МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Тольяттинский государственный университет»

Институт математики, физики и информационных технологий
(наименование института полностью)

Кафедра «Высшая математика и математическое образование»
(наименование кафедры)

44.03.05 «Педагогическое образование»
(код и наименование направления подготовки)

«Математика и информатика»
(направленность (профиль))

# БАКАЛАВРСКАЯ РАБОТА

на тему **«МЕТОДИКА ОБУЧЕНИЯ РЕШЕНИЮ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ С ПАРАМЕТРАМИ В КУРСЕ АЛГЕБРЫ ОСНОВНОЙ ШКОЛЫ»**

| | | |
|---|---|---|
| Студент | С.О. Ефимова<br>(И.О. Фамилия) | ______<br>(личная подпись) |
| Руководитель | к.п.н., доцент И.В. Антонова<br>(И.О. Фамилия) | ______<br>(личная подпись) |
| Консультант | ст.преподаватель А.В. Прошина<br>(И.О. Фамилия) | ______<br>(личная подпись) |

**Допустить к защите**

Заведующий кафедрой д.п.н., профессор, Р.А. Утеева ______
(ученая степень, звание, И.О. Фамилия) (личная подпись)

«____»__________2018 г.

Тольятти 2018

## АННОТАЦИЯ

*Целью* дипломной работы является выявление методических особенностей обучения решению алгебраических уравнений с параметрами в курсе алгебры основной общеобразовательной школы.

Решение задач с параметрами является одним из наиболее сложных разделов математики в основной школе. При решении задач с параметрами необходимо не только хорошо знать методы решения уравнений, систем уравнений и неравенств, но и необходимо уметь проводить логические построения.

Бакалаврская работа состоит из введения, двух глав, заключения, списка литературы и Приложений.

*Глава I* бакалаврской работы содержит теоретические основы обучения теме «Уравнения с параметрами» в курсе алгебры основной школы. Изучено понятие уравнения с параметром, основные виды таких уравнений. Приведены цели обучения теме «Уравнения с параметром» и ее место в школьном курсе математики. Выполнен анализ теоретического и задачного материалов школьных учебников по алгебре 7-9 классов.

В *Главе II* представлены методические аспекты обучения решению алгебраических уравнений с параметрами в курсе алгебры основной школы. Раскрыты методические рекомендации по теме исследования. Рассмотрены задачи основного государственного экзамена, системы задач по теме «Уравнения с параметрами» в курсе алгебры основной школы.

*Список литературы* содержит 59 наименований.

*Объем работы* составляет 73 страницы.

## ABSTRACT

The teaching method for solving algebraic equations with parameters in the course of the algebra of the basic school.

The thesis is devoted to the identification of methodological peculiarities of how to teach the solution of algebraic equations with parameters in the secondary school algebra course, the development of methodological recommendations for studying this topic by students of grades 5-9 and relevant systems of tasks.

In studies this topic is considered mainly one-sided, thus additional methodological development is necessary which would take into consideration the specifics of mathematical tasks, that are supposed to form the corresponding concepts in the school course of algebra.

The first chapter of the thesis is devoted to theoretical basics of teaching the subject "Equations with parameters" in the course of algebra of the secondary school. The definition of an equation with a parameter and the main types of such equations are considered. The aims of teaching methods of the topic "Equations with a parameter" and their place in the school course of mathematics are examined. The analysis of theoretical and practical materials of school math’s textbooks for grades 7-9 is accomplished.

The second chapter presents the methodological aspects of teaching the solution of algebraic equations with parameters in the course of algebra secondary school. Methodological recommendations on the researched topic are provided. The tasks of the Main State Examination and the system of tasks on the topic "Equations with parameters" in the course of algebra in secondary school are considered.

The conclusion contains the summary and the results of the study.

The thesis consists of 84 pages, containing 1 table, 4 figures, a list of 59 references including foreign sources, and 4 appendices.

## ОГЛАВЛЕНИЕ

## ВВЕДЕНИЕ

**Актуальность исследования.** «Решение уравнений с параметрами - это один из наиболее сложных разделов математики в основной школе. При решении задач с параметрами важно владеть навыками применения различных методов для решения уравнений, систем уравнений, уметь проводить логические построения, быть внимательными для того, чтобы не потерять решения» [59].

Задания с параметрами часто встречаются в олимпиадах по математике. Ученые установили, что результаты в изучаемой области медленнее достигаются после долгого опыта и близкого знакомства с математическими объектами, а окружающая среда олимпиад благотворно действует на концентрацию внимания учащихся, их вдохновение для решения задач [56; 57].

М.Г. Гунашева в статье [10, С. 200] отмечает, что «рассматривать решения уравнений с параметрами полезно тогда, когда формулируются общие свойства, присущие не одному конкретному уравнению, а классу уравнений».

Исследователи в области теории и методики обучения математике подчеркивают важность обучения учащихся методам решения уравнений с параметрами, так как задания такого рода содержаться в ЕГЭ, олимпиадных заданиях [54, С. 75].

**Проблема исследования** состоит в выявлении методических особенностей обучения решению алгебраических уравнений с параметрами в курсе алгебры основной школы.

**Объект исследования:** процесс обучения алгебре в основной школе.

**Предмет исследования:** методика обучения учащихся теме «Уравнения с параметрами» в курсе алгебры основной школы.

**Цель работы:** выявить методические особенности обучения решению алгебраических уравнений с параметрами в курсе алгебры основной школы и разработать системы задач по теме исследования.

**Основные задачи исследования:**

1. Определить понятие уравнения с параметром и выделить виды алгебраических уравнений с параметром.

2. Выявить основные цели обучения теме «Уравнения с параметрами» в курсе алгебры основной школы и ее роль при изучении математики.

3. Рассмотреть содержание теоретического материала по данной теме в учебниках алгебры основной школы.

4. Проанализировать задачный материал по теме исследования в учебниках алгебры 7-9 классов.

5. Представить методические рекомендации по обучению решению алгебраических уравнений с параметрами в курсе алгебры основной школы.

6. Рассмотреть задачи ОГЭ по теме «Уравнения с параметрами» в курсе алгебры основной школы.

7. Разработать системы задач по теме исследования.

Для решения поставленных задач были использованы следующие **методы исследования:** анализ методической литературы; анализ школьных программ и учебников; изучение опыта работы учителей математики.

**Теоретическая значимость исследования** состоит в том, что в нем выявлены методические особенности обучения теме «Алгебраические уравнения с параметрами» в курсе алгебры основной школы.

**Практическая значимость** бакалаврской работы заключается в разработке методических рекомендаций по обучению учащихся решению алгебраических уравнений с параметрами в курсе алгебры основной школы и систем задач, направленных на обучение их приемам и методам решения данных уравнений, которые могут быть использованы в работе учителями математики и студентами педагогических направлений подготовки.

**Апробация результатов исследования.** Теоретические выводы и результаты исследования были апробированы на научной конференции

«Дни науки» института математики, физики и информационных технологий ТГУ (г. Тольятти, апрель 2018 г., диплом за 3 место на I этапе).

**На защиту выносятся**:

1. Методические рекомендации по обучению учащихся решению алгебраических уравнений с параметрами в курсе алгебры основной школы.

2. Системы задач по теме «Уравнения с параметрами» в курсе алгебры основной школы.

Бакалаврская работа состоит из введения, двух глав, заключения, списка литературы и Приложений.

**Во введении** сформулированы основные характеристики исследования: актуальность, проблема, объект, предмет, цель, задачи, методы исследования.

**Глава I** бакалаврской работы посвящена теоретическим основам обучения теме «Уравнения с параметрами» в курсе алгебры основной школы. Изучено понятие уравнения с параметром, основные виды таких уравнений. Приведены цели обучения теме «Уравнения с параметром» и ее место в школьном курсе математики. Выполнен анализ теоретического и задачного материалов школьных учебников алгебры 7-9 классов по теме.

**Глава II** содержит методические аспекты обучения решению алгебраических уравнений с параметрами в курсе алгебры основной школы. Раскрыты методические рекомендации по теме исследования. Рассмотрены задачи ОГЭ. Разработаны системы задач по теме «Уравнения с параметрами» в курсе алгебры основной школы.

**В заключении** сформулированы основные результаты и выводы проведенного исследования.

Список литературы содержит 59 наименований. Объем работы составляет 73 страницы. **В Приложениях** представлены анализ программ, типы задач по теме «Уравнения с параметрами» в учебниках алгебры разных авторов, ответы и указания к решению систем задач по теме исследования.

# ГЛАВА I. ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ОБУЧЕНИЯ РЕШЕНИЮ УРАВНЕНИЙ С ПАРАМЕТРАМИ В КУРСЕ АЛГЕБРЫ ОСНОВНОЙ ШКОЛЫ

## § 1. Понятие уравнения с параметром и его виды

Прежде чем перейти к понятию уравнения с параметром приведем понятие уравнения, опишем основные виды уравнений, изучаемых в школьном курсе алгебры.

Понятие «уравнение» относится к важнейшим общематематическим понятиям. Существуют различные трактовки понятия «уравнение».

Э.С. Башмаков отмечает, что «традиционное понимание понятия *«уравнение»* - это запись постановки некоторой реальной задачи. Буквы в уравнении – это неизвестные (а не переменные!). Главное в решении уравнения – поиск способа его решения» [3, С. 3-4]. В учебниках математики понятие уравнения рассматривают как: *1) равенство, содержащее неизвестное число; 2) равенство с переменной.* После одной из данных формулировок понятия уравнения приводится определение корня уравнения. Различие между «переменной» и «неизвестной» состоит в том, что переменная «пробегает» ряд значений, а неизвестное является буквенным обозначением конкретного числа.

Приведем *виды уравнений*, которые рассматриваются в курсе алгебры основной школы, в учебниках различных авторов:

*I. Линейное уравнение.*

В учебниках алгебры можно выделить следующие определения понятия линейного уравнения:

1. «Линейным уравнением с одной переменной $x$ называется уравнение вида $ax + b = 0$, где $a$, $b$ – любые числа (коэффициенты) (А.Г. Мордкович, 7 класс» [36, С. 22; 32, С. 18]).

2. «Уравнение вида $ax = b$, где $x$ – переменная, $a$, $b$ – некоторые числа, называется линейным уравнением с одной переменной (Ю.Н. Макарычев, 7 класс» [23, С. 28; 21, С. 105]).

3. «Линейным уравнением с одним неизвестным $x$ называют уравнением, левая и правая части которого есть многочлены степени не выше первой относительно $x$ или числа» (С.М. Никольский, 7 класс [42, С. 174]).

4. «Уравнение вида $ax = b$, где $a$, $b$ – числа, а $x$ – переменная, называют линейным» (Г.В. Дорофеев, 7 класс [11, С. 111]).

5. «Уравнение вида где $a$, $b$ – заданные числа, $x$ – переменная, называют линейным уравнением» (Ю.М. Колягин, 7 класс [16, С. 43]).

*II. Квадратное уравнение.*

Приведем определения понятия квадратного уравнения, использующиеся в учебниках алгебры:

1. «Квадратным называют уравнение вида $ax^2 + bx + c = 0$ , где коэффициенты $a, b, c$ – любые действительные числа, но $a \neq 0$. Коэффициенты $a$, $b$, $c$ называют соответственно так: первый или старший коэффициент, второй коэффициент или коэффициент при $x$, свободный член» (А.Г. Мордкович, 8 класс [38, С. 133; 34, С. 141]).

2. «Квадратным уравнением называется уравнение вида $ax^2 + bx + c == 0$ , где $x$ – переменная, $a$, $b$, $c$ – некоторые числа, причем $a \neq 0$» (Ю.Н. Макарычев, 8 класс [24, С. 118; 22, С. 174]).

3. «Уравнение $ax^2 + bx + c = 0$, где $a$, $b$, $c$ – данные числа и $a \neq 0$, называют квадратным уравнением» (С.М. Никольский, 8 класс [43, С. 74]).

4. «Квадратным уравнением называется уравнение вида $ax^2 + bx + {} + c = 0$, где $a$, $b$ и $c$ – произвольные числа, причем $a \neq 0$» (Г.В. Дорофеев, 8 класс [12, С. 123]).

5. «Квадратным уравнением называется уравнение вида $ax^2 + bx + c == 0$, где $a, b, c$ – заданные числа, $a \neq 0$, $x$ – неизвестное» (Ю.М. Колягин, 8 класс [17, С. 161]).

*III. Рациональные уравнения.*

1. «Если $r(x)$ – рациональное выражение, то уравнение $r(x)=0$ называют рациональным уравнением» (А.Г. Мордкович, 8 класс [38, С. 147]).

2. «Если $p(x)$ – рациональное выражение, то уравнение $p(x)=0$ называют рациональным» (А.Г. Мордкович, 8 класс [33, С. 20]).

3. «Рациональное уравнение с двумя переменными $x, y$ – это уравнение вида $h(x; y) = g(x; y)$, где $h(x; y)$, $g(x; y)$ – рациональные выражения, т.е. алгебраические выражения, составленные из чисел и переменных $x, y$ с помощью операций сложения, вычитания, умножения, деления и возведения с натуральную степень» (А.Г. Мордкович, 9 класс [40, С. 50]).

4. «Уравнения, где левая и правая части являются рациональными выражениями. Рациональное уравнение, в котором и левая и правая части являются целыми выражениями, называются целым. Рациональное уравнение, в котором левая или правая части является дробным выражением, называется дробным» (Ю.Н. Макарычев, 8 класс [24, С. 139]).

5. «Если одна часть уравнения – целое выражение, а другая – дробно-рациональное или обе части – дробно-рациональные выражения, то уравнение называют дробно-рациональным уравнением» (Ю.Н. Макарычев, 8 класс [16, С. 213]).

6. «Дробным рациональным уравнением называется уравнение, обе части которого являются рациональными выражениями, причем хотя бы одно из них – дробным выражением» (Ю.Н. Макарычев, 9 класс [25, С. 78]).

7. «Уравнение, левая и правая части которого есть рациональные выражения относительно $x$, называют рациональным уравнением с неизвестным $x$» (С.М. Никольский, 8 класс [43, С. 94]).

*IV. Иррациональные уравнения.*

1. «Если в уравнении переменная содержится под знаком корня (квадратного, кубического и т.д.), то уравнение называют иррациональным» (А.Г. Мордкович, 8 класс [33, С. 220]).

2. «Если в уравнении переменная содержится под знаком квадратного корня, то уравнение называют иррациональным» (А.Г. Мордкович, 8 класс [38, С. 174]).

3. «Уравнения называют иррациональными, если они содержат переменную под знаком корня или переменную, входящую в основание степени с дробным показателем» (Ю.Н. Макарычев, 9 класс [26, С. 263]).

4. «Уравнение, в котором хотя бы один член содержит неизвестное под знаком корня, называют иррациональным уравнением» (С.М. Никольский, 9 класс [44, С. 104]).

В методической литературе отсутствует единый подход к определению такого понятия как *уравнение с параметром*. Рассмотрим различные подходы к формулировке данного понятия.

В статье Э.С. Белямовой [4] приводится такое определение *параметра*: «*Параметр* (от греческого слова *parametron* - отмеривающий) - величина, значение которой служат для различения некоторого множества между собой. Под *областью определения* уравнения $f(x; a) = 0$ с параметром $a$ понимают все такие системы значений $x$ и $a$, при которых $f(x; a)$ имеет смысл».

С.В. Арюткина [2, С. 3-4] пишет, что под *задачей с параметрами* в методических пособиях понимается «задача, в которой технический и логический ход зависят от входящих в условие величин, численные значения которых не заданы, но считают известными; эти величины называют *параметрами*, и они могут принимать, вообще говоря, произвольные значения».

В.В. Мирошин в пособии [30] отмечает: «При первоначальном определении величины происходит разделение величин на постоянные и переменные (Рис. 1). Переменные величины также делятся на приоритетные – аргументы и параметры». Данное разделение автор представляет следующим образом:

В пособии А.А. Прокофьева мы встречаем следующее определение *уравнения с параметром*: «Пусть дано уравнение с двумя переменными: $F(x, a) = 0$. Если в задаче сформулирована цель: «Для каждого значения переменной $a$ из некоторого числового множества $A$ решить уравнение относительно $x$», то выражение $F(x, a) = 0$ называют уравнением с переменной $x$ и параметром $a$, а множество $A$ – областью изменения параметра $a$» [47, С. 5]

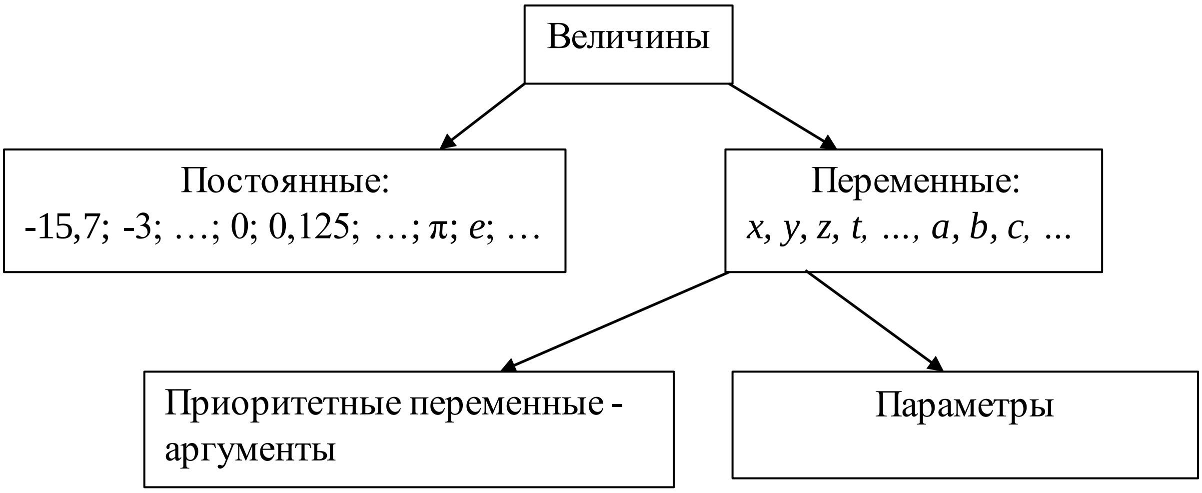


Рис. 1. Виды величин.

Ю.Н. Макарычев [27, С. 161] отмечает: «*Решить уравнение с параметром* – это значит установить соответствие, помощью которого для каждого значения параметра указывается множество корней соответствующего уравнения».

В учебниках Ю.Н. Макарычева [27] выделяются следующие *виды уравнений с параметрами*:

1. «Уравнения с параметром не выше второй степени (линейные и квадратные уравнения, содержащие параметр). Уравнения с параметром не выше второй степени являются самыми распространенными в практике итоговых и конкурсных заданий.

2. Дробно-рациональные уравнения, содержащие параметр, сводящиеся к линейным.

3. Иррациональные уравнения, содержащие параметр».

Приведем понятие *линейного уравнения с параметром,* описанные в учебно-методической литературе:

*1. «*Линейным уравнением с параметром $p$ является уравнение вида $Ax = B$, где $A$ и $B$ зависят от параметра $p$, то есть $A = A(p) = B(p)$» (Е.В. Юрченко, [54, С. 7]).

2. «Линейным уравнением с параметром $a$ относительно $x$ называется уравнение вида $f(a)\cdot x=q(a)$, где $f(a)$ и $q(a)$ – функции от $a$, $x$ - неизвестное» (П.Ф. Севрюков, [50, С. 7]).

Ю.Н. Макарычев в учебном пособии для классов с углубленным изучением математики «Дополнительные главы к учебнику алгебры» [27, С. 160] дает определение понятия *квадратного уравнения с параметром* следующим образом: «В квадратном уравнении $ax^2 + bx + c = 0$ коэффициенты $a$, $b$ и $c$ являются *параметрами*. Придавая параметру различные значения, мы будем получать различные *уравнения с числовыми коэффициентами*». Для того чтобы раскрыть такой вид уравнений с параметром, как *дробно-рациональные уравнения с параметром* автор подробно показывает решение таких уравнений.

*Основными методами* решения уравнений, содержащих параметр, которые рассматриваются в школьном курсе математики, являются [38, С. 74]: разложение на множители, метод замены переменной, графический метод.

А.А. Прокофьев [47, С. 6] приводит *алгоритм решения* уравнения с параметром: «Определить ограничения, налагаемые на значения неизвестного $x$ и параметра $a$. Затем определяют формальные решения, записываемые без учета ограничений. Если при решении возникают контрольные значения, то их наносят на координатную прямую. Такие значения разбивают ОДЗ параметра на подмножества. На каждом подмножестве решают заданное уравнение. После этого исключают значения параметра, при которых формальные решения не удовлетворяют полученным ограничениям. Выписывают ответ».

Ю.Н. Макарычев в дополнительных главах к учебнику алгебры 8 класса выделяет следующий способ *решения уравнений с параметром*: «в зависимости от допустимых значений параметра находится соответствующее *множество корней уравнения*... В ответе должно быть указано для *каждого значения параметра*, сколько корней имеет это уравнение и какого вида» [27, С. 191]. Автор подчеркивает, что при решении данных уравнений необходимо обращать внимание на запись ответа, являющегося составной частью решения уравнения. Приведенный способ решения уравнений с параметром закрепляется с обучающимися при изучении определенных видов уравнений с параметром.

С.А. Шестаков [53, С. 5] отмечает: «Для решения многих заданий с параметрами не требуются специальные знания, алгоритмы или идеи – достаточно устойчивых навыков решения основных типов уравнений, умения выполнять алгебраические преобразования и делать логический перебор».

Таким образом, в методической литературе отсутствует единый подход к определению понятия уравнения с параметром; основными видами уравнений с параметром являются линейные и квадратные уравнения, содержащие параметр; дробно-рациональные уравнения, содержащие параметр; иррациональные уравнения, содержащие параметр.

## § 2. Цели обучения теме «Уравнения с параметрами», ее место в курсе математики основной школы

В курсе лекций для организации самостоятельной работы студентов отмечается, что *линия уравнений* – одна из основных содержательных линий математики общеобразовательной школы. Уравнения служат для задания функции, геометрической фигуры, для решения текстовых задач. В данном курсе лекций [29, С. 25-27] указано, что в методике преподавания математики выделяют три аспекта ее использования:

1. «Теоретико-математическая направленность данной линии состоит в изучении обобщенных понятий и методов, относящихся к линии уравнений.

2. Прикладная направленность раскрывается широким использованием уравнения как простейшей модели математики в решении задач.

3. Линия уравнения рассматривается как одна из основных четырех содержательных линий школьного курса алгебры. Этот аспект рассматривается как направленность на установление связей с остальным содержанием курса математики».

Ю.Н. Макарычев в учебном пособии для классов с углубленным изучением математики «Дополнительные главы к учебнику алгебры» утверждает, что понятие параметра является важным математическим понятием, которое систематически используется в школьном курсе математики и в смежных дисциплинах. Главное, что должны усвоить учащиеся, по мнению автора, это то, что уравнение с параметром – это семейство уравнений, определяемых параметром [27, С. 191].

А.П. Власова [7] отмечает важность изучения методов решения уравнений с параметрами в курсе общеобразовательной школы, напоминая о том, что в ЕГЭ встречаются достаточно сложные задания, которые невозможно решить без знаний и навыков решения стандартных заданий.

В *федеральном государственном образовательном стандарте основного общего образования* [52] утверждается, что результаты изучения предметной области «Математика» *должны отражать*:

1) формирование представлений о математике как о методе познания действительности, позволяющем описывать и изучать реальные процессы и явления;

2) развитие умений работать с учебным математическим текстом (анализировать, извлекать необходимую информацию), точно и грамотно выражать свои мысли с применением математической терминологии и символики,

проводить классификации, логические обоснования, доказательства математических утверждений;

3) развитие представлений о числе и числовых системах от натуральных до действительных чисел; овладение навыками устных, письменных, инструментальных вычислений;

4) овладение символьным языком алгебры, приёмами выполнения тождественных преобразований выражений, решения уравнений, систем уравнений, неравенств и систем неравенств; умения моделировать реальные ситуации на языке алгебры, исследовать построенные модели с использованием аппарата алгебры, интерпретировать полученный результат;

5) овладение системой функциональных понятий, развитие умения использовать функционально-графические представления для решения различных математических задач, для описания и анализа реальных зависимостей;

6) развитие умений применять изученные понятия, результаты, методы для решения задач практического характера и задач из смежных дисциплин с использованием при необходимости справочных материалов, компьютера, пользоваться оценкой и прикидкой при практических расчётах.

В сборнике рабочих программ по алгебре Т.А. Бурмистровой [5, С. 5] указано, что в курсе математики содержание линии уравнений направлено на получение обучающимися определенных знаний об уравнениях как о *содержательно-методической линии* основной содержательной линии «Алгебра».

В результате изучения темы «Уравнения» в школьном курсе математики основной школы учащиеся должны:

- **знать:** систему понятий линии уравнений; символьный язык алгебры;

- **уметь:** работать с математическим текстом, точно и грамотно выражать свои мысли в устной и письменной речи, применяя математическую терминологию и символику, использовать различные языки математики, обосновывать суждения, проводить классификацию; решать линейные и квадратные уравнения, а также приводимые к ним уравнения, системы уравнений; применять графические представления для решения и исследования уравнений, систем уравнений. применять полученные умения для решения задач из математики [5, С. 5-9].

*В примерной программе основного общего образования* от 8 апреля 2015 года утверждается: «В ходе изучения линии уравнений в 7 – 9 классах для применения в обыденной жизни, при изучении других предметов и обеспечения возможности благополучного продолжения образования на *базовом уровне* учащиеся должны научиться: 1. Оперировать понятиями: равенство, числовое равенство, уравнение, корень уравнения, решение уравнения. 2. Проверять справедливость числовых равенств. 3. Решать системы несложных линейных уравнений. 4. Проверять, является ли данное число решением уравнения. 5. Решать квадратные уравнения по формуле корней квадратного уравнения. 6. Составлять и решать линейные уравнения при решении задач, возникающих в других учебных предметах.

*В повседневной жизни и при изучении других предметов:* составлять и решать линейные уравнения при решении задач, возникающих в других учебных предметах» [46].

Учащийся получает возможность научиться в 7-9 классах для обеспечения возможности благополучного продолжения образования на *базовом и углубленном уровнях:* «1. Оперировать понятиями: уравнение, корень уравнения, равносильные уравнения, область определения уравнения (системы уравнений). 2. Решать линейные уравнения и уравнения, сводимые к линейным с помощью тождественных преобразований. 3. Решать квадратные уравнения и уравнения, сводимые к квадратным с помощью тождественных преобразований. 4. Решать дробно-линейные уравнения. 5. Решать простейшие иррациональные уравнения вида $\overline{f(x)} = a$, $\overline{f(x)} = \overline{g(x)}$. 6. Решать линейные уравнения с параметрами. 7. Решать несложные квадратные уравнения с параметром. 8. Решать несложные системы линейных уравнений с параметрами. 9. Решать несложные уравнения в целых числах. 10. Составлять и решать уравнения, их системы при решении задач других учебных предметов. 11. Выполнять оценку правдоподобия результатов, получаемых при решении различных уравнений и их систем при решении задач других учебных предметов. 12. Составлять и решать уравнения с параметрами при решении задач других учебных предметов. 13. Составлять уравнение или их систему, описывающие реальную ситуацию или прикладную задачу, интерпретировать полученные результаты.

*В повседневной жизни и при изучении других предметов:* составлять и решать уравнения и их системы при решении задач других учебных предметов; выполнять оценку правдоподобия результатов, получаемых при решении различных уравнений и их систем при решении задач других учебных предметов; составлять и решать уравнения с параметрами при решении задач других учебных предметов; составлять уравнение или их систему, описывающие реальную ситуацию или прикладную задачу, интерпретировать полученные результаты» [46].

Учащийся получает возможность научиться в 7-9 классах для обеспечения возможности благополучного продолжения образования на *углубленном уровне: «*свободно оперировать понятиями: уравнение, равносильные уравнения, уравнение, являющееся следствием другого уравнения, уравнения, равносильные на множестве, равносильные преобразования уравнений; решать разные виды уравнений и их систем, в том числе некоторые уравнения 3 и 4 степеней, дробно-рациональные и иррациональные; знать теорему Виета для уравнений степени выше второй; понимать смысл теорем о равносильных и неравносильных преобразованиях уравнений и уметь их доказывать; владеть разными методами решения уравнений и их систем, уметь выбирать метод решения и обосновывать свой выбор; решать алгебраические уравнения и их системы с параметрами алгебраическим и графическим методами; решать уравнения в целых числах; изображать множества на плоскости, задаваемые уравнениями и их системами.

*В повседневной жизни и при изучении других предметов:* составлять и решать уравнения, их системы при решении задач других учебных предметов; выполнять оценку правдоподобия результатов, получаемых при решении различных уравнений и их систем при решении задач других учебных предметов; составлять и решать уравнения с параметрами при решении задач других учебных предметов; составлять уравнение или их систему, описывающие реальную ситуацию или прикладную задачу, интерпретировать полученные результаты» [46].

Кроме того, в *примерной программе основного общего образования* указано, что в содержание курса математики в 7–9 классах входят такие темы как:

**«Линейное уравнение и его корни**. Решение линейных уравнений. *Линейное уравнение с параметром. Количество корней линейного уравнения. Решение линейных уравнений с параметром.*

**Квадратное уравнение и его корни**. Квадратные уравнения. Неполные квадратные уравнения. Дискриминант квадратного уравнения. Формула корней квадратного уравнения. *Теорема Виета. Теорема, обратная теореме Виета.* Решение квадратных уравнений: использование формулы для нахождения корней*, графический метод решения, разложение на множители, подбор корней с использованием теоремы Виета. Количество корней квадратного уравнения в зависимости от его дискриминанта. Биквадратные уравнения. Уравнения, сводимые к линейным и квадратным. Квадратные уравнения с параметром.*

**Дробно-рациональные уравнения**. Решение простейших дробно-линейных уравнений. *Решение дробно-рациональных уравнений.*

*Методы решения уравнений: методы равносильных преобразований, метод замены переменной, графический метод. Использование свойств функций при решении уравнений.*

*Простейшие иррациональные уравнения вида* $\sqrt{f(x)} = a$, $\sqrt{f(x)} = \sqrt{g(x)}$.

*Уравнения вида* $x^n = a$. *Уравнения в целых числах.*

**Системы уравнений.** Уравнение с двумя переменными. Линейное уравнение с двумя переменными. *Прямая как графическая интерпретация линейного уравнения с двумя переменными.*

Понятие системы уравнений. Решение системы уравнений.

Методы решения систем линейных уравнений с двумя переменными: *графический метод*, *метод сложения*, метод подстановки.

*Системы линейных уравнений с параметром*» [46].

Таким образом, подводя итог всему вышесказанному, можно сформулировать следующие *основные цели обучения решению уравнений с параметрами* в основной школе: формирование у учащихся умения проводить разветвленные логические построения, аккуратность и внимательность при описании решения уравнения с параметром; знаний, умений и навыков использования понятийного аппарата, связанного с решением уравнений с параметрами, в математике и других науках; навыков использования уравнений с параметрами в повседневной жизни; графической культуры.

## § 3. Анализ содержания теоретического материала по теме «Уравнения с параметрами» в учебниках разных авторов

В учебниках алгебры разных авторов место изучения алгебраических уравнений с параметрами, как и его содержание различно. Имеются отличия и в порядке изучения основных понятий.

*Базовые знания*: числовые и буквенные выражения; понятие уравнения; понятие переменной; координатная прямая, координатная плоскость, координаты.

*Вводимые (новые) знания:* понятие параметра; понятие уравнения с параметром; решение уравнения с параметром; графический метод решения уравнений с параметрами; система уравнений с параметром; линейное уравнение с параметром; квадратное уравнение с параметром; рациональное уравнение с параметром; иррациональное уравнение с параметром; уравнения с параметрами, содержащие модуль.

Опишем, как и в каком классе, авторы учебников алгебры вводят теоретический материал по теме «Уравнения с параметром».

Рассмотрим учебники *для общеобразовательных классов*.

В учебнике **С.М. Никольского для 7 класса** [42, С. 203-206] в §10 «Системы линейных уравнений» Главы 3 «Линейные уравнения» приводится *дополнительный пункт 10.7* «О количестве решений системы двух уравнений первой степени с двумя неизвестными»,* являющийся необязательным для рассмотрения по общеобразовательной программе и содержащий материал в соответствии с программой для классов с углубленным изучением математики, в котором приведена соответствующая теорема, подготавливающая учащихся к введению понятий уравнения с параметром и систем уравнений с параметрами. Приведем формулировку данной теоремы.

***Теорема.*** Пусть дана система уравнений

$$\begin{aligned} a_1x + b_1y + c_1 = 0,\\ a_2x + b_2y + c_2 = 0, \end{aligned} \qquad (1)$$

где все коэффициенты $a_1$, $b_1$, $c_1$, $a_2$, $b_2$, $c_2$ отличны от нуля.

Тогда система (1):

а) имеет единственное решение, если $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$;

б) не имеет решений, если $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$;

в) имеет бесконечно много решений, если $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$, и при этом все решения можно записать в виде $(\frac{-c_1-b_1y}{a_1};\ y)$, где $y$ – любое число.

Затем в данном пункте учебника приводится *доказательство* этой *теоремы* и рассматриваются различные *примеры на ее применение* при решении систем двух уравнений первой степени с двумя неизвестными: *первый* – на нахождение числа решений данной системы уравнений; *второй* – на нахождение значения параметра, при котором система уравнений не имеет решения; *третий* - на определение существования значений параметра, при котором система не имеет решения.

В учебнике алгебры **8 класса** для общеобразовательных классов **Ю.Н. Макарычева** [24, С. 148-150] в §9 «Дробные рациональные уравнения» Главы 3. «Квадратные уравнения» содержится *пункт 27. «Уравнения с параметрами».* Материал данного пункта представлен под рубрикой «Для тех, кто хочет знать больше» и предназначен для учащихся интересующихся математикой, то есть для углубленного изучения математики.

В этом пункте автор вводит понятие *параметра*, понятие *уравнения с параметром* и определяет, что значит *решить уравнение с параметром, индуктивным методом*, то есть приводятся подводящие примеры, затем вводятся соответствующие *термины.*

Так, например, перед введением *понятий параметра и уравнения с параметром,* Ю.Н. Макарычевым рассматриваются примеры различных линейных уравнений и затем на примере линейного уравнения с параметром вводятся сами понятия*:*

«Каждое из уравнений $7x = 5$, $-3x = 5$, $0x = 5$ имеет вид $ax = 5$, где $a$ – некоторое число. Первое уравнение, в котором $a = 7$, имеет корень $\frac{5}{7}$. Второе уравнение, в котором $a = -3$, имеет корень $-\frac{5}{3}$. Третье уравнение, в котором $a = 0$, не имеет корней.

Вообще, уравнение вида $ax = 5$ при $a \neq 0$ имеет единственный корень $\frac{5}{a}$, а при $a = 0$ не имеет корней.

Рассматривая уравнение $ax = 5$, мы придавали буквам $x$ и $a$ различный смысл, считая, что буквой $x$ обозначено неизвестное число, а буквой $a$ – некоторое фиксированное число. В таких случаях говорят, что $a$ является *параметром*, а $ax = 5$ – *уравнение с параметром*.

*Решить уравнение с параметром* – «это значит показать, каким образом для любого значения параметра можно найти соответствующее множество корней уравнения, если корни существуют, или установить, что при этом значении параметра корней нет» [24, С. 148-149].

Далее автор приводит два более сложных примера на решение: 1) линейного уравнения с параметром; 2) квадратного уравнения с параметром.

В учебнике для общеобразовательных классов **9 класса Г.В. Дорофеева** [13, С. 177-180] Глава 3. «Уравнения и системы уравнений» включает *дополнительный пункт 3.8. «Уравнения с параметром»*. Данный пункт подразумевает углубленное изучение материала, и отмечен, как пункт под рубрикой «Для тех, кому интересно».

Автор вводит понятие уравнения с параметром *дедуктивным методом*, в данном случае на примере квадратного уравнения с параметром, то есть сначала вводится термин, затем он поясняется на конкретных примерах.

Так, Г.В. Дорофеев [13] пишет: «Когда говорят *«уравнение с параметром»*, то это означает, что речь идет об уравнении, в котором есть буквенные коэффициенты. Так, в квадратном уравнении $x^2 - bx + 1 = 0$, буква $b$ – параметр. Поставив вместо $b$ какое-либо число, мы получим квадратное уравнение с числовыми коэффициентами. Понятно, что $b$ можно заменить любым числом, поэтому, в сущности, мы имеем дело с целым «семейством» квадратных уравнений. Исследуя уравнение с параметром, мы получаем информацию обо всем бесконечном множестве «порождаемых» им уравнений» [13, С. 177].

Далее автор *исследует* приведенное выше *уравнение* $x^2 - bx + 1 = 0$: выясняет, при каких значениях $b$ выполняются условия $D$ (дискриминант) равен нулю, $D > 0$, $D < 0$. В итоге получает определенные значения параметра, при которых оно имеет один корень; два корня. Отмечается, что полученный результат можно проиллюстрировать с помощью графиков, таким образом демонстрируя *графический метод решения уравнений с параметрами*.

Г.В. Дорофеев подчеркивает, что *задача исследования уравнения с параметром* всегда предполагает рассмотрение нескольких случаев, ни один из которых нельзя «потерять». Важно также полно и точно ответить на вопрос, поставленный в задаче. Данное утверждение автор подтверждает приведением *двух* соответствующих *примеров* на: 1) определение значений параметра при решении линейного уравнения, которое имеет корни, и нахождение корней данного уравнения; 2) решение квадратного уравнения с параметром; 3) определение значений параметра при решении системы из двух уравнений с двумя переменными, которая имеет единственное решение, и нахождение решения данной системы. Автор приводит не только *аналитический*, но и *графический метод ее решения*. Перед решением данного примера указывается, что часто при исследовании уравнении (или системы) требуется найти только те значения параметра, при которых выполняются некоторые требования, заданные в условии задачи.

Необходимо отметить, что автор решение уравнений с параметром называет *исследованием*.

Рассмотрим учебники *для классов с углубленным изучением математики*.

В учебнике **А.Г. Мордковича для 8 класса** [33, С. 229-231] в Главе 6. «Алгебраические уравнения» приводится *§39. «Задачи с параметрами»*. Данный параграф является обязательным для изучения.

Для того чтобы познакомить учащихся с понятием уравнения с параметром автор использует *индуктивный метод,* подробно рассматривая решение *шести* уравнений с параметрами. *Первый пример* подразумевает решение квадратного уравнения, в котором вместо коэффициентов $a$, $b$, $c$ стоят выражения, содержащие параметр $p$. *Второй* - иллюстрирует подбор параметра $p$ для того, чтобы определить вид уравнения: квадратное или линейное, затем приводится решение с соответствующими комментариями и выводами. В *третьем* примере представлено решение линейного уравнения, в *четвертом* - решение уравнения с параметром, содержащего модуль, с помощью графического метода. *Пятый* пример, иррациональное уравнение с параметром, автор решает двумя способами.

После каждого примера, рассмотренного А.Г. Мордковичем, имеют место *комментарии,* где описываются возможные ошибки учащихся, приводится другой способ решения данного уравнения с параметром. По ходу решения этих примеров описывается определенная часть теоретического материала. Так, например, автором вводится *понятие уравнения с параметром* следующим образом:

*«Параметр* в уравнении может быть обозначен любой буквой (в примерах использовались буквы $p$ и $a$). Если дано уравнение $f(x, a) = 0$, которое надо решить относительно переменной $x$ и в котором буквой $a$ обозначено произвольное действительное число, то говорят, что *задано уравнение с параметром»* [34, С. 230].

В учебнике алгебры **9 класса Ю.Н. Макарычева** [26, С. 109-117] в Главе 2. «Уравнения и неравенства с одной переменной» представляется вниманию учащихся §*7. «Уравнения с параметрами»,* который является обязательным для изучения.

В пунктах 16-17 рассматриваются *целые уравнения с параметрами* и *дробно-рациональные уравнения с параметрами*.

Введение основных понятий по теме «*Уравнения с параметрами*» в данном учебнике для углубленного изучения алгебры происходит по аналогии с учебником 8 класса этого автора для общеобразовательных учреждений. Однако следует заметить, что для общеобразовательных классов данная тема является необязательной для изучения, в отличие от учебника для классов с углубленным изучением алгебры.

В дополнительных главах к учебнику по алгебре 8 класса **Ю.Н. Макарычева** [27, С. 159-160] в Главе VII. «Уравнения с параметром» раскрывается содержание *§15. «Линейные и квадратные уравнения с параметрами»,* где автором объясняется, *что значит решить уравнение с параметром* на примере следующей задачи: «В седьмом, восьмом и девятом классах учиться 105 учащихся. В восьмом классе учащихся на n больше, чем в седьмом, а в девятом на 3 меньше, чем в седьмом. Сколько учащихся в каждом классе, если известно, что в каждом классе их не менее 30 человек?»

После формулировки задачи следует подробное ее решение, приведённое нами далее:

«В решении за $x$ берется число учащихся в седьмом классе, $(x + n)$ – в восьмом классе, $(x – 3)$ – в девятом классе. Получается уравнение:

$x + x + n + x – 3 = 105, \qquad 3x = 108 – n.$

В данном уравнении буквой $x$ обозначено неизвестное число, а буква $n$ выполняет роль известного числа (при чем $n$ – натуральное число). Букву $n$ в полученном уравнении называют *параметром,* а само уравнение – *уравнение с параметром.* Выражаем $x$: $x = \frac{108-n}{3}$, или $x = 36-\frac{n}{3}$.

Делаем вывод: в седьмом классе было $36-\frac{n}{3}$, в восьмом $36+\frac{2n}{3}$, в девятом $33-\frac{n}{3}$ учащихся. Данный ответ не является окончательным. Из условия задачи мы знаем, что в каждом классе было не менее 30 человек. Так как меньшее количество учащихся может быть в седьмом или девятом классе, то должны выполняться неравенства: $36-\frac{n}{3} \geq 30$ и $33-\frac{n}{3} \geq 30$.

Решая неравенства, мы получим: $n \leq 18$ и $n \leq 9$. Следовательно, $n \leq 9$.

Из того, что числа $36-\frac{n}{3}$, $36+\frac{2n}{3}$ и $33-\frac{n}{3}$ должны быть натуральными, следует, что они должны быть кратны 3.

Учитывая, что $n \leq 9$ и $n$ кратно 3, делаем вывод, что n равно числам 3, 6 или 9. Таким образом, можно записать ответ так: в седьмом классе было $36 - \frac{n}{3}$, в восьмом $36 + \frac{2n}{3}$, в девятом $33 - \frac{n}{3}$ учащихся, где $n \in \ 3, 6, 9$ .

Подводя итог, получаем три возможных варианта количества учащихся в каждом классе: 1) 7 кл. - 35, 8 кл. - 38, 9 кл. – 32; 2) 7 кл. - 34, 8 кл. - 40, 9 кл. – 31; 3) 7 кл. - 33, 8 кл. - 42, 9 кл. – 30» [27, С. 159-160].

Ю.Н. Макарычев отмечает, что учащиеся уже встречались с понятием параметра, когда изучали линейные и квадратные уравнения, когда рассматривали линейную и дробно-линейную функции, хотя сам термин *«параметр»* не вводился. Также автор указывает, что в квадратном уравнении $ax^2 + bx + {}$ $+c = 0$ его коэффициенты $a$, $b$ и $c$ являются *параметрами*, в уравнении $y = kx + b$, которым задается линейная функция, *параметрами* $k$ и $b$ также служат его коэффициенты.

Проанализировав учебники алгебры 7-9 классов таких авторов, как А.Г. Мордкович, Ю.Н. Макарычев, С.М. Никольский, Г.В. Дорофеев, Ю.М. Колягин нами было замечено, что понятие уравнения с параметром вводится ими в разных классах (Таблица 1).

Таблица 1

Введение теоретического материала по теме
«Уравнения с параметрами» в различных учебниках алгебры

| **Авторы учебников** | **7 класс** | **8 класс** | **9 класс** |
|---|---|---|---|
| *для общеобразовательных классов* | | | |
| Мордкович А.Г. [36, 38, 40] | - | - | - |
| Макарычев Ю.Н. [23, 24, 25] | - | + | - |
| Дорофеев Г.В. [11, 12, 13] | - | - | + |
| Никольский С.М. [42, 43, 44] | + | - | - |
| Колягин Ю.М. [16, 17, 18] | - | - | - |
| *для классов с углубленным изучением математики* | | | |
| Мордкович А.Г. [31, 33, 36] | - | + | - |
| Макарычев Ю.Н. [21, 22, 26] | - | - | + |
| Макарычев Ю.Н., доп. главы [27] | | + | |

В комплектах учебников алгебры 7-9 классов для общеобразовательных классов А.Г. Мордковича [36, 38, 40] и Ю.М. Колягина [16-18] авторы не вводят определение *понятия уравнения с параметром*, имеются упражнения, направленные на умение обучающихся решать уравнения с параметрами.

С.М. Никольский знакомит учащихся с понятием уравнения с параметром в 7 классе, А.Г. Мордкович - в учебнике 8 класса для углубленного изучения алгебры. Впрочем, Ю.Н. Макарычев также же вводит данное понятие в 8 классе, но в учебнике для общеобразовательных классов.

В *дополнительных главах к учебнику алгебры* 8 класса для учащихся школ и классов с углубленным изучением математики Ю.Н. Макарычева [27] имеется целая глава, посвященная теме «Уравнения с параметрами», где упражнения направлены на формирование понятий «уравнение с параметром», «что значит решить уравнение с параметром», и на выработку умений решать линейные и квадратные уравнения, содержащие параметр. Автор в данной главе рассматривает *линейные*, *квадратные*, а также *дробно-рациональные уравнения с параметрами*.

В учебниках алгебры 9 класса для общеобразовательных классов Г.В. Дорофеева [11-13], а также классов с углубленным изучением математики Ю.Н. Макарычева [21, 22, 26] и А.Г. Мордковича [31, 33, 35] приводятся задания на умение решать *иррациональные уравнения с параметрами*; *уравнения с параметрами, содержащие модуль*. Авторы не вводят определения понятий данных видов уравнений.

Таким образом, рассматривая комплект учебников для классов с углубленным изучением математики Ю.Н. Макарычева, отметим, что тема «*Уравнения с параметрами»* вводятся в дополнительных главах к учебнику алгебры 8 класса для учащихся школ и классов с углубленным изучением математики, а также в 9 классе, где входят в обязательную программу изучения (в базовом уровне это был пункт для дополнительного изучения в 8 классе). Г.В. Дорофеев дает определение *уравнениям с параметрами* лишь в 9 классе, хотя задания по данной теме предлагаются учащимся как задания на исследование уравнений еще в 7 классе.

Кроме того, при анализе учебников алгебры 7-9 классов было отмечено, что большинство авторов используют *индуктивный метод* введения понятия *уравнения с параметром.* Все авторы учебников как для общеобразовательных классов, так и для классов с углубленным изучением математики, в качестве примеров используют *линейные и квадратные уравнения с параметрами*. Более сложные уравнения с параметром, содержащих корень или модуль, можно встретить в учебнике А.Г. Мордковича 8 класса для углубленного изучения алгебры. Также необходимо выделить учебник алгебры 8 класса с дополнительными главами Ю.Н. Макарычева, в котором понятие уравнения с параметром вводится в ходе *решения задачи.* В учебнике для общеобразовательных классов Г.В. Дорофеева (9 класс) описывается *графический метод* решения уравнений с параметрами, другие авторы рассматривают аналитический метод решения данных уравнений.

## § 4. Анализ задачного материала по теме «Уравнения с параметрами» в учебниках алгебры основной школы

В данном параграфе рассмотрим задачи из различных учебников школьного курса алгебры по теме исследования.

Согласно исследованию С.А. Шестакова [53, С. 3]: «*По формулировке* любую *задачу с параметром* можно отнести к одной из следующих групп: а) найти все значения параметра, для каждого из которых выполняются те или иные условия (уравнение или система уравнений имеют определенное число решений; решение принадлежит определенному множеству или удовлетворяет определенным ограничениям; сами решения не всегда требуется найти); б) найти все значения параметра, при каждом из которых задача имеет хотя бы одно решение, и указать эти решения для каждого такого значения параметра».

В.И. Горбачев в пособии для учителей [8, С. 22] отмечает, что наиболее важными в практике являются такие задачи, как *решить уравнение с пара-*

*метрами* и *найти все значения параметров*, при которых *общее решение* уравнения обладает *некоторыми свойствами*.

В 7 классе нами были выделены следующие *типы заданий*:

1. Решение линейного уравнения с параметром *относительно переменной (неизвестной)*.

2. *Нахождение значения параметра* при известном корне линейного уравнения с параметром.

3. *Нахождение значения параметра*, при котором линейное уравнение не имеет корней, имеет один корень и имеет бесконечно много корней.

4. *Нахождение значения параметра*, при котором система линейных уравнений не имеет корней, имеет один корень или имеет бесконечно много корней.

5. *Нахождение значений параметров* при известных значениях переменных в системе линейных уравнений.

6. *Нахождение значения параметра* при определении равносильности линейных уравнений с параметром и их систем.

7. *Нахождение значения параметра* при условии принадлежности корней линейного уравнения с параметром какому-либо числовому множеству.

Приведем примеры упражнений из учебников по алгебре основной школы в **7 классе** по каждому типу заданий:

*1. Решение линейного уравнения с параметром относительно переменной (неизвестной)*

*для общеобразовательных классов*

**Задача 1.** «Решите уравнение относительно $x$: а) $x - a = 2$; б) $1 - x == c + 2$; в) $x + b = 0$; г) $a - x = b$» [11, С. 115].

**Решение.** а) $x - a = 2;\ x = 2 + a;\ a \in R$;

б) $1 - x = c + 2;\ -x = c + 2 - 1;\ x = -c - 1;\ c \in R$;

*в)* $x + b = 0;\ x =- b;\ b \in R$; г) $a - x = b;\ x = a - b;\ a, b \in R$.

**Ответ:** а) $2+a$; $a \in R$; б) $-c-1$; $c \in R$; в) $-b$; $b \in R$; г) $a-b$; $a, b \in R$.

**Задача 2.** «Решите уравнение, считая, что $a$, $b$, $c$, $y$ – данные числа, $x$ – неизвестное: а) $6(x-a)=7(x+b)$; б) $a(b+x)=3a-(x-a)b,\ a+b\neq 0$; в) $2a-(a+b)x=(a-b)x,\ a\neq 0$» [42, С. 251].

**Решение.** а) $6(x-a)=7(x+b)$; $6x-6a=7x+7b$; $6x-7x=7b+6a$;

$-x=7b+6a$; $x=-7b-6a$;

б) $a(b+x)=3a-(x-a)b$, $a+b\neq 0$; $ab+ax=3a-xb+ab$;

$ax+xb=ab-ab$; $x(a+b)=0$; $x=0$;

в) $2a-(a+b)x=(a-b)x$, $a\neq 0$; $2a-xa-xb=xa-xb$;

$-xa-xb-xa+xb=-2a$; $-2xa=-2a$; $x=1$.

**Ответ:** а) $x=-7b-6a$; б) $x=0$; в) $x=1$.

*для классов с углубленным изучением математики*

**Задача 3.** «Решите уравнение $xy=2k$, где $k\neq 0$, относительно переменной: а) $x$; б) $y$ ?» [21, С. 105].

**Решение.** $xy=2k$, $k\neq 0$; *а)* относительно $x$: $x=\frac{2k}{y}$ ($y\neq 0$, т.к. $k\neq 0$);

*б)* относительно $x$: $y=\frac{2k}{x}$ ($x\neq 0$, т.к. $k\neq 0$).

**Ответ: а)** $x=\frac{2k}{y}$ ($y\neq 0$, т.к. $k\neq 0$); **б)** $x=\frac{2k}{x}$ ($x\neq 0$, т.к. $k\neq 0$).

**Задача 4.** «Выразите из уравнения: а) $m^2-n=5$ переменную $n$ через переменную $m$; б) $2x+3y=6$ переменную $y$ через переменную $x$» [21, С. 266].

**Решение.** а) $m^2-n=5$; $n=m^2-5$;

*б)* $2x+3y=6$; $3y=6-2x$; $y=\frac{6-2x}{3}$; $y=-\frac{2}{3}x+2$.

**Ответ:** а) $n=m^2-5$; б) $y=-\frac{2}{3}x+2$.

*2. Нахождение значения параметра при известном корне линейного уравнения с параметром:*

*Для общеобразовательных классов*

**Задача 5.** «При каких значениях $p$ корнем уравнения: $p\ \ x+4\ \ -(5-$ $-p)=16$ является число *2?»* [37, С. 32].

**Решение.** По условию $x=2$. Подставим в данное уравнение и решим относительно $p$: $p\ \ 2+4\ \ -(5-p)=16$; $6p-5\ +\ p=16$; $7p=16+\ 5$; $7p\ =\ 21$; $p\ =\ 3$. **Ответ:** при $p=3$ корнем данного уравнения будет $x=2$.

**Задача 6.** «Дано уравнение $ax=3,$ где $a$ – некоторое число, $x$ – переменная. Найдите $a$, если известно, что корень уравнения равен $\frac{2}{3}$» [11, С. 126].

**Решение.** Если $x\ =\ \frac{2}{3}$, то получаем: $\frac{2}{3}a\ =\ 3$, где $a\ =\ 4{,}5$.

**Ответ:** $a\ =\ 4{,}5$.

**Задача 7.** «При каком значении $a$ пара чисел $(3;\,-2)$ является решением уравнения $3x$ – $ay$ – $4\ =\ 0$?» [42, С. 186].

**Решение.** Если $(3;-2)$ является решением уравнения $3x-ay-4=0$, то получаем: $9+2a-\ 4=0,$ где $a=-2{,}5$. **Ответ:** $a=-2{,}5$.

**Задача 8.** «При каких значениях коэффициента $p$ уравнение $px\ =\ 10$ имеет корень, равный $-5;\ 1;\ 20$?» [23, С. 52].

**Решение.** Если $x=-5$, то получаем: $-5a=10,$ **где** $a=-2$.

Если $x=1$, то получаем: $a=15$. Если $x=20$, то получаем $20a=10$, где $a=0{,}5$. **Ответ:** $a=-2$; $a=15$; $a=0{,}5$.

**Задача 9.** «Подобрать число $a$ так, чтобы уравнение $4x-3\ =2x-a$ имело корень: 1) $x=1$; 2) $x=-1$; 3) $x=\frac{1}{2}$; 4) $x=0{,}3$» [16, С. 45].

**Решение.** 1) если $x=1$: $4-3=2-a$; $2-a=1$; $a=1$;

2) если $x=-1$: $-4-3=-2-a$ ; $2+a=7$; $a=5$;

3) если $x=\frac{1}{2}$: $2-3=1-a$; $a=1+3-2$; $a=2$;

*4)* если $x = 0{,}3$: $1{,}2 - 3 = 0{,}6 - a$; $1{,}8 = 0{,}6 - a$; $a = 0{,}6 - 1{,}8$; $a = -1{,}2$.

**Ответ:** $1$; $5$; $2$; $-1{,}2$.

*Для классов с углубленным изучением математики*

**Задача 10.** «Найдите значение $m$, если график линейной функции $y = -5x + m$ проходит через точку: а) $N(1;\, 2)$; б) $K(0{,}5;\, 4)$» [32, С. 56].

**Решение.** а) если $N(1; 2)$ принадлежит графику линейной ции $y = -5x + m$, то получаем: $2 = -5 + m$, где $m = 7$;

б) если $K(0{,}5;\, 4)$ принадлежит графику функции $y = -5x + m$, то получаем: $4 = -2{,}5 + m$, где $m = 6{,}5$. **Ответ:** $m = 7$; $m = 6{,}5$.

**Задача 11.** «При каком значении $a$ точка $A(3a;\, 2a - 1)$ принадлежит графику уравнения $2x + 3y - 2 = 0$?» [32, С. 49].

**Решение.** Подставим координаты т. $A$ в уравнение $2x + 3y - 21 = 0$. Получим: $6a + 3\ 2a - 1\ - 21 = 0$; $6a + 6a - 3 - 21 = 0$; $12a = 24$; $a = 2$.

**Ответ:** при $a = 2$.

**Задача 12.** «В уравнении $ax = 15$ найдите коэффициент $a$, зная, что корень уравнения равен: *а) –3; б)* $\frac{1}{3}$; *в)* $-\frac{1}{15}$; *г) 0,02»* [21, С. 107].

**Решение.** а) Если $x = -3$, то получаем: $-3a = 15$, где $a = -5$;

б) если $x = \frac{1}{3}$, то получаем: $\frac{1}{3}a = 15$, где $a = 45$;

в) если $x = -\frac{1}{15}$, то получаем: $-\frac{1}{15}a = 15$, где $a = -225$;

г) если $x = 0{,}02$, то получаем: $0{,}02a = 15$, где $a = 750$.

**Ответ:** а) $a = -5$; б) $a = 45$; в) $a = -225$; г) $a = 750$.

**Задача 13.** «При каком значении $a$ пара $(a + 1;\, 2a - 1)$ является решением уравнения: а) $2x + y = 5$; б) $x - 2y = 1$; в) $x^2 - y^2 = 3$?» [21, С. 267].

**Решение.** а) подставим $(a + 1;\, 2a - 1)$ в уравнение $2x + y = 5$. Получим: $2\ a + 1\ + \ 2a - 1\ = 5$; $2a + 2 + 2a - 1 = 5$; $4a = 4$; $a = 1$;

б) подставим $(a + 1;\, 2a - 1)$ в уравнение $x - 2y = 1$. Получим:

$a+1\ \ -2\ \ 2a-1\ \ =1;\ \ a+1-4a+2=1;\ \ -3a=-2;\ \ a=\dfrac{2}{3};$

в) подставим $(a+1; 2a-1)$ в уравнение $x^2-y^2=3$. Получим: $(a+1)^2-(2a-1)^2=3;$ $a^2+2a+1-(4a^2-4a+1)=3;$

$a^2+2a+1-4a^2+4a-1=3; -3a^2+6a-3=0;\ a^2-2a+1=0;$ $a-1\ ^2=0;\ \ a-1=0;\ \ a=1.$ **Ответ:** а) $a=1$; б) $a=\frac{2}{3}$; в) $a=1$.

**Задача 14.** «При каком значении $m$ точка $P(m; 1-m)$ графику уравнения: *а)* $2x+y=7$; *б)* $2x-y=5$?» [21, С. 271].

**Решение:** а) подставим $P(m; 1-m)$ в уравнение $2x+y=7$. Получим: $2m+\ \ 1-m\ \ =7;\ 2m+1-m=7;\ \ m=6;$ б) подставим $P(m; 1-\ m)$ в уравнение $2x-y=5$. Получим: $2m-\ \ 1-m\ \ =5;\ \ 2m-$ $-1+m=5;\ \ 3m=6;\ \ m=2$. **Ответ:** а) $m=6$; *б)* $m=2$.

*3. Нахождение значения параметра, при котором линейное уравнение не имеет корней, имеет один корень и имеет бесконечно много корней:*

*Для общеобразовательных классов*

**Задача 15.** «Установить, при каких значениях $a$ уравнение $ax=0$ имеет: 1) один корень; 2) бесконечно много корней» [16, С. 218].

**Решение.** Линейное уравнение $ax=0$, $x=-\frac{0}{a}$ при $a\neq 0$ имеет один корень; при $a=0$ имеет бесконечно много корней.

**Ответ:** при $a\neq 0$ один корень; при $a=0$ бесконечно много корней.

*Для классов с углубленным изучением математики*

**Задача 16.** «При каком значении $a$ уравнение $\ 2a-1\ \ x=2a^2-5a+2$: а) не имеет корней; б) имеет один корень; в) имеет бесконечно много корней?» [32, С. 26].

**Решение.** Решим уравнение $\ 2a-1\ \ x=\ 2a^2-5a+2$ относительно *x:*

$$x=\frac{2a^2-5a+2}{2a-1}$$

а) Не имеет корней, если $2a-1\ =\ 0$, а $2a^2-5a+2\neq 0$.

$2a-\ 1=0, a=0{,}5.$

Проверим: $2a^2 - 5a + 2 = 2 \cdot 0{,}5^2 - 5 \cdot 0{,}5 + 2 = 2{,}5 - 2{,}5 = 0$.

**Ответ:** а) не существует таких значений $a$, при которых данное уравнение не имеет корней.

б) Данное уравнение имеет один корень, если $a \neq 0{,}5$.

в) Данное уравнение имеет бесконечно много корней, если $a = 0{,}5$.

*4. Нахождение значения параметра, при котором система линейных уравнений не имеет корней, имеет один корень или имеет бесконечно много корней:*

*Для общеобразовательных классов*

**Задача 17.** «При каком значении $a$ система $\begin{matrix} 5x + ay + 6 = 0, \\ x + 2y - 5 = 0 \end{matrix}$ не имеет решений?» [42, С. 206].

**Решение.** $\begin{matrix} 5x + ay + 6 = 0, \\ x + 2y - 5 = 0, \end{matrix} \quad \begin{matrix} a_1x + b_1y + c_1 = 0, \\ a_2x + b_2y + c_2 = 0, \end{matrix}$

Система не имеет решений, если $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$; $\frac{5}{1} = \frac{a}{2}$; $a = 10$.

**Ответ:** При $a = 10$ данная система не имеет решений.

*Для классов с углубленным изучением математики*

**Задача 18.** «При каком значении $c$ система $\begin{matrix} 5x - 2y = 3, \\ 10x - 4y = c \end{matrix}$ имеет бесконечное множество решений; не имеет решений?» [21, С. 305].

**Решение.** $\begin{matrix} 5x - 2y - 3 = 0, \\ 10x - 4y - c = 0. \end{matrix}$ Данная система имеет бесконечное множество решений, если: $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$; $\frac{5}{10} = \frac{-2}{-4} = \frac{-3}{-c}$; $\frac{1}{2} = \frac{3}{c}$; $c = 6$. Данная система не имеет решений, если: $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$; $\frac{5}{10} = \frac{-2}{-4} \neq \frac{-3}{-c}$; $\frac{5}{10} \neq \frac{-3}{-c}$; $c \neq 6$.

**Ответ:** имеет бесконечное множество решений при $c = 6$; не имеет решений при $c \neq 6$.

*5. Нахождение значений параметров при известных значениях переменных в системе линейных уравнений:*

*Для общеобразовательных классов*

**Задача 19.** «Дана система уравнений $\begin{cases} x + ay = 36, \\ bx + 2y = 27. \end{cases}$ Известно, что пара чисел *(5; 6)* является ее решением. Найдите значения *a* и *b»* [37, С. 65].

**Решение.** Подставим пару чисел *(5; 6)* вместо значений *x* и *y*. Получим: $\begin{cases} 5 + 6a = 36, \\ 5b + 12 = 27, \end{cases}$ $\begin{cases} 6a = 36 - 5, \\ 5b = 27 - 12, \end{cases}$ $\begin{cases} 6a = 31, \\ 5b = 15, \end{cases}$ $\begin{cases} a = 5\frac{1}{6}, \\ b = 3. \end{cases}$

**Ответ:** $a = 5\frac{1}{6}$; $b = 3$.

*Для классов с углубленным изучением математики*

**Задача 20.** «При каких значениях $m$ и *n* пара $(3; -2)$ является решением системы: $\begin{cases} -5x + 2y = m; \\ 3x - 4y = n? \end{cases}$» [21, С. 304].

**Решение.** Подставим пару чисел $(3;-2)$ вместо значений *x* и *y*.

Получим: $\begin{cases} -15 - 4 = m, \\ 9 + 8 = n, \end{cases}$ $\begin{cases} m = -19, \\ n = 17. \end{cases}$

**Ответ:** $m = -19, n = 17$.

*6. Нахождение значения параметра при определении равносильности линейных уравнений с параметром и их систем:*

*Для общеобразовательных классов*

**Задача 21.** «При каком *a* равносильны системы уравнений:

$\begin{cases} ax - y = 5, \\ x + y = 2 \end{cases}$ и $\begin{cases} x - 2 = -y, \\ 4x - 2y = 0? \end{cases}$» [42, С. 199].

**Решение.** Решим систему: $\begin{cases} x - 2 = -y, \\ 4x - 2y = 0. \end{cases}$

$$\begin{cases} x = 2 - y, \\ 8 - 4y - 2y = 0, \end{cases} \begin{cases} x = 2 - y, \\ 8 - 6y = 0, \end{cases} \begin{cases} x = 2 - y, \\ 8 - 6y = 0, \end{cases} \begin{cases} x = 2 - y, \\ -6y = -8, \end{cases} \begin{cases} x = \frac{2}{3}, \\ y = 1\frac{1}{3}. \end{cases}$$

Теперь подставим вместо *x* и *y* значения в уравнение $ax - y = 5$ и получим: $ax - y = 5$; $ax = y + 5$; $a = \frac{y+5}{x}$; $a = \frac{1\frac{1}{3}+5}{\frac{2}{3}}$; $a = \frac{6\frac{1}{3}}{\frac{2}{3}}$; $a = 9{,}5$.

**Ответ:** $a = 9{,}5$.

*Для классов с углубленным изучением математики*

**Задача 22.** «При каких значениях $m$ равносильны уравнения: $7x + 2 = = 16$ и $7x + 2 + m = 16 + m$?» [21, С. 104].

**Решение.** Решим уравнение $7x + 2 = 16$, получим $x = 2$.

Подставим значение $x$ в уравнение $7x + 2 + m = 16 + m$:

$14 + 2 + m = 16 + m$; $16 = 16$.

**Ответ:** Данные уравнения равносильны при любых значениях $m$.

*7. Нахождение значения параметра при условии принадлежности корней линейного уравнения с параметром какому-либо числовому множеств:*

*Для общеобразовательных классов*

**Задача 23.** «Найдите все целые значения $a$, при которых корень уравнения $ax = 6$ является целым числом» [23, С. 53].

**Решение.** Уравнение $ax = 6$, если $a = -6;\ -3;\ -2;\ -1;\ 1;\ 2;\ 3;\ 6$.

*Для классов с углубленным изучением математики*

**Задача 24.** «Найдите натуральные значения $a$, при которых является натуральным числом корень уравнения $a(3x - 2) + 2(3 + a) = 18$» [21, С. 113].

**Решение.** $a\ 3x - 2\ + 2\ 3 + a\ = 18$; $3ax - 2a + 62a = 18$; $3ax = 12$; $x = \frac{4}{a}$. Корень уравнения будет являться натуральным числом, при $a = 1;\ 2;\ 4$. **Ответ:** $a = 1;\ 2;\ 4$.

**Задача 25.** «Укажите три каких-либо значения $b$, при которых корнем уравнения $bx = \frac{2}{3}$ является целое число» [21, С. 124].

**Решение.** $bx = \frac{2}{3}$; $x = \frac{2}{3b}$. *Тогда* $x$ – целое число, если $b = \frac{1}{3}$: $x = \frac{2}{3 \cdot \frac{1}{3}} = 2$;

$x$ – целое число, если $b = \frac{2}{3}$: $x = \frac{2}{3 \cdot \frac{2}{3}} = 1$; $x$ – целое число, если $b = \frac{2}{9}$: $x = \frac{2}{3 \cdot \frac{2}{9}} == 3$. **Ответ:** $b = \frac{1}{3}$; $b = \frac{2}{3}$; $b = \frac{2}{9}$.

В **8 классе** также встречаются типы уравнений, описанные и разобранные в 7 классе, но также можно выделить следующие *типы заданий*:

1. *Решение квадратного уравнения с параметром* относительно переменной.

2. *Нахождение значения параметра*, при котором квадратное уравнение с параметром один корень, два корня, не имеет корней.

3. *Решение квадратного уравнения с параметром* на применение теоремы Виета.

4. *Нахождение значения параметра*, при котором заданное квадратное уравнение с параметром является неполным квадратным уравнением.

5. Решение *рациональных уравнений с параметром.*

6. *Нахождение значения параметра* квадратного уравнения при известном значении переменных.

Приведем примеры упражнений из учебников по алгебре основной школы в 8 классе по *типам заданий*, которые не встречались в 7 классе:

*1. Решение квадратного уравнения с параметром относительно переменной:*

*Для общеобразовательных классов*

**Задача 26.** «Решите уравнение $x^2 - \ 2p - 2 \ x + p^2 - 2p = 0$ с параметром $p$» [39, С. 158].

**Решение.** $x^2 - \ 2p - 2 \ x + p^2 - 2p = 0$;

$$a = 1; b = - \ 2p - 2 \ ; c = p^2 - 2p;$$

$$D = \ - 2p - 2 \ ^2 - 4 \cdot 1 \cdot \ p^2 - 2p \ = 4p^2 - 8p + 4 - 4p^2 + 8p = 4;$$

$$x_1 = \frac{2p-2-2}{2} = \frac{2p-4}{2} = \frac{2 \ p-2}{2} = p - 2; \quad x_2 = \frac{2p-2+2}{2} = \frac{2p}{2} = p.$$

**Ответ:** $p$; $p - 2$: $p \in R$.

**Задача 27.** «Решите уравнение $m^2x^2 - n^2 = 0$ относительно $x$ ($m$ и $n$ – данные числа)» [43, С. 80].

**Решение.** $m^2x^2 - n^2 = 0$; $m^2x^2 = n^2$; $x^2 = \frac{n^2}{m^2}$ $x = \pm\frac{n}{m}$.

**Ответ:** Если $m = 0, n \neq 0$, уравнение не имеет корней; если $m = n = 0$, то $x$ – любое число; если $m \neq 0, n = 0$, то $x = 0$ – единственное решение.

**Задача 28.** «Решите уравнение $2x^2 - 4x + b = 0$ с параметром $b$» [24, С. 150].

**Решение.** $2x^2 - 4x + b = 0$; $D = (-4)^2 - 4 \cdot 2 \cdot b = 16 - 8b$;

Если $D > 0$, т.е. b < 0, то уравнение имеет два не равных корня: $x_{1,2} = 1 \pm \sqrt{1 - \frac{1}{2}b}$. Если $D < 0$, т.е. $b$ > 0 то уравнение не имеет корней. Если $D = 0$, т.е. $b$ = 0 то уравнение имеет два равных корня: $x_1 = x_2 = \frac{4}{4} = 1$.

**Ответ:** Если b < 0, то $x_{1,2} = 1 \pm \sqrt{1 - \frac{1}{2}b}$; если $b$ > 0, то уравнение не имеет корней; если $b$ = 0, то $x_1 = x_2 = 1$.

*Для классов с углубленным изучением математики*

**Задача 29.** «Решите уравнение *с* параметром $p$: $x^2 - 2px + p^2 - 1 = 0$» [34, С. 172].

**Решение.** а) $x^2 - 2px + p^2 - 1 = 0$; $a = 1; b = -2p$; $c = p^2 - 1$;

$$D = (-2p)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (p^2 - 1) = 4p^2 - 4p^2 + 4 = 4;$$

$$x_1 = \frac{2p-2}{2} = p\text{-}1;\ x_2 = \frac{2p+2}{2} = p+1.$$

**Ответ**: $p \pm 1$: $p \in R$.

**Задача 30.** «Решите относительно *x* уравнение $x^2 - a^2 + +2a - 1 = 0$» [21, С. 177].

**Решение.** $x^2 - a^2 + 2a - 1 = 0$; $x^2 - (a^2 - 2a + 1) = 0$;

$$x^2 - (a - 1)^2 = 0; \quad (x - (a - 1))(x + (a - 1))=0;$$

$$(x - a + 1)(x + a - 1)=0;$$

$$x - a + 1 = 0 \quad \textbf{или} \quad x + a - 1;$$

$$x = a - 1 \qquad x = -a + 1.$$

**Ответ:** $a - 1$; $-a + 1$: $a \in R$.

*2. Нахождение значения параметра, при котором квадратное уравнение с параметром один корень, два корня, не имеет корней:*

*Для общеобразовательных классов*

**Задача 31.** «При каком значении $p$ уравнение $x^2+2x+3=p$ не имеет корней?» [39, С. 146].

**Решение.** $x^2+2x+3=p$; $y=x^2+2x+3$; $a = 1, 1 > 0$, ветви параболы вверх.

Найдем координаты вершины:

$x_0 = -\frac{b}{2a} = -\frac{2}{2} = -1$; $y_0 = 1-2+3$;

$y(0)=3$; $y(1)=6$. Уравнение не имеет корней при $p<2$ (Рис. 2). **Ответ:** $p<2$.

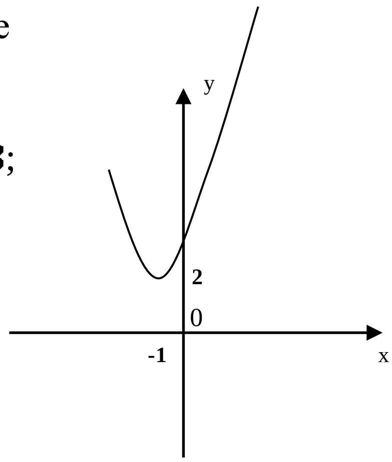


**Рис. 2.**

**Задача 32.** «При каких значениях $p$ уравнение $x^2+3px+p=0$ имеет один корень?» [39, С. 155].

**Решение.** $x^2+3px+p=0$; $D = \ 3p\ ^2 - 4\cdot 1\cdot p = 9p^2-4p$;

Если $D = 0$, то уравнение имеет единственный корень, значит:

$$9p^2-4p=0; \quad p\ 9p-4\ =0;$$

$$p=0 \quad \textbf{или} \quad 9p-4=0;\ p=\frac{4}{9}.$$

**Ответ:** $p=0, p=\frac{4}{9}$.

**Задача 33.** «Найти все значения $a$, при которых уравнение $ax^2+3x+$ $+2=0$, где $a \neq 0$: *1)* имеет два различных корня; 2) имеет один корень; 3) не имеет корней» [17, С. 176].

**Решение.** $ax^2+3x+2=0$; $D=9-4\cdot a\cdot 2=9-8a$;

1) если $D > 0$: $9-8a > 0$; $8a<9$; $a<1\frac{1}{8}$;

2) если $D = 0$: $9-8a = 0$; $8a=9$; $a=1\frac{1}{8}$;

3) если $D < 0$: $9-8a < 0$; $8a>9$; $a>1\frac{1}{8}$.

**Ответ:** 1) имеет два различных корня при $a<1\frac{1}{8}$; 2) имеет один корень при $a=1\frac{1}{8}$; 3) не имеет корней при $a>1\frac{1}{8}$.

**Задача 34.** «Подберите какое-нибудь значение $c$, при котором уравнение $5x^2-2x+c=0$ имеет корни, и значение $c$, при котором оно не имеет корней» [12, С. 131].

**Решение.** $5x^2 - 2x + c = 0$; $D = (-2)^2 - 4 \cdot 5 \cdot c = 4 - 20c$;

Уравнение не имеет корней, если $D < 0$: $4 - 20c < 0$; $20c > 4$; $c > \frac{1}{5}$.

Так как при $c > \frac{1}{5}$ данное уравнение не имеет корней, то для того, чтобы существовали корни, мы можем взять любое значение $c$ из промежутка $(-\infty; \frac{1}{5})$, например, $c = -1, c = 0$. **Ответ:** $c \in (-\infty; \frac{1}{5}), c = -1, c = 0$.

**Задача 35.** «Существует ли такое значение $a$, при котором уравнение $x^2 - ax + a - 4 = 0$ не имеет корней; имеет один корень; имеет два корня?» [24, С. 129].

**Решение.** $x^2 - ax + a - 4 = 0$; $D = (-a)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (a - 4) = a^2 - -4a + 16$. Имеем: а) данное уравнение не имеет корней, если $D < 0$:

$a^2 - 4a + 16 < 0$; $(a^2 - 4a + 4) + 12 < 0$;

$(a-2)^2 + 12 < 0$ – не выполняется, т.к. $(a-2)^2 > 0$.

Можно сделать *вывод*, что значений $a$, при которых уравнение не имеет корней не существует.

б) уравнение имеет единственный корень, если $D = 0$: $a^2 - 4a + 16 = = 0$; $D = (-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 16 = 16 - 64 < 0$ => $a^2 - 4a + 16 = 0$ не имеет корней, а значит, не существует таких значений $a$, при которых уравнение $x^2 - ax + a - 4 = 0$ имело бы один корень.

в) Уравнение имеет два корня, если $D > 0$: $a^2 - 4a + 16 > 0$; $(a^2 - 4a + 4) + 12 > 0$; $(a-2)^2 + 12 > 0$; $(a-2)^2 > -12$ – выполняется при любом $a$. **Ответ:** а) не существует; б) не существует; в) $a$ – любое число.

*Для классов с углубленным изучением математики*

**Задача 36.** «Докажите, что не существует такого значения параметра p, при котором уравнение $x^2 - px + p - 2 = 0$ имело бы только один корень» [34, С. 173].

**Доказательство:** $x^2 - px + p - 2 = 0$; $D = \ -p\ ^2 - 4 \cdot 1 \cdot\ \ p - 2\ = = p^2 - 4p + 8$. Квадратное уравнение имеет один корень, если *D=0:* $p^2 - -4p + 8 = 0$*;* $D = \ -4\ ^2 - 4 \cdot 1 \cdot 8 = 16 - 32 = -16 < 0$ => уравнение $x^2 - px + p - 2 = 0$ не может иметь один корень, *что и требовалось доказать.*

*3. Решение квадратного уравнения с параметром на применение теоремы Виета:*

*Для общеобразовательных классов*

**Задача 37.** «Дано уравнение $x^2 - \ 2p^2 - p - 6\ x + (8p - 1) = 0$. Известно, что сумма его корней равна $-5$. Найдите значения параметра *p»* [39, С. 177].

**Решение.** $x^2 - \ 2p^2 - p - 6\ x + \ 8p - 1\ = 0$ => $x_1 + x_2 = -5$,

$x_1 + x_2 = 2p^2 - p - 6 = -5$; $2p^2 - p - 1 = 0$; $D = 1 + 4 \cdot 2 = 9$;

$p_1 = \frac{1+3}{4} = 1$; $p_1 = \frac{1-3}{4} = -0{,}5$.

При *p = 1*: $x^2 + 5x + 7 = 0$;$D = 25 - 4 \cdot 7 = -3 < 0$ − нет корней.

При *p = –0,5*: $x^2 + 5x - 5 = 0$; $D = 25 + 20 = 45 > 0$ − существует два различных корня. **Ответ:** $p = -0{,}5$.

*Для классов с углубленным изучением математики*

**Задача 38.** «При каких значениях параметра $p$ произведение корней квадратного уравнения $x^2 + \ p^2 + 4p - 5\ x - p = 0$ равно нулю?» [34, С. 180].

**Решение.** $x^2 + \ p^2 + 4p - 5\ x - p = 0$; $x_1 \cdot x_2 = 0$.

Произведение равно нулю, если один из множителей или каждый множитель равен нулю. Пусть $x_1 = 0$, получим: $0^2 + \ p^2 + 4p - 5\ \cdot 0 - p = 0$; $p = 0$. Подставим значение параметра $p$ в начальное уравнение:

$x^2 + \ 0^2 + 4 \cdot 0 - 5\ x - 0 = 0$; $x^2 - 5x = 0$;

$x(x - 5) = 0$; $x = 0$ **или** $x = 5$. **Ответ:** при $p = 0$.

*4. Нахождение значения параметра, при котором заданное квадратное уравнение с параметром является неполным квадратным уравнением:*

*Для общеобразовательных классов*

**Задача 39.** «При каких значениях $p$ уравнение $(2p-3)x^2 +$ $+ \ 3p-6 \ x+p^2-9=0$ является: а) неполным неприведенным квадратным уравнением; б) неполным приведенным квадратным уравнением» [39, С. 153].

**Решение.** а) Уравнение неприведенное, если $2p-3 \neq 1$, т.е. $p \neq 2$. Уравнение неполное, если $3p-6=0$, т.е. $p=2$ или $p^2-9=0$, т.е. $p_{1,2} =$ $\pm 3$.

б) Уравнение неполное, если $p=2$ или $p=\pm 3$. Уравнение приведенное, если $p=2$. **Ответ:** а) $p_{1,2}=\pm 3$; б) $p=2$.

*Для классов с углубленным изучением математики*

**Задача 40.** «При каком значении $m$ уравнение $3x^2 + \ m-1 \ x+m-$ $-4=0$ обращается в неполное квадратное уравнение? Запишите это уравнение» [22, С. 177].

**Решение.** *Квадратное уравнение* является неполным, если коэффициенты $b$ или $c$ равны *0*. Значит: $m-1=0$ или $m-\ 4=0$;

$m=1$ $m=4$.

При $m=1$ получим: $3x^2-3=0$; при $m=4$ получим: $3x^2+3x=0$.

**Ответ:** $3x^2+3x=0$.

5. *Решение рациональных уравнений с параметром:*

*Для классов с углубленным изучением математики*

**Задача 41.** «Решите уравнение $\frac{x^2+6x}{x+6}=a$: а) при $a=3$; б) при $a=-3$» [34, С. 39].

**Решение.**

а) при $a=3$: $\frac{x^2+6x}{x+6}=3$; $\frac{x^2+6x}{x+6}-3=0$; $\frac{x^2+6x-3(x+6)}{x+6}=0$;

Дробь равна 0, если числитель равен нулю, а знаменатель не равен. Получаем: $x^2+6x-3x-18=0$; $x\neq -6$. Имеем $x^2+3x-18=0$;

$D = 9 + 72 = 81;\ \ x_1 = \frac{-3+9}{2} = 3;\ x_2 = \frac{-3-9}{2} = -6.$

б) при $a = -3$: $\frac{x^2+6x}{x+6} = -3;\quad \frac{x^2+6x}{x+6} + 3 = 0;\quad \frac{x^2+6x+3(x+6)}{x+6} = 0;$

Дробь равна 0, если числитель равен нулю, а знаменатель не равен. Получаем: $x^2 + 6x + 3x + 18 = 0;\quad x \neq -6$

$x^2 + 9x + 18 = 0;\ D = 81 - 72 = 9;\ x_1 = \frac{-9+3}{2} = -3;\ x_2 = \frac{-9-3}{2} = -6.$

**Ответ:** а) $3$; б) – $3$.

**Задача 42.** «Решить уравнение $\frac{1}{x+2} - \frac{2b-1}{x^2-2x+4} = \frac{6-4b}{x^3+8}$ относительно *x*» [27, С. 168].

**Решение.** $\frac{1}{x+2} - \frac{2b-1}{x^2-2x+4} = \frac{6-4b}{x^3+8};\quad \frac{1}{x+2} - \frac{2b-1}{x^2-2x+4} - \frac{6-4b}{(x+2)(x^2-2x+4)} = 0;$

$\frac{x^2-2x+4-\ 2b-1\ \ x+2\ -(6-4b)}{(x+2)(x^2-2x+4)} = 0;\quad \frac{x^2-2x+4-\ 2b-1\ \ x+2\ -(6-4b)}{(x+2)(x^2-2x+4)} = 0;$

$\frac{x^2-2x+4-\ 2bx+4b-x-2\ \ -6+4b}{(x+2)(x^2-2x+4)} = 0;\quad \frac{x^2-2x+4-2bx-4b+x+2-6+4b}{(x+2)(x^2-2x+4)} = 0;$

$\frac{x^2-x-2bx}{(x+2)(x^2-2x+4)} = 0;\quad \frac{x^2-x(1+2b)}{(x+2)(x^2-2x+4)} = 0.$

Дробь равна 0, если числитель равен нулю, а знаменатель не равен.

Получаем: $\begin{matrix} x^2 - x\ \ 1 + 2b\ \ = 0, \\ (x+2)(x^2-2x+4) \neq 0, \end{matrix}$

$x^2 - x\ \ 1 + 2b\ \ = 0,\qquad (x+2)(x^2-2x+4) \neq 0,$

$x\ \ x - 1 - 2b\ \ = 0,\qquad x + 2 \neq 0$ **и** $x^2 - 2x + 4 \neq 0,$

$x_1 = 0$ **или** $x_2 - 1 - 2b\ = 0,\qquad x \neq -2\qquad D = 4 - 16 < 0$

$x_2 = 1 + 2b,$

$x_2$ – имеет корень при любом значении $b$.

Исключим те значения b, при которых $x = -2$. Для этого решим уравнение: $1 + 2b = -2;\quad 2b = -2 - 1;\quad b = -1{,}5.$

**Ответ:** при $b \neq -1{,}5$ уравнение имеет два корня: $x_1 = 0$ и $x_2 = 1 + 2b$; при $b = -1{,}5$ уравнение имеет единственный корень: $x = 0$.

*6. Нахождение значения параметра квадратного уравнения при известном значении переменных:*

*Для общеобразовательных классов*

**Задача 43.** «Найдите значение коэффициента $a$, если известно, что прямая $x = 2$ является осью симметрии графика функции $y = ax^2 - a + 6 \ x + +9$» [39, С. 144].

**Решение.** Если прямая *x = 2* является осью симметрии графика функции

$y = x^2 - \ a + 6 \ x + 9$, то: $x_0 = -\frac{b}{2a} = \frac{a+6}{2a} = 2$; $\frac{a+6}{2a} = 2$;

$\frac{a+6}{2a} - 2 = 0$; $\frac{a+6-4a}{2a} = 0$; $6 - 3a = 0, a \neq 0$; $a = 2$. **Ответ:** $a = 2$.

**Задача 44.** «Найдите значение коэффициентов $b$ и $c$, если график функции $y = x^2 + bx + c$ проходит через точки *(0; 8)* и *(3; –1)»* [40, С. 144].

**Решение:** составим систему и решим ее.

$c = 8;$ $9 + 3b = -1;$ $c = 8;$ $3b = -1 - 9;$ $c = 8;$ $b = -3\frac{1}{3}.$ **Ответ:** *c = 8;* $b = -3\frac{1}{3}$.

**Задача 45.** «В уравнении $(a-7)x^2 + 13x - a = 0$ один из корней равен *2*. Найти все значения $a$ и второй корень уравнения» [17, С. 219].

**Решение.** $4 \ a - 7 \ + 26 - a = 0$; $4a - 28 + 26 - a = 0$; $3a - 2 = 0$; $3a = 2$; $a = \frac{2}{3}$. Если $a = \frac{2}{3}$, то мы получим: $\frac{2}{3} - 7 \ x^2 + 13x - \frac{2}{3} = 0$;

$-\frac{19}{3}x^2 + 13x - \frac{2}{3} = 0$; $19x^2 - 39x + 2 = 0$; $D = 1521 - 152 = 1369$; $x_1 = \frac{39+37}{38} = 2$; $x_2 = \frac{39-37}{38} = -\frac{2}{38} = -\frac{1}{19}$. **Ответ:** $a = \frac{2}{3}$; $x_2 = -\frac{1}{19}$.

*Для классов с углубленным изучением математики*

**Задача 46.** «Один из корней уравнения $x^2 + px + 54 = 0$ равен *6*. Найдите другой корень и второй коэффициент» [22, С. 201].

**Решение.** $x^2 + px + 54 = 0$, $x_1 = 6$; $36 + 6p + 54 = 0$; $36 + 6p + +54 = -54 - 36$; $6p = -90$; $p = -15$.

$x^2 - 15x + 54 = 0$; $D = 225 - 4 \cdot 54 = 225 - 116 = 9$; $x_1 = \frac{15+3}{2} = 9$; $x_2 = \frac{15-3}{2} = 6$. **Ответ:** $p = -15, x_2 = 9$.

В ходе проделанной работы было отмечено, что в 8 классе авторы учебников уделяют большое внимание *квадратным уравнениям с параметрами*, но задания *на применение понятия линейного уравнения с параметром* также имеются в учебниках.

Из всех рассмотренных учебников выделено два уравнениями с параметром, в которых не встречаются задания для 7 класса.

В учебнике А.Г. Мордковича с углубленным изучением математики и дополнительных главах к учебнику 8 класса Ю.Н. Макарычева имеются не только задания на понятие квадратного уравнения с параметром, но и впервые за основную школу рассматриваются *рациональные уравнения с параметром.*

При анализе стало очевидно, что теме «Уравнения с параметром» в учебниках *для общеобразовательных классов* выделяют крайне мало внимания. Если посмотреть анализ задачного материала по типам задач (Приложения 1-3), то мы увидим, что в учебниках *для классов с углубленным изучением математики* задач по теме исследования предоставлено значительно больше и задания более разнообразные.

В **9 классе** имеются те же типы заданий, что и в 7-8 классах. Наиболее распространенными в учебниках алгебры 9 класса являются следующие *типы заданий:*

1. Решение линейного уравнения с параметром *относительно переменной (неизвестной).*

2. *Решение квадратного уравнения* с параметром относительно переменной.

3. *Нахождение значения параметра*, при котором квадратное уравнение (или система квадратных уравнений) с параметром один корень, два корня, не имеет корней.

4. *Нахождение значения параметра* квадратного уравнения (или системы квадратных уравнений) при известном значении переменных.

*Новым типом задания* для учащихся **9 класса** является:

5. *Решение иррациональных уравнений* (и их систем) с параметром.

6. Решение уравнений с параметрами, *содержащих модуль*.

Приведем примеры упражнений из учебников по алгебре основной школы в **9 классе** по каждому *типу заданий:*

*1. Решение линейного уравнения с параметром относительно переменной (неизвестной):*

*Для общеобразовательных классов*

**Задача 47.** «Решите уравнение с переменной *x:* $m-1\ x=m^2-1$» [13, С. 181].

**Решение.** $m-1\ x=m^2-1$; $x=\frac{m^2-1}{m-1}$; $x=\frac{m-1\ (m+1)}{(m-1)}$;

Если $m\neq 1$, то $x=m+1,$ если $m=1$, то $x$ – любое число.

**Ответ:** при $m\neq 1$, $x=m+1$; при $m=1$, $x$ – любое число.

*Для классов с углубленным изучением математики*

**Задача 48.** «Решите относительно *x* уравнение $2x+\frac{x}{a}=3$» [26, С. 113].

**Решение.** $2x+\frac{x}{a}=3$ $2x+\frac{1}{a}x=3$; $x(2+\frac{1}{a})=3$; $x=\frac{3}{2+\frac{1}{a}}$; $x=\frac{3a}{2a+1}$.

**Ответ:** Если $a\neq -\frac{1}{2}$, то уравнение имеет один корень; если $a=-\frac{1}{2}$, то уравнение не имеет корней; если $a\neq -\frac{1}{2}$ и $a\neq 0$ , то $x=\frac{3a}{2a+1}$.

*2. Решение квадратного уравнения с параметром относительно переменной:*

*Для общеобразовательных классов*

**Задача 49.** «Решите уравнение$x^2-ax=0$ относительно *x*» [18, С. 278].

**Решение.** $x^2-ax=0$; $x(x-a)=0$; $x=0$ **или** $x=a$.

**Ответ:** $x=0$; $x=a$, $a\in R$.

*Для классов с углубленным изучением математики*

**Задача 50.** «Решите уравнение $ax^2 + 4x + 1 = 0$ с параметром *a»* [26].

**Решение.** $ax^2 + 4x + 1 = 0$; $D = 16 - 4a$. Имеем:

Если $D > 0$, т.е. $a < 4$, и $a \neq 0$, то уравнение *имеет два различных корня*: $x_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{4(4-a)}}{2a} = \frac{-4 \pm 2\sqrt{4-a}}{2a} = \frac{-2 \pm \sqrt{4-a}}{a}$.

Если $D = 0$, т.е. $a = 4$, и $a \neq 0$, то уравнение имеет *два равных корня*: $x = \frac{-4}{2a} = \frac{-2}{a}$.

Если $D < 0$, т.е. $a > 4$, и то уравнение *не имеет корней*.

**Ответ:** при $a \in (-\infty; 0) \cup (0; 4)$: $x_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4-a}}{a}$; при $a = 4$, $a \neq 0$: $x = \frac{-2}{a}$; при $a \in (4; +\infty)$: уравнение *не имеет корней.*

*3. Нахождение значения параметра, при котором квадратное уравнение (или система квадратных уравнений) с параметром один корень, два корня, не имеет корней:*

*Для общеобразовательных классов*

**Задача 51.** «Выясните, при каких значениях $a$ уравнение имеет два корня: $ax^2 - (a+1)x + 1 = 0$» [13, С. 181].

**Решение.** $ax^2 - (a+1)x + 1 = 0$; $D = (a+1)^2 - 4a = a^2 + 2a + 1 - 4a = a^2 - 2a + 1 = (a-1)^2$; $(a-1)^2 > 0$; $a - 1 > 0$; $a$ – любое число, $a \neq 1$ и $a \neq 0$. **Ответ:** $a \neq 1$ и $a \neq 0$.

*Для классов с углубленным изучением математики*

**Задача 52.** «При каких значениях параметра $a$ имеет два корня уравнение: $4x^2 - 2x + a = 0$» [26, С. 114].

**Решение.** $4x^2 - 2x + a = 0$; $D = 4 - 16a$; $4 - 16a > 0$; $16a < 4$; $a < 0{,}25$; **Ответ:** при $a < 0{,}25$.

*4. Нахождение значения параметра квадратного уравнения (или системы квадратных уравнений) при известном значении переменных:*

*Для общеобразовательных классов*

**Задача 53.** «Найдите значение $b$, при котором прямая *x = 2* является осью симметрии параболы $y = 3x^2 + bx + 7$» [41, С. 114].

**Решение.** $y = 3x^2 + bx + 7;\quad x_0 = -\frac{b}{6};\quad 2 = -\frac{b}{6};\quad b = -12.$

**Ответ:** $b = -12$.

*Для классов с углубленным изучением математики*

**Задача 54.** «При каких $a$ и $b$ график функции $y = ax^2 - -2bx + 1$ проходит через точки *M (-1; 3)* и *P (2; 4)»* [26, С. 73].

**Решение.** $\begin{cases} a + 2b + 1 = 3, \\ 4a - 4b + 1 = 4, \end{cases}$ $\begin{cases} a + 2b = 2, \\ 4(a - b) = 3, \end{cases}$ $\begin{cases} a = -2b + 2, \\ 4(2 - 2b) - 4b = 3, \end{cases}$

$\begin{cases} a = -2b + 2, \\ 8 - 8b - 4b = 3, \end{cases}$ $\begin{cases} a = -2b + 2, \\ b = \frac{5}{12}, \end{cases}$ $\begin{cases} a = \frac{7}{6}, \\ b = \frac{5}{12}. \end{cases}$

**Ответ:** $a = \frac{7}{6}$, $b = \frac{5}{12}$.

*5. Решение иррациональных уравнений (и их систем) с параметром:*

*Для общеобразовательных классов*

**Задача 55.** «При каких значениях а уравнение $(ax)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{a}$ имеет единственный корень и бесконечное множество корней?» [44].

**Решение.** $(ax)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{a};\quad \sqrt[3]{ax} = \sqrt[3]{a}.$ Если *a = 1,* то $\sqrt[3]{1 \cdot x} = \sqrt[3]{1};$ $\sqrt[3]{x} = 1;$ $x = 1$ - единственный корень. Если *a = 0,* то $\sqrt[3]{0 \cdot x} = \sqrt[3]{0};$ $\sqrt[3]{0} = 0$, значит, уравнение имеет бесконечное множество корней.

**Ответ:** при *a* = 1 уравнение имеет единственный корень $x = 1;$ при *a = 0* уравнение имеет бесконечное множество корней

*Для классов с углубленным изучением математики*

**Задача 56.** «Решить уравнение $x - \sqrt{a - x^2} = 1$» [15].

**Решение.** $\sqrt{a - x^2} = x - 1;\quad a - x^2 = x^2 - 2x + 1;$

$2x^2 - 2x + (1 - a) = 0;\ D = 2a - 1.$

Если *a > 0,5*, $x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{2a - 1}}{2}$; если *a = 0,5*, $x = 0{,}5$; если *a < 0,5*, уравнение корней не имеет.

*6. Решение уравнений с параметрами, содержащих модуль:*

*Для классов с углубленным изучением математики*

**Задача 57.** «При каком значении параметра $b$ уравнение $x^2+x-3 = x^2-5x+b$ имеет только одно решение?» [15].

**Решение.** $x^2+x-3 = x^2-5x+b$. Данное уравнение можем заменить равносильной совокупностью двух уравнений: 1) $x^2+x-3=x^2-5x+b$ *и* 2) $x^2+x-3=-x^2+5x-b$. Решая первое уравнение, мы получим: $x=\frac{b+3}{6}$. Решим второе уравнение, получим: $2x^2-4x+ b-3 = 0$.
$D=-8b+40$; $-8b+40=0$; $b=5$.

**Ответ:** при $b = 5$.

Анализ типов задач 9 класса представлен в Приложении.

## Выводы по первой главе

1. Определено понятие уравнения с параметром. Так, определено, что методической литературе отсутствует единый подход к определению понятия уравнения с параметром. Выделены виды уравнений с параметрами, рассматриваемые в основной школе.

2. Выявлены основные цели обучения теме «Уравнения с параметрами» в курсе алгебры основной школы: формирование у учащихся умения проводить разветвленные логические построения, аккуратность и внимательность при описании решения уравнения с параметром; знаний, умений и навыков использования понятийного аппарата, связанного с решением уравнений с параметрами, в математике и других науках; навыков использования уравнений с параметрами в повседневной жизни; графической культуры.

3. Рассмотрено содержание теоретического материала по данной теме в учебниках алгебры основной школы.

4. Проанализирован задачный материал по теме «Уравнения с параметрами» в учебниках алгебры 7-9 классов. Определены основные *типы задач* по теме исследования.

# ГЛАВА II. МЕТОДИЧЕСКИЕ АСПЕКТЫ ОБУЧЕНИЯ РЕШЕНИЮ УРАВНЕНИЙ С ПАРАМЕТРАМИ В КУРСЕ АЛГЕБРЫ ОСНОВНОЙ ШКОЛЫ

## § 5. Методические рекомендации по обучению решению алгебраических уравнений с параметрами в курсе алгебры основной школы

В.В. Мирошин в пособии [30, С. 16] говорит, что «содержательно-методическая линия задач с параметрами должна строиться по принципу обратной связи и предусматривать постоянное обращение к ранее использованным идеям и методам решения наряду с введением новых…. Выбор метода решения задачи – прерогатива учащегося, учитель должен выступать в роли некоторого заинтересованного наблюдателя, ведущего дискуссию по формуле: РЕЗУЛЬТАТИВНОСТЬ = ПОТЕНЦИАЛ – ВМЕШАТЕЛЬСТВО».

С.В. Арюткина [2] указывает, что в современном мире школьное образование ставит развивающую цель обучения учащихся. Именно поэтому большую роль в изучении математики приобретает организованное их обучение приемам мышления, рационального выполнения своей деятельности.

Т.А. Ананьина в исследовании [1] отмечает, что «работа с параметрами проходит особой, завершающей линией по всем алгебраическим темам школьного курса углубленного изучения математики. Чаще всего задачи с параметрами являются средством обобщения и систематизации изучаемого в данный момент математического объекта». Для того, чтобы сосредоточить внимание учащихся на построении логической цепочки решения уравнений с параметром автор предлагает рассматривать одинаковые выражения, помещать их в различные математические ситуации, также дать акценты не на нахождении корней, а именно на анализе случаев ограничений параметра.

Автор статьи [58] утверждает, что при обучении решению задач повышенной трудности, в том числе уравнений с параметрами, важно показать различные способы решения на одной и той же задаче, практическая значимость выходит на первое место в обучении.

М.В. Фалилеева [51] акцентирует внимание на следующем: «У учащихся понятие *уравнения с параметром* «должно включать в себя понимание того, что: 1. *Уравнение с параметром – это семейство уравнений* одного вида при одних значениях параметра, и иных видов – при других значениях параметра. 2. Решение уравнения может включать в себя *несколько методов* решения, соответствующих каждому виду уравнения при определенных *значениях параметра*... В обучении решению уравнений можно выделить *пять уровней* подготовки учащихся по теме: «*умение решать простейшие уравнения*; *умение решать уравнения, приведенные к простейшим путем «несложных» тождественных преобразований* (прибавление числа к обеим частям уравнения, приведение к общему числовому знаменателю, приведение подобных и т.п.); *умение решать простейшие уравнения с параметрами и уравнения, приводимые к ним путем «несложных» тождественных преобразований*; *умение решать уравнения, приведенные к простейшим путем «сложных» преобразований* (использование формул сокращенного умножения. Замены переменной, разложения на множители и др.); *умение решать уравнения с параметрами, приведенные к простейшим, путем «сложных» преобразований»* [51, С. 1230-1231].

Также при обучении важно учитывать возраст и этап развития интеллекта учащихся. Именно в соответствии с этим необходимо выбирать формы и стратегии обучения [55].

Н.Н. Масалытина в статье [28] о решении задач с параметрами в курсе алгебры основной школы говорит: «Знакомить учащихся с *заданиями с параметрами* следует начиная с 7 класса, постепенно включая их в список задач к общему курсу. В *7-ом классе* необходимо вводить линейные уравнения с параметрами и простейшие системы линейных уравнений с параметрами. *В курсе 8-ого класса* следует разобрать способы решения некоторых типов уравнений второй степени с параметрами, а в *9-ом классе* – рассмотреть расположение корней квадратного трехчлена в зависимости от параметра и решение связанных с этим вопросом системы заданий».

Также автор считает, что в курсе алгебры *7-ого класса* при изучении с учащимися содержания материала в параграфе *«Линейное уравнение с одной переменной»* надо рассмотреть с ними решение уравнения вида $ax = b$ с неизвестной переменной *x,* где $a$ и $b$ – некоторые параметры. Рекомендуется познакомить учащихся с понятием *«параметр»* именно на данном этапе обучения математике.

В соответствии с этим полезно предлагать в течении учебного года для закрепления навыков решения *уравнений с параметрами* учащимся *7-го класса* задания вида:

1) $px = 10$;
2) $2ax - 4 = 0$;
3) $ax - 3 = 2x + 5$;
4) $a - 1\ \ x + 2 = a + 1$;
5) $a^2\ \ x - 5\ \ = 25\ \ x - a\ \ .$

Н.Н. Масалытина пишет, что обучать учащихся решению *систем линейных уравнений с параметрами* необходимо после изучения с ними темы *«Системы линейных уравнений с двумя переменными»,* в которой приводится графический способ решения систем линейных уравнений.

Автором предлагаются такие *задания:* 1) Дано: $\begin{matrix} y = bx + 6; \\ y = -14x + 6. \end{matrix}$ Подобрать такие значения параметров $a$ и $b$, чтобы: а) система имела единственное решение; б) система не имела решений. 2) решите систему уравнений с параметрами $k$ и $p$ $\begin{matrix} y = kx - 3; \\ y = px - 3 \end{matrix}$ , если $k \neq p$. Указывается, что для решения задач с параметрами в *8-ом классе* учащимся необходимо уметь решать задачи по темам *«Квадратные уравнения», «Дробные рациональные уравнения»* и

*«Неравенства»;* «уравнения с параметрами дополняют список задач учебников алгебры основной школы к теме *«Квадратные уравнения»* [28].

Таким образом, обучающимся *восьмого класса* надо уметь решать уравнения следующего вида:

1) $x^2 - x + 3 = 0$;

2) $x^2 + 1 = \frac{2x+1}{3}$;

3) $x^2 + 2x + ax - 3 = 0$;

4) $x + 4\ {}^{4} - 3 = 2x^2 + 4x$;

5) $x + a\ {}^{4} - 4\ x + a\ {}^{2} = x^2$.

Согласно исследованию Н.Н. Масалытиной: «В *9 классе* представляется целесообразным после изучения главы *«Квадратичная функция»* вернуться к решению уравнений второй степени с параметрами, предлагая учащимся задания различного типа: *на применение теоремы Виетта, решения полного квадратного уравнения с анализом дискриминанта данного уравнения, решением неполных квадратных уравнений, более сложных систем уравнений с двумя переменными, дробными рациональными уравнениями»* [28].

Для учащихся 9 класса можно провести следующую *обучающую самостоятельную работу* в зависимости от уровня знаний учащегося:

**1 уровень:**

*Задание 1.* «Решите уравнение относительно переменной $x$:

а) $x - a = 2x - 5$; б) $1 - x = c + 2$; в) $x + b = 0$» [11].

*Комментарий.* Рассмотрим решение уравнения: $x - a = 2x + 3a - 1$.

Для решения данного уравнения все, что содержит переменную $x$ – переносим в левую часть, остальное – в правую, затем выражаем переменную $x$.

$$x - 2x = 3a + a - 1; \quad -x = 4a - 1; \quad x = -4a + 1.$$

*Ответ:* Если $a$ – действительное число, $x = -4a + 1$.

*Задание 2.* «При каких значениях $p$ уравнение имеет один корень: $x^2 - px + 9 = 0$?» [17].

*Задание 3.* «При каких значениях параметра $p$ уравнение $x^2 + 2x + 3 = = p$ не имеет корней?» [17]

*Комментарий.* При решении данных уравнений необходимо вспомнить формулы дискриминанта и корней квадратного уравнения. Давайте рассмотрим следующий пример:

«Решим уравнение с параметром $b$: $2x^2 - 4x + b = 0$.

$a = 2; b = -4; c = b; D = \ -4\ ^2 - 4 \cdot 2 \cdot b = 16 - 8b;$

Если $D > 0$, т.е. $b < 2$, то уравнение имеет два не равных корня:

$x_{1,2} = 1 \pm \sqrt{1 - \frac{1}{2}b}$. Если $D < 0$, т.е. $b > 2$ то уравнение не имеет корней. Если $D = 0$, т.е. $b = 2$ то уравнение имеет два равных корня:

$x_1 = x_1 = \frac{4}{4} = 1$» [34].

**2 уровень:**

*Задание 1.* «Найти все значения $a$, при которых уравнение $ax^2 + 3x + +2 = 0$, где $a \neq 0$: а) имеет два различных корня; б) имеет один корень; в) не имеет корней» [34].

*Задание 2.* Подберите какое-нибудь значение $c$, при котором уравнение имеет корни, и значение $c$, при котором оно не имеет корней:

а) $x^2 - 3x + c = 0$; б) $5x^2 - 2x + c = 0$.

*Задание 3.* «Докажите, что не существует такого значения параметра p, при котором уравнение $x^2 - px + p - 2 = 0$ имело бы только один корень» [34]. *Комментарий.* При решении данных уравнений, важно помнить, при каких условиях квадратное уравнение будет иметь один корень, два корня, не будет иметь корней.

**3 уровень:**

*Задание 1.* «Дано уравнение $x^2 - \ 2p^2 - p - 6\ x + (8p - 1) = 0$. Известно, что сумма его корней равна -5. Найдите значения параметра $p$» [35].

*Комментарий:* При решении данных уравнений необходимо вспомнить теорему Виетта.

*Задание 2.* «В уравнении $x^2 + px - 35 = 0$ один из корней равен *7*. Найдите другой корень и коэффициент $p$» [45].

*Задание 3.* «При каких значениях параметра $p$ произведение корней квадратного уравнения $x^2 + \ \ p^2 + 4p - 5 \ \ x - p = 0$ равно нулю?» [35].

*Задание 4.* «Найдите все значения $a$, при которых уравнение $ax^2 -$ $- \ \ a + 1 \ \ x = 0$ имеет единственный корень» [44].

Согласно исследованию Н.Н. Масалытиной [28], «в конце учебного года в *9 классе* на уроках «Повторение» нужно познакомить учащихся с *графическим методом решения уравнений второй степени с параметрами*, научить распознавать положение параболы на плоскости в зависимости от коэффициентов… Для этого учащимся необходимо напомнить: прямая $x = -\frac{b}{2a}$ – ось параболы; $x_0 = -\frac{b}{2a}$ – первая координата вершины параболы; знак коэффициента $a$ (рядом с $x^2$) – показывает направление ветвей параболы: если $a$ – положительное число, то ветви направлены вверх, если же отрицательное – опущены вниз; дискриминант квадратного уравнения показывает пересекается ли парабола с осью *Ox*».

Таким образом, при решении уравнений с параметрами учащиеся должно понимать, что значит *«уравнение с параметром»* и что значит решить уравнение с параметром. Также важно сделать акцент на то, что при решении какого-либо уравнения с параметром могут применяться *различные методы решения*. Знакомить учащихся с заданиями с параметрами *следует с 7 класса*. В ходе обучения решению уравнений с параметром можно выделять *пять уровней подготовки учащихся*. Полезно проводить на уроках *обучающие самостоятельные работы* по теме исследования в зависимости от уровня знаний учащихся.

## § 6. Анализ задач ОГЭ по теме исследования

Проанализировав задачный материал основного государственного экзамена по математике нами было выявлено, что задания с параметрами содержаться *во второй части*: в заданиях №21 и №23.

*В задании №21* можно встретить *квадратные уравнения с параметром*, однако важно отметить, что из проработанных тестов задания по теме исследования встречались крайне редко, с одинаковой формулировкой *где изначально указан один из корней и необходимо найти второй корень данного уравнения*:

**Задание 1.** «Один из корней уравнения $3x^2 + 5x + 2m = 0$ равен $-1$. Найдите второй корень» [45].

**Решение.** Подставим известный корень уравнения в уравнение:

$3x^2 + 5x + 2m = 0$ и получим $2m = 2$; $m = 1$. Подставим $m$ в уравнение: $3x^2 + 5x + 2 = 0$. $D = b^2 - 4ac = 25 - 24 = 1$; $x = \frac{-b\pm\sqrt{D}}{2a} = \frac{-5\pm1}{2}$; $x_1 = -1$; $x_2 = -\frac{2}{3}$. **Ответ:** $-\frac{2}{3}$

*Задание №23* подразумевает работу с *функциями*. Практически во всех тестах было необходимо определить значение параметра, при котором *выполняется то или иное условие: 1) прямая $y = kx$ (или прямая $y = c$) имеет с графиком данной функции одну общую точку, не имеет общих точек, имеет две/три общих точки; 2) при каких значениях $m$ ветви парабол расположены по одну сторону от оси x, по разные стороны от оси x.*

**Задание 2.** «При каком значении $p$ прямая $y = 2x + p$ имеет с параболой $y = x^2 - 2x$ ровно одну общую точку? Найдите координаты этой точки» [45].

**Решение:** $2x + p = x^2 - 2x$; $x^2 - 4x - p = 0$; $D = b^2 - 4ac = 16 + 4p$.

Если $D = 0$, то данное уравнение имеет одно решение и графики функций будут иметь одну очку пересечения, значит: $16 + 4p = 0$; $p = -4$.

Подставив параметр $p$ в уравнение, мы получим координату точки пересечений этих функций: $x^2 - 4x + 4 = 0$; $(x-2)^2 = 0$; $x = 2$.

$$y(2) = 4 - 4 = 0.$$

Зная значения параметра $p$ можем построить графики данных функций: $y = 2x - 4$, $y = x^2 - 2x$. **Ответ:** $(2; 0)$.

**Задание 3.** «Постройте график функции $y = \frac{x-4 \quad x^2+3x+2}{x+1}$ и определите при каких значениях m прямая $y = m$ имеет с графиком ровно одну общую точку» [45].

**Решение:**

$y = \frac{x-4 \quad x^2+3x+2}{x+1} = \frac{x+4 \quad x+1 \quad x+2}{x+1}$.

$y = x^2 + 6x + 8$.

График функции сводиться к графику параболы $y = x^2 + 6x + 8$ с выколотой точкой (-1; 3).

Построим данный график (Рис. 3):

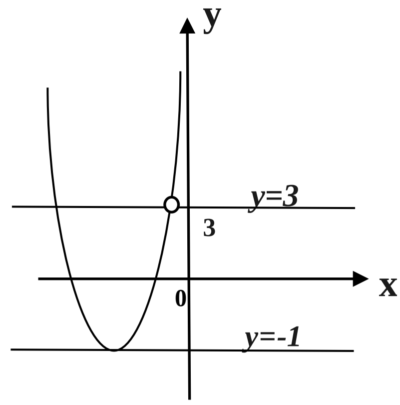

Рис. 3

**Ответ:** $m = -1$; $m = 3$.

Отметим, что в *задании №23 по способу решения можно выделить следующие типы задач:*

1. *Задания, требующие сначала построить график, а затем найти значения параметра.*

**Задание 4.** «Постройте график функции $y = \frac{x-1 \quad x^2-5x+6}{x-3}$ и определите при каких значениях m прямая $y = m$ имеет с графиком ровно одну общую точку» [20].

**Решение.** $y = \frac{x-1 \quad x^2-5x+6}{x-3} =$

$= \frac{x-1 \quad x-2 \quad x-3}{x-3} = \ x-1 \quad x-2 \ =$

$= \ x^2 - 3x + 2$.

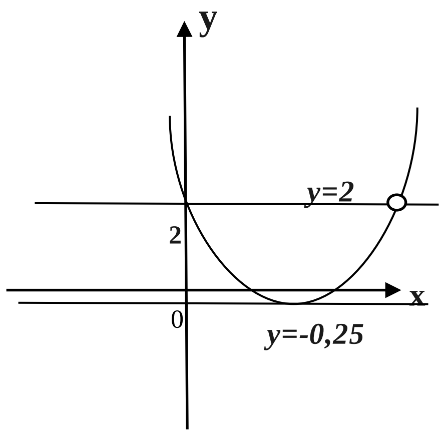

Рис. 4

График функции сводиться к графику параболы $y = x^2 + 6x + 8$ с выколотой точкой (3; 2). Построим данный график (Рис. 4): $y = \ x^2 - 3x + 2$.

**Ответ:** - *0,25; 2.*

*2. Задания, требующие найти значения параметра и затем построить график функции.*

**Задание 5.** «При каких отрицательных значениях $k$ прямая $y = kx - -4$ имеет с параболой $y = x^2 + 2x$ одну общую точку? Найдите координаты этой точки и постройте данные графики в одной системе координат» [20].

**Ответ:** При $k = -2$; Парабола пересекает прямую в точке $(-2;\ 0)$.

Проанализировав методические рекомендации по обучению учащихся решению уравнений с параметрами и рассмотрев соответствующие задачи в основном государственном экзамене по математике можно сделать вывод, что учителю надо уделять внимание на выработку у них таких умений, как: *1) выполнение преобразований алгебраических выражений:* сокращение дробей, нахождение области допустимых значений переменных, приведение подобных, разложение многочленов на множители; 2) *решение уравнений, неравенств и системы, содержащих* линейные и квадратные уравнения (неравенства); 3) *построение и чтение графиков функций:* линейной, квадратичной, обратно-пропорциональной, кусочной функции; 4) *исследование математические модели* уравнения для отыскания количества корней, выстраивание алгоритма для решения задач с параметром.

Таким образом, *в первой части* основного государственного экзамена задачи по теме исследования встречаются крайне редко. *Во второй части* основного государственного экзамена встречаются квадратные уравнения с параметром; задания, требующие построить график и затем найти значения параметра; задания, требующие найти значения параметра и затем построить график функции. Кроме того, в основном государственном экзамене по математике представлены не все типы задач по теме *«Уравнения с параметрами»*, которые были выделены нами ранее.

## § 7. Системы задач по теме «Уравнения с параметрами» в курсе алгебры основной школы

Задачи с параметрами образуют широкое множество задач, которые достаточно сложно систематизировать, так как существует много критериев по которым это возможно сделать.

Л.В. Виноградова в учебном пособии [6] выделяет такие принципы *отбора и составления систем задач, как: «Принцип системности:* наличие таких заданий, которые будут направлены на изучение отдельных фактов изолированно от ранее изученного материала, но связывающие новые сведения с изученными ранее. *Принцип последовательности:* расположение заданий от простого к сложному. *Принцип прочности:* однотипность упражнений в системе задач».

В.В. Мирошин в пособии [30, С. 58] предлагает следующую *классификацию задач с параметром*: «*По постановке задания*: задачи, начинающиеся с условия «решить» и задачи, начинающие с условия «найти»; *по теме*: линейное уравнение и линейная функция, квадратное уравнение и квадратичная функция, системы уравнений, дробно-рациональные уравнения, иррациональные уравнения; *по методу решения; по сложности*: «элементарные», «базовые», «нестандартные».

Автор в данной работе сформулировал некоторые принципы, которые необходимо учитывать при разработке системы заданий с параметрами: *принцип наследственности:* задачи с параметром должны быть связаны с основным материалом программы по математике; *принцип «от простого – к сложному»; принцип активизации учебной деятельности; принцип естественности:* отсутствие акцентов на сложности задачи; *принцип актуальности (значимости)*. Необходимо показать учащимся, что задачи с параметрами являются простейшими моделями научно-исследовательских задач, с которыми им возможно придется работать в будущем.

Для разработки системы задач мы придерживались принципов Л.В. Виноградовой. В данных системах задач использована следующая *классификация задач: 1. Линейное уравнение. Линейная функция. 2. Квадратное уравнение. Квадратичная функция. 3. Системы уравнений. 4. Дробно-рациональное уравнение.*

**Система задач на тему «Линейное уравнение. Линейная функция»**

**Задача 1.** «Решите уравнение, считая, что $a$, $b$ – данные числа, а $x$ – неизвестное: а) $x - a = 0$; б) $x + a = 1$; в) $x + a = 2b$» [34, С. 251].

**Задача 2.** «Решить уравнение относительно $x$ если $a$ и $b$ - заданные числа, *отличные от нуля*: 1) $ax - 3 = b$; 2) $4 + bx = a$; 3) $b = a\ (x - 3)$; 4) $4 = a - (bx - 1)$» [16, С. 51].

**Задача 3.** «Решите уравнения относительно *x: а)* $ax - 7 = 2x + 10$; *б)* $ax - a = x - 1$; *в)* $mx + 1 = x + m$; *г)* $2x - 4a = ax - 1$» [30, С. 119].

**Задача 4.** «Найти значение параметра $a$ в уравнении $ax + 5y - 40 = 0$, если известно, что решением уравнения является пара чисел: а) $3; 2$ ; б) $9; -1$ ; в) $\frac{1}{3}; 0$ ; г) $-2; 2{,}4$ » [37, С. 43].

**Задача 5.** «Найти значение $k$, если известно, что график функции $y = kx + 2$ проходит через точку $P\ (-7; -12)$» [16, С. 204].

**Задача 6.** «Найдите значение $m$, если график линейной функции $y = -5x + m$ проходит через точку: $N\ -7; 8$ ; $P\ 1{,}2; -3$ » [32, С. 56].

**Задача 7.** «В каком случае уравнение $ax = b$ имеет единственный корень; имеет бесконечно много корней; не имеет корней?» [23, С. 35].

**Задача 8.** «При каких значениях $a$ уравнение $ax = 2a - 1$: а) не имеет корней; б) имеет один корень; в) имеет бесконечно много корней» [21, С. 124].

**Задача 9.** «Найдите натуральные значения $a$, при которых является натуральным числом корень уравнения *3x(a – 1)– 2a(x + 4) = 4(1 – 2a)*» [21, С. 113].

**Задача 10.** «При каком значении *m* точка *P(m; 1 – m)* графику уравнения: *а)* $x^2 - y^2 = 14$; *б)* $x^2 + y^2 = 1$?» [21, С. 271].

Отметим, что в данной системе задач были представлены типы задач, на решение линейного уравнения с параметром *относительно переменной в №1-3,10; на нахождение значения параметра* при известном корне линейного уравнения с параметром в №4-6; на *нахождение значения параметра*, при котором линейное уравнение не имеет корней, имеет один корень и имеет бесконечно много корней в №7-8.

**Система задач на тему «Квадратное уравнение. Квадратичная функция»**

**Задача 1.** «При каких значениях $p$ уравнение $x^2 + px + +24 = 0$ имеет корень, равный *6?»* [39, С. 153].

**Задача 2.** «При каких значениях $p$ уравнение $x^2 - px + 9 = 0$ имеет один корень уравнение?» [15].

**Задача 3.** «При каких значениях $a$ уравнение $(a-2)x^2 + 15x + a^2 - -4 = 0$ является неполным квадратным уравнением» [24, С. 121].

**Задача 4.** «Подберите какое-нибудь значение $c$, при котором уравнение $x^2 - 3x + c = 0$ имеет корни, и при котором не имеет корней» [12, С. 131].

**Задача 5.** «Известно, что $x_1 = 3$ - корень уравнения $2x^2 + 16x + a = 0$. Определите второй корень уравнения и число *а»* [43, С. 91].

**Задача 6.** «При каких значениях $q$ уравнение $x^2 - 2\sqrt{2}x + +q + 1 = 0$ имеет различные корни?» [22, С. 186].

**Задача 7.** «В уравнении $x^2 + px - 35 = 0$ один из корней равен *7*. Найдите другой корень и коэффициент *p»* [24, С. 137].

**Задача 8.** «Найдите все значения $a$, при которых уравнение $ax^2 - (a+1)x = 0$ имеет единственный корень» [43, С. 80].

**Задача 9.** **«**При всех значениях параметра а решить уравнение $x^2 + 5ax = 14a^2$» [48, С. 187].

**Задача 10.** «При каких значениях параметра $a$ уравнение $(a-2)x^2 + + (4-2a)x + 3 = 0$ имеет единственное решение?» [9].

В данной системе задач были представлены типы задач, как на *нахождение значения параметра* квадратного уравнения при известном значении переменных в №1, 5, 7; *нахождение значения параметра*, при котором квадратное уравнение с параметром один корень, два корня, не имеет корней в №2, 4, 6, 8, 10; *нахождение значения параметра*, при котором заданное квадратное уравнение с параметром является неполным квадратным уравнением в №3.

**Система задач на тему «Системы уравнений»**

**Задача 1.** «При каких $a$ и $b$ пара чисел *(1; 0)* является решением системы: $\begin{matrix} 2x + y = a \\ bx - y = 2? \end{matrix}$» [42, С. 189].

**Задача 2.** «Укажите какое-либо значение $k$, при котором система $\begin{matrix} 2x + y = 7, \\ y - kx = 3 \end{matrix}$ имеет единственное решение» [23, С. 229].

**Задача 3.** «Определить, при каких значениях параметра $a$ уравнения $x + +ay = 1$ и $ax + y = 2a$ имеют хотя бы одно общее решение?» [47, С. 19].

**Задача 4.** «При всех значениях параметра а решить систему уравнений $\begin{matrix} x + ay = 1; \\ ax + y = a^3. \end{matrix}$» [28].

Отметим, что в данной системе задач были представлены типы задач, как на *нахождение значений параметров при известных значениях переменных в системе линейных уравнений в №1; нахождение значения параметра, при котором система линейных уравнений не имеет корней, имеет один корень или имеет бесконечно много корней в №2-3.*

**Система задач на тему «Дробно-рациональное уравнение»**

**Задача 1.** «При всех значениях параметра $a$ решить уравнение $x - 1 = = \frac{6ax+4a-5a^2}{x+1}$» [48, С. 189].

**Задача 2.** «Решить уравнение: $\frac{ax^2-2}{x-2} = a$» [49].

**Задача 3.** «Решите уравнение $\frac{x}{5a+x} - \frac{5a+x}{x-5a} = \frac{100x^2}{25a^2-x^2}$» [14].

**Задача 4.** «При всех значениях параметра *a* решить уравнение $\frac{x-2a \quad x+a}{a}=\frac{3x}{a}+6-3x-2a$» [48, С. 189].

**Задача 5.** «Для каждого значения параметра *a* решить уравнение: $\frac{2-a}{ax}=\frac{a+1}{x-2a}$ » [47, С. 13].

В данной системе задач был представлен тип задач на решение *рациональных уравнений с параметром*, выявленный нами среди остальных типов уравнений с параметром при анализе учебников по алгебре 9 класса.

## Выводы по второй главе

1. Представлены методические рекомендации по обучению решению уравнений с параметрами. Так, при решении уравнений с параметрами учащиеся должны владеть определением понятия *«уравнение с параметром»*. При решении какого-либо уравнения с параметром могут применяться *различные методы решения*. Знакомить учащихся с заданиями с параметрами *следует с 7 класса*. В ходе обучения решению уравнений с параметром можно выделять *пять уровней подготовки учащихся*. Полезно проводить на уроках *обучающие самостоятельные работы* по теме исследования в зависимости от уровня знаний учащихся.

2. Выделены основные типы задач в основном государственном экзамене в курсе алгебры основной школы по теме «Уравнения с параметрами». Выявлено, что *в первой части* экзамена задачи по теме исследования встречаются крайне редко; *во второй части* встречаются квадратные уравнения с параметром; задания, требующие построить график и затем найти значения параметра; задания, требующие найти значения параметра и затем построить график функции. Кроме того, в ОГЭ представлены не все типы задач по теме *«Уравнения с параметрами»*, которые были выделены нами ранее.

3. Разработаны системы задач по теме «Уравнения с параметром» в курсе алгебры основной школы, составленные с учетом требований Л.В. Виноградовой.

# ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Основные выводы и полученные результаты данного исследования:

1. Определено понятие уравнения с параметром; выделены виды алгебраических уравнений с параметром. В методической литературе отсутствует единый подход к определению понятия уравнения с параметром.

2. Выявлены основные цели обучения теме «Уравнения с параметрами» в курсе алгебры основной школы: формирование у учащихся умения проводить разветвленные логические построения, аккуратность и внимательность при описании решения уравнения с параметром; знаний, умений и навыков использования понятийного аппарата, связанного с решением уравнений с параметрами, в математике и других науках; навыков использования уравнений с параметрами в повседневной жизни; графической культуры.

3. Рассмотрено содержание теоретического материала по данной теме в учебниках алгебры основной школы.

4. Проанализирован задачный материал по теме исследования в учебниках алгебры 7-9 классов. Определены основные *типы задач*.

5. Представлены методические рекомендации по обучению решению уравнений с параметрами, рассмотрен порядок обучения теме.

6. Выделены основные типы задач в основном государственном экзамене по теме «Уравнения с параметрами».

7. Разработаны системы задач по теме «Уравнения с параметром» в курсе алгебры основной школы, удовлетворяющие требованиям Л.В. Виноградовой.

# СПИСОК ИСПОЛЬЗУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ананьина, Т.А. Организация проектной деятельности школьников при работе с параметрами в классах с углубленным изучением математики [Электронный ресурс]/ Ананьина Т.А. // Актуальные вопросы преподавания математики, информатики и информационных технологий. – 2015. - №1. – С. 52-57. – Режим доступа: https://elibrary.ru/item.asp?id=28776167. – Последнее обновление 07.05.2018.

2. Арюткина, С.В. О формировании обобщенных приемов математической деятельности учащихся средней школы (на примере решения квадратных уравнений с параметром) // Математический вестник педвузов и университетов Волго-Вятского региона. - 2009. - № 11. - С. 264-273.

3. Башмаков, М.И. Давайте учить математике/ М.И. Башмаков// Математика: Приложение к газете «Первое сентября». – 2010. - №6. - С. 2-5, 48.

4. Белямова, Э.С. Методические особенности изучения темы «Задачи с параметрами». Основные понятия. [Электронный ресурс]. – Режим доступа: http://открытыйурок.рф/статьи/588088/– Последнее обновление 27.01.2018 г.

5. Бурмистрова, Т.А. Алгебра. Сборник рабочих программ. 7 – 9 классы [Текст]: пособие для учителей общеобразовательных организация/ Т.А. Бурмистрова. – 2-е изд., доп. – М.: Просвещение, 2014. – 96 с.

6. Виноградова, Л.В. Методика преподавания математики в средней школе [Текст]: учеб. пособие / Л.В. Виноградова. – Ростов н/Д.: Феникс, 2005. – 252 с.

7. Власова, А.П. Задачи с параметрами на ЕГЭ [Электронный ресурс]/ А.П. Власова, Н.В. Евсеева //Научный альманах. – 2016. - № 6-1 (19) – С. 223-228. Режим доступа: https://elibrary.ru/item.asp?id=26476361. – Последнее обновление 02.02.2018 г.

8. Горбачев, В.И. Методы решения уравнений и неравенств с параметрами: пособие для учителя [Электронный ресурс]. – Брянск: Изд-во

БГПУ, 1999. - 116 с. Режим доступа: https://elibrary.ru/item.asp?id=25657852. – Последнее обновление 27.01.2018 г.

9. Гунашева, М.Г. Обучение учащихся решению уравнений и неравенств с параметрами при подготовке к ЕГЭ [Электронный ресурс]/М.Г. Гунашева//Известия Дагестанского государственного педагогического университета. Психолого-педагогические науки. – 2011. – № 1. – С. 86-91. Режим доступа: https://elibrary.ru/item.asp?id=16355116. Последнее обновление 03.02.2018 г.

10. Гунашева, М.Г. Уравнения и неравенства с параметрами, предлагавшиеся в различные годы в заданиях ЕГЭ [Электронный ресурс]/М.Г. Гунашева// Сибирский педагогический журнал. – 2010. - № 11. – С. 199-203.

11. Дорофеев, Г.В. Алгебра. 7 класс: учеб. для общеобразоват. организаций / [Г. В. Дорофеев, С. Б. Суворова, Е. А. Бунимович и др.] – 2-е изд. – М.: Просвещение, 2014. – 287 с.: ил.

12. Дорофеев, Г.В. Алгебра. 8 класс: учеб. для общеобразоват. организаций / [Г. В. Дорофеев, С. Б. Суворова, Е. А. Бунимович и др.] – 3-е изд. – М.: Просвещение, 2016. – 320 с.: ил.

13. Дорофеев, Г.В. Алгебра. 9 класс: учеб. для общеобразоват. организаций / [Г.В. Дорофеев, С.Б. Суворова, Е.А. Бунимович и др.] – 5-е изд. – М.: Просвещение, 2010. – 304 с.: ил. – (Академический школьный учебник)

14. Евсеева, А.И. Уравнения с параметрами/ А.И. Евсеева// Математика в школе. — 2003. № 7. С. 10—17.

15. Звавич, Л.И. Алгебра (углубленное изучение). 9 класс : задачник для учащихся общеобразоват. учреждений / Л.И. Звавич, А.Р. Рязановский, П.В. Семенов. – 3-е изд., перераб. – М.: Мнемозина, 2008. – 336 с.: ил.

16. Колягин, Ю.М. Алгебра. 7 класс: учеб. для общеобразоват. учреждений / [Ю. М. Колягин, М. В. Ткачева, Н. Е. Федорова, М. И. Шабунин]. – М.: Просвещение, 2012. – 319 с.: ил.

17. Колягин, Ю.М. Алгебра. 8 класс: учеб. для общеобразоват. организаций / [Ю.М. Колягин, М.В. Ткачева, Н.Е. Федорова, М.И. Шабунин]. – М.: Просвещение, 2013. – 336 с.: ил.

18. Колягин, Ю.М. Алгебра. 9 класс: учеб. для общеобразоват. организаций / [Ю.М. Колягин, М.В. Ткачева, Н.Е. Федорова, М.И. Шабунин]. – М.: Просвещение, 2014. – 304 с.: ил.

19. Коннова, Е.Г. Математика. 9 класс. Подготовка к ГИА. Задания с параметром. – Ростов-на-Дону, Легион, 2014. – 64 с.

20. Коннова, Е.Г. Математика. 9-й класс. Подготовка к ОГЭ-2018. 40 тренировочных вариантов по демоверсии 2018 года: учебно-методическое пособие / [Е.Г. Коннова, В.М. Кривенко, Г.Л. Нужа, Л.С. Ольховская, Н.М. Резникова, Е.М. Фридман, Д.И. Ханин]; под ред. Ф.Ф. Лысенко, С.О. Иванова. – Ростов-на-Дону: Легион, 2017. – 368 с. - (ОГЭ).

21. Макарычев, Ю.Н. Алгебра (углубленное изучение). 7 класс: учеб. для общеобразоват. учреждений / Ю.Н. Макарычев, Н.Г. Миндюк, К.И. Нешков, И.Е. Феоктистов. – 13-е изд., стер. – М.: Мнемозина, 2013. – 336 с.: ил.

22. Макарычев, Ю.Н. Алгебра (углубленное изучение). 8 класс: учеб. для общеобразоват. учреждений / Ю.Н. Макарычев, Н.Г. Миндюк, К.И. Нешков, И.Е. Феоктистов. – 10-е изд., испр. – М.: Мнемозина, 2010. – 384 с.: ил.

23. Макарычев, Ю.Н. Алгебра. 7 класс: учеб. для общеобразоват. учреждений / [Ю.Н. Макарычев, Н.Г. Миндюк, К.И. Нешков, С.Б. Суворова]; под ред. С.А. Теляковского. – М.: Просвещение. 2013. – 256 с.: ил.

24. Макарычев, Ю.Н. Алгебра. 8 класс: учеб. для общеобразоват. организаций с прил. на электрон. носителе / [Ю.Н. Макарычев, Н.Г. Миндюк, К.И. Нешков, С.Б. Суворова]; под ред. С.А. Теляковского. – М.: Просвещение. 2013. – 287 с.: ил.

25. Макарычев, Ю.Н. Алгебра. 9 класс: учеб. для общеобразоват. организаций / [Ю.Н. Макарычев, Н.Г. Миндюк, К.И. Нешков, С.Б. Суворова]; под ред. С.А. Теляковского. – 21-е изд. – М.: Просвещение. 2014. – 271 с.: ил.

26. Макарычев, Ю.Н. Алгебра (углубленное изучение). 9 класс: учеб. для учащихся общеобразоват. учреждений / Ю.Н. Феоктистов. – 7-е изд., испр. и доп. – М.: Мнемозина, 2008. – 447 с. : ил.

27. Макарычев, Ю.Н. Алгебра: Доп. главы к шк. и классов с углубл. изуч. математики/Под ред. Г.В. Дорофеева. – 2-е изд. – М.: Просвещение, 1998. – 207 с.: ил.

28. Масалытина, Н.Н. Решение задач с параметрами в курсе алгебры. 7-9 классы [Электронный ресурс]/ Масалытина Н.Н. // Фестиваль педагогических идей «Открытый урок» – Режим доступа: http://открытыйурок.рф/статьи/595913/. – Последнее обновление 11.05.2018.

29. Методика изучения математики в основной школе. Курс лекций для организации самостоятельной работы студентов по вопросам частных методик. - Пермь, ПГПУ. - 2011 г. – С. 94. [Электронный ресурс]. – Режим доступа:http://pspu.ru/upload/pages/7830/Uchebnoje_posobije_CHM_%28pravka_27.10.11%29__dla_RIO.pdf. – Последнее обновление 15.11.2017.

30. Мирошин, В.В. Решение задач с параметрами. Теория и практика / В.В. Мирошин. – М.: Издательство «Экзамен», 2009. – 286, [2] с.

31. Мордкович, А.Г. Алгебра (углубленное изучение). 7 класс. В 2 ч. Ч. 1. Учебник для учащихся общеобразовательных учреждений / А.Г. Мордкович, Н.П. Николаев. – М.: Мнемозина, 2009. – 191 с.: ил.

32. Мордкович, А.Г. Алгебра (углубленное изучение). 7 класс. В 2 ч. Ч. 2. Задачник для учащихся общеобразовательных учреждений / А.Г. Мордкович, Н. П. Николаев. – М.: Мнемозина, 2009. – 207 с.: ил.

33. Мордкович, А.Г. Алгебра (углубленное изучение). 8 класс. В 2 ч. Ч. 1. Учебник для учащихся общеобразовательных учреждений / А.Г. Мордкович, Н.П. Николаев. – 10-е изд., доп. – М.: Мнемозина, 2013. – 256 с.: ил.

34. Мордкович, А.Г. Алгебра (углубленное изучение). 8 класс. В 2 ч. Ч. 2. Задачник для учащихся общеобразовательных учреждений / [А.Г.

Мордкович и др.]; под ред.  А.Г. Мордковича. – 11-е изд., испр. и доп. – М.: Мнемозина, 2013. – 344 с.: ил.

35. Мордкович, А.Г. Алгебра (углубленное изучение). 9 кл.: учеб. для учащихся общеобразоват. учреждений / А.Г. Мордкович, Н.П. Николаев. - 3-е изд., перераб. – М.: Мнемозина, 2008. – 255 с.: ил.

36. Мордкович, А.Г. Алгебра. 7 класс. В 2 ч. Ч. 1. Учебник для учащихся общеобразовательных учреждений / А.Г. Мордкович. – 17-е изд., доп. – М.: Мнемозина, 2013. – 175 с.: ил.

37. Мордкович, А.Г. Алгебра. 7 класс. В 2 ч. Ч. 2. Задачник для учащихся общеобразовательных учреждений / [А.Г. Мордкович и др.] под ред. А.Г.  Мордковича. – 17-е изд., стер. – М.: Мнемозина, 2013. – 271 с.: ил.

38. Мордкович, А.Г. Алгебра. 8 класс. В 2 ч. Ч. 1. Учебник для учащихся общеобразовательных учреждений / А.Г. Мордкович.  – 12-е изд., стер. – М.: Мнемозина, 2010. – 215 с.: ил.

39. Мордкович, А.Г. Алгебра. 8 класс. В 2 ч. Ч. 2. Задачник для учащихся общеобразовательных учреждений / [А.Г. Мордкович и др.]; под ред. А.Г. Мордковича.– 12-е изд., стер. – М.: Мнемозина, 2010. – 271 с.: ил.

40. Мордкович, А.Г. Алгебра. 9 класс. В 2 ч. Ч. 1. Учебник для учащихся общеобразовательных учреждений / А.Г. Мордкович, П.В. Семенов – 12-е изд., стер. – М.: Мнемозина, 2010. – 224 с.: ил.

41. Мордкович, А.Г. Алгебра. 9 класс. В 2 ч. Ч. 2. Задачник для учащихся общеобразовательных учреждений / [А.Г. Мордкович, Л.А. Александрова, Т.Н. Мишустина и др.]; под ред. А.Г. Мордковича. – 12-е изд., испр. – М.: Мнемозина, 2010. – 223 с.: ил.

42. Никольский, С.М. Алгебра. 7 класс.: учеб. для общеобразоват. организаций / [С.М. Никольский, М.К. Потапов, Н.Н. Решетников, А.В. Шевкин]. – М.: Просвещение, 2013. – 287 с.: ил – (МГУ – школе).

43. Никольский, С.М. Алгебра. 8 класс.: учеб. для общеобразоват. организаций / [С.М. Никольский, М.К. Потапов, Н.Н. Решетников, А.В. Шевкин]. – М.: Просвещение, 2014. – 301 с.: ил – (МГУ – школе).

44. Никольский, С.М. Алгебра. 9 класс.: учеб. для общеобразоват. организаций / [С.М. Никольский, М.К. Потапов, Н.Н. Решетников, А.В. Шевкин]. – М.: Просвещение, 2014. – 335 с.: ил – (МГУ – школе).

45. Образовательный портал для подготовки к экзаменам «Решу ОГЭ». [Электронный ресурс]. – Режим доступа: https://math-oge.sdamgia.ru/. – Последнее обновление 12.04.2018.

46. Примерные программы основного общего образования по учебным предметам. Математика (Одобрено Федеральным учебно-методическим объединением по общему образованию. Протокол заседания от 8 апреля 2015 г. № 1/15)

47. Прокофьев, А.А. Задачи с параметрами. – М.: МИЭТ, 2004. –258 с.

48. Романова, Т.Е. Использование приемов нахождения контрольных значений параметров при построении ориентировочной основы решения квадратных уравнений с параметром [Электронный ресурс]/ Романова Т.Е., Романов П.Ю. // Современные наукоемкие технологии. – 2016. - №12-1. – С. 186-191. – Режим доступа: https://elibrary.ru/item.asp?id=27706679. – Последнее обновление 07.05.2018.

49. Русинова, А.В. Решение дробно-рациональных уравнений с параметром [Электронный ресурс]/ Русинова А.В. // Некоторые вопросы анализа, алгебры, геометрии и математического образования. – 2016. - №4. – С. 165-167. – Режим доступа: https://elibrary.ru/item.asp?id=29431588. – Последнее обновление 07.05.2018.

50. Севрюков, П.Ф. Школа решения задач с параметрами: учебно-методическое пособие / П.Ф. Севрюков, А.Н. Смоляков. – Изд. 2-е, испр. и доп. – М.: Илекса; Народное образование; Ставрополь: Сервисшкола, 2009. – 212 с.

51. Фалилеева, М.В. Методические аспекты обучения решению уравнения и неравенств с параметрами [Электронный ресурс]/ Фалилеева М.В. // Фундаментальные исследования. – 2013. - №4-5. – С. 1230-1235. – Режим доступа: https://elibrary.ru/item.asp?id=18894972. – Последнее обновление 07.05.2018.

52. Федеральный государственный образовательный стандарт основного общего образования: Приказ Мин. образования и науки РФ от 17.12.2010 г. №1897. [Электронный ресурс]. – Режим доступа: http://минобрнауки.рф/документы/938. – Последнее обновление 07.02.2017.

53. Шестаков, С.А. ЕГЭ 2016. Математика. Задачи с параметром. Задача 18 (профильный уровень)/ Под ред. И.В. Ященко. Электронное издание. - М.:МЦНМО, 2016. – 240 с.

54. Юрченко, Е.В., Юрченко Е.В. Уравнения с параметром и нестандартные задачи. 7-9 класс. Живая методика математики – 2. – М.: МЦНМО, 2017. –84 с. [Электронный ресурс]. – Режим доступа: http://маткнига.рф/wp-content/uploads/2017/05/978-5-4439-3134-0-YUrchenko-Uravneniya-s-parametrom-i-nestandartnye-zadachi.pdf . – Последнее обновление 25.01.2018.

55. Abdolhossini, A. The effects of cognitive and meta-cognitive methods of teaching in mathematics/ A. Abdolhossinu// 4th World Conference on educational sciences, added 02.05.2012. – vol. 46. – 5894-5899 p. – Режим доступа: https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1877042812022719. – Последнее обновление 01.02. 2018.

56. Andreescu, T., Gelca R. Mathematical Olympiad Challenges. Birkhauser, 2000. – 280 p.

57. Krathwohl, D.R., Bloom, B.S., & Masia, B.B. Taxonomy of educational objectives, the classification of educational goals/ handbook II: Affective domain. - New York, David McKay Co., 1964.

58. Musgrave, S. Understanding and advancing graduate teaching assistants mathematical knowledge for teaching/ S. Musgrave, S. Marilyn P. Carlson// The

Journal of Mathematical Behavior, added march 2017 – vol. 45. – 137-149 p. [Электронный ресурс]. – Режим доступа: https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0732312316302012. – Последнее обновление 17.01.2018.

59. Negut, A. Problens for the Mathematical Olympiads. GIL Publishing House, 2005. – 158 p.

**Приложение 1**

## *Типы задач по теме «Уравнения с параметрами», 7 класс*

| Авторы / Типы задач | Базовый уровень | | | | | Углубленное изучение материала | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | Мордкович А.Г. [37] | Колягин Ю.М. [16] | Дорофеев Г.В. [11] | Никольский С.М. [42] | Макарычев Ю.Н. [23] | Макарычев Ю.Н. [21] | Мордкович А.Г. [32] |
| Решение линейного уравнения с параметром относительно переменной (неизвестной). | № 7.22-7.24, 12.5-12.7 | № 99, 125, 626 | № 379-380, 912 | № 641, 979-983, 986 | № 1030-1032 | № 514, 539, 568, 627, 1191-1193, 1195, 1214 | № 8.17-8.19, 37.10-37.12 |
| Нахождение значения параметра при известном корне линейного уравнения с параметром. | № 7.26-7.29, 8.58-8.59 | № 79, 594-595, 598, 604, 801 | – | № 681 | № 239, 1035, 1140, 1152 | № 523, 538, 1070-1071, 1093-1094, 1197, 1205, 1323, 1331 | № 4.19, 8.21-8.24, 8.34, 9.47-9.48, 29.20-29.21, 37.14 |
| Нахождение значения параметра, при котором линейное уравнение не имеет корней, имеет один корень и имеет бесконечно много корней. | № 38.16 | № 80, 123-125 | – | – | № 238 | № 525-526, 621-623, 628-629, 630-633 | № 4.20-4.21 |
| Нахождение значения параметра, при котором система линейных уравнений не имеет корней, имеет один корень или имеет бесконечно много корней. | – | № 676 | – | № 727-731 | № 1165-1167 | № 1341-1342 | № 10.26 |
| Нахождение значений параметров при известных значениях переменных в системе линейных уравнений. | № 11.20-11.21, 13.17-13.18 | № 622-623 | – | № 693 | – | № 1337 | № 37.23-37.24, 39.17-39.18 |
| Нахождение значения параметра при определении равносильности линейных уравнений с параметром и их систем. | – | – | – | № 715 | – | № 513, 524, 545 | – |
| Нахождение значения параметра при условии принадлежности корней линейного уравнения с параметром какому-либо числовому множеству. | – | – | – | – | № 245, 1184 | № 546, 552 | – |

**Приложение 2**

## *Типы задач по теме «Уравнения с параметрами», 8 класс*

| Авторы / Типы задач | Базовый уровень | | | | | Углубленное изучение материала | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | Мордкович А.Г. [39] | Колягин Ю. М. [17] | Дорофеев Г.В. [12] | Никольский С.М. [43] | Макарычев Ю.Н. [24] | Макарычев Ю.Н. [22] | Мордкович А.Г. [34] | Макарычев Ю.Н. (доп. гл.) [27] |
| Решение линейного уравнения с параметром относительно переменной (неизвестной). | – | – | № 696 | № 595 | № 641-644 | – | №3 9.3, 39.5, 39.34 | № 580-581, 586-588 |
| Нахождение значения параметра при известном корне линейного уравнения с параметром. | – | – | № 704-706 | № 376 | – | – | № 39.1-39.2, 39.12-39.20 | – |
| Нахождение значения параметра, при котором линейное уравнение не имеет корней, имеет один корень и имеет бесконечно много корней | – | – | – | – | № 640, 645 | – | – | № 570-574, 589-591 |
| Нахождение значения параметра, при котором система линейных уравнений не имеет корней, имеет один корень или имеет бесконечно много корней. | – | – | – | № 581-582 | – | – | – | – |
| Нахождение значений параметров при известных значениях переменных в системе линейных уравнений. | – | – | – | – | – | № 682 | № 39.10-39.11 | – |
| Нахождение значения параметра при определении равносильности линейных уравнений с параметром и их систем. | – | – | № 525, 526 | – | – | № 658, 726 | № 39.25 | № 575-577 |

## Приложение 3

| Авторы / Типы задач | Базовый уровень | | | | | Углубленное изучение материала | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | Морд-кович А.Г. [39] | Колягин Ю.М. [17] | Дорофе-ев Г.В. [12] | Николь-ский С.М. [43] | Макары-чев Ю.Н. [24] | Макары-чев Ю.Н. [22] | Мордко-вич А.Г. [34] | Мака-рычев Ю.Н. (доп. гл.) [27] |
| Решение квадратного уравнения с параметром относительно переменной. | № 25.46, 28.21-28.23 | – | № 507 | № 235, 251 | № 647-648, 651, 1124 | № 630, 635, 636, 662, 663, 815 | № 25.44-25.46, 39.6, 39.27 | – |
| Нахождение значения параметра, при котором квадратное уравнение с параметром один корень, два корня, не имеет корней. | № 23.15-23.19, 25.20-25.21, 25.39, 25.47, 29.12 | № 442, 443, 448, 449, | № 443 | № 233, 236, 248, 306 | № 555 | № 657, 840, 846 | № 25.22-25.26, 26.20, 26.23, 26.40-26.45, 39.8 | № 579 |
| Решение квадратного уравнения с параметром на применение теоремы Виета. | № 29.13-29.14, 29.41-29.46 | № 570 | – | – | № 589-592, 638, 646, 675-680 | – | – | – |
| Нахождение значения параметра, при котором заданное квадратное уравнение с параметром является неполным квадратным уравнением. | № 24.31-24.32 | – | – | – | № 520 | № 624 | № 24.33, 24.34 | – |
| Решение рациональных уравнений с параметром. | – | – | – | – | – | – | № 5.34-5.43, 13.48, 39.26, 39.28 | № 593-596 |
| Нахождение значения параметра квадратного уравнения при известном значении переменных. | № 22.48-22.53, 24.33-24.34 | № 566, 568, 583 | № 523, 524 | № 273, 536 | № 585-588, 649, 672 | № 712-714, 836 | № 24.35, 24.36 | – |

### *Типы задач по теме «Уравнения с параметрами», 9 класс*

| Авторы / Типы задач | Базовый уровень | | | | | Углубленное изучение материала | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | Мордкович А.Г. [41] | Колягин Ю.М. [18] | Дорофеев Г. В. [13] | Никольский С.М. [44] | Макарычев Ю.Н. [25] | Макарычев Ю.Н. [26] | Мордкович А.Г. [17] |
| Решение линейного уравнения с параметром относительно переменной (неизвестной). | – | – | № 499 | – | – | № 331, 332, 411 | – |
| Нахождение значения параметра при известном корне линейного уравнения с параметром. | № 135-143 (Ит. Повт.), | – | – | – | – | – | – |
| Нахождение значения параметра, при котором линейное уравнение не имеет корней, имеет один корень и имеет бесконечно много корней | – | – | – | – | – | № 583 | № 11.04-11.07, 11.09-11.10, 11.35-11.36, 12.15 |
| Нахождение значения параметра, при котором система линейных уравнений не имеет корней, имеет один корень или имеет бесконечно много корней. | – | – | – | – | № 425 | – | – |
| Нахождение значений параметров при известных значениях переменных в системе линейных уравнений. | – | – | – | – | – | – | № 10.29 |

| Авторы / Типы задач | Базовый уровень | | | | | Углубленное изучение материала | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | Мордкович А.Г. [41] | Колягин Ю.М. [18] | Дорофеев Г.В. [13] | Никольский С.М. [44] | Макарычев Ю.Н. [25] | Макарычев Ю.Н. [26] | Мордкович А.Г. [15] |
| Решение квадратного уравнения с параметром относительно переменной. | – | № 595-596 | – | – | № 225 | № 340, 341, 342, 343, 344, 350 | – |
| Нахождение значения параметра, при котором квадратное уравнение (или система квадратных уравнений) с параметром один корень, два корня, не имеет корней. | № 5.37, 5.38 | – | № 500-502, 504-505 | Зад. на иссл.: 1-2 | № 526, 933, 934, 961 | № 336, 337, 338, 351, 405, 406 | – |
| Решение рациональных уравнений с параметром. | – | – | – | – | – | № 359-361, 367, 368, 414, 415, 1464, 1465 | – |
| Нахождение значения параметра квадратного уравнения (или системы квадратных уравнений) при известном значении переменных | № 5.36, 162-169 (Ит. Повт.) | – | – | – | № 239, 240, 247, 521, 959, 964, 965 | № 215 | – |
| Решение иррациональных уравнений ( и их систем) с параметром. | – | – | – | № 378 | – | – | № 13.27-13.29, 13.42, 13.43 |
| Решение уравнений с параметрами, содержащих модуль. | – | – | – | – | – | № 407-408 | №13 .34-13.37, 13.41 |

**Приложение 4**

## Ответы и указания к решению систем уравнений

***Система задач на тему «Линейное уравнение. Линейная функция»***

**Задача 1. Решение:** а) $x - a = 0$; $x = a$; б) $x + a = 1$; $x = 1 - a$; в) $x + a = 2b$; $x = 2b - a$. **Ответ:** а) $x = a$; б) $1 - a$; в) $2b - a$.

**Задача 2. Решение:** $ax - 3 = b$; $ax = 3 + b$; $x = \frac{3+b}{a}$;

1) $4 + bx = a$; $bx = a - 4$; $x = \frac{a-4}{b}$;

2) $b = a\ x - 3$ ; $b = ax - 3a$; $ax - 3a = b$; $ax = 3a + b$; $x = \frac{3a+b}{a}$;

3) $4 = a -\ bx - 1$ ; $a - bx + 1 = 4$; $-bx = 4 - a - 1$; $-bx = 3 - a$;

$x = \frac{a-3}{b}$. **Ответ:** 1) $x = \frac{3+b}{a}$; 2) $x = \frac{a-4}{b}$; 3) $x = \frac{3a+b}{a}$; 4) $x = \frac{a-3}{b}$.

**Задача 3. Решение.**

а) Если $a \neq 2$, то $x = \frac{17}{a-2}$, если $a = 2$, то уравнение решений не имеет.

б) Если $a \neq 1$, то $x = 1$, если $a = 1$, то $x$ – любое действительное число.

в) Если $m \neq 1$, то $x = 1$, если $m = 1$, то $x$ – любое действительное число.

г) Если $a \neq 2$, то $x = \frac{1-4a}{a-2}$, если $a = 2$, уравнение решений не имеет.

**Ответ:** а) $a \neq 2$, $x = \frac{17}{a-2}$ ; б) $a \neq 1$, $x = 1$; в) $m \neq 1$, $x = 1$; г) $a \neq 2$, $x = \frac{1-4a}{a-2}$

**Задача 4. Решение:** *а)* $3a + 10 - 40 = 0$; $3a = 30$; $a = 10$;

*б)* $9a - 5 - 40 = 0$; $9a = 45$; $a = 5$;

*в)* $\frac{1}{3}a - 40 = 0$; $\frac{1}{3}a = 40$; $a = 120$;

*г)* $-2a + 12 - 40 = 0$; $-2a = 28$; $a = -14$.

**Ответ:** а) $a = 10$; б) $a = 5$; в) $a = 120$; г) $a = -14$.

**Задача 5. Решение.** Если $P(-7; -12)$ принадлежит графику линейной функции $y = kx + 2$, получаем: $-12 = -7k + 2$, где $-7k = -14$, где $k = 2$.

**Ответ:** $k = 2$.

**Задача 6. Решение.** Если $N(-7; 8)$ принадлежит графику линейной функции $y = -5x + m$, то получаем: $8 = 35 + m$, где $m = -27$; если $P(1{,}2; -3)$ принадлежит графику линейной функции $y = -5x + m$, то получаем: $-3 = -6 + m$, где $m = 3$. **Ответ:** $m = -27$; $m = 3$.

**Задача 7. Решение.** Линейное уравнение $ax = b$, $x = -\frac{b}{a}$ при $a \neq 0$ имеет один корень; при $a = 0$ и $b = 0$ имеет бесконечно много корней; при $a = 0$ и $b \neq 0$ не имеет корней. **Ответ:** при $a \neq 0$ имеет один корень; при $a = 0$ и $b = 0$ имеет бесконечно много корней; при $a = 0$ и $b \neq 0$ не имеет корней.

**Задача 8. Решение:** $ax = 2a - 1$; $x = \frac{2a-1}{a}$.

а) не имеет корней, если $a = 0$;

б) имеет единственный корень, если $a \neq 0$;

в) имеет бесконечно много решений: таких значений нет.

**Ответ:** а) $a = 0$; б) $a \neq 0$; в) таких значений нет.

**Задача 9. Решение:** $3x(a-1) - 2a(x+4) = 4(1-2a)$;

$3x(a-1) - 2ax - 8a = 4(1-2a)$; $3x(a-1) - 2ax = 8a + 4(1-2a)$;

$$x(3(a-1) - 2a) = 8a + 4(1-2a);$$

$$x = \frac{8a + 4(1-2a)}{3(a-1) - 2a};\ x = \frac{8a + 4 - 8a}{3a - 3 - 2a};\ x = \frac{4}{a-3};$$

Если $a = 4$, то $x = \frac{4}{a-3} = \frac{4}{4-3} = 4$. Если $a = 5$, то $x = \frac{4}{a-3} = \frac{4}{5-3} = 2$. Если $a = 7$, то $x = \frac{4}{a-3} = \frac{4}{7-3} = 1$. Корень уравнения будет являться натуральным числом, при $a = 4; 5; 7$. **Ответ:** $4; 5; 7$.

**Задача 10. Решение.** а) Подставим $P(m; 1 - m)$ в уравнение $x^2 - y^2 = 14$. Получим: $m^2 - (1-m)^2 = 14$; $m^2 - (1 - 2m + m^2) = 14$;

$m^2 - 1 + 2m - m^2 - 14 = 0$; $2m = 15$; $m = 7{,}5$;

б) Подставим $P(m; 1 - m)$ в уравнение $x^2 + y^2 = 1$. Получим:

$m^2 + (1-m)^2 = 1$; $m^2 + 1 - 2m + m^2 - 1 = 0$;

$2m^2 - 2m = 0$; $2m(m - 1) = 0$; $m = 0$ или $m = 1$.

**Ответ:** а) $m = 7,5$;б) $m = 0$ или $m = 1$.

***Система задач на тему «Квадратное уравнение. Квадратичная функция»***

**Задача 1. Решение:** $36 + 6p + 24 = 0$; $6p = 60$; $p = 10$.

**Ответ:** при $p = 10$.

**Задача 2. Решение:** $x^2 - px + 9 = 0$; $D = (-p)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 9 = p^2 - 36$;

Уравнение имеет единственный корень, если $D = 0$, значит:

$p^2 - 36 = 0$; $p^2 = 36$; $p = \pm 6$. **Ответ:** $p = \pm 6$.

**Задача 3. Решение.** *Квадратное уравнение* является неполным, если коэффициенты $b$ или $c$ равны $0$. Значит: $a^2 - 4 = 0$; $a^2 = 4$; $a = \pm 2$

Если $a = 2$, то $(2 - 2)x^2 + 15x + 2^2 - 4 = 0$;

$15x = 0$ — не является квадратным неполным уравнением;

Если $a = -2$, то $(-2 - 2)x^2 + 15x + (-2)^2 - 4 = 0$;

$4x^2 + 15x = 0$ — является неполным квадратным уравнением.

**Ответ:** $a = -2$.

**Задача 4. Решение:** $x^2 - 3x + c = 0$; $D = (-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot c = 9 - 4c$;

Уравнение не имеет корней, если $D < 0$: $9 - 4c < 0$; $4c > 9$; $c > 2\frac{1}{4}$.

Так как при $c > 2\frac{1}{4}$ данное уравнение не имеет корней, то для того, чтобы существовали корни, мы можем взять любое значение $c$ из промежутка $(-\infty;\ 2\frac{1}{4})$, например, $c=0$, $c=2$. **Ответ:** $c \in (-\infty;\ 2\frac{1}{4})$, например, $c=0$, $c=2$.

**Задача 5. Решение.** $2x^2 + 16x + a = 0$, $x_1 = 3$;

$$18 + 48 + a = 0; a = -66.$$

$2x^2 + 16x - 66 = 0$; $x^2 + 8x - 33 = 0$; $D = 64 + 132 = 196$;

$x_1 = \frac{-8+14}{2} = 3$; $x_2 = \frac{-8-14}{2} = -11$. **Ответ:** $a = -66, x_2 = -11$.

**Задача 6. Решение:** $x^2 - 2\sqrt{2}x + q + 1 = 0$

$D = (-2\sqrt{2})^2 - 4 \cdot 1 \cdot (q + 1) = 8 - 4q - 4 = 4 - 4q$;

Уравнение имеет различные корни, при $D > 0$, значит:

$4-4q>0;\quad 4q<4;\quad q<1.$

**Ответ:** Уравнение имеет различные корни при $q<1$.

**Задача 7. Решение.** Найдем сначала параметр $p$. Для этого подставим $x_1=7$ в данное уравнение: $7^2+7p-35=0;\quad 7p=35-49;\quad 7p=-14;$ $p=-2.$ Зная значение параметра $p$ можем найти второй корень уравнения: $x^2-2x-35=0;\ \ D=4+4\cdot 35=4+140=144;\ \ x_1=\frac{2+12}{2}=7;$

$x_2=\frac{2-12}{2}=-5.$ **Ответ:** $p=-2;\ x_2=-5.$

**Задача 8. Решение:** $ax^2-(a+1)x=0;\quad x(ax-(a+1))=0;$

$$x=0 \quad \text{или} \quad ax-(a+1)=0;$$

$$ax=a+1;$$

$$x=\frac{a+1}{a}.$$

Уравнение $ax^2-(a+1)x=0$ будет иметь единственный корень $x=0$, при $a=0$ $(a\neq -1)$. **Ответ:** $a=0$.

**Задача 9. Решение:** $x^2+5ax=14a^2;\ x^2+5ax-14a^2=0;$

$D=(5a)^2+4\cdot 14a^2=25a^2+56a^2=81a^2;$

Если $D\geq 0,$ то уравнение имеет корни: $81a^2\geq 0;\ a\in R;$

$x_{1,2}=\frac{-5a\pm 9a}{2a};\ x_1=-7a;\ x_2=2a.$ При всех действительных значениях параметра $a$ уравнение имеет корни $x=-7a, x=2a$.

**Ответ:** $x=-7a, x=2a, a\in R$.

**Задача 10. Решение.** Если $a=2$, то уравнение не имеет корней; если $a\neq 2$, то данное уравнение является квадратным и решая его получаем, что дискриминант данного уравнения обращается в нуль при $a=2$ **или** $a=5$.

Ранее было установлено, что $a=2$ не подходит, значит ответ $a=5$.

**Ответ:** $a=5$.

***Система задач на тему «Системы уравнений с параметрами»***

**Задача 1. Решение:** Подставим пару чисел *(1; 0)* вместо значений *x* и *y*.

Получим: $\begin{cases} 2+0=a, \\ b-0=2, \end{cases}\qquad \begin{cases} a=2, \\ b=2. \end{cases}$ **Ответ:** $a=2;\ b=2.$

**Задача 2. Решение:** $\begin{cases} 2x+y=7, \\ y-kx=3, \end{cases}$ $\begin{cases} 2x+y=7, \\ -kx+y=3. \end{cases}$ Данная система имеет единственное решение, если: $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$; $\frac{2}{-k} \neq \frac{1}{1}$; $-k \neq 2$; $k \neq -2$.

Делаем *вывод*: данная система имеет ед. решение, если $k \neq -2$. Можно взять такие значения, как $k = 1$, $k = 2$ и т.д.

**Ответ:** $k \neq -2$. Можно взять такие значения, как $k = 1$, $k = 2$ и т.д.

**Задача 3. Решение:** $\begin{cases} x+ay=1; \\ ax+y=2a; \end{cases}$ $\begin{cases} x+ay-1=0; \\ ax+y-2a=0. \end{cases}$

Система имеет единственное решение при $\frac{1}{a} = \frac{a}{1} = \frac{1}{2a}$;

$\frac{1}{a} = \frac{a}{1}$; $a^2-1=0$ $(a \neq 0)$; $a=1$, $a=-1$. **Ответ:** $a=1$, $a=-1$.

**Задача 4. Решение:** $\begin{cases} x=1-ay; \\ a-a^2y+y=a^3; \end{cases}$ $\begin{cases} x=1-ay; \\ y(1-a^2)=a^3-a; \end{cases}$

1) Если $1-a^2 \neq 0$, т.е. $a \neq \pm 1$, то данная система равносильна $\begin{cases} y=-a; \\ x=1+a^2. \end{cases}$ 2) Если $a=1$, то система имеет вид $\begin{cases} 0=0; \\ x=1-y. \end{cases}$ 3) Если $a=-1$, то система равносильна уравнению $x=1+y$.

**Ответ:** $a \neq \pm 1$: $(1+a^2; -a)$; $a=1$: $(1-y;\ y)$; $a=-1$: $(1+y; y)$.

***Система задач на тему «Дробно-рациональное уравнение»***

**Задача 1. Решение:** Область допустимых значений: $x \neq -1$.

Если преобразовать уравнение в стандартный вид, то получим: уравнение вида: $x^2-6ax+5a^2-4a-1=0$. Затем находим корни полученного уравнения: $D=36a^2-4\cdot(5a^2-4a-1)=36a^2-20a^2+16a+4=$

$=16a^2+16a+4=4\cdot(4a^2+4a+1)=4\cdot(2a+1)^2$;

$x=\frac{6a\pm 2\sqrt{(2a+1)^2}}{2}=3a\pm\sqrt{(2a+1)^2}$; $x_1=5a+1$; $x_2=a-1$.

Полученные корни по условию не могут быть нулем, значит:

$5a+1 \neq -1$; $a \neq -0{,}4$: $x=-1{,}4$;

$a-1 \neq -1$; $a \neq 0$: $x=1$.

**Ответ:** $a \neq -0{,}4, a \neq 0$ : $x=5a+1$, $x=a-1$;

$a \neq -0{,}4$: $x=-1{,}4$; $a \neq 0$: $x=1$.

**Задача 2. Решение:** $a \in R, x \neq 2$: $ax^2 - 2 = ax - 2a$; $a\ \ a - 2\ \ x = 2 - a$.

1)Если $a = 0,$ то $\frac{-2}{x-2} = 0 \to \emptyset$. 2) Если $a = 2,$ **то** $0 \cdot x = 0, x \in R\ \ x \neq 2$ .

3) Если $a \neq 0, a \neq 2,$ **то** $x = -\frac{2}{a}$. **Ответ:** при $a = 0$ **и** $a = 2 -$ нет решения; при $a = 2, x -$любое число, неравное 2; при $a \in\ -\infty; -1\ \cup$ $-1; 0\ \cup\ 0; 1\ \cup\ 1; +\infty\ , x = -\frac{2}{a}$.

**Задача 3. Решение:** При решении учитываем допустимые значения:

$$5a + x\ \ \ x - 5a\ \ \neq 0, \text{т. е. } x \neq \pm 5a.$$

После некоторых преобразований получим: $x^2 + 5ax - x^2 - 10ax -$ $-25a^2 = -100a^2$; $-15ax = -75a^2$; $ax = 5a^2$; $x = \frac{5a^2}{a}$. 1. При $a = 0$ уравнение примет вид $0 \cdot x = 0$, решением которого будет любое число, ме $\mathrm{x} = 0$. 2. При $a \neq 0$ имеем $x = 5a$. Этот корень входит в ограничение $\mathrm{x} \neq \pm 5\mathrm{a}$.

**Ответ:** при $a = 0$ уравнение имеет бесконечно много решений – все действительные числа, кроме нуля; при $a \in (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$ решений нет.

**Задача 4. Решение:** При решении уравнения учитываем ОДЗ: $a \neq 0$.

После преобразований получим уравнение: $x^2 -\ \ 2a - 3\ \ x - 6a = 0$;

Корнями данного уравнения являются $a = 3$ **и** $a = -2a$.

**Ответ:** $a = 0$: **решений нет**; $a \neq 0$: $x = 3, x = -2a$.

**Задача 5. Решение:** Данное уравнение сводиться к линейному при $ax \neq 0, x \neq 0$ и $x \neq 2a$: $2 - a\ \ \ x - 2a\ \ = ax\ \ a + 1\ $; $a^2 + 2a - 2\ \ x =$ $2a^2 - 4a$;

При $a^2 + 2a - 2 \neq 0\ \ \ a \neq -1 \pm\ \ \ 3$ получим $x = \frac{2a^2 - 4a}{a^2 + 2a - 2}$.

Учитывая $x \neq 0$ и $x \neq 2a$ получим:

*1)* $\frac{2a^2 - 4a}{a^2 + 2a - 2} = 0$; $2a^2 - 4a = 0$; $2a(a - 2) = 0$; $a = 0, a = 2$;

2) $\frac{2a^2 - 4a}{a^2 + 2a - 2} = 2a$; $2a^2 - 4a = 2a\ \ a^2 + 2a - 2\ $; $a^2 - 2a = a\ \ a^2 + 2a - 2\ $;

$a^2 - 2a - a^3 - 2a^2 + 2a = 0$; $-a^3 - a^2 = 0$; $-a^2(a + 1) = 0$; $a = 0$, $a = -1$. **Ответ:** при $a \in \{-1; 0; 2; -1 \pm \sqrt{3}\}$: решений нет; в остальных случаях $x = \frac{2a^2 - 4a}{a^2 + 2a - 2}$.