МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«Тольяттинский государственный университет»

Институт математики, физики и информационных технологий
(наименование института полностью)

Кафедра «Высшая математика и математическое образование»
(наименование кафедры)

44.03.05 «Педагогическое образование»
(код и наименование направления подготовки)

«Математика и информатика»
(направленность (профиль))

БАКАЛАВРСКАЯ РАБОТА

на тему **«МЕТОДИКА ОБУЧЕНИЯ ТЕМЕ «ПРОГРЕССИИ» В УГЛУБЛЕННОМ КУРСЕ АЛГЕБРЫ ОСНОВНОЙ ШКОЛЫ»**

Студент О.С. Илякина ____________________
(И.О. Фамилия) (личная подпись)

Руководитель д.п.н., профессор С.Н. Дорофеев ____________________
(И.О. Фамилия) (личная подпись)

Консультант М.В. Емелина ____________________
(И.О. Фамилия) (личная подпись)

Допустить к защите

Заведующий кафедрой д.п.н., профессор, Р.А. Утеева ________________
(ученая степень, звание, И.О. Фамилия) (личная подпись)

«_____»__________2018 г.

Тольятти 2018

ОГЛАВЛЕНИЕ

АННОТАЦИЯ

Целью бакалаврской работы является выявления методических особенностей изучения темы «Прогрессии» в углубленном курсе алгебры основной общеобразовательной школы, разработка методических рекомендаций по изучению данной темы учащимися 5-9 классов и соответствующих систем задач.

Последовательности являются одним из важных понятий в математике. Числовые последовательности и, как частный случай, прогрессии изучаются в курсе алгебры 9 класса. Изучение числовых последовательностей играет важную роль не только в школьном курсе алгебры, но и в дальнейшем обучении в высших учебных заведениях. Задачи по теме «Прогрессии» включены в основной государственный экзамен за курс основной школы.

Бакалаврская работа состоит из введения, двух глав, заключения, списка литературы и приложений.

Глава I посвящена историческим аспектам развития основных понятий, связанных с изучением прогрессий. Анализируются программы и учебники по теме исследования. Выявляются различные подходы к определению основных понятий, связанных с изучением прогрессий в школьном курсе математики.

В *главе II* составлены методические рекомендации по изучению темы «Прогрессии» в курсе алгебры основной школы, разработана система задач.

Объем работы составляет 55 страниц, в том числе приложения -13 страниц.

Список литературы содержит 32 наименования.

Abstract

The given graduation work is devoted to the methods of teaching the topic "Progressions" in the in-depth algebra training course at secondary school.

The aim of the graduation work is to identify the methodological features of teaching the topic "Progressions" in the in-depth algebra training course at secondary school, to develop methodological recommendations for teaching this topic in 5-9 classes and to elaborate the corresponding systems of tasks.

The object of the graduation work is the process of teaching algebra at secondary school.

The first chapter of this graduation work dwells on the four different mathematics textbooks for elementary and advanced students in which the topic "Progressions" is presented. On the basis of the theoretical and tasks material analysis, the following methods have been developed: the methodology for introducing the concept of a numerical sequence in the school course of mathematics, the methodology for studying arithmetic and geometric progressions.

The second chapter of the graduation work includes the methodological aspects of teaching progressions in the basic course of algebra. The tasks material has been elaborated in accordance with the Main State Examination requirements.

The research is of interest for a wide circle of teachers whose work is aimed at achieving high-quality results. Teaching profession obliges them to keep up with the times, take into account the interests of their students and constantly upgrade their professional skills.

In conclusion we would like to stress that the results of this graduation work allow us to consider the topic "Progressions" as one of the important links of the whole algebra course at secondary school.

ВВЕДЕНИЕ

Актуальность исследования. Последовательности являются одним из важных понятий в математике. Известно, что прогрессии являются частным случаем числовых последовательностей и изучаются в курсе алгебры 9 класса. Не смотря на то, что данной теме уделяется не так много внимания, она способствует формированию у учащихся следующих ключевых навыков: правильное употребление буквенной символики; составление буквенных выражений и формул; осуществлять в формулах числовые подстановки; выполнять соответствующие вычисления.

Кроме того, изучение числовых последовательностей играет важную роль не только в школьном курсе алгебры, но и в дальнейшем обучении математике в высших учебных заведениях. Данная тема позволяет определить такие основные понятия математического анализа, как бесконечность, предел и непрерывность. Теория рядов полностью базируется на последовательностях.

В основном в учебниках алгебры тема «Прогрессии» дается ученикам в следующем порядке: «числовая последовательность, n-й член последовательности, порядковый номер ее члена, конечная и бесконечная последовательности и способы их задания» [14, 16]. М. И. Башмаков [20, С. 107] предлагает определять последовательность как «функцию натурального аргумента» и, исходя из этого, «изучать ее свойства (монотонности, ограниченности) на основе общего понятия функции». К примеру, последовательность как функцию рассматривают такие авторы учебников алгебры 9-го класса как К. С. Муравин [18] и А.Г. Мордкович [16]. Покровский В. П. [20] в пособии по методике обучения математике отмечает: «в учебнике А.Г. Мордковича и др. рассматривается графический способ изображения последовательностей и устанавливается связь прогрессий с соответствующими функциями на множестве натуральных чисел: арифметическая прогрессия – линейная, геометрическая прогрессия –

показательная (на уровне опережающего знакомства). Изучение прогрессий связано с изучением функций, отражающих два важных закона изменения величин» [20, С. 107-108].

Изучив федеральный государственный образовательный стандарт основного общего образования [24], можно сделать вывод о том, что результаты изучения предметной области «Математика» должны отражать: 1) овладение символьным языком алгебры, приёмами выполнения тождественных преобразований выражений, решения уравнений, систем уравнений, неравенств и систем неравенств; умения моделировать реальные ситуации на языке алгебры, исследовать построенные модели с использованием аппарата алгебры, интерпретировать полученный результат; 2) овладение системой функциональных понятий, развитие умения использовать функционально-графические представления для решения различных математических задач, для описания и анализа реальных зависимостей.

Задачи по теме «Прогрессии» включены в основной государственный экзамен: в первой части модуля «Алгебра» они встречаются в задании №11.

Проблема исследования состоит в выявлении методических особенностей обучения учащихся теме «Прогрессии» в углубленном курсе алгебры основной школы.

Объект исследования: процесс обучения алгебре в основной школе.

Цель исследования: выявить методические особенности обучения учащихся теме «Прогрессии» в углубленном курсе алгебры основной школы и разработать системы упражнений по теме исследования.

Задачи исследования:

1. Изучить исторические аспекты возникновения и развития понятия последовательность.

2. Выявить основные цели и задачи обучения прогрессиям в курсе алгебры основной школы.

3. Провести сравнительный анализ содержания темы «Прогрессии» в учебниках алгебры для классов с углубленным изучением математики.

4. Проанализировать задачный материал по теме «Прогрессии» для классов с углубленным изучением математики.

5. Разработать методические рекомендации по обучению учащихся решению задач по теме «Прогрессии» в углубленном курсе математики.

6. Рассмотреть задачи ОГЭ по теме «Прогрессии».

7. Разработать методические рекомендации по применению электронных образовательных ресурсов при обучении учащихся решению задач по теме «Прогрессии».

Для решения задач были использованы следующие **методы исследования:** анализ методической литературы; анализ школьных программ и учебников; изучение опыта работы учителей математики.

Теоретическая значимость исследования состоит в том, что в нем выявлены методические особенности обучения учащихся теме «Прогрессии» в углубленном курсе алгебры основной школы.

Практическая значимость работы заключается в том, что в ней представлены системы задач по обучению учащихся прогрессиям в углубленном курсе алгебры основной школы и методические рекомендации, которые могут быть использованы учителями математики и студентами в период педагогической практики в общеобразовательной школе.

На защиту выносятся:

Методические рекомендации по обучению учащихся прогрессиям в углубленном курсе алгебры основной школы и система задач по теме исследования.

Бакалаврская работа состоит из введения, двух глав, заключения, списка литературы и приложения.

Во введении сформулированы основные характеристики исследования: актуальность, проблема, объект, предмет, цель, задачи и методы исследования.

Глава I бакалаврской работы содержит теоретические основы обучения учащихся функциям в углубленном курсе алгебры основной школы. Изучены исторические аспекты возникновения и развития понятия последовательность в математике. Рассмотрены основные цели и задачи обучения прогрессиям в курсе алгебры основной школы. Выполнен анализ содержания темы «Прогрессии» в учебниках алгебры для классов с углубленным изучением математики. Рассмотрены различные подходы к определению понятия «последовательность» в углубленном курсе алгебры основной школы и раскрыта методика введения данного понятия. Выявлены методические особенности обучения учащихся понятиям арифметической и геометрической прогрессии.

В Главе II содержатся методические аспекты обучения учащихся прогрессиям в углубленном курсе алгебры основной школы. Сформулированы методические рекомендации по обучению учащихся 7-9 классов теме «Прогрессии» в углубленном курсе алгебры. Рассмотрены задачи ОГЭ по теме «Прогрессии». Разработаны системы задач по обучению учащихся теме исследования.

В заключении сформулированы основные результаты и выводы проведенного исследования.

Список литературы содержит 32 наименования.

ГЛАВА I. ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ОБУЧЕНИЯ ПРОГРЕССИЯМ В УГЛУБЛЕННОМ КУРСЕ АЛГЕБРЫ ОСНОВНОЙ ШКОЛЫ

§1. Историческая справка по теме исследования

Такое математическое явление, как прогрессии известны так давно, что нельзя точно сказать, кто их открыл. Прогрессией называют последовательность чисел, где каждый член определенным образом зависит от предыдущего. На данный момент этот термин немного устарел и используется только в таких словосочетаниях, как арифметическая и геометрическая прогрессии. Слово «прогрессия» имеет латинские корни (от лат. progression - движение вперед), а сам термин был введен в оборот Северием Боэцием (480-524 гг.) [4] - римским богословом, государственным деятелем и философом.

Первые упоминания о прогрессиях встречаются еще у древних народов. К примеру, в клинописных вавилонских табличках и египетских папирусах находили старинные задачи на прогрессии и решения к ним:

«Задача Древнего Египта из папируса Ахмеса (Райнда).

У семи лиц по семи кошек, каждая кошка съедает по семи мышей, каждая мышь съедает по семи колосьев, из каждого колоса может вырасти по семь мер ячменя. Как велики числа этого ряда и их сумма?» [6].

Данная задача неоднократно в различной интерпретации повторялась и у других народов в другие времена. Например, в написанной в XIII в. «Книге об абаке» Леонардо Пизанского (Фибоначчи) есть задача, в которой фигурируют 7 старух, направляющихся в Рим: «у каждой из старух по 7 мулов, на каждом муле по 7 мешков, в каждом мешке по 7 хлебов, в каждом хлебе по 7 ножей, каждый нож в 7 ножнах». В задаче спрашивается, сколько всего предметов [6]. Очевидно, что суть задачи аналогичная.

Решение:

Из условия задачи ясно, что всего 7 людей, следовательно, количество кошек равно 7^2=49. Кошки, в свою очередь съедают 7^3=343 мыши, которые съедают 7^4=2401 колосьев. Из колосьев вырастет 7^5=16807 мер ячменя.

Таким образом, получаем конечную числовую последовательность: 7, 7^2, 7^3, 7^4, 7^5. Или: 7, 49, 343, 2401, 16807. То есть, сумма данного ряда равна: 7+49+343+2401+16807=19607.

Древних мыслителей - авторов подобных задач не интересовало, о каких именно предметах идет речь, ключевую роль играет их количество. похожие задачи также решались на Руси. Примерно в XIX веке в различных деревнях детям загадывали задачи по типу: «Шли 7 старцев. У каждого по 7 костылей. На каждом костыле по 7 сучьев. На каждом сучке по 7 кошелей. В каждом кошеле по 7 пирогов. Сколько всего пирогов?» [6]. Но по сути это та же самая задача из древнего папируса Ахмеса, прожив тысячелетия она сохранилась почти неизмененной.

«Математический папирус Ахмеса - древнеегипетское учебное руководство по арифметике и геометрии периода Среднего царства, переписанное около 1650 до н. э. писцом по имени Ахмес на свиток папируса длиной 5,25 м. и шириной 33 см. Папирус Ахмеса был обнаружен в 1858 и часто называется папирусом Райнда по имени его первого владельца. В 1870 папирус был расшифрован, переведён и издан. На данный момент большая часть рукописи находится в Британском музее в Лондоне, а вторая часть - в Нью-Йорке» [4].

Такое математическое явление, как числовые последовательности и их свойства также было отражено на картине «Устный счет. В народной школе С. А. Рачинского» великого русского художника Николая Петровича Богданова-Бельского в 1895 году [23] (рисунок 1). Данная картина сейчас украшает один из залов всемирно известной Третьяковской галереи.

Рисунок 1 - Картина «Устный счет»

§2. Основные цели и задачи обучения теме «Прогрессии» в углубленном курсе алгебры основной школы

Современное обучение математике ставит перед собой, как одну из важнейших задач, развитие математического мышления. Данный момент особенно актуален в классах с углубленным изучением математики. Также стоит отметить, что получаемые знания должны быть основой для самостоятельного приобретения новых знаний и развития новых соответствующих умений учащихся. Таким образом, учитель также обязан осуществлять поиск средств совершенствования обучения математике в специализированных классах математического профиля, направленных на развитие творческих способностей учащихся. Это особенно важно, если учитывать тот факт, что многие учащиеся не будут в последующем профессионально заниматься математикой.

На основе изучения трудов Ю. М. Колягина [10] можно сделать вывод о том, что преподавание в классах с углубленным изучением математики следует строить в соответствии со следующими принципами:

1. Изучение математики профильного (углубленного) уровня должно давать учащимся глубокие математические знания и достаточно широкое математическое развитие. При этом необходимо обеспечить соответствующие условия для обучения математике с современной точки зрения, чтобы основные вопросы действующей программы и полезные традиции преподавания органично сочетались.

2. Выпускники математических классов должны обладать прочно закрепленными знаниями и умениями, полностью отвечающими требованиям, предъявляемым к математической подготовке учащихся. Необходимо не упускать важный момент - математическое развитие учащихся должно давать им возможность осуществлять творческий подход к процессу обучения и изучения математики. Ученикам необходимо научиться самостоятельной работе с учебной математической литературой и обладать к концу обучения устойчивым интересом к предметам естественно-математического цикла.

3. Необходимо учесть возможность расширения программы, органично связывая его с основным курсом. Также следует соответствовать имеющимся (или возникающим) интересам учащихся и их познавательным возможностям.

4. В процессе преподавания в таких классах перед педагогом открываются большие возможности в осуществлении индивидуального подхода к обучению, в использовании школьниками эвристического метода изучения и проблемного подхода к обучению, то есть, широкая возможность оптимальной активизации обучения.

Немного разобравшись с основными принципами преподавания в классах с углубленным изучением математики, перейдем непосредственно к целям и задачам обучения теме «Прогрессии» в курсе алгебры основной школы.

Знакомство учащихся с прогрессиями начинается в курсе алгебры 9 класса в теме «Арифметическая и геометрическая прогрессии».

По итогам изучения темы «Прогрессии» каждый учащийся должен знать все ключевые понятия, определения и свойства, входящие, к примеру, в учебник углубленного уровня алгебры Ю. Н. Макарычева, согласно содержанию [13, С.397].

Должен уметь:

- Приводить примеры числовых последовательностей и прогрессий.
- Решать простейшие задачи на нахождение члена прогрессии, суммы n-первых членов, разности, знаменателя и т. д. с использованием изученных формул.
- Применять изученные свойства возрастания, убывания, конечности и бесконечности числовых последовательностей.
- Выводить и преобразовывать все изученные формулы.
- Решать нестандартные и прикладные задачи.

§3. Сравнительный анализ содержания темы «Прогрессии» в учебниках алгебры базового и углубленного уровней изучения математики

Рассматривая ряд учебников базового уровня из курса алгебры основной школы по теме «Прогрессии», можно заметить, что данная тема изучается, как правило, в конце учебного материала 9-го класса. Числовые последовательности в учебниках алгебры 9 класса Ю. Н. Макарычева [13], Мордковича А. Г. [16], Муравина Г. К. [18], Дорофеева Г. В. [7] начинают изучать в четвертой главе. А вот содержание и построение изучения самого материала о прогрессиях немного различаются.

Так, например, первый параграф во всех указанных выше учебниках называется «Числовые последовательности», а по содержанию А. Г. Макарычева [13] - «Арифметическая прогрессия». Тем не менее, во всех четырех учебниках на начальном этапе изучения темы «Прогрессии» вводится определение числовой последовательности. Далее начинаются расхождения по содержанию учебного материала.

Кроме того, само определение числовой последовательности в рассматриваемых учебниках задается по-разному.

К примеру, Мордкович А. Г. [16] дает определение числовой последовательности как функции: «Определение 1. Функцию вида y=f (x), где x∈N, называют функцией натурального аргумента или числовой последовательностью и обозначают *y=f(n)* или $y_1, y_2, y_3, \ldots, y_n, \ldots$.» [16, С. 139]. Г. В. Дорофеев [7] вводит определение, рассматривая старинную задачу Леонардо Фибоначчи: «Пара кроликов, начиная с двухмесячного возраста, ежемесячно производит новую пару. Сколько всего пар кроликов будет в декабре, если первая пара новорожденных кроликов появилась в январе (при условии, что все кролики останутся живы)?», получая при решении числа Фибоначчи, которые являются примером числовых последовательностей [7, С. 200]. У Г. К. Муравина [18] и Ю. Н. Макарычева [13] определение же вводится сразу, при последовательном выписывании чисел, получая последовательность натуральных и четных чисел соответственно.

Подробнее остановимся на изложении темы «Прогрессии» в учебнике алгебры для 9-го класса Мордковича А. Г. [16] После введения определения числовой последовательности рассматриваются аналитическое, словесное и рекуррентное задание последовательности, используя подборки примеров и задач. При рассмотрении рекуррентного задания последовательности учащиеся знакомятся с числами Фибоначчи, арифметической и геометрической прогрессии. Подробнее прогрессии изучаются в последующих двух параграфах. Последним опорным определением четвертой главы параграфа «Числовые последовательности» данного учебника являются монотонные последовательности (возрастающие и убывающие).

В следующем параграфе уже непосредственно вводится определение арифметической прогрессии и разности, приводится ряд примеров арифметической прогрессии. В этом же параграфе во втором пункте, исходя из рекуррентного способа задания арифметической прогрессии, выводится «формула n-го члена арифметической прогрессии», также подробно разбирается несколько примеров. Два последних пункта данного параграфа – «формула суммы членов конечной арифметической прогрессии» и «характеристическое свойство арифметической прогрессии».

Изучение геометрической прогрессии строится точно по тому же плану, как и в параграфе об арифметической прогрессии для удобства читателя, как отмечает автор учебника. То есть, сразу вводится определение геометрической прогрессии рекуррентным способом задания с приведением ряда примеров. Затем на основе определения выводятся «формулы n-го члена геометрической прогрессии и суммы членов конечной геометрической прогрессии», а в конце - рассматривается «характеристическое свойство геометрической прогрессии». Но, кроме всего, в параграфе «Геометрические прогрессии» добавляется пункт «прогрессии и банковские расчеты».

По итогам изучения главы 4. «Прогрессии» выводятся основные результаты: учащиеся познакомились с новой математической моделью - числовой последовательностью, узнали новые термины математического языка, были введены новые обозначения, обсуждены три способа задания числовой последовательности, сформулированы и обоснованы свойства арифметической и геометрической профессий.

В учебнике алгебры для 9-го класса Г. В. Дорофеева [7] три способа задания числовой последовательности подробно не обсуждаются. В самом начале, при введении определения числовой последовательности, заходит речь о рекуррентной формуле выражения любого члена последовательности и формуле n-го члена последовательности. Затем сразу в следующем пункте вводится определение арифметической прогрессии, при рассмотрении задачи: «На турбазе можно взять напрокат лодку. Стоимость проката определяется следующим образом: за первые сутки надо заплатить 100р., а за каждые следующие (полные или неполные) - 50р. Сколько рублей надо заплатить за лодку, взятую на один день, на два дня, на три дня и т. д.?» [7, С. 209] При решении данной задачи также возникают понятия разности, возрастающей и убывающей последовательностей, выводится «формула n-го члена арифметической прогрессии» и подробно рассматривается ряд соответствующих изложенному материалу примеров.

Далее отдельным пунктом изложен материал о сумме первых n членов арифметической прогрессии, основываясь на известную историю о знаменитом немецком математике К. Гауссе (1777-1855) [7].

Определения геометрической прогрессии и знаменателя геометрической прогрессии вводятся с помощью примеров и фактов из реальной жизни - телевизионных игр. Аналогично пункту об арифметической прогрессии, в этой части учебного материала выводится «формула n-го члена геометрической прогрессии».

Нахождение суммы первых n членов геометрической прогрессии происходит через изучение легенды об индийском принце и изобретателе шахмат, что позволяет не только обучить школьников, но и заинтересовать их в своем предмете.

Структура построения учебного материала о прогрессиях в данном учебнике существенно отличается от предыдущего. На мой взгляд, такой подход к изучению темы позволит учащимся глубже изучить материал и мыслить шире. К тому же, здесь есть дополнительный материал для тех, кому интересно, о простых и сложных процентах, сумма квадратов первых n натуральных чисел и треугольник Паскаля.

Завершается изучение данной темы дополнительными заданиями к главе 4, вопросами для повторения, заданиями для самопроверки и тестом к главе 4, что позволит более качественно оценить уровень полученных знаний учащихся на выходе.

Как уже отмечалось выше, изучение темы «Прогрессии» в учебнике алгебры 9класса Макарычева Ю. Н. [13] начинается с параграфа «Арифметическая прогрессия», но, тем не менее, сначала также вводятся ключевые понятия – «последовательность», «бесконечная последовательность», «конечная последовательность», «формула n-го члена последовательности», «рекуррентный способ задания последовательности», «числа Фибоначчи».

После подборки задач на данные понятия дается определение арифметической прогрессии, её разности и «формула n-го члена арифметической прогрессии». Далее, при рассмотрении группы примеров отмечается 4 важных свойства арифметической прогрессии, затем отдельным пунктом идет изучение формулы суммы первых n членов арифметической прогрессии.

Изложение материала о геометрических прогрессиях построено аналогично материалу об арифметических прогрессиях, то есть, сначала вводится определение геометрической прогрессии, ее знаменателя и формула n-го члена, затем формула суммы первых n членов геометрической прогрессии и, для тех, кто хочет знать больше - метод математической индукции.

В завершении изучения темы «Прогрессии» автор приводит дополнительные упражнения к главе 4.

Следующим рассмотрим учебник Г. К. Муравина «Алгебра 9-го класса» [18]. Здесь изучение темы «Прогрессии» начинается, как уже отмечалось, с задания определения числовой последовательности. Постепенно и достаточно простым языком объясняется описательный способ задания последовательности, вводятся понятия возрастающей и убывающей последовательности с примерами, рекуррентные последовательности.

Материал об арифметической и геометрической прогрессиях изложен в одном параграфе. Определение прогрессий, разности и знаменателя дается в общем пункте «Определение прогрессий» поочередно с приведением примеров. Формулы n-го члена прогрессий, также как и определения самих прогрессий, выводятся в общем пункте «Формулы n-го члена прогрессии» при решении задачи: «Витя решил сделать садовую лестницу с таким расчетом, чтобы каждая нижняя ступенька имела длину 50 см, а каждая из следующих 12 ступенек была на 2 см короче предыдущей. Какой длины должна быть верхняя ступенька?» [18, С. 170]

Последний изучаемый материал в этой главе - сумма членов прогрессий.

Особенность изложения материала данного учебника в том, что арифметическая и геометрическая прогрессии рассматриваются совместно, в отличие от учебников А. Г. Мордковича [16], Г. В. Дорофеева [7] и Ю. Н. Макарычева [13, 14].

Итак, мы рассмотрели четыре учебника различных авторов базового уровня по алгебре за 9 класс. Теперь давайте разберемся в специфике преподнесения теоретического материала по теме «Прогрессии» в учебниках для углубленного (профильного) изучения алгебры.

В первую очередь хотелось бы остановиться на учебнике А. Г. Мордковича [16] профильного уровня.

Как и в учебнике базового уровня, данная тема изучается в главе 4 «Прогрессии», но содержит в себе 5 параграфов. То есть, дополнительными параграфами являются: §22. «Свойства числовых последовательностей» и §25. «Метод математической индукции» [16,С. 254-255].

Дело в том, что в учебнике базового уровня в параграфе «Числовая последовательность» монотонные последовательности рассматриваются отдельным пунктом. В учебнике же для углубленного изучения алгебры данная тема рассматривается шире и для нее выделен целый параграф, который включает в себя следующие основные определения: последовательность ограниченная сверху; верхняя граница последовательности; последовательность ограниченная снизу; нижняя граница последовательности; ограниченная последовательность; монотонные последовательности (возрастающие и убывающие) [16, С. 171-174].

Параграфы «Арифметическая прогрессия» в данных учебниках по содержанию идентичны, а вот в параграфе «Геометрическая прогрессия» последние рассматриваемые пункты отличаются. В базовом уровне это «Прогрессии и банковские расчеты», а в профильном - «Разные задачи на прогрессии».

Параграф «Метод математической индукции» содержится только в учебнике профильного уровня данного автора. Здесь подробно разбирается дедуктивный и индуктивный методы математического исследования, полная и неполная индукция, метод математической индукции и приводятся соответствующие примеры.

Итак, в учебнике А. Г. Мордковича [16] профильного уровня по теме «Прогрессии» основной материал изложен аналогично учебнику базового уровня. Однако при углубленном изучении темы «Прогрессии» по данному учебнику намного шире рассматриваются свойства числовых последовательностей. А также изучается такое важно понятие как метод математической индукции.

В заключении проведем сравнительный анализ учебников Ю. Н. Макарычева [13, 14] базового и углубленного уровней.

Как и во всех рассмотренных выше учебниках, здесь тема «Прогрессии» изучается в 4 главе. По содержанию изложенного материала учебники довольно сильно отличаются.

Во-первых, учебник углубленного уровня содержит такие дополнительные параграфы как «Свойства последовательностей» и «Сходящиеся последовательности». В учебнике базового уровня их нет вовсе. Далее, при углубленном изучении темы определение «числовая последовательность» дается непосредственно перед изучением свойств последовательностей. При базовом изучении – перед введением определения арифметической прогрессии. Соответственно, в учебнике базового уровня свойства числовых последовательностей не рассматриваются вообще.

Изложение материала отличается даже в параграфах с одинаковыми названиями «Арифметическая прогрессия» или «Геометрическая прогрессия». Например, при введении определения «арифметическая прогрессия» рассматриваются разные последовательности. В учебнике базового уровня: «последовательность натуральных чисел, которые при делении на 4 дают в остатке 1: 1; 5; 9; 13; 17; 21 … » [14, С. 148]. А в учебнике углубленного уровня: «последовательность натуральных чисел, кратных 6, взятых в порядке возрастания: 6, 12, 18, … , 6n, … .» [13, С. 170]

В параграфе 13 «Сходящиеся последовательности» (углубленный уровень) автором рассматриваются такие понятия, как: предел последовательности; сходящаяся и расходящаяся последовательность; свойства сходящихся последовательностей; сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии. В учебнике базового уровня данные понятия не рассматриваются.

Подводя итог, мы видим, что при изучении темы «Прогрессии» по учебникам базового уровня вне зависимости от его автора, совсем не рассматривается довольно большой объем материала. Но, учитывая, что в среднем на тему «Прогрессии» при базовом изучении математики отводится 15-17 часов, становится понятно, почему учитель не может в полном объеме преподнести такой обширный материал. При углубленном же изучении на ту же тему отводится в среднем 27 часов [2, С. 32]. Очевидно, что при данных временных ресурсах учащиеся могут усвоить намного больше объема информации.

На основе анализа содержания теоретического материала учебников алгебры 9-го класса можно сделать следующие выводы:

1. Понятия арифметической и геометрической прогрессий основываются на понятии числовой последовательности.

2. Характеристическое свойство арифметической (геометрической) прогрессии отражает связь между тремя последовательными членами арифметической (геометрической) прогрессии.

3. В теоретическом материале практически всех учебников четко выделяются два блока: 1) арифметическая прогрессия, 2) геометрическая прогрессия.

4. При введении понятий и теорем данной темы прослеживается аналогия между арифметической и геометрической прогрессиями. Поэтому при изучении темы можно рассмотреть арифметическую и геометрическую прогрессии на одном уроке параллельно. Учителю рекомендуется наглядно систематизировать теоретические сведения темы «Прогрессии» для учащихся на примере таблицы 2.

Для наглядности результаты данного сравнительного анализа представлены в таблицах 1 и 3.

Таблица 3

Анализ содержания теоретического материала по теме «Прогрессии» в учебниках алгебры 9 класса Г. В. Дорофеева [7] и Г. К. Муравина [18]

Авторы	**Содержание учебного материала**
Г. В. Дорофеев, С. Б. Суворова и др. [7]	«Числовые последовательности. Арифметическая прогрессия. Сумма первых n членов арифметической прогрессии. Геометрическая прогрессия. Сумма первых n членов геометрической прогрессии. Простые и сложные проценты. Сумма квадратов первых n натуральных чисел. Треугольник Паскаля».
Г. К Муравин, К. С. Муравин, О. В. Муравина [18]	«Числовые последовательности. Последовательности и функции. Рекуррентные последовательности. Арифметическая и геометрическая прогрессии. Определение прогрессий. Формула n-го члена прогрессии. Сумма членов прогрессий. Сумма первых n членов прогрессии. Сумма бесконечной геометрической прогрессии при $\|q\|<1$».

Таблица 1

Систематизация теоретического материала по теме «Прогрессии»

<table>
<tr><th>Арифметическая прогрессия</th><th colspan="2">Формулировка определения</th><th>Геометрическая прогрессия</th></tr>
<tr><td colspan="4">Определение.
Числовая последовательность</td></tr>
<tr><td colspan="2">$a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$</td><td colspan="2">$b_1, b_2, b_3, \ldots, b_n, \ldots$</td></tr>
<tr><td colspan="4">Называется</td></tr>
<tr><td colspan="2">арифметической</td><td colspan="2">геометрической</td></tr>
<tr><td colspan="4">прогрессией,
если для всех натуральных n выполняется равенство:</td></tr>
<tr><td colspan="2">$a_{n+1}=a_n+d,$</td><td colspan="2">$b_{n+1}=b_n\cdot q,$</td></tr>
<tr><td colspan="4">где</td></tr>
<tr><td colspan="2">d- некоторое число
$d= a_{n+1}-a_n$ – разность</td><td colspan="2">q-некоторое число
$q= b_{n+1}/b_n, q\neq 0, b_n\neq 0$ – знаменатель.</td></tr>
<tr><td colspan="4">Свойство.
Каждый член</td></tr>
<tr><td colspan="2">арифметической</td><td colspan="2">геометрической</td></tr>
<tr><td colspan="4">прогрессии, начиная со второго, равен среднему</td></tr>
<tr><td colspan="2">арифметическому</td><td colspan="2">геометрическому</td></tr>
<tr><td colspan="4">двух соседних с ним членов</td></tr>
<tr><td colspan="2">$a_n = \frac{a_{n-1}+a_{n+1}}{2}, n>1$</td><td colspan="2">$b_n = \sqrt{b_{n-1}\cdot b_{n+1}}, b_i>0, n>1$</td></tr>
<tr><td colspan="4">Характеристическое свойство.
Числовая последовательность</td></tr>
<tr><td colspan="2">$a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$</td><td colspan="2">$b_1, b_2, b_3, \ldots, b_n, \ldots$</td></tr>
<tr><td colspan="4">является</td></tr>
<tr><td colspan="2">арифметической</td><td colspan="2">геометрической</td></tr>
<tr><td colspan="4">прогрессией тогда и только тогда, когда</td></tr>
<tr><td colspan="2">$a_n = \frac{a_{n-1}+a_{n+1}}{2}, n>1$</td><td colspan="2">$b_n = \sqrt{b_{n-1}\cdot b_{n+1}}, b_i>0, n>1$</td></tr>
<tr><td colspan="4">Формула n-го члена</td></tr>
<tr><td colspan="2">арифметической</td><td colspan="2">геометрической</td></tr>
<tr><td colspan="4">прогрессии</td></tr>
<tr><td colspan="2">$a_n=a_1+(n-1)d$</td><td colspan="2">$b_n=b_1\cdot q^{n-1}$</td></tr>
</table>

Таблица 2

Анализ содержания теоретического материала по теме «Прогрессии» в учебниках алгебры 9 класса Ю. Н. Макарычева и А. Г. Мордковича

Авторы	Содержание учебного материала
Ю. Н. Макарычев, Н. Г. Миндюк, К. И. Нешков, С. Б. Суворова [14]	«Последовательности. Определение арифметической прогрессии. Формула n-го члена арифметической прогрессии. Формула суммы первых n членов арифметической прогрессии. Определение геометрической прогрессии. Формула n-го члена геометрической прогрессии. Формула суммы первых n членов геометрической прогрессии. Метод математической индукции» [14].
Ю. Н. Макарычев, Н. Г. Миндюк, К. И. Нешков, И. Е. Феоктистов [13] (углубленный уровень)	«Числовые последовательности. Способы задания последовательностей. Возрастающие и убывающие последовательности. Ограниченные и неограниченные последовательности. Метод математической индукции». «Арифметическая прогрессия. Формула n-го члена арифметической прогрессии. Сумма первых n членов арифметической прогрессии. Геометрическая прогрессия. Формула n-го члена геометрической прогрессии. Сумма первых n членов геометрической прогрессии. Предел последовательности. Сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии» [13].
А. Г. Мордкович, П. В. Семенов [16]	«Определение числовой последовательности. Аналитическое задание последовательности. Словесное задание последовательности. Рекуррентное задание последовательности. Монотонные последовательности. Определение арифметической прогрессии. Формула n-го члена арифметической прогрессии. Формула суммы членов конечной арифметической прогрессии. Характеристическое свойство арифметической прогрессии. Определение геометрической прогрессии. Формула n-го члена геометрической прогрессии. Формула суммы членов конечной геометрической прогрессии. Характеристическое свойство геометрической прогрессии. Прогрессии и банковские расчеты» [16].
А. Г. Мордкович, Н. П. Николаев [17] (углубленный уровень)	«Определение числовой последовательности. Аналитическое задание последовательности. Словесное задание последовательности. Рекуррентное задание последовательности. Свойства числовых последовательностей. Определение арифметической прогрессии. Формула n-го члена арифметической прогрессии. Формула суммы членов конечной арифметической прогрессии. Характеристическое свойство арифметической прогрессии. Определение геометрической прогрессии. Формула n-го члена геометрической прогрессии. Формула суммы членов конечной геометрической прогрессии. Характеристическое свойство геометрической прогрессии. Разные задачи на прогрессии. Дедукция и индукция. Полная и неполная индукция. Метод математической индукции» [17].

§4. Анализ задачного материала темы «Прогрессии» для классов с углубленным изучением математики

Следует отметить, что учебный комплект А. Г. Мордковича [17] по алгебре для 9 класса разделен на две части - учебник и задачник. При этом для углубленного изучения автором задачника к данному учебнику является Л. И. Звавич [9].

В учебнике Ю. Н. Макарычева [13] подборка задач располагается сразу после изложения теоретического материала в параграфах. В учебниках обоих авторов весь задачный материал предоставлен согласно тому же логико-математическому изложению, что и теория. Порядок изложения указан в §3.

Всё многообразие упражнений по теме «Прогрессии» в учебнике алгебры 9 класса углубленного уровня Ю. Н. Макарычева [13] и задачника Л. И. Звавича [9] условно можно разделить на следующие типы задач:

1. Задачи на понимание понятия числовая последовательность, а также использование терминов и символики.
2. Задачи на нахождение члена последовательности.
3. Задачи на составление формулы n-го члена последовательности по условию.
4. Исследование последовательности на монотонность.
5. Исследование последовательности на ограниченность.
6. Задачи на нахождение суммы n-первых членов прогрессии.
7. Задания с параметром.
8. Задачи на доказательство методом математической индукции.
9. Задачи на вычисление предела последовательности.
10. Исследовать последовательность на сходимость.
11. Задачи на нахождение количества членов последовательности.
12. Задачи на комбинацию арифметической и геометрической прогрессий.
13. Решение уравнений.

Таблица 4

Типы задач по теме «Прогрессии» в учебниках алгебры 9 класса углубленного уровня Ю. Н. Макарычева [13] и Л. И. Звавича [9]

Авторы / **Типы задач**	**Ю. Н. Макарычев [13]**	**Л. И. Звавич [9]**
1.Задачи на понимание основных понятий, а также использование терминов и символики.	№641, 645-651, 658, 659, 713, 715-724,	№21.01-03, 21.09, 21.18, 21.19, 21.24-36, 21.38-47, 23.04-07.
2.Задачи на нахождение члена последовательности.	№640-644, 656, 657, 664, 725-728,	№21.05-09, 21.62, 23.23-26, 21.37, 23.41, 24.05-06, 24.17, 24.19-21
3.Задачи на составление формулы n-го члена последовательности по условию.	№652-655, 738,	№21.04, 21.10-16, 21.18-27, 23.01-03, 23.09-11, 24.01-03,
4.Исследование последовательности на монотонность.	№663, 665-670, 673, 674	№22.01-10.
5.Исследование последовательности на ограниченность.	№677-686.	№22.11-31
6.Задачи на нахождение суммы n-первых членов прогрессии.	№736, 742, 745, 746, 748, 788, 789, 791, 794, 795, 799, 801-804.	№24.17, 21.53-562, 23.08, 23.12-15, 23.28-29,23.40, 23.46-48,23.58, 23.71-73, 23.79, 23.89-91, 23.104-105,24.15, 24.39, 24.63, 24.66.
7.Задания с параметром.	№671, 672, 729, 768, 831.	№21.48-50, 23.109-110, 24.07-09, 24.36-38
8.Задачи на вычисление предела последовательности.	№808, 809, 811,812-822.	-
9.Исследовать последовательность на сходимость.	№810, 815-817.	-
10.Задачи на нахождение количества членов последовательности.	№659, 747, 755.	№23.08, 23.37-39,
11.Задачи на комбинацию арифметической и геометрической прогрессий.	-	№24.50-81
12.Решение уравнений.	№743, 744, 854.	№23.74-78, 24.78, 24.64
13.Задачи на доказательство методом математической индукции.	№689-708, 790.	№25.01-25.29.
14.Задачи на нахождение разности (знаменателя) арифметической (геометрической) прогрессии.	№750, 752-754, 797,803.	№23.30, 23.50, 23.56-57, 24.17,

14. Задачи на нахождение разности (знаменателя) арифметической (геометрической) прогрессии.

При этом типы заданий 9 и 10 содержатся только в учебнике Ю. Н.

Макарычева [13], а типы заданий 12 и 13 - в учебнике Л. И. Звавича [9]. Все остальные типы заданий присутствуют в учебниках обоих авторов.

Приведем подборку упражнений из учебников по каждому из указанных выше типов задач в таблице 4. Ответы и указания к решению типовых задач из таблицы 4 представлены в Приложении.

Выводы по первой главе

1. Изучены исторические аспекты возникновения понятий арифметической и геометрической прогрессий. Установлено, что такое математическое явление, как прогрессии известны так давно, что нельзя точно сказать, кто их открыл. Но задачи на нахождение суммы членов последовательности или на нахождение некоторых членов последовательности были широко распространены в древности и встречались в разных уголках мира: Древнем Египте, Древней Руси, Китае, Индии и т. д.

2. Выявлены основные цели и задачи обучения теме «Прогрессии» в углубленном курсе математики основной школы. Определено, что изучение числовых последовательностей играет важную роль не только в школьном курсе алгебры, но и в дальнейшем обучении математике в высших учебных заведениях. Данная тема позволяет определить такие основные понятия математического анализа, как бесконечность, предел и непрерывность. Теория рядов полностью базируется на последовательностях.

3. Выполнен анализ содержания теоретического и задачного материала по теме «Прогрессии» в учебниках базового и углубленного уровней алгебры основной школы. Определено, что данный материал изучается непосредственно в 9-ом классе. Понятия арифметической и геометрической прогрессий основываются на понятии числовой последовательности. Характеристическое свойство арифметической (геометрической) прогрессии отражает связь между тремя последовательными членами арифметической (геометрической) прогрессии.

При введении понятий и теорем данной темы прослеживается аналогия между арифметической и геометрической прогрессиями. Выделены основные типы задач по теме «Прогрессии», приведены примеры каждого типа задач.

ГЛАВА II. МЕТОДИЧЕСКИЕ АСПЕКТЫ ОБУЧЕНИЯ ПРОГРЕССИЯМ В УГЛУБЛЕННОМ КУРСЕ АЛГЕБРЫ ОСНОВНОЙ ШКОЛЫ

§5. Методические рекомендации по обучению учащихся решению задач по теме «Прогрессии» в углубленном курсе математики

Отметим еще раз, что понятие числовой последовательности и ее частный случай - понятие прогрессии рассматриваются при обучении алгебре в 9 классе.

Основная цель этой темы - дать определение арифметической и геометрической прогрессиям как числовым последовательностям особого вида.

Анализ учебников алгебры 9 класса показал, что учебный материал по теме «Прогрессии» наиболее полно представлен в учебнике А. Г. Мордковича [16].

Тема «Прогрессии» считать тупиковой или обособленной, то есть, она не имеет как таковой связи с остальным материалом алгебры основной школы. Скорее данную тему можно отнести к математическому анализу, и было бы логичнее начинать с нее изучение начал математического анализа в старшей школе.

Однако в стандарте математического образования тема «Прогрессии» представлена в рамках основной школы, и изучение ее является необходимым. Уровень обязательной подготовки характеризует следующий минимум, который должны достичь все учащиеся при изучении темы

«Прогрессии»: «правильно употреблять буквенную символику; составлять несложные буквенные выражения и формулы; осуществлять в формулах числовые подстановки и выполнять соответствующие вычисления. Изучение программного материала дает возможность учащимся познакомиться с арифметической и геометрической прогрессиями, применять формулы n-го члена и суммы n первых членов при решении задач» [24, С. 1].

Так как в 9 классе основной линией является функциональная линия, то и понятие последовательности в учебнике А. Г. Мордковича [16] рассматривается как функция, но в непривычном для учащихся понимании: как функция натурального аргумента.

В соответствии с данными целями изучения темы «Прогрессии» отметим, что учителю следует тщательно подбирать материал для обучения учащихся, используя дополнительные источники литературы, кроме основного базового учебника. Актуально будет и включение в учебный процесс исторических сведений о прогрессиях, необычных фактов и задач, например из книги Л. П. Шибасова «От единицы до бесконечности» [23].

В начале изучения темы необходимо объяснить смысл следующих понятий: «последовательность» [13, 14, 16], «n-й член последовательности» [13, 14, 16], выработать умение использовать индексные обозначения.

Тут же уместно показать различные способы задания последовательности, используя задания типа №560,565,568,569 учебника «Алгебра, 9» Ю.Н. Макарычева [14].

«№560. Выпишите несколько первых членов последовательности натуральных чисел, кратных 3. Укажите ее первый, пятый, десятый, сотый и n-й члены» [14, С. 146].

Формула n-го члена заданной последовательности имеет вид: $a_n = 3n$, где n – натуральные числа. Т.о., первый, пятый и десятый члены равны: $a_1 = 3$, $a_5 = 15$, $a_{10} = 30$.

Ответ: 3, 15, 30, $3n$.

«№565 (а). Найдите первые шесть членов последовательности, заданной формулой *n*-го члена: $x_n = 2n - 1$»[14, С. 147].

По формуле n-го члена находим первые шесть членов заданной последовательности: $x_1 = 1$, $x_2 = 3$, $x_3 = 5$, $x_4 = 7$, $x_5 = 9$, $x_6 = 11$.

Ответ: 1, 3, 5, 7, 9, 11.

«№568 (а). Вычислите второй, третий, четвертый и пятый члены последовательности (b_n), если известно, что первый член равен 10, а каждый следующий на 3 больше предыдущего, т.е. $b_1 = 10$ и $b_{n+1} = b_n + 3$»[14, С.147].

Исходя из условий задачи, находим: $b_2 = 13$, $b_3 = 16$, $b_4 = 19$, $b_5 = 22$.

Ответ: 13, 16, 19, 22.

«№569 (а). Выпишите первые пять членов последовательности (a_n), если $a_1 = 1$, $a_{n+1} = a_n + 1$»[14, С. 147].

По заданной формуле n-го члена данной последовательности находим: $a_2 = 2$, $a_3 = 3$, $a_4 = 4$, $a_5 = 5$.

Ответ: 1, 2, 3, 4, 5.

Закрепление определения арифметической прогрессии осуществляется при выводе и использовании формулы *n*-го члена для решения как прямых, так и обратных задач [3]. При выводе формул и различных доказательствах уместно использовать метод, описанный Тедом Сандстромом в своей работе «Mathematical Reasoning: Writing and Proof» [31], который заключается в выяснении идей решений или доказательств через вопросы. Данный метод использовался еще в древности, так называемый Сократовский метод, как видим, он признан эффективным и современными учеными и мыслителями [31].

Покажем применение данного метода при решении задачи.

«№ 591 (а). Содержит ли арифметическая прогрессия 2; 9; ... число: а)156?» [14, С.153].

В первую очередь, при обсуждении способов решения задачи необходимо выяснить у учащихся идею решения, которая позволит составить план ответа на вопрос задачи.

Для этого учитель может непосредственно применить озвученный выше «Сократовский метод» - задать учащимся следующие вопросы:

- Как математическим языком сказать, что последовательность содержит (или не содержит) какое-то число?

- Чем определяется место члена последовательности?

- Если нам удастся определить номер числа 156 в арифметической прогрессии, то как мы ответим на вопрос задачи?

- Что известно об арифметической прогрессии и достаточно ли этих данных для ответа на этот вопрос?

- Что позволит найти номер члена прогрессии?

Далее составляется план решения и выписывается решение:

1. Найдем для данной арифметической прогрессии разность d по формуле a_2-a_1=d, то есть d=9-2=7.

2. Известно, что формула n-го члена арифметической прогрессии записывается так: a_n= a_1+d(n-1).

3. Подставим в данную формулу вместо a_1 и d известные значения, а вместо a_n данное число 156. Тогда получим следующее уравнение: 156=2+7(n-1).

4. Решим полученное уравнение: 156=2+7n-7 => 7n=161 => n=23.

5. Так как n = 23 ϵ N, то отсюда следует, что данная арифметическая прогрессия содержит число 156, оно будет 23-м членом этой прогрессии.

Ответ: Да, содержит.

Остановимся на выводе формулы любого члена прогрессии. Обычно вывод формул любого члена арифметической и геометрической прогрессий не вызывает особых затруднений у учащихся. Поэтому в классе работу по выводу формул общего члена арифметической и геометрической прогрессий можно провести на уроке по введению и самостоятельному приобретению новых знаний «Сравнение арифметической и геометрической прогрессий» самостоятельно по вариантам, а затем сделать вывод и записать формулы $a_n = a_1 + d(n-1)$ и $b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$ [1].

На этом же уроке учитель подводит учащихся к характеристическим свойствам прогрессий с помощью заданий, предлагаемых ученикам последовательно.

1) Найти среднее арифметическое (геометрическое) чисел 2 и 8. Записать найденное число с данными в порядке возрастания. Образуют ли эти числа арифметическую (геометрическую) прогрессию?

2) Справедлива ли эта зависимость для трех последовательных членов рассматриваемых последовательностей?

а) $a_2 = \frac{a_1 + a_3}{2}$ (для арифметической прогрессии);

б) $b_2^2 = b_1 \cdot b_3$ (для геометрической прогрессии).

3) Доказать, что для членов прогрессий справедлива закономерность:

а) $a_{n+1} = \frac{a_n + a_{n+2}}{2}$ (для арифметической прогрессии);

б) $\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{b_{n+2}}{b_{n+1}}$, $b_{n+1}^2 = b_n \cdot b_{n+2}$ (для геометрической прогрессии) [8].

Что касается вывода формулы суммы первых n членов арифметической прогрессии в учебнике «Алгебра 9класс» Ю. Н. Макарычева, то у учащихся не должно возникнуть затруднений. Но не маловажным фактором остается их заинтересованность. Для того чтобы вызвать интерес у учащихся, можно рассказать им предание «о маленьком Карле Гауссе, будущем немецком короле математики, решившим в десятилетнем возрасте очень быстро задачу о нахождении суммы первых ста натуральных чисел» [4]. А затем можно поставить перед учениками проблему: «Как смог найти сумму ста натуральных чисел десятилетний мальчик?» [4].

Далее следует отметить, что с помощью рассуждений, аналогичных проведенным при решении выше указанной задачи, можно найти сумму первых членов любой арифметической прогрессии. После этого необходимо приступить к непосредственному выводу формулы суммы первых n членов арифметической прогрессии.

Для сильных учеников класса эту работу можно дать в форме задачи, а затем обсудить полученные результаты в виде двух вариантов формулы и сделать вывод.

Для закрепления и углубления изученного материала учитель может предоставить учащимся подборку нестандартных задач из коллекции нестандартных задач «на прогрессии» Н. А. Петровской [19]. Или подготовить ряд содержательных лабораторных и практических работ, согласно некоторым требованиям. К примеру, за основу при разработке таких работ можно взять методическое пособие Н. В. Кузяевой [11], Е. И. Лященко [12] или Г. И. Саранцева [22].

Итак, обучение теме «Прогрессии» и «Числовые последовательности» следует начинать с исторической справки, подготовленной заранее учителем или учащимися, чтобы заинтересовать их и привлечь внимание к данной теме. Например, учащиеся могут заранее подготовить доклад или реферат о числах Фибоначчи. Для этого учителю следует сначала подготовить список литературы. Достаточно интересно и необычно изложен материал в книгах Кона [26], Иры Гессель [27], Сиглера [29] и Сойфера [30]. Также интересным фактом является существование Ассоциации Фибоначчи, которая основана в 1963 году [32], на эту тему учащиеся также могут подготовить интересное сообщение для расширения кругозора.

Далее постепенно следует вводить основные определения по теме в соответствии с календарным планом и содержанием учебника алгебры 9 класса Ю. Н. Макарычева [13]:

«- числовая последовательность;

- способы задания числовых последовательностей;

- монотонные последовательности;

- ограниченные и неограниченные последовательности;

- метод математической индукции;

- арифметическая прогрессия;

- формула n-го члена арифметической прогрессии;

- формула суммы членов конечной арифметической прогрессии;

- характеристическое свойство арифметической прогрессии;

- геометрическая прогрессия;

- формула n-го члена геометрической прогрессии;

- формула суммы членов конечной геометрической прогрессии;

- характеристическое свойство геометрической прогрессии;

- предел последовательности;

- сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии» [13, С. 397].

Таким образом, нами установлено, что данная последовательность изучения ключевых понятий темы «Прогрессии» позволит учащимся в полном объеме овладеть данным учебным материалом.

§6. Анализ задач ОГЭ по теме исследования

Одной из важных ступеней образования является успешная сдача ОГЭ по математике учащимися девятых классов, к которому учитель математики готовит их с 5 по 9 классы. Задачи по теме «Прогрессии» также как и многие важные темы из курса алгебры основной школы, входит в блок заданий ОГЭ модуля «Алгебра». Для того чтобы обучающийся усвоил определенные действия, - необходимо их выполнить несколько раз.

На основе анализа открытого банка заданий http://www.fipi.ru [25] нами составлен набор заданий по теме "Арифметическая прогрессия", в котором задачи распределены по типам. Приведем примеры и решение заданий каждого типа:

I. Блок

1. «Выписаны четыре члена арифметической прогрессии: …; − 9; x; − 13; − 15; … Найдите x» [25].

Решение: найдем разность данной прогрессии d=-15-(-13)=-15+13=-2. По определению арифметической прогрессии получаем: x=-9-2=-11.

Ответ. -11.

2. «Выписаны четыре члена арифметической прогрессии: …; 12; x; 6; 3; … Найдите x» [25].

3. «Выписаны четыре члена арифметической прогрессии: …; 1; x; − 5; − 8; … Найдите член прогрессии, обозначенный буквой x» [25].

II. Блок

1. «В первом ряду кинозала 24 места, а в каждом следующем на 2 больше, чем в предыдущем. Сколько мест в восьмом ряду?» [25].

Решение: исходя из условий задачи, очевидно, что нам даны первый член арифметической прогрессии и её разность: $\boldsymbol{a_1} = 24, d = 2$. Найдем $a_8 = \boldsymbol{a_1} + d\ 8 - 1\ = 24 + 2 \cdot 7 = 24 + 14 = 38$.

Ответ. 38

2. «В первом ряду кинозала 50 мест, а в каждом следующем на 1 больше, чем в предыдущем. Сколько мест в седьмом ряду?» [25].

3. «В первом ряду кинозала 22 места, а в каждом следующем на 2 больше, чем в предыдущем. Сколько мест в двенадцатом ряду?» [25].

III. Блок

1. «В арифметической прогрессии (a_n) дан десятый и пятнадцатый члены: $a_{10} = 19$, $a_{15} = 44$. Найдите разность этой прогрессии» [25].

Решение: $a_{10} = 19$, $a_{15} = 44$, но в то же время – $\boldsymbol{a_{10}} = \boldsymbol{a_1} + 9d$, $\boldsymbol{a_{15}} = \boldsymbol{a_1} + 14d$, получаем систему: $\begin{matrix} \boldsymbol{a_1} + 9d = 19 \\ \boldsymbol{a_1} + 14d = 44 \end{matrix}$, решив ее, найдем искомую разность.

$$\begin{matrix} \boldsymbol{a_1} = 19 - 9d \\ \boldsymbol{a_1} = 44 - 14d \end{matrix} => 19 - 9d = 44 - 14d => -9d + 14d = 44 - 19;$$

$$5d = 25 => d = 5.$$

Ответ. 5.

2. «В арифметической прогрессии (a_n) дан шестой и девятнадцатый члены: $a_6 = -7{,}8$, $a_{19} = -10{,}4$. Найдите разность этой прогрессии» [25].

3. «В арифметической прогрессии (a_n) дан пятый и пятнадцатый члены: $a_5 = 24$, $a_{15} = 94$. Найдите разность этой прогрессии» [25].

IV. Блок

1. «Дана формула n-го члена арифметической прогрессии: $a_n = 3{,}8 - 5{,}7n$. Найдите её шестой член» [25].

Решение: $a_6 = 3{,}8 - 5{,}7 \cdot 6 = -30{,}4$.

Ответ. -30,4.

2. «Дана формула n-го члена арифметической прогрессии: $a_n = -1{,}1 - 5{,}6n$. Найдите её пятнадцатый член» [25].

3. «Дана формула n-го члена арифметической прогрессии: $a_n = -13{,}1 + 3{,}5n$. Найдите её четырнадцатый член» [25].

V. Блок

1. «Выписаны три первые члена арифметической прогрессии: -7; -5; -3; … Найдите её шестнадцатый член» [25].

Решение: исходя из условий имеем: $a_1 = -7, a_2 = -5, d = a_2 - a_1 =$

$$= -5 - (-7) = 2;\ a_n = a_1 + d(n-1) => a_{16} = -7 + 2 \cdot 15 = 23.$$

Ответ. 23.

2. «Выписаны три первые члена арифметической прогрессии:

1, 3, 5, … Найдите её одиннадцатый член» [25].

3. «Выписаны три первые члена арифметической прогрессии:

-5, -3, -1, … Найдите её шестнадцатый член» [25].

VI. Блок

1. «Даны три первые члена арифметической прогрессии:

10; 3; -4. Найдите 101-й член» [25].

Решение: $a_1 = 10, a_2 = 3, d = a_2 - a_1 =$

$= 3 - 10 = -7$; $a_n = a_1 + d(n-1) => a_{101} = 10 - 7 \cdot 100 = -690.$

Ответ. -690.

2. «Даны три первые члена арифметической прогрессии: $-7; -1; 5$. Найдите 91-й член» [25].

3. «Даны три первые члена арифметической прогрессии: 20;13;6. Найдите 81-й член» [25].

VII. Блок

1. «Даны три первые члена арифметической прогрессии: 25; 19; 13, найдите первый отрицательный член этой прогрессии» [25].

Решение: $a_1 = 25, a_2 = 19, d = a_2 - a_1 = 19 - 25 = -6;$

$$a_n = a_1 + d(n-1) => a_n = 25 - 6(n-1) < 0.$$

$25 - 6(n-1) < 0 => 25 - 6n + 6 < 0 => -6n < -31 => n > 5{,}16.$

Т.е. $a_6 < 0$, проверим: $a_6 = 25 - 6 \cdot 5 = -5.$

Ответ. $a_6 = -5.$

2. «Даны три первые члена арифметической прогрессии: $-26; -20; -14$, найдите первый положительный член этой прогрессии» [25].

3. «Даны три первые члена арифметической прогрессии: 33; 25; 17, найдите первый отрицательный член этой прогрессии» [25].

VIII. Блок

1. «Даны разность и первый член арифметической прогрессии (a_n): $d = -8{,}5$, $a_1 = -6{,}8$. Найдите её одиннадцатый член» [25].

Решение: $a_n = a_1 + d(n-1) => a_{11} = -6{,}8 - 8{,}5 \cdot 10 = -91{,}8.$

Ответ. -91,8.

2. «Даны разность и первый член арифметической прогрессии (a_n): $d = -1{,}7$, $a_1 = 7{,}6$. Найдите девятый член» [25].

3. «Даны разность и первый член арифметической прогрессии (a_n): $d = -4{,}9$, $a_1 = -6{,}4$. Найдите пятнадцатый член» [25].

IX. Блок

1. «n-ый член арифметической прогрессии задается формулой: $a_{n+1} = a_n + 1{,}1$, а её первый член равен 0,9, найдите сумму первых 11 членов» [25].

Решение: $S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2}$; d=1,1. Найдем 11-ый член данной прогрессии:

$$a_{11} = 0{,}9 + 1{,}1 \cdot 10 = 11{,}9; S_{11} = \frac{a_1 + a_{11} \cdot 11}{2} = \frac{0{,}9 + 11{,}9 \cdot 11}{2} =$$

$$= \frac{140{,}8}{2} = 70{,}4.$$

Ответ. 70,4.

2. «n-ый член арифметической прогрессии задается формулой: $a_{n+1} = a_n - 17$, а её первый член равен 48, найдите сумму первых 17 членов» [25].

3. «n-ый член арифметической прогрессии задается формулой: $a_{n+1} = a_n - 10$, а её первый член равен -15, найдите сумму первых 16 членов» [25].

X. Блок

1. «Выписаны первые три члена арифметической прогрессии: 6; 10; 14. Найдите сумму первых пятидесяти её членов» [25].

Решение: $S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2}$; d=10-6=4. Найдем 50-ый член данной прогрессии:

$$a_{50} = 6 + 4 \cdot 49 = 202; S_{50} = \frac{a_1 + a_{50} \cdot 50}{2} = 6 + 202 \cdot 25 = 5200.$$

Ответ. 5200.

2. «Выписаны первые три члена арифметической прогрессии: 2; 6; 10. Найдите сумму первых сорока её членов» [25].

3. «Выписаны первые три члена арифметической прогрессии: -3; 1; 5. Найдите сумму первых шестидесяти её членов» [25].

XI. Блок

1. «Дана разность арифметической прогрессии (a_n) $d = -2{,}5$ и её первый член $a_1 = -9{,}1$. Найдите сумму первых 15 её членов» [25].

Решение: $S_{15} = \frac{a_1 + a_{15}\ 15}{2}$. Найдем 15-ый член: $a_{15} = -9{,}1 - 2{,}5 \cdot 14 =$ $= -44{,}1$. Подставим в формулу для нахождения суммы n первых членов:

$$S_{15} = \frac{-9{,}1 - 44{,}1\ \cdot 15}{2} = \frac{-798}{2} = -399.$$

Ответ. -399.

2. «Дана разность арифметической прогрессии (a_n) d=0,6 и её первый член a_1=6,2. Найдите сумму первых 13 её членов» [25].

3. «Дана разность арифметической прогрессии (a_n) d=− 5,8 и её первый член a_1=1,8. Найдите сумму первых 8 её членов» [25].

XII. Блок

1. «n-ый член арифметической прогрессии задается условием: $a_n = -\ 0{,}6 + 8{,}6n$. Найдите сумму первых 10 её членов» [25].

Решение: для начала найдем первый и десятый члены прогрессии:

$$a_1 = -0{,}6 + 8{,}6 = 8;\ a_{10} = -0{,}6 + 86 = 85{,}4.$$

Теперь подставим найденные значения в формулу для нахождения суммы n первых членов арифметической прогрессии:

$$S_{10} = \frac{8 + 85{,}4\ \cdot 10}{2} = 435.$$

Ответ. 435.

2. «n-ый член арифметической прогрессии задается условием: $a_n = 1{,}9 - 0{,}3n$. Найдите сумму первых 15 её членов» [25].

3. «n-ый член арифметической прогрессии задается условием: $a_n = -\ 5{,}3 - 4{,}5n$. Найдите сумму первых 12 её членов» [25].

XIII. Блок

1.«Какое наибольшее число последовательных натуральных чисел, начиная с 1, можно сложить, чтобы получившаяся сумма была меньше 435?» [25].

Решение: Рассмотрим арифметическую прогрессию (a_n) с первым членом $a_1 = 1$ и разностью d=1. Поскольку $S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2}$, то решив следующее неравенство, мы найдем ответ: $\frac{(a_1+a_n)n}{2} < 435 => \ 1+n \ n < 870 => n^2 + n - 870 < 0.$

Решим данное неравенство методом интервалов: $n^2 + n - 870 = 0$ => $D = 1 - 4 \cdot \ -870 \ = 3481 = 59^2; n_1 = \frac{-1+59}{2} = 29, n_2 = -30.$

Изобразим решение неравенства на числовой прямой (рисунок 1):

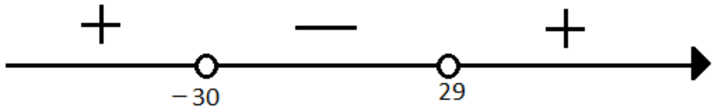

Рисунок 2 – Решение неравенства

Очевидно, что решением полученного неравенства является следующий интервал: $n\epsilon \ -30;29$. Это значит, чтобы получившаяся сумма была меньше 435, наибольшее число членов заданной последовательности 28.

Ответ. 28.

2.«Какое наибольшее число последовательных натуральных чисел, начиная с 1, можно сложить, чтобы получившаяся сумма была меньше 496?» [25].

3.«Какое наименьшее число последовательных натуральных чисел, начиная с 1, нужно сложить, чтобы получившаяся сумма была больше 435?» [25].

Кроме того, на основе анализа открытого банка заданий http://www.fipi.ru [25] нами также составлен набор заданий по теме "Геометрическая прогрессия", в котором задачи распределены по типам.

I. Блок

1. «n-ый член геометрической прогрессии зада формулой: $b_n = 64,5 \cdot (- \ 2)^n$. Найдите b_6» [25].

Решение: $b_6 = 64,5 \cdot (- \ 2)^6 = 4128$.

Ответ. 4128.

2. «n-ый член геометрической прогрессии зада формулой: $b_n = -175 \cdot (-1/5)^n$. Найдите b_4» [25].

3. «n-ый член геометрической прогрессии зада формулой: $b_n = 64 \cdot (3/2)^n$. Найдите b_6» [25].

II. Блок

1. «Дан первый член геометрической прогрессии: $b_1 = -1\frac{1}{3}$, а её n-ый член задается формулой: $b_{n+1} = -3b_n$. Найдите седьмой член» [25].

Решение: очевидно, что знаменатель данной прогрессии q=-3, значит, найдем её седьмой член через формулу нахождения n-го члена:

$$b_n = b_1 \cdot q^{n-1} => b_7 = -\frac{4}{3} \cdot (-3)^6 = -972.$$

Ответ. -972.

2. «Дан первый член геометрической прогрессии: $b_1 = -6$, а её n-ый член задается формулой: $b_{n+1} = 2b_n$. Найдите шестой член» [25].

3. «Дан первый член геометрической прогрессии: $b_1 = -2$, а её n-ый член задается формулой: $b_{n+1} = 2b_n$. Найдите восьмой член» [25].

III. Блок

1. «Дан пятый и восьмой члены геометрической прогрессии (b_n): $b_5 = -14$, $b_8 = 112$. Найдите знаменатель данной прогрессии» [25].

Решение: $b_5 = -14$, $b_8 = 112$, но в то же время: $b_5 = b_1 \cdot q^4, b_8 = b_1 \cdot q^7$, получаем систему: $\begin{cases} b_1 \cdot q^4 = -14 \\ b_1 \cdot q^7 = 112 \end{cases} => \begin{cases} b_1 = \frac{-14}{q^4} \\ b_1 = \frac{112}{q^7} \end{cases} => \frac{-14}{q^4} = \frac{112}{q^7} => \frac{q^7}{q^4} = \frac{112}{-14}$;

$$q^3 = -8 => q = -2.$$

Ответ. -2.

2. «Дан третий и четвертый члены геометрической прогрессии (b_n): $b_3 = -6/7$, $b_4 = 6$. Найдите знаменатель данной прогрессии» [25].

3. «Дан пятый и восьмой члены геометрической прогрессии (b_n): $b_5 = -15$, $b_8 = -405$. Найдите знаменатель данной прогрессии» [25].

IV. Блок

1. «Даны первые три члена геометрической прогрессии: 17; 68; 272. Найдите её четвёртый член» [25].

Решение: $b_1 = 17, b_2 = 68 \Rightarrow q = \frac{b_2}{b_1} = \frac{68}{17} = 4$. Любой член геометрической прогрессии можно найти по формуле: $b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$, значит, $b_4 = b_1 \cdot q^3 = 17 \cdot 4^3 = 1088$.

Ответ. 1088.

2. «Даны первые три члена геометрической прогрессии: 18; -54; 162. Найдите её пятый член» [25].

3. «Даны первые три члена геометрической прогрессии: 184; -92; 46. Найдите её четвёртый член» [25].

V. Блок

1. «Знаменатель геометрической прогрессии(b_n) равен 2, её первый член равен 16. Найдите четвертый член данной прогрессии» [25].

Решение: Любой член геометрической прогрессии можно найти по формуле: $b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$, значит, $b_4 = b_1 \cdot q^3 = 16 \cdot 2^3 = 16 \cdot 8 = 128$.

Ответ. 128.

2. «Знаменатель геометрической прогрессии(b_n) равен 3, её первый член равен 71. Найдите четвертый член данной прогрессии» [25].

3. «Знаменатель геометрической прогрессии(b_n) равен 2, её первый член равен -76. Найдите седьмой член данной прогрессии» [25].

VI. Блок

1. «Даны четыре последовательных члена геометрической прогрессии: 1,75; x; 28; -112. Найдите x» [25].

Решение: знаменатель данной прогрессии равен: $q = \frac{-112}{28} = -4 \Rightarrow$ x=1,75$\cdot (-4) = -7$.

Ответ. -7.

2. «Даны четыре последовательных члена геометрической прогрессии: 45; x; 5; $-1\frac{2}{3}$. Найдите x» [25].

3. «Даны четыре последовательных члена геометрической прогрессии: 1,5; x; 24; $-$ 96. Найдите x» [25].

VII. Блок

1. «Даны первые три члена геометрической прогрессии: $-$ 256; 128; $-$ 64. Найдите сумму первых семи её членов» [25].

Решение: $S_n = \frac{b_1(q^n - 1)}{q - 1}$, найдем знаменатель прогрессии: $q = \frac{128}{-256} = -0{,}5$. Подставим в исходную формулу значения:

$$S_7 = \frac{-256((-0{,}5)^7 - 1)}{-0{,}5 - 1} = \frac{258}{-1{,}5} = -172.$$

Ответ. -172.

2. «Даны первые три члена геометрической прогрессии: $-$ 1024; $-$ 256; $-$ 64. Найдите сумму первых пяти её членов» [25].

3. «Даны первые три члена геометрической прогрессии: 1; $-$ 5; 25. Найдите сумму первых пяти её членов» [25].

VIII. Блок

1. «Дана геометрическая прогрессия (b_n). Сумма первого и второго членов этой прогрессии равна 40, а сумма второго и третьего членов равна 120. Найдите первые три члена этой прогрессии» [25].

Решение: исходя из условий задачи имеем: $\begin{matrix} b_1 + b_2 = 40 \\ b_2 + b_3 = 120 \end{matrix}$, но в то же время $b_2 = b_1 \cdot q, b_3 = b_1 \cdot q^2 => \begin{matrix} b_1 + b_1 \cdot q = 40 \\ b_1 \cdot q + b_1 \cdot q^2 = 120 \end{matrix}$, умножим первое уравнение на –q: $\begin{matrix} -b_1 \cdot q - b_1 \cdot q^2 = -40q \\ b_1 \cdot q + b_1 \cdot q^2 = 120 \end{matrix}$ и сложим два уравнения почленно, получаем: $0 = -40q + 120 => q = 3$. Теперь найдем первый и остальные члены: $b_1 + b_1 \cdot q = 40 => 4b_1 = 40 => b_1 = 10$; $b_2 = 30$; $b_3 = 90$.

Ответ. 10; 30; 90.

2. «Дана геометрическая прогрессия (b_n). Сумма первого и второго членов равна 120, а сумма второго и третьего членов равна 40. Найдите первые три члена этой прогрессии» [25].

3. «Дана геометрическая прогрессия (b_n). Сумма первого и второго членов равна 108, а сумма второго и третьего членов равна 135. Найдите первые три члена этой прогрессии» [25].

IX. Блок

1. «n-ый член геометрической прогрессии задается формулой: $b_n = 164 \cdot (1/2)^n$. Найдите сумму первых её четырёх членов» [25].

Решение: учитывая, что $b_n = 164 \cdot (1/2)^n$ и $S_n = \frac{b_1(q^n - 1)}{q - 1}$, найдем первые четыре члена: $b_1 = 164 \cdot (1/2)^1 = 82$, $b_2 = 164 \cdot (1/2)^2 = 41$, $b_3 = 164 \cdot (1/2)^3 = 20{,}5$; $b_4 = 164 \cdot (1/2)^4 = 10{,}25$. Теперь сложим все найденные значения: 82+41+20,5+10,25=153,75.

Ответ. 153,75.

2. «n-ый член геометрической прогрессии задается формулой: $b_n = -17{,}5 \cdot 2^n$. Найдите сумму первых её 7 членов» [25].

3. «n-ый член геометрической прогрессии задается формулой: $b_n = -78{,}5 \cdot (-2)^n$. Найдите сумму первых её 4 членов» [25].

X. Блок

1. «Дана геометрическая прогрессия (b_n). $b_1 + b_2 = 160$, а $b_2 + b_3 = 40$. Найдите первые три члена этой прогрессии» [25].

Решение: исходя из условий задачи, получаем систему уравнений: $\begin{matrix} b_1 + b_2 = 160 \\ b_2 + b_3 = 40 \end{matrix}$, но $b_2 = b_1 \cdot q, b_3 = b_1 \cdot q^2 =>$ $\begin{matrix} b_1 + b_1 \cdot q = 160 \\ b_1 \cdot q + b_1 \cdot q^2 = 40 \end{matrix}$, умножим первое уравнение на –q: $\begin{matrix} -b_1 \cdot q - b_1 \cdot q^2 = -160q \\ b_1 \cdot q + b_1 \cdot q^2 = 40 \end{matrix}$ и почленно сложим два этих уравнения: $0 = 40 - 160q => -160q = -40 => q = 0{,}25 =>$

$$b_1 + 0{,}25b_1 = 160 => 1{,}25b_1 = 160 => b_1 = 128, b_2 = 128 \cdot 0{,}25 = 32,$$

$$b_3 = 32 \cdot 0{,}25 = 8.$$

Ответ. 128; 32; 8.

2. «Дана геометрическая прогрессия (b_n). $b_1 + b_2 = 72$, а $b_2 + b_3 = 114$. Найдите первые три члена этой прогрессии» [25].

3. «Дана геометрическая прогрессия (b_n). $b_1 + b_2 = 200$, а $b_2 + b_3 = 50$. Найдите первые три члена этой прогрессии» [25].

XI. Блок

1. «В геометрической прогрессии (b_n) знаменатель равен 4, а первый член равен $\frac{1}{4}$. Найдите сумму первых шести её членов» [25].

Решение: поскольку сумма первых шести членов данной прогрессии находится по формуле: $S_6 = \frac{b_1(q^6-1)}{q-1}$, то необходимо просто подставить данные условии значения: $S_6 = \frac{0{,}25(4^6-1)}{4-1} = \frac{1023{,}75}{3} = 341{,}25$.

Ответ. 341,25.

2. «В геометрической прогрессии (b_n) знаменатель равен 4, а первый член равен $\frac{3}{4}$. Найдите сумму первых семи её членов» [25].

3. «В геометрической прогрессии (b_n) знаменатель равен 2, а первый член равен $\frac{1}{2}$. Найдите сумму первых пяти её членов» [25].

§7. Методические рекомендации по применению электронных образовательных ресурсов при обучении учащихся решению задач по теме «Прогрессии»

7.1. Обзор существующих электронных образовательных ресурсов по теме «Прогрессии»

Проведение урока с использованием электронных образовательных ресурсов - это один из самых важных результатов инновационной работы в школе. Практически на любом уроке математики можно применить компьютерные технологии. Но очень важно найти ту грань, которая позволит сделать урок по-настоящему развивающим и познавательным.

В данной работе электронный образовательный ресурс (ЭОР) будет рассматриваться как один из способов контроля знаний учащихся, в виде тестов-практикумов, содержащие практические задания и упражнения, способствующие усвоению изученного материала.

В настоящее время достаточно ресурсов для того, чтобы разнообразить систему контроля знаний с помощью тестирований. В школах с хорошей технической оснащенностью можно проводить компьютерные тестирования в режиме онлайн, которые предлагают множество сайтов, например:

http://onlinetestpad.com/ru-ru/Section/Math-3/Default.aspx (рисунок 3).

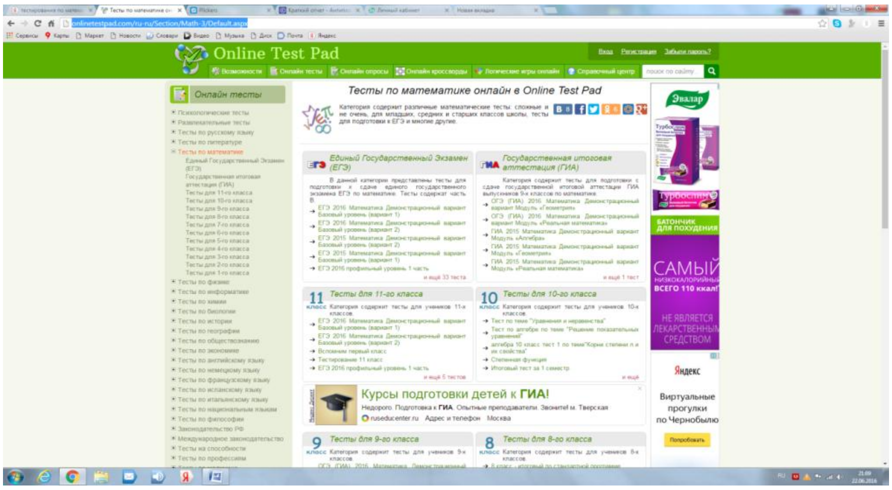

Рисунок 3 – Online test pad

http://math-test.ru (рисунок 4).

Рисунок 4 – онлайн тесты по математике

http://testedu.ru/test/matematika (рисунок 5).

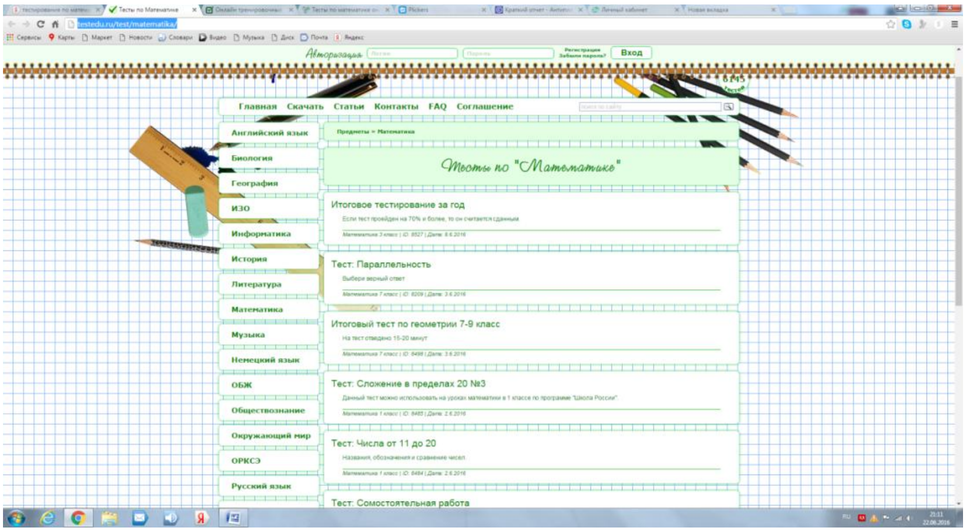

Рисунок 5 - Образовательные тесты

Федеральные коллекции электронных образовательных ресурсов:

- http://eor-np.ru/
- http://school-collection.edu.ru/
- http://fcior.edu.ru/

И множество других аналогичных сайтов. Если компьютер всего один, то такие онлайн-тестирования можно проводить для 1-2 учеников, которые работают за компьютером учителя.

Современная педагогическая наука считает тестирование основой контроля знаний. Именно на нем построены системы обучения во многих западных странах.

Широко известны примеры, такие как:

- «к12» - системам обучения студентов/школьников в Соединенных Штатах Америки. Основным принципом в системе «К12» считается полностью самостоятельное обучение дисциплинам по заданной литературе. Контроль знаний осуществляется через тестирования.
- «brainBench» - http://www.brainbench.com/xml/bb/homepage.xml Очень известная система тестирования, как за границей, так и в России. Это платная система контроля знаний по различным отраслям деятельности и науки. Не предоставляет учебный или справочный материал, оставляя выбор источников информации обучаемому.

7.2. Методические рекомендации по применению разработанного приложения на уроках математики

В соответствии с ГОСТ Р 52653-2006 [5] ЭОР должен включать в себя образовательный контент, программные компоненты и метаданные.

Образовательный контент - организованная предметная информация, используемая в образовательном процессе. Программные компоненты реализуют интерактивный режим работы пользователя с контентом. Метаданные - структурированные данные, предназначенные для описания характеристик ЭОР.

В рамках курсовой работы по дисциплине «web-дизайн и web-программирование» был разработан электронный образовательный ресурс (рисунок 4), который содержит 5 типовых заданий по теме «числовые последовательности» и 10 различных вариантов каждого задания (программа меняет числа в задании случайным образом). При решении задания ученику нужно ввести правильный ответ в пустое окошко, а программа автоматически проверит выполненные задания и выдаст результат проверки.

Данная страница адаптивна, то есть может подстраиваться под любой размер экрана, ученик может проходить тестирование даже с экрана смартфона (рисунок 5). После прохождения ученик нажимает кнопку «отправить», программа высчитывает результат теста и выводит на странице, изображенной на рисунке 6, куда автоматически происходит переход после ответа на все вопросы теста. На данной странице показывается количество правильных ответов и их процентное соотношение (рисунок 6).

В итоге получился новый продукт - работающая программа в помощь учителю для контроля знаний учащихся по теме "числовые последовательности". Такая программа будет также помогать эффективно подготавливать учащихся к сдаче ОГЭ по математике, путем отработки основных необходимых навыков.

Несомненным плюсом разработанного приложения является возможность легко адаптировать его под любую тему урока, что позволит существенно уменьшить время подготовки учителя к уроку и более качественно закреплять весь пройденный материал.

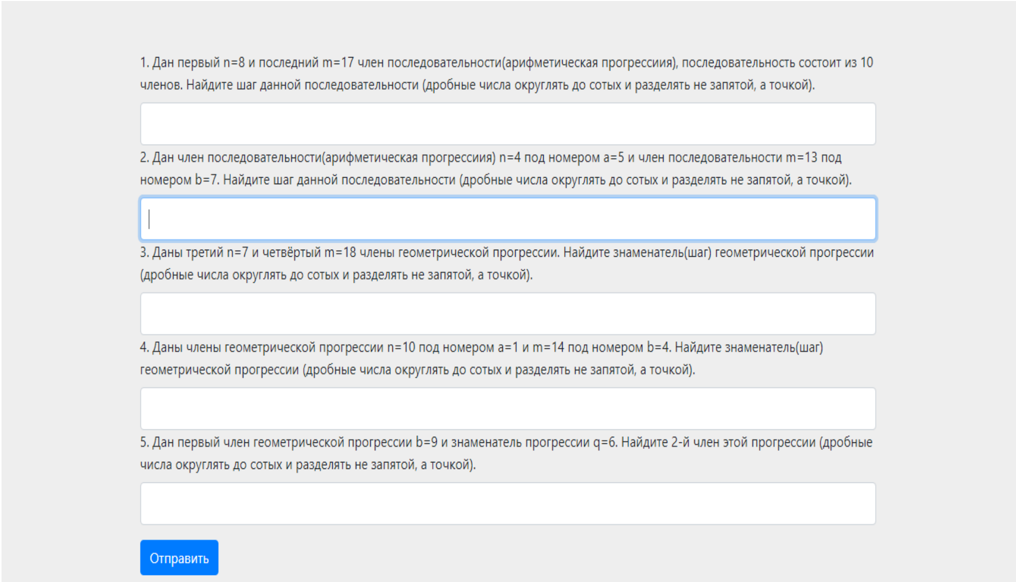

Рисунок 4 - Страница тестирования

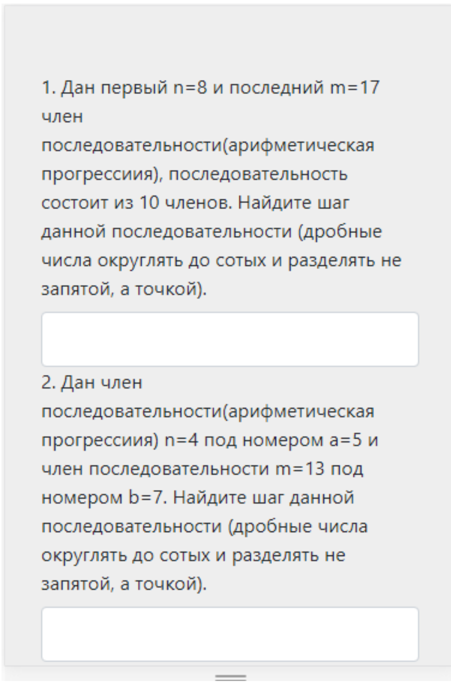

Рисунок 5 - Страница тестирования на экране шириной 320px

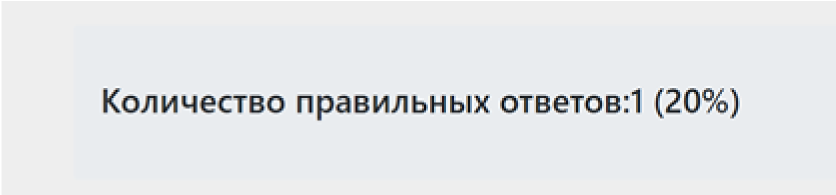

Рисунок 6 - Страница результатов тестирования

Выводы по второй главе

1. Разработаны методические рекомендации по обучению учащихся решению задач по теме «Прогрессии» в углубленном курсе математики. Установлено, что обучение теме «Прогрессии» и «Числовые последовательности» должно начинаться с исторической справки, подготовленной заранее учителем или учащимися, чтобы заинтересовать их и привлечь внимание к данной теме. Далее постепенно следует вводить основные определения по теме в соответствии с календарным планом и содержанием учебника алгебры 9 класса.

2. Проведен анализ задач ОГЭ по теме «Прогрессии». В результате анализа выявлено, что задачи по теме «Прогрессии» включены в основной государственный экзамен: в первой части модуля «Алгебра» они встречаются в задании №11. Для того чтобы ученик усвоил определенные задания, - необходимо их решать в определенной системе. На основе анализа открытого банка заданий http://www.fipi.ru [31] была разработана методическая система по теме «Арифметическая и геометрическая прогрессии», ориентированная на формирование умения решать задачу №11, входящую в КИМ ОГЭ.

3. Разработаны методические рекомендации по применению реализованного электронного образовательного ресурса по теме «Прогрессии». Установлено, что применяя разработанный ЭОР при изучении данной темы учитель, не только будет экономить время на подготовку к уроку и контроль знаний учащихся, но и поможет ученикам качественно усвоить пройденный материал.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Сформулируем основные выводы и полученные результаты проведенного исследования.

1. В ходе анализа литературы и учебных пособий было выявлено, что такое математическое явление, как прогрессии известны так давно, что нельзя точно сказать, кто их открыл. Однако задачи на нахождение суммы членов последовательности или на нахождение некоторых членов последовательности были широко распространены в древности и встречались в разных уголках мира: Древнем Египте, Древней Руси, Китае, Индии и т. д.

2. Выявлены основные цели и задачи обучения теме «Прогрессии» в углубленном курсе математики основной школы. Определено, что изучение числовых последовательностей играет важную роль не только в школьном курсе алгебры, но и в дальнейшем обучении математике в высших учебных заведениях. Данная тема позволяет определить такие основные понятия математического анализа, как бесконечность, предел и непрерывность. Теория рядов полностью базируется на последовательностях.

3. Выполнен анализ содержания теоретического и задачного материала по теме «Прогрессии» в учебниках базового и углубленного уровней алгебры основной школы. Определено, что данный материал изучается непосредственно в 9-ом классе. Понятия арифметической и геометрической прогрессий основываются на понятии числовой последовательности. Характеристическое свойство арифметической (геометрической) прогрессии отражает связь между тремя последовательными членами арифметической (геометрической) прогрессии. При введении понятий и теорем данной темы прослеживается аналогия между арифметической и геометрической прогрессиями. Выделены основные типы задач по теме «Прогрессии», приведены примеры каждого типа задач.

4. Разработаны методические рекомендации по обучению учащихся

решению задач по теме «Прогрессии» в углубленном курсе математики. Установлено, что обучение школьников основным понятиям темы «Прогрессии» и «Числовые последовательности» должно начинаться с исторической справки, подготовленной заранее учителем или учащимися, чтобы заинтересовать их и привлечь внимание к данной теме. Далее постепенно следует вводить основные определения по теме в соответствии с календарным планом и содержанием учебника алгебры 9 класса.

5. Проведен анализ КИМ ОГЭ по теме «Прогрессии». В результате анализа выявлено, что задачи по теме «Прогрессии» включены в основной государственный экзамен: в первой части модуля «Алгебра» они встречаются в задании №11. Для того чтобы обучающийся усвоил определенные действия, - необходимо их выполнять в определенной системе. На основе анализа открытого банка заданий http://www.fipi.ru [24] был составлен набор заданий по теме «Арифметическая прогресси» и «Геометрическая прогрессия», в котором задачи распределены по типам. Решив составленную систему задач, ученик будет готов к выполнению задания №11 при сдаче ОГЭ.

6. Разработаны методические рекомендации по применению реализованного электронного образовательного ресурса по теме «Прогрессии». Установлено, что применяя разработанный ЭОР при изучении данной темы учитель, не только будет экономить время на подготовку к уроку и контроль знаний учащихся, но и поможет ученикам качественно усвоить пройденный материал.

Все это дает основание считать, что задачи, поставленные в исследовании, полностью решены.

СПИСОК ИСПОЛЬЗУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Блох, А.Я. Методика преподавания математики в средней школе: Частная методика [Текст]: учебное пособие для студентов пед. ин-тов по физ.-мат.спец. / А.Я. Блох, В.А. Гусев, Г.В. Дорофеев и др.; Сост. В.И. Мишин. – М.: Просвещение, 1987. – 416 с.
2. Бурмистрова, Т.А. Алгебра. Сборник рабочих программ. 7 – 9 клас-сы [Текст]: пособие для учителей общеобразовательных организация/ Т.А. Бурмистрова. – 2-е изд., доп. – М.: Просвещение, 2014. – 96 с.
3. Виноградова, Л. В. Методика преподавания математики в средней школе [Текст]: учеб. пособие / Л.В. Виноградова. - Ростов н/Д.: Феникс, 2005. - 252 с.
4. Глейзер, Г.И. История математики в школе 9-10 классов: пособие для учителей / Г.И. Глейзер. - М.: Просвещение, 1853. - 351 с.
5. ГОСТ Р 52653-2006 Национальный стандарт Российской Федерации. Информационно - коммуникационные технологии в образовании. Термины и определения. [Электронный ресурс]: Электронный фонд правовой и нормативно-технической документации - Режим доступа: http://docs.cntd.ru. - Последнее обновление 16.05.2018.
6. Депман, И. Я. История арифметики. Пособие для учителей. / И. Я. Депман. - М.: Просвещение, 1966. - 415 с.
7. Дорофеев, Г. В. Учебник по алгебре за 9 класс./ Г. В. Дорофеев, С. Б. Суворова, Е. А. Бунимович - изд. 5-е. - М.: Просвещение, 2010.
8. Епифанова, Н.М. Методика обучения алгебре основной школы [Текст]: учебно-методическое пособие/ Н.М. Епифанова, О.П. Шарова. – Ярославль: изд-во ЯГПУ имени К.Д. Ушинского, 2006. – 83 с.
9. Звавич, Л. И. Алгебра. 9 класс: задачник для учащихся общеобразоват. учреждений / Л. И Звавич, А. Р. Рязановский, П. В. Семенов. - 3-е изд., перераб. - М.: Мнемозина, 2008. - 336 с.: ил.

10. Колягин, Ю.М. Методика преподавания математики в средней школы: Частные методики [Текст]: учеб. пособие для студентов физ.-мат. факультетов пед. ин-тов/ Ю.М. Колягин, Г.Л. Луканин, Е.Л. Мокрушин, В. А. Оганесян и др. – М.: Просвещение, 1977. – 480 с.

11. Кузяева, Н. В. Методическое пособие: изучение арифметической и геометрической прогрессий [Электронный ресурс]. / Н. В. Кузяева. П. Уренгой, 2006 - Режим доступа: http://textarchive.ru/c-2854268.html. - Последнее обновление 11.05.2018.

12. Лященко, Е.И. Лабораторные и практические работы по методике преподавания математики [Текст]: учебное пособие для студентов физ.-мат. спец. пед. ин-тов/ Е.И. Лященко, К.В. Зобкова, Т.Ф. Кириченко и др.; под ред. Е.И. Лященко. - М.: Просвещение, 1988. - 223 с.

13. Макарычев, Ю. Н. Алгебра. 9 класс: учеб. Пособие для общеобразоват. Организаций: углубл. уровень [Текст] / Ю. Н. Макарычев, Н. Г. Миндюк, К. И. Нешков, И. Е. Феоктистов. - М.: Просвещение, 2018. - 400 с.: ил.

14. Макарычев, Ю. Н. Учебник по алгебре за 9 класс./ Ю. Н. Макарычев, Н. Г. Миндюк, К. И. Нешков - изд. 21-е. - М.: Просвещение, 2014.

15. Мордкович, А. Г. Алгебра 9 класс. В двух частях. Часть 2. Задачник./ А. Г. Мордкович, Л. А. Александрова - 12-е изд., испр. - М.: Мнемозина, 2010. - 223с.: ил.

16. Мордкович, А. Г. Алгебра 9 класс. В двух частях. Часть 1. Учебник. / А. Г. Мордкович, П. В. Семенов– 12-е изд., стер. - М.: Мнемозина, 2010.

17. Мордкович, А. Г. Алгебра. 9 кл.: учеб. Для учащихся общеобразоват. Учреждений [Текст]. / А. Г. Мордкович, Н. П. Николаев. - 3-е изд. перераб. - М.: Мнемозина, 2008. - 255с.: ил.

18. Муравин Г. К. Учебник по алгебре за 9 класс./ Г. К. Муравин - изд. 14-е., стер. - М.: Дрофа, 2014.

19. Петровская, Н.А. Коллекция нестандартных задач «на прогрессии» [Текст]. / Н. А. Петровская // Математика в школе. - 1991. № 2. С. 60-62.

20. Покровский, В.П. Методика обучения математике: функциональная содержательно-методическая линия [Текст]: учеб.-метод. Пособие/ В.П. Покровский – Владимир: Изд-во ВлГУ, 2014. - 143 с.

21. Примерная основная образовательная программа основного общего образования. Одобрена решением федерального учебно-методического объединения по общему образованию / М-во образования и науки РФ. - М.: Просвещение, 2015. - 560 с. [Электронный ресурс]. - Режим доступа: http://fgosreestr.ru/wp-content/uploads/2015/06.pdf. - Последнее обновление 14.05.2018.

22. Сумбурова, Е. И. Русская дореволюционная школа глазами Н. П. Богданова-Бельского [Электронный ресурс]. / Е. И. Сумбурова. Историко-педагогический журнал, №3, 2012, с. 64-71. - Режим доступа: https://cyberleninka.ru/article/v/russkaya-dorevolyutsionnaya-shkola-glazami-n-p-bogdanova-belskogo. - Последнее обновление: 11.06.2018.

23. Шибасов, Л. П. От единицы до бесконечности./ Л. П. Шибасов - М.: Дрофа, 2004. - 208с.: ил.

24. Федеральный государственный образовательный стандарт основного общего образования: Приказ Мин. образования и науки РФ от 17.12.2010 г. №1897. [Электронный ресурс]. - Режим доступа: http://минобр-науки.рф/документы/938. - Последнее обновление: 6.05.2018.

25. Федеральный институт педагогических измерений [Электронный ресурс]. - Режим доступа: http://www.fipi.ru. - Последнее обновление: 14.05.2018.

26. Cohn, J. H. Square Fibonacci numbers Etc. / J. H. Cohn. New York.: Springer, 2000. – 134p.

27. Ira Gessel. Fibonacci quarterly. / Gessel Ira. Future plc, 1972. - 432 p.

28. Ribenboim, P. The new book of prime number records. / P. Ribenboim. Springer, 1996. - 193 p.

29. Sigler, L. E. Fibonacci's Liber Abaci: A Translation into Modern English of Leonardo Pisano's Book of Calculation (Sources and Studies in the History of Mathematics and Physical Sciences). / L. E. Sigler. Paperback - June 2, 2010,

30. Soifer, A. The mathematical coloring book: mathematics of coloring and the colorful life of its creators. / A. Soifer. New York: Springer, 2008. - 354 p.

31. Ted Sundstrom. Mathematical Reasoning: Writing and Proof [Текст]. / Grand Valley State University, Version 2.1, Allendale, April 13, 2018 - 609 p.

32. The Fibonacci Quarterly. Official Publication of The Fibonacci Association. Since 1963, Canada.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Ответы и указания к решению типовых задач по теме «Прогрессии» в учебниках алгебры 9 класса углубленного уровня.

1. *Задачи на понимание и использование основных понятий, терминов и символики.*

Задача 1. «№715. Могут ли составлять арифметическую прогрессию длины сторон и периметр треугольника?» [13, С. 173].

Решение: Предположим, что это так. Тогда a - длина одной из сторон треугольника, $a+d$ – длина второй стороны, $a+2d$ - длина третьей стороны, а $a+3d$ - периметр данного треугольника.

Периметр треугольника также можно выразить через сумму длин всех сторон: $a+3d=a+ a+d+ a+2d$.

То есть: $a+3d=3a+3d, a=0$. Но тогда это значит, что сторона треугольника является точкой, чего быть не может. Значит, данное условие не может составлять арифметическую прогрессию.

Задача 2. «№718. Между числами 14 и 2 вставьте семь чисел, которые вместе с данными числами составят арифметическую прогрессию» [13, С. 173].

Решение: Поскольку между числами 14 и 2 требуется вставить еще 7 чисел, то 14 - первый член арифметической прогрессии, а 2 - девятый.

Т. е. $a_1 = 14, a_9 = 2,$ но $a_9 = a_1 + d \cdot 8,$ значит:

$$d = \frac{a_9 - a_1}{8} = \frac{2 - 14}{8} = \frac{-12}{8} = -1{,}5.$$

Теперь, зная формулу для нахождения n-го члена арифметической прогрессии, можно найти со второго по восьмой члены заданной последовательности. Также оставшиеся члены последовательности можно найти рекуррентно, т.е., по предыдущему члену:

$$a_n = a_1 + d \ n - 1 \ ; a_2 = 14 + \ -1{,}5 \ \cdot 1 = 12{,}5; \ a_3 = 12{,}5 - 1{,}5 = 11;$$

$$a_4 = 11 - 1{,}5 = 9{,}5; \ a_5 = 9{,}5 - 1{,}5 = 8; \ a_6 = 8 - 1{,}5 = 6{,}5;$$

$$a_7 = 6{,}5 - 1{,}5 = 5;\ a_8 = 5 - 1{,}5 = 3{,}5.$$

Ответ. 14; 12,5; 11; 9,5; 8; 6,5; 5; 3,5; 2.

Задача 3. «№760. Последовательность (b_n) - геометрическая прогрессия. Является ли геометрической прогрессией последовательность: $–b_1$, $-b_2$, $-b_3$, …, $-b_n$, …» [13, С. 183].

Решение: Пусть q – знаменатель заданной геометрической прогрессии (b_n). Предположим, что данная последовательность $–b_1$, $-b_2$, $-b_3$, …, $-b_n$, … является геометрической прогрессией, тогда q - её знаменатель.

Числовая последовательность является геометрической прогрессией, если её любой член можно найти по формуле: $b_n = b_{\mathbf{1}} \cdot q^{n-\mathbf{1}}$.

$$q = \frac{-b_2}{-b_{\mathbf{1}}} = \frac{b_2}{b_{\mathbf{1}}} = q;\ -b_2 = -(b_{\mathbf{1}} \cdot q^{n-\mathbf{1}}) = -b_{\mathbf{1}} \cdot q^{n-\mathbf{1}};\ -b_n = -b_{\mathbf{1}} \cdot q^{n-\mathbf{1}}.$$

Таким образом, очевидно, что последовательность

$–b_1$, $-b_2$, $-b_3$, …, $-b_n$, …является геометрической прогрессией.

Ответ. Да.

2. *Задачи на нахождение любого конкретного члена последовательности.*

Задача 4. «№643. В последовательности, заданной формулой найдите a_9, a_{12}, a_{2004}, a_{2k}, a_{2k+1}: $a_n = \begin{matrix} \mathbf{0, если}\ n - \mathbf{четное,} \\ n\ \ n+1\ \ \mathbf{, если}\ n - \mathbf{нечётное»} \end{matrix}$ [13, С. 155].

Решение: Числа 9 и 2k+1 являются нечетными, поэтому:

$$a_9 = 9\ \ 9+1\ \ = 90;\ a_{\mathbf{2}k\mathbf{+1}} =\ \ 2k+1\ \ \ 2k+1+1\ \ =\ \ 2k+1\ \ \ 2k+2\ \ =$$
$$= 4k^2 + 2k + 4k + 2 = 4k^2 + 6k + 2 = 2\ \ 2k^2 + 3k + 1\ \ ;$$

Числа 12, 2004 и 2k – четные, следовательно, члены последовательности под этими номерами равны нулю.

Ответ. 90; 0; 0; 0; $4k^2 + 6k + 2$.

Задача 5. «№650. Найдите все члены последовательности (c_n), где $c_n=0{,}25n^2-n$, заключенные между числами 3 и 8» [13, С. 156].

Решение: $3<0{,}25n^2-n<8$ => $\begin{matrix} 0{,}25n^2 - n > 3 \\ 0{,}25n^2 - n < 8 \end{matrix}$ => $\begin{matrix} 0{,}25n^2 - n - 3 > 0 \\ 0{,}25n^2 - n - 8 < 0 \end{matrix}$

В системе присутствуют два квадратных неравенства, решим каждое из их методом интервалов:

$$0{,}25n^2 - n - 3 = 0; D = b^2 - 4ac = 1 - 4 \cdot 0{,}25 \cdot \ \ -3 \ \ = 1 + 3 = 4;$$

$$n_{1,2} = \frac{1 \pm 2}{2 \cdot 0{,}25};\ n_1 = 6;\ n_2 = -2.$$

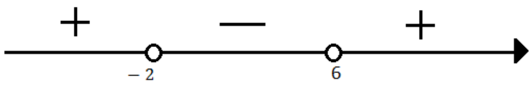

Рисунок 1 – Решение неравенства 1

Таким образом, решением первого неравенства является числовой промежуток: $n\epsilon \ \ -\infty; -2 \ \ \cup \ \ 6; +\infty \ \ .$

$$0{,}25n^2 - n - 8 = 0; D = 1 - 4 \cdot 0{,}25 \cdot \ \ -8 \ \ = 1 + 8 = 9;$$

$$n_{1,2} = \frac{1 \pm 3}{2 \cdot 0{,}25};\ n_1 = 8;\ n_2 = -4.$$

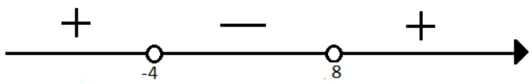

Рисунок 2 – Решения неравенства 2

Очевидно, что во втором неравенстве: $n\epsilon \ \ -4; 8 \ \ .$

Исходя из решений двух неравенств, получаем решение системы: $n\epsilon \ \ -4; -2 \ \ \cup \ \ 6; 8 \ \ .$ Но, поскольку n – натуральное число, то получаем n=7. Тогда: C_7=0,25·7^2-7=12,25-7=5,25.

Ответ. $c_7 = 5{,}25.$

Задача 6. «№714. Найдите члены арифметической прогрессии, обозначенные буквами: a_1, a_2, 6, a_4, a_5, 48, a_7, …» [13, С. 173].

Решение: Исходя из условий задачи, имеем: $a_3 = 6,$ а $a_6 = 48.$ Но $a_3 = a_1 + 2d;$

$a_6 = a_1 + 5d.$ Тогда получаем систему уравнений:

$$\begin{matrix} a_1 + 2d = 6 \\ a_1 + 5d = 48 \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} a_1 = 6 - 2d \\ a_1 = 48 - 5d \end{matrix} \Rightarrow 6 - 2d = 48 - 5d;$$

$$5d - 2d = 48 - 6 \Rightarrow 3d = 42 \Rightarrow d = 14; a = 6 - 28 = -22.$$

Теперь, зная первый член и разность прогрессии, можем найти остальные члены:

$$a_2 = -22 + 14 = -8;\ a_4 = 6 + 14 = 20;\ a_5 = 20 + 14 = 34;$$

$$a_7 = 48 + 14 = 62.$$

Ответ. -22; -8; 20; 34; 62.

3. Задачи на составление формулы n-го члена последовательности по условию.

Задача 7. «№21.04. Последовательность задана рекуррентным соотношением $a_{n+1}=(n+1)\cdot a_n$; $a_1=1$. Задайте ее формулой общего члена» [9, С. 151].

Решение: Если $a_1=1$, тогда $a_2=2\cdot a_1=2$; $a_3=3\cdot 2=6$; $a_4=5\cdot 6=30$.

Нетрудно заметить, что каждый член данной последовательности получается путем разложения номера члена на множители от 1 до n. Значит, данную последовательность можно задать следующей формулой общего члена: $a_n=n!$.

Ответ. $a_n=n!$.

Задача 8. «№23.01. Напишите формулу общего члена арифметической прогрессии, если: а) $a_1=7$, d=2,5; б) $a_1=0,1$, d=-0,3» [9, С. 161].

Решение: а) Поскольку $a_n = \boldsymbol{a_1} + d\ \ n - \mathbf{1}$, то получаем:

$a_n = 7 + 2{,}5\ \ n - 1\ \ = 7 + 2{,}5n - 2{,}5 = 4{,}5 + 2{,}5n.$

б)Аналогично предыдущему примеру получаем: $a_n = \mathbf{0{,}1} - \mathbf{0{,}3}\ \ n - \mathbf{1}$;

$a_n = \mathbf{0{,}1} - \mathbf{0{,}3}n + \mathbf{0{,}3} = \mathbf{0{,}4} - \mathbf{0{,}3}n.$

Ответ. а)$a_n = \mathbf{4{,}5} + 2{,}5n$; б) $a_n = \mathbf{0{,}4} - \mathbf{0{,}3}n$.

Задача 9. «№738. Задайте формулой n-го члена последовательность: а) треугольных чисел; б) пятиугольных чисел» [13, С. 177].

Задача 10. «№24.01. Напишите формулу общего члена геометрической прогрессии, если а) $a_1=0,25$, q=2; б) $a_1= \overline{2}$, q=-1» [9, С. 175].

Решение: а) Если $a_1=0,25$, q=2, а $a_n = \boldsymbol{a_1} \cdot q^{n-\mathbf{1}}$,то $a_n = \mathbf{0{,}25} \cdot 2^{\boldsymbol{b}-\mathbf{1}}$;

б) Если $a_1= \overline{2}$, q=-1, то $a_n = \ \overline{2} \cdot 1^{n-\mathbf{1}}$,**но** единица в любой степени равна 1, значит: $a_n = \ \overline{2}$.

Ответ. а) $a_n = 0{,}25 \cdot 2^{b-1}$; б) $a_n = \ \overline{2}$.

4. *Исследование последовательности на монотонность.*

Задача 11. «№22.05. Исследуйте последовательность на монотонность: а) a_n=3n+1; б) $b_n=\frac{5}{3n+1}$» [9, С. 157].

Решение: а) Рассмотрим разность n-го члена данной последовательности и её (n+1)-го члена: $a_{n+1} = 3\ n+1\ +1 = 3n+3+$ $+1 = 3n+4; a_n - a_{n+1} = 3n+1-\ 3n+4\ = 3n+1-3n-4 = -3 < 0$ $=> \forall n \in N => a_n < a_{n+1}$, значит последовательность (a_n) - возрастающая.

б) Рассмотрим отношение n-го члена последовательности к её (n+1)-му члену: $b_{n+1} = \frac{5}{3\ n+1\ +1} = \frac{5}{3n+4}; \frac{b_n}{b_{n+1}} = \frac{5}{3n+1} : \frac{5}{3n+4} = \frac{5}{3n+1} \cdot \frac{3n+4}{5} = \frac{3n+4}{3n+1} > 1 =>$ $b_n > b_{n+1} => (b_n)$ – возрастающая последовательность.

Ответ. а) (a_n) – возрастающая последовательность; б) (b_n) – возрастающая последовательность.

5. *Исследование последовательности на ограниченность.*

Задача 12. «№677. Является ли ограниченной последовательность: десятичных приближений дроби $\frac{7}{11}$, взятых с недостатком с точностью до 0,1; 0,01; 0,001 и т. д.» [13, С. 163].

Решение: $a_1 = 0{,}6; a_2 = 0{,}64; a_3 = 0{,}636;\ a_4 = 0{,}6364; \ldots$
Значит, $0{,}6 \le a_n \le 0{,}64$ =>данная последовательность ограниченная.

Ответ. Да, является.

Задача 13. «№681. Является ли ограниченной последовательность (a_n), если: $a_n=-\frac{1}{3} \cdot 6^n$» [13, С. 162].

Решение: Если $a_n=-\frac{1}{3} \cdot 6^n$, то a_1=-2; a_2=-12; a_3=-72; …
$a_n \le -2$ => последовательность является ограниченной снизу.

Ответ. Да, является.

6. *Задачи на нахождение суммы n-первых членов прогрессии.*

Задача 14. «№788. Найдите сумму первых n членов геометрической прогрессии (a_n), если: $a_1 = -27, q = \frac{1}{3}, n = 6$» [13, С. 187].

Решение: сумма шести первых членов геометрической прогрессии можно найти по формуле: $S_6 = \frac{a_1\ q^6 - 1}{q-1} = \frac{-27\cdot\ \frac{1}{3}^6 - 1}{\frac{1}{3}} = \frac{-27\cdot\frac{-728}{729}}{-\frac{2}{3}} = \frac{\frac{728}{27}}{-\frac{2}{3}} =$

$= \frac{728}{27}\cdot\ -\frac{3}{2}\ = -\frac{364}{9} = -40\frac{4}{9}.$

Ответ. $-40\frac{4}{9}$.

Задача 15. «№742. Найдите сумму членов арифметической прогрессии:

а) -3,2; -2,4; …, не превосходящих 24;

б) 12,5; 11,9; …, больших, чем -1» [13, С. 177].

Решение: а) $a_n \le 24;\ a_1 = -3{,}2;\ a_2 = -2{,}4; d = a_2 - a_1 =$ $= -2{,}4 + 3{,}2 = 0{,}8$; значит: $a_n = -3{,}2 + 0{,}8\ \ n - 1\ \ = -3{,}2 + 0{,}8n - 0{,}8 =$ $= 0{,}8n - 4.\ a_n \le 24 => 0{,}8n - 4 \le 24 => n \le 35;\ a_{35} = -3{,}2 + 0{,}8\cdot 34 =$ $= 24.$

Поскольку нам известна формула для нахождения n первых членов арифметической прогрессии, то: $S_{35} = \frac{(-3{,}2+24)35}{2} = 364.$

б) $a_n > -1;\ a_1 = 12{,}5; a_2 = 11{,}9; d = -0{,}6;\ a_n = 12{,}5 - 0{,}6\ \ n - 1\ \ =$ $= 12{,}5 - 0{,}6n + 0{,}6 = 13{,}1 - 0{,}6n => 13{,}1 - 0{,}6n > -1 =>\ n < 23{,}5.$

$$a_{23} = 12{,}5 - 0{,}6\cdot 22 = -0{,}7.$$

Поскольку нам известна формула для нахождения n первых членов арифметической прогрессии, то: $S_{23} = \frac{(12{,}5-0{,}7)23}{2} = 135{,}7.$

Ответ. а) 364; б)135,7.

7. *Задания с параметром.*

Задача 16. «№672. При каких значениях параметра *a* является возрастающей последовательность (b_n), заданная формулой: $b_n = \frac{5n-a}{n}$» [13, С.160].

Решение: для ответа на вопрос задачи найдем разность n-го и (n+1)-го членов: $b_n - b_{n+1} = \frac{5n-a}{n} - \frac{5\ \ n+1\ \ -a}{n+1} = \frac{5n-a\ \ \ n+1}{n\ \ n+1} - \frac{n\ \ 5\ \ n+1\ \ -a}{n\ \ n+1} =$

$= \frac{5n^2-an+5n-a-n\ 5n+5-a}{n^2+n} = \frac{5n^2+5n-an-a-5n^2-5n+an}{n^2+n} = \frac{-a}{n\ n+1}$, т.к. $n\epsilon N$, то $n\ n+1\ >0$, значит $\frac{-a}{n(n+1)} < 0$ при $a>0$.

Ответ. При $a>0$.

Задача 17. «№24.07. Найдите все значения x, при котором 2-x; 2x-3; 4-3x в указанном порядке образуют геометрическую прогрессию» [9, С.176].

Решение: по определению геометрической прогрессией является числовая последовательность, в которой каждое последующее число, начиная со второго, получается из предыдущего, путем умножения его на знаменатель прогрессии, то есть получаем: $b_1 = 2 - x, b_2 = 2x - 3,$

$b_3 = 4 - 3x, q = \frac{b_2}{b_1} = \frac{2x-3}{2-x}, b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$.

По условию задачи имеем: $b_2 = b_1 \cdot q, b_3 = b_1 \cdot q^2 => b_2 = 2 - x \cdot \frac{2x-3}{2-x} =>$

$$=> b_2 = b_1 \cdot q;\ b_3 = 2 - x \cdot \frac{2x-3}{2-x}^2 => b_3 = \frac{2x-3^{\ 2}}{2-x} =>$$

$=> b_3 = \frac{4x^2-12x+9}{2-x}$. Таким образом, получаем следующее уравнение, откуда найдем значение для x: $4 - 3x = \frac{4x^2-12x+9}{2-x}$ =>ОДЗ: $2 - x \neq 0 => x \neq 2;$

$$4 - 3x\ \ 2 - x\ = 4x^2 - 12x + 9;$$

$$8 - 6x - 4x + 3x^2 - 4x^2 + 12x - 9 = 0;$$

$-x^2 + 2x - 1 = 0$ или $x^2 - 2x + 1 = 0$. Решим полученное квадратное уравнение через известную формулу дискриминанта: D=4-4$\cdot 1 \cdot 1 = 0 =>$

$x_{1,2} = \frac{2\pm\ \overline{0}}{2} = 1$, то есть, данная последовательность 2-x; 2x-3; 4-3x образует геометрическую прогрессию при x=1. Получится следующая геометрическая прогрессия: 1;-1; 1;… .

Ответ. 1.

8. Задачи на доказательство методом математической индукции.

Задача 18. «№25.01. Докажите равенство:

1+2+3+…+n= $\frac{n(n+1)}{2}$» [9, С. 186].

Решение: рассмотрим данное равенство справа налево при n=2: $\frac{n(n+1)}{2}=\frac{2(2+1)}{2}=\frac{6}{2}=3=1+2$. Таким образом, получаем, что существует n, для которого данное неравенство выполняется. Далее рассмотрим это же равенство для n+1: $\frac{(n+1)(n+1+1)}{2}=\frac{(n+1)(n+2)}{2}=\frac{n(n+1)}{2}+$ $+\frac{2(n+1)(n+1+1)}{2}=\ 1+..+n\ +\ n+1$. Теперь подставим в данную формулу m=n+1, получим: $\frac{m(m+1)}{2}=1+2+\dots+m,$ ч. т. д.

Задача 19. «№704. Докажите, что любой член последовательности (b_n) делится на 9: $b_n=4^n+15n-1$» [13, С.169].

Решение: т.к. $b_n=4^n+15n-1,$ то $b_1=4+15-1=18$ – делится на 9. Допустим b_n делится на 9. Докажем, что b_{n+1} делится на 9:

$$b_{n+1}=4^{n+1}+15\ n+1\ -1=4^n\cdot 4+15n+15-1=4\ 4^n+15n-1\ -$$

$$-4\ 15n-1\ +15n+14=4b_n-45n+18.$$

b_n – делится на 9 по индукции, 45 и 18 делятся на 9 => b_{n+1} также делится на 9. Что и требовалось доказать.

9. *Задачи на вычисление предела последовательности.*

Задача 20. «№819. Зная, что $\lim_{n\to\infty}a_n=2$ и $\lim_{n\to\infty}b_n=-1$, вычислите: $\lim_{n\to\infty}(2a_n+b_n)$ » [13, С.195].

Решение: воспользуемся свойством предела суммы:

$$\lim_{n\to\infty}(2a_n+b_n)\ =\lim_{n\to\infty}2a_n+\lim_{n\to\infty}b_n\ =4-1=3.$$

Ответ. 3.

Задача 21. «№820. Вычислите предел последовательности:

а) $\lim_{n\to\infty}\frac{2n-1}{n^2-n+2}$; б) $\lim_{n\to\infty}\frac{n^3+3n^2-1}{2n^3-n+3}$» [13, С.195].

Решение: а) $\lim_{n\to\infty}\frac{2n-1}{n^2-n+2}=\frac{\infty}{\infty}$ => разделим каждое слагаемое числителя и знаменателя на старшую степень n^2:

$$\lim_{n\to\infty}\ \frac{2n}{n^2}-\frac{1}{n^2}\ :(\frac{n^2}{n^2}-\frac{n}{n^2}+\frac{2}{n^2})=\lim_{n\to\infty}\ \frac{2}{n}-\frac{1}{n^2}\ :\ 1-\frac{1}{n}+\frac{2}{n^2}\quad =>$$

$=> \frac{2}{n} \to 0, \frac{1}{n^2} \to 0, \frac{1}{n} \to 0, \frac{2}{n^2} \to 0,$ получаем: $\lim\limits_{n\to\infty} \quad \frac{2}{n} - \frac{1}{n^2} \ : \ 1 - \frac{1}{n} + \frac{2}{n^2} \quad =$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{0}{1} = 0.$$

б) Вычислим данный предел, используя тот же метод, т.е. разделим каждое слагаемое данной дроби на старшую степень n^3:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^3 + 3n^2 - 1}{2n^3 - n + 3} = \lim_{n\to\infty} \frac{1 + \frac{3}{n} - \frac{1}{n^3}}{2 - \frac{1}{n^2} + \frac{3}{n^3}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1 + 0 - 0}{2 - 0 + 0} = 0{,}5.$$

Ответ. а) 0; б) 0,5.

10. Исследовать последовательность на сходимость.

Задача 22. «№810. Является ли сходящейся последовательность:

а) 3, 6, 9, …, 3*n*, …; б) $\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, -\frac{1}{n}, \dots$?» [13, С. 194].

Решение: для того, чтобы выяснить являются ли сходящимися данные последовательности, рассмотрим пределы от них при $n \to \infty$:

а) $\lim_{n\to\infty} 3n = \infty =>$ данная последовательность расходится;

б) $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0, \lim_{n\to\infty} -\frac{1}{n} = 0 =>$ последовательность сходится.

Ответ. а) нет; б) да.

11. Задачи на нахождение количества членов последовательности.

Задача 23. «№659. Сколько членов последовательности (b_n), где $b_n = \frac{n^2-12}{n}$, изображаются в координатной плоскости точками, расположенными внутри полосы, ограниченной прямыми $y=3$ и $y=6$? Найдите эти члены последовательности» [13, С. 157].

Решение: $b_n = \frac{n^2-12}{n}; 3 < \frac{n^2-12}{n} < 6 =>$ получаем систему:

$$\begin{cases} \frac{n^2-12}{n} > 3 \\ \frac{n^2-12}{n} < 6 \end{cases} => \begin{cases} \frac{n^2-12}{n} - 3 > 0 \\ \frac{n^2-12}{n} - 6 < 0 \end{cases} => \begin{cases} \frac{n^2-12-3n}{n} > 0 \\ \frac{n^2-12-6n}{n} < 0 \end{cases} => n \neq 0, \text{ значит:}$$

$$\begin{matrix} n^2 - 3n - 12 > 0 \\ n^2 - 6n - 12 < 0 \end{matrix} => \begin{matrix} D = 9 - 4 \cdot \ -12 \ = 57 \\ D = 36 - 4 \cdot \ -12 \ = 84 \end{matrix} => \begin{matrix} n_{1,2} = \dfrac{3 \pm \sqrt{57}}{2} \\ n_{1,2} = \dfrac{6 \pm \sqrt{84}}{2} \end{matrix} =>$$

$=> \begin{matrix} n_1 \approx -2{,}3;\ n_2 \approx 5{,}2 \\ n_1 \approx -1{,}6;\ n_2 \approx 7{,}6 \end{matrix}$; изобразим данные решения на числовой прямой (рисунок 3 и 4):

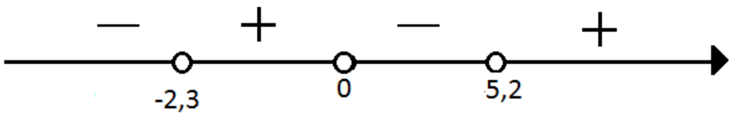

Рисунок 3 - Решение уравнения 1

Очевидно, что $-2{,}3 < n < 0, n > 5{,}2$.

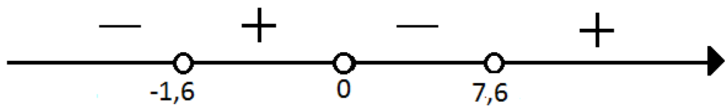

Рисунок 4 - Решение уравнения 2

Также очевидно, что $n < -1{,}6, 0 < n < 7{,}6$. Исходя из этого получаем:

$n \epsilon \ -2{,}3; -1{,}6 \ \cup \ 5{,}2; 7{,}6 \ => 6{,}7 \in \ 5{,}2; 7{,}6$, значит:

$$b_6 = \frac{6^2 - 12}{6} = 4;\ b_7 = \frac{7^2 - 12}{7} = 5\frac{2}{7}.$$

Ответ. $b_6 = 4, b_7 = 5\frac{2}{7}$.

Задача 24. «№23.08. Найдите число членов и сумму арифметической прогрессии:

а) -1; 7; …; 287» [9, С. 162].

Решение: а) исходя из условия, имеем: $a_1 = -1;\ a_2 = 7;\ a_n = 287$. Найдем разность данной прогрессии: $d = 7 + 1 = 8$. Поскольку $a_n = a_1 + d \ n - 1$, то $287 = -1 + 8 \ n - 1 \ => 287 = -1 + 8n - 8$; $-8n = -296 => n = 37$, таким образом, мы выяснили, что нам дана арифметическая прогрессия, состоящая из 37 членов. Теперь найдем её сумму: $S_{37} = \frac{(a_1 + a_{37})37}{2} = \frac{-1 + 287 \ 37}{2} = 143 \cdot 37 = 5291$.

Ответ. 37; $S_{37} = 5291$.

12. Задачи на комбинацию арифметической и геометрической прогрессий.

Задача 25. «№24.50. Числа x, y, z в указанном порядке образуют одновременно арифметическую и геометрическую прогрессии. Найдите эти числа» [9, С. 181].

Решение: пусть $c_1 = x, c_2 = y, c_3 = z$. Для арифметической прогрессии имеем: $d = y - x, z = x + 2y - 2x => z = 2y - x$.

Для геометрической прогрессии имеем: $q = \frac{y}{x}, z = x\left(\frac{y}{x}\right)^2 = \frac{y^2}{x}$.

Получаем: $2y - x = \frac{y^2}{x} => y^2 = x(2y - x) => y^2 = 2xy - x^2 =>$

$$=> y^2 - 2xy + x^2 = 0 => (x - y)^2 = 0 => x = y => z = x = y.$$

Таким образом, числа x, y, z в указанном порядке могут быть любыми равными числами.

Задача 26. «№24.56. Арифметическая и геометрическая прогрессии имеют первые равные члены, равные 1; третий член арифметической прогрессии равен второму члену геометрической прогрессии, а сумма первого и третьего членов геометрической прогрессии вдвое больше суммы второго и третьего членов арифметической прогрессии. Найдите эти прогрессии» [9, С. 182].

Решение: по условию $a_1 = b_1 = 1, a_3 = b_2,\ b_1 + b_3 = 2(a_2 + a_3)$. По определению арифметической и геометрической прогрессий имеем:

$a_2 = a_1 + d = 1 + d, a_3 = 1 + 2d, b_2 = q,\ b_3 = q^2, d = a_2 - 1, q = b_2 = a_3$.

Значит: $q = 1 + 2d,\ b_1 + b_3 = 2(a_2 + a_3) => 1 + q^2 = 2(a_2 + q) =>$

$$=> 1 + (1 + 2d)^2 = 2(1 + d + 1 + 2d) => 2 + 4d + 4d^2 = 4 + 6d =>$$

$$=> 4d^2 - 2d - 2 = 0 => 2d^2 - d - 1 = 0 => D = 1 - 4 \cdot 2 \cdot (-1) = 9,$$

$$d_1 = \frac{1 + 3}{4} = 1;\ d_2 = \frac{1 - 3}{4} = -0{,}5.$$

Если $d = 1$, то $q = 3, a_n = n, b_n = 3^n$. Значит, арифметическая и геометрическая прогрессии будут следующими: 1, 2, 3, …, n и 1, 3, 9, …, 3^n.

Если $d = -0{,}5$, то $q = 0$, $a_n = 1 - 0{,}5\ n - 1\ = 1{,}5 - 0{,}5n, b_n = 1 \cdot 0^n$, что противоречит условию $b_1 = 1$.

Ответ. 1, 2, 3, …, n и 1, 3, 9, …, 3^n.

13. Решение уравнений.

Задача 27. «№743.Найдите x, зная, что слагаемые в левой части уравнения составляют арифметическую прогрессию:

а) 2+8+14+…+x=184» [13, С. 177].

Решение: 2+8+14+…+x=184, $a_1 = 2, d = 8 - 2 = 6, a_n = \frac{x}{4} + \frac{1}{2} =>$

$$=> x = 2 + 6\ n - 1\ = 6n - 4 => n = \frac{x}{6} + \frac{2}{3}; S_n = \frac{n\ 2 + x}{2} = 184;$$

$$2 + x\quad \frac{x}{5} + \frac{2}{3}\ = 368 => \frac{x^2}{6} + x - \frac{1100}{3} = 0 =>$$

$x^2 + 6x - 2200 = 0 => D = 8836; x_1 = -50$ – не удовл. усл. задачи, $x_2 = 44$.

Ответ. 44.

14. Задачи на нахождение разности (знаменателя) арифметической (геометрической) прогрессии.

Задача 28. «№750. В арифметической прогрессии (a_n) найдите a_1 и d, если: а) $\frac{a_3}{a_6} = 2, S_8 = 72$» [13, С. 178].

Решение: а) $a_3 = a_1 + 2d, a_6 = a_1 + 5d, a_8 = a_1 + 7d, S_8 = 4(2a_1 + 7d)$

Отсюда получаем систему: $\begin{cases} \frac{a_1 + 2d}{a_1 + 5d} = 2 \\ 2a_1 + 7d = 18 \end{cases} => \begin{cases} a_1 + 2d = 2\ a_1 + 5d \\ 2a_1 + 7d = 18 \end{cases} =>$

$$\begin{cases} -a_1 - 8d = 0 \\ 2a_1 + 7d = 18 \end{cases} => \begin{cases} -2a_1 - 16d = 0 \\ 2a_1 + 7d = 18 \end{cases} => -9d = 18 => d = -2, a_1 = 16.$$

Ответ. $d = -2, a_1 = 16$.

Задача 29. «№797. Известно, что геометрическая прогрессия (b_n) содержит $2n$ членов. Сумма членов, стоящих на чётных местах равна S_1, а сумма членов, стоящих на нечётных местах, равна S_2. Найдите знаменатель прогрессии» [13, С. 188].

Решение: исходя из условия получаем:

$$S_1 = b_2 + b_4 + \cdots + b_{2n}, \qquad S_2 = b_1 + b_3 + \cdots + b_{2n-1}.$$

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{b_2 + b_4 + \cdots + b_{2n}}{b_1 + b_3 + \cdots + b_{2n-1}} => \frac{S_1}{S_2} = \frac{b_1 q + b_1 q^3 + \cdots + b_1 q^{2n-1}}{b_1 + b_1 q^2 + \cdots + b_1 q^{2n-2}} =>$$

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{b_1 q(1 + q^2 + \cdots + q^{2n-2})}{b_1(1 + q^2 + \cdots + q^{2n-2})} => \frac{S_1}{S_2} = q.$$

Ответ. $\frac{S_1}{S_2}$.