МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«Тольяттинский государственный университет»

Институт математики, физики и информационных технологий
(наименование института полностью)
Кафедра «Высшая математика и математическое образование»
(наименование кафедры)

44.03.05 «Педагогическое образование»
(код и наименование направления подготовки)
«Математика и информатика»
(направленность (профиль))

БАКАЛАВРСКАЯ РАБОТА

на тему **«МЕТОДИКА ОБУЧЕНИЯ РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ НА ДОКАЗАТЕЛЬСТВО И ПРИМЕНЕНИЕ «ИМЕННЫХ» ТЕОРЕМ ШКОЛЬНОГО КУРСА МАТЕМАТИКИ ОСНОВНОЙ ШКОЛЫ»**

Студент Е.А. Зидыганова ______________
(И.О. Фамилия) (личная подпись)

Руководитель д.п.н., профессор Р.А. Утеева ______________
(И.О. Фамилия) (личная подпись)

Консультант ст.преподаватель А.В. Прошина ______________
(И.О. Фамилия) (личная подпись)

Допустить к защите
Заведующий кафедрой д.п.н., профессор Р.А. Утеева ______________
(ученая степень, звание, И.О. Фамилия) (личная подпись)

«____»__________2018

Тольятти 2018

АННОТАЦИЯ

Название работы «Методика обучения решению задач на доказательство и применение «именных» теорем школьного курса математики основной школы.»

Цель бакалаврской работы – выявить методические основы обучения школьников решению задач на доказательство и применение «именных» теорем курса математики основной школы.

Бакалаврская работа состоит из введения, двух глав, заключения и списка литературы.

Во введении определенны основные характеристики исследования: проблема, цель, задачи, объект, предмет и методы исследования.

Глава I посвящена теоретическим основам обучения решения задач на доказательство и применение «именных» теорем школьного курса математики основной школы. Представлена история развития «именных» теорем в математике. Рассматриваются «именные» теоремы школьного курса алгебры и геометрии, такие как: теорема Виета, теорема Безу, теоремы Чевы и Менелая, Фалеса и Вариньона, теорема Пифагора, теорема Эйлера, формула Герона. Приведены различные способы их доказательства. Рассмотрены задачи на применение «именных» теорем.

Глава II содержит методические основы обучения решению задач на доказательство и применение «именных» теорем школьного курса математики основной школы. Выделены основные цели обучения «именным» теоремам и требования к знаниям обучающихся. Приведены методические рекомендации по обучению доказательства и применения «именных» теорем школьного курса алгебры и геометрии основной школы.

В заключении представлены основные выводы и результаты проведенного исследования.

Список литературы содержит 48 наименований.

ABSTRACT

The title of the thesis is “Methodology of teaching the problems’ solution using proof and application of “nominal” theorems in the Mathematics course of secondary school”.

The aim of the thesis is to identify methodological grounds of teaching pupils how to solve mathematical problems by means of proof and application of “nominal” theorems in the Mathematics course of secondary school.

The introduction defines the main characteristics of the study: the problem, the purpose, the object, the subject and methods of research.

Chapter I is devoted to the theoretical grounds of solving problems by means of proof and application of “nominal” theorems in the Mathematics course in secondary school. There given the history of the “nominal” theorems development in Mathematics. The “nominal” theorems of the school course of Algebra and Geometry, such as: Vieta's theorem, Bezout's theorem, Cheva and Menelaus theorems, Thales and Warignon theorem, Pythagoras theorem, Euler's theorem, Heron's formula – are considered. Also different ways of their proofs for “nominal” theorems are described.

Chapter II contains the methodological grounds of how to teach mathematical problems’ solving by means of proof and application of “nominal” theorems in the Mathematics course in secondary school. The main goals of teaching “nominal” theorems and requirements for the disciples' knowledge are highlighted here. Methodological recommendations on how to teach the approach are considered too.

The conclusion contains the summary and the results of the study.

The thesis consists of 81 pages, containing 8 tables, 27 figures and a graphic part containing 26 sheets, the list of 47 references including foreign sources and 9 appendices.

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Актуальность исследования. Термин «теорема» произошел от греческого слова $\tau\varepsilon o\rho\varepsilon\mu\alpha$ – представление, зрелище. Данная формулировка связана с тем, что раньше в древности люди доказывали теоремы публично на площадях, где велись споры [9, С. 8]. Некоторые теоремы, которые имели обоснованное доказательство стали иметь своё название, которое давалось в честь ученого, нашедшего доказательство или повлиявшего на её возникновение (такие теоремы относят к «именным»). «Именные» теоремы хранят в себе историю, связанную с эпохой и достижениями науки, а также биографией их создателей.

В Примерной образовательной программе [34] сформулированы следующие *предметные результаты* освоения математики обучающимися 5-9 классов на базовом уровне, которые должны:

− описывать отдельные выдающиеся результаты, полученные в ходе развития математики как науки;

− знать примеры математических открытий и их авторов, в связи с отечественной и всемирной историей;

− понимать роль математики в развитии России.

С «именными» теоремами ученики могут познакомится в 5-6 классах, но основное изучение данной темы идет с 7-9 классов . Изучение «именных» теорем (Виета, Безу, Чевы, Менелая, Фалеса, Вариньона, Пифагора, Эйлера, Герона, Птолемея и др.) в школьном курсе математики − это возможность вместе с обучающимися погрузиться в историю математических идей и открытий. Однако на практике учителя не всегда используют методические особенности именных теорем, не уделяют должного внимания на содержание исторического компонента, объясняя это нехваткой времени на уроке и недостаточным количеством в учебниках задач на применение перечисленных теорем. Поэтому разработка системы задач и методики включения её в содержание уроков и внеурочной деятельности при изучении «именных» теорем представляется актуальной проблемой.

«Именные» теоремы встречаются и в курсе информатики основной школы (приложение 9) , на данный момент «именные» теоремы шикороко используются для построения алгоритмов в программировании на разных языках. В частности для решения задач по заданным свойствам. Так же с применением именных теорем строится обучение искусственного интеллекта.

Проблема исследования: выявление методических основ обучения школьников решению задач на доказательство и применение «именных» теорем курса математики основной школы

Объектом исследования является процесс обучения математике в основной школе.

Предмет исследования: методика обучения школьников решению задач на доказательство и применение «именных» теорем курса математики основной школы.

Цель работы: выявить методические основы обучения школьников решению задач на доказательство и применение «именных» теорем курса математики основной школы.

Задачи исследования:

1. Изучить историю возникновения «именных» теорем.

2. Проанализировать теоретический и задачный материал по «именным» теоремам, представленный в учебниках различных авторов

3. Выявить основные цели и задачи обучения «именным» теоремам.

4. Выделить основные требования к знаниям и умениям учащихся по теме «именные» теоремы.

5. Разработать методические рекомендации по обучению доказательству и применению «именных» теорем школьного курса математики основной школы.

Методы исследования: анализ научно-методической литературы по теме исследования; систематизация и обобщение теоретического и задачного материала.

Выпускная квалификационная работа состоит из введения, двух глав, заключения.

Во введении сформулированы основные характеристики исследования: проблема, цель, задачи, объект, предмет и методы исследования.

В первой главе изучается история возникновения «именных» теорем. Рассматриваются формулировки теорем в различных учебниках и их доказательства, а также представлены задачи, решения которых основаны на применении указанных теорем.

Вторая глава посвящена методическим основам обучения решению задач на доказательство и применению именных теорем. В ней рассмотрены цели изучения «именных» теорем, методические рекомендации по обучению доказательствам и решению задач, связанных с данными теоремами.

В заключении сформулированы основные результаты и выводы проведенного исследования.

Апробация результатов исследования. Теоретическая часть работы была представлена в 2018 году на 1-ом этапе научно-практической конференции «Студенческие дни науки в ТГУ» и удостоилась II места в конкурсе докладов по направлению «Теория и методика обучения математике».

ГЛАВА I. ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ОБУЧЕНИЯ РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ НА ДОКАЗАТЕЛЬСТВО И ПРИМЕНЕНИЕ «ИМЕННЫХ» ТЕОРЕМ ШКОЛЬНОГО КУРСА МАТЕМАТИКИ ОСНОВНОЙ ШКОЛЫ

§1. Из истории развития «именных» теорем в математике

За «именными» теоремами стоит большая история. Вспомним историю их создания и их создателей, опираясь на книги по истории математике [3,9,35,42,45-46]. Так к примеру, **теорема Виета**, названная в честь французского математика **Франсуа Виета** (1540-1603). Математик родился во Франции в городке Фонтене-ле-Конт. По началу Виета решил пойти по стопам отца и стать юристом, но через определенный промежуток времени, он ушел на службу к известной семье, где обучал их дочку, с этого момента и началось увлечение данной наукой.

Франсуа Виет внес в алгебраическую запись чисел обозначения буквами [9, С. 164]. При этом важно то, что он изображал буквами не только неизвестные величины, но и числовые коэффициенты. Он ввел в употребление само слово «коэффициент» (что означает «содействующий») [45, С.49]. Теорема, выражающая связь между коэффициентами квадратного уравнения и его корнями, носящая имя Виета, была им сформулирована в 1591 г. следующим образом: «Если $B + D$, умноженное на A минус A^2, равно BD, то A равно B и равно D» Если переводить на современный язык, то A означает неизвестное , то есть x. Гласные B, D – коэффициенты при неизвестном. Получаем, если имеет место, что $a + b\ x - x^2 = ab$ (то есть $x^2 - \ a + b\ x + ab = 0$), то $x_1 = a, x_2 = b$. Выражая зависимость между корнями и коэффициентами уравнений общими формулами, записанными с помощью символов, Виет установил единообразие в приемах решения уравнений. Однако символика Виета еще далеко от современного вида. Он не признавал отрицательных чисел и поэтому при решении уравнений рассматривал лишь случаи, когда все корни положительны.

Еще один французский математик, в честь которого была названа теорема - **Этьенн Безу** (1730 – 1783). Он родился в Немуре (городок в центральной части Франции), является членом Парижской Академии наук. С 1713 Безу начинает преподавать математику в училище гардемаринов, далее в 1768 и в Королевском артиллерийском училище. Благодаря **теореме Безу**, можно легко разложить многочлен высшей степени на множители, что облегчает решение многих заданий. Основные его работы посвящены созданию теории решения алгебраических уравнений.

Фалес Милетский (ок. 625-546 до н.э.) – древнегреческий философ и математик. Он считается родоначальником греческой философии и науки. Фалеса считаю первым, кто доказал ряд теорем. Ему приписывают открытие и доказательства теорем о том, что диаметр делит круг пополам, о равенстве вертикальных углов, об основном свойстве равнобедренного треугольника и др. [9, С. 257]. Фалес внес большой вклад в астрономию. Платон, греческий философ IV в. до н. э., писал, что Фалес, наблюдая за звездами, упал в колодец, а женщина, которая стояла рядом, посмеялась над ним и сказала: «Хочет знать, что делается на небе, а что у него под ногами, не видит…» Значительную славу ему принесло предсказание солнечного затмения в 585 г. до н. э. Фалес был причислен к группе «семи мудрецов» древности.

Формулировка, про пропорциональность отрезков, образующих на прямых, пересеченных несколькими параллельными прямыми, была известна еще вавилонским ученым, но это открытие приписывают Фалесу Милетскому. Случай, когда два треугольника равны между собой, если они не имеют по одной равной стороне и два равных угла, прилежащих к этой стороне, вошел в историю под названием **теоремы Фалеса** [3, С. 47]**.** Эта теорема применялась Фалесом при практическом определении расстояния до недоступного предмета.

Пьер Вариньон (1654 – 1722) – французский математик, член Парижской Академии наук. Ему принадлежит термин «логарифмической спирали», благодаря ему братья Бернулли могли размещать свои работы по исчислению бесконечных малых в «Журнале ученых», которым он руководил. Так же он написал учебник по элементарной геометрии, в котором как раз появилась **«терема Вариньона»**. Учебник вышел во Франции в 1731, после смерти Вариньона.

Герон Александрийский (примерно I или II в до н. э.) - годы его жизни точно не известны. Удивительный ученый, который помимо математики увлекался и механикой, и гидростатикой и оптикой. Он первым изобрел автоматические двери, театр кукол, прибор для протяженности дорого и др. Герон создал формулу, по которой можно найти площадь треугольника через полупериметр и длины всех его сторон. Формула, названная в честь ученого, была изложена и доказана в его произведении «Метрика». Данную формулу относят к «именным» теоремам. Эта формула была еще открыта Архимедом в III в до н.э. Помимо формулы, в честь Герона назвали кратер на обратной стороне Луны в 1976 г.

Клавдий Птолемей (II до н.э.) работал в области астрономии, в своих работах он не разделял часы на дневные и ночные, а считал их равными по продолжительности. Главная работа Птолемея называлась «Великое математическое построение». В историю она вошла под названием «Альмагест». В этой работе появляется **теорема Птолемея** и формулируется так: «Произведение длин диагоналей вписанного в круг четырехугольника равно сумме произведений длин его противоположных сторон» [3, С. 91].

Менелай Александрийский (около 100 лет до н. э). Современник Никомаха, астроном и геометр, написал трактат о сферических треугольниках, носивший название «Сферика». Трактат состоит из трех книг. В этом же труде **Менелая** находится его знаменитая **теорема**, которую в современной трактовке можно изложить так: «Если какая-нибудь прямая линия пересекает три стороны треугольника или их продолжения, то произведение трех отрезков, не имеющих общих точек, равно произведению трех других отрезков». Менелай впервые рассматривает тригонометрию отдельно от алгебры и геометрии.

Джованни Чева (1647 – 1734) – итальянский математики. В 1678 году, Джованни Чева опубликовал теорему о взаимно пересекающихся прямых. Впоследствии она получила название **«теорема Чева».** Это теорема, которая была доказана еще древнегреческим математиком и астрономом Менелаем Александрийским, жившим в I веке до нашей эры и теорема.

Теорема сегодня является классической теоремой геометрии треугольника. Говоря простым языком, Чева изобрел некий общий метод, позволяющий по положению точек на сторонах треугольника определять, пересекаются ли соответствующая тройка прямых в одной точке или нет. Кроме того, отрезок (или продолжение отрезка), соединяющий вершину треугольника с точкой, лежащей на противоположной стороне или ее продолжении, назвали в честь Чевы Джованни - *чевианой*. Чева является ученным, который смог применить в экономике методы математики.

Пифагор Самосский (около 580- около 500 до н. э**)** родился на острове Самос, поэтому его называют Самосским. Пифагор был учеником Фалеса Милетского. Он является творцом арифметики и абстрактного мышления. Пифагор первым ввел термин «философия» и «космос». Ученый считал, что обучать молодежь нужно постепенно - от более легкого к сложному. Пифагор учил, что разумная система воспитания должна основываться на правильных примерах.

Трудно сказать, когда впервые стали пользоваться **теоремой Пифагора.** Но достоверно известно, что китайцы пользовались теоремой очень давно (примерно 2200 лет до н.э). Тогда её называли «законом о катетах и гипотенузе». В «Математике в девяти книгах» теорема употребляется под видом правила «Гоу-гу». Термины «гоу» и «гу» обозначали катеты прямоугольного треугольника («гоу» меньший катет, а «гу» - больший катет.) [42, С. 61]. Одна из формулировок звучит так:

«Умножь сам на себя каждый из катетов, сложи, извлеки из этого квадратный корень: это и будет гипотенуза.»

Самого вывода правила не дается, поэтому трудно сказать, каким путем древнекитайские математики установили это. Сам Пифагор (570 – 495 до н. э.) не открывал эту теорему, зато он первый нашел ей полноценное доказательство, поэтому в честь его и назвали теорему.

Леонард Эйлер (1707 -1783) родился в Базеле (город в Швейцарии). Является воспитанником Иоганна Бернулли.

Окончив университет в 19 лет, Эйлер не нашел подходящей работы и со временем уехал в Россию. В 1731 году ему была дана должность на кафедре высшей математики при Академии наук в Петербурге. С 1741 г – 1765 он работал в Берлинской академии наук, и не смотря на это ученый поддерживал связь с Россией.

Эйлера можно назвать отчасти русским математиком, так как он сам говорил, что своими успехами в науках он обязан тому, что работал в Российской академии наук. Россия для ученого являлась второй родиной.

Эйлер долгие годы активно трудился над составлением географических карт России, он был единственным академиком, который помогал изобретателю Кулибину составить и испытать проект моста через Неву [3, С. 285]. Большое число работ Эйлера связано с математическим анализом. Эйлер считается создателем в России первой научной математической школы. В 1752 году Леонард Эйлер доказал свою «именную» теорему. В данной теореме идет речь о многоугольнике, который рассматривается через такое понятие как граф – фигура, образованная конечным набором точек плоскости и отрезков, соединяющих некоторые из этих точек. С помощью этой теоремы школьники могут решать задачи-головоломки связанные с графами. Вопрос об обучении доказательству «именных» теорем затрагивается и на университетском уровне[44, 45, 48]. Рассмотрим «именные» теоремы поподробнее.

§2. «Именные» теоремы школьного курса алгебры и различные способы их доказательства

2.1 Теорема Виета

Познакомимся с различными формулировками теоремы Виета. Возьмем формулировку теоремы из учебника по алгебре 8 класса А.Г. Мордковича

Теорема Виета [24, С. 145]. Если x_1, x_2 – корни квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$, то сумма корней равно $-\frac{b}{a}$, а произведение корней равно $\frac{c}{a}$.

$$x_1 + x_2 = \frac{(-b)}{a};$$

$$x_1 x_2 = \frac{c}{a}.$$

В справочнике по математике [10, С. 135] формулировка звучит немного иначе: если приведенное квадратное уравнение $x^2 + px + q = 0$ имеет действительные корни, то их сумма равна $-p$, а произведение q, т. е.

$$x_1 + x_2 = -p;$$

$$x_1 x_2 = q.$$

(сумма корней приведенного квадратного уравнения равна второму коэффициенту, взятому с противоположным знаком, а произведение корней равно свободному члену).

Данная формулировка, появляется и в учебнике А.Г. Мордковича, но она не выделена как теорема [24, С. 146]. Она вытекает из теоремы, как частный случай для приведенного квадратного уравнения.

Доказательство [24, С. 145]. Корни квадратного уравнения находятся по формулам $ax^2 + bx + c = 0$:

$$x_{1,2} = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a}, x_2 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a}, \text{где } D = b^2 - 4ac.$$

$$x_1 + x_2 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a} + \frac{-b - \sqrt{D}}{2a} = \frac{-b}{a} = -b;$$

$$x_1 x_2 = \frac{-b+\sqrt{D}}{2a} \cdot \frac{-b-\sqrt{D}}{2a} = \frac{c}{a} = c.$$

В алгебре базового уровня [22, С. 149] дается теорема Виета и всё, а вот обратная теорема Виеты появляется лишь в учебниках углубленного (профильного) изучения алгебры.

Обратная теорема Виета [24, С. 147]. Если числа x_1, x_2 таковы, что $x_1 + x_2 = -p,\ x_1 x_2 = q$, то эти числа – корни уравнения $x^2 + px + q = 0$.

Доказательство. Рассмотрим наш квадратный трехчлен и воспользуемся тем, что $p = -(x_1 + x_2),\ q = x_1 x_2$. Подставим в $x^2 + px + q$:

$$x^2 + px + q = x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1 x_2 = (x^2 - x_1 x) - (x_2 x - x_1 x_2) =$$

$$= x(x - x_1) - x_2(x - x_1) = (x - x_1)(x - x_2).$$

Получили, что квадратное уравнение равно $(x - x_1)(x - x_2)$, отсюда следует, что его корнями являются числа x_1, x_2. Теорема доказана.

Однако основное назначение теоремы Виета не в том, что она выражает некоторые соотношения между корнями и коэффициентами квадратного уравнение. Важнее то, что с помощью этой теоремы выводится формула разложения квадратного трехчлена на множители.

Теорема (вытекающая из теоремы Виеты) [24, С. 147]. Если корни квадратного трехчлена x_1, x_2, то справедливо тождество

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2).$$

Доказательство. Вынесем из нашего квадратного трехчлена множитель a за скобки.

$$ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right).$$

Используем то, что $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ и $x_1 x_2 = \frac{c}{a}$, получим:

$$a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) = a(x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1 x_2) =$$

$$= a((x^2 - x_1 x) - (x_2 x - x_1 x_2)) = a(x - x_1)(x - x_2).$$

Что и требовалось доказать.

Теорема Виета может быть использована при исследовании корней квадратного уравнения по коэффициентам и дискриминанту [6, С. 223]. Исследуем корни $x^2 + bx + c = 0$ (приведенного квадратного уравнения) в зависимости от знаков b **и** c. Например, если $c < 0$, **то** $D > 0$, значит уравнение имеет два различных действительных корня с разными знаками, так как $x_1 x_2 = c < 0$.

В учебнике 9 класса Н.Я. Виленкин, теорема Виета дается более расширено, нежели чем в 8 классе.

Теорема Виета [7, С. 177]. Если целое рациональное уравнение n, приведенное к стандартному виду, имеет n различных действительных корней, то они удовлетворяют равенству и имеют следующие виды.

Для квадратных уравнений так же, как и в учебнике 8 класса, а в 9 классе появляется запись корней уравнения третьей степени $a_o x^3 + a_1 x^2 +$ $+a_2 x + a_3 = 0$, для которых справедливы равенства (2):

$$x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{a_1}{a_0}, x_1 x_2 + x_1 x_3 + \dots + x_{n-1} x_n = \frac{a_2}{a_0}$$

$$x_1 x_2 x_3 = -\frac{a_3}{a_0}.$$

Обратная теорема Виеты [7, С. 177]. Если выполняются равенства (2), то числа $x_1, x_2, \dots, x_n$ являются корнями целого рационального уравнения степени n стандартного вида

$$a_o x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n = 0.$$

Доказательство для уравнения высшей степени аналогичное, что и для квадратного уравнения, для этого нужно взять любое $n > 2$, поделить всё на a_0, преобразовать и получиться, что числа $x_1, x_2, \dots, x_n$ будут являться корнями уравнения $x - x_1 \quad x - x_2 \quad x - x_3 \cdot \dots \cdot x - x_n = 0$.

Из этого следует, что эти числа будут являть корнями уравнения

$$x^n + \frac{a_1}{a_0} x^{n-1} + \dots + \frac{a_{n-1}}{a_0} x + \frac{a_n}{a_0} = 0$$

Это равносильно уравнению $a_o x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n = 0$.

2.2 Теорема Безу

Данная теорема встречается в 9 классе в учебниках углубленного уровня изучения алгебры. Она используется для решения уравнений высших степеней, а точнее для разложения многочлена на множители. Тема в школе дается обычно вместе со схемой Горнера. Разберем несколько формулировок теоремы, которые даются в учебнике и в справочнике по элементарной математике.

Теорема Безу [31, С.74]. Для любого многочлена $n-$**й** степени $P(x)$ и для любого числа a имеет место тождество

$$P\ x\ =\ x-a\ Q\ x\ +P\ a\ ,$$

где $Q(x)$ – многочлен $(n-1)$-й степени $P\ a$ - значение многочлена $P(x)$ при $x=a$.

По-другому можно сказать, что если мы хотим разделить многочлен $P\ x$ на двучлен $x-a$, то в остатке у нас получится число $P(a)$. То есть, если мы хотим узнать остаток от деления многочлена на двучлен, то мы подставляем наше a в данный многочлен $P\ x$. Из теоремы Безу непосредственно вытекает важное следствие.

Следствие из теоремы Безу [31, С.74]. Если r – корень многочлена -й степени $P(x)$, то $P\ x\ =\ x-a\ Q\ x$, где $Q(x)$ – многочлен $(n-1)$-й степени.

Действительно, если r – корень многочлена $P(x)$, то слагаемое $P(r)$ в сумме $x-r\ Q\ r\ +P(r)$ обращается в нуль.

Попробуем решить уравнение $4x^3-13x^2+\ 5x-6=0$, используя теорему Безу. У нас дано уравнение третье степени, попробуем с помощью подстановки подобрать первый корень. Этот корень будет равен 3.Однако данное уравнение будет решен только тогда, когда мы найдем остальные два корня, или докажем, что их нет.

Теперь рассмотрим многочлен $P\ x\ =4x^3-13x^2+\ 5x-6.$

Согласно следствию из теоремы Безу, этот многочлен можно разложить на множители, одним их которых является двучлен $x-3$, а другим некоторый квадратный трехчлен $Q(x)$. Попробуем сгруппировать члены многочлена $P(x)$ так, чтобы в итоге вынести за скобки $x-3$.

$$4x^3-13x^2+5x-6=4x^3-12x^2-x^2+3x+2x-6=$$
$$=4x^2(x-3)-x(x-3)+2(x-3)=(x-3)(4x^2-x+2).$$

Кстати, кроме группировки можно использовать так же схему Горнера для нахождения коэффициентов многочлена $Q(x)$. Тогда найдем $P(3)$

Таблица 1

Схема Горнера

$x-a$	4	-13	5	-6
3	4	-1	2	0

Произведение многочленов обращается в нуль, когда в нуль обращается хотя бы один из них. Значит, мы можем смело приравнивать наш второй множитель к нулю, так как при $x=3$ первый множитель обратится в нуль. Если решить квадратное уравнения $4x^2-x+2=0$, получится что дискриминант меньше нуля, значит у него нет действительных корней. Значит, многочлен $P(x)$ имеет единственный корень.

Так даётся теорема Безу в учебнике Г.К. Муравина алгебра 9 класс. Если рассматривать справочник по элементарной математике [8, С. 108], то там теорема звучит таким образом:

Теорема Безу [8, С. 108]. Многочлен $a_o x^n+a_1x^{n-1}+\ ...+a_{n-1}x+a_n$ при делении на $x-l$ (где l –какое либо число) дает остаток

$$N=a_o l^n+a_1 l^{n-1}+\ ...+a_{n-1}l+a_n$$

Если многочлен, содержащий x, делить на двучлен первой степени $x-l$, где l –какое либо число (положительное или отрицательное), то в остатке может получится только многочлен нулевой степени, т.е некоторое число N (его еще называют остатком). Число N можно отыскать, не находя частного. Оно равно тому значению делимого, которое получается при $x=l$.

Доказательство. У нас есть два многочлена: $a_o x^n + a_{\mathbf{1}} x^{n-\mathbf{1}} + \ ...+ a_n$ и $x - l$. Обозначим первый многочлен за P, а второй за M.

Разделить многочлен P на многочлен M – значит найти многочлены Q (частное) и N (остатка), удовлетворяющие двум требованиям: 1) должно соблюдаться равенство $MQ + N = P$, 2) степень многочлена N должна быть ниже степени многочлена Q. (Остаток N может вовсе не содержать главной буквы; тогда говорят, что N имеет нулевую степень).

Исходя из вышесказанного, имеем

$$a_o x^n + a_{\mathbf{1}} x^{n-\mathbf{1}} + \ ...+ a_n = \ x - l \ \ Q + N$$

где $x - l$ – это M, Q- какой-то многочлен. Подставим сюда $x = l$, тогда $x - l \ \ Q$ пропадет, и мы получим

$$a_o l^n + a_{\mathbf{1}} l^{n-\mathbf{1}} + \ ...+ a_n = N$$

Может оказаться, что $N = 0$. Тогда l есть корень уравнения

$$a_o x^n + a_{\mathbf{1}} x^{n-\mathbf{1}} + \ ...+ a_{n-\mathbf{1}} x + a_n = 0.$$

Например, многочлен $x^3 + 5x^2 - 12$ при делении на многочлен $x + 1$ даст многочлен $x^2 + 2x - 6$ без остатка. Следовательно, -3 есть корень уравнения $x^3 + 5x^2 - 12 = 0$. Действительно,

$$(-3)^2 + 5(-3)^2 - 18 = 0.$$

Значит, если l есть корень уравнения $a_o x^n + a_{\mathbf{1}} x^{n-\mathbf{1}} + \ ...+ a_n = 0$, то левая часть этого уравнения будет делится на $x - l$ без остатка.

Возьмем, к примеру, число 2, которое является корнем уравнения третьей степени $x^3 - 3x - 2 = 0$. Следовательно, многочлен $x^3 - 3x - 2$ делится на $x - 2$ без остатка.

Проверим по определению деления, получим

$$(x^3 - 3x - 2) = (x - 2)(\, x^2 + 2x + 1).$$

Данная теорема встречается в 9 классе в учебниках углубленного изучения алгебры. Она используется для решения уравнений высших степеней, а точнее для разложения многочлена на множители. На базовом изучении математики теорема не встречается.

§3. «Именные» теоремы школьного курса геометрии и различные способы их доказательства

3.1 Теорема Фалеса и Вариньона

Одна из первых «именных» теорем, встречающихся в курсе геометрии, является теорема Фалеса и Вариньона, которую дети изучают в 8 классе. Обе теоремы основаны на свойствах и признаках параллелограмма. Поэтому их обычно изучают вместе.

Разберем формулировки теоремы в учебниках Л.С. Атанасяна и Л.В Погорелова.

Теорема Фалеса [1, С. 105]. Если на одной из двух прямых отложить последовательно несколько равных отрезков и через их концы провести параллельные прямые, пересекающие вторую прямую, то они отсекут на второй прямой равные между собой отрезки.

Так теорема формулируется в учебнике Л.С. Атанасяна, доказательство теоремы немного отличается, от того доказательства, которое даётся в учебнике А.В. Погорелова.

Теорема Фалеса [33, С. 72]. Если параллельные прямые, пересекающие стороны угла, отсекают на одной его стороне равные отрезки, то они отсекают равные отрезки и на другой стороне.

Для доказательства берут три параллельные прямые, которые пересекают сторону угла в точках A, B, C.

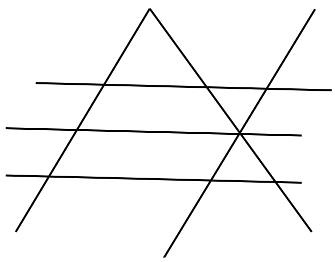


Рис. 1. Теорема Фалеса

Доказательство. Пусть A_1, B_1, C_1 - точки пересечения параллельных прямых с другой стороной угла. Требуется доказать, что если $AB = BC$, то $A_1B_1 = B_1C_1$.

Проведем через точку B_1 прямую MN, параллельную прямой AC. Рассмотрим параллелограммы $CAMN$, который состоит из двух параллелограммов CBB_1N и $BAMB_1$. По свойству $AB = MB_1$, $BC = B_1N$. Так как $AB = BC$, то $MB_1 = B_1N$.

Далее рассматривали два треугольника B_1A_1M и B_1C_1M, данные фигуры будут равны по второму признаку треугольника ($AB = MB_1$, **угол** B_1 **– вертикальный, а углы** $B_1MA_1 = B_1NC_1$, - как накрест лежащие углы.)

Так треугольники равны, то из этого следует, что $A_1B_1 = B_1C_1$. Теорема доказана.

Эта теорема применима не только при пересечении угла, но и при пересечении любых двух сторон: параллельные прямые, пересекающие две данные прямые и отсекающие на одной прямой равные отрезки, отсекают равные отрезки и на другой прямой.

Благодаря теореме Фалеса, можно доказать теорему о средней линией треугольника[33, С. 73]. Для её доказательства берут треугольник, в котором проведена средняя линия MK, параллельно основанию AB (Рис. 2.).

По теореме Фалеса данная прямая будет делить боковые стороны на два равных отрезка $AM = MC, BK = KC$.

Далее, проводят прямую KN параллельную боковой стороне AC.

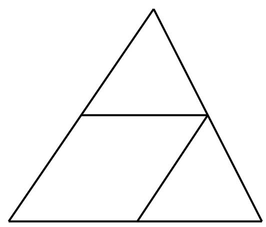


Рис. 2. Средняя линия

Полученный четырехугольник $AMKN$ является параллелограммом, а по его свойству $AN = MK$, а так как по теореме Фалеса $AN = NB$, $2MK = AB$.

Существует и обобщенная теорема Фалеса, которая встречается в дополнительных главах по геометрии [2, С. 83].

Обобщенная теорема Фалеса [2, С. 83]. Параллельные прямые, пересекающие две данные прямые, отсекают на этих прямых пропорциональные отрезки.

Для доказательства разбирают два случая. Первый случай это когда параллельные прямые пересекают две прямые, которые параллельны друг другу, второй, когда параллельные прямые пересекают две не параллельные прямые.

Доказательство. Рассмотрим два случая:

1) $a||b$. Рассмотрим рисунок 3, на котором прямая a рассечена параллельными прямыми на отрезки AB, BC, а прямая b – на отрезки A_1B_1, B_1C_1, причем $a||b$.

Здесь нужно доказать, что параллельные прямые пересекающие прямые a и b, отсекают на этих прямых пропорциональные отрезки

$$\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1}.$$

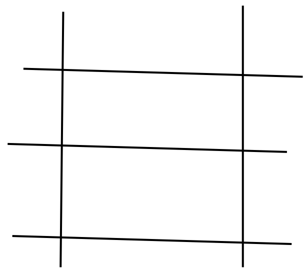


Рис. 3. Параллельные прямые

Для этого рассмотрим два четырёхугольника CBB_1C_1 и BAA_1B_1, которые являются параллелограммами.

Поэтому $AB = A_1B_1$ и $BC = B_1C_1$, откуда следует, что

$$\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1}.$$

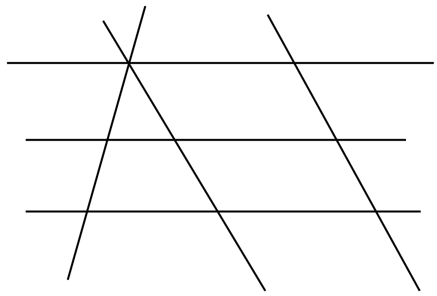


Рис. 4. Пересекающиеся прямые

2) Прямая a не параллельна прямой b Через точку A проведем прямую c параллельную прямой b.

Прямая c пересечёт прямую BB_1 в точке N и прямую CC_1 в точке M (Рис. 4.).

Рассмотрим треугольники ACM **и** ABN. Так как у них угол A – общий, а углы ABN **и** ACM равны как соответственные, то они подобны. Поэтому по свойству пропорций получаем:

$$\frac{AB}{AN} = \frac{AC}{AM} = \frac{AC - AB}{AM - AN}; \ \frac{AB}{AN} = \frac{BC}{NM}.$$

По теореме Фалеса $AN = A_1B_1$, $NM = B_1C_1$. Получаем, что теорема доказана

$$\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1}.$$

Доказанное утверждение называется обобщением теоремы Фалеса, поскольку теорема Фалеса содержится в этом утверждении как частный случай.

В самом деле, если отрезки AB и BC равны, то из этого $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1}$ последует, что отрезки A_1B_1 и B_1C_1 тоже равны. Это и есть теорема Фалеса.

Разберем теорему Вариньона, которая подробно рассматривается в дополнительных главах Л.С. Атанасяна.

Теорема Вариньона [2, С. 19]. Середины сторон произвольного четырехугольника являются вершинами параллелограмма.

Для доказательства рассматривают произвольный четырехугольник (Рис. 5.), на каждой стороне которого взята точка, являющаяся серединой его стороны.

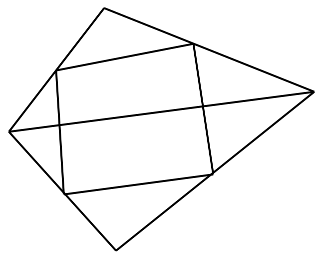


Рис. 5. Четырехугольник

Доказательство. Пусть дан четырехугольник $ABCD$, где точки S, E, H, Z – середины сторон AB, BC, CD, DA.

Если вершины B и D расположены напротив друг друга относительно прямой AC, то точки S и E лежат по одну сторону от прямой AC, а H и Z – по другую сторону от этой прямой.

Тогда по теореме о средней линии получаем:

$$SE||AC \text{ и } SE = \frac{1}{2}AC;$$

$$ZH||AC \text{ и } ZH = \frac{1}{2}\ AC.$$

По признаку параллельности трех прямых следует, что прямая SE тоже параллельна ZH и так как они обе равны половине AC, то они тоже равны.

Из равенства и параллельности эти сторон следует, что четырех угольник $SEZH$ является параллелограммом. Теорема доказана.

3.2 *Теоремы Чевы и Менелая*

В учебниках эти теоремы всегда даются вместе. Они встречаются в геометрии углубленного курса или в дополнительных главах 8 класса. В учебниках базового уровня эти теоремы не даются.

Теорема Чевы [2, С. 87]. Если на сторонах AB, BC и CA треугольника ABC взяты соответственно точки K, N, D, то отрезки $AN, BD,$ и CK, пересекаются в одной точке тогда и только тогда, когда рис. 6.

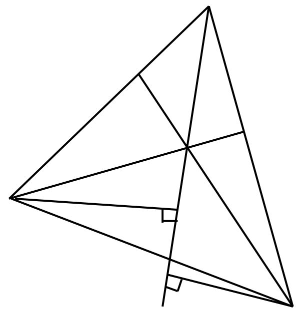


Рис. 6. Теорема Чевы

Доказательство [39, С. 86] Обозначим через O точку пересечения отрезков $AN, BD,$ и CK. Опустим из точек B и C перпендикуляры на прямую AN до пересечения с ней в точках H и Z.

Докажем данную теорему через отношения площадей. Для начала рассмотрим треугольники BOA и COA:

$$S_{BOA} = \frac{1}{2}(BH \cdot AO);\ S_{COA} = \frac{1}{2}\ CZ \cdot AO\ ;$$

$$\frac{S_{BOA}}{S_{COA}} = \frac{\frac{1}{2}(BH \cdot AO)}{\frac{1}{2}(CZ \cdot AO)} = \frac{BH}{CZ}.$$

Далее рассмотрим треугольники BNH и CNZ, они подобны по двум углам. Из подобия получаем, что

$$\frac{S_{BOA}}{S_{COA}} = \frac{BH}{CZ} = \frac{BN}{NC}.$$

Аналогично, рассматривая отношения площадей других треугольников, получаем, что

$$\frac{S_{BOC}}{S_{COA}} = \frac{BK}{KA} \text{ и } \frac{S_{AOB}}{S_{BOC}} = \frac{AD}{DC}.$$

$$\frac{AD}{DC} \cdot \frac{CN}{NB} \cdot \frac{BK}{KA} = \frac{S_{AOB}}{S_{BOC}} \cdot \frac{S_{COA}}{S_{BOA}} \cdot \frac{S_{BOC}}{S_{COA}} \cdot = 1.$$

Теорема Менелая [2, С. 89]. Если на сторонах AB и BC и продолжении стороны и AC (либо на продолжениях сторон AB, BC и AC) взяты соответственно точки K, N, D, то эти точки лежат на одной прямой тогда и только тогда, когда

$$\frac{AD}{DC} \cdot \frac{CN}{NB} \cdot \frac{BK}{KA} = 1.$$

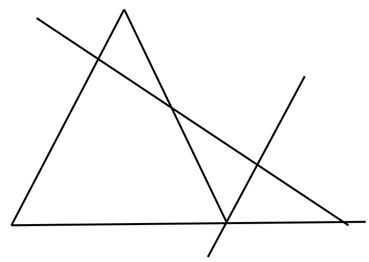


Рис. 7. Теорема Менелая

Существует несколько способов доказательства данной теоремы, один из них приведен в дополнительных главах по геометрии Л.С. Атанасян [2, С. 89]. Там автор доказывает теорему через обобщенную теорему Фалеса. Рассмотрим еще один способ доказательства теоремы

Доказательство [39, С. 85]. Проведем через точку C прямую, параллельную AB.

Обозначим через L точкой пересечения с прямой KN (Рис. 7.)

Докажем, через подобия треугольников, что

$$\frac{AK}{KB} \cdot \frac{BN}{NC} \cdot \frac{CD}{DA} = 1.$$

Треугольники AKD и CLD подобны, так как $\angle KAD = \angle LCD, \angle KDA$- общий. Тогда получим отношение сторон треугольников, выразим из него сторону CL.

$$\frac{CD}{DA} = \frac{CL}{AK}, \qquad CL = \frac{CD \cdot AK}{AD}.$$

Треугольники BKN и CLN также подобны по двум углам $\angle CNL = \angle BNK, \angle NKB = \angle CLN$ – как накрест лежащие при секущей KD. Выразим CL

$$\frac{CL}{KB} = \frac{NC}{BN}, CL = \frac{NC \cdot KB}{BN}$$

Приравняем CK и разделим всё на правую часть

$$\frac{CD \cdot AK}{AD} = \frac{NC \cdot KB}{BN};$$

$$\frac{AK}{KB} \cdot \frac{BN}{NC} \cdot \frac{CD}{DA} = 1.$$

3.3 Теорема Пифагора

Теорема, которая изучается во всех уровнях геометрии в 8 классе. Разберем различные способы доказательства данной теоремы.

Теорема Пифагора [1, С. 129]. В прямоугольном треугольнике квадрат гипотенузы равен сумме квадратов катетов.

Доказательство (1 способ). Теорема Пифагора, которая была известна еще индийскими учеными в VIII в. до н. э., встречалась дважды в алгебраическом сочинении [42, С. 142] Бхаскары «Виджа-Ганита».

Он доказывал теорему так: берет четыре равных прямоугольных треугольника и располагал их так, чтобы в середине часть, не занятая треугольниками, являлась квадратом, сторона у которого равна разности двух катетов [45, С.259].

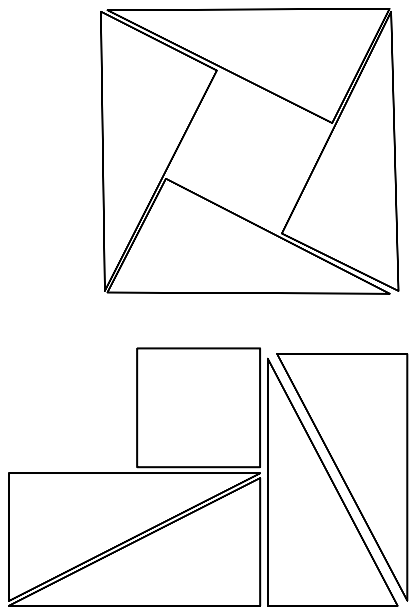


Рис. 8. Доказательство у Бхаскары

Доказательство. Допустим, меньший катет a, а b – больший катет, c-гипотезнуза, если расположить четыре одинаковых прямоугольника так, чтобы внутри оказался квадрат, равный разности катетов $a - b$, то получиться больший квадрат, со стороной c.

Тогда площадь большего квадрата будет равна $S = S_1 + S_2 + S_3 + S_4 + S_5$ или по-другому $S = c^2$, тогда если рассматривать со стороны фигур то

$$S = \frac{ab}{2} + \frac{ab}{2} + \frac{ab}{2} + \frac{ab}{2} + (b - a)^2$$

$$c^2 = a^2 + b^2$$

Бхаскара рассуждает по-другому: «Расположи те же части фигуры иначе, смотри». Теорема, по его мнению, доказана.

Из рассуждения Бхаскары видно, что в его способе доказательства важную роль играет чертеж и его наглядность, основанная на утверждении, что равносоставленные фигуры равны.

В дальнейшем к его доказательству решили добавить еще то, что нужно продлить линию квадрата на рисунке, для того чтобы получилось два разных по размеру квадрата, то есть один квадрат со сторонами меньшего катета, а другой со сторонами большего. И правда, квадрат меньшего катета и сумма их равна площади первого большого квадрата; корень же квадратный из нее есть сторона четырехугольника.

Потом ученый выводит такое правило: «Удвоенное произведение катетов, сложенное с квадратом их разности, равно сумме их квадратов, совершенной, как и для двух неизвестных количеств».

В современных обозначениях, запись этого правила выглядит так:

$$2ab + (a - b)^2 = a^2 + b^2$$

Второе доказательство теоремы основано на опускании перпендикуляра из вершины прямого угла на гипотенузу и рассмотрении полученных образом подобных треугольников.

Это доказательство вошло во все современные. Оно стало известно в Европе в XII в., благодаря английскому математику Джону Валлису (1616 - 1703).

Современное доказательство теоремы Пифагора можно найти в любом учебнике геометрии за 8 класс. Для начала вспомним, как она формулируется в современных учебниках.

Теорема Пифагора [1, С. 130] В прямоугольном треугольнике квадрат гипотенузы равен сумме квадратов катетов.

Доказательство (2 способ). Рассмотрим прямоугольный треугольник ABC с катетами a, b и гипотенузой c.

Достроим треугоьник до квадрата со стороной $a + b$. Площадь этого квадрата будет равна $(a + b)^2$.

Если рассмотреть с другой стороны, то этот квадрат будет состоять из четырех равных прямоугольных треугольников и квадратра, сторона которого будет равна гипотенузе (Рис. 11.).

Тоесть его площадь будет равна сумме площадей четырех прямоугольных треугольков и квадрата.

$$S = 4 * \frac{1}{2}ab + c^2 = 2ab + c^2 = 2ab + c^2;$$

$$(a + b)^2 = 2ab + c^2;$$

$$c^2 = a^2 + b^2$$

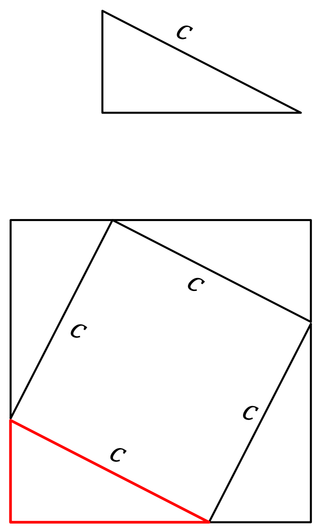


Рис. 9. Теорема Пифагора

Теорема доказана.

Обратная теорема Пифагора [1, С. 131]. Если квадрат одной стороны треугольник равен сумме квадратов двух других сторон, то треугольник прямоугольный.

Для того, чтобы доказать, что треугольник прямоугольный, нужно доказать, что у него есть прямой угол.

Доказательство.

Пусть в треугольнике $ABC, AB^2 = AC^2 + BC^2$. Докажем, что угол C прямой.

Для этого рассмотрим прямоугольный треугольник MNK с прямым углом K, причем $AC = MK$, а $BC = NK$.

По теореме Пифагора получим, что $MN^2 = MK^2 + NK^2$, значит $MN^2 = AB^2 + BC^2$.

По условию теоремы $AC^2 + BC^2 = AB^2$. Отсюда следует, что $MN^2 = AB^2$, значит $MN = AB$.

Так треугольники ABC и MNK равны по трем сторонам, то угол $K = C$. А это значит, что треугольник ABC прямоугольный.

Теорема доказана.

3.5 Формула Герона

Данная формула выражает площадь треугольника, через его стороны a, b, c и полупериметр p. В учебнике А.В. Погорелова выведение формулы Герона дается через задачу.

Формула Герона [37, С. 234]. Площадь треугольника со сторонами a, b, c выражается формулой

$$S = \sqrt{p\ \ p-a\ \ \ p-b\ \ (p-c)}$$

где p находится по формуле $p = \frac{1}{2}(a+b+c)$.

Доказательство. Формула Герона доказывается, через формулу $S = \frac{1}{2}absin\alpha$ и через теорему косинусов $c^2 = a^2 + b^2 - 2abcos\alpha$. Для этого выразим $cos\alpha$ теоремы косинусов и подставим её в формулу.

$$cos\alpha = \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}, sin^2\alpha = 1 - cos^2\alpha = \ 1 - cos\alpha \ \ \ 1 + cos\alpha\ ,$$

$$sin\alpha^2 = \ \ 1 - \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab} \ \ \ 1 + \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}\ ,$$

$$sin\alpha^2 = \ \ \frac{2ab - a^2 - b^2 + c^2}{2ab} \ \ \ \frac{2ab + a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

$$sin\alpha^2 = \ \ \frac{c^2 - (a-b)^2}{2ab} \ \ \ \frac{a+b\ ^2 - c^2}{2ab}\ ,$$

$$sin\alpha^2 = \frac{1}{4a^2b^2}\ \ c-a+b\ \ \ c+a-b\ \ \ a+b-c\ \ \ a+b+c\ .$$

Так как выражение можно представить в виде $\ a+b+c\ = 2p$, то получим $\ a+b-c\ = 2p-2c$, $\ c+a-b\ = 2p-2$, $\ c-a+b\ = 2p-2a$, тогда

$$sin\alpha = \frac{2}{ab}\ \sqrt{p\ \ p-a\ \ \ p-b\ \ (p-c)}.$$

Подставим в $S = \frac{1}{2}absin\alpha$, получим Формулу Герона

$$S = \sqrt{p\ \ p-a\ \ \ p-b\ \ (p-c)}$$

§4. Задачи на доказательство и применение «именных» теорем

Разберем, какие задачи встречаются на применение «именных» теорем в базовом и углубленном уровнях (приложение 1-6).

Типы задач на применение теоремы Виета

Тип 1. Решение квадратных уравнений.

Задача 1 [10, С. 135]. Решить уравнение $x^2-9x+14=0$ с помощью теоремы Виета.

Решение. Попробуем найти два числа x_1 и x_2, такие, что

$$x_1+x_2=9,$$

$$x_1x_2=14.$$

Видно, что такими числами являются 2 и 7.

Ответ: $x_1=2, x_2=7$.

Задача 2 [6, С. 225]. Не решая квадратного уравнения, найдите знаки его корней (если они есть) $11x^2-9x+7-5\sqrt{2}=0$.

Решение. Применим теорему Виета

$$x_1+x_2=-9,$$

$$x_1x_2=7-5\sqrt{2}$$

Отсюда видно, что один корень положительный, а второй отрицательный.

Ответ: + и –

Тип 2. Применение обратной теоремы Виета.

Задача 3 [25, С. 178]. Используя теорему, обратную теореме Виета, найдите корни квадратного уравнения $x^2+3x+2=0$.

Решение. Данный пример ничем не отличается по решению от предыдущего, только формулировкой задания.

Попробуем найти два числа x_1 и x_2, такие, что

$$x_1+x_2=-3,$$

$$x_1x_2=2.$$

Обратная теорема твердит, если x_1 и x_2 будут удовлетворять нашим уравнениям, то эти числа корни уравнения. Предположим, что первый корень равен -1 и -2, если мы подставим, то получим, что

$$x_1 + x_2 = -1 - 2 = -3,$$

$$x_1 x_2 = \ -1 \ \cdot \ -2 \ = 2.$$

Так как они удовлетворяют нашим уравнением, то по обратной теореме Виеты, они являются корнями $x^2 + 3x + 2 = 0$.

Ответ: $x_1 = -1$, $x_2 = -2$.

Следовательно, уравнение имеет два корня, один отрицательный и один положительный.

Задача 4 [25, С. 178]. Составьте квадратное уравнение, корнями которого являются числа $x_1 = -6$, $x_2 = -2$.

Решение. Используем формулу $x - x_1 \quad x - x_2$ и подставляем наши корни, получаем

$$x - x_1 \quad x - x_2 \ = \ x - \ -6 \quad x - \ -2 \ = \ x + 6 \quad x + 2 \ =$$

$$= x^2 + 2x + 6x + 18 = x^2 + 8x + 18.$$

Проверим по теореме Виета, полученное уравнение $x^2 + 8x + 18 = 0$.

$$x_1 + x_2 = -6 - 2 = -8, x_1 x_2 = -6 \cdot (-2) = 18.$$

Данное уравнение удовлетворяет нашим корням.

Ответ: $x^2 + 8x + 18 = 0$.

Задача 5. Какая из пар чисел является парой корней уравнения $4x^2 - 16x + 9 = 0$

а) $x_1 = -5, x_2 = 2$;

б) $x_1 = 2 - \frac{\overline{7}}{2}, x_2 = 2 - \frac{\overline{7}}{2}$.

Указание: та пара, которое подойдет под условие теоремы Виета, и будет корнями квадратного уравнения.

Ответ:б.

Задача 6 [6, С. 224]. Могут ли числа $\frac{a}{b}$ **и** $\frac{b}{a}$ быть корнями квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$.

Решение. Применим обратную теорему Виета и то, что

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} = \frac{(-b)}{a}; \ \frac{ab}{ba} = \frac{c}{a} = 1.$$

$$a\left(x - \frac{a}{b}\right)\left(x - \frac{b}{a}\right) = a\left(x^2 - \frac{xb}{a} - \frac{xa}{b} + \frac{ab}{ba}\right) = a\left(x^2 - x\left(\frac{b}{a} + \frac{a}{b}\right) + \frac{ab}{ba}\right) =$$

$$= a\left(x^2 - x\left(-\frac{b}{a}\right) + \frac{c}{a}\right) = a\left(x^2 + \frac{xb}{a} + \frac{c}{a}\right) = ax^2 + bx + c.$$

Ответ: да.

Тип 3. Задачи с параметром.

Задача 7 [23, С. 177]. Найдите значение параметра, если известно, что сума корней квадрантного уравнение $x^2 - (2p^2 - p - 6)x + (8p - 1) = 0$ равно -5.

Решение. Известно, что $x_1 + x_2 = -5$, значит $b = 5$, получим

$$-2p^2 + p + 6 = 5;$$

$$2p^2 - p - 1 = 0$$

По теореме Виета получаем корни равные 1 и -0,5. Итого у нас два случая: $p = 1$ **и** $p = -0{,}5$.Если $p = 1$**, то** $x^2 - 5x + 7 = 0$. У этого уравнения нет действительных корней, так как дискриминант меньше нуля. Значит этот вариант не подходит. Если $p = -0{,}5$ **то** $x^2 - 5x - 5 = 0$. Дискриминант больше нуля, значит это значение подходит.

Ответ: $p = -0{,}5$.

Задача 8 [23, С. 178]. Один из корней квадратного уравнения больше другого в 2,5 раза. Найдите значение параметра p и корни уравнения, если уравнение имеет вид $2x^2 - 14x + p = 0$.

Решение.

$$2x^2 - 14x + p = 0;$$

$$x_1 = 2{,}5x_2.$$

$$\begin{cases} x_1+x_2=7, \\ x_1x_2=\frac{p}{2}; \end{cases} \quad \begin{cases} x_1+2{,}5x_2=7, \\ 2{,}5{x_2}^2=\frac{p}{2}; \end{cases} \quad \begin{cases} x_2=2, \\ p=20. \end{cases}$$

Если $x_2=2$, то $x_1=2{,}5x_2=2{,}5\cdot 2=5$.

Ответ: $x_1=5, x_2=2, p=20$.

Задача 9. При каком значении a сумма квадратов корней $x^2-(a-2)x-a-1=0$ принимает наименьшее значение.

Решение. Пусть $x_1=5$ и $x_2=2$ – корни квадратного уравнения, тогда по теореме Виета.

$$\begin{cases} x_1+x_2=a-2, \\ x_1x_2=-a-1; \end{cases}$$

$$ {x_1}^2+{x_2}^2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2=(a-1)^2+5.$$

Данное выражение будет иметь наименьшее значение 5 при $a=1$.

Ответ: $a=1$.

Тип задач на применение теоремы Пифагора

Тип 1. Применение обратной теоремы Пифагора

Задача 10 [1, С. 133]. Является ли треугольник прямоугольным, если его стороны равны: а)6, 8, 10; б)5,6,7; в)9, 12, 15; г)10, 24, 26; д)3,4,6; е) 11, 9, 13; ж)15, 20, 25.

Решение. Так как в прямоугольном треугольнике, большая сторона равна гипотенузе, то будем брать за гипотенузу самое большое значение, остальное будут катетами.

Проверяем все по обратной теореме Пифагора. Получаем: а)$10^2=6^2+8^2, 100=36+64$, следовательно треугольник прямоугольный; б) $49\neq 25+36$, значит треугольник не прямоугольный;

По аналогии решаются в-ж, где в) да; г) нет; е)нет; ж)да.

Ответ: а)да; б) нет; в) да; г) нет; е)нет; ж)да.

Тип 2. На вычисление гипотенузы и катетов

Задача 11 [1, С. 133] Найдите меньшую высоту треугольника со сторонами равными 15 см, 17 см, 13 см.

Решение. Меньшей высотой треугольника называется высота, которая опущена на большую сторону.

Рассмотрим произвольны треугольник ABC, в котором сторона $AB = 17, AC = 13, BC = 15$, а высота CH является меньшой стороной треугольника. Далее рассмотрим два прямоугольных треугольника AHC и BHC, с помощью теоремы Пифагора выразим из каждого треугольника HC, получим

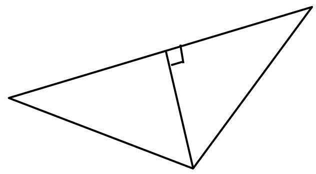


Рис. 10. Задача 11

$$CH^2 = AC^2 - AH^2, CH^2 = BC^2 - BH^2;$$

$$AC^2 - AH^2 = BC^2 - BH^2;$$

$$13^2 - AH^2 = 15^2 - (17 - AH)^2 \leftrightarrow AH = 6{,}8.$$

Получим, что $AH = 6{,}8$ и $CH = \sqrt{AC^2 - AH^2} = \sqrt{169 - 46{,}24} \approx 11{,}08.$

Ответ: $11{,}08$ см.

Задача 12. [1, С. 133] Одна из диагоналей параллелограмма является его высотой. Найдите эту диагональ, если периметр параллелограмма равен 50 см, а разность смежных сторон равна 1 см.

Решение. Построим параллелограмм $ABCD$, проведем диагональ CD, которая будет являться высотой. Смежные стороны – это стороны исходящие из одной вершины, поэтому $AC - AD = 1$.

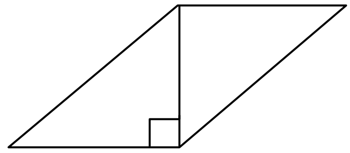


Рис. 11. Задача 12

Высоту можно найти, по теореме Пифагора, через треугольник ACD. Для этого нам нужно знать стороны AC и AD. Найдем эти смежные стороны через периметр параллелограмма, зная, что $AC = 1 + AD$.

$$P_{ABCD} = 2(AC + AD);$$

$$50 = 2(1 + AD + AD);$$

$$AD = 12, \ AC = 13.$$

По теореме Пифагора $CD = \sqrt{AC^2 - AD^2} = \sqrt{25} = 5$см.

Ответ: 5 см.

Задача 13. Найдите меньшую высоту треугольника со сторонами равными 15 см, 17 см, 13 см.

Ответ:

Тип 3. На доказательство фактов через теорему Пифагора

Задача 14. [1, С. 132]. Докажите, что площадь равностороннего треугольника вычисляется по формуле $S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$, a– сторона треугольника. Найдите площадь равностороннего треугольника, если его сторона равна $\sqrt{8}$.

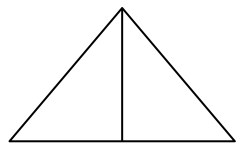


Рис. 12. Задача 14

Решение. Рассмотрим треугольник ABC, в котором все стороны равны числу a. Площадь треугольника находится по формуле

$$S = \frac{1}{2}AC \cdot BH = \frac{1}{2}a \cdot BH.$$

Выразим BH по теореме Пифагора, через треугольник BHC

$$BH = \sqrt{BC^2 - HC^2} = \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{4}} = \sqrt{\frac{3a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{3}}{2};$$

$$S = \frac{1}{2}AC \cdot BH = \frac{1}{2}a \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$

$$S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{8\sqrt{3}}{4} = 2\sqrt{4}.$$

Ответ: $2\sqrt{4}$ см.

Тип 4. Древние задачи на теорему Пифагора.

Задача 15 [42, С. 62]. Дан водоем со стороной 10 чи. В центре водоема расположен камыш, который выступает над водой на 1 чи. Если потянуть камыш к берегу, то он как раз коснется его. Спрашивается, какова глубина воды и длина камыша

Решение. Если применять правило, то нужно половину стороны водоема умножить само на себя, надводную часть умножить само на себя тоже. Потом из первого вычесть второе, полученное разделить на удвоенную надводную часть в квадрате, тогда мы получим глубину воды, а если мы прибавим расстояние, на которое выступает камыш надо водой, то мы получим длину (рис 15).

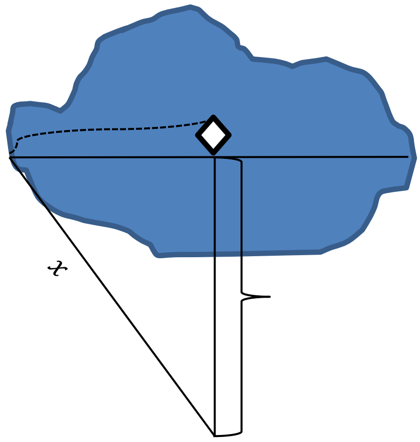


Рис. 13. Задача 15

$$\textbf{Глубина воды} = \frac{5*5 \ - \ 1*1}{2*1} = 12 \textbf{ чи};$$

$\textbf{Длина камыша} = 12 + 1 = 13 \textbf{ чи}$. Обозначим за x – глубину воды, получим

$$(x+1)^2 = x^2 + 25, x = 12 \textbf{ чи}.$$

Ответ: 12 чи.

Задача 16 [42, С. 143]. Задача о Тополе

На берегу реки рос тополь одинокий.
Вдруг ветра порыв его ствол надломал.
Бедный тополь упал. И угол прямой
С теченьем реки его ствол составлял.
Запомни теперь, что в том месте река
В четыре лишь фута была широка.
Верхушка склонилась у края реки.
Осталось три фута всего от ствола.
Прошу тебя, скоро теперь мне скажи:
У тополя как велика высота?

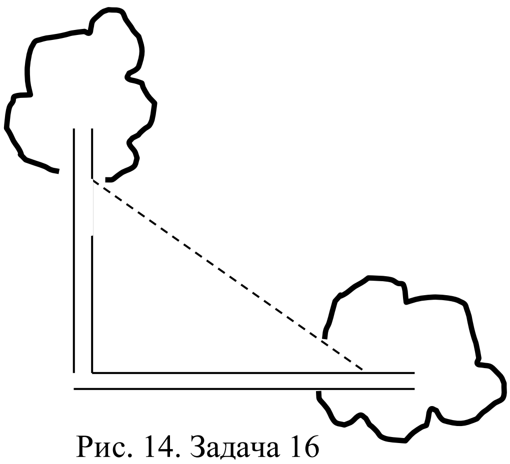


Рис. 14. Задача 16

Решение. Изобразим рисунок (Рис. 14.), где тополь AB сломлен в некоторой точке C, равной 3 футов и верхушка D располагается теперь на 4 фунтов от снования A. Требуется узнать высоту тополя. Решается данная задача с помощью теоремы Пифагора.

$$AB = AC + CD = AC + \sqrt{AC^2 + AD^2} = 3 + \sqrt{9 + 16} = 8 \textbf{ футов}.$$

Ответ: 8 футов.

Выводы по первой главе

Первая глава посвящена изучению такого понятия как «именные» теоремы. Первым делом нужно было выяснить, что значит «именные» теоремы, какие теоремы называют «именными». После исследования был сделан вывод, что «именными» теоремами являются такие теоремы которые названы либо в честь ученого, который нашел её доказательство, либо в честь ученного, который внес огромный вклад в ту область математики, в которой она применяется.

Была изучена история возникновения «именных» теорем, история их создателей. Далее были проанализированы различные учебники по алгебре и геометрии за 7-9 класс базовые и углубленные уровни. С целью обнаружить, какие именно «именные» теоремы встречаются в курсе математики за 7-9 класс. При анализе были выявлены следующие «именные» теоремы: теорема Виета, теорема Безу, теоремы Фалеса и Вариньона, Чевы и Менелая, теорема Пифагора, теорема Птолемея, формула Герона и теорема Эйлера. После был сделан вывод, что самыми распространенными теоремами являются теоремы Виета и Пифагора, что во многих учебниках некоторые теоремы не разбираются как отдельная тема, она либо дается как отдельная задача для решения, либо не дается вовсе. Теорема Чевы, Менелая, Птолемея, Эйлера встречаются лишь в дополнительных главах по геометрии.

Одной из причин отсутствия может послужить то, что некоторые теоремы не так часто встречаются при решении задач, что для их введения нужно дополнительное время и определенных уровень подготовленности учащихся.

Так же в первой главе были разобраны различные способы доказательства «именных» теорем и задачи, которые решаются с помощью этих теорем.

ГЛАВА II. МЕТОДИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ОБУЧЕНИЯ РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ НА ДОКАЗАТЕЛЬСТВО И ПРИМЕНЕНИЕ «ИМЕННЫХ» ТЕОРЕМ ШКОЛЬНОГО КУРСА МАТЕМАТИКИ ОСНОВНОЙ ШКОЛЫ

§5. Цели обучения «именным» теоремам и требования к знаниям обучающихся

В ФГОС одним из требований для школьников является умение применять теоремы при решении задач, создании и исследовании геометрических моделей. [40, С. 12].

Базисный учебный план на изучение математики в основной школе по программе Т.А. Бурмистровой, отводит 3 учебных часа в неделю на изучение алгебры и 2 учебных часа в неделю на изучение геометрии. Всего 315 уроков по алгебре, и 210 уроков по геометрии в год.

Рассмотрим примерную образовательную программу основного общего образования по математике в 7-9 классах [34, С. 85].

В данной программе указано, что выпускник 7-9 классов, после изучения алгебры базового уровня, должен уметь решать квадратные уравнения, используя формулы квадратных уравнений (каких именно не указано).

В геометрии базового уровня, ученик должен уметь применять теорему Пифагора.

Выпускник после изучения математики 7-9 классов получит возможность, для дальнейшего обучения в базовом и углубленном уровнях, научиться применять прямую и обратные теоремы Виета, применять теорему Пифагора, теорему Фалеса.

Ученик в 7-9 классе получит возможность научиться в углубленном уровне, применять теорему Виета для решения квадратных уравнений и уравнений высших степеней, применять теорему Пифагора, Фалеса.

Теоремы Безу, Вариньона, Чевы и Менелая в планируемых результатах изучения математики базового уровня конкретно не указаны.

Рассмотрим содержание курса математики в 7-9 классах и выделим «именные» теоремы, которые там встречаются [34, С. 349].

Таблица 2

«Именные» теоремы в курсе математики 7-9 классов

Примерное содержание курса математики в 7-9 классах (базовый уровень)	
Теорема Виета	Алгебра. *Квадратное уравнение и его корни.* Формула корней квадратного уравнения. Прямая и обратная теорема Виета. Отыскание корней при помощи теоремы Виета.
Теоремы Фалеса, Вариньона.	Геометрия. *Отношение*. Параллельность прямых. Теорема Фалеса.
Теорема Пифагора	Геометрия. *Измерения и вычисления.* Теорема Пифагора.
Примерное содержание курса математики в 7-9 классах (углубленный уровень)	
Теорема Виета	Алгебра. *Многочлены.* Прямая и обратная теоремы Виета. *Методы решения уравнений.* Теорема Виета при решении уравнений высших степеней. *Квадратно уравнение и его корни.* Подбор корней с помощью теоремы Виета.
Теоремы Фалеса, Вариньона.	Геометрия. *Многоугольники.* Теорема Вариньона. *Параллельность прямых*. Теорема Фалеса.
Теорема Пифагора.	Геометрия. *Измерение и вычисления.* Теорема Пифагора.
Теоремы Менелая Чевы, Птолемея.	Геометрия. *Измерение и вычисления.* Теорема Птолемея. Теорема Менелая. Теорема Чевы.
Формула Герона	Геометрия *Измерения и вычисления.* Формула Герона

Теорема Безу в программе не указана. Есть темы, которые подразумевают наличие там данной теоремы.

Так к примеру, в содержании курса математики [34, С. 346]написано, что ученики в углубленном курсе проходят решение некоторых типов уравнений 3 и 4 степеней и учатся раскладывать многочлены степени больше двух на множители. Данную цель можно достигнуть с помощью теоремы Безу.

Теорема Птолемея и формула Герона не указаны в основных требованиях и умениях выпускника 7-9 классов, данные теоремы появляться лишь в примерном содержании курса математики углубленного уровня в 7-9 классах.

Теоремы Пифагора, Виета, Фалеса являются основными «именными» теоремами, которые прослеживаются в содержании курса математики базового уровня, и в содержании математики углубленного уровня.

Проанализируем учебники следующих авторов на наличие в них «именных» теорем:

Таблица 3

Анализ учебников алгебры и геометрии (7-9 кл.).

Алгебра			
Учебники	7	8	9
Н.Я. Виленкин	-	Теорема Виета	Теорема Безу
Ю.Н. Макарычев	-	Теорема Виета	-
А.Г. Мордкович (б)	-	Теорема Виета	-
А.Г. Мордкович (п)	-	Теорема Виета	-
Г.К. Муравина	-	Теорема Виета	Теорема Безу
Геометрия			
Л.С. Атанасян	-	Теорема Фалеса и Пифагора	-
Л.С. Атанасян (д.г) (доп. главы)	-	Теоремы Фалеса, Вариньона, Чевы, Менелая, Пифагора, Птолемея	-
А.В. Погорелов	-	Теоремы Фалеса, Пифагора. Формула Герона	-
И.М. Смирнова	-	Теоремы Фалеса, Пифагора, Эйлера. Формула Герона.	-
И.Ф. Шарыгин	-	Теоремы Фалеса, Пифагора.	Формула Герона

Анализ школьных учебников алгебры для 7-9 классов (базовый и углубленный уровни) показал, что в них представлены следующие «именные» теоремы: 7 класс: Отсутствуют [14, 18-21, 29]. 8 класс: Теорема Виета [6, 15, 22-25, 30]. 9 класс: Теорема Безу [7, 31].

Анализ школьных учебников геометрии для 7-9 классов показал, что здесь присутствуют такие «именные» теоремы: 7 класс: Отсутствуют [1-2, 33, 37, 43]. 8 класс: Теоремы Фалеса [1-2, 33, 37, 43]и Вариньона [2], Чевы и Менелая [2], Пифагора[1-2, 33, 37, 43], Птолемея [43], Эйлера [37], Формула Герона [33, 37, 43]. 9 класс: Формула Герона [43].

Разберём поподробнее «именные» теоремы в рабочих программах Т.А. Бурмистровой по учебникам алгебры и геометрии за 7-9 классы.

В требованиях к результатам освоения содержания курса математики по программе Т.А. Бурмистровой указаны следующие требования: личностные, метапредметные, предметные. Отберем нужные требования относительно темы «именные» теоремы.

К личностным требованиям относится: критичность мышления; умение отличать гипотезу от факта, активность при решении геометрических задач; эмоциональное восприятие математических объектов, задач, решений, рассуждений.

Метапредметные требования включают в себя умения: строить логическое рассуждение; применять альтернативные способы рассуждений, видеть различные стратегии решения задач.

Предметные требования связаны с умением: работать с математическим и геометрическим текстом, применять математическую терминологию; решать квадратные уравнения, применять полученные знания для решения задач из математики; проводить логические обоснования, доказательства математических утверждений.

Теорема Виета. В рабочей программе по учебнику А.Г. Мордковича [4, С. 67] идет речь о том, что данная тема дается вместе с разложением квадратного трехчлена на множители.

В характеристике основных видов деятельности ученика (на уровне учебных действий) указано, что ученик должен уметь применять теорему Виета для отыскания корней квадратного уравнения, уметь представлять квадратный трёхчлен в виде произведения линейных множителей.

В среднем на эту тему дается 2-3 урока. Данная тема является обязательной для изучения.

Теорема Безу. Данная теорема встречается в 9 классе в учебниках углубленного изучения алгебры. Она используется для решения уравнений высших степеней. Тема в школе дается обычно вместе со схемой Горнера. На базовом уровне изучении математики теорема не встречается.

В учебнике по алгебре Н.Я. Виленкин [7, С. 147] теорема Безу дается в главе «Уравнение, неравенства и их системы» в параграфе «Теорема Безу. Корни многочлена. Схема Горнера».

В учебнике Г.К. Муравина теорема Безу встречается в главе «Квадратичная функция» в параграфах «Целые корни многочленов с целыми коэффициентами» [30, С. 68] и «Теорема Безу и следствие из неё» [31, С.73]. В первом параграфе объясняется схема Горнера, во втором параграфе от схемы Горнера переходят к изучению теоремы Безу.В методическом пособии Г.К. Муравина написано [32, С 46],что данную тему можно рассматривать как дополнительный материал, а порой можно и отказаться от её изучения.

После освоения данной темы ученик должен уметь раскладывать многочлены на множители с помощью теоремы Безу. На рассмотрение двух параграфов отводится 5 часов.

Теорема Фалеса и Вариньона. В учебнике по геометрии И.Ф. Шарыгин [43, С.146] теорема Фалеса даётся, как отдельная тема, но вместе с ней идет теорема о средней линии треугольника, а теорема Вариньона даётся, как отдельная задача, без указания того, что это теорема Вариньона [43, С. 151].

В учебнике В.М. Смирнова [37, С. 140] теорема Фалеса идет вместе с теоремой о пропорциональных отрезках. Теорема Вариньона там отсутствует. В учебнике Л.С. Атанасяна [1, С. 105] теорема Фалеса и Вариньона не разбираются, как отдельные темы. Теорема Фалеса там дается в виде задачи, а теорема Вариньона в данном учебнике не встречается.

В рабочей программе по геометрии [5, С. 20] не упоминаются эти теоремы. Данные темы встречаются в учебнике Л.С. Атанасяна лишь в дополнительных главах по геометрии.

В учебнике А.В. Погорелова [33, С. 72] теорема Фалеса, тоже даётся вместе со средней линией треугольника, а теорема Вариньона у него дана, как отдельная задача без указания того, что это «именная» теорема. В характеристике основных видов деятельности ученика говорится, что ученик должен уметь формулировать и доказывать теорему Фалеса. В рабочей программе [5, С. 30] для изучения темы «Теоремы Фалеса. Средняя линия треугольника» отводится 3 часа. Все зависит от загруженности учебного плана.

Теорема Пифагора. Изучение теоремы Пифагора отличается способом доказательства теоремы, и формой подачи материала. В некоторых учебниках данная тема даётся, как отдельная глава, включающая в себя несколько параграфов, а в некоторых просто, как отдельный параграф. Например, если обращаться к рабочей программе по Л.С. Атанасяну [5, С. 20], то там теорема даётся как отдельный параграф, на изучение которой отводится 3 урока.

В рабочей программе по А.В. Погорелову теорема Пифагора дается большим параграфом [5, С 31], который включает в себя 7 подпунктов, и для его изучения дается около 13 часов. В характеристике основных видов деятельности указано, что ученик должен уметь формулировать и доказывать теорему Пифагора и обратную ей теорему.

Формула Герона Чаще всего данная формула изучается в 8 классе, после прохождения темы многоугольники. Она дается вместе с темой площади простых фигур, где доказывается формула нахождения площади параллелограмма и площади треугольника. Формулу Герона используют как второй способ нахождения площади треугольника в случае, когда известны все три стороны треугольника. Данная тема встречается в учебниках за 7-9 класс по геометрии А.В. Погорелова [33, С. 171], В.М. Смирнова [37, С. 234] и в учебниках И.Ф. Шарыгин [43, С. 247]. Причем, в первых двух учебниках тема изучается в 8 классе, а у И.Ф. Шарыгина в 8 классе.

Другие теоремы. Остальные «именные» теоремы встречаются в учебниках углубленного уровня по геометрии, в дополнительных главах или в разделе дополнительные материалы. Так к примеру, теоремы Чевы и Менелая есть в дополнительных главах Л.С. Атанасяна [2, С. 90] в параграфе «Применение подобия к доказательству теорем и решению задач» Для освоение этих теорем нужно знать обобщённую теорему Фалеса, теоремы о биссектрисе треугольника и биссектрисе внешнего угла, уметь решать задачи на нахождение отношения отрезков. Теорема Птолемея встречается лишь в дополнительных главах за 8 класс Л.С. Атанасяна.

В учебнике И.М. Смирновой в разделе дополнительные материалы дается теорема Эйлера, в параграфе «Теорема Эйлера» [37, С. 110]и в параграфе «Теорема Эйлера для многогранников» [37, С. 321]. Оба параграфа связанны с применением графов и «именной» теоремы, только в первом параграфе теорема Эйлера рассматривается в стереометрии, а во втором параграфе в планиметрии на примере многогранников. Данная тема является дополнительной и не обязательной. Во многих учебниках по геометрии некоторые теоремы не разбираются, как отдельная тема, она либо дается как отдельная задача для решения, либо не дается вовсе, как теорема Вариньона. При рассмотрении учебников и учебных программ базового и профильного уровней, выяснилось, что «именные» теоремы начинают изучать после 7-го класса, что самыми распространёнными «именными» теоремами являются теорема Виета и Пифагора, потом теорема Фалеса и Безу. Теоремы Менелая, Чевы, Эйлера, Птолемея являются не обязательными для изучения.

Проанализируем задачный материал, который дается для усвоения и закрепления данных тем (приложение 2), после анализа видно что в алгебре для усвоения теоремы дается примерно от 20-50 задач, а по геометрии от 4 и выше, все зависит от распространённости теоремы. Тип задач был предоставлен в параграфе 4, где для каждой теоремы (наиболее часто встречающейся в программе по математике за 7-9 класс) были поставлены типы. В основном было выделено от 2-5 типов задач. В алгебре это были задачи на нахождение корней квадратных уравнений и уравнений высших степеней, на применение обратных теорем, решение задач с параметрами и т.п. В геометрии в основном предлагаются задачи на нахождение неизвестной величины и на доказательство геометрического факта при помощи «именной» теоремы.

§6. Методические рекомендации по обучению доказательству и применению «именных» теорем школьного курса алгебры основной школы

Изучение любой теоремы состоит из нескольких этапов. В учебном пособии по математике Г.И. Саранцева выделяются 8 этапов [36, С. 59]. Данные этапы изучения теоремы направлены не на заучивание теоремы и его доказательства наизусть, а на возможность самостоятельно найти доказательство теоремы с целью её запоминания и усвоения. Разберем эти этапы по подробнее, взяв в качестве примера теорему Виета.

1 этап. Мотивация изучения теоремы

На первом этапе можно дать задание, состоящие из 3-5 примеров.

Задание 1. Найти корни приведенных квадратных уравнений. В ответ запишите сумму и произведение, полученных корней.

$a) x^2 - 2x - 15 = 0;$ б) $x^2 + 8x + 7 = 0;$

в) $x^2 - 5x + 6 = 0;$ г) $x^2 + 15x + 36 = 0;$

Ответ: $a)\ 2, -15;$ б) $-8, 7;$ в) $5, 6;$ г) $-15, 36.$

2 этап. Ознакомление с фактом, отраженным в теореме

После выполнения задания, ученикам задается вопрос: «Какую зависимость можно установить между корнями и коэффициентами приведенного квадратного уравнения?» После рассуждений учитель вместе учениками записывают теорему с помощью символов.

3 этап. Усвоение содержания теоремы

Далее учитель предлагает ученикам проверить действует ли данная зависимость на неприведённые квадратные уравнения. Как видно, первые три этапа реализуются с помощью построений, измерений, анализа данных, предоставленных для изучения

4 этап. Запоминания формулировки теоремы.

В целях облегчения запоминания громоздких формулировок теорем целесообразно поэлементное усвоение содержание теоремы.

Для этого формулировка теоремы разбивается на отдельные элементы: «Если x_1, x_2 – корни квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$, | то сумма корней равно $-\frac{b}{a}$, | а произведение корней равно $\frac{c}{a}$. (Саранцев Г.И. предлагает элементы разделять вертикальной чертой.) После данного разбиения выполняются упражнение на распознавание ситуаций, удовлетворяющих условию теоремы с последовательным использование каждого элемента. Так можно реализовать первые 4 этапа изучения теоремы. Рассмотрим, как предлагают реализовать эти 4 этапа другие математики.

В журнале «Математика в школе» не раз говорилось о способах обучению данной теоремы. Так к примеру в статье Зенина М.Н. [12, С. 29] дается два подхода: первый подразумевает изучение темы и решение задач от более легкой к более сложной задачи (оставаясь в рамках изучаемого вопроса), второй подход демонстрирует разнообразные применения данного факта к исследованию таких вопросов, которые вроде бы никак не могут быть с ним связаны. Упор в этой статье идет именно на второй способ обучения. Перед тем как предложить учащимся решать задачи, после изучения на прошлом уроке данной теоремы, нужно повторить в классе формулировку теоремы Виета при помощи стихотворения.

По праву достойна в стихах быть воспета

О свойствах корней теорема Виета.

Что лучше, скажи постоянства такого:

Умножишь ты корни – и дробь уж готова?

В числителе c, в знаменателе a.

А сумма корней тоже дроби равна.

Хоть с минусом дробь, что за беда!

В числителе b, а в знаменателе a.

Автор статьи советует, что желательно вызвать к доске одного ученика и предложить ему записать символами то, что сказано стихами. После повторения, класс приступает к решению задач.

Филатов В.Г. в своей статье [41, С. 19] предлагает интересный способ изучения свойств квадратного уравнения при помощи теоремы Виета. Для этого, нужно заранее задать детям дом двенадцать квадратных уравнений, которые будут решаться с помощью теоремы, причем 9 уравнений один из корней будет равен 1 или -1. На следующем уроке учитель вместе с учениками проверяет правильность решения уравнений. После проверки учитель задает ученикам вопросы: « Какова сумма коэффициентов в этих уравнениях,; какое число является корнем каждого из них»

После рассмотрения уравнений и беседы с учителем, ученики приходят к выводу, что если в квадратном уравнении $ax^2 + bx + c = 0$ коэффициенты $a + b + c = 0$ ($a - b + c = 0$), то один из его корней равен 1 (-1), а другой в соответствии с теоремой Виета равен $\frac{c}{a}$ (верны и обратное утверждения)

5 этап. Ознакомление со способом доказательства

Способ доказательства может быть открыт в процессе решения специальных задач. Для этого можно предложить детям вспомнить формулы нахождения корней квадратных уравнений через дискриминант и выразить через них произведение и сумму корней, в итоге они придут к данной теореме.

$$x_1 + x_2 = \frac{-b + \overline{D}}{2a} + \frac{-b - \overline{D}}{2a} = \frac{-b}{a} = -b;$$

$$x_1 x_2 = \frac{-b + \overline{D}}{2a} \cdot \frac{-b - \overline{D}}{2a} = \frac{c}{a} = c.$$

6 этап. Доказательство теоремы

Данный этап включает оформление и запись доказательства. Начальный уровень обучения доказательству характеризуется формирование понимания учащимися необходимости логических обоснования, навыков осуществлять простейшие выводы и понимания того, что из одних утверждений логическим путем можно выводить новые утверждения. Следующий уровень включает умение школьников осуществлять цепочки логических умозаключений. Саранцев Г.И. считает, что важной составляющей в работе учителя по обучению школьников доказательству является формирование потребности в логических обоснованиях. Воспитать это можно с помощью рассуждений, поэтому необходимы такие упражнения, в которых учащиеся убеждались бы в справедливости утверждения общим рассуждением. Здесь можно предложить такие задания как:

Задание 1. С помощью теоремы Виета определите, какая пара корней 4 и 5, -1 и -3, -1 и 3, -1 и 3 будет являться корнями уравнения $x^2 + 4x + 3 = 0$?

Ответ: -1 и -3.

Задание 2. Не решая квадратного уравнения, найдите знаки его корней, если $x^2 + 14x + 24 = 0$.

Ответ: - и -.

7 этап. Применение теоремы

Включает в себя систему задач (представлена в параграфе 4), для решения которых используется изучаемая теорема. Данные задачи могут включать в себя задания связанные с формулировкой теоремы и многое другое.

8. Установление связей теоремы с ранее изученными теоремами

Саранцев Г.И. советует обратить особое внимание на упражнения на установление связей между изученными теоремами, на усвоение системы теорем и понимание каждой теоремы в этой системе. Эти связи могут выявляться различными способами: как на основе анализа учебного материала, так и на основе анализа самого доказательства.

В зависимости от конкретного содержания теоремы, опыта школьников некоторые этапы могут опускаться. Последовательное проведение обучающихся по данным этапам позволяет не только прочно усвоить формулировку теоремы, но и раскрыть её общекультурную и научную ценность.

§7. Методические рекомендации по обучению доказательству и применению «именных» теорем школьного курса геометрии основной школы

В.А. Далингер [11, С. 30] в своей работе «Методика обучения учащихся доказательству математических предложений» пишет, что в школьном курсе математики для формулировки теоремы используют три вида суждения: категорическая, условная (данный тип характеризуется тем, что в его формулировках встречается «если, то») разделительная (которая в теореме есть конструкция «либо, либо»)

Таблица 4

Формулировка теоремы

Название	Формулировка теоремы	Вид
Теорема Фалеса	Если на одной из двух прямых отложить последовательно несколько равных отрезков и через их концы провести параллельные прямые, пересекающие вторую прямую, то они отсекут на второй прямой равные между собой отрезки [1, С. 105].	У
Теорема Вариньона	Середины сторон произвольного четырехугольника являются вершинами параллелограмма [2, С. 19].	К
Теорема Чевы	Если на сторонах AB, BC и CA треугольника ABC взяты соответственно точки K, N, D, то отрезки $AN, BD,$ и CK, пересекаются в одной точке тогда и только тогда, когда [2, С. 87] $\frac{AD}{DC}\cdot\frac{CN}{NB}\cdot\frac{BK}{KA}=1.$	У
Теорема Менелая	Если на сторонах AB и BC и продолжении стороны и AC (либо на продолжениях сторон AB, BC и AC) взяты соответственно точки K, N, D, то эти точки лежат на одной прямой тогда и только тогда, когда [2, С. 89]. $\frac{AD}{DC}\cdot\frac{CN}{NB}\cdot\frac{BK}{KA}=1.$	У
Теорема Пифагора	В прямоугольном треугольнике квадрат гипотенузы равен сумме квадратов катетов [1, С. 129].	К

Сама теорема состоит из трех частей: разъяснительная (о чем идет речь), условная, заключительная.

Само доказательство состоит из трех пунктов: тезис (то что мы доказываем), аргументы (которые используется для доказательства теоремы), демонстрация (последовательность аргументов, связь между тезисом и аргументами). Кроме этого используется такие понятия как «способ доказательства» и «метод доказательства». Метод доказательства подразумевает то, каким путем мы пойдем доказывать данную теорему, теоремы еще с древности доказывали, различны методами. Вспомним теорему Пифагора, где в разных континентах её доказывали различными методами. Добавим, что частными методами доказательства теорем являются векторный метод, метод, основанный на перемещении плоскости, координатный метод, геометрический метод, алгебраический и др. А вот если доказательства отличаются по логическому построению (по оформлению), то тут говорят, что для доказательства теоремы используются разные способы.

Кроме частных методов доказательства существуют еще общие методы доказательства теорем. К таким методам относят доказательство методом перебора, исключения, метод конструирования, индукции, синтетические и аналитические методы и др.

Далингер В.А. считает [11, С. 31] что среди всех методов доказательства теорем в школьном курсе геометрии основную нагрузку несет синтетический метол, ибо он является составной часть доказательства любым другим методом. Синтетический метод подразумевает, что мысль доказательства движется от условия теоремы к ее заключению. Так же он указывает на то, что данный метод навязывает ученикам готовое доказательство. Аналитический же метод указывает на то, с чего можно начать доказательство, каким путем можно пойти.

Возьмем к примеру теорему Вариньона: «Середины сторон произвольного четырехугольника являются вершинами параллелограмма.»

Доказательство (синтетический метод).

*1.*Пусть дан четырехугольник $ABCD$, где точки S, E, H, Z – середины сторон AB, BC, CD, DA.

2. Если вершины B и D расположены напротив друг друга относительно прямой AC, то точки S и E лежат по одну сторону от прямой AC, а H и Z – по другую сторону от этой прямой.

3.Тогда по теореме о средней линии получаем:

$$SE||AC \text{ и } SE = \frac{1}{2}AC;\ ZH||AC \text{ и } ZH = \frac{1}{2}AC.$$

4.По признаку параллельности трех прямых следует, что прямая SE тоже параллельна ZH и так как они обе равны половине AC, то они тоже равны.

5.Из равенства и параллельности эти сторон следует, что четырех угольник $SEZH$ является параллелограммом. Теорема доказана.

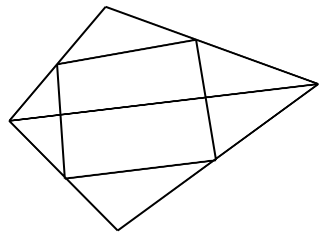


Рис.15. Теорема Вариньона

Доказательство (аналитический метод)

1.У нас есть четырехугольник $ABCD$, где точки S, E, H, Z – середины сторон AB, BC, CD, DA

2.Нам нужно доказать, что $ZEZH$ является параллелограммом. Значит, нужно доказать, что $SE\ \ ZH, SZ\ \ EH$.

3. Чтобы доказать параллельность данных прямых нужно установить, что может быть общего между прямыми SE иZH, SZ и EH.

4. Видно, что эти прямые, делят стороны AB, BC, CD, DA на равные отрезки. Это очень похоже на среднюю линию треугольника. Но у нас нет треугольника. Поэтому проведем в четырехугольнике диагонали AC и BD.

5. Получим четыре треугольника:ABC и ADC, ABD и BCD. Рассмотрим первую пару. По теореме о средней линии получаем:

$$SE||AC \text{ и } SE = \frac{1}{2}AC;\ ZH||AC \text{ и } ZH = \frac{1}{2}AC.$$

6.По признаку параллельности трех прямых следует, что прямая SE тоже параллельна ZH и так как они обе равны половине AC, то они тоже равны.

7.Из равенства и параллельности эти сторон следует, что четырехугольник $SEZH$ является параллелограммом. Теорема доказана.

В данных методах 3,4, 5 пункт совпадает с 5, 6, 7. Но в отличии от синтетического метода, в аналитическом для того чтобы дойти до 5 пункта, были проведены рассуждения.

Большинство ученых-методистов отмечают необходимость пропедевтической работы в начальной школе и в 5-6 классах, с целью подготовки обучающихся к изучению доказательств теорем. Поскольку в основе доказательства теорем лежат такие умения, как оперирование понятиями, работа с текстом теоремы, работа с чертежом, выбор необходимых знаний для выведения следствий, то начальный этап обучения доказательству должен быть ориентирован на формирование перечисленных умений. В.А. Далингер приводит пример подготовительной работы по изучению теоремы Пифагора с учащимися 5-6 классов.

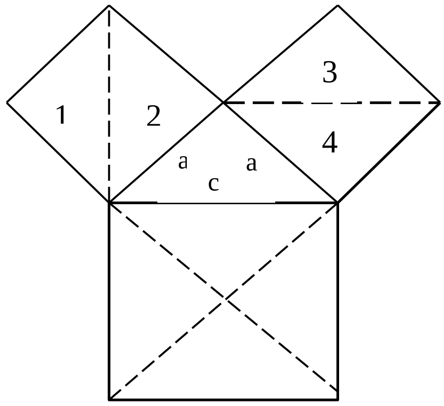


Рис. 16. Теорема Пифагора

Для этого нужно попросить построить детей равнобедренный прямоугольный треугольник с боковыми сторонами a и основанием c. Далее нужно построить на боковых сторонах квадраты и разделить каждый квадрат диагоналями так, чтобы из одного квадрата получилось два треугольника. На рисунке это будет выглядеть вот так. Следом предлагается вырезать четыре треугольника и попробовать ими выложить квадрат. Исходя из полученного результата, можно предложить детям сделать вывод. В результате они должны увидеть, что сумма площадей 1 и 2 треугольников равна квадрату боковой стороны, а сумма площадей треугольников 3 и 4 равна квадрату основания. В итоге, если прировнять то получится, что квадрат основания, равен сумме квадратов его боковых сторон [11 С. 55]. Каждая теорема «именная» или не именная имеет своё доказательство. В различных учебниках и методических книгах используются такие термины «способ доказательства» и «метод доказательства». Если доказательство утверждения отличается от другого доказательства лишь последовательностью, то говорят, что теорема доказана двумя различными способами. Если доказательство бедующей теоремы отличается от другого доказательства основой, то тут идет дело о различных методах доказательства утверждения. Для того, чтобы научить ребенка доказывать различные теоремы, нужно заранее проделать огромную работу. Ученик должен обладать умениями подмечать закономерности, выделять условие и заключение в математических утверждения, он должен понимать необходимость в доказательстве. При объяснении теоремы, учитель должен заранее провести анализ формулировки теоремы, предусмотреть ошибки, которые могут допустить учащиеся в формулировке теоремы. Учитель, готовясь к уроку, на котором будет доказывать теорема, должен выявить понятия, теоремы, аксиомы на которых строится доказательство, и включить их в материал для повторения.

Для того, чтобы ученик научился применять теорему, можно предложить такой вариант самостоятельной работы (см.приложение), возьмем в качестве примера теорему Пифагора. Работа представляет собой самостоятельную работу, разделенную на 3 уровня. Данная работа дается на один урок. 1 уровень подразумевает, что у учеников нет никаких представлений о данной теме, т.е. с помощью этой работы ученик сможет изучить данную теорему самостоятельно (без помощи учителя) и применить ее на практике. Задачи, помеченные знаком «*», являются дополнительными и решаются только в том случае, если ученик успел решить основные задания 2 уровень сложности достается тем ученикам, которые проходили данную тему с целью закрепить полученные знания и повторить пройденный материал. 3 уровень включает задания для проверки знаний по пройденной теме, данный вариант дается сильным ученикам.

Выводы по второй главе

При обучении «именным» теоремам в школьном курсе математики достигаются следующие цели и задачи:

1. Знакомство с историей возникновения «именной теоремы» способствует развитию познавательного интереса к предмету и мотивации к её изучению.

2. Организация деятельности обучающихся по поиску и сравнению различных способов доказательства теоремы формирует критическое и логическое мышление.

3. Применение «именной» теоремы к решению задач на вычисления, на доказательство, на построение формирует прочные знания и умения.

За основу были взяты этапы изучения теоремы Г.И. Саранцева и методика обучения учащихся доказательству математических предложений автора В.А. Далингера. В итоге пришли к выводу, что ученик должен уметь видеть отличие этой теоремы от других теорем, понимать её доказательство, уметь выводить из нее следствия и свойства, этого можно добиться если правильно сконструировать урок и составить систему упражнений. Кроме того для того, чтобы научиться применять теоремы для решения задач, нужно понимать эту теорему, выделить признаки отличия и видеть эти признаки в условии задачи.

Для организации продуктивной учебно-исследовательской деятельности обучающихся при изучении «именных» теорем следует использовать Интернет-источники, в частности, статьи из журнала для школьников «Квант», которые находятся в открытом доступе (http://kvant.mccme.ru) и журнал «Математика в школе» (http://www.schoolpress.ru). Примерный список статей предоставлен в приложении 10.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Данная работа была посвящена методике обучения решению задач на доказательство и применение «именных» теорем школьного курса математики основной школы, основной целью которой было выявить методические основы обучения школьников решению задач на доказательство и применение «именных» теорем курса математики основной школы.

В результате выполненной работы решены следующие задачи:

- изучена история возникновения «именных» теорем.

- проанализирован теоретический и задачный материал по «именным» теоремам, представленный в учебниках различных авторов

-выявлены основные цели и задачи обучения «именным» теоремам.

-выделены основные требования к знаниям и умениям учащихся по теме «именные» теоремы.

-разработаны методические рекомендации по обучению доказательству и применению «именных» теорем школьного курса математики основной школы.

В результате можно сделать такие выводы:

1. «Именными» теоремами являются такие теоремы, которые были названы в честь ученого, который нашел доказательство или повлиял на её возникновение.

2. В основном изучение «именных» теорем начинается в 8 классе.

3. В курсе математики за 7-9 класс можно встретить следующие именные теоремы: теорема Виета, теорема Безу, теоремы Чевы и Менелая, Фалеса и Вариньона, теорема Пифагора, теорема Эйлера, формула Герона.

4. Самыми распространёнными «именными» теоремами являются теорема Пифагора и теорема Виета.

При обучении «именным» теоремам следует учесть следующие рекомендации:

1. Обязательно знакомить учеников с историей возникновения «именной теоремы». С целью развития познавательного интереса к предмету и способствованию мотивации к изучению теоремы и других интересных фактов связанных с геометрией.

2. Показать, что существуют различные способы доказательства теоремы.

3.Организовать деятельность учащихся по поиску других способов доказательства теоремы

4. Показать роль именной теоремы в решении различных задачах. А точнее где применяется эта теорема, какие задачи можно решить и т.п.

4. Выделить отличительные признаки «именной» теоремы. То есть показать ученикам в каком случае применяется «именная» теорема, какой вывод можно сделать из условия теоремы и т.п.

5. Разобрать систему задач, направленных на усвоение и закрепление «именной» теоремы.

6. Предложить детям самим придумать или найти задачи для решения которых нужно применить «именную» теорему.

«Именные» теоремы можно изучать и на элективных курсах, и устраивать неделю «именных» теорем, устраивать интерактивы.

«Именные» теоремы школьного курса математики – это значимый компонент в содержании школьного курса алгебры и геометрии. Однако на практике ему уделяется недостаточное внимание. В рамках магистерской диссертации будет разработано содержание математических проектов по каждой «именной» теореме и раскрыта методика организации проектной и исследовательской деятельности обучающихся

СПИСОК ИСПОЛЬЗУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Атанасян, Л.С. Геометрия: учебник для 7-9 кл. общеобразоват. учреждений / Л.С. Атанасян [и др.]. - 8-е изд. - Москва : Просвещение, 2005. - 335 с.

2. Атанасян, Л.С. Геометрия: Доп. Главы к шк. Учеб. 8кл.: Учеб. пособие для учащихся шк. Классов с углубленным изучением математики / Л. С. Атанасян, В.Ф. Бутузова, С.Б. Кадомцев и др.- М.: Просвещение, 2015. -205 с.

3. Болгарский, Б.В. Очерки по истории математики – 2-е изд., испр. и доп. – Мн.: Выш. Школа, 1979. -368 с.

4. Бурмистрова, Т.А. Алгебра. Сборник рабочих программ. 7 – 9 классы [Текст]:: пособие для учителей общеобразоват. организаций/ Т.А. Бурмистрова. – 2-е изд., доп. – М.: Просвещение, 2014. – 96 с.

5. Бурмистрова, Т.А. Геометрия. Сборник рабочих программ. 7 – 9 классы: пособие для учителей общеобразоват. организаций/ составитель Т.А. Бурмистрова. – М.: Просвещение, 2011. – 95 с.

6. Виленкин, Н.Я. Алгебра. 8 класс: учеб. для общеобразовательных Учреждений и школ. С углубленным изучением математики / Н. Я. Виленкин, А. Н. Виленкин, Г. С. Сурвилло и др.; под ред. Н.Я. Виленкина. – 9-е изд., дораб. – М.: Просвещение, 2010. – 303 с.

7. Виленкин, Н.Я. Алгебра. 9 класс. С углубленным изучением математики. Виленкин Н.Я., Сурвилло Г.С. и др. 7-е изд. - М.: Просвещение, 2006. - 368 с.

8. Выгодский, М.Я. Справочник по элементарной математике. – Изд. 27-е, испр. – М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1986.- 320 с.

9. Глейзер, Г.И. История математики в школе. Пособие для учителей. – М.: Просвещение, 1982.- 376 с.

10. Гусев, В.А., Мордкович А. Г. Математика: Справ. материалы: Кн. Для учащихся.- М.: Просвещение, 1998.- 416 с.

11. Далингер, В.А. Методика обучения учащихся доказательству математических предложений [Текст] : кн. для учителя / В. А. Далингер. – М. : Просвещение, 2006. – 256 с

12. Зенина М.Н. Эта разноликая теорема Виета/ М.Н. Зенина // Математика в школе. 1992 - №23 – С. 29-30

13. Лященко, Е.И. Лабораторные и практические работы по методике преподавания математики : учеб. пособие / Е. И. Лященко [и др.]; под ред. Е. И. Лященко. - Москва : Просвещение, 1988. - 223 с. : ил. - (Учебное пособие для педагогических институтов). - Библиогр.: с. 214-222

14. Макарычев, Ю.Н. Алгебра. 7 класс: учеб. для общеобразоват. организаций / [Ю. Н. Макарычев, Н. Г. Миндюк, К. И. Нешков, С.Б. Суворова]; под ред. С.А. Теляковского. – 3-е изд. – М.: Просвещение, 2014. – 256 с.

15. Макарычев, Ю.Н. Алгебра. 8 класс: учеб. для общеобразоват. организаций с прил. на электрон. носителе / [Ю. Н. Макарычев, Н. Г. Миндюк, К. И. Нешков, С.Б. Суворова]; под ред. С.А. Теляковского. – М.: Просвещение, 2013. – 287 с.

16. Макарычев, Ю.Н. Алгебра. 9 класс: учеб. для общеобразоват. организаций / [Ю. Н. Макарычев, Н. Г. Миндюк, К. И. Нешков, С.Б. Суворова]; под ред. С.А. Теляковского. – 4-е изд. – М.: Просвещение, 2017. – 287 с.

17. Макарычев, Ю.Н., Миндюк Н.Г. Алгебра: Дополнительные главы к школьному учебнику. 9 классм— Под ред. Г.В. Дорофеева. — М.: Просвещение, 1996. — 207 с

18. Мордкович, А.Г. Алгебра. 7 класс. В 2 ч. Ч. 1: Учебник для учащихся общеобразовательных учреждений / А.Г. Мордкович. – 17-е изд., доп. – М.: Мнемозина, 2013. – 175 с.

19. Мордкович, А.Г. Алгебра. 7 класс. В 2 ч. Ч. 2.: Задачник для учащихся общеобразовательных учреждений / А.Г. Мордкович. – 17-е изд., стер. – М.: Мнемозина, 2013. – 271 с.

20. Мордкович, А.Г., Николаев, Н.П. Алгебра. 7 класс. В 2 ч. Ч. 1. Учебник для учащихся общеобразовательных учреждений / А. Г. Мордкович, Н. П. Николаев. – М.: Мнемозина, 2009. – 191 с.

21. Мордкович, А.Г., Николаев, Н.П. Алгебра. 7 класс. В 2 ч. Ч. 1. Задачник для учащихся общеобразовательных учреждений / А. Г. Мордкович, Н. П. Николаев. – М.: Мнемозина, 2009. – 207 с.

22. Мордкович, А.Г. Алгебра. 8 класс. В 2 ч. Ч. 1.: Учебник для учащихся общеобразовательных учреждений / А.Г. Мордкович. – 12-е изд., доп. – М.: Мнемозина, 2010. – 215 с.

23. Мордкович, А.Г. Алгебра. 8 класс. В 2 ч. Ч. 2.: Задачник для учащихся общеобразовательных учреждений / А.Г. Мордкович. – 12-е изд., испр. и доп. – М.: Мнемозина, 2010. – 271 с.

24. Мордкович, А.Г., Николаев, Н.П. Алгебра. 8 класс. В 2ч. Ч. 1. Учебник для учащихся общеобразовательных учреждений/ А. Г. Мордкович, Н. П. Николаев. – 10-е изд., стер. – М.: Мнемозина, 2013. – 256с.

25. Мордкович, А.Г. Алгебра. 8 класс. В 2 ч. Ч. 2. Задачник для учащихся общеобразовательных учреждений / [А. Г. Мордкович и др.] ; под ред. А. Г. Мордковича. – 11-е изд., испр. и. доп. – М.: Мнемозина, 2013 с. – 344 с.

26. Мордкович, А.Г. Алгебра. 9 класс. В 2 ч. Ч. 1.: Учебник для учащихся общеобразовательных учреждений / А.Г. Мордкович, П.В. Семенов. – 12-е изд., стер. – М.: Мнемозина, 2010. – 224 с.

27. Мордкович, А.Г. Алгебра. 9 класс. В 2 ч. Ч. 2.: Задачник для учащихся общеобразовательных учреждений / А.Г. Мордкович, Л.А. Александрова, Т.Н. Мишустина и др.; под ред. А.Г. Мордковича. – 12-е изд., испр. – М.: Мнемозина, 2010. – 223 с.

28. Мордкович, А.Г., Николаев, Н.П. Алгебра. 9 кл.: учеб. для учащихся общеобразоват. учреждений/ А. Г. Мордкович, Н. П. Николаев. – 3-е изд., перераб. – М.: Мнемозина, 2018. – 255с.

29. Муравин, Г.К. Алгебра 7 кл.: учеб. для общеобразоват. учреждений/ Г.К. Муравин, К. С. Муравин, О. В. Муравина. – 9-е изд., стереотип. – М.: Дрофа, 2013. – 285 с.

30. Муравин, Г.К. Алгебра 8 кл.: учеб. для общ. уч/ Г.К. Муравин, К. С. Муравин, О. В. Муравина. – 9-е изд., стереотип. – М.: Дрофа, 2013. – 254 с.

31. Муравин, Г.К. Алгебра. 9кл.: учебник/ Г.К. Муравин, О.В. Муравина. – 14-е изд., стереотип. - М.: Дрофа, 2014. – 315 с.

32. Муравин Г.К., Муравина О.В. Алгебра. 9 класс: методические рекомендации к учебнику Г.К.Муравина, К.С.Муравина, О.В.Муравиной "Алгебра. 9 класс". - М.: Дрофа, 2009. 186 с.

33. Погорелов, А.В. Геометрия: учебник для 7-11 кл. общеобразоват. учреждений / А. В. Погорелов. - 5-е изд. Просвещение, 1995. - 383 с.

34. Примерная основная образовательная программа основного общего образования. / М-во образования и науки РФ. – М.: Просвещение, 2015. – 560 с. [Электронный ресурс]. – Режим доступа: http://fgosreestr.ru/wp-content/uploads/2015/06.pdf. – Последнее обновление 20.12.2017.

35. Рыбников, К.А. История математики : учеб. пособие для вузов / К. А. Рыбников. - 2-е изд. - Москва : Изд-во Моск. ун-та, 1974. - 455 с.

36. Саранцев Г.И. Общая методика преподавания математики: учебное пособие для студентов математических специальностей педагогических вузов и университетов /Г.И. Саранцев. –: Красный октябрь, 1999. – 454 с.

37. Смирнова, И.М. Геометрия учебник 7-9 классы / И. М. Смирнова, Смирнов. В.А.. – :Мнемозина, 2007. – 382 с.

38. Старова, О.А. Именные теоремы [Электронный ресурс]/О.А. Старова// Математика всё для учителя. – 2017. №11(83) – С . Режим доступа: http://www.e-osnova.ru/journal/3/83/19266/ - Последнее обновление 27.01.2018

39.Ткачук, В.В. Математика абитуриенту: М.: МЦНМО, 2004-966 с.

40.Федеральный государственный образовательный стандарт основного общего образования: Приказ Мин. образования и науки РФ от 17.12.2010 г. №1897. [Электронный ресурс]. – Режим доступа: http://минобр-науки.рф/документы/543 – Последнее обновление 09.01.2018.

41. Филатов В.Г. Из опыта применения теоремы Виета при решении квадратных уравнений [Текст] / В.Г. Филатов // Математика в школе. 1981 - №6 – С. 19-21

42.Чистяков, В.Д. Материалы по истории математики в Китае и Индии. Пособие для внеклассной работы. - М.: ГУПИ, 1960. - 168 с.

43. Шарыгин, И.Ф. Геометрия : учебник : 7-9 кл. / И. Ф. Шарыгин. - 3-е изд., стер.; гриф МО. - Москва : Дрофа, 2014. - 463 с.

44. Brown, S. Are indirect proofs less convincing? [Электронный ресурс]/ S. Brown // The Journal of Mathematical -2016. – С.1-23 – Режим доступа: http://www.elsevier.com/locate/jmathb Последнее обновление 16.02.2018

45. Chard, D. Training Must Focus on Content and Pedagogy [Электронный ресурс] / D. Chard// Education Next – 2013. №13. – С. 4 – Режим доступа: http://educationnext.org/training-must-focus-on-content-and-pedagogy/ Последнее обновление 31.01.2018

46. Fauvel, J. History in Mathematics Education / J.Fauvel, J. V. Maanen / - Kluwer Academic Publishers, 2002. – 456 p.

47. Hodgkin, L.A. History of Mathematics / Luke Hodgkin / - Oxford University Press, 2005. - 296 p

48. Weber, K. Mathematics Majors' Perceptions of Conviction, Validity, and Proof, Mathematical Thinking and Learning [Электронный ресурс]/ K. Weber // Mathematical Thinking and Learning -2010. – С.305-335 – Режим доступа: http://dx.doi.org/10.1080/10986065.2010.495468 Последнее обновление 16.02.2018

Приложение 1

Дополнительные «именные» теоремы

Теорема Птолемея

Данная теорема встречается лишь в дополнительных главах по геометрии за 8 класс. В этой теореме идет речь о следующем свойстве вписанного четырехугольника.

Теорема Птолемея [2, С. 153]. Произведение диагоналей , вписанного в окружность четырехугольников, равно сумме произведений противоположных сторон.

Доказательство. Рассмотрим вписанный четырехугольник $ABCD$. Пусть $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$, $DA = d, AC = m, BD = n$ (рис 17). Докажем что $mn = ac + bd$.

На диагонали AC отметим точку M такую, что $\angle ABM = \angle DBC$. $\angle BAM = \angle BDC$ так как они опираются на одну и ту же дугу. Значит треугольники ABM и DBC подобны по двум углам. Отсюда следует, что

$$\frac{AB}{BD} = \frac{AM}{CD}, AB \cdot CD = AM \cdot BD, ac = AM \cdot n.$$

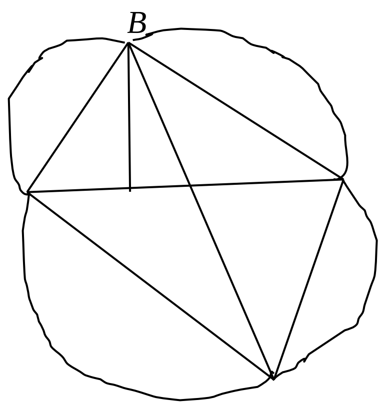


Рис.17. Теорема Птолемея

Треугольники MBC и ADB тоже подобны по двум углам (углы $\angle BCM = \angle BDA$ равны, как вписанные и опирающиеся на одну и ту же дугу, и $\angle MBC = \angle ABD$). Поэтому

$$\frac{BC}{MC} = \frac{BD}{AD}, BC \cdot AD = MC \cdot BD, bd = MC \cdot n.$$

Сложив равенства, получим $mn = ac + bd$

Приложение 2

Дополнительные «именные» теоремы

Теорема Эйлера

Теорема Эйлера (о многогранниках)[37, С. 110]. Если многоугольник разбит на конечное число многоугольников так, что любые два многоугольника разбиения или не имеют общих точек, или не имеют общие вершины, или имеют общие ребра, то имеет место равенство

$$\text{В} - \text{Р} + \Gamma = 1,$$

где В - общее число вершин, P- общее число ребер, Г – число многоугольник (граней).

Доказательство.

Допустим, что $\text{В} - \text{Р} + \Gamma = 1$ не изменится, если в произвольном многоугольнике провести диагональ или кривую (рис. 18) Видно, что после проведения диагонали в новом разбиение будет В вершин, $\text{Р} + \Gamma$ ребер и количество многоугольников увеличится на единицу, то есть получим $\text{В} - (\text{Р} + 1) + (\Gamma + 1) = \text{В} - \text{Р} + \Gamma$.

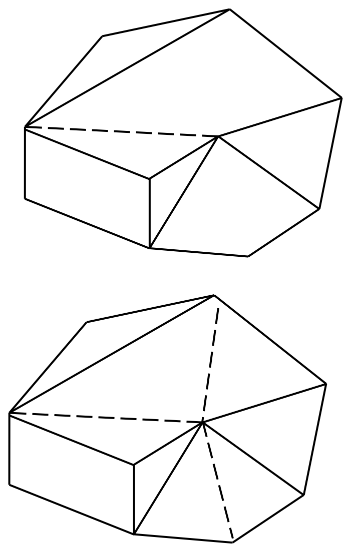


Рис. 18. Теорема Эйлера

Теперь проведем диагонали, разбивающие входящие многоугольники на треугольники, покажем выполнимость соотношения $\text{В} - \text{Р} + \Gamma = 1$. Для этого нужно последовательно убирать внешние ребра, уменьшая количество треугольников. При этом возможен случай, когда в треугольнике ABC потребуется снять два ребра AB и BC, и когда для удаления треугольника MKN нужно снять одно ребно MN. В обоих случаях наше равенство не изменится.

Приложение 3

Задачи на доказательство и применение «именных» теорем

Теорема Безу

Тип 1. Нахождение остатка при делении многочлена на одночлен.

Задача 17 [6, С. 70]. Найдите остаток при делении многочлена $x^6 - 4x^4 + x^3 - 2x^2 + 5x$ на $x + 3$.

Решение.

$$P(-3) = (-3)^6 - 4(-3)^4 + (-3)^3 - 2(-3)^2 + 5(-3) = 375.$$

Ответ: 375.

Тип 2. Отыскание корней уравнений высших степеней.

Задача 18 [7, С. 175]. Решить уравнение $3x^4 + 5x^3 - 9x^2 - 9x + 10 = 0$, используя теорему Безу.

Решение. Для того чтобы решить уравнение нужно представить его в виде многочлена $P(x) = 3x^4 + 5x^3 - 9x^2 - 9x + 10$ и привести его к виду

$$P(x) = (x - a)Q(x) + P(a)$$

Так как нам дан многочлен с целыми коэффициентами, то свободный член будет нацело делится на корень уравнения. Свободный член 10 делится нацело на 1, -1, 2, -2, 5, -5, 10, -10.

$$P(1) = 3 \cdot 1^4 + 5 \cdot 1^3 - 9 \cdot 1^2 - 9 \cdot 1 + 10 = 0;$$

Следовательно, по теореме Безу, $P(x)$ делится на $x - 1$. Выполним деление и получим

$$3x^4 + 5x^3 - 9x^2 - 9x + 10 = (x - 1)(3x^3 + 8x^2 - x - 10).$$

Теперь рассмотрим многочлен $3x^3 + 8x^2 - x - 10$, который будет на цело делится на $x - 1$, получим

$$3x^4 + 5x^3 - 9x^2 - 9x + 10 = (x - 1)(x - 1)(3x^2 + 11x + 10).$$

Произведение многочленов обращается в нуль, когда в нуль обращается хотя бы один из них. Значит, мы можем смело приравнивать наш множитель $3x^2 + 11x + 10$ к нулю и найти корни.

$$3x^2+11x+10=0;\ x_1=-2, x_2=-1\frac{2}{3}.$$

Отсюда по теореме Виета, получим

$$3x^4+5x^3-9x^2-9x+10=\ x-1\quad x-1\quad x+2\ \ (x+1\frac{2}{3})$$

Ответ: $1,-2,-1\frac{2}{3}$.

Задача 19 [31, С. 77]. Дано уравнение $6x^4-7x^3-18x^2-13x+6=0$, найти его корни.

Решение. Данное уравнение будет иметь 4 корня. Два из которых можно найти с помощью подбора. Применим следствие, если у нас многочлен с целыми коэффициентами, то свободный член нацело делится на корень уравнения. Делителями числа 6 являются 1, -1, 2, -2, 3,-3, -6, 6. Отсюда, числа -1 и -2 подходят. С помощью схемы Горнера найдем следующие множители (Таблица 1).

Таблица 5

Схема Горнера

$x-a$	4	-13	5	-13	6
-1	6	1	-19	6	0
-2	6	-11	3	0	

Значит, многочлен $6x^4-7x^3-18x^2-13x+6$ можно представить в виде $6x^4-7x^3-18x^2-13x+6=\ x+1\quad x+2\quad 6x^2-11x+3$.

$$6x^2-11x+3=0; x_3=\frac{2}{3}, x_4=\frac{1}{3}.$$

Ответ: $-1,-2,\frac{2}{3},\frac{1}{3}$.

Задача 20. Найдите целые корни уравнения четвертой степени (если такие есть) $x^4+4x^3-9x^2-16x+20=0$.

Указания: применяем теорему Безу, находим первый корень, применяем схему Горнера.

Ответ: -2 и 3.

Тип 3. Разложение многочлена на множители.

Задача 21 [30, С. 77]. Представить в виде произведения многочленов данное выражение $3x^4 - 19x^3 + 39x^2 - 29x + 6$.

Решение. Согласно следствию из теоремы Безу, этот многочлен можно разложить на множители, одним из которых является двучлен $x - 1$. Применим схему Горнера и получим квадратное уравнение вида

$$3x^2 - 10x + 3 = 0; x_3 = \frac{1}{3}, x_4 = 3; 3x^2 - 10x + 3 = \ x - 3 \quad 3x - 1 \ ;$$

$$3x^4 - 19x^3 + 39x^2 - 29x + 6 = \ x - 1 \quad x - 2 \quad x - 3 \quad 3x - 1 \ .$$

Ответ: $x - 1 \quad x - 2 \quad x - 3 \quad 3x - 1$.

Тип 4. Задачи с параметром.

Задача 22 [31, С. 77]. Дано уравнение $6x^3 - 7x^2 - 16x + m = 0$. Определите свободный член, если известно, что один из его корней равен 2, и найдите остальные два корня.

Решение. Представит уравнение в виде многочлена $P(x)$. Так как 2 является корнем данного уравнения, то при нахождении $P(2)$, должно получится нуль, исходя из этого вычислим значение m.

$$m = -6 \cdot 2^3 + 7 \cdot 2^2 + 16 \cdot 2 = -48 + 28 + 32 = 12.$$

Данный многочлен примет вид $6x^3 - 7x^2 - 16x + 11$, применим схему Горнера (Таблица 3).

Таблица 6

Схема Горнера

$x - a$	6	-7	-16	12
2	6	5	-6	0

Получим квадратное уравнение $6x^2 + 5x^2 - 6x = 0$, $x_1 = \frac{2}{3}, x_3 = -\frac{3}{2}$.

$$6x^3 - 7x^2 - 16x + 11 = \ x - 2 \quad x - \frac{2}{3} \quad x + \frac{3}{2} \ .$$

Ответ: $m = 11$; $2, \frac{2}{3}, -\frac{3}{2}$.

Приложение 4

Задачи на доказательство и применение «именных» теорем

Теоремы Фалеса и Вариньона

Теорема Фалеса

Тип 1. Определение параллельности прямых и разделение отрезка на n *равных частей.*

Задача 23. Через угол NPZ проходят три прямые AK, CL и DM. A, C, D лежат на NP, а K, L, M на PZ. Параллельны ли прямые AK, CL и DM, если $AC = 2, CD = 3$, а $KM = 10$, $LM = 6$.

Решение. Применим обобщенную теорему Фалеса.

$$\frac{AC}{CD} = \frac{KL}{KM} = \frac{AD}{KM} \leftrightarrow \frac{2}{3} = \frac{4}{6} = \frac{8}{6}.$$

Следовательно, так как параллельные прямые, пересекающие две данные прямые, отсекают на этих прямых пропорциональные отрезки, то прямые AK, CK и DM параллельны.

Ответ: да.

Задача 24. Разделите отрезок MD на 6 равных частей

Решение. Произвольно возьмем точку K, не лежащую на прямой MD. Проведем луч MK и от начала отметим шесть отрезков таких, что

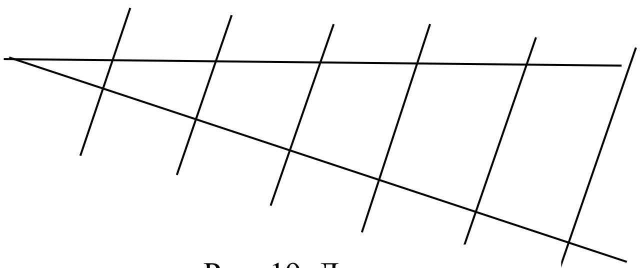


Рис. 19. Деление отрезка

$$MN = NL = LP = PS = SH = HK.$$

Соединим точки K и D. Построим прямые проходящие через точки N, L, P, S, H и параллельные отрезку DK. По теореме Фалеса получим, что прямые пересекут DK в 6 равных отрезках.

$$M_1N_1 = N_1L_1 = L_1P_1 = P_1S_1 = S_1H_1 = H_1D.$$

Тип 2. Нахождение неизвестных величин и отношения сторон различных фигур с помощью теоремы Фалеса

Задача 25 [33, С. 80]**.** Дана трапеция $ABCD$ основания которой равны 2 и 5 см. Сторона CD разделена на три равные части CK, KL, LD. Через точки K, L проведены прямые параллельные основаниям. Найдите длины этих отрезков.

Решение. Построим трапецию $ABCD$, у которой боковые стороны разделены на три равные части, $AM = MN = NB$ (Рис. 8.) По теореме Фалеса, получим что $DL = LK = KC$.

Из равенства этих отрезков следует, что NK – средняя линия трапеции $MBCL$, а ML – средняя линия трапеции $ANKD$.

Значит $2NK = BC + ML, 2ML = NK + AD$. Обозначим NK за x, а ML за y, получим $2x = 2 + y, 2y = x + 5$;

$$y = 2x - 2;$$
$$2y = x + 5;$$

$$2 \;\; 2x - 2 \;\; = x + 5;$$

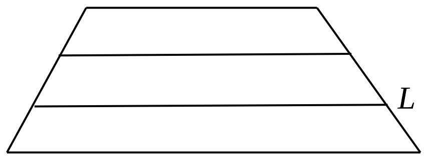


Рис. 20. Трапеция

Ответ: 3 и 4 см.

Задача 26. Прямая CD параллельна АВ и пересекает угол BOA так, что O, B, D лежат на одной прямой, и O, A, C лежат на одной прямой. Найдите длину CD, если $AB = 2, OB = 4$ и $OD = 20$,

Решение. По теореме Фалеса, получаем что $CD = \frac{OD}{OB} * AB = 10$ см.

Ответ: 10 см.

Тип 3. На доказательство факта с помощью теоремы Фалеса

Задача 27 [1, С. 106]. Докажите, что в отрезок, соединяющий середины боковых сторон трапеции, параллелен основаниям трапеции.

Решение. Возьмем произвольную трапецию $ABCD$, $AN = NB, CK = KD$ Нужно доказать, что $NK||AD$.

Применим метод от противного. Пусть $NK||AD$, тогда так как по условию $AN = NB$, то по теореме Фалеса $CK = KD$. Докажем что NK –

единственный. Через точки N и K по аксиоме можно провести только одну прямую, а это значит, что отрезок соединяющий середины боковых сторон трапеции параллелен основаниям, при этом он единственный.

Теорема Вариньона

Тип 1. На доказательство геометрического факта с помощью теоремы Вариньона

Задача 28 [33, С 80]**.** Докажите, что середины сторон прямоугольника являются вершинами ромба.

Указания: доказывается аналогично, как и теорема Вариньона.

Тип 2. Отыскание неизвестных величин с помощью теоремы Вариньона

Задача 29 [33 С. 80]. Докажите, что середины сторон четырехугольника являются вершинами параллелограмма и найдите его стороны, если известно, что диагонали четырехугольника равны 10 и 12.

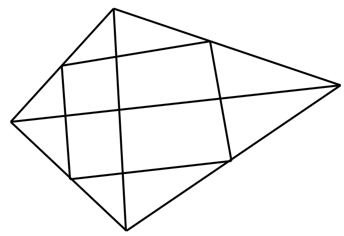


Рис. 21. Задача 29

Решение. Возьмем произвольный четырех угольник $ABCD$ (Рис. 7.) у которого AC и BD диагонали, S, E, H, Z середины сторон четырехугольника.

По теореме Вариньона следует, что четырехугольник $ZKEH$ – параллелограмм, отсюда следует что $2SE = AC, 2EH = BD$.

Пусть AC =12, тогда $SE = ZH = 6$ см, тогда оставшиеся стороны параллелограмма будут равны 5 см.

Ответ: 6 и 5 см.

Приложение 5

Задачи на доказательство и применение «именных» теорем

Теоремы Чевы и Менелая

Типы задач на применение теоремы Чевы

Тип 1. Определение пересечения прямых в одной точке

Задача 30. На сторонах AB, BC и CA треугольника ABC взяты соответственно точки K, N, D. Пересекаются ли $AN, BD,$ и CK в одной точке, если: а) $AD = 5, DC = 1, CN = NB = 3,\ BK = 2, KA = 4$;

б) $AD = 4, DC = 1, CN = NB = 2,\ BK = 1, KA = 4$.

Решение. Применим теорему Чевы, прямые будут пересекаться, если будет выполняться условие

$$\frac{AD}{DC} \cdot \frac{CN}{NB} \cdot \frac{BK}{KA} = 1$$

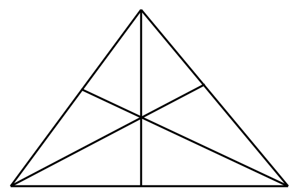


Рис. 22. Пересечение прямых

Проверим условие под а: $5 \cdot 3 \cdot 2 \neq 1 \cdot 3 \cdot 2$. Следовательно, так как не выполняется условие, то прямые не пересекаются в одной точке. Под б: $4 \cdot 2 \cdot 1 = 1 \cdot 2 \cdot 4$. Прямые будут пересекаться.

Ответ: нет, да.

Тип 2. Задачи на вычисление отношения сторон треугольника

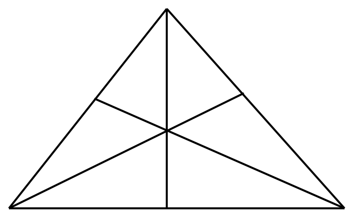


Рис. 23. Задача 31

Задача 31. На рисунке 14 вычислить отношение отрезков треугольника BAC, отмеченных знаком «?» зная, что прямые AD, CF, BP пересекаются в одной точке.

Решение. Нужно найти отношение стороны BD к DC, для этого воспользуемся теоремой Чевы и выразим от туда нужное отношение.

$$\frac{AF}{FB} \cdot \frac{CP}{PA} \cdot \frac{BD}{DC} = 1,\ \ \frac{BD}{DC} = \frac{FB}{AF} \cdot \frac{PA}{CP};$$

$$\frac{BD}{DC} = \frac{34}{3} \cdot \frac{5}{17} = \frac{10}{3}.$$

Ответ: $\frac{10}{3}$.

Тип 3. Задачи на доказательство факта с помощью теоремы Чевы

Задача 32. Докажите, что биссектрисы треугольника пересекаются в одной точке.

Решение. Рассмотри произвольный треугольник ABC и проведем в не биссектрисы AD, BP, CF.

Для доказательства применим теорему Чевы. Биссектрисы AD, BP, CF будут пересекаться только в том случае, если

$$\frac{BF}{FA} \cdot \frac{AP}{PC} \cdot \frac{CD}{DB} = 1$$

По свойству биссектрис треугольника

$$\frac{BF}{FA} = \frac{BC}{AC}; \frac{AP}{PC} = \frac{BA}{BC};$$

$$\frac{CD}{DB} = \frac{AC}{BA}; \frac{BF}{FA} \cdot \frac{AP}{PC} \cdot \frac{CD}{DB} = 1$$

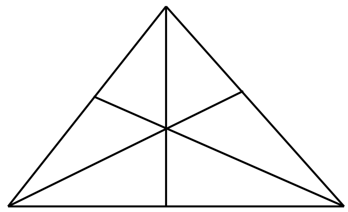


Рис. 24. Задача 32

Типы задач на применение теоремы Менелая

Тип 1. На доказательство факта с помощью теоремы Менелая

Задача 33 [39, С. 291]. Доказать, что медианы треугольника пересекаются в одной точке и что эта точка пересечения делит каждую из медиан в отношении 2:1, считая от вершины.

Решение. Пусть в треугольнике ABC проведены медианы BM, AN и CH, причем K-точка их пересечения. Для того, чтобы доказать, что медианы пересекаются в одной точке, достаточно доказать, что

$$\frac{AH}{HB} \cdot \frac{BN}{NC} \cdot \frac{CM}{MA} = 1.$$

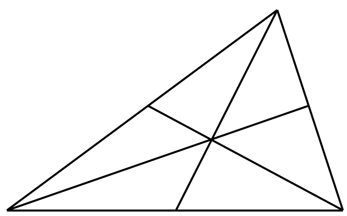


Рис. 25. Задача 33

Так как медиана делит сторону пополам, то $AH = HB, BN = NC, CM = MA$. Следовательно, если мы заменим то

$$\frac{AH}{AH} \cdot \frac{BN}{BN} \cdot \frac{CM}{CM} = 1.$$

Значит медианы треугольника пересекаются в одной точке.

Далее нужно доказать, что BK к KM равно 2. Это будет достаточно, так как аналогично будет доказываться и для медианы CM. Применим теорему Менелая к треугольнику MBC и секущей AN.

$$\frac{CN}{NB} \cdot \frac{BK}{KM} \cdot \frac{MA}{AC} = 1;$$

$$1 \cdot \frac{BK}{KM} \cdot \frac{1}{2} = 1, \quad \frac{BK}{KM} = 2.$$

Тип 2. На вычисление отношения сторон треугольника

Задача 34 [39, С. 289]. Дан треугольник ABC, в котором BM – медиана. Точка P лежит на стороне AB, точка Q – на стороне BC, $\frac{AP}{PB} = \frac{2}{5}, \frac{BQ}{QC} = 6$. Отрезок PQ пересекает медиану BM в точке R. Найти отношение BR к RM.

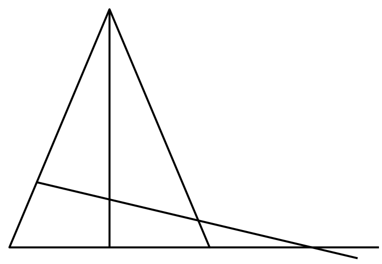


Рис. 26. Задача 34

Решение. Прямая PQ не параллельна AC, так как не выполняется обобщенная теорема Фалеса, т. е. $\frac{AP}{PB} \neq \frac{CQ}{QC}$. Продолжим эту прямую до пересечения с прямой AC в точке S (Рис. 9.).

Запишем теорему Менелая для треугольника ABC и секущей PS

$$\frac{AP}{PB} \cdot \frac{BQ}{QC} \cdot \frac{CS}{SA} = 1 \leftrightarrow \frac{2}{5} \cdot \frac{6}{1} \cdot \frac{CS}{SA} = 1, \quad \frac{CS}{SA} = \frac{5}{12}.$$

Пусть $AM = MC = x$, тогда $SA = CS + AM + MC = CS + 2x$, отсюда

$$\frac{CS}{CS + 2x} = \frac{5}{12} \leftrightarrow CS = \frac{10x}{7}.$$

$$SM = CS + x = \frac{17x}{7};$$

$$SA = CS + 2x = \frac{24x}{7}.$$

Запишем теорему Менелая для треугольника ABM и секущей PS

$$\frac{AP}{PB} \cdot \frac{BR}{RM} \cdot \frac{MS}{SA} = 1 \leftrightarrow \frac{2}{5} \cdot \frac{BR}{RM} \cdot \frac{17x}{7} \cdot \frac{7}{24x} = 1 \leftrightarrow \frac{2}{5} \cdot \frac{BR}{RM} \cdot \frac{17}{24} = 1;$$

$$\frac{BR}{RM} = \frac{60}{17}$$

Ответ: $\frac{60}{17}$

Задача 35 [1, С. 132]. Боковая сторона равнобедренного треугольника равна 17 см, а основание равно 16 см. Найдите высоту, проведенную к основанию.

Решение. Построим равнобедренный треугольник ABC, у которого $AB = BC = 17, AC -$ 17, BH – высота (Рис. 10.)

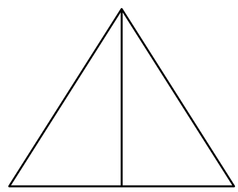


Рис. 27. Задача 35

Нам нужно найти высоту BH, для того чтобы найти эту высоту, мы можем рассмотреть прямоугольный треугольник ABH, и найти BH с помощью теоремы Пифагора.

$$AB^2 = BH^2 + AH^2, BH = \ \overline{AB^2 - AH^2}.$$

Так как треугольник равнобедренный, а высота проведена к основанию, следовательно, BH будет так же являться медианной треугольника ABC. Значит $AH = HC = 8$ см. Получаем

$$BH = \ \overline{AB^2 - AH^2} = \ \overline{17^2 - 8^2} = \ \overline{225} = 15\text{см}.$$

Ответ: 15 см.

Приложение 6

Задачи на доказательство и применение «именных» теорем

Формула Герона

1 тип. Нахождение площади треугольника по трем сторонам

Задача 36 [33, С. 178] Найдите площадь треугольника по трем сторонам: 13, 14, 15.

Решение. Для нахождения площади треугольника со сторонами 13, 14, 15 применим Формулу Герона

$$S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},\ \text{где } p=\frac{1}{2}(a+b+c)=21\text{см}.$$

$$S=\sqrt{21(21-13)(21-14)(21-15)}=84\text{см}^2.$$

Ответ: 84см^2.

2 тип. Нахождение других величин

Задача 37 [33, С. 178] Найти высоту треугольника ABC, опущенную на сторону BC.

Решение: Пусть $AB=a, AC=b, BC=c, h$- высота. Тогда по формулам площади треугольника получим

$$S_{ABC}=\frac{1}{2}ch \text{ и } S_{ABC}=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

$$h=\frac{2S_{ABC}}{c}=\frac{2\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{c}$$

Ответ: $\frac{2\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{c}$.

Задача 38 [33, С. 178] Дан треугольник, боковые стороны которого равны 30 и 25 см. Найдите высоту треугольника, опущенную на основание, если основание равно 25 см.

Указание. Применяется формула $\frac{2\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{c}$, которая была выведена в задаче 37.

Ответ: 24 см.

Задача 39. [33, С. 179] Найдите радиусы описанной и вписанной окружностей для треугольника со сторонами: 13, 14, 15.

Указание. Применяем формулы нахождения радиусов описанной и вписанной окружностей

$$R = \frac{abc}{4S} \text{ и } r = \frac{2S}{a+b+c}.$$

Площадь треугольника находится по Формуле Герона.

Ответ: $R = 8\frac{1}{8}, r = 4$

Тип 3. На доказательство

Задача 40. Докажите, что радиусы окружностей описанной около равнобедренного треугольника с основаниями a и b равны соответственно

$$R = \frac{b^2}{\sqrt{4b^2 - a^2}} \text{ и } r = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{(2b-a)}{(2b+a)}}$$

Решение. Пусть ABC – равнобедренный треугольник, причем $AC = a$, а $AB = BC = b$. Найдем радиусы через формулы

$$R = \frac{abc}{4S} = \frac{ab^2}{4S} \text{ и } r = \frac{2S}{a+b+c} = \frac{2S}{a+2b}.$$

Для этого найдем площадь с помощью формулы Герона

$$S_{ABC} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-b)},$$

$$p = \frac{1}{2}(a+b+c) = \frac{1}{2}(a+b+b) = \frac{1}{2}(a+2b),$$

$$S_{ABC} = \sqrt{p(p-a)(p-b)^2} = \frac{a}{4}\sqrt{4b^2 - a^2}.$$

Подставляем в R и r, полученное значение площади, получаем

$$R = \frac{ab^2}{4S} = \frac{4ab^2}{4a\sqrt{4b^2 - a^2}} = \frac{b^2}{\sqrt{4b^2 - a^2}},$$

$$r = \frac{2S}{a+2b} = \frac{1}{2}\frac{a\sqrt{4b^2 - a^2}}{a+2b} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{(2b-a)}{(2b+a)}}.$$

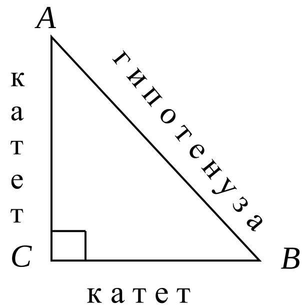
Приложение 7

Самостоятельная работа для 8 класса

по теме « Теорема Пифагора»

Теорема Пифагора. 1 уровень сложности.

Задание 1. Дополните определение прямоугольного треугольника



Определение 1. Прямоугольный треугольник – это треугольник, у которого один угол равен _______ градусов. Сторона противоположная прямому углу, называется ________ Стороны, прилежащие к прямому углу, называются _____________

Задание 2. На каких рисунках изображен прямоугольный треугольник. Какие стороны являются катетами, а какая гипотенузой.

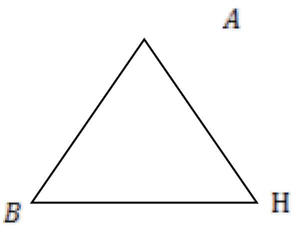


Рис. 1.

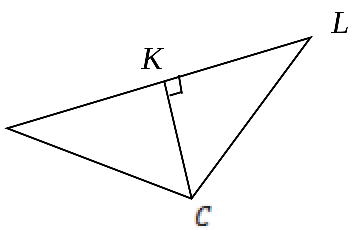


Рис. 2.

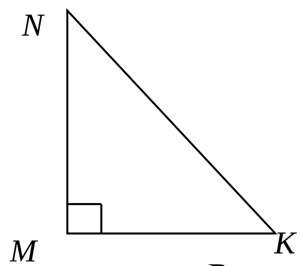


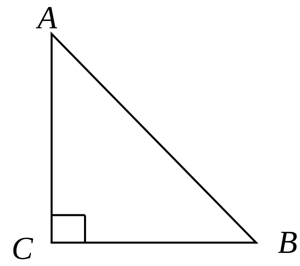
Рис.3 Р

Рисунок 1:____

Рисунок 2:____

Рисунок 3:____

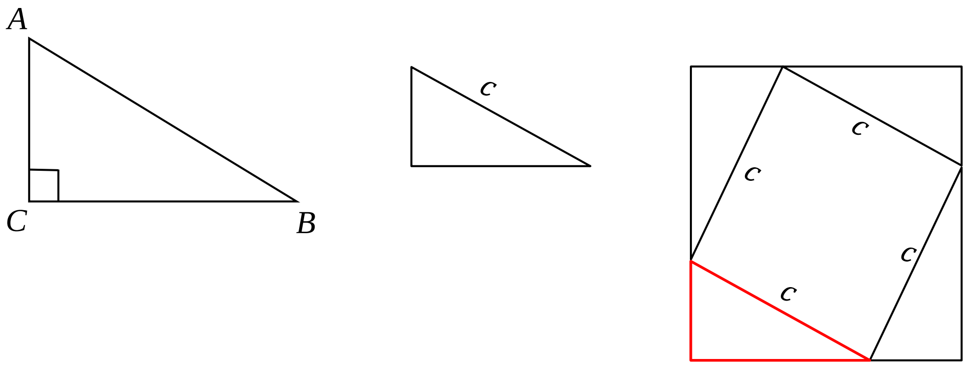
Задание 3. Сформулируйте теорему исходя из рисунка и формулы



$$AB^2 = AC^2 + CB^2$$

Теорема Пифагора. Квадрат_______равен ______квадратов____

Задание 4. Заполните пропуски в доказательстве теоремы Пифагора



Дано: ABC -_________треугольник . C=_________

Доказать: AB= ____+_____

Доказательство:

1. Пусть AB=___, AC =______, CB=_____.

2. Достроим треугольник до квадрата со сторонами a+_____

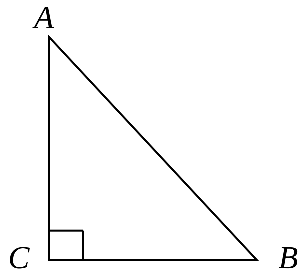
3. Тогда площадь этого квадрата S =

4. Так же квадрат состоит из 4 равных ____________ треугольников со сторонами _______ и одного квадрата со сторонами ________

5. Тогда площадь квадрата S=0.5ab+___+___+____+c^2

6.$(a+b)^2 = 2ab + c^2 =)c^2 = \_^2 + \_^2$

Задание 5. Дополните решения задач



$$AB^2 = AC^2 + CB^2$$

а) $AC = 4, CB = 3;\ AB^2 = 4^2 + 3^2 = 16 + 9 = 25 =) AB = \overline{25} =$ _____см

б) $AC = 2, CB = 3;\ AB^2 =$ ___$^2 +$ ___$^2 =$ __ $+$ __ $=$ __ ; $AC = \overline{\quad} =$ _____см

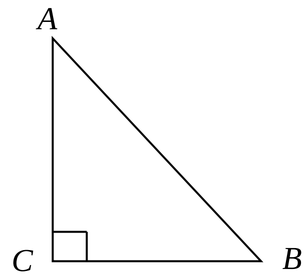
в) $AB = 5, AC = 4;\ AC^2 =$ ___ $-$ _____ $=$ ______;$AB = \overline{\quad}$ =______см

***Задание 6.** В прямоугольном треугольнике катеты равны 4 и 5, найти гипотенузу.

***Задание 7.** В прямоугольном треугольнике гипотенуза равна 5, а один катет равен 4. Найти меньший катет.

Теорема Пифагора. 2 уровень сложности

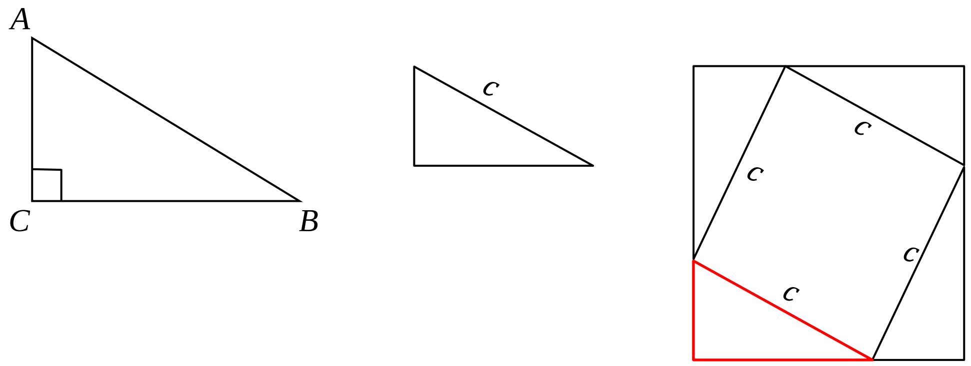
Задание 1. Исходя из рисунка, сформулируй теорему Пифагора



$$AB^2 = AC^2 + CB^2$$

Теорема Пифагора:____

Задание 2. Заполните пропуски доказательства Теоремы Пифагора.



Дано: ABC -__________треугольник . C=__________

Доказать: AB= _____+______

Доказательство: 1.

Задание 3. В прямоугольном треугольнике катеты равны 4 и 5, найти гипотенузу.

Задание 4. В прямоугольном треугольнике гипотенуза равна 5, а один катет равен 4. Найти меньший катет.

Задание 5. Является ли треугольник прямым, если его стороны равны: а)5, 4,2; б)3, 8,5; в)4,9, 5.

Теорема Пифагора. 3 уровень сложности.

Задание 1. Дополни термины

Прямоугольный треугольник – это________________________________

____

Теорема Пифагора - ____

____

Задание 2. Докажите теорему Пифагора.

Задание 3. Является ли треугольник прямым, если его стороны равны: а)5, 4,2; б)3, 8,5 в)4,9, 5.

Задание 4. Найти площадь прямоугольного треугольника, если известно, что один из его катетов на 5 см больше другого, а гипотенуза равна 25 см.

Задание 5. (Старинная задача) Дан водоем со стороной 10 чи. В центре водоема расположен камыш, который выступает над водой на 1 чи. Если потянуть камыш к берегу, то он как раз коснется его. Спрашивается, какова глубина воды и длина камыша.

Приложение 8

Таблица 1

Анализ задачного материала учебников алгебры (7-9 кл.).

Алгебра		
Учебники	Теорема Виета (8 класс)	Теорема Безу (9 класс)
Н.Я. Виленкин	Задачи с 27-77, из них 1 ЗПТ	с 10-23, 1 ЗПТ,
Ю.Н. Макарычев	Задачи с 580-599, из них 2 ЗПТ,	-
А.Г. Мордкович (б)	Задачи с 29.1 -29.55, из них 12 ЗПТ	-
А.Г. Мордкович (п)	Задачи с 26.1 - 26.50	-
Г.К. Муравина	Задачи с 326- 341, из них 5 ЗПТ	Задачи 153 – 162 3 ЗПТ

Таблица 2

Анализ задачного материала учебников геометрии (7-9 кл.).

Геометрия	
Л.С. Атанасян	Теорема Фалеса: 385, 386, 396 Теорема Пифагора: 483- 499
Л.С. Атанасян (доп. главы)	Теоремы Фалеса и Вариньона: 52-69 Теорема Пифагора: 154 - 168 Теоремы Чевы и Менелая: 190 - 202 Теорема Птолемея: 296 -320
А.В. Погорелов	Теоремы Фалеса: §6 задачи 48-49 Теорема Пифагора: §7 задачи 1-74 Формула Герона: §14 задачи 29 -34, 43, 45
И.М. Смирнова	Теоремы Фалес: §34 задачи 1-16 Теорема Пифагора: §49 задачи 1-16 Теорема Эйлера: §25* задачи 1-10 Формула Герона: §59 задачи 26-28
И.Ф. Шарыгин	Теоремы Фалеса: 6.2 задачи 1-10 Теорема Пифагора: 7.1 задачи 1-27 Формула Герона: 9.2 задачи 10, 11

Приложение 9

Использование «именных» теорем в информатике

Задание 1. Напишите программу на языке *Pascal* для того чтобы выяснить является ли треугольник прямоугольным.

Решение.

```
Program 1;
Var a, b, c: integer;
Begin
Write 'Введите сторону a ;
Read a ;
Write 'Введите сторону b:' ;
Read b ;
Write 'Введите сторону c:' ;
Read c ;
if sqr c = (sqr a + sqr b )
    then
Writeln ('Треугольник прямоугольный')
    else
Writeln 'Треугольник не является прямоугольным' ;
End.
```

Приложение 10

Список статей по «именным» теоремам

При изучении теорем Чевы и Менелая можно порекомендовать следующие статьи:

1. *Габович И.* Теорема Менелая для тетраэдра //Квант.− 1996, №6. С. 34-36.

2. *Куланин Е.* Об одной трудной геометрической задаче //Квант.− 1992, №7. С. 46-50.

3. *Лоповок Л.* Вписанный шестиугольник //Квант.− 1973, №1. С. 18-23.

4. *Орач Б.* Теорема Менелая //Квант.− 1991, №3. С. 52-55.

5. *Шарыгин И.* Теоремы Чевы и Менелая //Квант.− 1976, №11. С. 22-30.

6. *Эрдниев Б.*, *Манцаев Н.* Теоремы Чевы и Менелая //Квант.− 1990, №3. С. 56-59.

При, изучении теоремы Виета можно обратить внимание на следующие статьи.

1. *Зенина М.Н.* Эта разноликая теорема Виета/ М.Н. Зенина // Математика в школе. 1992 - №23 – С. 29-30

3. Копрински С., Формулы Виета.//Квант.− 1987, №4. С. 41-43

4.*Курляндчик Л., Фомин С.,* Теорема Виета и вспомогательный многочлен.//Квант.− 1984, №12. С. 14-16.

5. *Пресман А.,* «Квадратное уравнение»//Квант.− 1977, №7. С. 9.

6.Филатов В.Г. Из опыта применения теоремы Виета при решении квадратных уравнений [Текст] / В.Г. Филатов // Математика в школе. 1981 - №6 – С. 19-21

Формула Герона:

1. *Белый А.,* Формула Герона//Квант.− 1986, №10. С. 20-21.

Теорема Эйлера:

1.*Васильев Н., Гутенмахер В.,* О разрезаниях многоугольников и теореме Эйлера //Квант.− 1988, №1. С. 52-55.

Теорема Птолемея:

1. Затакавай В., Теорема Птолемея и некоторые тригонометрические соотношения.//Квант.− 1991, №4. С. 42-44.

Теорема Пифагора

1. Башмакова И.Г., Лапин А.И. Пифагор//Квант.− 1976, №1. С. 7-12.

2. Березин В.Н. Теорема Пифагора//Квант.− 1972, №3 С. 18-21.

3. *Воронин С., Кулагин А.*, О задаче Пифагора. // Квант.− 1987, №1. С. 11 14

4. *Рубинов Р.,* По следам теоремы Пифагора // Квант.− 1981, №11. С. 32-35.

5. Травкин Р., Синус суммы и теорема Пифагора // Квант.− 2000, №2. С. 11.