МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«Тольяттинский государственный университет»

Институт математики, физики и информационных технологий
(наименование института полностью)

Кафедра «Высшая математика и математическое образование»
(наименование кафедры)

44.03.01 «Педагогическое образование»
(код и наименование направления подготовки, специальности)

«Математика»
(направленность (профиль)/специализация)

БАКАЛАВРСКАЯ РАБОТА

на тему **«МЕТОДИКА ОБУЧЕНИЯ РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ НА ПОСТРОЕНИЕ ТРЕУГОЛЬНИКОВ В КУРСЕ ГЕОМЕТРИИ ОСНОВНОЙ ШКОЛЫ»**

Студент	И.А. Фролова (И.О. Фамилия)	(личная подпись)
Руководитель	И.В. Антонова (И.О. Фамилия)	(личная подпись)
Консультант	Е.Ю. Аношина (И.О. Фамилия)	(личная подпись)

Допустить к защите

Заведующий кафедрой д.п.н., профессор, Р.А. Утеева (ученая степень, звание, И.О. Фамилия) _____________ (личная подпись)

«____»__________2018 г.

Тольятти 2018

АННОТАЦИЯ

Целью бакалаврской работы является выявление методических особенностей обучения школьников решению задач на построение треугольников в курсе геометрии основной школы и разработка методических рекомендаций по обучению решению данных задач обучающимися 7-9 классов.

Геометрические построения представляют собой существенную часть геометрии, являются средством формирования и развития у обучающихся логического мышления и геометрических представлений. Задачи на построение играют важную роль в математической подготовке школьников. Посредством данных задач осуществляются межпредметные связи геометрии со смежными дисциплинами.

Бакалаврская работа состоит из введения, двух глав, заключения, списка литературы и приложений.

Глава I бакалаврской работы посвящена теоретическим основам обучения учащихся решению задач на построение треугольников в курсе геометрии основной школы. Выявлены основные цели по теме исследования в курсе геометрии основной школы, а также требования к знаниям и умениям к обучающимся по данной теме. Выполнен анализ содержания теоретического и задачного материалов данной темы в курсе геометрии основной школы.

В *Главе II* представлены методические аспекты обучения школьников решению задач на построение треугольников в курсе геометрии основной школы. Выявлены формы, методы и средства обучения данной теме в курсе геометрии основной школы. Сформулированы методические рекомендации по данной теме в курсе геометрии основной школы.

Список литературы содержит 49 наименований.

Объем работы составляет 63 страницы.

ABSTRACT

The title of the bachelor's thesis is "Teaching methods for triangle construction problem solving in a course on geometry of the secondary school".

Geometric constructions represent an essential part of geometry; they are a mean for developing logical thinking and geometric perceptions of students. The construction problems play an important role in the mathematical training of schoolchildren. Through these problems, interdisciplinary connections of geometry with related disciplines are carried out.

The aim of the bachelor's thesis is to identify the methodological features of teaching students to solve triangle construction problems in a course on geometry of the secondary school and to develop methodological recommendations for the organization of students' teaching on the topic of the research.

The bachelor's thesis consists of an introduction, two chapters, a conclusion, a list of 49 references, including 5 foreign sources, and 4 appendixes.

The first chapter is dedicated to the analysis of teaching goals for the triangle construction problem solving and to the study of the requirements for the students' knowledge and skills on the topic of research. We also analyze the content of theoretical and problem materials on the triangle construction problem solving in a course on geometry of the secondary school.

In the second chapter we provide different forms, methods and resources on the topic of the research. The methodological recommendations for a course on geometry of the secondary school have been developed.

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ 5

ГЛАВА I. ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ОБУЧЕНИЯ РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ НА ПОСТРОЕНИЕ ТРЕУГОЛЬНИКОВ В КУРСЕ ГЕОМЕТРИИ ОСНОВНОЙ ШКОЛЫ 9

§1. Цели обучения теме «Построение треугольника по трем элементам» в курсе геометрии основной школы 9

§2. Основные требования к знаниям и умениям обучающихся по теме «Построение треугольника по трем элементам» в курсе геометрии основной школы 12

§3. Анализ содержания теоретического материала темы «Построение треугольника по трем элементам» в учебниках геометрии 7-9 классов разных авторов 15

§4. Анализ задачного материала по теме «Построение треугольника по трем элементам» в учебниках геометрии 7-9 классах разных авторов...... 21

Выводы по первой главе.. 31

ГЛАВА II. МЕТОДИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ОБУЧЕНИЯ РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ НА ПОСТРОЕНИЕ ТРЕУГОЛЬНИКОВ В КУРСЕ ГЕОМЕТРИИ ОСНОВНОЙ ШКОЛЫ 34

§5. Формы, методы и средства обучения решению задач на построение треугольников в курсе геометрии основной школы...................................... 34

§6. Методические рекомендации по обучению решению задач на построение треугольников в курсе геометрии основной школы 42

Выводы по второй главе.. 54

ЗАКЛЮЧЕНИЕ 55

СПИСОК ИСПОЛЬЗУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ 58

ПРИЛОЖЕНИЯ...64

ВВЕДЕНИЕ

Актуальность исследования. Первые задачи на построение возникли из хозяйственных потребностей человека (проведение прямых линий, построение прямого угла). Высокое развитие они получили в Древней Греции. Древнегреческие математики, такие как Фалес Милетский, Пифагор, Платон, Евклид уже проводили построения с помощью двух приборов: линейки (гладкая дощечка с ровным краем) и циркуля (две заостренные палки, связанные на одном конце). Стоит отметить, что в книге «Начала» Евклида (III век до н.э.) решены почти все задачи на построение, которые сейчас изучаются в школьном курсе геометрии.

А.Е. Малых и Е.М. Маленьких отмечают, что «построение правильного треугольника по длине его стороны было известно ещё в Древнем Вавилоне. Вслед за ними и пифагорейцы стали строить такие же треугольники по трём равным сторонам. В настоящее время в школьном курсе геометрии треугольник строится по трем сторонам неизменным раствором циркуля так, как это выполняли вавилоняне и в школе Пифагора (VI-V вв. до н.э.)» [28, С. 276].

Решение задач на построение вызывает сложность у обучающихся, так как элементарные этапы построения могут применяться несколькими способами, которые усложняются по мере построения заданной фигуры [48]. Но вместе с этим, такие задачи способствуют развитию у обучающихся логического мышления и пространственных представлений, усвоению ими основных математических понятий, проявлению у них настойчивости, инициативы и изобретательности в достижении цели, концентрации внимания.

Посредством этих задач также осуществляются межпредметные связи геометрии со смежными дисциплинами, особенно с черчением.

Все вышесказанное определяет актуальность темы исследования.

Проблема исследования состоит в выявлении методических особенностей обучения учащихся решению задач на построение треугольников в курсе геометрии основной школы.

Объект исследования: процесс обучения геометрии в основной школе.

Предмет исследования: методика обучения учащихся решению задач на построение треугольников на уроках геометрии в основной школе.

Цель исследования: выявить методические особенности обучения учащихся решению задач на построение треугольников в курсе геометрии основной школы и разработать методические рекомендации по обучению решению данных задач обучающихся 7-9 классов.

Задачи исследования:

1. Выявить основные цели и задачи обучения теме «Построение треугольника по трем элементам» в курсе геометрии основной школы.

2. Представить основные требования к знаниям и умениям учащихся по теме «Построение треугольника по трем элементам» в курсе геометрии основной школы.

3. Выполнить анализ содержания теоретического и задачного материалов в учебниках геометрии основной школы.

4. Выявить формы, методы и средства обучения решению задач на построение треугольников в курсе геометрии основной школы.

5. Представить методические рекомендации по обучению учащихся решению задач на построение треугольников в курсе геометрии основной школы.

Для решения задач были использованы следующие **методы исследования:** анализ учебно-методической литературы, анализ школьных программ, учебников и учебных пособий, изучение опыта работы учителей математики.

Теоретическая значимость исследования состоит в том, что в нем выявлены методические особенности обучения школьников решению задач на построение треугольников в курсе геометрии основной школы.

Практическая значимость работы заключается в том, что в ней представлены методические рекомендации по обучению школьников решению задач на построение треугольников в курсе геометрии основной школы, которые могут быть использованы учителями математики и студентами в период педагогической практики в общеобразовательной школе.

На защиту выносятся: методические рекомендации по обучению решению задач на построение треугольников в курсе геометрии основной школы.

Бакалаврская работа состоит из введения, двух глав, заключения, списка литературы, приложения.

Во введении сформулированы основные характеристики исследования: актуальность, проблема, объект, предмет, цель, задачи и методы исследования.

Глава I бакалаврской работы посвящена теоретическим основам обучения учащихся решению задач на построение треугольников в курсе геометрии основной школы. Выявлены основные цели и задачи по теме исследования в курсе геометрии основной школы, а также требования к знаниям и умениям учащихся по данной теме. Выполнен анализ содержания теоретического и задачного материалов данной темы в курсе геометрии основной школы.

В Главе II представлены методические аспекты обучения учащихся решении задач на построение треугольников в курсе геометрии основной школы. Выявлены формы, методы и средства обучения данной теме в курсе геометрии основной школы. Сформулированы методические рекомендации по обучению данной теме в курсе геометрии основной школы.

В заключении сформулированы основные результаты и выводы проведенного исследования.

Список литературы содержит 49 наименований. Объем работы составляет 63 страницы.

В Приложении представлены типы задач по теме исследования в учебниках геометрии разных авторов и решение задач из §4.

ГЛАВА I. ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ОБУЧЕНИЯ РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ НА ПОСТРОЕНИЕ ТРЕУГОЛЬНИКОВ В КУРСЕ ГЕОМЕТРИИ ОСНОВНОЙ ШКОЛЫ

§1. Цели обучения теме «Построение треугольника по трем элементам» в курсе геометрии основной школы

Согласно *Федеральному государственному образовательному стандарту основного общего образования* [41] предметные результаты изучения области «Математика», в частности, «Геометрия» должны отражать:

1. Овладение геометрическим языком; развитие умения использовать его для описания предметов окружающего мира; развитие пространственных представлений, изобразительных умений, навыков геометрических построений.

2. Формирование систематических знаний о плоских фигурах и их свойствах; развитие умений моделирования реальных ситуаций на языке геометрии, исследования построенной модели с использованием геометрических понятий и теорем, аппарата алгебры, решения геометрических и практических задач.

3. Развитие умений применять изученные понятия, результаты, методы для решения задач практического характера и задач из смежных дисциплин.

В.Н. Березин и Л.Ю. Березина в сборнике статей [17] выделяют следующие цели изучения геометрических построений: развитие графической грамотности, то есть формирование навыков выполнения построений инструментами на листе бумаги; развитие автоматизма при простейших построениях; развитие логического мышления.

С.Е. Ляпин отмечает, что геометрические построения, выполненные при помощи линейки, циркуля, угольника и других инструментов, помогают обучающимся осознавать свойства фигур. И выделяет в этой теме такие цели как: «получения обучающимися навыков пользования различными чертежными инструментами и приемами, применяемыми на практике; развитие умения выбирать наиболее рациональные приемы построения» [27, С. 572].

Автор А.А. Столяр, в отличие от С.Е. Ляпина, высказывает противоположное мнение о том, что «выполнение построений с ограниченным набором инструментов, в частности с помощью циркуля и линейки, не имеет особого прикладного значения, так как в чертежной практике предпочитают пользоваться более широким набором инструментов, упрощающим процесс выполнения построений» [39, С. 353].

Н.В. Метельский [30] выделяет «специфические» цели в обучении математике, в частности геометрии: развитие геометрической интуиции, пространственного воображения обучающихся, развитие навыков правильного графического изображения.

«Особую роль в формировании пространственного мышления школьников играют задачи на построение» [44, С. 418] – пишут в статье Л.П. Шебанова и З.И. Янсуфина. Авторы отмечают, что стоит уделять серьезное внимание для развития пространственного мышления обучающихся, а для обогащения знаний и умений, способствуют задачи на построение.

А.Л. Брудно в статье «Вокруг циркуля» журнала «Квант» отмечает, что на данных задачах «школьники учатся самостоятельному решению задач, близких к творческим, развивают и проверяют свои способности к этой деятельности» [8, С.2].

Г. Абдуллаева в статье [1] говорит о том, что задачи на построение играют значимую роль в обучении школьников, которая сводится к достижению следующих целей: систематическое повторение геометрического материала; обстоятельное и глубокое изучение известного обучающимся геометрического материала; развитие пространственных представлений у обучающихся; развитие у обучающихся логического мышления; концентрация внимания у обучающихся, проявление настойчивости, инициативы и изобретательности в достижении намеченной цели.

Учитель математики И.Н. Гаврилова [14] при обучении теме «Задачи на построение» выделяет следующие цели обучения: развитие внимания, памяти, логического мышления; развитие практических навыков и умений в использовании чертежных инструментов; повышение активности и самостоятельности обучающихся при решении задач на построение.

Учитель математики Д.С. Ильиных в статье [24] высказывает мнение о том, что геометрические задачи на построение предоставляют наибольшее количество средств для развития логических навыков обучающихся по сравнению с другими видами задач, так как данные задачи обычно не допускают стандартного подхода к ним.

В статье [35] И.Н. Семенова и М.Л. Толмачева пишут о важности роли задач на построение в практико-ориентированном обучении. В ходе изучения и решения данных задач, достигаются следующие цели обучения: усвоение теоретических знаний об основных геометрических фигурах и их элементов; развитие умений обучающихся применять математическую теорию для решения задач на построение; формирование и развитие универсальных действий планирования своей деятельности; формирование умения пользоваться чертежными инструментами, в ходе этапа схемы построения; развитие исследовательских способностей обучающихся на этапе исследования в задачах на построение; развитие инициативы, изобретательности при решении практико-ориентированных задач.

Автор статьи Е.В. Андреева выделяет функции, которые выполняют задачи на построение в ходе изучения курса геометрии: «развитие логического мышления, пространственных представлений, пространственного воображения и мышления математической интуиции; формирование практических умений и навыков, связанных с использованием чертежных инструментов;

расширение теоретических знаний; эстетическое воспитание обучающихся» [5, С. 255].

Таким образом, задачи на построение играют большую роль в формировании математического мышления и являются важным средством развития мыслительной деятельности обучающихся. Элементарные этапы построения могут применяться несколькими способами, усложняющимися дальше по построению [47; 49]. С помощью данных задач осуществляется углубление математических знаний, концентрируется внимание школьников. При решении этих задач школьники учатся проявлять настойчивость в достижении намеченной цели, инициативу и изобретательность. Они способствуют развитию пространственных представлений и логического мышления у обучающихся.

Отсюда следует, что геометрические задачи на построение дают возможность основательно изучить геометрию, а также прививают навыки и способности полезные каждому, так как они способствуют изучению других предметов.

§2. Основные требования к знаниям и умениям обучающихся по теме «Построение треугольника по трем элементам» в курсе геометрии основной школы

В *Примерной основной образовательной программе основного общего образования* [34] говориться о том, что в результате изучения раздела математики «Геометрические построения» выпускник научится в 7-9 классах для обеспечения возможности успешного продолжения образования на *базовом уровне:* изображать типовые плоские фигуры и фигуры в пространстве от руки и с помощью инструментов.

Для использования в повседневной жизни и при изучении других предметов ученик научится: выполнять простейшие построения на местности, необходимые в реальной жизни.

В результате изучения темы «Построение треугольника по трем элементам» выпускник получит возможность научиться в 7-9 классах для обеспечения возможности успешного продолжения образования *на базовом и углублённом уровнях:* выполнять построения треугольников, применять отдельные методы построений циркулем и линейкой и проводить простейшие исследования числа решений.

При изучении раздела «Геометрические построения», выпускник получит возможность научиться в 7-9 классах для успешного продолжения образования *на углублённом уровне:* оперировать понятием набора элементов, определяющих геометрическую фигуру; владеть набором методов построений циркулем и линейкой; проводить анализ и реализовывать этапы решения задач на построение.

Т.А. Бурмистрова в сборнике рабочих программ по геометрии выделяет следующие планируемые результаты при изучении геометрических фигур: «выпускник научится решать несложные задачи на построение, применяя основные алгоритмы построения с помощью циркуля и линейки; получит возможность овладеть этапами традиционной схемы решения задач на построение с помощью циркуля и линейки: анализ, построение, доказательство и исследование; получит возможность научиться решать задачи на построение методом геометрического места точек и методом подобия» [9, С. 12].

Т.М. Мищенко к итоговым результатам изучения темы «Построение треугольника по трем элементам» по учебнику Л.С. Атанасяна относит: «умение объяснить алгоритмы решения задач на построение треугольника: по двум сторонам и углу между ними, по стороне и прилежащим к ней углам, по трем сторонам; умение применять при решении задач на построение основные алгоритмы построения с помощью циркуля и линейки» [31, С. 135].

Согласно Л.С. Атанасяну в результате изучения данной темы обучающиеся должны «уметь объяснить, что такое геометрическое место точек; уметь строить треугольник по двум сторонам и углу между ними, по стороне и двум прилежащим к ней углам, по трем сторонам, уметь решать задачи на построение треугольника по другим данным элементам» [7, С. 80].

В методических рекомендациях к учебнику А.Д. Александрова по окончании курса 7 класса выделяются следующие планируемые результаты обучения данной теме: обучающиеся должны уметь «выполнять построения треугольников, применять отдельные методы построений циркулем и линейкой, проводить простейшие исследования числа решений» [13, С. 139].

В методических рекомендациях к учебнику А.В. Погорелова заявлены такие результаты изучения темы, как: обучающиеся должны «знать традиционную схему решения задач на построение с помощью циркуля и линейки: анализ, построение, доказательство, исследование; должны уметь применять при решении задач на построение алгоритмы: построение треугольника по трем сторонам» [32, С. 183].

В поурочных разработках к учебнику В.Ф. Бутузова указываются следующие требования в результате изучения темы: обучающиеся «должны уметь строить треугольник по трем сторонам; знать, что данная задача не всегда имеет решение; уметь строить треугольник по двум сторонам и углу между ними, по стороне и двум прилежащим к ней углам; начать усваивать логическую цепочку в решении задач на построение, в которой исходным пунктом является анализ с поиском пути решения; уметь строить прямоугольный треугольник; уметь четко объяснить, что дано в каждой из задач, что требуется сделать, из каких простейших построений составлять решение задачи» [12, С. 44-49].

Авторы школьного учебника геометрии И.М. Смирнова и В.А. Смирнов в документе под названием «Программа и тематическое планирование по геометрии для 7-9 классов» [38], говорят о планируемых результатах обучения геометрии в основной школе. Выделим предполагаемые авторами знания, умения и навыки, относящиеся к теме «Построение треугольника по трем элементам». Выпускники основной школы после изучения курса геометрии по теме исследования должны: знать основные геометрические понятия, отношения между ними; уметь пользоваться чертежными (геометрическими) инструментами для изображения, построения геометрических фигур; уметь решать задачи на построение.

Проанализировав планируемые результаты изучения темы «Построение треугольника по трем элементам» мы можем сделать вывод о том, что авторы учебников геометрии придерживаются общих требований при ее изучении.

Так, ученик должен: знать этапы решения задачи на построение; уметь доказывать, что построенная фигура удовлетворяет требованиям данной задачи; знать три основные задачи на построение треугольника с помощью циркуля и линейки; уметь строить треугольник по двум сторонам и углу между ними, по стороне и прилежащим к ней углам, по трем сторонам; решать несложные задачи на построение треугольников по другим данным элементам.

В дальнейшем обучающиеся получают возможность расширить знания по данной теме. Они знакомятся и овладевают двумя методами решения задач на построение – *метод геометрических мест* и *метод подобия*, которые применяются и для решения задач на построение треугольника, представленные в учебниках геометрии разных авторов. Но стоит отметить, что не все авторы знакомят школьников с данными методами.

§3. Анализ содержания теоретического материала темы «Построение треугольника по трем элементам» в учебниках геометрии 7-9 классов разных авторов

В этом параграфе рассмотрим теоретический материал по данной теме в учебниках геометрии разных авторов.

Базовые знания (известные обучающимся из школьного курса математики 5-6 классов): прямая, отрезок, луч и их построение с помощью линейки;

треугольник, его виды, построение треугольника с помощью линейки; определение угла, виды углов, построение угла с помощью линейки и чертежного треугольника; определение окружности и круга, построение окружности с помощью циркуля; понятие транспортира, его использование для построения углов.

Вводимые (новые) знания: «построение треугольника по трем сторонам»; «построение треугольника по двум сторонам и углу между ними»; «построение треугольника по стороне и двум прилежащим к ней углам»; «построение прямоугольного треугольника по гипотенузе и катету»; схема решения задачи на построение с помощью циркуля и линейки; метод геометрических мест; метод подобия.

Смысл решения задачи на построение треугольника заключается в том, что требуется построить треугольник, если дан некоторый треугольник и указаны некоторые соотношения между элементами искомого треугольника и элементами данного треугольника. При решении данных задачах в качестве инструмента используют циркуль и линейку без делений [45].

В курсе математики 5-6 класса обучающиеся получили знания о построении фигур с помощью таких инструментов, как: линейка, чертежный угольник и циркуль. В последующих классах, а именно на уроках геометрии, школьники расширяют свои знания о построениях, так как знакомятся с построениями фигур при помощи только линейки и циркуля.

Ниже, в Таблице 1, представлено содержание теоретического материала темы «Построение треугольника по трем элементам» в учебниках геометрии 7 класса.

По учебнику Л.С. Атанасяна [6] обучающиеся, прежде чем познакомиться с темой «Построение треугольника по трем элементам», рассматривают четвертый параграф под названием «Задачи на построение», представленный в Главе II. Роль этого параграфа заключается в том, чтобы познакомить обучающихся с новым для них классом задач – «задачи на построение» и разобрать простейшие построения данного типа.

Л.С. Атанасян рассматривает тему «Построение треугольника по трем элементам» в последнем параграфе Главы IV. На изучение параграфа дается 4 часа, сам же параграф разделен на два пункта 38, 39. В пункте 38 автор рассматривает такие понятия, как «расстояние от точки до прямой», «расстояние между параллельными прямыми», а в заключение вводит понятие *«геометрическое место точек»*.

В пункте 39 представлены три «основные» задачи на построение треугольника [6, С. 83-84]. Первая – задача на *«построение треугольника по двум сторонам и углу между ними»*. Л.С. Атанасян описывает его построение, проводит доказательство и исследование, но делает это неявно. Далее идет задача на *«построение треугольника по стороне и двум прилежащим к ней углам»*, которую автор рекомендует обучающимся выполнить самостоятельно. Третья задача на *«построение треугольника по трем сторонам»*, в решении автор описывает ход построения, приводит доказательство и исследование (также неявно).

Таким образом, на примере трех «основных» задач на построение треугольника, рассмотренных в данном пункте, обучающиеся учатся алгоритму решения подобных задач.

Схема решения задач на построение представлена Л.С. Атанасяном в разделе «Задачи повышенной трудности к главам III и IV», где далее представлено решение задачи на построение треугольника по этапам данной схемы: анализ, построение, доказательство и исследование. Стоит отметить, что в методических рекомендациях [7, С. 79] уточняется, что в 7 классе следует остановиться только на выполнении и описании построения.

В учебнике В.Ф. Бутузова [10] тема «Построение треугольника по трем сторонам» отдельным пунктом не выносится. Однако автором представлен целый параграф «Задачи на построение» в Главе 3. В нем дается определение «задачи на построение», представлены простейшие построения циркулем и линейкой, в которые включена задача на *«построение треугольника по трем сторонам»,* разобранная в пункте 35. Здесь автор проводит и описывает построение, а также исследование, при этом, не давая этапы схемы построения. В поурочных разработках к учебнику В.Ф. Бутузова [12, С. 44] данной задаче уделяют особое внимание, называя ее одной из важнейших задач, на основе, которой решаются более сложные.

В отличие от остальных авторов в учебнике В.Ф. Бутузова в пункте 40 также разбирается задача на *«построение прямоугольного треугольника по гипотенузе и катету»* [10, С. 98], при решении автор опирается на полученные знания из пунктов 34-39. Опять же неявно описывается построение и проводится исследование. Отметим, что данную задачу автор решает двумя способами, таким образом, обращая внимание обучающихся на возможность решения одной задачи разными способами. На изучение параграфа выделяется 7 часов, из которых 1 час дается на изучение пунктов 33, 34 и 2 часа – на пункты 39, 40.

В учебнике А.В. Погорелова [33] теме «Построение треугольника по трем элементам» также не отводит отдельного пункта. В пятом параграфе «Геометрические построения» автор знакомит обучающихся с задачами на построение, в том числе в пункте 43 дает решение задачи на *«построение треугольника с данными сторонами»*. Отметим, что в учебнике дано только описание построения, а Т.М. Мищенко в методических рекомендациях к учебнику [32, С. 184] проводит еще и исследование. На изучение данного параграфа дается 13 часов, из которых 3 часа отводится на пункты 42-44.

Автор И.Ф. Шарыгин в учебнике [43] отводит место «задачам на построение» в пункте 4.2. в Разделе 4. Заметим, что прежде чем рассматривать данный пункт, автор дает определение *«геометрического места точек»*. Тема «Построение треугольника по трем элементам» в учебнике отдельно не рассматривается. Лишь в одном из подпунктов пункта 4.2, приводится *«построение треугольника, равного данному»*. Автор описывает только сам процесс его построения, на основе которого приводит рассуждение о *«построении треугольника по трем сторонам»*.

Изложение теоретического материала в учебнике А.Д. Александрова [4] отличается от всех предыдущих авторов. Во-первых, «задачам на построение» отдельный пункт не выделен. Во-вторых, автор придерживается того, что приводит построение какой-либо фигуры в ходе ее изучения. Так *«построение равностороннего треугольника»* представлено в пункте 2.4. Главы I. А.Д. Александровым дается описание его построения, рассматривает также такие этапы схемы построения как, доказательство, исследование, но в полном объеме внимания ей не уделяется. Далее автор описывает *«построение треугольника по стороне и двум прилежащим к ней углам»* в пункте 7.2 седьмого параграфа Главы III, где исследование основано на методике изучения теме данного пункта. Каждому пункту выделяется по 1 часу на изучение.

А.Д. Александров также уточняет, что частое решение данных задач в обучении не является возможным, так как решение одной такой задачи занимает много времени. Именно поэтому в учебнике даются задачи на построение треугольника по данным фрагментам фигуры. Таким образом, ученики заранее знают, что задача имеет решение и, следовательно, не применяют такие этапы схемы построения как, доказательство, исследование, а только строят фигуру.

Отметим, что данная тема находит продолжение в учебнике 7 класса А.В. Погорелова [33] в пункте 49 под названием «Метод геометрических мест». Вначале автор описывает сущность данного метода, а после, в задачах к данному пункту, дает задачи на построение треугольников при помощи данного метода, причем предложенные задачи отмечены как задачи повышенной трудности. Данный метод рассматривает и автор И.Ф. Шарыгин, но уже в учебнике для 8 класса. В пункте 5.3. автор выделяет подпункт под названием «Метод геометрических мест в задачах на построение», в котором применяет данный метод при решении задачи на «построение треугольника по стороне, высоте, проведенной к этой стороне, и противолежащему углу» [43, С. 173]. Таким образом, наглядно давая обучающимся представление о данном методе.

Таблица 1

Содержание теоретического материала темы «Построение треугольника по трем элементам» в учебниках геометрии 7 класса

Авторы учебников	**Содержание учебного материала**
А.Д. Александров, А.Л. Вернер, В.И. Рыжик, Т.Г. Ходот.	«Построение треугольника по трем сторонам». «Построение треугольника по стороне и двум прилежащим к ней углам».
Л.С. Атанасян, В.Ф. Бутузов, С.Б. Кадомцев и др.	Понятие «геометрического места точек». «Построение треугольника по двум сторонам и углу между ними». «Построение треугольника по стороне и двум прилежащим к ней углам». «Построение треугольника по трем сторонам». Схема решения задач на построение.
В.Ф. Бутузов, С.Б. Кадомцев, В.В. Прасолов.	«Построение треугольника по трем сторонам». «Построение прямоугольного треугольника по гипотенузе и катету».
А.В. Погорелов	«Построение треугольника по трем сторонам».
И.Ф. Шарыгин	Определение «геометрического места точек». «Построение треугольника, равного данному». «Построение треугольника по трем сторонам».

Следующая тема, в которой рассматриваются задачи на построение треугольника, встречается в 8 классе. В учебнике Л.С. Атанасяна [6] это пункт 66 «Практические приложения подобия треугольников», в учебнике В.Ф. Бутузова для 8 класса [11] – пункт 82 «Метод подобия», И.Ф. Шарыгином представлен пункт 8.3. «Метод подобия в задачах на построение». Все эти пункты являются продолжением одной из основных тем 8 класса «Подобные треугольники», и в них раскрывается один из методов решения задач на построение – метод подобия.

Авторы схожи в изложении материала по данному методу. Каждый из авторов приводит пример решения задачи на построение треугольника методом подобия, таким образом, раскрывая сущность данного метода, а затем давая целый блок задач на применение изложенного метода для построения треугольников.

После проведения анализа можно отметить, что только в учебнике Л.С. Атанасяна данная тема выносится отдельным пунктом, а сам материал раскрыт более полно. Также Л.С. Атанасян единственный из авторов рассматривает этапы схемы решения задачи на построение, другие же авторы этапы не выделяют. Стоит отметить, что только А.В. Погорелов в учебнике 7 класса знакомит обучающихся с одним из методов решения задач на построение.

В 8 классе представляются дополнительные сведения по данному материалу и даются задачи. Стоит отметить, что в основном эти задачи находятся в разделе «Задачи повышенной трудности», кроме учебника для углубленного изучения А.Д. Александрова [2], где данные задачи находятся в разделе «Строим». В 9 классе задачи по теме дает только А.Д. Александров в учебнике для углубленного изучения [3] и одна задача присутствует в учебнике Л.С. Атанасяна для данного курса.

В целом авторы придерживаются одной линии в изложении данной темы – разбирают основные задачи на построение треугольника и приводят задачи для решения в классе и для самостоятельного решения.

§4. Анализ задачного материала по теме «Построение треугольника по трем элементам» в учебниках геометрии 7-9 классах разных авторов

Рассмотрим основные *типы задач* на построение треугольника, которые встречаются в школьном курсе геометрии основной школы.

Так как тема «Построение треугольника по трем элементам» изучается на основе задачного материала, рассмотрим эти задачи. Таких задач три и они входят, в так называемые, *«основные» построения*.

Как было отмечено раннее, первая задача, которая встречается при изучении данной темы и рассматривается во всех учебниках геометрии, это задача на «построение треугольника по трем сторонам». Отметим, что А.В. Погорелов и И.Ф. Шарыгин разбирают только ее.

Итак, первый тип – задача на *«построение треугольника по трем сторонам»*. Рассмотрим ее решение в учебнике А.В. Погорелова [33, С. 61].

Решение. Пусть даны три отрезка a, b, c (Рис. 1.). Проводим произвольную прямую и отмечаем на ней произвольную точку B. Раствором циркуля, который равен a, описываем окружность с центром в точке B и радиусом a. Пусть C – точка ее пересечения с этой прямой.

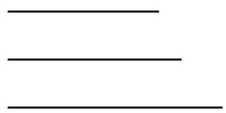

Рис. 1.

Далее описываем окружность из центра в точке B и радиуса c, а раствором циркуля, который равен b, описываем окружность из центра в точке C. Пусть точка A – это точка пересечения этих окружностей. Проведем отрезки AB и AC. Треугольник ABC имеет стороны, равные a, b, c (Рис. 2.).

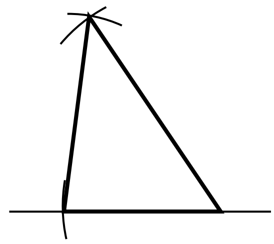

Рис. 2.

Как мы видим, автор дает лишь описание построения и на этом останавливается, так же поступает и И.Ф. Шарыгин, но стоит отметить, что он ставит задачу «построения треугольника, равного данного». В учебниках А.Д. Александрова и В.Ф. Бутузова также неявно проводится исследование, а автор Л.С. Атанасян помимо исследования, рассматривает и доказательство.

В учебнике Л.С. Атанасяна разбирается следующий тип – задача на *«построение треугольника по двум сторонам и углу между ними»* при изучении данной темы. Рассмотрим предложенное в учебнике решение данной задачи [6, С. 83].

Решение. Даны отрезки P_1Q_1, P_2Q_2 и угол hk (Рис. 3). Требуется с помощью линейки и циркуля построить такой треугольник ABC, у которого две стороны,

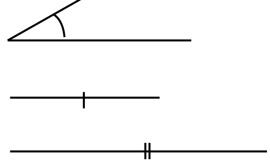

Рис. 3.

назовем их AB и AC, равны данным отрезкам P_1Q_1 и P_2Q_2, а угол A между ними равен данному углу hk.

Строим прямую a и на ней откладываем отрезок AB, равный отрезку P_1Q_1 (Рис. 4). Затем строим угол BAM, равный углу hk. На луче AM откладываем отрезок AC, равный отрезку P_2Q_2, и проводим отрезок BC. Треугольник ABC — искомый.

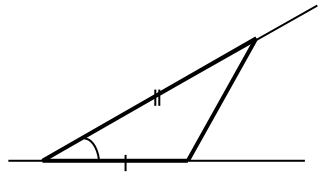

Рис. 4.

По построению $AB = P_1Q_1, AC = P_2Q_2, \angle A = \angle hk$.

«Описанный ход построения показывает, что при любых отрезках P_1Q_1, P_2Q_2 и данном неразвернутом угле hk искомый треугольник можно построить. Так как прямую a и точку A на ней можно выбрать произвольно, то существует бесконечно много треугольников, которые удовлетворяют условиям задачи. Все эти треугольники равны друг другу (по первому признаку равенства треугольников), поэтому принято говорить, что данная задача имеет единственное решение» [6, С. 84].

Данная задача разобрана только в учебнике Л.С. Атанасяна в качестве примера. Как мы видим, в решении представлены все этапы схемы построения, но неявно. В учебниках В.Ф. Бутузова и А.В. Погорелова она предложена для решения в конце параграфа. А.Д. Александров и И.Ф. Шарыгин данный тип не разбирают.

Автором А.Д. Александровым представлен еще один тип – задача на *«построение треугольника по стороне и двум прилежащим к ней углам»*. Рассмотрим ее решение в учебнике [4, С. 142].

Дано: отрезок AB, углы α и β (Рис. 5.).

Построить: треугольник ABC, у которого $\angle A = \alpha$ и $\angle B = \beta$.

Построение: Отложим по одну сторону от отрезка AB угол $BAM = \alpha$ и угол $ABN = \beta$. Если стороны AM и

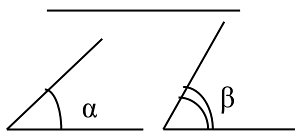

Рис. 5.

BN пересекутся в некоторой точке C, то треугольник ABC будет искомым (Рис. 6.).

Согласно второму признаку равенства треугольников решение может быть лишь одно. Это означает, что равны все треугольники, имеющую сторону, равную AB, и углы, прилегающие к этой стороне, равные α и β.

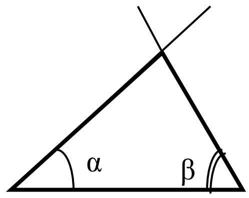

Рис. 6.

Исследуем, всегда ли задача будет иметь решение. Не всегда. Если $\alpha + \beta = 180^0$, то по первому признаку параллельности прямых, прямые AM и BN не пересекутся и треугольник не получится. Также лучи AM и BN не пересекутся, если $\alpha + \beta > 180^0$. В этом случае тоже решения нет. Лучи AM и BN пересекутся, если $\alpha + \beta < 180^0$. Следовательно, только в этом случае будет решение.

А.Д. Александровым даются такие этапы схемы построения как, само построение и исследование. Л.С. Атанасян предлагает решить эту задачу на уроке самостоятельно, а также две задачи данного типа после параграфа. У В.Ф. Бутузова и А.В. Погорелова данная задача включена в задачный материал, в отличие от учебника И.Ф. Шарыгина, в котором она отсутствует.

Отметим, что первые три типа задач представленные выше являются своего рода пропедевтическими для дальнейшего освоения подобных задач, так как без знания необходимого алгоритма построения и овладением минимальными умениями и навыками понимание и освоение задач на построение будет невозможно.

В отличие от остальных авторов В.Ф. Бутузов разбирает задачу на *«построение прямоугольного треугольника по гипотенузе и катету»* [10, С. 98]. Таким образом, можно выделить еще один тип – задачи на *«построение прямоугольного треугольника»*. Заметим, что автор дает два решения данной задачи. Рассмотрим их.

Решение 1. Пусть MN и PQ – данные отрезки, причем $MN > PQ$ (Рис. 7.).

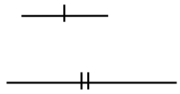

Рис. 7.

Проводим произвольную прямую, отмечаем на ней точку A и откладываем отрезок AB, равный PQ. Далее, через точку A, перпендикулярно прямой AB, проводим прямую a. Затем строим окружность радиуса MN с центром B (Рис. 8.). Так как $BA = PQ < MN$, то расстояние от точки B до прямой a меньше радиуса этой окружности, поэтому прямая a и построенная окружность пересекаются в двух точках. Обозначим одну из них буквой C. Треугольник ABC – искомый.

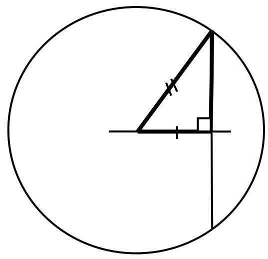

Рис. 8.

Из построения следует, что если один из отрезков меньше другого, то существует прямоугольный треугольник, где гипотенуза равна большему, а катет – меньшему из этих отрезков.

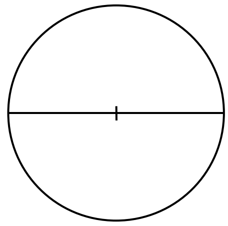

Рис. 9.

Решение 2. Строим середину O отрезка MN и проведем окружность с центром в точке O и радиуса OM (Рис. 9.). Строим окружность с центром M радиуса PQ. Обозначим одну из точек пересечения окружностей буквой L (Рис. 10.).

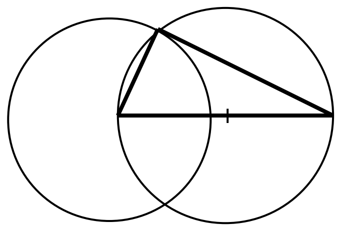

Рис. 10.

Так как угол L опирается на диаметр MN, то этот угол – прямой, следовательно, MN – гипотенуза прямоугольного треугольника LMN, а ML – катет, который равен PQ. Значит, треугольник LMN – искомый.

В.Ф. Бутузов приводит построение и неявно проводит исследование, далее дает задачи для самостоятельного решения. Данный тип представлен также в учебниках А.Д. Александрова, В.Ф. Бутузова и А.В. Погорелова.

Следующий тип, который можно выделить в данной теме – это задачи на *«построение равнобедренного треугольника»*. А.В. Погорелов предлагает для решения следующую задачу.

Задача 1. «Постройте равнобедренный треугольник по боковой стороне и углу при основании» [33, С. 69].

В учебнике В.Ф. Бутузова предлагается усложненная задача данного типа.

Задача 2. «Постройте равнобедренный треугольник по основанию и медиане, проведенной к основанию» [10, С. 104].

Также выделим тип задачи в данной теме – задача на *«построение произвольного треугольника»*.

Задача 3. «Постройте треугольник по двум сторонам и углу, противолежащему большей из них» [33, С. 69].

Задача 4. «Постройте треугольник по стороне, разности углов при этой стороне и сумме двух других сторон» [10, С. 110].

Далее задачи усложняются при построении уже *произвольного треугольника с учетом каких-либо его второстепенных элементов.* Так можно выделись следующий тип – задачи на *«построение произвольного треугольника с учетом высоты»*. Разберем одну задачу данного типа, предложенную в учебнике Л.С. Атанасяна. Причем в ходе решения данной задачи рассмотрим все этапы схемы решения задачи на построение.

Задача 5. «Постройте треугольник по двум сторонам и высоте к третьей стороне» [6, С. 94].

Решение данной задачи представлено в Приложении 4.

В задачах данного типа, где даются уже второстепенные элементы треугольника, рекомендуется проводить анализ, так как сразу провести построение не является возможным, а данный этап предполагает поиск способа решения задачи, тем самым облегчает ее решение.

Следующий тип – задачи на *«построение произвольного треугольника с учетом медианы»*.

Задача 6. «Постройте треугольник по двум сторонам и медиане, проведенной к одной из этих сторон» [10, С. 105].

Еще один тип – задачи на *«построение произвольного треугольника с учетом биссектрисы»*.

Задача 7. «Постройте треугольник по стороне, прилежащему к ней углу и биссектрисе треугольника, проведенной из вершины этого угла» [6, С. 86].

Данный тип задач в 7 классе рассматривают лишь Л.С. Атанасян и В.Ф. Бутузов, причем у В.Ф. Бутузова эти задачи находятся в разделе «Дополнительные задачи».

В последующих задачах происходит повышение уровня сложности в результате того, что авторами дается в условии задачи уже не один второстепенный элемент треугольника, а несколько. В связи с этим мы выделили следующие типы задач.

Итак, тип задачи, выделенный в учебниках – это задача на *«построение произвольного треугольника с учетом медианы и высоты»*.

Задача 8. «Постройте треугольник по стороне, высоте, проведенной к ней, и медиане, проведенной к одной из двух других сторон» [11, С. 34].

Решение данной задачи представлено в Приложении 4.

Отметим, что у автора Л.С. Атанасяна этот тип находится в разделе «Дополнительные задачи», у В.Ф. Бутузова представлен в учебнике 8 класса.

Следующий тип – задача на *«построение произвольного треугольника с учетом биссектрисы и высоты»* представлен только в учебнике Л.С. Атанасяна в разделе «Дополнительные задачи».

Задача 9. «Постройте треугольник по углу, высоте и биссектрисе, проведенным из вершины этого угла» [6, С. 91].

Тип задачи, который выделен в учебниках А.Д. Александрова и И.Ф. Шарыгина, – это задача на *«построение произвольного треугольника с учетом медианы, биссектрисы и высоты»*. Данную задачу авторы предлагают решить обучающимся 8 класса.

Задача 10. «Постройте треугольник по высоте, биссектрисе и медиане, выходящим из одной вершины» [43, С. 276].

Следующий тип – задачи на *«построение треугольника с учетом радиуса описанной окружности»*. Отметим, что данный тип предложен лишь в учебнике 7 класса автором А.В. Погореловым и в учебнике 9 класса для углубленного изучения А.Д. Александровым.

Задача 11. «Постройте треугольник по двум сторонам и радиусу описанной окружности» [33, С. 68].

Тип задачи на *«построение треугольника с учетом периметра треугольника»* предложен в учебниках Л.С. Атанасяна и В.Ф. Бутузова, причем эти задачи находятся в разделе «Задачи повышенной трудности» для 7 класса. Данный тип также представлен в учебниках для углубленного изучения 8-9 классов А.Д. Александрова.

Задача 12. «Постройте треугольник по периметру и двум углам» [10, С. 110].

Решение данной задачи представлено в Приложении 4.

Следующий тип – задачи *на применение метода геометрических мест* в решении задач на построение треугольника. Данный метод применяется при построении треугольника в учебнике 7 класса А.В. Погорелова, а также в учебнике И.Ф. Шарыгина, но в 8 классе.

Задача 13. «Постройте треугольник, если заданы сторона, прилежащий к ней угол и сумма двух других сторон» [33, С. 70].

Решение данной задачи представлено в Приложении 4.

В учебнике А.В. Погорелова данная задача отмечена как задача повышенной трудности. Для облегчения поиска решения предложенной задачи автор предоставляет в учебнике рисунок, который помогает обучающимся на этапе анализа решения данной задачи.

Как было отмечено раннее, тема «Построение треугольников по трем элементам» находит свое продолжение и в 8 классе при изучении темы «Подобие треугольников». Так, авторы, кроме А.Д. Александрова, предлагают другой тип – задачи *на применение метода подобия*, который применяется и при построении треугольников. Отметим, что А.В. Погореловым предложена одна задача данного типа в 9 классе.

Задача 14. «Постройте треугольник ABC по углу A и стороне BC, если известно, что $AB: AC = 2: 1$» [6, С. 154].

Решение данной задачи представлено в Приложении 4.

Помимо представленных выше типов задач на построение треугольника следует выделить следующие типы.

Как отдельный тип выделим задачу на *«построение произвольного треугольника с данной описанной окружностью и точками на ней, через которые проходят прямые содержащие высоту, биссектрису и медиану треугольника, проведенные из одной вершины»*.Данный тип рассмотрен в учебниках 8 класса Л.С. Атанасяна и В.Ф. Бутузова в разделе «Задачи повышенной трудности».

Задача 15. «Постройте треугольник, если дана описанная окружность и на ней точки A, B, M, через которые проходят прямые содержащие высоту, биссектрису и медиану треугольника, проведенные из одной вершины» [6, С. 219].

Решение данной задачи представлено в Приложении 4.

Следующий тип – задача на *«построение произвольного треугольника с учетом двух высот»*. Данный тип дается только в учебнике для углубленного изучения 8 класса А.Д. Александрова.

Задача 16. «Постройте треугольник по углу и высотам, опущенным на стороны этого угла» [2, С. 14].

Решение данной задачи представлено в Приложении 4.

Тип задачи на «*построение произвольного треугольника с учетом трех высот»* встречается в учебниках Л.С. Атанасяна и В.Ф. Бутузова 8 класса.

Задача 17. «Постройте треугольник по трем высотам» [11, С. 132].

Решение данной задачи представлено в Приложении 4.

Еще один тип – задачи на *«построение произвольного треугольника с учетом трех медиан»*. Данный тип встречается в учебниках В.Ф. Бутузова и И.Ф. Шарыгина для 8 классов и в учебнике 9 класса Л.С. Атанасяна.

Задача 18. «Постройте треугольник по трем медианам» [43, С. 276].

Решение данной задачи представлено в Приложении 4.

Следующий тип представлен только в учебнике 9 класса для углубленного изучения А.Д. Александрова – задача на *«построение произвольного треугольника с учетом радиуса вписанной окружности»*.

Задача 19. «Постройте треугольник по двум углам и радиусу вписанной окружности» [3, С. 182].

Решение данной задачи представлено в Приложении 4.

Таким образом, в процессе анализа задачного материала выделены типы задач по теме исследования (Приложение 1-3), причем не все типы можно встретить в учебнике геометрии одного из авторов.

В 7 классе сосредоточена большая часть задачного материала, даются задачи на построение треугольника по основным и второстепенным элементам треугольника. В 8-9 классах предлагается построить треугольник по второстепенным элементам, в основном эти задачи находятся в разделе «Задачи повышенной сложности».

Анализ показал, что в учебниках 7 класса Л.С. Атанасяна, В.Ф. Бутузова и А.В. Погорелова задачный материал более разнообразен в отличие от учебников А.Д. Александрова и И.Ф. Шарыгина, в которых предлагаются всего четыре задачи по теме исследования. Отметим, что в учебниках для углубленного изучения 8-9 классов А.Д. Александрова представлены различные задачи по данной теме.

Помимо задач, представленных в учебниках геометрии разных авторов, дополнительно предлагаются *задачи для самостоятельного решения* по данной теме в задачниках к учебникам. Например, в дидактических материалах к учебнику Л.С. Атанасяна [29] представлены *задачи на построение равнобед-*

ренного и прямоугольного треугольников по основным элементам. В дидактических материалах Б.Г. Зива [21] также представлены задачи на построение треугольника по основным элементам. В сборнике задач А.П. Ершовой [19] рассматриваются *задачи на построение равнобедренного треугольника по второстепенным элементам*.

Стоит выделить дидактические материалы, в которых предложены не только простейшие задачи на построение треугольника, но и представлен широкий выбор типов задач по данной теме. В дидактических материалах Б.Г. Зива [22], представлен один параграф с задачами на построение треугольника, а также параграф с более сложными случаями построения треугольника. В пособии для учащихся «Задачи по геометрии» Б.Г. Зива и др. [23] также представлено два параграфа с разнообразными задачами по данной теме.

В статье [46] рассматриваются возможности математического пакета GeoGebra при обучении теме «Построение треугольника по трем элементам», который способствует лучшему усвоению материала. Данная программа позволяет обучающимся решать задачи на построение треугольника.

Выводы по первой главе

1. Проанализированы и выделены основные цели обучения решению задач на построение треугольника в курсе геометрии основной школы. Изучены государственные стандарты основного общего образования. Выявлено, что решение задач на построение треугольника способствует развитию мыслительной деятельности обучающихся; влияет на развитие логических навыков и математической инициативы обучающихся, так как обычно в решении они не допускают стандартного подхода. В ходе обучения теме у школьников развивается пространственное представление. Данные задачи позволяют подробнее разобраться с известным им теоретическим материалом. Вместе с

этим они учатся проявлять настойчивость, инициативу и изобретательность в достижении цели, дисциплинируют и концентрируют у учащихся внимание.

2. Проанализированы и выделены основные требования к знаниям и умениям обучающихся по теме «Построение треугольника по трем элементам» в курсе геометрии основной школы. Рассмотрена Примерная основная образовательная программа основного общего образования и выявлены планируемые результаты изучения данной темы в курсе геометрии основной школы. Установлено, что должен знать и уметь обучающийся после изучения данной темы.

3. Выполнен анализ содержания теоретического материала темы «Построение треугольника по трем элементам». В ходе анализа было выявлено, что данная тема изучается в 7 классе и на ее изучение отводится от 1 до 2 часов. После проведения анализа было отмечено, что только в учебнике Л.С. Атанасяна, в отличие от учебников А.Д. Александрова, В.Ф. Бутузова, А.В. Погорелова и И.Ф. Шарыгина, данная тема выносится отдельным пунктом, а сам материал представлен более полно. Теоретический материал по теме «Построение треугольника по трем элементам» строится на задачном материале. В 8-9 классах представляются дополнительные сведения по данному материалу и даются задачи. Авторы придерживаются одной линии в изложении данной темы – разбирают основные задачи на построение треугольника и дают задачи для решения в классе и для самостоятельного решения.

4. Представлен анализ задачного материала по теме «Построение треугольника по трем элементам» в учебниках геометрии 7-9 классах разных авторов. В процессе анализа задачного материала выделены типы задач по данной теме (Приложения 1-3). В 7 классе сосредоточена большая часть задачного материала, даются задачи на построение треугольника по основным и второстепенным элементам треугольника. В 8-9 классах предлагается построить треугольник по второстепенным элементам, в основном эти задачи находятся в разделе «Задачи повышенной сложности».

Анализ показал, что в учебниках 7 класса Л.С. Атанасяна, В.Ф. Бутузова и А.В. Погорелова задачный материал более разнообразен в отличие от учебников А.Д. Александрова и И.Ф. Шарыгина, в которых предлагаются всего четыре задачи по теме исследования. Отметим, что в учебниках для углубленного изучения 8-9 классов А.Д. Александрова представлены различные задачи по теме исследования.

ГЛАВА II. МЕТОДИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ОБУЧЕНИЯ РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ НА ПОСТРОЕНИЕ ТРЕУГОЛЬНИКОВ В КУРСЕ ГЕОМЕТРИИ ОСНОВНОЙ ШКОЛЫ

§5. Формы, методы и средства обучения решению задач на построение треугольников в курсе геометрии основной школы

Формы организации учебной деятельности обучающихся являются важной частью учебного процесса. Это объясняется тем, что любая деятельность обучающихся по усвоению содержания образования реализуется в различных формах обучения.

Обратимся к определению организационной формы обучения, которое представлено в учебном пособии А.А. Темербековой и др. Авторы данного пособия определяют *формы обучения* как «виды учебных занятий, способы организации учебной деятельности школьников, учителя и обучающихся, направленные на овладение учащимися знаниями, умениями и навыками, на воспитание и развитие их в процессе обучения» [40, С. 131]. В методической литературе авторы по-разному формулируют определение форм обучения, поэтому определение, представленное выше, не является единственным.

Основной формой организации обучения в современной школе по-прежнему является *урок*, который имеет немало педагогических достоинств. Среди них непрерывность и организационная четкость учебной работы. По сравнению, например, с индивидуальным обучением, данная форма является экономически выгодной.

В современной дидактике сложились три основные формы учебной деятельности на уроке: фронтальная, индивидуальная и групповая.

Фронтальная форма обучения предполагает, что учитель руководит учебной деятельностью всего класса, перед которым поставлена одна или несколько общих задач, также он устанавливает единый для всех обучающихся темп работы. Это в свою очередь имеет недостаток – так как данный темп ориентирован на среднего школьника, некоторые обучающиеся («слабые») отстают от заданного темпа, другие («сильные») выполняют задание быстрее остальных, таким образом, у них остается свободное время.

Индивидуальная форма обучения используется с целью оптимальной занятости обучающихся на уроке. Так данная форма не предполагает взаимодействия школьников друг с другом, а подразумевает самостоятельное выполнение на уроке одинаковых заданий для всего класса.

Учитель математики Н.В. Грапенина [16] при составлении урока по теме «Задачи на построение» использует индивидуальную и фронтальную формы организации учебной деятельности. Фронтальная форма осуществляется при введении нового материала по данной теме. Сначала учитель вместе с обучающимися рассматривают простейшие построения с помощью циркуля и линейки. Далее учитель рассказывает об этапах схемы решения задачи на построение. Затем вместе с классом разбираются три основные задачи на построение треугольника. При этом учитель комментирует и выполняет все этапы решения задачи, а обучающиеся записывают решение в тетради.

Индивидуальную форму обучения учитель реализует после решения каждой из основной задачи на построение треугольника. Обучающимся дается самостоятельная работа, состоящая из одной задачи на закрепление изученного материала.

Групповая форма обучения предусматривает, что учитель организует и управляет деятельностью нескольких групп класса. В данные учебные группы входят обучающиеся с различными способностями, что определяет наиболее плодотворный обмен информацией по теме урока. Учитель руководит данными группами непосредственно, а также опосредованно через помощников назначенных им же. В ходе урока школьники работают самостоятельно, в группе проводятся обсуждения по теме урока и взаимопроверка результатов, при необходимости преподаватель дает группе указания по заданию.

Данная форма работы может использоваться в ходе самостоятельной работы по теме «Построение треугольника по трем элементам». Таким образом, в ходе урока у школьников не пропадает интерес к работе и в группах обучающиеся получают возможность помогать друг другу, так как данная тема вызывает у них сложности.

Автор статьи О.Г. Скокова характеризует *коллективный способ обучения*, как форму обучения, включающую в себя взаимодействие нескольких организационных форм: индивидуальную, парную, групповую и коллективную. «Обучение осуществляется путем общения в динамических парах (парах сменного состава), когда каждый учит каждого, то есть все обучающиеся по очереди выполняют функции учителя» [36, С. 47].

Рассмотрим, что в педагогике понимают под *методом обучения*.

В методической литературе подчеркивается, что «методам обучения, от которых в немалой степени зависит результативность учебной работы в школе, посвящен не один десяток фундаментальных исследований, как в общей теории педагогики, так и в методике преподавания математики» [40, С. 55].

А.А. Темербекова и другие авторы учебного пособия вводят следующее определение: «*метод обучения* – упорядоченный комплекс дидактических приемов и средств, посредством которых реализуются цели обучения и воспитания. *Методы обучения* – это взаимосвязанные способы целенаправленной деятельности учителя и обучающихся» [40, С. 57].

Существует большое количество *классификаций методов обучения*. Но наиболее распространенной является классификация авторов И.Я. Лернера, М.Н. Скаткина и М.И. Махмутова. Они делят методы обучения *по характеру познавательной деятельности* обучающихся. Так они выделяют:

– объяснительно-иллюстративные методы: лекция, беседа, рассказ;

– репродуктивный метод, то есть многократное повторение нового материала и показанных учителем способов деятельности, например, с помощью решения задач;

– проблемный метод (проблемные или познавательные задачи);

– частично-поисковые методы. Они включают в себя эвристический и исследовательский методы обучения.

Рассказ как метод обучения математике играет вспомогательную роль. Данный метод представляет собой повествовательное изложение, например, историческая справка о появлении задач на построение. С помощью рассказа желательно сообщать информацию о значении изучаемого материала, по отношению к теме исследовательской работы – значение задач на построение в науке и жизни.

К наиболее известным методам обучения относят *беседу*. В учебном пособии А.А. Темербековой и др. представлено следующее определение: «*Беседа* – диалогический метод обучения, в ходе которого обучающиеся либо сами приходят к усвоению нового материала, либо закрепляют и расширяют изученное ранее» [40, С. 61].

Разделяют два возможных *способа построения беседы*: рассмотрение частного вопроса, впоследствии переходя к обобщениям; изучение общего вопроса и на его основе – частных. Выбор способа зависит от темы, изучаемой на уроке.

В случае обучения теме *«Построение треугольника по трем элементам»* сначала учителем разбираются частные вопросы, то есть рассматриваются простейшие построения, в дальнейшем переходят к общим – непосредственно построению треугольника по заданным элементам.

Рассмотрим *метод проблемного обучения*.

Суть проблемного обучения состоит в следующем: перед школьниками ставится проблема, пути и способы решения которой они исследуют самостоятельно, но при непосредственном участии самого учителя. То есть основа в проблемном методе обучения есть создание проблемной ситуации.

По Л.М. Фридману, «*проблемная ситуация* – это не просто затруднение, преграда в деятельности субъекта, а осознанное субъектом затруднение, способ устранения которого он желает найти» [42, С. 125].

В учебном процессе проблемные ситуации возникают не спонтанно, а в результате целенаправленной деятельности учителя. Поэтому, как уточняет автор, их правильно называть *учебно-проблемными ситуациями,* создаваемыми учителем и вовлекающими обучающихся в активную мыслительную деятельность.

Т.М. Карелина в статье [25, С. 20] отмечает, что проблемная ситуация может быть создана не только при рассмотрении теоретического вопроса, но и при решении задач.

Обратимся к уроку геометрии учителя математики В.А. Зеликовой [20] по теме «Построение треугольника по трем сторонам». В ходе урока учитель применяет метод проблемного обучения. Данный метод применяется на этапе введения нового материала. После проведения в задаче построения и доказательства, учитель перед этапом исследования дает школьникам другое задание, которое звучит так: «*Построить треугольник со сторонами 8см, 5см, 3см*». В ходе решения данного задания обучающиеся сталкиваются с проблемной ситуацией, которая заключается в том, что при данных условиях ученики не смогут построить треугольник. Рассуждая, учитель с обучающимися приходят к выводу, что не каждый треугольник можно построить по трем сторонам. И только после этого возвращаются к предыдущей задаче на этап исследования.

Перейдем к *эвристическому методу обучения* и рассмотрим, что авторы вкладывают в данное понятие.

Н.В. Метельский пишет: «*Эвристический метод* (метод открытия) в обучении в узком понимании означает *эвристическую беседу* – диалогическую (вопросно-ответную) форму обучения, при которой учитель не сообщает учащимся готовых знаний, а умело поставленными вопросами побуждает их самих на основе уже имеющихся знаний, наблюдений, личного жизненного опыта подходить к новым понятиям, выводам, правилам, доказательствам, решениям» [30, С. 216].

Центральное место в системе вопросов эвристической беседы занимают проблемные вопросы, на которые у обучающихся нет заранее готовых ответов. Н.В. Метельский уточняет, что данные вопросы предназначены для того, чтобы «направлять мысль школьников на преодоление несоответствий между имеющимися у них знаниями и новыми фактами, которые выявляются во время беседы» [30, С. 217].

В теме «Построение треугольника по трем элементам» данный метод можно применить на *этапе анализа схемы решения*.

Приведем пример вопросов *эвристической беседы* на этапе анализа в ходе решения **задачи**: *«Построить прямоугольный треугольник по катету и прилежащему углу»* [6, С. 87]:

1. Что дано по условию задачи?
2. Что нужно построить?
3. Сколько элементов треугольника нам даны? Перечислите их.
4. Какие простейшие построения понадобятся при решении задачи?
5. Что нужно построить сначала?
6. Как построить прямой угол?
7. Как построить острый угол?

Таким образом, с помощью вопросно-ответной формы учитель облегчает для обучающихся поиск решения задачи на построение треугольника.

Методы наглядности и демонстрации (показ схем, плакатов, действий, моделей, приемов и так далее) неразрывно связаны со средствами обучения. Это объясняется тем, что сущность данного метода заключается в том, что при помощи разнообразных средств обучения у учеников формируется представление о том или ином объекте (явлении) или создается образ изучаемого предмета [40, С. 63].

Данный метод в преподавании математики, прежде всего, направлен на облегчение восприятия обучающимися сообщаемого нового материала. Он способствует созданию у школьников пространственных представлений и помогает развивать им конструктивные способности.

При анализе конспектов уроков геометрии по теме исследования учителей математики было отмечено, что большинство из них прибегают к мультимедиа; в данном случае, они используются для демонстрации презентаций.

Методы обучения тесно связаны со средствами обучения. Чаще всего в понятие *средства обучения* включают учебные, а также наглядные пособия, технические средства, демонстрационные устройства и так далее.

При разумном использовании на уроке разнообразных средств обучения обучающимся легче воспринимать и усваивать математические знания. В противном случае, при слишком частом их использовании, у обучающегося может произойти задержка развития абстрактного мышления, а также привести к затруднению решения задачи, которая требует развитого пространственного представления [26, С. 286].

Классификация средств обучения подразделяется на:

– зрительные (наглядные): учебники и учебные пособия, раздаточный материал, плакаты, чертежи, таблицы и так далее;

– слуховые (аудиальные) средства;

– зрительно-слуховые (аудиовизуальные): мультимедийные учебники, слайды, компьютеры, учебные фильмы и так далее.

Как отмечает В.А. Сластенин [37], подбор средств обучения для урока зависит, прежде всего, от целей поставленных учителем на уроке, методов учебной работы, также возраста обучающихся, а не только от материальной оснащенности школы.

В геометрии наиболее распространены визуальные средства, например, *чертежи, плакаты, таблицы*. В настоящее время в общеобразовательных школах получают распространение *презентации* по той или иной теме урока.

Как известно, на уроке математики важной частью является не только изложение учителем нового материала, но и заинтересованность каждого обучающегося в получении данных знаний. В связи с этим, учителю необходимо построить образовательный процесс таким образом, чтобы ученики захотели получать новые знания по математике. Поэтому каждый раз при разработке урока учитель сталкивается с проблемой выбора форм, методов и средств обучения.

Опытный учитель никогда не будет придерживаться одного какого-либо метода обучения. Использование того или иного метода, а иногда и применение нескольких методов на протяжении урока, будет зависеть от характера темы или разбираемого вопроса, также от подготовленности обучающихся по данному предмету, от наличия предоставляемого времени для изучения темы. Таким образом, знания обучающихся окажутся более прочными и сознательными, если они будут приобретаться в процессе активной учебно-познавательной деятельности, а не только путем пассивного восприятия. Поэтому, обеспечение активизации учебного процесса и самостоятельности мышления школьников является для преподавателя решающим фактором при выборе форм, методов и средств обучения.

При обучении решению задач на построение треугольников в курсе геометрии основной школы могут использоваться все три формы обучения, как в отдельности, так и в совокупности. Фронтальная форма, чаще всего, применяется на первом уроке при введении нового материала. К индивидуальной и групповой формам обучения учителя обращаются при отработке умений и навыков по теме исследования, при решении задач на первом и последующих уроках, в ходе самостоятельной работы. Все вышеперечисленные в работе методы обучения также могут использоваться на уроках по данной теме. Они делают урок разнообразнее и интереснее. В свою очередь, наглядные средства обучения облегчают восприятие и усвоение учениками нового материала.

§6. Методические рекомендации по обучению решению задач на построение треугольников в курсе геометрии основной школы

Из рассмотренных ранее учебников геометрии 7-9 классов таких авторов как А.Д. Александров, Л.С. Атанасян, В.Ф. Бутузов, А.В. Погорелов и И.Ф. Шарыгин, за основу в работе был взят учебник Л.С. Атанасяна.

На изучение темы «Построение треугольника по трем элементам» по учебнику Л.С. Атанасяна выделяется 2 часа. Стоит отметить, что сам параграф поделен на два подпункта, один из которых посвящен данной теме.

Т.М. Мищенко отмечает, что на задачи из рассматриваемого пункта следует обратить особое внимание, так как они «составляют одно из звеньев методической линии: *признаки равенства треугольников – задачи на построение треугольника по трем элементам – алгоритмы решения треугольников*» [31, С. 135].

В учебнике представлены три задачи на построение треугольника, из которых две с решениями, описанные в §4. При решении задач автор всегда уточняет, что дано и что нужно построить, для понимания обучающимися поставленной задачи. Дается развернутое описание построения и само построение треугольника представленное на рисунках. Проводится доказательство и исследование, причем дается развернутое объяснение количества решений данной задачи.

Начинать изучение данной темы автор рекомендует с повторения ранее усвоенного материала. Так он говорит, что учителю полезно напомнить обучающимся, что *значит решить задачу на построение с помощью циркуля и линейки*.

Несмотря на то, что в учебнике при решении задач явно не выделены этапы схемы построения Л.С. Атанасян уточняет, что после повторения пройденного материала можно рассказать школьникам о *схеме*, состоящей из *четырех этапов*: анализ, построение, доказательство, исследование. Данная схема содержится после параграфа в разделе «Задачи повышенной трудности к главам III и IV». Таким образом, школьники уже будут знать данные этапы при рассмотрении далее представленных в учебнике задач.

В методических рекомендациях к учебнику автор отмечает, что «учителю нужно иметь в виду, что обучающимся *7 класса* следует ограничиться только *выполнением* и *описанием построения*. В отдельных случаях допускается проведение анализа и доказательства, а исследование проводится лишь тогда, когда это оговорено условием задачи» [7, С. 79].

В классе Л.С. Атанасян рекомендует решить задачи:

286. «Постройте треугольник по стороне, прилежащему к ней углу и биссектрисе треугольника, проведенной из вершины этого угла» [6, С. 86].

Дано: Отрезок PQ – сторона треугольника, отрезок PM – биссектриса, выходящая из вершины P, угол P – прилежащий угол к стороне PQ (Рис. 11.).

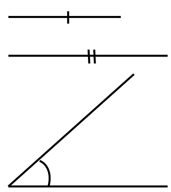

Рис. 11.

Построить. Треугольник ABC, где $AB = PQ, \angle A =$ $= \angle P$, биссектриса $AL = PM$.

Построение. (Каждый шаг этапа построения должен проговариваться учителем или учеником, если он выполняет задание у доски).

1. От произвольной точки A откладываем угол MAN, равный углу P.
2. На стороне AM откладываем отрезок AB, который равен PQ.
3. Строим биссектрису угла MAN и откладываем на ней от точки A отрезок AL, равный PM.
4. Строим прямую, проходящую через точки B и L.
5. $AN \neq BL$. Прямые пересекаются в точке C.
6. Треугольник ABC – искомый (Рис. 12.).

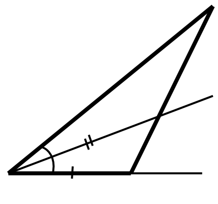

Рис. 12.

289 [6, С. 87]. «Даны два угла hk и h_1k_1 и отрезок PQ. Постройте треугольник ABC так, чтобы $AB = PQ, \angle A = \angle hk, \angle B = \frac{1}{2}\angle h_1k_1$».

290 [6, С. 87]. «Постройте прямоугольный треугольник: а) по двум катетам; б) по катету и прилежащему к нему острому углу».

291 (в). «Постройте равнобедренный треугольник: в) по боковой стороне и углу при основании» [6, С. 87].

Дано: $\angle \beta$ – угол при основании треугольника, c – боковая сторона равнобедренного треугольника (Рис. 13.).

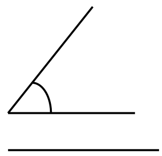

Рис. 13.

Построение.

1. От произвольной точки A откладываем угол, равный углу β.
2. На стороне угла откладываем отрезок $AB = c$.
3. $\angle B = 180° - 2\angle \beta$ (Рис. 14.).

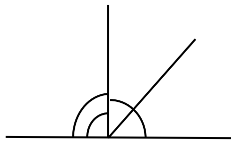

Рис. 14.

4. На стороне $\angle B$ откладываем отрезок $BC = c$.
5. Соединяем точки A и C.
6. Треугольник ABC – искомый (Рис. 15).

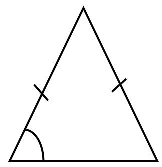

Рис. 15.

292 [6, С. 87]. «Даны отрезки P_1Q_1, P_2Q_2 и P_3Q_3. Постройте треугольник ABC так, чтобы: а) $AB = P_1Q_1, BC = P_2Q_2, CA = 2P_3Q_3$; б) $AB = 2P_1Q_1, BC = P_2Q_2, CA = \frac{3}{2}P_3Q_3$».

293 [6, С. 87]. «Постройте треугольник по стороне, прилежащему к ней углу и высоте, проведенной к этой стороне».

Для более подготовленных обучающихся автор также предусматривает задачи, которые отмечены звездочкой, что говорит о повышенном уровне сложности:

313*. «Постройте треугольник по двум сторонам и медиане, проведенной к третьей стороне» [6, С. 90].

В данной задаче следует провести анализ для облегчения поиска ее решения. То есть сначала нарисовать искомую фигуру со всеми данными элементами по условию задачи и, исходя из рисунка, составить план ее построения. Далее следует переходить к построению. Для подтверждения правильности решения необходимо провести доказательство.

Анализ. Предположим, что треугольник ABC, в котором $AC = b$, $AB = c$, $AM = m$, построен. Достроим треугольник до параллелограмма, где $AC = BD = b$, $AB = CD = c$, $AD = 2m$ (Рис. 16.). Получим треугольник ACD, который мы сможем построить.

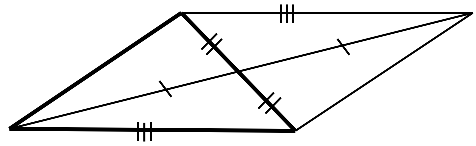

Рис. 16.

Построение.

1. От произвольной точки A откладывает отрезок $AD = 2m$.

2. Делим отрезок AD пополам точкой M.

3. Строим треугольник ACD по трем сторонам, где $AD = 2m$, $AC = b$, $CD = c$.

4. Продлеваем CM за строну AD на длину CM. Получаем отрезок CB.

5. Треугольник ABC – искомый.

Доказательство. Треугольники CMD и AMB равны по первому признаку, то есть $AC = b$, $AB = CD = c$, $AM = \frac{1}{2}AD = c$. AM – медиана по построению.

Исследование. (Данный этап можно пропустить). Данная задача будет иметь решение, если возможно будет построить треугольник ACD, то есть должно выполняться неравенство треугольника со сторонами b, c и $2m$. В противном случае решений нет.

316* [6, С. 91]. «Постройте треугольник по стороне, высоте, проведенной к ней, и медиане, проведенной к одной из двух других сторон».

При наличии времени на уроке автор рекомендует решить задачу, которая не представлена в учебнике Л.С. Атанасяна: *«Построить прямоугольный треугольник по гипотенузе и внешнему углу при вершине острого угла»* [7, 80].

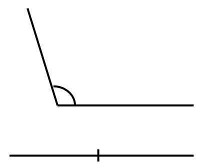

Рис. 17.

Решение. Начертим данные отрезок PQ и угол hk (Рис. 17.).

Построение.

1. Проводим прямую, отмечаем на ней точку B и откладываем отрезок BC, равный PQ.

2. Откладываем от луча BD, который является продолжением луча BC, угол DBM, равный углу hk.

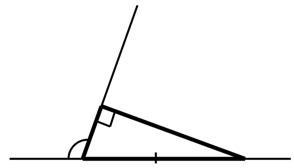

Рис. 18.

3. Проводим прямую, перпендикулярно прямой BM, через точку C. Буквой A отмечаем точку пересечения этой прямой с лучом BM.

4. Треугольник ABC искомый (Рис. 18.).

Доказательство. (Доказательство проводится в устной форме). «По построению треугольник ABC прямоугольный, гипотенуза BC равна данному отрезку PQ и внешний угол ABD треугольника равен данному углу hk. Следовательно, построенный треугольник ABC удовлетворяет всем условиям задачи» [7, С. 81].

Далее учителю следует обратить внимание обучающихся на то, что данная задача имеет решение только при условии, что данный угол hk – тупой. При этом рекомендуется, чтобы обучающиеся сами обосновали справедливость данного утверждения.

Следующие задачи автор рекомендует в качестве *домашних заданий*:

Во-первых, предлагаются *вопросы для повторения* к Главе IV:

21 [6, С. 89]. «Объясните, как построить треугольник: а) по двум сторонам и углу между ними; б) по стороне и двум прилежащим к ней углам».

22 [6, С. 89]. «Объясните, как построить треугольник по трем сторонам. Всегда ли эта задача имеет решение?».

Во-вторых, рекомендуется *задачи для самостоятельного решения*:

287 [6, С. 87]. «Постройте треугольник по стороне, медиане, проведенной к одной из двух других сторон, и углу между данными стороной и медианой».

288 [6, С. 87]. «Даны отрезок PQ и угол hk. Постройте треугольник ABC так, чтобы: а) $AB = PQ, \angle ABC = \angle hk, \angle BAC = \frac{1}{2} \angle hk$; б) $AB = PQ$, $\angle ABC = \angle hk, \angle BAC = \frac{1}{4} \angle hk$ ».

291 (а, б, г) [6, С. 87]. «Постройте равнобедренный треугольник: а) по боковой стороне и углу, противолежащему основанию; б) по основанию и углу при основании; г) по основанию и боковой стороне».

Наиболее подготовленным обучающимся рекомендуется в качестве домашнего задания решить:

294 [6, С. 88]. «Постройте треугольник по двум сторонам и высоте, проведенной к одной из этих сторон».

295 [6, С. 88]. «Постройте треугольник по двум сторонам и медиане, проведенной к одной из этих сторон».

На следующем уроке рекомендуется провести работу проверочного характера на 20-25 минут для проверки усвоения школьниками нового материала. В методических рекомендациях автор для проверки знаний предлагает один из вариантов самостоятельной работы, состоящую из двух задач.

Самостоятельная работа для первого варианта.

Задача 1 [7, С. 79]. «Построить прямоугольный треугольник по катету и прилежащему острому углу».

Задача 2 [7, С. 79]. «Даны отрезки PQ и P_1Q_1 и угол hk. Постройте треугольник CDE так, чтобы $CE = PQ, \angle C = \angle hk, CF = P_1Q_1$, где CF – высота треугольника».

Стоит отметить, что Л.С. Атанасян на последующих уроках предлагает решать подобные задачи при наличии свободного времени.

В предложенной контрольной работе к параграфам «Прямоугольные треугольники» и «Построение треугольника по трем элементам» дается одна задача на построение прямоугольного треугольника.

Несмотря на то, что в учебнике Л.С. Атанасяна задача на *«построение треугольника по трем сторонам»* представлена третьей, Т.М. Мищенко рекомендует начать урок с решения именно данной задачи, отмечая ее как одну из пяти основных задач на построение. Также она отмечает, что при решении этой задачи особое внимание учителю стоит уделять самому построению и его описанию, а также исследованию. Далее Т.М. Мищенко предлагает обучающимся решить задачу на *«построение равностороннего треугольника по его стороне»*. С помощью предложенной задачи, учитель сможет установить степень усвоения решения школьниками раннее разобранной задачи.

Этой же последовательности Т.М. Мищенко рекомендует следовать и обучающимся работающим по учебнику А.В. Погорелова. После обсуждения и выполнения построения в тетрадях этих двух задач, следует перейти к рабочей тетради к учебнику и выполнить представленные в ней задачи по данной теме для закрепление алгоритма.

Об оставшихся двух задачах в учебнике Л.С. Атанасяна, а именно: «*построение треугольника по двум сторонам и углу между ними»* и *«построение треугольника по стороне и двум прилежащим к ней углам»*, Т.М. Мищенко говорит, как о последовательных шагах решения основных задач на построение.

При выборе задач для решения в классе и для домашней работы учитель должен ориентироваться на уровень подготовки класса. Именно так говорит Т.М. Мищенко, отмечая, что задачи данного типа всегда представляют некоторые сложности для школьников. Также она предлагает один из вариантов работы школьников – *индивидуальную работу*, заключающуюся в индивидуальных заданиях.

В предложенной контрольно-измерительной работе к Главе IV Т.М. Мищенко задачи подобного рода не представлены. Это объясняется количеством времени, затрачиваемого на выполнение одной задачи по теме исследования.

Н.Ф. Гаврилова рекомендует начать урок по теме «Построение треугольника по трем элементам» с повторения материала прошлого урока.

Для этого она рекомендует фронтальную работу с классом: решение *задач по готовым чертежам*.

Задача 1 [15, С. 234]. «Рис. 19. *Найти:* расстояние от точки A до прямой a».

Задача 2 [15, С. 234]. «Рис. 20. *Найти:* расстояние от точки A до прямой a».

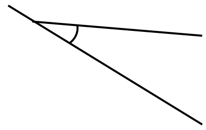

Рис. 19.

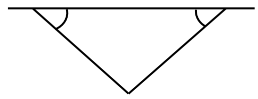

Рис. 20.

Задача 3 [15, С. 234]. «Рис. 21. *Найти:* расстояние от точки A до прямой a».

Задача 4 [15, С. 234]. «Рис. 22. *Дано:* $KA = 7$ см. *Найти:* расстояние от точки A до прямой a».

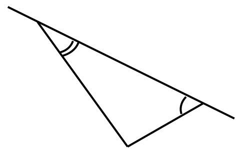

Рис. 21.

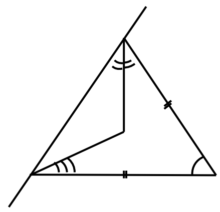

Рис. 22.

С целью подготовки обучающихся к восприятию нового материала Н.Ф. Гаврилова предлагает решить задачи. При этом она рекомендует переходить к групповому методу обучения. Следует поделить учеников на три группы, далее каждая группа выполняет предложенные им задания, всего их два, затем весь класс прослушивает решения задач.

Рассмотрим один из вариантов, предложенный Н.Ф. Гавриловой.

Задания для первой группы

Задание 1 [15, С. 234]. «С помощью циркуля, линейки и транспортира постройте треугольник ABC, в котором $AB = 4$ см, $BC = 5$см, $\angle B = 70°$».

Задание 2 [15, С. 235]. «С помощью циркуля и линейки постройте угол, равный данному (примерный угол задать на доске)».

После проведения данной работы автор предлагает переходить к изложению нового материала. Причем продолжать работу следует в группах, где обучающиеся могут советоваться друг с другом, обсуждать решения задачи.

В данном случае для каждой группы дается задание, уже одно. А также ставится *общий вопрос для всех групп*: «Всегда ли можно построить такой треугольник, который удовлетворял бы всем условиям задачи?».

Рассмотрим задание, предложенное для первой группы.

«*Дано*: Рис. 23.

Построить: треугольник ABC такой, что $AB = PQ, \angle A = \angle M, \angle B = \angle N$, с помощью циркуля и линейки без делений» [15, С. 235].

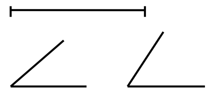

Рис. 23.

Когда группы закончат решать задания и будут готовы дать ответ, следует заслушать решение всех задач и обсудить правильность их решения.

Далее Н.Ф. Гаврилова рекомендует использовать индивидуальную форму обучения. То есть «самостоятельно решить каждому ученику в тетради каждую задачу, озаглавив их следующим образом: первая задача – «Построение треугольника по стороне и прилежащему к ней углам»; вторая задача – «Построение треугольника по двум сторонам и углу между ними»; третья задача – «Построение треугольника по трем сторонам»» [15, С. 236].

После автор рекомендует приступать к этапу закрепления нового материала, в данном случае решить задачу из учебника Л.С. Атанасяна.

286. «Постройте треугольник по стороне, прилежащему к ней углу и биссектрисе треугольника, проведенной из вершины этого угла» [6, С. 86].

Перед решением задачи следует дать обучающимся 2-3 минуты на обдумывание, а затем переходить к обсуждению вариантов решений.

В качестве домашнего задания Н.Ф. Гаврилова предлагает изучение параграфа 39 «Построение треугольника по трем элементам» учебника Л.С. Атанасяна и вопросы 21, 22 к Главе IV. Также решить задачи 287, 289, 274 (условия представлены в работе выше). Правильность решения задачи 287 автор рекомендует проверить на следующем уроке вместе с обучающимися у доски. Отметим, что ученики должны выполнить только этап построения. Рассмотрим решение данной задачи.

287. «Постройте треугольник по стороне, медиане, проведенной к одной из двух других сторон, и углу между данными стороной и медианой» [6, С. 87].

Построение.

1. Строим $\angle A$, равный данному углу.

2. На одной из сторон угла откладываем отрезок AB, который равен стороне треугольника, на другой – отрезок AM, который равен медиане треугольника.

3. Строим прямую BM. На луче BM от точки M откладываем отрезок $MC = BM$.

4. Треугольник $ABC -$ искомый (Рис. 24.).

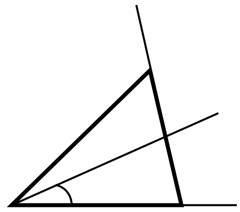

Рис. 24.

В.Ф. Бутузов рекомендует начать урок по теме «Построения циркулем и линейкой. Построение треугольника по трем элементам» с напоминания обучающимся о чертежных инструментах (таких как линейка с делениями и транспортир) для изображения геометрических фигур. Далее учителю следует сказать о том, что построения можно проводить и с помощью только двух инструментов: линейки без делений и циркуля. После этого стоит перейти к определению *понятия задачи на построение*.

Автор отмечает, что особое внимание следует обратить на *простейшие построения*, которые можно провести с помощью каждого инструмента отдельно. Следующий шаг – решить *задачу на «построение отрезка равного данному»* [10, С. 92].

Только после выполнения всего вышеперечисленного, В.Ф. Бутузов рекомендует переходить к *задаче на «построение треугольника по трем сторонам»*. Как отмечает автор для того, чтобы, прежде всего, обучающиеся понимали постановку задачи, при решении каждой задачи учителю требуется проговаривать, что дано в условии и что нужно построить. Далее разбирается решение задачи, представленное в учебнике. Ученики выполняют задание в тетрадях параллельно с объяснением учителя.

Автор обращает внимание на *этап исследования*. Учитель должен объяснить, в каком случае задача будет иметь решение, а в каком – нет. После этого В.Ф. Бутузов предлагает обучающимся *на практике* проверить знания, полученные в ходе исследования (взять три отрезка, где один больше суммы других и провести с ними построение треугольника).

Автор отмечает, что учителю полезно отметить, что разобранная задача является одной из *базовых задач на построение*, то есть она используется при решении других, более сложных.

В.Ф. Бутузов рекомендует при обсуждении решения задачи, выбранной учителем для решения в классе, обратить внимание класса на то, что при решении задачи на построение часто сначала рисуют искомую фигуру и, исходя из рисунка, составляют план построения, который в результате приведет к искомой фигуре.

В отличие от остальных авторов, В.Ф. Бутузов рекомендует после знакомства обучающихся с *построением прямой, перпендикулярной к данной*, перейти к построению прямоугольного треугольника по основным элементам. На решение данных задач автор отводит два урока. На выделенных уроках следует разобрать построения прямоугольных треугольников, представленные в учебнике. Здесь наибольшее внимание уделяется уже *этапу построения*.

Рассмотрим урок, разработанный учителем математики В.А. Зеликовой [20] по теме «Построение треугольника по трем сторонам». Данный урок составлен по учебнику Л.С. Атанасяна.

Вначале урока в качестве актуализации знаний школьникам требуется произвести несколько простейших построений на отдельных листочках. Далее проводится математический диктант по ранее изученным темам.

Следующий этап урока – *исследовательская работа*. На данном этапе с помощью наводящих вопросов и заданий, предложенных учителем в презентации, школьники формулируют *определение геометрического места точек*. После полученные знания закрепляются заданием из учебника.

Далее предлагается построить треугольник по трем сторонам. Учитель вместе с обучающимися устанавливают, что дано и что требуется построить, проводиться само построение и его описание, а также доказательство. Все эти этапы представлены в презентации, школьники дублируют все в тетради.

Прежде чем перейти к этапу исследования данной задачи учитель предлагает обучающимся решить задачу на построение треугольника с данными сторонами, где предложенная задача не будет иметь решения, так как не выполняется теорема о сумме сторон треугольника. В следствии школьниками делается вывод, который дает возможность вернуться им к предыдущей задаче и провести исследование.

Обратимся к уроку учителя математики А.С. Демченко [18] по теме «Построение треугольника по трем элементам». Данный урок проводится с использованием презентации, в которой разобраны все три «основных» задачи на построение треугольника. Каждую из задач учитель с обучающимися основательно разбирает, причем учитель предлагает лишь этап построения. После каждой задачи, школьникам предлагается решить подобную, разобранной раннее, задачу. Один ученик выполняет построение на доске, остальные выполняют решение в тетрадях. На этом А.С. Демченко урок завершает.

Таким образом, перед изучением темы «Построение треугольника по трем элементам» авторы рекомендуют ознакомить обучающихся с общими сведениями о задачах на построение. Например, привести историческую справку о них, рассказать, что значит решить задачу на построение и так далее. Затем необходимо либо повторить пройденный ранее материал о простейших задачах на построение, либо познакомить обучающихся с ними.

Начать изучение данной темы следует с построения треугольника по трем сторонам, комментируя все этапы решения данной задачи. Несмотря на то, что все этапы схемы решения задачи на построение в 7 классе выполнять не нужно, авторы рекомендуют учителю перед решением задач ознакомить обучающихся с ними.

На первом уроке по данной теме при решении задач особое внимание уделяется условию. Подробно описывается ход построения треугольника, устно проводятся доказательство и исследование. Причем при проведении исследования рекомендуется использовать метод проблемного обучения.

Для эффективного обучения данной теме рекомендуется использовать разные формы обучения на протяжении всего урока.

Выводы по второй главе

1. Рассмотрены формы, методы и средства обучения решению задач на построение треугольников в курсе геометрии основной школы. При обучении учащихся могут использоваться все три формы обучения, как в отдельности, так и в совокупности. Применение нескольких методов обучения при обучении теме «Построение треугольника по трем элементам» способствует привлечению обучающихся к активной работе на уроке; их выбор будет зависеть от подготовленности обучающихся по данному предмету и от наличия предоставляемого времени для изучения темы. Наглядные средства обучения облегчают восприятие и усвоение учениками материала по данной теме.

2. Изучены методические рекомендации по обучению решению задач на построение треугольников школьников 7 класса. Установлено, что начинать урок по данной теме следует с изучения или повторения материала о простейший построениях геометрических фигур. Далее рекомендуется переходить к задаче на «построение треугольника по трем элементам». Некоторые авторы рекомендуют разобрать три «основных» задачи на построение треугольника. Особое внимание на первом уроке учителю стоит обращать условию задачи. На всех уроках следует подробно описывать и проговаривать этапы построения треугольника.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Сформулируем выводы и полученные результаты проведенного исследования.

1. Проанализированы и выделены основные цели обучения решению задач на построение треугольника в курсе геометрии основной школы. Изучены государственные стандарты основного общего образования. Выявлено, что решение задач на построение треугольника способствует развитию мыслительной деятельности обучающихся; влияет на развитие логических навыков и математической инициативы обучающихся, так как обычно в решении они не допускают стандартного подхода. В ходе обучения теме у школьников развивается пространственное представление. Данные задачи позволяют подробнее разобраться с известным им теоретическим материалом. Вместе с этим учащиеся учатся проявлять настойчивость, инициативу и изобретательность в достижении цели, дисциплинируют и концентрируют внимание.

2. Проанализированы и выделены основные требования к знаниям и умениям обучающихся по теме «Построение треугольника по трем элементам» в курсе геометрии основной школы. Рассмотрена Примерная основная образовательная программа основного общего образования и выявлены планируемые результаты изучения данной темы в курсе геометрии основной школы. Установлено, что должен знать и уметь обучающийся после изучения данной темы.

3. Выполнен анализ содержания теоретического материала темы «Построение треугольника по трем элементам». В ходе анализа было выявлено, что данная тема изучается в 7 классе и на ее изучение в среднем дается от 1 до 2 часов. После проведения анализа было отмечено, что только в учебнике Л.С. Атанасяна, в отличие от учебников А.Д. Александрова, В.Ф. Бутузова, А.В. Погорелова и И.Ф. Шарыгина, данная тема выносится отдельным пунктом, а сам материал представлен более полно. Теоретический материал по теме «Построение треугольника по трем элементам» строится на задачном

материале. В 8-9 классах представляются дополнительные сведения по данному материалу и даются задачи. Авторы придерживаются одной линии в изложении данной темы – разбирают основные задачи на построение треугольника и дают задачи для решения в классе и для самостоятельного решения.

4. Представлен анализ задачного материала по теме «Построение треугольника по трем элементам» в учебниках геометрии 7-9 классах разных авторов. В процессе анализа задачного материала выделены типы задач по данной теме (Приложение 1-3). В 7 классе сосредоточена большая часть задачного материала, даются задачи на построение треугольника по основным и второстепенным элементам треугольника. В 8-9 классах предлагается построить треугольник по второстепенным элементам, в основном эти задачи находятся в разделе «Задачи повышенной сложности». Анализ показал, что в учебниках 7 класса Л.С. Атанасяна, В.Ф. Бутузова и А.В. Погорелова задачный материал более разнообразен в отличие от учебников А.Д. Александрова и И.Ф. Шарыгина, в которых предлагаются всего четыре задачи по теме исследования. Отметим, что в учебниках для углубленного изучения 8-9 классов А.Д. Александрова представлены различные задачи по теме исследования.

5. Рассмотрены формы, методы и средства обучения решению задач на построение треугольников в курсе геометрии основной школы. При обучении могут использоваться все три формы обучения, как в отдельности, так и в совокупности. Применение нескольких методов обучения при обучении теме «Построение треугольника по трем элементам» способствует привлечению обучающихся к активной работе на уроке, их выбор будет зависеть от подготовленности обучающихся по данному предмету и от наличия предоставляемого времени для изучения темы. Наглядные средства обучения облегчают восприятие и усвоение учениками материала по данной теме.

6. Изучены методические рекомендации по обучению решению задач на построение треугольников школьников 7 класса. Установлено, что начинать урок по данной теме следует с изучения или повторения материала о простейший построениях геометрических фигур. Далее рекомендуется переходить к задаче на «построение треугольника по трем элементам». Некоторые авторы рекомендуют разобрать три «основных» задачи на построение треугольника. Особое внимание на первом уроке учителю стоит обращать условию задачи. На всех уроках следует подробно описывать и проговаривать этапы построения треугольника.

Подводя итоги данной работы можно сказать, что поставленные задачи достигнуты.

СПИСОК ИСПОЛЬЗУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Абдуллаева, Г. Реализация межпредметных связей в черчении и геометрии [Электронный ресурс] / Г. Абдуллаева // Известия Кыргызской академии образования. – 2014. – № 3 (31). – С. 66-68. – Режим доступа: https://elibrary.ru/item.asp?id=26157720. – Последнее обновление 15.04.2018.

2. Александров, А.Д. Геометрия [Текст]: учеб. пособие для 8 кл. с углубл. изучением математики / А.Д. Александров, А.Л. Вернер, В.И. Рыжик, Т.Г. Ходот. – М.: Просвещение, 2004. – 240 с.

3. Александров, А.Д. Геометрия [Текст]: учеб. пособие для 9 кл. с углубл. изучением математики / А.Д. Александров, А.Л. Вернер, В.И. Рыжик, Т.Г. Ходот. – М.: Просвещение, 2002. – 240 с.

4. Александров, А.Д. Геометрия. 7 класс [Текст]: учеб. для общеобразоват. учреждений / А.Д. Александров, А.Л. Вернер, В.И. Рыжик, Т.Г. Ходот. – М.: Просвещение, 2013. – 176 с.

5. Андреева, Е.В. Задачи на построение как неотъемлемая часть курса геометрии в современной школе [Электронный ресурс] / Е.В. Андреева // Проблемы и перспективы развития образования в России. – 2011. – № 8. – С. 254-257. – Режим доступа: https://elibrary.ru/item.asp?id=20585333. – Последнее обновление 15.04.2018.

6. Атанасян, Л.С. Геометрия. 7-9 классы [Текст]: учеб. для общеобразоват. учреждений / Л.С. Атанасян, В.Ф. Бутузов, С.Б. Кадомцев и др. – 2-е изд. – М.: Просвещение, 2014. – 383 с.

7. Атанасян, Л.С. Геометрия. Методические рекомендации. 7 класс. [Текст]: учеб. для общеобразоват. организаций / Л.С. Атанасян, В.Ф. Бутузов, Ю.А. Глазков и др. – М.: Просвещение, 2015 – 95 с.

8. Брудно, А.Л. Вокруг циркуля / А.Л. Брудно // Квант, 1974. – № 10. – С. 2-9.

9. Бурмистрова, Т.А. Геометрия. Сборник рабочих программ. 7-9 классы [Текст]: пособие для учителей общеобразоват. учреждений / Т.А. Бурмистрова. – М.: Просвещение, 2014. – 95 с.

10. Бутузов, В.Ф. Геометрия. 7 класс [Текст]: учеб. для общеобразоват. учреждений / В.Ф. Бутузов, С.Б. Кадомцев, В.В. Прасолов; под ред. В.А. Садовничего. – М.: Просвещение, 2010. – 127 с.

11. Бутузов, В.Ф. Геометрия. 8 класс [Текст]: учеб. для общеобразоват. учреждений / В.Ф. Бутузов, С.Б. Кадомцев, В.В. Прасолов; под ред. В.А. Садовничего. – М.: Просвещение, 2011. – 175 с.

12. Бутузов, В.Ф. Геометрия. Поурочные разработки. 7 класс [Текст]: учеб. пособие для общеобразоват. организаций / В.Ф. Бутузов, С.Б. Кадомцев, В.В. Прасолов. – 2-е изд. – М.: Просвещение, 2017. – 112 с.

13. Вернер, А.Л. Геометрия. Методические рекомендации. 7 класс [Текст]: учеб. пособие для общеобразоват. организаций / А.Л. Вернер, В.И. Рыжик, Т.Г. Ходот. – 2-е изд. – М.: Просвещение, 2017. – 132 с.

14. Гаврилова, И.Н. Урок геометрии по теме «Задачи на построение». 7-й класс [Электронный ресурс] / И.Н. Гаврилова // Фестиваль педагогических идей «Открытый урок» 2003-2018. – Режим доступа: http://festival.1september.ru/articles/617861/. – Последнее обновление 15.04.2018.

15. Гаврилова, Н.Ф. Универсальные поурочные разработки по геометрии: 7 класс [Текст] / Н.Ф. Гаврилова. – 2-е изд., перераб. и доп. – М.: ВАКО, 2010. – 304 с.

16. Грапенина, Н.В. Задачи на построение. [Электронный ресурс] / Н.В. Грапенина // Фестиваль педагогических идей «Открытый урок» 2003-2018. – Режим доступа: http://festival.1september.ru/articles/212138/.– Последнее обновление 21.05.2018.

17. Демидова, С.И. Самостоятельная деятельность учащихся при обучении математике (формирование умений самостоятельной работы): Сб. ст. / сост. С.И. Демидова, Л.О. Денищева – М.: Просвещение, 1985. – 191 с.

18. Демченко, А.С. Применение информационных технологий на уроках геометрии при изучении темы «Построение треугольника по трем элементам» [Электронный ресурс] / А.С. Демченко // Фестиваль педагогических идей «Открытый урок» 2003-2018. – Режим доступа: http://festival.1september.ru/articles/517426/. – Последнее обновление 15.05.2018.

19. Ершова, А.П. Сборник заданий для тематического и итогового контроля знаний. Геометрия. 7 класс [Текст]/ А.П. Ершова. – М.: ИЛЕКСА, 2013. – 112 с.

20. Зеликова, В.А. Урок математики по теме «Построение треугольника по трем сторонам». 7-й класс [Электронный ресурс] / В.А. Зеликова // Фестиваль педагогических идей «Открытый урок» 2003-2018. – Режим доступа: http://festival.1september.ru/articles/620277/. – Последнее обновление 15.05.2018.

21. Зив, Б.Г. Геометрия. Дидактические материалы. 7 класс [Текст] / Б.Г. Зив, В.М. Мейлер. – 16-е изд. – М.: Просвещение, 2010. – 127 с.

22. Зив, Б.Г. Задачи к урокам геометрии. 7-11 классы [Текст] / Б.Г. Зив. – СПб.: Петроглиф, Виктория плюс, 2016. – 608 с.

23. Зив, Б.Г. Задачи по геометрии [Текст]: Пособие для учащихся 7-11 кл. общеобразоват. учреждений / Б.Г. Зив, В.М. Мейлер, А.Г. Баханский. – 5-е изд. – М.: Просвещение, 2003. – 271 с.

24. Ильиных, Д.С. Инверсия как геометрическое преобразование в программе внеурочной деятельности [Электронный ресурс] / Д.С. Ильиных // Математическое образование: современные методики и инновации, опыт практического применения. – 2016. – С. 180-184. – Режим доступа: https://elibrary.ru/item.asp?id=28375986. – Последнее обновление 15.04.2018.

25. Карелина, Т.М. О проблемных ситуациях на уроках геометрии / Т.М. Карелина // Математика в школе. – 1999. – №6. – С. 19.

26. Колягин, Ю.М. Методика преподавания математики в средней школе. Общая методика [Текст]: учеб. пособие для студентов физ.-мат. факультетов пед. вузов / Ю.М. Колягин, В.А. Оганесян, В.Я. Саннинский, Г.Л. Луканкин. – М.: «Просвещение», 1975. – 462 с.

27. Ляпин, С.Е. Методика преподавания математики в восьмилетней школе / С.А. Гастева, Б.И. Крельштейн, С.Е. Ляпин, М.М. Шидловская; под общ. ред. С.Е. Ляпина. – М.: Просвещение, 1965. – 742, [1] с.

28. Малых, А.Е. Курс по выбору «О формировании методов решения некоторых задач конструктивной геометрии» [Электронный ресурс] / А.Е. Малых, Е.М. Маленьких // Математический вестник педвузов и университетов Волго-Вятского региона. – 2015. – № 17. – С. 273-279. – Режим доступа: https://elibrary.ru/item.asp?id=28213874. – Последнее обновление 16.04.2018.

29. Мельникова, Н.Б. Дидактические материалы по геометрии: 7 класс [Текст]: к учебнику Л.С. Атанасяна и др. «Геометрия. 7-9 классы» / Н.Б. Мельникова, Г.А. Захарова. – М.: Издательство «Экзамен», 2013. – 143, [1] с.

30. Метельский, Н.В. Дидактика математики: Общая методика и ее проблемы [Текст]: учеб.пособие для вузов. / Н.В. Метельский – 2-е изд., перераб. – Мн.: Изд-во БГУ, 1982. – 256с.

31. Мищенко, Т.М. Дидактические материалы и методические рекомендации для учителя по геометрии: 7 класс [Текст]: к учебнику Л.С. Атанасяна и др. «Геометрия. 7-9 классы». ФГОС (к новому учебнику) / Т.М. Мищенко. – М.: Издательство «Экзамен», 2016.– 158, [2] с.

32. Мищенко, Т.М. Дидактические материалы и методические рекомендации для учителя по геометрии: 7 класс [Текст]: к учебнику А.В. Погорелова «Геометрия. 7-9 классы». / Т.М. Мищенко. – М.: Издательство «Экзамен», 2014.– 206 [2] с.

33. Погорелов, А.В. Геометрия. 7-9 классы [Текст]: учеб. для общеобразоват. организаций / А.В. Погорелов. – 2-е изд. – М.: Просвещение, 2014. – 240 с.

34. Примерная основная образовательная программа основного общего образования. Одобрена решением федерального учебно-методического объединения по общему образованию / М-во образования и науки РФ. – М.: Просвещение, 2015. – 560 с.

35. Семенова, И.Н. Роль задач на построение в практико-ориентированном обучении [Электронный ресурс] / И.Н. Семенова, М.Л. Толмачева // Эпоха науки. – 2017. – № 10. – С. 51-56. – Режим доступа: https://elibrary.ru/item.asp?id=29970328. – Последнее обновление 15.04.2018.

36. Скокова, О.Г. Коллективный способ обучения на уроках математики / О.Г. Скокова // Математика в школе. – 2008. – №6. – С. 47.

37. Сластенин, В.А. Педагогика [Текст]: учеб. пособие для студ. высш. пед. учеб. заведений / В. А. Сластенин, И. Ф. Исаев, Е. Н. Шиянов; Под ред. В.А. Сластенина. - М.: Издательский центр «Академия», 2013. – 576 с.

38. Смирнова, И.М. Сайт учебно-методических комплексов по геометрии для 5-11 классов [Электронный ресурс] / И.М. Смирнова, В.А. Смирнов – Режим доступа: http://www.geometry2006.narod.ru/. – Последнее обновление 15.04.2018.

39. Столяр, А.А. Педагогика математики / А.А. Столяр – Минск «Вышэйшая школа», 1986. – 414 с.

40. Темербекова, А.А. Методика обучения математике [Текст]: учебное пособие / А.А. Темербекова, И.В. Чугунова, Г.А. Байгонакова. – СПб.: Издательство «Лань», 2015. – 512 с.

41. Федеральный государственный образовательный стандарт основного общего образования: Приказ Мин. образования и науки РФ от 17.12.2010 г. №1897. [Электронный ресурс]. – Режим досту-

па: https://минобрнауки.рф/документы/938. – Последнее обновление 09.01.2018.

42. Фридман, Л.М. Психолого-педагогические основы обучения математике в школе: Учителю математики о пед. психологии / Л.М. Фридман. – М.: «Просвещение», 1983. – 160 с.

43. Шарыгин, И.Ф. Геометрия. 7-9 кл. [Текст]: учеб. для общеобразоват. учреждений / И.Ф. Шарыгин. – М.: Дрофа, 2012. – 462 с.

44. Шебанова, Л.П. Развитие пространственного мышления учащихся в процессе обучения решению геометрических задач на построение [Электронный ресурс] / Л.П. Шебанова, З.И. Янсуфина // Математический вестник педвузов и университетов Волго-Вятского региона. – 2012. – № 14. – С. 417-422. – Режим доступа: https://elibrary.ru/item.asp?id=26231335. – Последнее обновление 15.04.2018.

45. Chiteú C., Trifu S. Organizational forms in didactic activity [Text] / C. Chiteú, S. Trifu // Procedia - Social and Behavioral Sciences, 2014. – PP. 299-304.

46. Fahlberg-Stojanovska L., Trifunov Z. Constructing and exploiting triangle with GeoGebra. [Text] / L. Fahlberg-Stojanovska, Z. Trifunov // Anale. SeriaInformatica, 2010. – PP. 45-54.

47. Marinkovic V. ArgoTriCS - Automated Triangle Construction Solver [Text] / V. Marinkovic // Journal of Experimental & Theoretical Artificial Intelligence, 2015. – PP. 1-29.

48. Marinkovic V. On-line compendium of triangle construction problems with automatically generated solutions [Text] / V. Marinkovic // The teaching of mathematics, 2015. – PP. 29-44.

49. Marinkovic V., Janicic P. Towards Understanding Triangle Construction Problems [Text] / V. Marinkovic, P. Janicic // Lecture Notes in Computer Science, 2012. – PP. 127-142.

Приложение 1

Таблица 1

Типы задач по теме «Построение треугольника по трем элементам» в учебниках геометрии 7 классов разных авторов

Тип задачи	А.Д. Александров и др. (базовый уровень) [4]	Л.С. Атанасян и др. [6]	В.Ф. Бутузов и др. [10]	А.В. Погорелов [33]	И.Ф. Шарыгин [43]
«Построение треугольника по трем сторонам»	п.2.4.	п.39. № 292.	п.35.	п.43. п.43: № 20.	п.4.2.
«Построение треугольника по стороне и двум прилежащим к ней углам»	п.7.2.	п.39. (Для самостоятельного решения). № 288, 289.	№ 107(д).	п.44: № 23(2).	-
«Построение треугольника по двум сторонам и углу между ними»	-	п.39.	№ 107(в).	п.44: №23(1).	-
«Построение прямоугольного треугольника»	№ 4.20, 5.37.	№ 290. Доп. задачи: № 314. Задачи повышенной трудности: № 356.	п.40 (Построение по гипотенузе и катету). № 107(о). Доп. задачи: № 125.	п.47: № 35.	№ 392.
«Построение равнобедренного треугольника»	-	№ 291.	№ 107(н), 108(а,о). Доп. задачи: № 124.	п.44: № 25. п.47: № 36, 40.	-
«Построение произвольного треугольника»	-	Задачи повышенной трудности: № 362.	№ 108(г). Доп. задачи: № 126(г), 130, 131. Задачи повышенной трудности: № 191.	п.44: № 24.	-

Продолжение Таблицы 1

Тип задачи	Л.С. Атанасян и др. [6]	В.Ф. Бутузов и др. [10]	А.В. Погорелов [33]	И.Ф. Шарыгин [43]
«Построение произвольного треугольника с учетом медианы»	№ 287, 295. Доп. задачи: № 313*.	Доп. задачи: № 124(б), 126(а). Задачи повышенной трудности: № 184.	п.46: № 30, 31, 32.	№ 401.
«Построение произвольного треугольника с учетом биссектрисы»	№ 286.	Доп. задачи: № 125(б), 126(в).	-	-
«Построение произвольного треугольника с учетом высоты»	№ 293, 294. Задачи повышенной трудности: № 351.	№ 107(п,р), 108(п,р). Доп. задачи: № 125(а), 126(б,в), 128, 129.	п.47: № 37, 38.	№ 397.
«Построение произвольного треугольника с учетом медианы и высоты»	Доп. задачи: № 316*, 320*.	-	п.47: № 39.	-
«Построение произвольного треугольника с учетом биссектрисы и высоты»	Доп. задачи: № 319*.	-	-	-
«Построение произвольного треугольника с учетом радиуса описанной окружности»	-	-	п.43: № 22. п.46: № 31.	-
«Построение произвольного треугольника с учетом периметра»	Задачи повышенной трудности: № 360, 361.	Задачи повышенной трудности: № 190.	-	-
На применение метода геометрических мест	-	-	п.49: № 48, 49, 50.	-

Приложение 2

Таблица 2

Типы задач по теме «Построение треугольника по трем элементам» в учебниках геометрии 8 классов разных авторов

Тип задачи	А.Д. Александров и др. (углубленный уровень) [2]	Л.С. Атанасян и др. [6]	В.Ф. Бутузов и др. [11]	И.Ф. Шарыгин [43]
«Построение прямоугольного треугольника»	№ 22.	-	№ 8(в). Доп. задачи: № 130.	-
«Построение равнобедренного треугольника»	№ 23.	Задачи повышенной трудности: № 871.	Задачи повышенной трудности: № 284.	-
«Построение произвольного треугольника»	-	Задачи повышенной трудности: № 873.	Задачи повышенной трудности: № 286.	-
«Построение произвольного треугольника с учетом медианы»	№ 24.(а), 12.71(б).	-	№ 65(в).	-
«Построение произвольного треугольника с учетом биссектрисы»	-	Задачи повышенной трудности: № 872.	Задачи повышенной трудности: № 285.	-
«Построение произвольного треугольника с учетом высоты»	№ 24.(б,г), 6.42, 12.71(а).	Задачи повышенной трудности: № 900(а).	№ 7(д), 8(д). Задачи повышенной трудности: № 212.	-
«Построение произвольного треугольника с учетом медианы и высоты»	№ 24.(д,е,ж,и)	-	№ 35*.	-
«Построение произвольного треугольника с учетом медианы, биссектрисы и высоты»	№ 24.(з)	-	-	№ 1018.

Продолжение Таблицы 2

Тип задачи	А.Д. Александров и др. (углубленный уровень) [2]	Л.С. Атанасян и др. [6]	В.Ф. Бутузов и др. [11]	И.Ф. Шарыгин [43]
«Построение произвольного треугольника с данной описанной окружностью и точками на ней, через которые проходят прямые содержащие высоту, биссектрису и медиану треугольника, проведенные из одной вершины»	-	Задачи повышенной трудности: № 901.	Задачи повышенной трудности: № 213.	-
«Построение произвольного треугольника с учетом периметра»	№ 24.(к)	Задачи повышенной трудности: № 900(б).		-
На применение метода геометрических мест	-	-	-	п.5.3. Задача 4 (решена). № 597, 598, 599, 601, 603, 607, 608.
На применение метода подобия	-	п.66 Задача 3 (решена). № 586, 587, 588, 589, 590. Доп. задачи: № 627, 629, 630.	п.82 Задача 1 (решена). № 147 (и,к), 148 (и,к). Доп. задачи: № 193, 194, 195, 196, 197.	п.8.3.Задача 4, № 1053, 1058, 1059, 1060, 1061, 1062, 1065.
«Построение произвольного треугольника с учетом двух высот»	№ 24.(в)	-	-	-
«Построение треугольника по трем высотам»	-	Задачи повышенной трудности: № 874.	Задачи повышенной трудности: № 288.	-
«Построение треугольника по трем медианам»	-	-	Доп. задачи: № 129.	№ 1019.

Приложение 3

Таблица 3

Типы задач по теме «Построение треугольника по трем элементам» в учебниках геометрии 9 классов разных авторов

Тип задачи	А.Д. Александров и др. (углубленный уровень) [3]	Л.С. Атанасян и др. [6]
«Построение прямоугольного треугольника»	№ 31.77.	-
«Построение произвольного треугольника с учетом медианы»	№ 27.74, 31.78(б).	-
«Построение произвольного треугольника с учетом биссектрисы»	№ 31.78(в).	-
«Построение произвольного треугольника с учетом высоты»	№ 31.78(а).	-
«Построение произвольного треугольника с учетом радиуса описанной окружности»	№ 31.78(д).	- -
«Построение произвольного треугольника с учетом радиуса вписанной окружности»	№ 31.78(е).	-
«Построение произвольного треугольника с учетом периметра»	№ 31.78(г).	-
«Построение треугольника по трем медианам»	-	Задачи повышенной трудности: № 1300.

Приложение 4

Решение задач из §4 «Анализ задачного материала по теме «Построение треугольника по трем элементам» в учебниках геометрии 7-9 классов разных авторов»

Задача 5 [6, С. 84]. «Постройте треугольник по двум сторонам и высоте к третьей стороне».

Решение. Даны отрезки M_1N_1, M_2N_2, M_3N_3 (Рис. 25.). Построим треугольник ABC, у которого две стороны, предположим AB и AC, равны соответственно отрезкам M_1N_1 и M_2N_2, а высота AH равна отрезку M_3N_3.

Анализ. Допустим, что искомый треугольник ABC построен (Рис. 26.). Сторона AB и высота AH являются гипотенузой и катетом прямоугольного треугольника ABH. Значит, чтобы построить треугольник ABC, сначала нужно построить прямоугольный треугольник ABH и достроить его до искомого треугольника ABC.

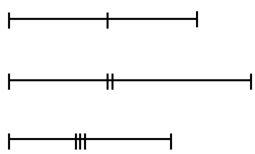

Рис. 25.

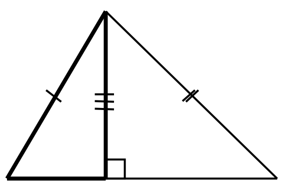

Рис. 26.

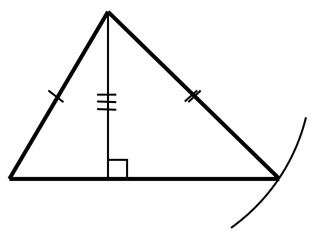

Рис. 27.

Построение. Строим прямоугольный треугольник ABH, у которого гипотенуза AB равна данному отрезку M_1N_1, а катет AH равен отрезку M_3N_3. Далее проводим окружность с центром в точке A и радиусом равным M_2N_2. Буквой C обозначим одну из точек пересечения этой окружности с прямой BH. Проводим отрезки BC и AC. Треугольник ABC — искомый (Рис. 27.).

Доказательство. По построению $AB = M_1N_1$, $AC = M_2N_2$, $AH = M_3N_3$.

Исследование. Если хотя бы один из отрезков M_1N_1 и M_2N_2 меньше M_3N_3, то задача не будет иметь решение, так как наклонные AB и AC не могут быть меньше перпендикуляра AH. Также задача не будет иметь решения, если $M_1N_1, = M_2N_2 = M_3N_3$.

Если $M_1N_1 > M_3N_3$, а $M_2N_2 = M_3N_3$, то задача будет иметь единственное решение, так как сторона AC совпадет с высотой AH. В этом случае искомый треугольник будет прямоугольным. Также задача будет иметь единственное решение, если $M_1N_1 > M_3N_3$, $M_1N_1 = M_2N_2$. В данном случае треугольник ABC – равнобедренный.

Задача будет иметь два решения, если $M_1N_1 > M_3N_3$, $M_2N_2 > M_3N_3$, $M_1N_1 \neq M_2N_2$.

Задача 8 [11, С. 34]. «Постройте треугольник по стороне, высоте, проведенной к ней, и медиане, проведенной к одной из двух других сторон».

Решение. Пусть даны сторона треугольника a, высота b, медиана c.

Построение.

1. Произвольно отмечаем точку A.
2. Откладываем от точки A отрезок $AC = a$.
3. Строим прямую m, расстояние между AC и m равно $\frac{1}{2}b$.
4. Строим прямую l, расстояние между l и m равно $\frac{1}{2}b$.
5. Строим окружность с центром A и радиусом c.
6. Окружность пересекает прямую m в точке A_1.
7. Прямая CA_1 пересекает прямую l в точке B.
8. Треугольник ABC – искомый (Рис. 28).

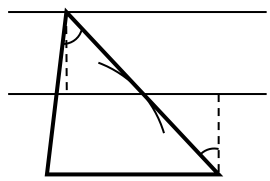

Рис. 28.

Доказательство. Проведем к прямой m перпендикуляры CC_1 и BB_1.

Треугольники CA_1C_1 и A_1B_1B равны ($CC_1 = BB_1, \angle C_1CA_1 = \angle B_1BA_1$ по построению). Следовательно, $CA_1 = BA_1$, значит, A_1 – середина BC, а AA_1 – медиана. Имеем: $AA_1 = c, CC_1 + BB_1 = b, AC = a$ – по построению.

Задача 12 [10, С. 110]. «Постройте треугольник по периметру и двум углам».

Построение.

1. Строим произвольную прямую.

2. На прямой откладываем отрезок KL, который равен периметру треугольника.

3. Строим данные углы на концах отрезка KL.

4. Точку пересечения сторон данных углов обозначим буквой M.

5. От точки K на исходной прямой строим отрезок $KP = KM$.

6. От точки L на исходной прямой строим отрезок $LR = LM$.

7. Через точку P проводим прямую параллельную KM.

8. Через точку R проводим прямую параллельную LM.

9. Прямые пересекаются в точке Q.

10. Строим прямую QM.

11. Соединяем точки Q и K.

12. Через точку M проводим прямую параллельную KQ.

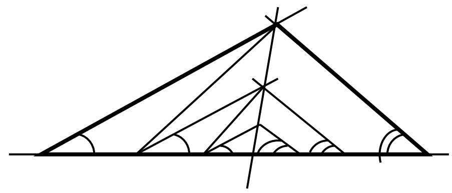

Рис. 29.

13. Данная прямая пересекает исходную прямую в точке A.

14. Через точку A проводим прямую параллельную KM.

15. Данная прямая пересекает прямую MQ в точке B.

16. Через точку B проводим прямую параллельную LM.

17. Данная прямая пересекает исходную прямую в точке C.

18. Треугольник ABC – искомый (Рис. 29.).

Доказательство. Из подобия треугольников ABC, KLM, PQR следует: $AB = AK, BC = CL$, то есть $AB + BC + AC = KL$. Следовательно, треугольник ABC – искомый.

Задача 13 [33, С. 70]. «Постройте треугольник, если заданы сторона, прилежащий к ней угол и сумма двух других сторон».

Решение. Предположим, что даны два отрезка a и m, а также угол α. Требуется построить треугольник ABC, в котором $BC = a$, $\angle B = \angle \alpha$, $AB + AC = m$.

Анализ. Чтобы построить треугольник ABC, необходимо сначала построить треугольник BCD такой, что $BC = a, \angle B = \angle \alpha, BD = m$. Если мы проведем серединный перпендикуляр к CD, он пересечет сторону BC в точке A, причем отрезок AD будет равен отрезку AC, по признаку равенства треугольников. В итоге получим искомый треугольник ABC (Рис. 30.).

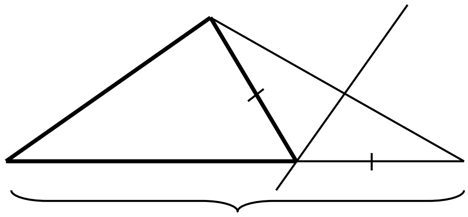

Рис. 30.

Построение. Строим треугольник BCD, по двум сторонам $BC = a$, $BD = m$ и углу B равному α. Далее проводим серединный перпендикуляр d к отрезку CD. Точку пересечения серединного перпендикуляра d со стороной BD обозначим точкой A. Треугольник $ABC -$ искомый.

Доказательство. По построению $BC = a, \angle B = \angle \alpha$. Так как $AC = AD$ (по признаку равенства треугольников, полученных вследствие пересечения серединного перпендикуляра d к отрезку CD и стороны BD треугольника BCD), а $BD = m$ (по построению), следовательно, $AB + AC = m$.

Исследование. Задача будет иметь решение, если $a < m$, так как сумма любых двух сторон треугольника всегда больше третьей стороны.

Задача 14 [6, С. 154]. «Постройте треугольник ABC по углу A и стороне BC, если известно, что $AB{:}\,AC = 2{:}\,1$».

Решение. Пусть даны отрезок a и угол α (Рис. 31.).

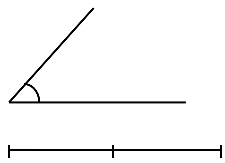

Рис. 31.

Построение. Строим $\angle XAY =$ $= \angle \alpha$. Возьмем произвольный отрезок PQ и отложим на луче AX отрезок AB_1, который равен $2PQ$. На луче AYстроим отрезок AC_1, равный PQ (Рис. 32.).

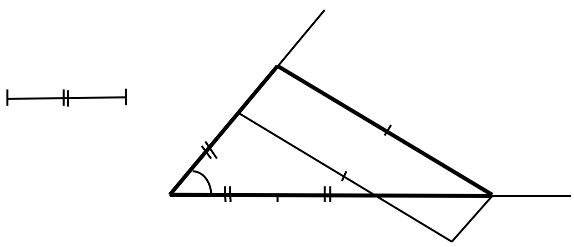

Рис. 32.

Далее на луче C_1B_1строим отрезок C_1B_2, который равен данному отрезку a. Через точку B_2 проводим прямую, параллельную AC_1. Она пересечет луч AX в некоторой точке B.

Через точку B проводим прямую, параллельную C_1B_1. Данная прямая пересечет луч AY в некоторой точке C. Треугольник ABC – искомый.

Доказательство. По построению $\angle A = \angle\alpha$. Так как $BC \quad B_2C_1$ и $B_2B \quad C_1C$, то четырехугольник BCC_1B_2 – параллелограмм, следовательно, $BC = C_1B_2$. Это значит, что сторона BC треугольника ABC равна данному отрезку a. Так как $BC \quad B_1C_1$, то $\frac{AB}{AC} = \frac{AB_1}{AC_1} = \frac{2}{1}$. Таким образом, треугольник ABC удовлетворяет всем условиям задачи.

Исследование. Задача имеет единственное решение, если данный угол α не будет являться развернутым.

Задача 15 [6, С. 219]. «Постройте треугольник, если дана описанная окружность и на ней точки A, B, M, через которые проходят прямые содержащие высоту, биссектрису и медиану треугольника, проведенные из одной вершины».

Решение. Пусть O – центр вписанной окружности.

Построение.

1. Проводим хорду $PA \quad OB$ через точку A (Рис. 33.).
2. $OB \cap PM = H$.
3. Проводим хорду $QR \perp OB$ через точку A.
4. Треугольник PQR – искомый.

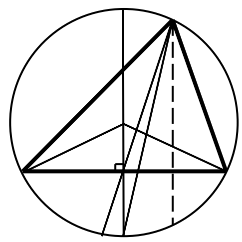

Рис. 33.

Доказательство. Прямые $PA \quad OB$, поэтому $PA \perp QR$, значит, прямая PA содержит высоту треугольника PQR. Высота OH равнобедренного треугольника OQR является биссектрисой и медианой. Значит, $QH = HR$, то есть прямая PM содержит медиану треугольника PQR. Так как углы HOQ и HOR равны, то дуги BQ и BR тоже равны, следовательно, опирающиеся на эти дуги вписанные углы BPQ и BPR равны. То есть прямая PB содержит биссектрису треугольника PQR.

Задача 16 [2, С. 14]. «Постройте треугольник по углу и высотам, опущенным на стороны этого угла».

Построение.

1. Строим угол A, равный данному.

2. Строим перпендикуляры к сторонам угла из точки A.

3. На перпендикулярах откладываем данные по условию высоты AN и AM.

4. Произвольно ставим точки B_1, C_1 на сторонах угла.

5. Через эти точки строим перпендикуляры к сторонам угла.

6. Откладываем на перпендикулярах отрезки $C_1N_1 = AN$ и $B_1M_1 = AM$.

7. $NN_1 \cap AB_1 = B$ и $MM_1 \cap AC_1 = C$.

8. Треугольник ABC – искомый (Рис. 34.).

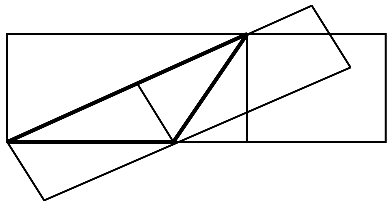

Рис. 34.

Задача 17 [11, С. 132]. «Постройте треугольник по трем высотам».

Решение. Даны отрезки P_1Q_1, P_2Q_2, P_3Q_3. Построим треугольник ABC, в котором высоты, проведенные из вершин A, B, C, равны отрезкам P_1Q_1, P_2Q_2, P_3Q_3.

Анализ. Обозначим через a, b, c длины сторон искомого треугольника, противолежащих углам A, B, C. Через h_a, h_b, h_c обозначим длины отрезков P_1Q_1, P_2Q_2, P_3Q_3. Используем равенства $ah_a = bh_b = ch_c$ (каждое произведение равно удвоенной площади треугольника). Из первого равенства имеем $\frac{a}{h_b} = \frac{b}{h_a}$, из второго получаем $b = \frac{h_c}{h_b} \cdot c$, значит, $\frac{b}{h_a} = \frac{c}{\frac{h_a h_b}{h_c}}$. Следовательно,

$$\frac{a}{h_b} = \frac{b}{h_a} = \frac{c}{\frac{h_a h_b}{h_c}}.$$

Данные равенства показывают, что искомый треугольник со ми a, b, c подобен треугольнику со сторонами $h_b, h_a, \frac{h_a h_b}{h_c}$. Таким образом, мы можем построить треугольник.

Построение.

1. Строим отрезок $P_4Q_4 = \frac{h_a h_b}{h_c}$.

2. Строим треугольник AB_1C_1 по трем сторонам ($AB_1 = P_4Q_4, B_1C_1 = = P_2Q_2, AC_1 = P_1Q_1$).

3. Строим высоту AH_1 треугольника AB_1C_1.

4. На луче AH_1 откладываем отрезок $AH = P_1Q_1$.

5. Через точку H строим прямую, параллельную B_1C_1.

6. Эта прямая пересекает лучи AB_1 и AC_1 в точках B, C.

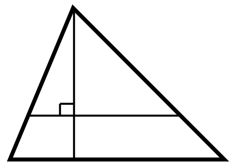

Рис. 35.

7. Треугольник ABC – искомый (Рис. 35.).

Доказательство. Треугольник ABC подобен треугольнику AB_1C_1, значит, подобен искомому треугольнику. Высота AH треугольника ABC равна P_1Q_1, то есть сходственные высоты в треугольнике ABC и искомом равны. Таким образом, коэффициент подобия этих треугольников равен 1. Значит, треугольник ABC – искомый.

Задача 18 [43, С. 276]. «Постройте треугольник по трем медианам».

Построение.

1. Строим треугольник AOO_1 $AO = \frac{2}{3}AM_3, AO_1 = \frac{2}{3}CM_2, OO_1 = \frac{2}{3}BM_1$.

2. Проводим медиану AM_1 $OM_1 = M_1O_1 = \frac{1}{3}BM_1$.

3. Продлеваем медиану AM_1 до точки C.

4. Продлеваем сторону OM_1 до точки B ($BO = = 2OM_1$).

5. Соединяем вершины A, B, C.

6. Треугольник ABC – искомый (Рис. 36.).

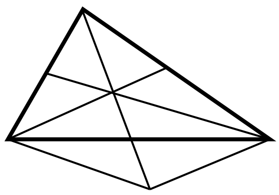

Рис. 36.

Задача 19 [3, С. 182]. «Постройте треугольник по двум углам и радиусу вписанной окружности».

Анализ. Пусть треугольник ABC – искомый, точка O – центр вписанной окружности, K – точка касания вписанной окружности и стороны AB. Тогда $OK = r$.

Луч AO – биссектриса $\angle BAC, \angle OAK = \frac{1}{2}\angle BAC = \frac{\alpha}{2}$.

Луч BO – биссектриса $\angle ABC, \angle OBK = \frac{1}{2}\angle ABC = \frac{\beta}{2}$.

Следовательно, каждый из прямоугольных треугольников AKO и BKO можно построить по катету и противолежащему углу, а затем найти сторону AB искомого треугольника ABC как сумму отрезков AK и KB. Тогда искомый треугольник можно построить.

Построение.

1. Строим прямые a и b, причем $a \perp b, a \cap b = K$.

2. Строим окружность с центром в точке K и радиусом r. Данная окружность пересекает прямую в точке O.

3. Проводим перпендикуляр OO_1 к прямой b.

4. Строим $\angle O_1OO_3 = \frac{\alpha}{2}$ и $\angle O_2OO_4 = \frac{\beta}{2}$.

5. Прямые $OO_4 \cap a = A$ и $OO_3 \cap a = B$.

6. Строим $\angle BAA_1 = \beta$ и $\angle ABB_1 = \alpha$.

7. Прямые $AA_1 \cap BB_1 = C$.

8. Треугольник ABC – искомый (Рис. 37.).

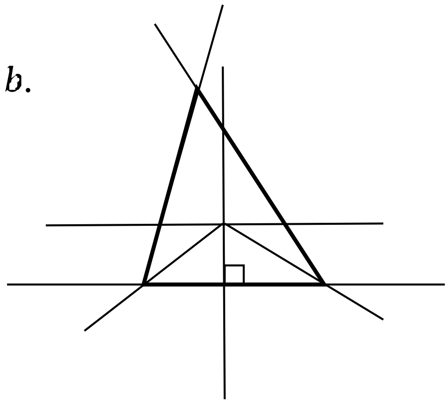

Рис. 37.

Доказательство. Треугольник ABC – искомый, так как $OK \perp AB$, где $OK = r$. $\angle OAB = \angle O_2OA = \frac{\beta}{2}$, $\angle OBA = \angle O_1OB = \frac{\alpha}{2}$. Значит, $\angle BAC = \beta$, $\angle ABC = \alpha$.