять условию $f\ x\ \geq$ 0 и условию $g(x) > 0$» [15, с. 47].	«Неравенство, содержащее переменную под знаком корня, называют иррациональным» [3, с. 96].

В учебнике Ю.Н. Макаровича «Алгебра-9» тема « Иррациональные неравенства» начинается с понятия иррациональных неравенств. «Основная цель при решении иррациональных неравенств состоит в том, чтобы иррациональное неравенство свести к равносильному ему рациональному неравенству или равносильной системе, содержащей рациональные неравенства» [14, с. 271]. Далее приведены теоремы для обоснования равносильности проводимых преобразований и их доказательства. Автор подробно рассматривает множество различных примеров решения иррациональных неравенств с помощью таких методов, как метод возведения обеих частей неравенства в одну и ту же степень, метод сведения к равносильной системе.

В учебнике А.Г. Мордковича тема «Иррациональные неравенства» относится к первой главе. Автор рассматривает данную тему через решение иррациональных неравенств, не давая теоретического основания. В учебнике приводится пять примеров, решаемые с помощью метода интервалов и метода сведения к равносильной системе. Упражнения для самостоятельного решения отсутствуют. Тема не раскрыта подробно, дана для ознакомления учащимся.

У Н.В. Богомолова тема «Иррациональные неравенства» рассмотрена кратко, наибольшее внимание автор уделяет теме «Иррациональные уравнения». Приведен вид простейших иррациональных неравенств с одной переменной и два случая их решения. «Решение иррационального неравенства с одной переменной сводится к решению равносильной ему системы рациональных неравенств или совокупности систем иррациональных неравенств» [3, с. 96]. Рассмотрено два примера на метод введения новой переменной.

Таким образом, в учебниках алгебры разных авторов место изучения темы «Иррациональные неравенства» различно. Анализ содержания теоретического материала показал, что на обучение решению иррациональных неравенств отводится мало времени. Данные неравенства в большинстве случаев решаются с помощью методов, таких как метод возведения обеих частей неравенства в одну и ту же степень, метод интервалов, метод сведения к равносильной системе и метод введения новой переменной. Чаще всего авторы применяют метод сведения к равносильной системе.

§ 4. Типы задач по теме « Иррациональные неравенства» в учебниках алгебры 9 классов

Изучив тему «Иррациональные неравенства» из учебников 9 класса с углубленным изучением математики можно выделить типы иррациональных неравенств на основе методов их решения. Проанализировав задачный материал, нами составлена типология задач по каждому методу решения иррациональных неравенств. Рассмотрим их.

Метод возведения обеих частей неравенства в одну и ту же степень

Данный метод рассматривают в своих учебниках Н.Я. Виленкина и Ю.Н. Макарычева.

На основе примеров из учебников приведены следующие упражнения:

а) $\sqrt{x-3} < 5;$ в) $\sqrt[4]{3-5x} < -2;$

б) $\sqrt{2x+3} > 3;$ г) $\sqrt{x^2-x} > \sqrt{2}.$

Приведем решение некоторых их них.

1. Решить неравенство $\sqrt{x-3} < 5.$

Решение. Возведем обе части в квадрат. Получим: $x-3<25;\ x>28.$

Ответ: $x \in\ 28; +\infty$.

2. Решите неравенство: $\sqrt{-2x+1} > 11.$

Решение. Возведем обе части в квадрат. Получим:

$-2x+1>121;\quad -2x>120;\quad x<-60$

Ответ:$x \in\ -\infty; -60$.

3. Решить неравенство $\sqrt[4]{6-2x} \geq 1.$

Решение. Возведем обе части в четвертую степень. Получим:

$6-2x\geq 1;\quad -2x\geq -5;\quad x\leq 2{,}5.$

Ответ: $x \in (-\infty, 2{,}5$.

Метод интервалов

Метод интервалов представляется в учебнике А.Г. Мордковича. Изучив теоретический материал и примеры данного учебника, были рассмотрены задания, решаемые с помощью этого метода. Выделены типы задач:

а) $\sqrt{2x+9} < 3 - x$; в) $\sqrt{x^2 - 3x - 10} < 8 - x$;

б) $\sqrt{9 - x^2} > 3 - \sqrt{6x - x^2}$; г) $\sqrt{x^2 - 1} > x - 3$.

4. Решить неравенство $\sqrt{x^2 - 3x + 2} < x + 3$.

Решение. Данное неравенство равносильно совокупности системе неравенств:

$$\begin{matrix} x + 3 \geq 0 \\ x^2 - 3x + 2 > (x+3)^2 \\ x + 3 < 0 \\ x^2 - 3x + 2 \geq 0 \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{matrix} x \geq -3 \\ x < -\frac{7}{9} \\ x < -3 \\ (x-1)(x-2) \geq 2 \end{matrix}$$

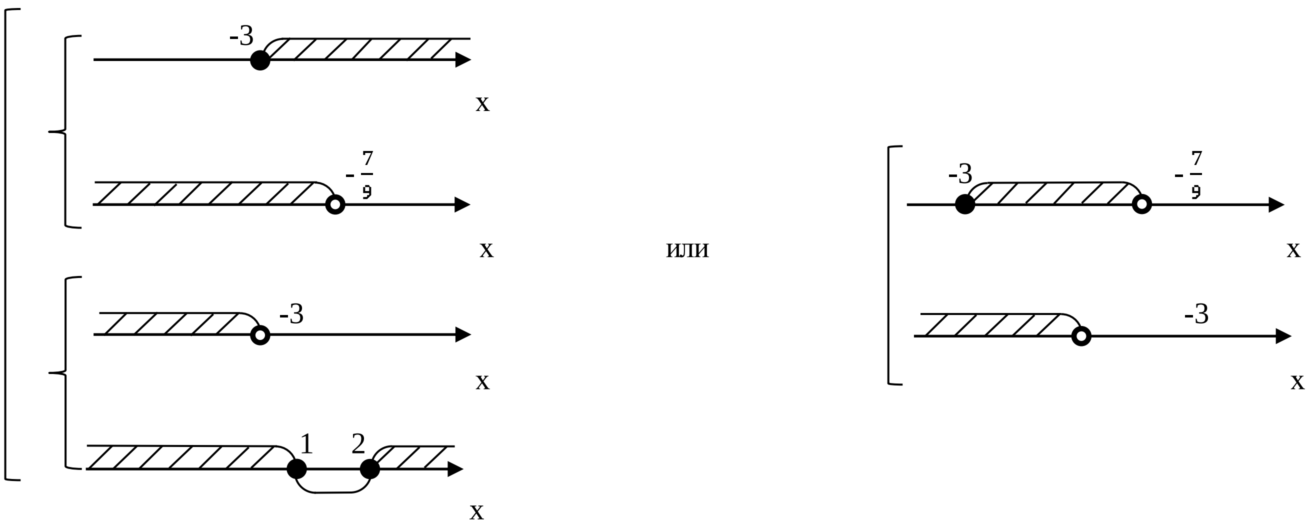

Рис.2. Решение неравенства методом интервалов.

Ответ: $x \in (-\infty; -\frac{7}{9})$

Метод сведения к равносильной системе

Данный метод рассматривают в своих учебниках Н.Я. Виленкина, Ю.Н. Макарычева и А.Г. Мордковича.

На основе примеров из учебников приведены следующие упражнения:

а) $\sqrt{x^2 - 2x + 1} \geq \sqrt{3 - x}$; в) $\sqrt{x^2 + 1} \geq \sqrt{x - 1}$;

б) $\overline{x+3} > x+1$; г) $\overline{x^2+3x+3} > 2x+1$.

5. Решите неравенство: $\overline{5-x} < 4$.

Решение. При условии, что обе части неравенства существуют и неотрицательны. Однако, после возведения в квадрат получим неравенство $5-x<16$, которое не обеспечивает отрицательность выражения $5-x$, т.е. существования $\overline{5-x}$. Поэтому исходное неравенство равносильно системе неравенств:

$$\begin{array}{c} 5-x \geq 0, \\ 5-x < 16; \end{array} \Rightarrow \begin{array}{c} x \leq 5, \\ x > -11; \end{array} \Rightarrow -11 < x \leq 5.$$

Ответ: $x \in (-11; 5$.

6. Решите неравенство: $\overline{3x+2} < 4$.

Решение. При условии, что обе части неравенства существуют и неотрицательны. Однако, после возведения в квадрат получим неравенство $3x++2 < 16$, которое не обеспечивает отрицательность выражения $3x+2$, т.е. существования $\overline{3x+2}$. Поэтому исходное неравенство равносильно системе неравенств:

$$\begin{array}{c} 3x+2 \geq 0, \\ 3x+2 < 16; \end{array} \Rightarrow \begin{array}{c} 3x \geq -2, \\ 3x < 14; \end{array} \Rightarrow \begin{array}{c} x \geq -\frac{2}{3}, \\ x < \frac{14}{3}; \end{array} \Rightarrow -\frac{2}{3} \leq x < \frac{14}{3}.$$

Ответ: $x \in \ -\frac{2}{3}; \frac{14}{3}$.

7. Решите неравенство: $\overline{x^2-3x+2} < 5-x$.

Решение. Имеем:

«1-й случай. Пусть $5-x>0$. При условии существования квадратного корня: $x^2-3x+2 \geq 0$ – обе части исходного неравенства неотрицательны.

Возведем в квадрат. Получим систему неравенств: $\begin{array}{c} 5-x>0, \\ x^2-3x+2 \geq 0, \\ x^2-3x+2 < \ 5-x \ ^2, \end{array}$

решая эту систему находим $x \leq 1$ **или** $2 \leq x < \frac{23}{7}$, т.е решением этой системы является множество: $x \in \ -\infty; 1 \ \cup \ 2; \frac{23}{7}$.

2-й случай. Пусть теперь $5 - x \le 0$. Так как квадратный корень принимает только неотрицательные значения, то ни при каких значениях x он не может быть меньше нуля. Следовательно, решением исходного неравенства будем множество, полученное в первом случае» [4].

Ответ: $x \in \ \ -\infty; 1\ \ \cup\ \ 2; \frac{23}{7}\ \ .$

8. Решить неравенство $\sqrt{\frac{3}{2}x^2 - x^3} \ge \sqrt{3x - \frac{5}{2}x^2}$.

Решение. Неравенство равносильно системе $\begin{array}{c} \frac{3}{2}x^2 - x^2 \ge 3x - \frac{5}{2}x^2, \\ 3x - \frac{5}{2}x^2 \ge 0; \end{array} \Leftrightarrow$

$$\begin{array}{c} x^3 - 4x^2 + 3x \le 0, \\ 5x^2 - 6x \le 0; \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{c} x\ \ x-1\ \ \ x-3\ \ \le 0, \\ x\ \ 5x-6\ \ \le 0; \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{c} x \le 0, \\ 1 \le x \le 3, \\ 0 \le x \le \frac{6}{5}; \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{c} x = 0 \\ 1 \le x \le \frac{6}{5} \end{array}.$$

Ответ: $x \in \ \ 1; \frac{6}{5}\ \ \cup\ \ 0\ \ .$

9. Решить неравенство $\sqrt{3x - x^2 + 10} < \sqrt{10} - x$.

Решение. Данное неравенство равносильно системе:

$$\begin{array}{c} \sqrt{10} - x > 0, \\ 3x - x^2 + 10 < \ \ \sqrt{10} - x\ \ ^2, \\ 3x + x^2 + 10 \ge 0; \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{c} x < \ \ \sqrt{10}, \\ 2x^2 - (3 + 2\ \ \sqrt{10}\ \ x > 0, \\ x + 2\ \ \ x - 5\ \ \le 0; \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{c} x < \ \ \sqrt{10}, \\ x < 0, \\ x > \frac{3}{2} - \ \ \sqrt{10}, \\ -2 \le x \le 5. \end{array}$$

Из полученной системы легко находим $-2 \le x \le 0$.

Ответ: $x \in \ \ -2; 0\ \ .$

10. Решить неравенство $\sqrt{x^2 - 6x} < 8 + 2x$.

Решение. $\sqrt{x^2-6x} < 8+2x \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-6x = x(x-6) \geq 0, \\ 8+2x = 2(x+4) > 0, \\ x^2-6x < (8+2x)^2, \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} x \in (-\infty;0] \cup [6;+\infty), \\ x > -4, \\ 3x^2+38x+64>0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in (-\infty;0] \cup [6;+\infty), \\ x > -4, \\ x \in \left(-\infty;-\frac{32}{3}\right) \cup (-2;+\infty); \end{cases} \Leftrightarrow x \in (-2;0] \cup [6;+\infty).$$

Ответ: $x \in (-2;0] \cup [6;+\infty)$.

Метод введения новой переменной

Метод интервалов представляется в учебнике Н.В. Богомолова. Изучив теоретический материал и примеры данного учебника, были рассмотрены задания, решаемые с помощью этого метода. Выделены их типы:

а) $\sqrt{x^2-2x+1} \geq \sqrt{3-x}$. в) $\sqrt{t^2+25+1} - \sqrt{t^2-2t+1} > 1$;

11. Решить неравенство $\sqrt{3x^2+5x+7} - \sqrt{3x^2+5x+2} > 1$.

Решение.

Введем новую переменную. Пусть $3x^2+5x+7 = t, t \geq 0$. Тогда $\sqrt{t+5} - \sqrt{t} > 1$, $\sqrt{t+5} > \sqrt{t}+1$. Это неравенство равносильно системе:

$$\begin{cases} t \geq 0, \\ t+5 > t+2\sqrt{t}+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t \geq 0, \\ \sqrt{t} < 2. \end{cases}$$

Отсюда достаточно решить систему, сделав замену:

$$\begin{cases} 3x^2+5x+2 \geq 0, \\ 3x^2+5x+2 < 4; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+1)(x+\frac{2}{3}) \geq 0, \\ (x+1)\left(x-\frac{2}{3}\right) < 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x \leq -1, \\ x \geq -\frac{2}{3} \end{array}\right. \\ -2 < x < \frac{1}{3} \end{cases}$$

Ответ: $x \in (-2; -1] \cup \left[-\frac{2}{3}; \frac{1}{3}\right)$.

12. Решить неравенство $-9\sqrt[4]{x} + \sqrt{x} + 18 \geq 0$.

Решение.

Перепишем исходное неравенство $-9\sqrt[4]{x}+\left(\sqrt[4]{x}\right)^2+18\geq 0$. Сделаем замену $t=\sqrt[4]{x}, t\geq 0$. Тогда получим $\begin{cases}-9t+t^2+18\geq 0,\\ t\geq 0;\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\left[\begin{matrix}t\geq 6,\\ t\leq 3,\end{matrix}\right.\\ t\geq 0;\end{cases} \Leftrightarrow$ $\left[\begin{matrix}t\geq 6,\\ 0\leq t\leq 3.\end{matrix}\right.$ Таким образом, для определения x получаем совокуаность неравенств $\left[\begin{matrix}\sqrt[4]{x}\geq 6,\\ 0\leq \sqrt[4]{x}\leq 3;\end{matrix}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{matrix}x\geq 6^4,\\ 0\leq x\leq 3^4;\end{matrix}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{matrix}x\geq 1296,\\ 0\leq x\leq 81.\end{matrix}\right.$

Ответ: $x\in[0;81]\cup[1296;+\infty)$.

13. Решить неравенство $\frac{3-x}{\sqrt{15-x}}<1$.

Решение.

Введем новую переменную $\sqrt{15-x}=t, t>0$.

Тогда $x=15-t^2$ и для переменной t получаем рациональное неравенство $\begin{cases}\frac{3-(15-t^2)}{t}<1,\\ t>0;\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\frac{t^2-t-12}{t}<0,\\ t>0,\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\frac{(t-4)(t-3)}{t}<0,\\ t>0;\end{cases} \Leftrightarrow 0<t<4$. Осталось сделать обратную замену и найти x: $0<\sqrt{15-x}<4 \Leftrightarrow 0<15-x<16 \Leftrightarrow -1<x<15$.

Ответ: $x\in(-1;15)$.

14. Решить неравенство $\sqrt{x^2-4x+3}-\sqrt{x^2-4x}>1$.

Решение.

Пусть $t=\sqrt{x^2-4x}$, тогда для решения исходного неравенства достаточно решить систему неравенств:

$$\begin{cases}\sqrt{t^2+3}>1+t,\\ t\geq 0;\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}t^2+3>1+2t+t^2\\ t\geq 0;\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}1>t,\\ t\geq 0.\end{cases}$$

Следовательно, $0\leq\sqrt{x^2-4x}<1$.

Полученное двойное неравенство равносильно системе:

$$\begin{cases}x^2-4x<1,\\ x^2-4x\geq 0;\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}2-\sqrt{5}<x<2+\sqrt{5},\\ x(x-4)\geq 0;\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}2-\sqrt{5}<x<2+\sqrt{5},\\ x\geq 4, x\leq 0.\end{cases}$$

Ответ: $x\in(2-\sqrt{5};0]\cup[4;2+\sqrt{5})$.

Таким образом, в данном параграфе были выделены типы иррациональных неравенств на основе методов их решения.

первой главе

1. Приведены исторические аспекты возникновения понятия *иррационального числа* и *иррациональных неравенств* в алгебре, показано значение открытия *иррациональности*.

2. Из федерального государственного образовательного стандарта основного общего образования приведены предметные результаты в области «Математика» по теме «Иррациональные неравенства».

3. Выявлены основные требования к знаниям и умениям учащийся 9 классов по теме исследования. Рассмотрены результаты обучения учащихся на базовом, базовом и углубленном, углубленном уровнях по темам «Неравенства» и «Иррациональные неравенства».

4. Проведен анализ содержания учебников алгебры для 9 класса с углубленным изучением математике по теме «Иррациональные неравенства».

5. Выделены типы иррациональных неравенств на основе методов их решения. Анализ учебников алгебры разных авторов для классов с углубленным изучением математики позволил составить типологию заданий для каждого из методов, а также рассмотреть примеры решения иррациональных неравенств.

ГЛАВА II. МЕТОДИЧЕСКИЕ АСПЕКТЫ ОБУЧЕНИЯ РЕШЕНИЮ ИРРАЦИОНАЛЬНЫХ НЕРАВЕНСТВ В КУРСЕ АЛГЕБРЫ ОСНОВНОЙ ШКОЛЫ

§5. Методические рекомендации по обучению теме «Иррациональные неравенства» в курсе алгебры основной школы

Для того что бы рассмотреть методические рекомендации по обучению теме «Иррациональные неравенства» в курсе алгебры основной школы, нужно представить материал, связанный с изучением данной темы: понятия уравнения и неравенства, и описать методы их решения.

Р.Ю. Костюченко в своей статье поясняет, что «учебный материал, который относится к неравенствам - это значительная часть курса математики. Изучение данного материала выделяется в отдельную содержательно-методическую линию.

При обучении учащихся решению определенного класса неравенств следует выделять *общий прием решения*, который можно представить следующими этапами:

1. Определить вид неравенства.
2. Определить стандартное оно или нет.
3. Если стандартное, то использовать при решении известное правило и алгоритм.
4. Если нестандартное, то выполнить все необходимые преобразования, для того, что бы оно стало стандартным, либо воспользоваться искусственными приемами решения.
5. Выполнить эти преобразования.
6. Сделать проверку.
7. Записать ответ.

Как правило, наибольшие затруднения у учащихся вызывает четвертый этап. Это связано с тем, что нахождение решения произвольного неравенства не алгоритмизировано и требует от учащихся проявления творчества» [11, с. 1].

Р.Ю. Костюченко сообщает о том, что учителю необходимо помнить, что при решении неравенств используются те же методы и приемы, что были рассмотрены в предыдущих темах, а новые типы неравенств лишь расширяют знания о специальных преобразованиях. Следовательно, следует выделять как общее приемы решения неравенств в процессе их рассмотрения в одной из тем, так и новое, специальное, связанное с особенностями решения определенных неравенств в последующих темах.

Автор рассматривает методические аспекты, связанны с методикой обучения решению иррациональных неравенств.

Есть два основных пути решения данного типа неравенств: когда используются или наоборот не используются равносильные преобразования.

Первый подход находит большее применение и распространение в школьном курсе алгебры. Рассмотрим суть первого способа на примере решения двух различных, хотя на вид схожих неравенствах.

Пример 1. $\overline{x+2} < x-4.$

«Решение данного неравенства сводится к последовательным преобразованиям равносильной ему системе неравенств:

$$\begin{array}{c} x+2 \geq 0, \\ x-4 \geq 0, \\ x+2 < (x-4)^2; \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{c} x \geq -2, \\ x \geq 4, \\ x > 7, x < 2; \end{array} \Leftrightarrow x > 7.$$

Первое неравенство системы дает возможность извлечь квадратный корень, а второе неравенство – возвести обе части неравенства в четную степень с сохранением равносильности преобразований.

Пример 2. $\overline{x+2} > x-4.$

Второе неравенство решается аналогично первому. Приводится к системе неравенств:

$$\begin{array}{c} x+2 \geq 0, \\ x-4 \geq 0, \\ x+2 < (x-4)^2; \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{c} x \geq -2, \\ x \geq 4, \\ 2 < x < 7; \end{array} \Leftrightarrow 4 \leq x < 7.$$

После чего, учащимся предлагается записать решение данной системы, которое выдается за исходный ответ неравенства. Но это неверно: происходит потеря нескольких ответов, которые представляют собой промежуток $-2 \leq x < 4$. Если подставить в неравенство, например $x = -1$, получится верное числовое неравенство $1 > -5$, что позволят увидеть ошибочность ответа $4 \leq x < 7$ к исходному неравенству.

Отмечается, что «на каком же этапе теряется серия ответов? Ответ для учащихся становится очевидным, если принять во внимание, что условие неотрицательности выражения $x - 4$ мы использовали для корректного применения теоремы о возведении обеих частей неравенства в четную степень. Но такое ограничение введено искусственно лишь для применения известного приема. Тогда следует рассмотреть случай, когда выражение $x - 4$ принимает отрицательные значения. Но, учитывая, что левая часть неравенства на области определения принимает лишь неотрицательные значения, можно сделать вывод об истинности исходного неравенства при одновременном выполнении двух условий $x - 4 < 0$ и $x + 2 \geq 0$, т.е. системы неравенств;

$$\begin{aligned} &x + 2 \geq 0, \\ &x - 4 < 0. \end{aligned}$$

Решение данной системы – это промежуток $-2 \leq x < 4$. Объединяем его с решением первой системы $4 \leq x < 7$. В итоге получаем решение исходного неравенства, которое представляет собой промежуток $-2 \leq x < 7$» [11, с. 2].

В учебнике Н.Я. Виленкина разбирается *метод сведения к равносильной системе.* На конкретных примерах автор показывает методику решения иррациональных неравенств.

Пример 1. Решить неравенство $\sqrt{7 - 2x} > x - 2$.

Решение.

«Решение таких неравенств зависит от знака правой части. Поэтому рассмотрим два случая: 1. $x - 2 \geq 0$; 2. $x - 2 < 0$.

Первый случай: Пусть $x-2\geq 0$. При условии $7-2x\geq 0$ обе части исходного неравенства существуют и неотрицательны. Возведем обе части исходного неравенства в квадрат. Тогда оно равносильно системе неравенств: $\begin{cases} 7-2x>(x-2)^2, \\ x-2\geq 0. \end{cases}$ Отметим, что условие $7-2x\geq 0$ обеспечивается первым неравенством системы. Решая полученную систему неравенств, находим $2\leq x<3$, т.е. решение системы неравенств – промежуток $[2;3)$.

Второй случай: Пусть теперь $x-2<0$. Тогда в силу неотрицательности $\sqrt{7-2x}$ исходное неравенство выполняется для всех значений x, при которых существует $\sqrt{7-2x}$. Значит, исходное неравенство равносильно системе неравенств: $\begin{cases} x-2<0, \\ 7-2x\geq 0. \end{cases}$ Решением этой системы является промежуток $(-\infty;2)$. Осталось объединить решения, полученные в обоих случаях: $(-\infty;2)\cup[2;3)$.

Ответ: $x\in(-\infty;3)$ » [4, с. 204].

Пример 2 . Решить неравенство $\sqrt{x^2-3x+2}<5-x$.

Решение. «Рассмотрим два случая:

Первый случай: Пусть $5-x>0$. При условии существования квадратного корня: $x^2-3x+2\geq 0$ – обе части исходного неравенства неотрицательны. Возведем их в квадрат. Получим систему неравенств: $\begin{cases} 5-x>0, \\ x^2-3x+2\geq 0, \\ x^2-3x+2<(5-x)^2, \end{cases}$ которая равносильна исходному неравенству. Регая эту систему, находим $x\leq 1$ **или** $2\leq x<\frac{23}{7}$, т.е. решением этой системы является множество $(-\infty;1]\cup\left[2;\frac{23}{7}\right)$.

Второй случай: Пусть теперь $5-x\leq 0$. Так как квадратный корень принимает только неотрицательные значения, то ни при каких значениях x он не может быть меньше нуля. Следовательно, решением исходного неравенства будет множество, полученное в первом случае.

Ответ: $x\in(-\infty;1]\cup\left[2;\frac{23}{7}\right)$ » [4, с. 205].

Затем Р.Ю. Костюченко тмечает, что следование четкому алгоритму не всегда приводит к правильному решению неравенства или может его усложнить. Поэтому учителю необходимо показать школьникам иные методы и способы решения неравенств, а также требовать от них обоснованность каждого действия. Как раз таким рациональным методом является метод интервалов. Он относится ко второму подходу решения иррациональных неравенств, который не предполагает использование равносильных преобразований [11].

Автор выделяет «этапы применения *метода интервалов при решении неравенств*, независимо какое оно, рациональное или иррациональное:

1. Привести исходное неравенство (если нужно) к виду $f(x) > 0$ (знак неравенства может быть разным: $<, \leq$ **или** $\geq$; значение имеет то, что в левой части неравенства стоит некоторая непрерывная в своей области определения функция, а в правой –ноль).

2. Найти область определения функции $y = f(x)$.

3. Найти нули функции $y = f(x)$ в области ее непрерывности (т.е. корни уравнения $f(x) = 0$) и точки разрыва (если они существуют).

4. Нанести с учетом области определения, на числовую ось полученные точки. Полезно нули функции в случае нестрого неравенства отмечать заштрихованным кругом, в случае строго неравенства – окружностью, точки разрыва – окружностью; граничные точки области определения в случае возможности нахождения в них значения функции $y = f(x)$ - отмечать в соответствии с выполнением истинности неравенства в каждой такой точке.

5. На каждом из интервалов, полученных на числовой оси, определить знак функции $y = f(x)$ и поставить его над этим интервалом (знак определяется подстановкой произвольно выбранных наиболее удобных значений x из каждого интервала или используя свойство непрерывной функции о перемене знака).

6. Выбрать нужные по условию интервалы (и/или точки) и записать ответ.

Выделенные этапы совпадают с этапами решения иррациональных неравенств, поэтому целесообразно применять этот метод при их решении» [11, с.3-4].

Автор А.Г. Мордкович рассматривает метод интервалов. Он объясняет его на примере:

Решить неравенство $\overline{x^2 - x - 12} \geq x.$

Решение. Данное неравенство равносильно совокупности систем неравенств:

$$\begin{matrix} x^2 - x - 12 \geq 0, \\ x < 0; \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{matrix} x^2 - x - 12 \geq 0, \\ x \geq 0, \\ x^2 - x - 12 \geq x^2. \end{matrix}$$

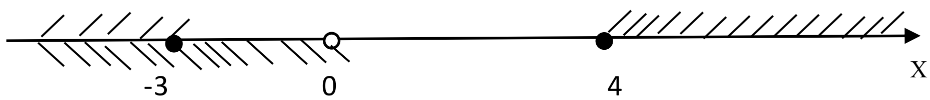

Рис. 3. Решение неравенства методом интервалов

Получаем: $\begin{matrix} x-4 \quad x+3 \ \geq 0; \\ x < 0; \\ x-4 \quad x+3 \ \geq 0; \\ x \geq 0; \\ x \leq -12. \end{matrix}$ Из первой системы находим: $x \leq -3;$ вторая система не имеет решений. *Ответ:* $x \in (-\infty; -3$.

Р.Ю. Костюченко приводит методические особенности обучения решению иррациональных неравенств учащихся основной школы:

1. Прежде чем приступить к изучению темы необходимо повторить, что такое иррациональное число, ОДЗ неравенства, способы решения иррациональных уравнений.

2. Чтобы решить иррациональное неравенство его преобразовывают к рациональному. Следует учесть, что возведение в нечетную степень обеих частей неравенства приводит к равносильному данному неравенств. При возведении в чётную степень равносильное неравенство получается при условии, если изначально обе части неравенства являются неотрицательными.

Другой способ решения – метод интервалов. Суть данного метода – нахождение нулей неравенства и его ОДЗ.

Также он выделяет основные ошибки учащихся при решении иррациональных неравенств:

- забывают находить ОДЗ неравенства или находят её неправильно;
- возникают ошибки при переходе к равносильному неравенству;
- не владеют соответствующим материалом;
- допускают ошибки при вычислении;
- у учеников возникают сложности при решении, так как само неравенство на первый взгляд выглядит очень сложно.

Таким образом, разобрав методические рекомендации по обучению теме «Иррациональные неравенства» в курсе алгебры основной школы можно сделать вывод, что решение всех иррациональных неравенств нельзя свести к одному общему алгоритму. Необходимо выбрать рациональный способ и метод их решения, а также учесть все методические особенности при обучении данной теме.

§6. Анализ задач ОГЭ по теме исследования

Структура и содержание ОГЭ по математике определяет необходимость адаптации выпускников школ к новым требованиям, прежде всего к изменению сроков, формы и методики оценивания качества знаний, многообразию типов экзаменационных заданий, мобильности их выполнения.

ОГЭ (Основной государственный экзамен) — это обязательный для учащихся экзамен, который проводится в одно время (если не учитывать часовые пояса) по всему государству. Каждому экзамену по определённому предмету выделяется по одному дню. ОГЭ сдают школьники 9 класса для перевода в 10 класс и получения аттестата об основном среднем образовании.

Основной государственный экзамен позволяет определять уровень подготовки учащихся. ОГЭ - это открытая, объективная и независимая оценка учебных достижений выпускников 9 класса.

Основной целью обучения математике в средней школе является овладение учащимися математическими знаниями и умениями, без которых в повседневной жизни не обойтись. Математика также необходима при продолжении образования в процессе изучения смежных дисциплин. Любой учащийся в процессе обучения должен получить возможность овладеть необходимыми знаниями и умениями, получить реальную подготовку к выпускным экзаменам. Следовательно, для успешной сдачи выпускных экзаменов важно обращать внимание на те темы, которые встречаются в тестах ОГЭ.

В соответствии с Концепцией развития математического образования в Российской Федерации ОГЭ по математике состоит из двух частей, в каждой из которых по два модуля – «Алгебра» и «Геометрия». В первую часть входят задания базового уровня сложности. Вторая часть включает в себя задания повышенного и высокого уровня сложности.

Пособие Е.А. Войта, Л.Н. Евича и др., предназначенное для подготовки к ОГЭ по математике, состоит из двух глав. В первой главе приведены 40 тренировочных вариантов. Вторая глава является сборником задач, который разделен на две части – базовый и повышенный уровень. Примеры иррациональных неравенств относятся к повышенному уровню и представлены в параграфе «Неравенства и системы неравенств».

Представим предложенные задания ОГЭ в пособии Е.А. Войта по теме «Иррациональные неравенства».

Решите неравенство (задание 184): $\frac{\overline{x^2+x-20}}{4x+1} \geq \frac{\overline{x^2+x-20}}{2x+3}$.

Решение. Рассмотрим два случая:

Первый случай. $\overline{x^2+x-20} = 0$. По теореме, обратной Виета $x_1 =$ 4, $x_2 == -5$. Числа - 5 и 4 являются решениями данного неравенства.

Второй случай. $\begin{cases} \overline{x^2+x-20}>0, \\ \frac{1}{4x+1}-\frac{1}{2x+3}\geq 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+5\quad x-4\ >0 \ \text{ см. рис.5 }, \\ \frac{1-x}{(4x+1)(2x+3)}\leq 0; \end{cases} \Leftrightarrow$

$\begin{cases} \begin{array}{l} x<-5, \\ x>4, \end{array} \\ \frac{1-x}{8(x+\frac{1}{4}\ (x+\frac{3}{2}}\leq 0 \ \text{ см. рис.5 }; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{array}{l} x<-5, \\ x>4, \end{array} \\ \begin{array}{l} x<-\frac{3}{2}, \\ -\frac{1}{4}<x\leq 1; \end{array} \end{cases} \Leftrightarrow x<-5.$

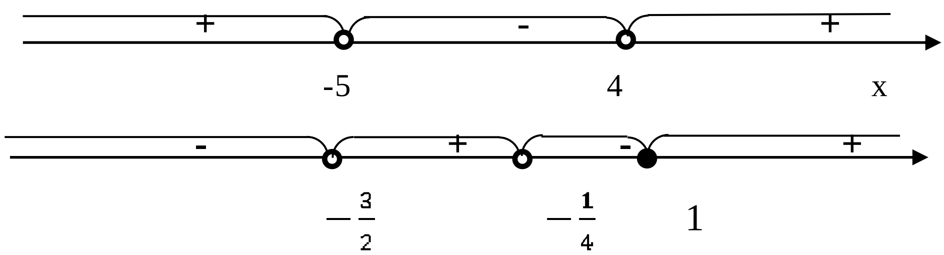

Рис.5. Иллюстрация к решению задания 184.

Объединим решения, полученные в *первом* и *втором случаях*: $x\in(-\infty;-5\ \cup\ 4\ .$ *Ответ:* $x\in(-\infty;-5\ \cup\ 4\ .$

Решите неравенство (задание 185): $\frac{2x-1}{\overline{\overline{-x^2-0{,}5x+0{,}5}}}\geq\frac{5x+1}{\overline{\overline{-x^2-0{,}5+0{,}5}}}.$

Решите неравенство (задание 232): $\overline{x^2-4}\cdot(x^2+2x-15)\geq 0.$

Решение. Рассмотрим два случая:

Первый случай. При $x^2-4\neq 0$ исходное неравенство равносильно системе

$\begin{cases} x^2-4>0, \\ x^2+2x-15\geq 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-2)(x+2)>0, \\ x-3\quad x+5\ \geq 5; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{array}{l} x<-2, \\ x>2, \end{array} \\ \begin{array}{l} x\leq -5, \\ x\geq 3; \end{array} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{array}{l} x\leq -5, \\ x\geq 3. \end{array}$

Второй случай. При $x^2-4=0, x=\pm 2$ – данное в условии неравенство выполнено.

Ответ: $x\in(-\infty;\ -5\ \cup\{-2;2\}\cup\ 3;+\infty).$

Решите неравенство (задание 233): $\overline{9-x^3}\cdot(x^2+x-2)\leq 0.$

Решите систему неравенств (задание 226): $\begin{cases}\sqrt{x^2+4x+3}\geq 0,\\ (x^2-5x+5)^2\leq 1.\end{cases}$

Решение.

$$\begin{cases}\sqrt{x^2+4x+3}\geq 0,\\ (x^2-5x+5)^2\leq 1.\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x^2+4x+3\geq 0,\\ x^2-5x+5\ \leq 1;\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x^2+4x+3\geq 0,\\ x^2-5x+5\geq -1,\\ x^2-5x+5\leq 1;\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}x^2+4x+3\geq 0\\ x^2-5x+6\geq 0,\\ x^2-5x+4\leq 0;\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x\leq -3,\\ x\geq -1,\\ 1\leq x\leq 2,\\ 3\leq x\leq 4;\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}1\leq x\leq 2,\\ 3\leq x\leq 4.\end{cases}$$

Ответ: $x\in [1;2]\cup[3;4]$.

Решите систему неравенств (задание 227): $\begin{cases}\sqrt{5x+6-x^2}\geq 0,\\ (x^2-8x+11)^2\leq 4.\end{cases}$

Решение.

$$\begin{cases}\sqrt{5x+6-x^2}\geq 0,\\ (x^2-8x+11)^2\leq 4;\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}5x+6-x^2\geq 0,\\ x^2-8x+11\ \leq 4;\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}x^2-5x-6\leq 0,\\ x^2-8x+11\geq -4,\\ x^2-8x+11\leq 4;\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}(x-6)(x+1)\leq 0,\\ (x-5)(x-3)\geq 0,\\ (x-1)(x-7)\leq 0;\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}-1\leq 0\leq 6,\\ x\leq 3,\\ x\geq 5,\\ 1\leq x\leq 7;\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}-1\leq x\leq 6,\\ 1\leq x\leq 3,\\ 5\leq x\leq 7;\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}1\leq x\leq 3,\\ 5\leq x\leq 6.\end{cases}$$

Ответ: $x\in [1;3]\cup[5;6]$.

Решите систему неравенств (задание 228): $\overline{-x^2+3{,}5x+4{,}5} \geq 0,$ $\overline{(x^2-7x+11)^2} \geq 1.$

Решение.

$$\overline{-x^2+3{,}5x+4{,}5} \geq 0,$$
$$\overline{(x^2-7x+11)^2} \geq 1;$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{matrix} \overline{-x^2+3{,}5x+4{,}5} \geq 0, \\ x^2-7x+11 \ \geq 1; \end{matrix}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{matrix} -(-x-4{,}5)(x+1) \geq 0, \\ x^2-7x+11 \leq -1, \\ x^2-7x+11 \geq 1; \end{matrix}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{matrix} (x-4{,}5)(x+1) \leq 0, \\ x-4 \ \ (x-3) \leq 0, \\ x-2 \quad x-5 \ \ \geq 0; \end{matrix} \Leftrightarrow \quad \begin{matrix} -1 \leq x \leq 4{,}5, \\ 3 \leq x \leq 4, \\ x \leq 2, \\ x \geq 5; \end{matrix} \Leftrightarrow \quad \begin{matrix} -1 \leq x \leq 2, \\ 3 \leq x \leq 4. \end{matrix}$$

Ответ: $x \in \ -1;2 \ \cup \ 3;4 \ .$

Решите систему неравенств (задание 229): $\overline{-x^2-4{,}5x+5{,}5} \geq 0,$ $\overline{(x^2+6x+6{,}5)^2} \geq 1{,}5.$

Решение.

$$\overline{-x^2-4{,}5x+5{,}5} \geq 0,$$
$$\overline{(x^2+6x+6{,}5)^2} \geq 1{,}5.$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{matrix} -x^2-4{,}5x+5{,}5 \geq 0, \\ x^2+6x+6{,}5 \ \geq 1{,}5; \end{matrix}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{matrix} -(x+5{,}5)(x-1) \geq 0, \\ (x+4)(x+2) \leq 0, \\ (x+1)((x+5) \geq 0; \end{matrix}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{matrix} -5{,}5 \leq x \leq 1, \\ -4 \leq x \leq -2, \\ x \leq -5, \\ x \geq -1; \end{matrix} \Leftrightarrow \quad \begin{matrix} -5{,}5 \leq x \leq -5, \\ -1 \leq x \leq 1, \\ -4 \leq x \leq -2. \end{matrix}$$

Ответ: $x \in \ -5{,}5; -5 \ \cup \ -4; -2 \ \cup \ -1; 1$.

Рассмотрим пособие «Математика: неравенства и системы неравенств» для подготовки к ОГЭ (ГИА) Г.В. Сычевой и Н.Б. Гусева, которое рассчитано на самостоятельную подготовку учащихся. В нем представлены темы «Неравенства», «Системы неравенств с одной переменной». Каждая глава включает в себя небольшой теоретический материал, после которого следуют примеры для решения. Задания темы варьируются в зависимости от ее сложности и количества заданий в ОГЭ (ГИА), посвященных этой теме. Тема «Иррациональные неравенства» считается довольно сложной. Представлена она во второй главе и параграфе «Полезно знать! Системы иррациональных неравенств». В данном параграфе содержится краткая информация, посвященная иррациональным неравенствам, затем следуют примеры:

Решите систему неравенств (пример 19):

$$\begin{matrix} (x+3)\sqrt{5x^2+1} < (7x-2)\sqrt{5x^2+1}, \\ 0{,}2x + 0{,}3 \geq 0{,}6x - 0{,}1. \end{matrix}$$

Решение.

Отмечается, что «обе части первого неравенства системы можно разделить на выражение $\sqrt{5x^2+1}$, принимающие при любых *x* лишь положительные значения.

Получим систему равносильную данной: $\begin{matrix} x+3 < 7x-2, \\ 0{,}2x + 0{,}3 \geq 0{,}6x - 0{,}1; \end{matrix} \Leftrightarrow$

$\begin{matrix} 6x > 5, \\ 0{,}4x \leq 0{,}4 \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{matrix} x > \frac{5}{6}, \\ x \leq 1, \end{matrix}$ т.е. $x \in \ \frac{5}{6}; 1$ » [21, с. 94].

Ответ: $x \in \ \frac{5}{6}; 1$.

Решите систему неравенств (пример 20):

$$\begin{matrix} 9\sqrt{10x-5} \geq 2\sqrt{10x-5}, \\ \frac{6}{\sqrt{3x-12}} < \frac{11}{\sqrt{3x-12}}. \end{matrix}$$

*Решение.*Указано, что «оба неравенства системы справедливы при любых значениях *х*, входящих в область определения неравенства. Получаем систему, равносильную данной: $\begin{matrix} 10x-5\geq 0, \\ 3x-12>0; \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{matrix} x\geq 0{,}5, \\ x>4, \end{matrix}$ т. е. $x>4$» [21, с. 94].

Ответ: $x\in(4;+\infty)$.

Решите систему неравенств (пример 21):

$$\begin{matrix} (x^2-4)\sqrt{1-x}\geq 0, \\ \dfrac{\sqrt{1-x}}{x+3}\leq 0. \end{matrix}$$

Решение.

Отмечается, что «решаем каждое неравенство в отдельности.

$(x^2-4)\sqrt{1-x}\geq 0$. Неравенство выполняется, если $x=1$ или $\begin{matrix} x^2-4\geq 0, \\ 1-x\geq 0; \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{matrix} x^2\geq 4, \\ x\leq 1; \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{matrix} x\leq -2, \\ x\geq 2, \\ x\leq 1, \end{matrix}$ т.е. ч ≤ -2.

$x\in(-\infty;-2\ \cup\ 1$.

$\frac{\sqrt{1-x}}{x+3}\leq 0$. Неравенство справедливо, если $x=1$ или $\begin{matrix} x+3<0, \\ 1-x\geq 0; \end{matrix} \Leftrightarrow$ $\begin{matrix} x<-3, \\ x\leq 1, \end{matrix}$ т.е. $x<-3$; $x\in\ -\infty;-3\ \cup\ 1$.

Находим общую часть полученных числовых множеств: $x<-3$ **или** $x=1$, т. е. $x\in\ -\infty;-3\ \cup\ 1$ » [21, с. 95].

Ответ: $x\in\ -\infty;-3\ \cup\ 1$.

Таким образом, проведенный анализ пособий для подготовки учащихся к ОГЭ по математике, показал, что тема « Иррациональные неравенства» считается сложным материалом и задания на эту тему встречаются в ОГЭ редко. Данный материал относится ко второй части ОГЭ и оценивается высоким баллом.

§7. Учебные задания по теме « Иррациональные неравенства» как средство организации самостоятельной работы учащихся основной школы

Ю.А. Коноводова считает, что «современный педагог должен быть нацелен на такую организацию учебной деятельности учащихся, которая предполагает самостоятельную работу школьников по самодобыванию знаний под руководством учителя, который соединяет познавательный процесс с заинтересованностью в результатах своего труда.

По мнению И.А. Зимней [7], самостоятельная работа – это целостная взаимосвязанная система деятельности учащегося и учителя, как субъектов образовательного процесса. Целью этого процесса является мотивирование и вовлечение учащегося в самостоятельную познавательную деятельность, и создание условий для развития и формирования у учащегося таких качеств и умений как способность к саморегуляции, самоактивации, самоорганизации, самоконтролю, которые в дальнейшем должны позволить им самостоятельно изучать что-либо, осваивать новые виды деятельности.

В современных условиях под активизацией учебной работы понимают массовое воспитание самостоятельности и инициативности школьника. Самостоятельная деятельность позволяет ребенку приобретать навыки и приемы элементарной исследовательской работы» [9].

На основе теоретических аспектов, связанных с самостоятельной работой, выделяются следующие типы деятельности: практическая, организационно-техническая, познавательная.

Б.И. Коротяев указывает, что «существенными особенностями, которые характеризуют самостоятельность учащегося в познавательном процессе являются: умение работать целенаправленно по плану; выбирать более рациональные приемы учебного труда; правильно рассчитывать свои силы и учитывать результаты собственной деятельности» [10].

Самостоятельная работа – это метод, который помогает учителю выявить способности учащихся. Основными признаками самостоятельной работы на уроке математики считаются наличие задания учителя, самостоятельность учащихся, руководство учителя, выполнение задания без участия педагога, активность и усилие учащихся, специальное время для выполнения задания.

Ю.А. Коноводова рассмотрела *виды самостоятельных работ* на уроках математики:

1) предварительная работа, подготавливающая к изучению новых знаний;

2) работа, направленная на изучение нового материала;

3) работа на повторение, закрепление знаний;

4) обобщающая самостоятельная работа;

5) проверочная самостоятельная работа.

Изучая иррациональные неравенства, учащиеся должны знать и понимать математические обозначения, понятия и термины, связанные с этой темой. Для этого используются *математические диктанты*. После изучения иррациональных неравенств, учащимся предлагается подготовить *рефераты*, *краткие сообщения* или *презентации*. Необходимо предварительно подобрать темы и раздать их ученикам, учитывая их индивидуальные особенности и способности.

Одним из видов самостоятельной работы является *работа с тестами*. Многие учителя считают, что тестирование гораздо проще, чем стандартное решение, но это не так. Ученики выполняют более объемную и кропотливую работу.

Важно, чтобы тестирование имело разноуровневый характер. Иррациональны неравенства можно поделить на уровни сложности, начиная от простых, заканчивая более сложными.

Такой вид самостоятельной работы удобен. Во-первых, задания разного уровня вызывают у учащихся интерес, а также являются доступными как для сильного, так и для слабого ученика. Во-вторых, ученики в достаточной степени овладевают устойчивыми умениями и знаниями по теме «Иррациональные неравенства». В-третьих, нетрудно отследить на сколько подготовлен конкретный ученик, как усвоена тема в группе, на что стоит обратить внимание и уделить больше времени при подготовке к итоговому уроку по данной теме.

Также для выявления пробелов в знаниях можно использовать различные *карточки-задания.* Составлять их можно с помощью уровневой дифференциации. Учащиеся могут выбрать тот уровень усвоения, который соответствует их интересам, способностям, потребностям.

Для того, чтобы определить уровень знаний учащихся в 9 классе по теме «Иррациональные неравенства» учителем математики А. Остапенко был разработан тест.

Тест по теме: «Решение иррациональных неравенств».

1. Решить неравенство:

$\overline{x+2} > \overline{8-x^2}$

a) $-2;2\ \overline{2}$

b) $2;\ 2\ \overline{2}$

c) $2;2\ \overline{2}$

d) $2;\ 2\ \overline{2}$

2. Решить неравенство:

$\overline{x+1} > \overline{1-x^2+4x}$

a) $-\frac{1}{2};\ 0$

b) $0;\ \frac{1}{2}$

c) $0;\ 1\frac{1}{2}$

d) $0;\frac{1}{2}$

3. Решить неравенство:

$\overline{2x^2+5x-6} > \overline{-x-3}$

a) $-\infty;\ \frac{-3-\ \overline{15}}{2}$

b) $-\infty;\ -3-\ \overline{15}$

c) $-\infty;\ \frac{-3-\ \overline{15}}{2}$

d) $\frac{-3-\ \overline{15}}{2};\ \frac{-3+\ \overline{15}}{2}$

4. Решить неравенство:

$\overline{3-x} \geq \overline{\frac{1}{2-x}}$

a) $(-\infty;\ \frac{5+\ \overline{5}}{2}]$

b) $(\frac{5-\ \overline{5}}{2};+\infty)$

c) $(-\infty;\ \frac{5-\ \overline{5}}{2}]$

d) нет решения.

5. **Решить неравенство:**

$\sqrt{\frac{2x-3}{4x-1}} \geq \sqrt{\frac{x-2}{x+2}}$

a) (2;4]

b) (-∞;4]

c) [2;4]

d) [2;+∞)

6. **Решить неравенство:**

$\sqrt{\frac{2x+1}{x^2+x}} \leq \sqrt{\frac{1}{x+2}}$

a) (-1; 0)

b) (-1; $-2-\sqrt{2}$ $\cup (0; +\infty)$

c) [-1; $-2+\sqrt{2}$ $\cup (0; +\infty)$

d) (-1; $-2+\sqrt{2}$ $\cup (0; +\infty)$

7. Решить неравенство:

$(x+2)\sqrt{(4-x)(5-x)} \geq 0$

a) $-2;4$

b) $-2;4 \cup 5;+\infty$

c) $-2;5 \cup 5;+\infty$

d) $-2;+\infty$

8. Решить неравенство:

$\frac{\sqrt{2x+15x-17}}{10-x} \geq 0$

a) $-\frac{17}{2};10$

b) $-\frac{17}{2};1 \cup 1;10$

c) $1;10$

d) $-\infty;-\frac{17}{2} \cup 1;10$

9. Решить неравенство:

$\frac{\sqrt{x+20}}{x} - 1 < 0$

a) $-20;+\infty$

b) $-20;0 \cup 5;+\infty$

c) $-5;0 \cup 20;+\infty$

d) $5;+\infty$

10. Решить неравенство:

$\sqrt{x+4} > \sqrt{2-\sqrt{3+x}}$

a) $(\frac{-3-\sqrt{5}}{2};1]$

b) $(\frac{-3-\sqrt{5}}{2};1)$

c) $(\frac{-3-\sqrt{5}}{2};\frac{-3+\sqrt{5}}{2})$

d) $(\frac{-3+\sqrt{5}}{2};1]$

К данному тесту также прилагаются ответы:

1) b; 2) e 3) a 4) d 5) c 6) d 7) b 8) e 9) b 10) a.

Следовательно, можно сделать вывод, что данная тема относится к повышенному уровню сложности. В программе для нее времени выделено мало. Учителю за ограниченное количество часов необходимо объяснить достаточно емкий и трудный материал. Поэтому при разработке самостоятельной работы, нужно учитывать отведенное на нее время. Для более быстрого усвоения темы в качестве самостоятельной работы удобнее воспользоваться тестированием. В данном параграфе предложен тест по теме «Иррациональные неравенства».

Выводы по второй главе

1. Рассмотрены методические рекомендации по обучению теме «Иррациональные неравенства» в курсе алгебры основной школы, представлены примеры решения данных неравенств, выявлены методические особенности решения иррациональных неравенств.

2. Проведен анализ пособий для подготовки учащихся к ОГЭ по математике, который показал, что тема «Иррациональные неравенства» считается сложным материалом и задания на эту тему встречаются редко. Данный материал относится ко второй части ОГЭ и оценивается высоким баллом.

3. Подобраны учебные задания по теме «Иррациональные неравенства» для организации самостоятельной работы учащихся основной школы.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Тема «Неравенства» считается довольно значимой частью изучения математики в школьном курсе. «Иррациональные неравенства» - это наиболее сложный раздел алгебры, изучаемый в школьной программе, так как на его изучение отведено крайне мало времени.

Сложности при работе с данным видом неравенств возникают в связи с отсутствием четкого алгоритма решения. Также у учащихся часто возникают трудности при выполнении преобразований, приводящих к неравенствам, не равносильных данному. Если на этом этапе допустить ошибку, это приведет к потере или приобретению посторонних корней.

В ходе работы:

- рассмотрена история появления и дальнейшего развития иррациональных неравенств;

- сформулированы результаты изучения темы «Иррациональные неравенства», проведен методический анализ теоретического материала;

- проанализировав учебники курса алгебры основной школы, можно сделать вывод, что тема «Иррациональные неравенства» рассматриваются в основном в 9 классе, при чем в учебниках с углубленным изучением математики.

- выделены методы решения иррациональных неравенств и рассмотрены примеры с их решениями;

- представлены методические рекомендации по обучению теме «Иррациональные неравенства» в курсе алгебры основной школы;

- анализ примеров задач из ОГЭ показал, что данная тема относится ко второй части ОГЭ и оценивается высоким баллом.

- рассмотрены учебные задания по теме «Иррациональные неравенства» как средство организации самостоятельной работы учащихся основной школы.

СПИСОК ИСПОЛЬЗУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Байдак, В.А. Теория и методика обучения математике: наука, учебная дисциплина: монография/ В. А. Байдак. — 3-е изд,, стереотип. — М.: ФЛИНТА, 2016. – 264 с.

2. Блох, А.Я. Методика преподавания математики в средней школе [Текст]: Частная методика: Учебное пособие для студентов педагогических институтов по физ.-мат. специальностям / А.Я. Блох, В.А. Гусев, Г.В. Дорофеев.; Сост. В.И. Мишин. – М.: Просвещение, 1987. – 416 с.

3. Богомолов Н.В. Алгебра [Текст]: учебник для учащихся общеобразовательных учреждений / Н.В. Богомолов, П.И. Самойленко. – 7-е изд. – М.: Просвещение, 2010. – 400 с.

4. Виленкин, Н.Я. Алгебра [Текст]: учебник для учащихся 9 класса с углубленным изучением математики / Н.Я. Виленкин, Г.С. Сурвилло, А.С. Симонов. – 7-е изд. – М.: Просвещение, 2006. – 368 с.

5. Войт Е.А. Математика. 9-й класс. Подготовка к ГИА: учеб. методическое пособие / Под редакцией Ф.Ф. Лысенко, С.Ю. Кулабухова. - Ростов-на-Дону: Легион – М, 2011. – 272с. – (ГИА-9).

6. Глейзер, Г.И. История математики в школе [Текст]: пособие для учителей / Г.И. Глейзер – М.: Просвещение, 1964. –375 с.

7. Зимняя И.А. Педагогическая психология: Учеб. для вызов [Текст] — М.: Издательская корпорация «Логос», 1999. —384 с.

8. Иванова, Т.А. Теоретические основы обучения математике в средней школе [Текст]: учебное пособие / Т.А. Иванова, Е.Н. Перевощикова, Т.П. Григорьева, Л.И. Кузнецова; Под ред. проф. Т.А. Ивановой. – Н. Новгород: НГПУ, 2003. – 320 с.

9. Коноводова Ю.А. Актуальность самостоятельной работы школьников в образовательном процессе [Текст] / Педагогика: традиции и инновации: материалы II Междунар. науч. конф. — Челябинск: Два комсомольца, 2012. – С. 105-106.

10. Коротяев Б.И., Педкасистый П.И. Организация деятельности ученика на уроке. — М.: Знание, 1985. — 80 с.

11. Костюченко Р.Ю. Обучение учащихся решению иррациональных неравенств [электронный ресурс]/ Костюченко Р.Ю.// Вестник Омского государственного педагогического университета. – Омск. – 2007. – Режим доступа: http://www.omsk.edu/article/vestnik-omgpu-194.pdf. - Последнее обновление 07.04.2018.

12. Кремер Н.Ш. Математика для поступающих в экономические и другие вузы. Подготовка к вступительным испытаниям и Единому государственному экзамену: Учебное пособие для вузов. - М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2012. – 593 с.

13. Литвиненко, В.Н. Практикум по элементарной математике [Текст]: Алгебра. Тригонометрия: учебное пособие для студентов физико-математических специальностей педагогических институтов и учителей / В.Н. Литвиненко, А.Г. Мордкович. – 3-е изд., перераб. и доп. – М.: «ABF», 1995. – 352 с.

14. Макарычев, Ю.Н. Алгебра. 9 класс [Текст]: учебник для учащихся с углубленным изучением математики / Ю.Н. Макарычев, Н.Г. Миндюк, К.И. Нешков, И.Е. Феоктистов. 7-е изд. – М.: Мнемозина, 2008. – 447 с.

15. Мордкович, А.Г, Алгебра. 9 класс [Текст]: учебник для учащихся с углубленным изучением математики / А.Г. Мордкович , Н.П. Николаев.- 3-е изд. – М.: Просвещение, 2008. – 255 с.

16. Примерная основная образовательная программа основного общего образования. Одобрена решением федерального учебно-методического объединения по общему образованию / М-во образования и науки РФ. – М.: Просвещение, 2015. – 560 с. [Электронный ресурс]. – Режим доступа: http://fgosreestr.ru/wp-content/uploads/2015/06.pdf. – Последнее обновление 30.01.2018.

17. Саранцев, Г.И. Методика обучения математике: методология и теория [Текст]: учеб. пособие для студентов бакалавриата высших учебных

заведений по направлению «Педагогическое образование» (профиль «Математика») / Г.И. Саранцев. – Казань: Центр инновационных технологий, 2012. – 292 с.

18. Соболь Б.В. Пособие для подготовки к единому государственному экзамену и централизованному тестированию по математике. - Ростов на Дону: Феникс, 2003. - 352 с.

19. Стиллвелл Д. Математика и ее история. — Москва-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2004. — 464с.

20. Сычева Г.В. Математика: «Неравенства», «Системы неравенств»: Экспресс-репетитор для подготовки к ГИА: 9-й класс / Г.В. Сычева, Н.В. Гусева, В.А. Гусев. – Москва: Астрель, 2013. –126,[2]с.

21. Федеральный государственный образовательный стандарт основного общего образования: Приказ Мин. образования и науки РФ от 17.12.2010 г. №1897. [Электронный ресурс]. – Режим доступа: https://минобрнауки.рф/документы/543 – Последнее обновление 30.01.2018.

22. Фосс А. Сущность математики. Физико-математическое наследие: математика / А. Фосс. - М.:Либроком, 2009. – 120 с.

23. Черкасов, О. Ю. Математика: Справочник для старшеклассников и поступающих в вузы. Курс подготовки к ГИА, [Текст] / О. Ю. Черкасов – М.: АСТ-ПРЕСС, 2014. – 464 с.

24. Черкасов О.Ю. Математика [Текст]: справочник для старшеклассников и поступающих в вузы/ О.Ю. Черкасов – М.: АСТ-ПРЕСС, 2001. - 576 с.

25. Шарова Л.И. Уравнения и неравенства [Текст]: пособие для подготовительных отделений / Л. И. Шарова – Киев: Вища школа, 1981. – 280 с.

26. Шахмейстер, А.Х. Иррациональные уравнения и неравенства. [Текст] – 4-е издание – СПб.: «Петроглиф»: «Виктория плюс»: М.: Издательство МЦНМО 2011. – 2016 с.

27. Brouseau G. Fondements et methodes de la didactique des mathematiques, «Etudes en didactique des Mathematiques», Universite de Bordeaux I, IREM de Bordeaux, 1987.

28. The Free High School Science Texts: Textbooks for High School Students Studying the Sciences Mathematics Grades 10-12 / FHSST Authors. – FHSST, 2008. – 624 p.

29. Heman, J., Kucera, R., Simsa, J., Dilcher. K. Equations and inequalities: elementary problems and theorems in algebra and number theory. – 2000. – 344 p.

30. Zawira, A., Hitchcock, G. A primer for mathematics competitions. – New York, 2009. – 360 p.

31. Risat, S. Basics of Olympiad Inequalities. – 2008. – 45 p.