МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Тольяттинский государственный университет»

Институт математики, физики и информационных технологий
(наименование института полностью)
Кафедра «Высшая математика и математическое образование»
(наименование кафедры)

44.03.01 «Педагогическое образование»
(код и наименование направления подготовки, специальности)
«Математика»
(направленность (профиль)/специализация)

БАКАЛАВРСКАЯ РАБОТА

на тему **«МЕТОДИКА ОБУЧЕНИЯ РЕШЕНИЮ УРАВНЕНИЙ С МОДУЛЕМ В КУРСЕ АЛГЕБРЫ ОСНОВНОЙ ШКОЛЫ»**

Студент У.С. Павличенко ____________________
(И.О. Фамилия) (личная подпись)

Руководитель Н.А.Демченкова ____________________
(И.О. Фамилия) (личная подпись)

Консультант Е.Ю. Аношина ____________________
(И.О. Фамилия) (личная подпись)

Допустить к защите

Заведующий кафедрой д.п.н., профессор, Р.А. Утеева ______________
(ученая степень, звание, И.О. Фамилия) (личная подпись)

«____»__________2018 г.

Тольятти 2018

АННОТАЦИЯ

Целью бакалаврской работы является разработка методических рекомендаций обучения решению уравнений с модулем в курсе алгебры основной школы.

Понятие абсолютной величины (модуля) является одной из важнейших характеристик числа. С понятием модуля учащиеся знакомятся в 6 классе, где вводится определение модуля числа, дается его геометрический смысл и некоторые свойства. Начиная с 7 класса, модуль числа постоянно встречается при решении уравнений, неравенств, тождественных преобразований различных видов.

Работа состоит из введения, двух глав, параграфов, заключения, списка использованной литературы, приложения.

В первой главе определено понятие модуля действительного числа, уравнения с модулем; представлено содержание теоретического и задачного материла в школьных учебниках разных авторов; рассмотрены основные методы решения уравнений, содержащих знак модуля.

Во второй главе рассмотрен опыт работы учителей по данной теме; составлена система задач и разработан конспект урока для подготовки к государственной итоговой аттестации; разработаны методические рекомендации обучения решению уравнений, содержащих знак модуля.

Список литературы содержит 53 наименования.

Объем работы составляет 54 страниц.

ABSTRACT

The title of the bachelor's thesis is "Teaching methods for the topic of "Absolute value equations" of a course on algebra of the secondary school".

The aim of the bachelor's thesis is to identify the methodological features of teaching students the topic of "Absolute value equations" of a course on algebra of the secondary school.

The concept of the absolute value (modulus) is one of the most important characteristics. Students get acquainted with the concept of modulus in the 6th grade, where the definition of the absolute value is introduced, its geometric meaning and some properties are given. Starting with the 7th grade, the absolute value is constantly encountered in solving equations, inequalities, identical transformations of various kinds.

The work consists of an introduction, two chapters, a conclusion, a list of 54 references, including 5 foreign sources and two appendixes.

The first part of the work contains the concept of an absolute value of a number; the content of theoretical and practical materials in school textbooks of different authors is presented. The main methods for solving absolute value equations are considered.

The second part of the work presents the methodological basis for teaching students to the topic of "Absolute value equations" of the course on algebra of the secondary school. The experience of teachers' work on this topic is considered, and the set of tasks is compiled. Methodological recommendations for teaching students to the absolute value equations in a course on algebra of the secondary school are developed.

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Актуальность исследования. Понятие абсолютной величины (модуля) является одной из важнейших характеристик числа. Понятие модуля находит широкое применение в числовой содержательной линии школьного курса математики, активно используется в курсе высшей математики, а также при изучении смежных дисциплин, например, в физике. С понятием модуля учащиеся знакомятся в 6 классе, где вводится определение модуля числа, дается его геометрический смысл и некоторые свойства. Начиная с 7 класса, модуль числа постоянно встречается при решении уравнений, неравенств, тождественных преобразований различных видов.

В результате изучения понятия модуль, в соответствии с действующим государственным образовательным стандартом, ученик должен:

– знать определение модуля числа;
– уметь находить модули положительных и отрицательных чисел;
– уметь решать простейшие уравнения, содержащие модуль;
– уметь сравнивать рациональные числа по модулю [6].

Понятие модуля встречается практически во всех важных разделах курса алгебры: арифметический квадратный корень, уравнения, неравенства, функции.

В процессе изучения алгебры 7-9 классов, понятие модуля тесно связано с другими темами, поэтому четкие требования к учащимся, именно по теме «модуль», в программе не прописываются. Однако, можно выделить ряд требований к знаниям и умениям учеников:

– знать определение модуля, геометрического смысла модуля;
– знать свойство модулей противоположных чисел, знать свойство квадратного корня $\overline{a^2} = a$;
– уметь решать уравнения, содержащие неизвестную под знаком модуля следующими методами: на основе равносильных преобразований,

методом интервалов, графическим методом, методом замены переменной, с использованием геометрического смысла понятия «модуль».

– в процессе обучения математике в средней школе, уравнения, содержащие знак модуля, традиционно вызывают затруднения у учащихся, процесс их решения требует более детальной проработки. Уравнения с модулем встречаются в задачах повышенной сложности, при углубленном изучении математики, на математических олимпиадах, в заданиях государственной итоговой аттестации и единого государственного экзамена.

Проблема исследования заключается в выявлении методических рекомендаций обучения решению уравнений с модулем в курсе алгебры основной школы.

Объект исследования: процесс обучения алгебре в курсе основной школы.

Предмет исследования: методика обучения решению уравнений, содержащих знак модуля в курсе основной школы.

Целью бакалаврской работы является разработка методических рекомендаций изучения уравнений, содержащих знак модуля в курсе основной школы.

Задачи исследования:

1. Сформулировать цели обучения теме «Решение уравнений с модулем».
2. Рассмотреть понятие модуля действительного числа, уравнения с модулем.
3. Представить содержание теоретического и задачного материала в школьных учебниках разных авторов.
4. Описать методы решения уравнений, содержащих переменную под знаком модуля.
5. Познакомиться с опытом работы учителей по данной теме.
6. Составить систему задач для подготовки к ОГЭ по теме «Уравнения, содержащие знак модуля».

7. Разработать методические рекомендации обучения решению уравнений, содержащих знак модуля.

Методы исследования: анализ психолого-педагогической, научной и учебно-методической литературы; анализ собственного педагогического опыта в школе.

Практическую значимость результатов исследования составляют методические материалы по теме «Уравнения, с модулем» в курсе алгебры основной школы, которые могут быть использованы учителями в практической деятельности.

На защиту выносятся методические рекомендации обучения решению уравнений, содержащих знак модуля.

Работа состоит из введения, двух глав, параграфов, заключения, списка использованной литературы, приложения.

Во введении сформулированы основные характеристики исследования: обоснована актуальность, цель, задачи, объект, предмет и методы исследования.

Глава I посвящена теоретическим основам обучения решению уравнений с модулем в курсе алгебры основной школы: определено понятие модуля действительного числа, уравнения с модулем; представлено содержание теоретического и задачного материла в школьных учебниках разных авторов; рассмотрены основные методы решения уравнений, содержащих знак модуля.

Глава II посвящена методическим основам обучения решению уравнений с модулем в курсе алгебры основной школы. В ней рассмотрен опыт работы учителей по данной теме; составлена система задач и разработан конспект урока для подготовки к государственной итоговой аттестации; разработаны методические рекомендации изучения уравнений, содержащих знак модуля.

В заключении сформулированы основные результаты и выводы проведенного исследования.

Список литературы содержит 53 наименования.

ГЛАВА I. ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ОБУЧЕНИЯ РЕШЕНИЮ УРАВНЕНИЙ С МОДУЛЕМ В КУРСЕ АЛГЕБРЫ ОСНОВНОЙ ШКОЛЫ

§1. Цели обучения теме «Решение уравнений с модулем» в школьном курсе математики

Линия уравнений – одна из главных содержательно-методических линий математики. Линия уравнений разнообразна по содержанию, по способам решения уравнений. В федеральном государственном образовательном стандарте основного общего образования утверждается, что результаты изучения предметной области «Математика» должны отражать:

– развитие представлений о числе и числовых системах от натуральных до действительных чисел; овладение навыками устных, письменных, инструментальных вычислений;

– овладение символьным языком алгебры, приемами выполнения тождественных преобразований выражений, решения уравнений, систем уравнений, неравенств и систем неравенств; умения моделировать реальные ситуации на языке алгебры, исследовать построенные модели с использованием аппарата алгебры, интерпретировать полученный результат;

– овладение системой функциональных понятий, развитие умения использовать функционально-графические представления для решения различных математических задач, для описания и анализа реальных зависимостей [45].

В примерной основной образовательной программе основного общего образования от 8 апреля 2015 года указывается, что «…в ходе изучения линии уравнений в 7-9 классе для применения в повседневной жизни, при изучении других предметов и обеспечении возможности благополучного продолжения образования, учащиеся должны научиться:

– оперировать понятиями: уравнение, корень уравнения, равносильные уравнения, область определения уравнения;

– решать линейные уравнения с модулем и уравнения, сводимые к линейным с помощью тождественных преобразований;

– решать квадратные уравнения с модулем и уравнения, сводимые к квадратным с помощью тождественных преобразований;

– решать дробно-линейные уравнения с модулем;

– решать простейшие иррациональные уравнения вида $\sqrt{f(x)} = a$, $\sqrt{f(x)} = \sqrt{g(x)}$ с модулем» [41, С. 86-87].

В сборнике рабочих программ по алгебре Т.А. Бурмистровой содержится указание на то, что «…содержание линии алгебры способствует формированию у учащихся математического аппарата для решения задач из разделов математики, смежных предметов и окружающей реальности. Язык алгебры подчеркивает значение математики как языка построения математических моделей, процессов и явлений реального мира» [6].

М.И. Башмаков в книге «Уравнения и неравенства» [5, С.96] обращает внимание на необходимость четкого понимания того, что подразумевается под словами «решить уравнение», обдумывать смысл операций, преобразований, которые мы используем для достижения указанной цели.

§ 2. Понятие модуля действительного числа

Определение. «Модулем неотрицательного действительного числа x называют само это число: $|x| = x$; модулем отрицательного действительного числа x называют противоположное число: $|x| = -x$.

$$|x| = \begin{cases} x, \text{если } x \geq 0; \\ -x, \text{если } x < 0. \end{cases}$$ » [7, 11, 37].

Например,

$|5| = 5$; $|-5| = -(-5) = 5$; $|-3{,}7| = 3{,}7$;

$\overline{5} - 2 \;=\; \overline{5} - 2$ (так как $\overline{5} - 2 > 0$);

$\overline{5} - 3 \;= - \;\; \overline{5} - 3 \;\; = 3 - \;\; \overline{5}$ (так как $\overline{5} - 3 < 0$).

Свойства модулей

1. $a \;\geq 0$.
2. $a \cdot b \;=\; a \;\cdot\; b$.
3. $\frac{a}{b} \;= \frac{a}{b}$.
4. $a\ ^2 = a^2$.
5. $a \;=\; -a$.
6. $a \;\geq a$.
7. $a + b \;=\; a \;+\; b$.

Докажем последние два свойства.

Доказательство свойства 6. Если $a \geq 0$, то, по определению, $a \;= a$. Если $a < 0$, то, по определению, $a \;= -a$. Но при $a < 0$ выполняется неравенство $-a > a$, т.е. $a \;> a$. Итак, в любом случае выполняется неравенство $a \;\geq a$ [22].

Доказательство свойства 7. Если a **и** b – неотрицательные числа, то $a + \; b \;=\; a + b$, $a \;= a$, $b \;= b$ и поэтому $a + b \;=\; a \;+\; b$. Если a **и** b – отрицательные числа, то $a + \; b \;= - \; a + b$, $a \;= -a$, $b \;= -b$ и поэтому $a + \; b \;=\; a \;+\; b$. Если a **и** b – числа разных знаков и, например, $a \;\geq\; b$, то, по правилу сложения чисел разных знаков, получаем $a + b \;=\; a \;- -b \;<\; a \;+\; b$ [22].

Итак, если a **и** b – числа одного знака, то $a + \; b \;=\; a \;+\; b$. Если a **и** b – числа разных знаков, то $a + \; b \;<\; a \;+\; b$. Свойство 7 доказано.

Геометрический смысл модуля действительного числа.

Рассмотрим множество R действительных чисел, его геометрическую моделью является числовая прямая. На данной прямой отметим две точки a и b, которым соответствуют два действительных числа a и b. Обозначив через

$\rho(a,b)$ расстояние между точками a и b, найдем это расстояние. Оно равно $b-a$, если $b>a$ (рис. 1), $a-b$, если $a>b$ (рис. 2), равно нулю, если $a=b$ [22].

Рис. 1. Геометрический смысл модуля, если $b>a$

Рис. 2. Геометрический смысл модуля, если $a>b$

Оба случая можно записать одной формулой $\rho(a,b)=|a-b|$.

Тождество $\sqrt{a^2}=|a|$.

$$\sqrt{a^2}=\begin{cases} a, \text{если } a\geq 0; \\ -a, \text{если } a<0. \end{cases}$$

Точно так же определяется модуль числа a:

$$|a|=\begin{cases} a, \text{если } a\geq 0; \\ -a, \text{если } a<0. \end{cases}$$

Таким образом, $\sqrt{a^2}$ и $|a|$ – одно и то же. Тем самым доказано важное тождество: $\sqrt{a^2}=|a|$ [22].

В роли a может выступать любое числовое или алгебраическое выражение, например:

$$\sqrt{(3x-4)^2}=|3x-4|,$$

$$\sqrt{(2-\sqrt{7})^2}=|2-\sqrt{7}|.$$

§ 3. Содержание теоретического и задачного материала в школьных учебниках разных авторов

«Уравнение, содержащее неизвестную под знаком модуля, называется уравнением с модулем. Для того, чтобы решить уравнение, содержащее неизвестную под знаком модуля, необходимо освободиться от знака модуля, используя его определение» [22].

В учебниках алгебры разных авторов изучение материала по теме «Уравнения с модулем» и его содержание имеет некоторые отличия, однако, во всех рассмотренных учебниках прослеживается схожее содержание теоретического материала. Содержание задачного материала имеет существенные отличия.

Базовые знания – знания, известные из школьного курса математики 5-6 классов, необходимые для изучения уравнений с модулем в 7-9 классах:

– понятие координатной прямой;
– понятие координаты точки на координатной прямой;
– понятие модуля числа.

Базовые знания, известные из школьного курса алгебры 7-9 классов, необходимые для изучения уравнений с модулем:

– понятие уравнения и его корня;
– решение линейных уравнений;
– решение квадратных уравнений;
– решение простейших дробно-линейных уравнений;
– решение простейших иррациональных уравнений вида $\sqrt{f(x)} = a$, $\sqrt{f(x)} = \sqrt{g(x)}$.

Представим анализ содержания теоретического материала по уравнениям с модулем в различных учебниках математики 5-6 классов.

Можно сказать, что учебник Н.Я. Виленкина более всего подходит для изучения данной темы. Во-первых, в нем тема «модуль числа» идет отдельным параграфом. Во-вторых, есть наглядная иллюстрация модуля числа через расстояние, которая будет понятна каждому ученику. В-третьих, после теории присутствуют вопросы для лучшего усвоения данной темы.

Таблица 1

Формирование понятия «Модуль» в различных учебниках 5-6 классов

Основные вопросы изучения данной темы	**Учебник Никольский С.В., Потапов М.К.**	**Учебник Виленкин Н.Я.**	**Учебник Дорофеев Г.В., Петерсон Л.Г.**
Определение	«Модулем положительного числа называют само это число. Модулем отрицательного числа называют противоположное ему (положительное) число» [17].	«Модулем числа a называют расстояние (в единичных отрезках) от начала координат до точки $A(a)$» [7].	«Расстояние от начала отсчета до точки, обозначающей данное число, называют модулем этого числа»[11].
Примеры к определению	$+3 \;=\; -3 \;=+3$ $-5 \;=\; +5 \;=+5$	$7 \;=7;\ \frac{3}{4} \;=\frac{3}{4};$ $1{,}5 \;=1{,}5;\ 0 \;=0;$ $-7 \;=7;\ -\frac{4}{7} \;=\frac{4}{7};$ $-1{,}5 \;=1{,}5$	$2 \;=2;\ -2 \;=2;$ $4{,}5 \;=4{,}5;$ $-4{,}5 \;=4{,}5$
Наглядные иллюстрации	–	Рис. 3	Рис. 4
Вопросы для лучшего усвоения темы	–	«Что называют модулем числа? Как обозначают модуль числа? Как найти модуль положительного числа или нуля? Как найти модуль отрицательного числа? Может ли модуль какого-нибудь числа быть отрицательным числом?» [7].	–

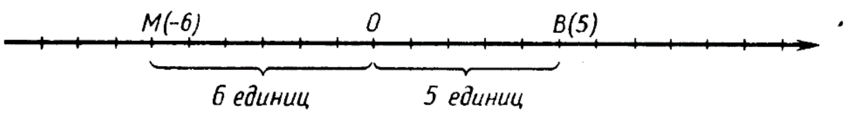

Рис. 3. Рисунок в учебнике Н.Я. Виленкина

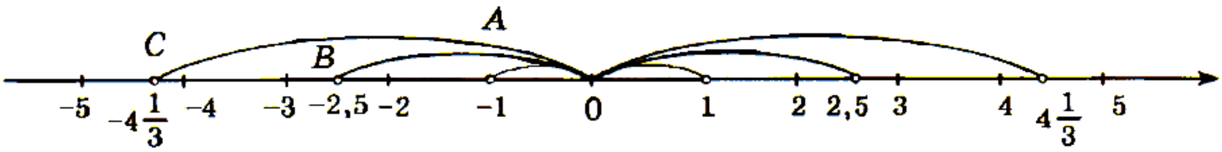

Рис. 4. Рисунок в учебнике Г.В. Дорофеева

В большинстве учебников математики 6 класса тема «Уравнения с модулем» отдельно не рассматривается, нет отдельного параграфа, связанного с данной темой. Более подробное изучение данной темы представлено в учебниках авторов С.М. Никольского, А.Г. Мерзляка, А.Г. Мордковича и Г.В. Дорофеева. В этих учебниках имеется теоретический материал по теме «Модуль числа», в который включены простейшие уравнения с модулем. В учебниках математики для 6 класса Г.К. Муравина и Ю.М. Колягина теоретический материал по данной теме отсутствует.

Представим анализ содержания теоретического материала по теме «Уравнения с модулем» в Таблице 2 в различных учебниках алгебры 7 класса.

Таблица 2

Содержание теоретического материала по теме «Уравнения с модулем» в различных учебниках алгебры 7 класса

Автор учебников	Содержание учебного материала
Г.К. Муравин, К.С. Муравин, О.В. Муравина	Понятие модуля числа.
Ю.Н. Макарычев, Н.Г. Миндюк, С.Б. Суворова	Сравнение значений выражений. Понятие неравенства. Строгое и нестрогое неравенство.
Г.В. Дорофеев С.Б. Суворова ЕС.С. Минаева	Координаты и графики. Графики зависимостей, заданные равенствами с модулем.
С.М. Никольский, М.К. Потапов, Н.Н. Решетников, А.В. Шевкин	Модуль действительного числа. Решение уравнений с одним неизвестным. Системы линейных уравнений.
А.Г. Мордкович	Теоретический материал по теме не рассматривается
Ю.М. Колягин, М.В. Ткачёва, М.И. Шабунин	Уравнения с одним неизвестным. Понятие модуля числа.
А.Г. Мерзляк, В.Б. Полонский, М.С. Якир	Линейное уравнение с одной и двумя переменными. Системы уравнений с двумя переменными. Решения систем линейных уравнений разными методами (подстановки, сложения, графический). Решение задач с помощью уравнений и систем линейных уравнений.

В учебнике Г.К. Муравина [21] в самом начале изучения алгебры в 7 классе начинается рассмотрение темы «Модуль числа». Ученики впервые рассматривают понятие «модуль числа», понятие «координатная прямая» и связь этих понятий между собой. В данном учебнике теоретический материал по теме «Уравнения с модулем» не представлен.

Автор учебника алгебры для 7 класса А.Г. Мерзляк [23] рассматривает тему «Уравнения с модулем», в теме «Линейное уравнение с одной и двумя переменными» Автор приводит примеры уравнений, содержащих знак модуля.

В учебнике алгебры автора Г.В. Дорофеева [12] есть целая глава, которая связана с темой «Уравнения с модулем», это глава «Координаты и графики». В параграфе «Расстояние между двумя точками координатной прямой» модуль рассматривается как расстояние между точками на координатной прямой. В параграфе «Графики» рассматривается график функции модуля. В параграфе «Еще несколько важных графиков» понятие модуля и графика зависимости раскрывается более подробно. В параграфе «Графики зависимости, заданных равенствами с модулем» рассматривается еще несколько дополнительных зависимостей, которые задаются равенствами и содержат знак модуля.

В учебнике С.М. Никольского [38] встречается непрямое упоминание уравнений с модулем – при изучении тем «Понятие действительного числа», автор использует понятия «Уравнения» и «Модуль» чтобы показать теоретическую составляющую темы.

В учебниках А.Г. Мордковича [31], Ю.М. Колягина [2] в 7 классе рассматривается тема «Уравнения с модулем» в теме «Решение уравнений».

Итак, в большинстве учебников алгебры 7 класса тема «Уравнения с модулем» отдельно не рассматривается, определяются некоторые понятия, связанные с данной темой. Более подробно изучение данной темы представлено в учебниках Г.К. Муравина. В учебниках Ю.Н. Макарычева и

С.М. Никольского имеется теоретический материал изучения понятия «Модуль числа».

В учебнике Ю.Н. Макарычева [17] модуль появляется при изучении линейных уравнений. В №130 рассматриваются простейшие уравнения с модулем. Более сложные задания с модулем предлагаются лишь в дополнениях к первой главе (№206-209,217).

Это задания вида:

- $|a| = |b|$; верно ли, что $\mathbf{a} = b$?

- $|x| < |y|$; верно ли, что $x < y$?

- $|x| > |y|$; верно ли, что $x > y$?

- являются ли тождествами равенства:

$$|a + 5| = |a| + 5;\ \ a^2 + 4\ = a^2 + 4;$$

$$|a - b| - |b - a| = 0; |a + b| - |a| = |b|?$$

В Таблице 3, представим анализ содержания теоретического материала по теме «Уравнения с модулем» в различных учебниках алгебры 8 класса.

В учебнике А.Г. Мордковича [29] теме «Уравнения с модулем» отведен отдельный параграф, в теме «Алгебраические уравнения». В теме «Приближенные вычисления» упоминается, что такое модуль числа, употребляя его в основе определения «погрешность вычисления».

Авторы учебников по алгебре Ю.Н. Макарычев [18,19], С.М. Никольский [39] и А.Г. Мерзляк [24] не вынесли на рассмотрение тему «Уравнения с модулем».

Автор учебника по алгебре для 8 класса Ю.М. Колягин [8] выделил параграф на изучение темы «Модуль числа» в главе «Неравенства». В данном пункте он рассмотрел определение модуля числа и свойств уравнений, содержащих модуль.

В учебнике Г.В. Дорофеева [18] в 8 классе теоретический материал по теме исследования присутствует в главе «Линейное уравнение с двумя переменными».

Таблица 3

Содержание теоретического материала по теме «Уравнения с модулем» в различных учебниках алгебры 8 класса

Автор учебников	Содержание учебного материала
А.Г. Мордкович	Уравнения с модулями
Ю.Н. Макарычев, Н.Г. Миндюк, С.Б. Суворова	Теоретический материал по теме не рассматривается
Ш.А. Алимов Ю.М. Колягин, М.И. Шабунин	Модуль числа. Уравнения и неравенства, содержащие модуль.
С.М. Никольский, М.К. Потапов, А.В. Шевкин	Теоретический материал по теме не рассматривается
Г.К. Муравин, К.С. Муравин, О.В. Муравина	Теоретический материал по теме не рассматривается
Г.В. Дорофеев С.Б. Суворова С.С. Минаева	Линейное уравнение с двумя переменными.
А.Г. Мерзляк, В.Б. Полонский, М.С. Якир	Теоретический материал по теме не рассматривается

Отметим, что в большинстве учебников алгебры 8 класса тема «Уравнения с модулем» отдельно не рассматривается. Определяются некоторые понятия, связанные с данной темой. Ю.М. Колягин, единственный, кто выделил отдельный пункт для изучение данной темы. А.Г. Мордкович так же выделили целый параграф на изучение темы уравнений с модулем для линии уравнений. Он рассматривал такие темы, как «Приближенные вычисления» и «Погрешность и точность приближения», в которых использовалось понятие «модуль числа». С.М. Никольский [39] в своем учебнике лишь поверхностного рассмотрел понятия связанные с этой темой, но конкретно к изучению уравнений с модулем не переходил. В учебнике алгебры за 8 класс Г.К. Муравина [35] теоретический материал по теме «Уравнения с модулем» отсутствует.

Таблица 4 содержит анализ содержания учебников 9 класса разных авторов, по теме «Уравнения с модулем».

Таблица 4

Содержание теоретического материала по теме «Уравнения с модулем» в различных учебниках алгебры 9 класса

Авторы учебников	Содержание учебного материала
А.Г. Мордкович	теоретический материал по теме не рассматривается
А.Г. Мордкович (углубленное изучение)	Иррациональные системы. Системы с модулями
С.М. Никольский, М.К. Потапов, Н.Н. Решетников, А.В. Шевкин	Теоретический материал по теме не рассматривается
Ю.Н. Макарычев, Н.Г. Миндюк. (дополнительные главы)	Теоретический материал по теме не рассматривается
А.Г. Мерзляк, В.Б. Полонский, М.С. Якир	Теоретический материал по теме не рассматривается
Ю.Н. Макарычев, Н.Г. Миндюк, С.Б. Суворова.	Теоретический материал по теме не рассматривается
Г.К. Муравин, К.С. Муравин, О.В. Муравина	Теоретический материал по теме не рассматривается
Г.В. Дорофеев, С.Б. Суворова, С.С. Минаева	Теоретический материал по теме не рассматривается
Ю.М. Колягин, М.В. Ткачёва, М.И. Шабунин.	Теоретический материал по теме не рассматривается

Практически во всех учебниках алгебры для 9 класса, отсутствует теоретический материал по теме «Уравнения с модулем», кроме учебника АГ. Мордковича [32] с углубленным изучением математики. В этом учебнике во второй главе «Системы уравнений» выделяется параграф «Системы уравнений с модулем», на его изучение отводится 1 час. Автор формирует определение модуля, утверждения, связанные с уравнениями с модулем, которые нужно знать, для их решения, приводит их доказательство, выделяет несколько способов решения систем уравнений с модулем.

Таким образом, теме «Уравнения с модулем» в учебниках математики 6-9 классов отводится очень мало часов. Авторы уделяют линии уравнений целые главы, но изучение уравнений с модулями требует дополнительной работы. Лишь в некоторых учебниках данная тема дана отдельным параграфом, но чаще она является включенной в какую-нибудь более широкую тему, такую как решение уравнений. В 7 классе данная тема не представлена ни в одном из рассмотренных учебников, выделяются лишь понятия, которые тесно связаны с данной темой, такие как «Уравнение», «Модуль числа». В 8 классе лишь в двух учебниках упоминается данная тема и представлена в виде отдельного параграфа. В 9 классе данная тема встречается дважды, из них один учебник является учебником для углубленного изучения.

Во всех рассмотренных учебниках, авторы подробно знакомят учащихся с линией уравнений, но большинство из них считают, что тема «Уравнения с модулем» не является базовой темой изучения математики. В учебниках с углубленным изучением алгебры эта тема рассматривается чаще, подробно дается теоретический материал, все разбирается на удачных примерах.

§4. Методы решения уравнений, содержащих переменную под знаком модуля

4.1. Метод решения на основе равносильных преобразований

Наиболее распространенный метод решения уравнений с модулем связан с равносильными преобразованиями: «…если обе части уравнения неотрицательны на некотором множестве, то возведение в квадрат обеих частей такого уравнения не приводит ни к потере, ни к приобретению решений на этом множестве, то есть является равносильным преобразованием» [47].

$$f(x) = g(x) <=> \begin{cases} g(x) \geq 0, \\ f^2(x) = g^2(x) \end{cases} <=> \begin{cases} g(x) \geq 0 \\ f(x) = g(x), \\ f(x) = -g(x), \end{cases}$$

Далее уравнения нужно решить, а неравенство проверить.

Уравнение вида $p(x) = q(x)$ равносильно уравнению $p^2\ x\ = q(x)^2$, поэтому:

$$p\ x\ = q\ x\ ,$$
$$p\ x\ = -q\ x\ .$$

Последнюю совокупность можно получить, не возводя обе части уравнения $p(x) = q(x)$ в квадрат, а непосредственно применяя свойства модуля.

Приведенные схемы решения можно получить из «геометрических» соображений. «Модуль разности двух чисел равен расстоянию между точками числовой (координатной) прямой, соответствующими этим числам (в этом, собственно, и заключается геометрический смысл модуля)» [33]. «Решить уравнение $x - b\ = a$ – значит найти все точки x числовой оси, расстояние от каждой из которых до числа b равно a. Если $a > 0$, **то** $x = b \pm a$, если $a = 0$, **то** $x = b$, **если** $a < 0$, то решений нет» [33].

Решение уравнения $f(x)\ = a$ при $a > 0$ сводится к уравнениям $f\ x\ = a; f\ x\ = -a$.

Решение уравнения $f(x)\ = g(x)$ сводится к двум случаям. Если $g\ x\ < 0$, то оно не имеет решений, поскольку модуль не отрицателен; если $g\ x\ \geq 0$, получаем, что $f\ x\ = g\ x$ либо $f\ x\ = -g(x)$.

Следовательно, $f(x)\ = g\ x\ <=> \begin{matrix} g\ x\ \geq 0, \\ f\ x\ = g\ x\ , \\ f\ x\ = -g\ x\ . \end{matrix}$

Перейдем к решению примеров.

Пример 1. Решите уравнение: $|x + 4| = 2x - 10$.

Решение. Возведем в квадрат обе части уравнения:

$$x^2 + 8x + 16 = 4x^2 - 40x + 100;$$

$$3x^2 - 48x + 84 = 0 \quad :3;$$

$$x^2 - 16x + 28 = 0;$$

$$x_1 = 14, x_2 = 2.$$

Найдём ОДЗ: $2x - 10 \geq 0$; $\quad 2x \geq 10$; $\quad x \geq 5$.

$x_1 = 14 \in [5;+\infty), x_2 = 2 \notin [5;+\infty)$.

Ответ: 14.

Пример 2. Решить уравнение $x^2 - 5x = 6$.

Решение. Данное уравнение равносильно совокупности двух уравнений:

$$\begin{array}{c} x^2 - 5x = 6, \\ x^2 - 5x = -6 \end{array} <=> \begin{array}{c} x^2 - 5x - 6 = 0, \\ x^2 - 5x + 6 = 0. \end{array}$$

Корнями уравнения $x^2 - 5x - 6 = 0$ являются числа -1 и 6, а корнями уравнения $x^2 - 5x + 6 = 0$ являются числа 2 и 3. Поэтому исходное уравнение имеет четыре действительных корня: $x_1 = -1$; $x_2 = 2$; $x_3 = 3$; $x_4 = 6$.

Ответ: $-1; 2; 3; 6$.

Пример 3. Решить уравнение $2x - 3 = 3x + 1$.

Решение. Рассмотрим совокупность двух уравнений: $2x - 3 = 3x + 1$; $2x - 3 = -3x - 1$. Решением совокупности являются числа -4 и $0{,}4$.

Ответ: -4; $0{,}4$.

Пример 4. Решить уравнение $\overline{1 + x^2} - 1 = x - 1$.

Решение. Возведём обе части уравнения в квадрат, получим:

$$\overline{1 + x^2} - 1\ ^2 = (x-1)^2, 2\ \overline{1+x^2} = 1 + 2x,\ 4 + 4x^2 = 1 + 4x + 4x^2,$$

$x = 0{,}75$.

Ответ: $0{,}75$.

Пример 5. Решить уравнение $x^2 - 5x + 6 = x - 2$.

Решение. Разложим многочлен $x^2 - 5x + 6$ на множители. Корнями данного многочлена являются числа 2 и 3, откуда следует:

$$x^2 - 5x + 6 = \ x - \ 2 \ \ (x - \ 3).$$

Выполним следующие преобразования:

$$(x-2)(x-3) \ \ = \ \ x-2 \ ,$$

$$x-2 \ \cdot \ x-3 \ - \ x-2 \ = 0,$$

$$x-2 \quad x-3 \ -1 \ = 0.$$

Из этого следует: $x-2 \ = 0$ или $x-3 \ -1 = 0$. Получаем $x = 2$ **из первого уравнения**, и $x = 2$, $x = 4$ из второго уравнения.

Ответ: $2;\ 4$.

Пример 6. Решить уравнение $x^3 + 3x^2 + x \ = -x + x^3$.

Решение. Данное неравенство равносильно следующей системе:

$$\begin{gathered} -x + x^3 \geq 0, \\ x^3 + 3x^2 + x = -x + x^3, \\ x^3 + 3x^2 + x = x - x^3. \end{gathered}$$

Решим два уравнения $x^3 + 3x^2 + x = -x + x^3$ и $x^3 + 3x^2 + \ x = \ x - \ x^3$. Корни первого: $x = 0$ и $x = -\frac{2}{3}$, а второго: $-x = 0$ и $x = -\frac{3}{2}$. Неравенство $x^3 - x \geq 0$ выполняется при $x = 0$ и $x = -\frac{2}{3}$.

Эти значения и будут корнями уравнения.

Ответ: $x = 0, x = -\frac{2}{3}$.

Пример 7. Решите уравнение $x^3 + x - 1 \ = x + 1$.

Решение. Данное уравнение равносильно системе

$$\begin{gathered} x + 1 \geq 0, \\ x^3 + x - 1 = x + 1, \\ x^3 + x - 1 = -(x + 1), \end{gathered} \quad \textbf{откуда} \quad \begin{gathered} x \geq -1, \\ x = \sqrt[3]{2}, \\ x \ \ x^2 + 2 \ = 0. \end{gathered}$$

Решениями последней системы являются числа 0 и $\sqrt[3]{2}$.

Ответ: 0; $\sqrt[3]{2}$ [20].

Пример 8. Решить уравнение $x^2 + x - 2 \ = x^2 + x - 2$.

Решение. Данное уравнение равносильно системе

$$x^2 + x - 2 \geq 0,$$
$$x^2 + x - 2 = x^2 + x - 2,$$
$$x^2 + x - 2 = -(x^2 + x - 2),$$

Решив неравенство $x^2 + x - 2 \geq 0$, получим $x \in \ -\infty; -2 \ \cup \ 1; +\infty$. Решив совокупность уравнений $\begin{matrix} x^2 + x - 2 = x^2 + x - 2 \\ x^2 + x - 2 = \ -(x^2 + x - 2) \end{matrix}$, получим $x \in \ -\infty; +\infty$. Откуда следует, что решением уравнения:

$x^2 + x - 2 \ = x^2 + x - 2$,является $x \in \ -\infty; -2 \ \cup \ 1; +\infty$.

Ответ: $x \in \ -\infty; -2 \ \cup \ 1; +\infty$ [26].

Пример 9. «Решим уравнение $||2\text{x} - 1| - 4| = 6$.

Решение. Рассмотрим два случая.

1) $|2\text{x} - 1| - 4 = 6, |2\text{x} - 1| = 10$. Используя определение модуля, получим: $2\text{x} - 1 = 10$ **либо** $2\text{x} - 1 = \ -10$. Откуда $x_1 = 5{,}5, x_1 = \ -4{,}5$.

2) $|2\text{x} - 1| - 4 = \ -6, |2\text{x} - 1| = \ -2$. В этом случае уравнение не имеет решений, так как по определению модуль всегда неотрицателен» [26].

Ответ: 5,5; -4,5.

4.2. Метод решения с использованием промежутков (интервалов)

Для того, чтобы решить уравнение, содержащее неизвестную под знаком модуля, необходимо освободиться от знака модуля, используя его определение. Для этого:

- находим значения неизвестных, критические точки, - точки, при которых выражение, стоящее под знаком модуля, обращается в нуль;
- разбиваем область допустимых значений уравнения на промежутки, на которых, выражения, стоящие под знаком модуля, сохраняют знак;

– на каждом из этих промежутков записываем уравнение без знака модуля, решаем его;

– объединение полученных решений составляет решение исходного уравнения.

Примеры:

«**Пример 1**. Решите уравнение $2-x \;-\; x-5 \;= x+1- \;7-2x$.

Решение. Определим промежутки знакопостоянства каждого из выражений под знаками модуля, для наглядности и удобства изобразив их на одной схеме (жирными точками отмечены нули соответствующих выражений). Рассмотрим 4 случая, «раскрывая» модули согласно знакам в каждом из столбцов»[20].

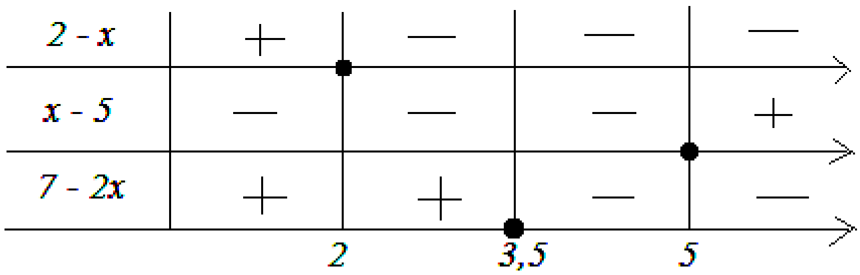

Рис. 5. Промежутки знакопостоянства

1) $\begin{cases} x \geq 5, \\ -2+x-x+5 = x+1+7-2x, \end{cases}$ откуда $\begin{cases} x \geq 5, \\ x = 5, \end{cases}$ значит, $x = 5$.

2) $\begin{cases} 3{,}5 \leq x < 5, \\ -2+x+x-5 = x+1+7-2x, \end{cases}$ откуда $\begin{cases} 3{,}5 \leq x < 5, \\ x = 5 \end{cases}$ Решений нет.

3) $\begin{cases} 2 \leq x < 3{,}5, \\ -2+x+x-5 = x+1-7+2x, \end{cases}$ откуда $\begin{cases} 2 \leq x < 3{,}5, \\ x = -1. \end{cases}$ Решений нет.

4) $\begin{cases} x < 2, \\ 2-x+x-5 = x+1-7+2x, \end{cases}$ откуда $\begin{cases} x < 2, \\ x = 1, \end{cases}$ значит, $x = 1$.

Ответ:1; 5.

Пример 2. Решить уравнение $2|x-2| - 3|x+4| = 1$.

Решение. Разобьем числовую прямую на промежутки $x \leq -4$; $-4 < x \leq 2$;$x > 2$. Решение уравнения сводится к решению трех систем:

а) $\begin{array}{c} x \le -4, \\ -2x + 4 + 3x + 12 = 1, \end{array}$; $\begin{array}{c} x \le -4 \\ x = -15 \end{array}$.

-15 - корень исходного уравнения.

б) $\begin{array}{c} -4 < x \le 2, \\ -2x + 4 - 3x - 12 = 1, \end{array}$; $\begin{array}{c} -4 < x \le 2 \\ x = -1{,}8 \end{array}$.

$-1{,}8$ - корень исходного уравнения.

в) $\begin{array}{c} x > 2, \\ 2x - 4 - 3x - 12 = 1, \end{array}$; $\begin{array}{c} x > 2 \\ x = -17 \end{array}$.

Система решений не имеет.

Ответ: -15; $-1{,}8$ [32].

«**Пример 3.** Решить уравнение $x^2 - x + x - 2 = x^2 - 2$.

Решение. Выражения под знаком модуля будут равны нулю при $x = 0$, $x = 1$ и $x = 2$. Данные значения разобьют координатную прямую на четыре промежутка, что означает необходимость решения четырех систем.

а) $\begin{array}{c} x \le 0 \\ x^2 - x - x + 2 = x^2 - 2 \end{array}$; $\begin{array}{c} x \le 0 \\ x = 2 \end{array}$.

Система решений не имеет.

б) $\begin{array}{c} 0 < x \le 1 \\ -x^2 + x - x + 2 = x^2 - 2 \end{array}$; $\begin{array}{c} 0 < x \le 1 \\ x = \pm\sqrt{2} \end{array}$.

Система решений не имеет.

в) $\begin{array}{c} 1 < x \le 2 \\ x^2 - x - x + 2 = x^2 - 2 \end{array}$. Откуда $x = 2$.

г) $\begin{array}{c} x > 2 \\ x^2 - x + x - 2 = x^2 - 2 \end{array}$. Откуда $x > 2$.

Ответ: 2; +8 » [32].

4.3. Графический метод решения

График функции является не целью, а средством, помогающим решить уравнение. «Графические методы решения уравнений, как правило, являются приближенными. Они дают возможность сделать оценку промежутков, в которых находятся возможные решения, и указать количество корней. Точность решения зависит от выбранного масштаба, толщины карандаша или ручки, углов, под которыми пересекаются линии на чертеже» [47]. Измерения могут быть произведены с точностью до половины цены деления измерительного прибора (линейки).

Пример 1. Решить графически уравнение $|x - 2| = 3$.

Решение. Для решения данного уравнения, необходимо построить графики функций $y = |x - 2|$ и $y = 3$. График функции $y = |x - 2|$ получим из графика функции $y = x - 2$ зеркальным отображением части прямой, находящейся в нижней полуплоскости, в верхнюю полуплоскость. Графиком функции y=3 является прямая, параллельная оси OX и проходящая через точку (0; 3) на оси OY.

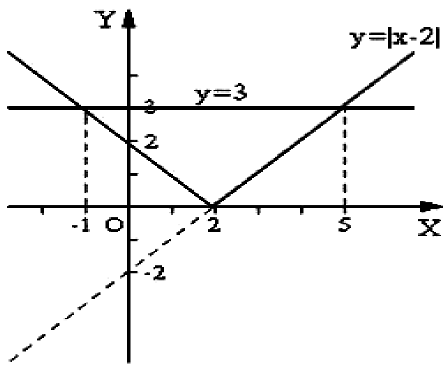

Рис. 6. Рисунок к примеру 1

Решением уравнения являются абсциссы точек пересечения графиков функций: точки с координатами $(-1; 3)$ и $(5; 3)$, следовательно, решениями уравнения будут абсциссы: $x = -1$, $x = 5$.

Ответ:-1; 5.

Пример 2. Решить графически уравнение $\overline{x} = x - 2$.

Решение. Графики функций $y = \overline{x}, y = x - 2$ пересекаются в двух точках: $(1;1)$ и $(4;2)$ (рис. 7). Значит, уравнение имеет два корня: $x_1 = 1$; $x_2 = 4$.

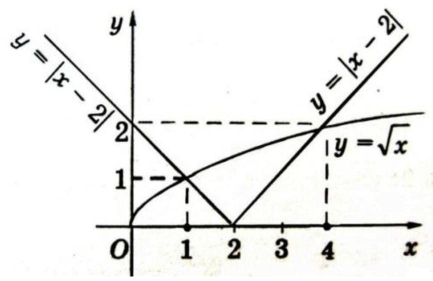

Рис. 7. Рисунок к примеру 2

Ответ: 1; 4 [30].

Пример 3. Сколько корней имеет уравнение $\frac{2}{x-1} = x^2 - \ x \ - 2$.

В каких промежутках они заключены?

Решение. В одной системе координат строим графики функций

$$y = \frac{2}{x-1} \text{ и } y = x^2 - \ x \ - 2.$$

По определению модуля:

$$y = \frac{2}{x-1} = \begin{cases} \frac{2}{x-1}, \text{если } x \geq 1, \\ \frac{2}{1-x}, \text{если } x < 1. \end{cases}$$

$$y = x^2 - \ x \ - 2 = \begin{cases} x^2 - x - 2, \text{если } x \geq 0, \\ x^2 + x - 2, \text{если } x < 0. \end{cases}$$

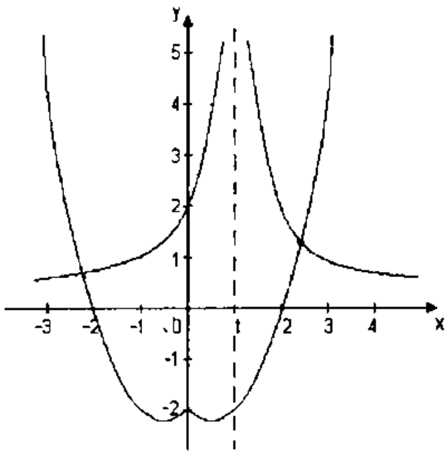

Рис. 8. Рисунок к примеру 3

Из рисунка видно, что уравнение имеет 2 корня (графики пересекаются в двух точках). Сравнение значений обеих функций при $x = -3, x = -2$, $x = 2$ и $x = 3$ дает возможность указать на то, что корни расположены на промежутках $(-3; -2)$ и $(2; 3)$.

Ответ: 2 корня; один - на промежутке $(-3;-2)$, второй — на промежутке $(2; 3)$[39].

Пример 4. $2 \ x \ - a^2 \ = x - 2a$

Решение. Будем решать данное уравнение (точнее, определять количество его решений при различных a графически. При всех $a \neq 0$ график функции

$y = 2\ x\ \ - a^2$ имеет вид, изображённый на рисунке 9-а, график функции $y = \ 2\ x\ \ - a^2$ имеет вид, изображённый на рисунке 9-b (при $a = 0$ эти графики «вырождаются» в график функции $y = 2\ \ x\ $).

Уравнение $2\ x\ \ - a^2\ = x - 2a$ имеет четыре различных решения <=> прямая $y = x - 2a$ пересекает график $y = \ 2\ x\ \ - a^2$ в четырёх различных точках. Легко видеть, что последнее выполнено лишь тогда, когда прямая $y = x - 2a$ содержится между прямыми l_1 и l_2, изображёнными на рисунке 6 b). А это, в свою очередь, выполнено тогда, когда точка пересечения прямой $y = x - 2a$ с осью Oy лежит между точками пересечения оси Oy с прямыми l_1, l_2 (рис. 9).

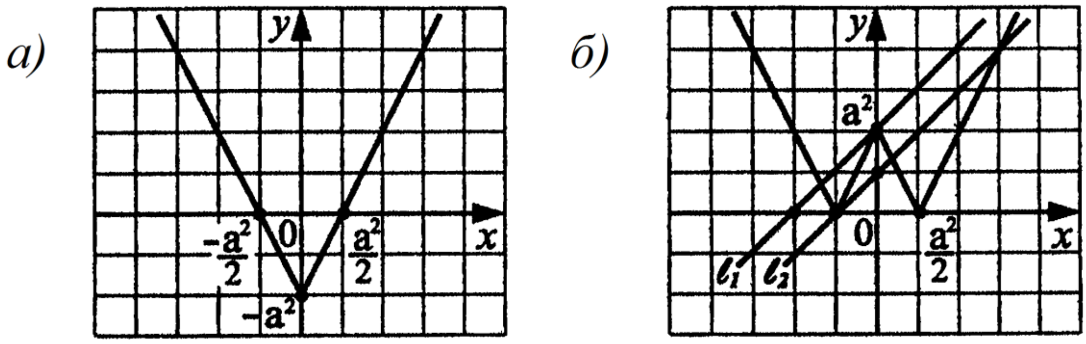

Рис. 9. Рисунок к примеру 4

Прямая $y = x - 2a$ пересекает ось Oy в точке с ординатой $-2a$, прямые l_1, l_2пересекают ось Oy в точках с ординатами a^2 и $\frac{a^2}{2}$. Значит, искомыми а являются решения системы неравенств:

$$-2a < a^2 \quad (1)$$
$$-2a > \frac{a^2}{2} \qquad 2\ .$$

Из неравенства (2) следует, что $a < 0$, поэтому РАЗДЕЛИВ неравенства на a, получим, что равносильной системой является система:

$$\begin{matrix} -2 > a \\ -2 < \frac{a}{2} \end{matrix} \quad \Leftrightarrow \ -4 < a < -2.$$

Ответ: $a \in \ -4; -2\ $.

Используя графический метод в процессе решения уравнения зачастую не удается найти точного значения его решения. Решение уравнения графическим методом может содержать приближенное значение корней. Применение данного метода возможно использовать, если необходимо найти не сами корни, а всего лишь определить их количество.

4.4. Решение уравнений заменой переменной

Уравнение, которое содержит неизвестную под знаком модуля, можно решить, используя метод замены переменной. Рассмотрим примеры.

Пример 1. Решить уравнение $x^2 - 5|x| + 6 = 0$.

Решение. Сделаем замену переменных: пусть $y = |x|$. По свойству модуля $|x|^2 = x^2$. Поэтому исходное уравнение может быть записано в виде: $y^2 - 5y + 6 = 0$. Это квадратное уравнение и его корни: $y_1 = 2$, $y_2 = 3$. Следовательно, исходное уравнение равносильно совокупности двух уравнений: $|x| = 2$ и $|x| = 3$.

Ответ: $x = \pm 2$, $x = \pm 3$.

Пример 2. Решите уравнение: $(x-2)^2 - 8|x-2| + 15 = 0$.

Решение. Аналогично предыдущему заданию сделаем замену переменных:

Пусть $|x-2| = t$, $|x-2|^2 = (x-2)^2 = t^2$,

тогда уравнение примет вид: $t^2 - 8t + 15 = 0$,

$$D = 16 - 15 = 1.$$

$$t_1 = 3, t_2 = 5.$$

Если $t_1 = 3$, то $x - 2 = 3 \Rightarrow x_1 = 5, x_2 = -1$.

Если $t_2 = 5$, то $x - 2 = 5 \Rightarrow x_3 = 7, x_4 = 3$.

Ответ: -1; 3; 5; 7.

Пример 3. «Решите уравнение $(x-1)^2 - 3\ x-1\ - 4 = 0$.

Решение. Сделав замену переменной $t = \ x-1\ $ $(t \geq 0)$, получим квадратное уравнение $t^2 - 3t - 4 = 0$, единственным неотрицательным корнем которого является $t = 4$, откуда $\ x-1\ = 4$, и, значит, $x = -3, x = 5$» [20].

Ответ: $-3; 5$.

Пример 4. «Решить уравнение $(x-3)^2 = \; x-3 \; + 6$.

Решение. Так как $|x-3|^2 = (x-3)^2$, положим $\; x-3 \; = y$, где $y \geq 0$, получим уравнение $y^2 - y - 6 = 0$, откуда $y = 3$ $(y \geq 0)$ и далее решаем уравнение $\; x-3 \; = 3; x = 0$ и $x = 6$» [25]

Ответ: $0; 6$.

Пример 5. Решить уравнение $\frac{\; x-2 \; -\mathbf{1}}{3- \; x-2 \;} = 2$.

Решение. Для простоты положим $\; x-2 \; = a$, где $a \geq 0$, $a \neq 3$. Получаем уравнение $\frac{a-\mathbf{1}}{3-a} = 2$, которое распадается на два: $\frac{a-\mathbf{1}}{3-a} = 2$; $\frac{a-\mathbf{1}}{3-a} = -2$, корни которых $a = \frac{7}{3}$ и $a = 5$. Остается решить уравнения $\; x-2 \; = \frac{7}{3}$ и $\; x-2 \; = 5$..

Ответ: $-\frac{\mathbf{1}}{3}; -3; 4\frac{\mathbf{1}}{3}; 7$ [39].

4.5. Решение уравнений с использованием геометрического смысла понятия «модуль»

Следующий метод решения уравнений с модулем основан на замене переменной и тождестве $\; a^2 \; = a^2$. Решение уравнений с модулем связывается с геометрической интерпретацией модуля разности чисел. Решение уравнения $\; x-a \; = b$ сводится к нахождению на координатной прямой точек, удаленных от точки с координатой a на расстояние b [11].

Пример 1. Решить уравнение $\; x+2 \; = 3$.

Решение. Геометрически уравнение $\; x+2 \; = 3$ означает, что искомые точки x находятся от точки с координатой -2 на расстоянии, равном 3 единицы (рис. 10).

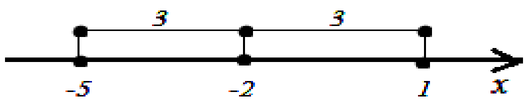

Рис. 10. Рисунок к примеру 1

Ответ: $-5; 1$.

«Рассмотрим уравнения вида $x-b + x-c = a$, при решении которого использование геометрического смысла модуля достаточно эффективно. Решить уравнение $x-b + x-c = a$ – значит найти все точки x числовой оси, сумма расстояние от каждой из которых до точек b и c равна a. Если расстояние между точками больше, то уравнение не имеет решений. В самом деле, если предположить, что искомая точка принадлежит отрезку с концами b и c, то сумма расстояний от такой точки до концов отрезка окажется больше a (поскольку длина этого отрезка больше a), а для любой точки, лежащей вне рассматриваемого отрезка, сумма расстояний будет еще больше. Если расстояние между точками b и c равно a, то любая точка отрезка с концами b и c будет решением данного уравнения. Если же расстояние между точками b и c меньше a, то для любой точки отрезка с концами b и c сумма расстояний до точек b и c будет меньше a. Таким образом, искомая точка должна лежать вне отрезка с концами b и c. В этом случае сумма расстояний от искомой точки до точек b и c будет складываться из длины отрезка с концами b и c и удвоенного расстояния от этой точки до ближайшего к ней конца отрезка. Это рассуждение и позволяет найти искомые значения переменной. При освоении метода решение подобных уравнений осуществляется почти мгновенно. Для этого нужно изобразить числовую ось, отметить на ней «ключевые» точки b и c и расстояние между ними»[47].

«**Пример 1**. Решите уравнение $x-1 + x-7 = 24$.

Решение. Найдем все точки x числовой оси, сумма расстояний от каждой из которых до точек 1 и 7 равна 24. На отрезке [1; 7] таких точек нет, т.к. сумма расстояний от любой точки отрезка до его концов равна длине отрезка, т.е. в данном случае равна 6. Поэтому необходимые точки лежат вне отрезка. Если точка лежит правее точки 7 на числовой оси, то сумма расстояний от этой точки до концов отрезка складывается из длины отрезка и удвоенного расстояния от этой точки до 7. Удвоенное расстояние равно $24-6=18$.

Искомая точка находится правее точки 7 на $18:2=9$ единиц. Поэтому, первая из искомых точек: $x=16$. Аналогично получаем вторую искомую точку, которая находится на числовой оси левее точки 1 на 9 единиц. Второе решение уравнения: $x=-8$.

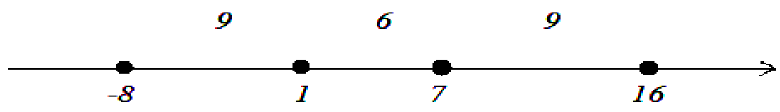

Рис. 11. Рисунок к примеру 1

Ответ: $-8;\ 16$.

Выводы по первой главе

1. В первой главе представлены цели обучения теме «Уравнения с модулем», прописанные в ФГОС [45] и примерной основной образовательной программе [41].

2. Рассмотрено понятие модуля действительного числа.

3. Выполнен анализ школьных учебников на предмет содержания теоретического и практического материала по теме исследования. В ходе анализа школьных учебников с точки зрения исследуемой проблемы было установлено: для 6 класса учебник Н.Я. Виленкина [7] более всего подходит для изучения данной темы; для 7 класса наиболее разнообразны задачи в учебнике Ю.Н. Макарычева [17]; для 8 класса наиболее разнообразны задачи из учебника Ш.А. Алимова [3]; для 9 класса более сложные уравнения с модулем представлены в сборнике задач М.Л. Галицкого для 8, 9 классов [8].

4. Основные методы решений уравнений с модулем, следующие:

– метод решения на основе равносильных преобразований;

– метод решения с использованием промежутков (интервалов);

– графический метод;

– решение с помощью замены переменной;

– решение с использованием геометрического смысла понятия «модуль».

ГЛАВА II. МЕТОДИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ОБУЧЕНИЯ РЕШЕНИЮ УРАВНЕНИЙ С МОДУЛЕМ В КУРСЕ АЛГЕБРЫ ОСНОВНОЙ ШКОЛЫ

§5. Из опыта работы учителей по данной теме

В процессе работы было рассмотрено четыре статьи по данной теме.

1. Первая статья *Н.Б. Карсаковой «Решение уравнений и неравенств с модулем»* [16]. Статья разбита на три параграфа: «Определение модуля», «Свойства модуля», «Геометрический смысл модуля». В каждом из которых кратко изложена теория, затем предлагаются задачи с решением и задания для самостоятельного решения. Задания в третьем параграфе «Геометрический смысл модуля» следующие:

Пример 1. Решите уравнения:

1) $|x| = 5$, 2) $|x - 2| = 1$, 3) $|2x + 5| = 7$.

Решать данные уравнения можно двумя способами: по определению и с помощью геометрической иллюстрации.

Решение. 1) Нужно найти все такие значения x, при которых соответствующие точки x на координатной прямой будут удалены от начала координат на расстояние 5. Ответ: $x_1 = 5$, $x_2 = -5$.

2) Нужно найти все такие значения x, при которых соответствующие точки x на координатной прямой будут удалены от точки 2 на расстояние равное 1. Ответ: $x_1 = 1$, $x_2 = 3$.

3) $|2x + 5| = 7$, $2|x + 2,5| = 7$, $|x + 2,5| = 3,5$.

Нужно найти все такие значения x, при которых соответствующие точки x на координатной прямой будут удалены от точки –2,5 на расстояние равное 3,5.

Ответ: $x_1 = -6$, $x_2 = 1$.

Пример 2. Решите уравнения с помощью геометрической иллюстрации:

1) $|x + 2| + |x – 7| = 9$, 2) $|x + 2| + |x – 7| = 10$, 3) $|x + 2| + |x – 7| = 7$.

Решение. 1) Нужно найти на координатной прямой такие точки x, при которых сумма расстояний от точек –2 и 7 до точки x будет равна 9 (рис. 12).

Рис. 12. Рисунок к примеру 2

Ответ: $x \in [–2; 7]$.

2) Точка x лежит либо правее точки 7, либо левее точки –2 (рис. 12,13).

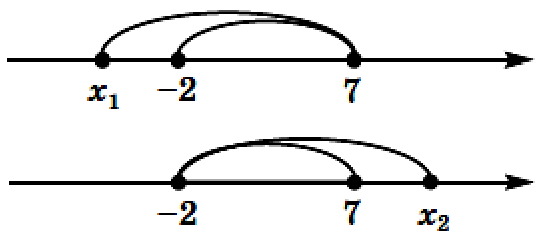

Рис. 12,13. Рисунки к примеру 2

Ответ: $x_1 = –2{,}5$ и $x_2 = 7{,}5$.

3) Корней нет, так как точек x, удовлетворяющих уравнению $|x + 2| + |x - 7| = 7$, не существует.

Пример 3. Решите уравнение с использованием геометрической интерпретации модуля $|x - 1| - |x - 2| = 1$.

Решение. Разность расстояний от точки x до точек 1 и 2 (на координатной прямой) равна единице только для точек, расположенных правее точки 2. Поэтому, решением данного уравнения будет являться не отрезок, заключенный между точками 1 и 2, а луч, выходящий из точки 2 и направленный в положительном направлении оси ОХ.

Ответ: $x \in [2; +\infty)$.

Обобщением вышеприведенных уравнений являются следующие равносильные переходы:

$$|x - a| + |x - b| = b - a, \text{ где } b \geq a \Longleftrightarrow a \leq x \leq b,$$

$$|x - a| - |x - b| = b - a, \text{ где } b \geq a \Longleftrightarrow x \geq b\text{»} \ [16]$$

2. Следующая статья *Л.А. Зиновьевой «Уравнения, содержащие неизвестную под знаком модуля»* [15]. Автор предлагает свою методику решения основных типов, содержащих неизвестную под знаком модуля:

1. Уравнения вида $|f(x)| = a$, где $a \geq 0$.

2. Уравнения вида $|f(x)| = g(x)$, где $f(x), g(x)$ – некоторые функции действительного переменного x.

3. Уравнения вида $F(|f(x)|) = 0$.

4. Уравнения вида $|a_1x - b_1| + |a_2x - b_2| + \cdots + |a_nx - b_n| = ax + b$, где $a_1, a_2, \ldots, a_n$; $b_1, b_2, \ldots, b_n$ - константы, принадлежащие R, x – действительная переменная.

5. Уравнения вида $F(|f_1(x)|, |f_2(x)|, \ldots, |f_n(x)|) = 0$, где $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x)$ – некоторые функции действительной переменной x.

Рассмотрим один из типов, предложенный автором.

Уравнения вида $F(|f(x)|) = 0$. Подстановками вида $|f(x)| = t$ они сводятся к системе

$$\begin{cases} F(t) = 0, \\ t \geq 0. \end{cases}$$

В зависимости от вида функции F(t) могут использоваться и другие подстановки.

Пример. Решить уравнение $\sqrt{|x|+1} - \sqrt{|x|} = 0{,}5$.

Решение. Сделаем замену $|x| = t, t \geq 0$. Тогда исходное уравнение будет эквивалентно системе

$$\begin{cases} \sqrt{t+1} - \sqrt{t} = 0{,}5 \\ t \geq 0. \end{cases}$$

Преобразуем первое уравнение системы:

$$\sqrt{t+1} = \frac{1}{2} + \sqrt{t},$$

$$t + 1 = \frac{1}{4} + \sqrt{t} + t,$$

$$t = \frac{9}{16}.$$

Полученное значения t удовлетворяет условию $t \geq 0$.

Таким образом найдено, что $x = \frac{9}{16}$. Тогда $x_1 = \frac{9}{16}$, $x_2 = -\frac{9}{16}$.

Проверка подтверждает, что оба найденных значений x являются решениями заданного уравнения.

Ответ: $-\frac{9}{16}, \frac{9}{16}$.

3. Третья статья *С. Шестакова «Модуль числа. Уравнение и неравенства, содержащие знак модуля»* [48] из газеты «Математика». Автор пишет, что «из определения и свойств модуля вытекают основные методы решения уравнений и неравенств с модулем:

– «раскрытие» модуля (т.е. использование определения);
– использование геометрического смысла (свойство 2);
– использование равносильных преобразований (свойства 6-10);
– замена переменной (при этом используется свойство 5).

Традиционным является «раскрытие» модуля (метод интервалов). Суть метода заключается в том, что числовая ось разбивается на несколько интервалов нулями функций, стоящих под знаком модуля в данном уравнении. На каждом из таких интервалов любая из указанных функций либо положительна, либо отрицательна. Поэтому каждый из модулей раскрывается либо со знаком плюс, либо со знаком минус. Таким образом, остается найти решение уравнения на каждом интервале и объединить эти решения».

По каждому методу автор рассматривает следующие примеры решения уравнений с модулем.

Пример 1. Решить уравнение $x^2 + x - 5 + x^2 + x - 9 = 10$.

Решение. Сделаем замену: $x^2 + x - 5 = a$, получим уравнение $a + a - 4 = 10$. Найдем все точки числовой оси (по геометрическому смыслу модуля). Сумма расстояний от каждой из которых до точек 0 и 4 равна 10.

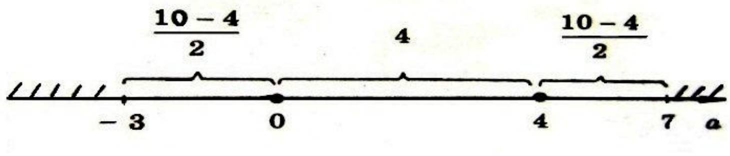

Рис. 14. Рисунок к примеру 1

Искомые точки лежат вне отрезка [0;4]. Рассмотрим точку, лежащую левее точки 0 на оси. Пусть эта точка – искомая. Тогда сумма расстояний от неё до точек 0 и 4 складывается из длины отрезка [0; 4] и удвоенного расстояния до точки 0. Таким образом, расстояние от искомой точки до точки 0 равно $\frac{10-4}{2} = 3$. Поэтому искомой точкой является точка -3. Очевидно, что вторая искомая точка – это точка 7. Итак,

$$a \ + \ a-4 \ = 10 <=> \begin{array}{c} a=-3, \\ a=7; \end{array}$$

$$\begin{array}{c} x^2+x-5=-3, \\ x^2+x-5=7 \end{array} <=> \begin{array}{c} x^2+x-2=0, \\ x^2+x-12=0 \end{array} <=> \begin{array}{c} x=1, \\ x=-2, \\ x=-4, \\ x=3. \end{array}$$

Ответ: {-4; -2; 1; 3}» [48]

«**Пример 2**. Решить уравнение $x^2 + \ x-2 \ = 2 \ 2x-1 \ $.

Решение. Уравнение равносильно следующему:

$$x^2-4x+2+ \ x-2 \ <=> \ \ x-2 \ ^2+ \ x-2 \ -2=0.$$

Пусть $t= \ x-2 \ , t \geq 0$.

Тогда $\ x-2 \ ^2 = t^2$, и уравнение примет вид

$$t^2+t-2=0 <=> \begin{array}{c} t=1, \\ t=-2. \end{array}$$

Но $t \geq 0$, поэтому $t=1$, откуда $\ x-2 \ =1 <=> \begin{array}{c} x=1, \\ x=3. \end{array}$

Ответ: {1; 3}»[48].

Пример 3. Решить уравнение $\ x^2-3x-2 \ =3x-2$.

Решение. Уравнение равносильно следующей системе:

$$\begin{array}{c} 3x-2\geq 0, \\ x^2-3x-2=3x-2, \\ x^2-3x-2=-3x+2 \end{array} <=> \begin{array}{c} x\geq \frac{2}{3}, \\ x=0, \\ x=6, \\ x\pm 2 \end{array} <=> \begin{array}{c} x=6, \\ x=2. \end{array}$$

Ответ: {2; 6} [52].

4. И последняя статья *Г.А. Трефиловой «Рациональное решение уравнений и неравенств с модулем»* [44].

В данной статье рассматривается применение следующих свойств модуля при решении уравнений с модулем:
для любых действительных значений **a**, b справедливо

$$a+b \ \leq \ a \ + \ b \ ;$$

$$a+b \ = \ a \ + \ b \ \Leftrightarrow ab\geq 0;$$

$$a-b \ \leq \ a \ + \ b \ ;$$

$$a-b \ = \ a \ + \ b \ \Leftrightarrow ab\leq 0.$$

Пример. Решить уравнение $3x-5 \ + \ x-1 \ = \ 4x-6$.
Решение. Пусть $a=3x-5$; $b=x-1$.
Тогда $a+b=(3x-\ 5)+\ (x-\ 1)=4x-6$,

$$a+b \ = \ a \ + \ b \ .$$

Таким образом, равенство $3x-5 \ + \ x-1 \ = \ 4x-6$, в силу условия $a+b \ = \ a \ + \ b \ \Leftrightarrow ab\geq 0$, равносильно неравенству $3x-\ 5 \quad x-\ 1 \ \geq 0$.
Решив это неравенство, получим $x\in \ -\infty;1 \ \cup \ \frac{5}{3};+\infty$.

Ответ: $x\in \ -\infty;1 \ \cup \ \frac{5}{3};+\infty$.

Данные работы будут интересны учителям математики, которые хотят, чтобы их учащиеся имели более широкие знания о модуле числа, различных способах решения уравнений, содержащих знак абсолютной величины, а также школьникам для самостоятельной работы по данной теме.

§ 6. Система задач для подготовки к ОГЭ по теме «Уравнения, содержащие знак модуля»

6.1. Требования к системе задач по данной теме

Система задач, предлагаемая в данной работе, удовлетворяет следующим требованиям:

1. Система задач охватывает все основные методы решения уравнений, содержащих знак модуля.

2. Система задач направлена на формирование умения применять тот или иной метод решения.

3. Система задач содержит достаточное число заданий для усвоения основных методов решения уравнений, содержащих знак модуля.

4. Система задач содержит задания по возрастанию трудности (т.е. от простого к сложному).

6.2. Система задач

Для составления данной системы задач использовались следующие учебники: Галицкий М.Л. Сборник задач по алгебре для 8-9 классов [8]; Севрюков П.Ф., Смоляков А.Н. Уравнения и неравенства с модулями и методика их решения [43]; Мордкович А.Г. Алгебра 8 класс (углубленное изучение) [29] и др.

Система задач будет предложена ученикам после урока на обобщение и систематизацию знаний под данной теме при подготовке к основному государственному экзамену [Приложение 1].

I. Уравнения, содержащие знак модуля

Пример 1. Решите уравнение $2x + 1 \ = 3$.

Пример 2. Решите уравнение $x^2 + \ x \ - 2 = 0$.

Пример 3. Решите уравнение $x^2 - 2x - 4 \ = 4$.

Пример 4. Решите уравнение $x^2 - 4x + 3 \ = 2x - 5$.

Пример 5. Решите уравнение $\frac{x+3\ \ -1}{x-1} = 4$.

Пример 6. Решите уравнение $x^2 - 6x + 7\ \ = \frac{5x-9}{3}$.

Пример 7. Решите уравнение $x^2 - 4\ x - 3\ \ - 2x - 7 = 0$.

Пример 8. Решите уравнение $x^2 + 2x - 1\ \ =\ \ x + 1$.

Пример 9. Решите уравнение $x + 1\ \ +\ \ x - 4\ \ = 5$.

Пример 10. Решите уравнение $x - 1\ \ + 2\ x - 3\ \ = 5 - x$.

Пример 11. Решите уравнение $\overline{3x + 19} =\ \ x - 5\ \ - 2$.

Пример 12. Решите уравнение $\overline{x\ + 1} - \overline{x}\ = 0{,}5$.

Пример 13. Найти множество значений параметра p, при которых уравнение $2px - \ 2x - 4\ x\ - 1\ - 1 =\ 0$ имеет ровно два корня.

Пример 14. Найдите все значения a, при которых уравнение $x^2 + 2x - \ 3\ \ =\ 4a - 2$ имеет не менее трёх различных корней.

Пример 15: $\overline{x^2 - 4x + 4} = -2(x-2)^2$

Пример 16: $\overline{x^2 - 2x + 1} = \frac{2}{x}$

Пример 17: $\overline{x^2 + 6x + 9} = (x+3)^2$

Пример 18: $\overline{x^2 + 4x + 4} = -x$

Пример 19: $x - 1\ \ +\ \ x + 1\ \ = 2$

Ответы и решения данной системы задач представлены в Приложении 2.

§ 7. Методические рекомендации обучения решению уравнений, содержащих знак модуля

1. Изучение понятия «модуль» впервые встречается в самом начале курса математики 6 класса, где оно изучается в контексте противоположных чисел. Понятие вводится описательно на примерах как расстояние от нуля до данного числа на числовой прямой, но четкого постулирования этого факта нет, нет и упражнений в курсе для полноценного освоения этого материала в

последующем. Можно рекомендовать следующее определение: «Абсолютной величиной положительного числа называется само это число, абсолютной величиной отрицательного числа называется противоположное ему положительное число, абсолютной величиной числа 0 называется само число 0». «Ученикам нужно показать, как обозначают абсолютную величину, то есть знак a , и решить следующие задачи:

1. Найти абсолютную величину чисел $(+5)$; (-3); $(-0{,}1)$ и т.д.

2. Найти точки, которым соответствуют числа, имеющие абсолютную величину 5; 3 и т.д. (Учащиеся должны отметить две точки для каждого числа)» [2, С. 340].

Геометрическая интерпретация модуля числа затем растворяется в программном математическом материале.

Однако, геометрическая интерпретация модуля как расстояния позволяет решать уравнения и неравенства с активным использованием средств арифметики и наглядных представлений учащихся. Этот метод в ряде случаев бывает наиболее простым и элегантным. Поэтому учителю нужно отвести особое внимание геометрической интерпретации модуля.

Важно, чтобы учащиеся уже в 6 классе осознавали и умели иллюстрировать на чертеже эквивалентность соотношений:

$$x < a \text{ и } -a < x < a, \text{ где } a > 0,$$

говоря, что если абсолютное значение числа x меньше, чем число а, то точка X, изображающая число x, ближе к начальной точке O, чем точка A, изображающая число a, и, следовательно, расположена между начальной точкой O и точкой A – справа от точки O, если а есть положительное число, и слева от точки O, если а есть отрицательное число.

Этот переход от одного из неравенств:

$$x < a \text{ и } -a < x < a$$

к другому учащийся должен проиллюстрировать (рис. 15) и кратко объяснить, заменяя термин «между»

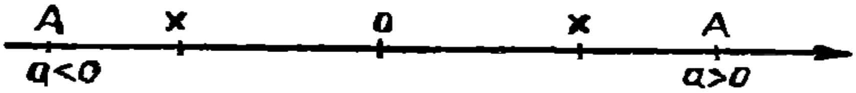

Рис. 15. Геометрическая интерпретация модуля

выражением «в промежутке между числами a и $-a$ или более кратко – «в промежутке $(-a; a)$», где a есть данное число. Например неравенство $x < 5$ означает, что число x заключено в промежутке $(-5;5)$.

Еще точнее будет выражение «внутри промежутка». Оно понадобится, если учитель пожелает поставить и решить с классом вопрос о смысле неравенства $x > 5$, чтобы получить ответ: это значит, что число x расположено «вне промежутка» $(-5;5)$, т.е. либо справа от числа 5, если x есть положительное число, либо слева от числа (-5), если x есть отрицательное число.

Этот ответ, как и предыдущие, учитель получит без труда, если учащиеся прочно усвоят определение абсолютного значения числа, как числа, выражающего расстояние точки X от начальной точки O, и будут рассуждать так: «абсолютное значение числа x больше числа 5; значит, расстояние точки X от точки O больше, чем 5, т.е. точка X расположена либо вправо от точки 5, либо влево от точки (-5) (рис. 16) [3, С. 73].

Рис. 16. Геометрическая интерпретация модуля

2. Фигурная скобка в записи определения $a = \begin{matrix} a, \text{если } a \geq 0, \\ -a, \text{если } a < 0 \end{matrix}$

довольно часто приводит к неправильному толкованию определения и, как следствие, определение модуля на языке формальной логики принимает вид: $a = (a \cap a \geq 0) \cap (-a \cap a < 0)$ что приводит учащихся и, к сожалению, даже некоторых учителей к замешательству.

3. Позднее, когда появляется необходимость решения уравнений с модулем, выясняется, что учащимся это понятие не усвоено и его нужно изучать снова. Следовательно, именно на этом этапе необходимо вернуться к понятию «модуль» и решать задания, применяя его, т.е. давая теоретическое обоснования. Необходимость владения понятием «модуль» появляется в курсе математики 7 класса при изучении функций $y = x^2$ и $y = x^3$. И все же находятся пути, позволяющие в рамках учебного материала обойти понятие «модуль». Например, решая уравнение $x^2 = 25$, получаем корни $x_{\mathbf{1}} = -5, x_2 = 5$.

Учащимся такой ответ объясняется так: 25 можно получить возведении в квадрат как числа 5, так и числа (-5). Однако, учитель должен показать учащимся, что решения уравнения $x^2 = 25$ нужно изначально записать как $x = 5$. И затем, используя определение модуля, получить корни $x_{\mathbf{1}} = -5, x_2 = 5$.

4. Обучение учащихся графическим методам решения уравнений с модулем в школе не имеет целенаправленного характера.

Подчас учащимся не позволяет провести правильного графического решения слабая графическая культура.

Два последних тезиса обусловлены тем, что в курсе математики графические методы решения уравнений и их систем рассматриваются после методов алгебраических. Алгебраические методы выглядят более солидно и привлекательно для учащихся по сравнению с графическими, т.к. кажутся менее громоздкими и позволяют получать точные значения корней и промежутков. Отсутствие графической культуры часто влечет за собой и искажение графиков функций.

5. Перечисленные выше причины заставляют задуматься о целесообразности представления разнообразных методов решения уравнений с модулем в процессе обучения математике.

Начало должно быть положено при изучении линейной функции, линейных уравнений. Формирование умений работы, например, с графиками функций $y = x$, $y = ax$, $y = ax + b$ позволило бы осуществлять систематическую пропедевтику графических методов решения соответствующих линейных уравнений. Учителю следует обращать внимание учеников на выбор наиболее рационального метода при решении задач.

6. Помимо формирования у учащихся умений решать уравнения с модулем графически полезно и необходимо вырабатывать и навыки решения на основе определения модуля и свойств арифметического квадратного корня. Изучение этих понятий невозможно жестко привязать к обучению методам решения уравнений с модулем, но полезно рассматривать как предваряющие такое обучение.

7. Проанализировав задачный материал различных учебников 6-9 классов, мы можем с уверенностью сказать, что на первом этапе следует показывать все доступные методы решения уравнений, содержащих знак модуля. На конкретных примерах следует показывать, что важный этап решения – это выбор самого эффективного метода. А наиболее эффективным методом решения уравнений с модулем можно выделить метод на основе равносильных преобразований. Суть метода заключается в том, что возведение обеих частей уравнения в квадрат не приведет ни к потере, ни к получению лишних корней, при условии, что обе части уравнения неотрицательны на некотором множестве.

8. Так же одним из удобных методов решения уравнений является метод интервалов. Он обычно применяется тогда, когда уравнение содержит более одного модуля, а объединение решений, найденных на всех промежутках, и будет решением данного уравнения.

9. Графический метод решения уравнений можно назвать самым сложным для восприятия учащихся, так как он является наглядным,

позволяет сделать оценку промежутков и дает лишь приближенные результаты. Этот метод часто используется, если требуется найти количество корней, а не их точное значение.

10. Одним из простых методов решения уравнений с модулем является метод замены переменной. Главное для учеников - не потерять корни, возвращаясь к первоначальной замене.

11. Последним можно выделить метод решения уравнений с использованием геометрического смысла понятия «модуль». Этот метод основан на замене переменной и тождестве $a^2 = a^2$. Задач, в которых его целесообразно использовать, не так много, причем часть из них можно решить и другими методами.

Выводы по второй главе

Во второй главе были рассмотрены четыре статьи по теме «Уравнения с модулем». Данные работы будут интересны учителям математики, которые хотят, чтобы их учащиеся имели более широкие знания о модуле числа, различных методах решения уравнений, содержащих знак абсолютной величины, а также школьникам для самостоятельной работы по данной теме.

В результате рассмотрения методических материалов изучения уравнений, содержащих знак модуля, были составлены методические рекомендации по изучению данной темы, разработана система задач и конспект урока для подготовки к государственной итоговой аттестации.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Результаты, полученные в работе, позволяют сделать следующие выводы:

1. Рассмотрено понятие модуля действительного числа, свойства модуля и его геометрический смысл.

2. Выполнен анализ теоретического материала в школьных учебниках по теме «Уравнения с модулем», сделаны следующие выводы:

– задания, которые содержат знак модуля, используются для проверки знаний и умений, которые ученики приобрели при изучении различных тем;

– в большинстве учебников алгебры тема «Уравнения с модулем» отдельно не рассматривается;

– большинство авторов считают, что уравнения, содержащие знак модуля, не являются темой базового изучения, поэтому на эту тему не выделяют достаточного количества часов, уделяя больше внимания общей линии уравнений;

– для реализации изучения темы «Уравнения с модулем» в школьном курсе математики недостаточно пользоваться каким-либо одним учебником.

3. Рассмотрены основные методы решения уравнений, содержащих переменную под знаком модуля:

- метод решения на основе равносильных преобразований;
- метод решения с использованием промежутков (интервалов);
- графический метод;
- решение с помощью замены переменной;
- решение с использованием геометрического смысла понятия «модуль».

4. В ходе работы были рассмотрены статьи по данной теме. Данные работы будут интересны учителям математики, которые хотят, чтобы их учащиеся имели более широкие знания о модуле числа, различных методах

решения уравнений, содержащих знак абсолютной величины, а также школьникам для самостоятельной работы по данной теме.

5. Составлена система задач и разработан конспект урока для подготовки к государственной итоговой аттестации.

6. Разработаны методические рекомендации по изучению данной темы.

Всё это даёт основание считать, что цель и задачи, поставленные в исследовании, полностью решены.

СПИСОК ИСПОЛЬЗУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Абасов Р.З. Рациональный вариант метода интервалов при решении некоторых задач с модулем [Электронный ресурс]/ Р.З. Абасов// Вестник Томского государственного педагогического института. - 2011. - № 8(136). - С. 186-191. – Режим доступа:
2. Алимов, Ш.А., Колягин Ю.М. Алгебра: Учеб. для 7 кл. сред. шк. / Ш.А. Алимов, Ю.М. Колягин, Ю.В. Сидоров и др. – М.: Просвещение, 1991. – 191 с.: ил.
3. Алимов, Ш.А., Колягин Ю.М. Алгебра. 8 класс: учеб. для общеобразоват. учреждений / [Ш. А. Алимов, Ю. М. Колягин , Ю. В. Сидоров и др.] - 18-е изд. - М. : Просвещение, 2011 . - 255с.: ил.
4. Алимов, Ш.А., Колягин Ю.М. Алгебра. 9 класс: учеб для общеобразоват. учреждений / Ш.А. Алимов, Ю.М. Колягин, Ю.В. Сидоров и др. – 16-е изд. – М.: Просвещение, 2011. – 287 с.: ил.
5. Башмаков М.И. Уравнения и неравенства. [Текст] / М.И. Башмаков. – М.: Наука. 1976. – 96 с.
6. Бурмистрова, Т.А. Алгебра. Сборник рабочих программ. 7 – 9 классы: пособие для учителей общеобразовательных организация [Текст]/ Т.А. Бурмистрова. – 2-е изд., доп. – М.: Просвещение, 2014. – 96 с.
7. Виленкин, Н.Я Математика: Учеб. для 6 кл. сред. шк. / Н.Я. Виленкин, А.С. Чесноков, С.И.Шварцбудр, В.И. Жохов. – 2-е изд. – М.: Просвещение, 1994. – 256с.: ил.
8. Галицкий, М.Л. Сборник задач по алгебре для 8-9 классов: Учеб. пособие для учащихся шк. и классов с углубл. изуч. математики / М.Л. Галицкий, А.М. Гольдман, Л.И. Звавич. – 3-е изд. – М.: Просвещение, 1995. – 271 с.: ил.
9. Гастева, С.А. Методика преподавания математики в восьмилетней школе / С.А. Гастева, Б.И. Крельштейн, С.Е. Ляпин, М.М. Шидловская; под ред. С.Е. Ляпина. – М.: Просвещение, 1965. – 744 с.

10. Гибш, И.А. Методика обучения алгебре в VI классе восьмилетней школы / И.А. Гибш. – М.: АКПН РСФСР, 1963. – 240 с.
11. Дорофеев, Г.В., Петерсон Л.Г. Математика. 6 класс. Часть 2. – Изд. 2-е перераб. / Г.В. Дорофеев, Л.Г. Петерсон. – М.: Издательство «Ювента», 2010. – 128с.: ил.
12. Дорофеев, Г.В. Алгебра. 7 класс: учебник для общеобразовательных организаций[Текст]/ Г.В. Дорофеев, С.Б. Суворова, Е.А. Бунимович. – 2-е изд. – М.: Просвещение, 2014. – 287 с.
13. Дорофеев, Г.В. Алгебра. 8 класс: учебник для общеобразовательных организаций [Текст]/Г.В. Дорофеев, С.Б. Суворова, Е.А. Бунимович. – 3-е изд. – М.: Просвещение, 2016. – 320 с.
14. Дорофеев, Г.В. Алгебра. 9 класс: учебник для общеобразовательных организаций [Текст]/Г.В. Дорофеев, С.Б. Суворова, Е.А. Бунимович. – 5-е изд. – М.: Просвещение, 2010. – 304 с.
15. Зиноньева, Л.А. Уравнения, содержащие неизвестную под знаком модуля / Л.А. Зиноньева, Н.Д. Щеглова, А.И. Зиноньев // Математика в школе, 1999. – № 5. - 79с.
16. Карсакова, Н.Б. Решение уравнений и неравенств с модулем // Образование в современной школе, 2008. - № 12. – 56с.
17. Макарычев, Ю.Н. Алгебра. 7 класс: учеб. для общеобразоват. учреждений [Текст]/ Ю.Н. Макарычев, Н.Г. Миндюк, К.И. Нешков, С.Б. Суворова; под ред. С.А. Теляковского. – М.: Просвещение, 2013. – 256 с.
18. Макарычев, Ю.Н. Алгебра. 8 класс: учеб. для общеобразоват. учреждений [Текст]/ Ю.Н. Макарычев, Н.Г. Миндюк, К.И. Нешков, С.Б. Суворова; под ред. С.А. Теляковского. – М.: Просвещение, 2013. – 287 с.
19. Макарычев, Ю.Н. Алгебра. 8 класс. Углубленное изучение: учеб. для общеобразоват. учреждений[Текст]/ Ю.Н. Макарычев, Н.Г. Миндюк, К.И. Нешков, И.Е. Феоктистов. – М.: Просвещение, 2010. – 384 с.

20. Макарычев, Ю.Н. Алгебра. 9 класс: учеб. для общеобразоват. учреждений [Текст]/ Ю.Н. Макарычев, Н.Г. Миндюк, К.И. Нешков, С.Б. Суворова; под ред. С.А. Теляковского. – 18-е изд. - М.: Просвещение, 2011. – 271 с.
21. Макарычев, Ю.Н. Алгебра. 9 класс. Учебник для школы и класса с углубленным изучением математики: учеб. для общеобразоват. учреждений [Текст]/ Ю.Н. Макарычев, Н.Г. Миндюк, К.И. Нешков, И.Е. Феоктистов. – М.: Мнемозина, 2006. – 439 с.
22. Макарычев, Ю.Н. Алгебра. Дополнительные главы к шк. учеб. 9 кл.: учеб.пособие для учащихся шк. и кл. с углубл. изуч. математики [Текст]/ Ю.Н. Макарычев, Н.Г Миндюк; под ред. Г.В. Дорофеева. – М.: Просвещение, 1997. – 224 с.
23. Мерзляк А.Г. Алгебра: 7 класс: учебник для учащихся общеобразовательных организаций / А.Г. Мерзляк, В.Б. Полонский, М.С. Якир. – М.: Вента-Граф, 2015. – 272с.: ил.
24. Мерзляк А.Г. Алгебра: 8 класс: учебник для общеобразовательных учреждений / А.Г. Мерзляк, В.Б. Полонский, М.С. Якир. – М.: Вента-Граф, 2013. – 256с.: ил.
25. Мерзляк, А.Г. Алгебра: 9 класс: учебник для учащихся общеобразовательных организаций / А.Г. Мерзляк, В.Б. Полонский, М.С. Якир. – М.: Вента-Граф, 2014. – 304с.: ил.
26. Мордкович, А.Г. Алгебра. 7 класс. В 2 ч. Ч. 1: учебник для учащихся общеобразовательных учреждений [Текст]/ А.Г. Мордкович. – 17-е изд., доп. – М.: Мнемозина, 2013. – 175 с.
27. Мордкович, А.Г. Алгебра. 8 класс: методическое пособие для учителя [Текст]/ А.Г. Мордкович. – М.: Мнемозина, 2010. – 77с.
28. Мордкович, А.Г. Алгебра. 8 класс. В 2 ч. Ч. 1: учебник для учащихся общеобразовательных учреждений [Текст]/ А.Г. Мордкович. – 12-е изд., доп. – М.: Мнемозина, 2010. – 215 с.

29. Мордкович, А.Г. Алгебра. Углубленное изучение. 8 класс. В 2 ч. Ч. 1: учебник [Текст]/ А.Г. Мордкович. – 12-е изд., доп. – М.: Мнемозина, 2006. – 256 с.
30. Мордкович, А.Г. Алгебра. Углубленное изучение. 8 класс. В 2 ч. Ч. 2: задачник [Текст]/ А.Г. Мордкович. – 12-е изд., доп. – М.: Мнемозина, 2006. – 286 с.
31. Мордкович, А.Г. Алгебра. 9 класс. В 2 ч. Ч. 1: учебник для учащихся общеобразовательных учреждений [Текст]/ А.Г. Мордкович, П.В. Семенов. – 12-е изд., стер. – М.: Мнемозина, 2010. – 224 с.
32. Мордкович, А.Г. Алгебра. 9 класс. Углубленное изучение. В 2 ч. Ч. 1: учебн. для учащихся общеобразоват. учрежд. [Текст]/ А.Г. Мордкович, Н.П. Николаев. – 3-е изд., перераб. – М.: Мнемозина, 2008. – 255 с.
33. Мордкович, А.Г. Алгебра. 9 класс. Углубленное изучение. В 2 ч. Ч. 2: учебн. для учащихся общеобразоват. учрежд. [Текст]/ А.Г. Мордкович, Н.П. Николаев. – 3-е изд., перераб. – М.: Мнемозина, 2008. – 275 с.
34. Муравин, Г.К. Алгебра. 7 класс: учеб. для общеобразоват. учреждений [Текст]/ Г.К. Муравин, К.С. Муравин, О.В. Муравина. – 9-е изд., стереотип. – М.: Дрофа, 2013. – 285 с.
35. Муравин, Г.К. Алгебра. 8 класс: учеб. для общеобразоват. учреждений [Текст]/ Г.К. Муравин, К.С. Муравин, О.В. Муравина. – 15-е изд., стереотип. – М.: Дрофа, 2013. – 254 с.
36. Муравин, Г.К. Алгебра. 9 класс: учеб. для общеобразоват. учреждений [Текст]/ Г.К. Муравин, К.С. Муравин, О.В. Муравина. – 14-е изд., стереотип. – М.: Дрофа, 2014. – 315 с.
37. Никольский, С.М. Математика. 6 класс: учеб. для общеобразоват. учреждений / С.М. Никольский, М.К. Потапов, Н.Н. Решетников, А.В. Шевкин. – М.: Просвещение, 2012. – 256с.: ил.

38. Никольский С.М. Алгебра. 7 класс: учеб. для общеобразоват. организаций [Текст]/ С.М. Никольский, М.К. Потапов, Н.Н. Решетников, А.В. Шевкин. – М.: Просвещение, 2013. – 287с.
39. Никольский С.М. Алгебра. 8 класс: учеб. для общеобразоват. организаций [Текст]/ С.М. Никольский, М.К. Потапов, Н.Н. Решетников, А.В. Шевкин. – М.: Просвещение, 2014. – 301с.
40. Никольский С.М. Алгебра. 9 класс: учеб. для общеобразоват. организаций [Текст]/ С.М. Никольский, М.К. Потапов, Н.Н. Решетников, А.В. Шевкин. – М.: Просвещение, 2014. – 335с.
41. Примерные программы основного общего образования. Математика. – М: Просвещение, 2009 – 96с. – (Стандарты второго поколения).
42. Сафронов, А.Н. Об упражнениях, содержащих знаки абсолютных величин // Математика в школе, 1956. - № 2. – С. 37-40.
43. Севрюков, П.Ф. Уравнения и неравенства с модулями и методика их решения: учебно-методическое пособие / П.Ф. Севрюков, А.Н. Смоляков. – М.: Сервисшкола, 2005. – 112с.
44. Трефилова, Г.А. Рациональное решение уравнений и неравенств с модулем // Математика в школе, 2008. - № 10. – С. 29-30.
45. Федеральный государственный образовательный стандарт основного общего образования: Приказ Мин. образования и науки РФ от 17.12.2010 г. №1897. [Электронный ресурс]. – Режим доступа: http://минобрнауки.рф/документы/938. – Последнее обновление 07.02.2017.
46. Хамедова Н.А. Уравнения и неравенства, содержащие переменную под знаком модуля [Электронный ресурс]/ Н.А. Хамедова // Вестник современной науки. – 2016. - №3-1(15). – С.18 – 20. – Режим доступа: https://elibrary.ru/item.asp?id=25896782
47. Шестаков, С.А. ЕГЭ 2017. Математика. Уравнения и системы уравнений. Задача 13 (Профильный уровень) [Текст]// Под ред. И.В.Ященко. – М.: МЦНМО, 2017.– 176с.

48. Шестаков, С.А. Модуль числа. Уравнения и неравенства, содержащие знак модуля // Математика, 1999. - № 18. – 26с.
49. Almog N., Ilany B.. Absolute value inequalities: high school students' solutions and misconceptions [Text] / Educational Studies in Mathematics // 2012. – PP.347-364
50. Ciltas A., Tatar E.. Diagnostic learning difficulties related to equation and inequality that contain terms with absolute value [Text] / International online journal of educational sciences// 2011. – PP. 461-473.
51. Ellis M., Bryson J.. A conceptual approach to absolute value equations and inequalities [Text] / Mathematics Teacher // 2011. -PP. 592-598
52. Melinda A. Curtis. Solving Absolute Value Equations and Inequalities on a Number Line [Text]/ Electronic Theses, Projects and Dissertations // 2016-PP
53. Ponge G.. Using, seeing, feeling and doing absolute value for deeper understanding [Text] / The Mathematics Teaching in the Middle School //2008. – PP. 234-240.

Приложение 1

Конспект урока по теме «Уравнения, содержащие знак модуля» для подготовки к ОГЭ

Тема урока: «Основные виды уравнений, содержащих знак модуля, и методы их решения»

Тип урока: урок обобщения и систематизации знаний.

Цели урока:

Образовательная – обобщить знания по теме «Уравнения, содержащие знак модуля»;

Развивающая – развивать логическое мышление, познавательный интерес и умение анализировать и сравнивать;

Воспитательная – воспитание усидчивости при решении задач и воспитание ответственности за результаты собственной деятельности.

Ход урока:

Прежде всего, вспомним, что

$$x \ = \ \begin{array}{c} x, \text{если } x \geq 0; \\ -x, \text{если } x < 0. \end{array}$$

Рассмотрим различные виды уравнений с модулем.

К простейшим (не обязательно простым) уравнениям мы будем относить уравнения, решаемые одним из нижеприведенных равносильных переходов:

$$f \ x \ \ = f \ x \ <=> f \ x \ \geq 0,$$

$$f \ x \ \ = -f \ x \ <=> f \ x \ \leq 0,$$

$$f(x) \ = g \ x \ <=> \ \begin{array}{c} g \ x \ \geq 0, \\ f^2 \ x \ = g^2 \ x \end{array} \ <=> \ \begin{array}{c} g \ x \ \geq 0 \\ f \ x \ = g \ x \ , \\ f \ x \ = -g \ x \ , \end{array}$$

$$p(x) \ = \ q(x) \ <=> \ \begin{array}{c} p \ x \ = q \ x \ , \\ p \ x \ = -q \ x \end{array}$$

$$f \ + \ g \ = f + g \Leftrightarrow \begin{array}{c} f \geq 0, \\ g \geq 0 \end{array}$$

$$f\ +\ g\ = f - g \Leftrightarrow \begin{array}{l} f \geq 0, \\ g \leq 0. \end{array}$$

$$f\ +\ g\ =\ f + g\ \Leftrightarrow f \cdot g \geq 0,$$

$$f\ +\ g\ =\ f - g\ \Leftrightarrow f \cdot g \leq 0.$$

Рассмотрим следующие примеры:

1. $x^2 - 5x + 4\ = 4\ \ \Leftrightarrow\ \ \begin{array}{c} x^2 - 5x + 4 = 4; \\ x^2 - 5x + 4 = -4 \end{array}\ \ \Leftrightarrow\ \ \begin{array}{c} x = 0; \\ x = 5. \end{array}$

2. $\frac{x^2+2x+1}{x}\ = \frac{x^2+2x+1}{x}\ \ \Leftrightarrow\ \ \frac{x^2+2x+1}{x} \geq 0\ \ \Leftrightarrow\ \ \begin{array}{c} x > 0; \\ x = -1. \end{array}$

3. $x^3 + x - 1\ =\ x^3 + x - 1\ \ \Leftrightarrow\ \ \begin{array}{c} x^3 + x - 1 = x^3 - x + 1; \\ x^3 + x - 1 = -(x^3 - x + 1) \end{array}\ \ \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\ \ \begin{array}{l} x = 0; \\ x = 1. \end{array}$

4. $x^3 - 3x + 1\ = 3x + 1\ \ \Leftrightarrow\ \ \begin{array}{c} 3x + 1 \geq 0, \\ x^3 - 3x + 1 = 3x + 1; \\ x^3 - 3x + 1 = -3x - 1 \end{array}\ \ \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\ \ \begin{array}{c} x \geq -\frac{1}{3}, \\ x = 0; \\ x = \ \overline{6}; \\ x = -\ \overline{6}; \\ x = -{}^{3}\overline{2} \end{array}\ \ \Leftrightarrow\ \ \begin{array}{c} x = 0; \\ x = \ \overline{6}. \end{array}$

Рассмотрим использование геометрической интерпретации модуля для решения уравнений. Геометрический смысл модуля разности величин — это расстояние между ними.

Например, геометрический смысл выражения $x - a$ — длина отрезка координатной оси, соединяющего точки с абсциссами x и a. Перевод алгебраической задачи на геометрический язык часто позволяет избежать громоздких выкладок.

Разберем пример: $x - 1\ +\ x - 2\ = 1.$

Будем рассуждать следующим образом: исходя из геометрической интерпретации модуля, левая часть уравнения представляет собой сумму расстояний от некоторой точки с абсциссой x до двух фиксированных точек с абсциссами 1 и 2. Тогда очевидно, что все точки с абсциссами из отрезка

$[1;2]$ обладают требуемым свойством, а точки, расположенные вне этого отрезка — нет. Отсюда ответ: множество решений уравнения есть отрезок $[1;2]$.

Рассмотрим уравнение решаемой с помощью замены переменной.

Решить уравнение 1: $x^2 + 2\ x\ - 3 = 0$.

Удобно сделать замену $x\ = t$. Получаем:

$$t^2 + 2t - 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{matrix} t = 1, \\ t = -3 \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{matrix} x\ = 1, \\ x\ = -3 \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{matrix} x = \pm 1, \\ \textbf{решений нет}. \end{matrix}$$

Ответ: ± 1.

Рассмотрим метод интервалов. Метод интервалов – это метод разбиения числовой прямой на промежутки, в которых по определению модуля знак абсолютной величины можно будет снять. Для каждого из промежутков необходимо решить уравнение и сделать вывод относительно получившихся корней. Корни, удовлетворяющие промежуткам, и дадут окончательный ответ.

Решить уравнение 2: $x - 1\ - 2\ x - 2\ + 3\ x - 3\ = 4$.

Выражения под модулями обращаются в нуль в точках $x\ = 1$, $x\ = 2$ и $x\ = 3$. Эти точки делят числовую прямую на четыре промежутка (интервала). Отметим на числовой прямой эти точки и расставим знаки для каждого из выражений под модулями на полученных интервалах.

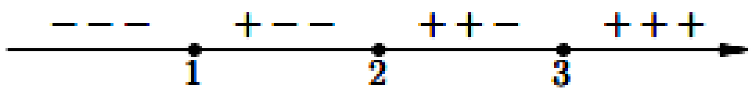

Рис. 17. Рисунок к примеру 2

Таким образом, нам нужно рассмотреть четыре случая — когда x находится в каждом из интервалов.

Случай 1: $x \geq 3$. Все модули снимаются «с плюсом»:

$$x - 1 - 2\ x - 2\ + 3\ x - 3\ = 4,$$

$$x = 5.$$

Полученное значение $x = 5$ удовлетворяет условию $x \geq 3$ и потому является корнем исходного уравнения.

Случай 2: $2 \leq x \leq 3$. Последний модуль теперь снимается «с минусом»:

$$x - 1 - 2\ \ x - 2\ \ + 3\ \ 3 - x\ \ = 4,$$

$$x = 2.$$

Полученное значение x также годится — оно принадлежит рассматриваемому промежутку.

Случай 3: $1 \leq x \leq 2$. Второй и третий модули снимаются «с минусом»:

$$x - 1 - 2\ \ 2 - x\ \ + 3\ \ 3 - x\ \ = 4,$$

$$4 = 4.$$

Мы получили верное числовое равенство при любом x из рассматриваемого промежутка. Это означает, что все числа из промежутка $[1;2]$ служат решениями данного уравнения.

Случай 4: $x \leq 1$. Все модули снимаются «с минусом»:

$$1 - x - 2\ \ 2 - x\ \ + 3\ \ 3 - x\ \ = 4,$$

$$x = 1.$$

Уже известно, что $x = 1$ является решением.

Ответ: $1;2\ \ \cup \{5\}$.

Рассмотрим случай модуль в модуле.

Решить уравнение 3: $3 - x\ \ - 2x + 1\ \ = 4x - 10$.

Начинаем с раскрытия внутреннего модуля.

1) $x \leq 3$. Получаем:

$$3 - x - 2x + 1\ \ = 4x - 10,$$

$$4 - 3x\ \ = 4x - 10.$$

Выражение под модулем обращается в нуль при $x = \frac{4}{3}$. Данная точка принадлежит рассматриваемому промежутку. Поэтому приходится разбирать два подслучая.

1.1) $\frac{4}{3} \leq x \leq 3$. Получаем в этом случае:

$$3x - 4 = 4x - 10,$$

$$x = 6.$$

Это значение x не подходит, так как не принадлежит рассматриваемому промежутку.

1.2) $x \leq \frac{4}{3}$. Тогда:

$$4 - 3x = 4x - 10,$$

$$x = 2.$$

Это значение x также не подходит.

Итак, при $x \leq 3$ решений нет. Переходим ко второму случаю.

2) $x \geq 3$. Имеем:

$$x - 3 - 2x + 1 = 4x - 10,$$

$$x + 2 = 4x - 10.$$

Выражение $x + 2$ положительно в рассматриваемом промежутке. Поэтому подслучаев уже не будет: модуль снимается «с плюсом»:

$$x + 2 = 4x - 10,$$

$$x = 4.$$

Это значение x находится в рассматриваемом промежутке и потому является корнем исходного уравнения.

Ответ: 4.

Приложение 2

Ответы и решения системы задач для подготовки к ГИА по теме «Уравнения, содержащие знак модуля»

I. Уравнения, содержащие знак модуля

Пример 1. $x_1 = -2, x_2 = 1.$

Пример 2. $x_1 = -1, x_2 = 1.$

Пример 3. $x_1 = 0, x_2 = 2, x_3 = -2, x_4 = 4$.

Пример 4. $x_1 = 4, x_2 = 1 + \sqrt{3}$.

Пример 5. $x = 2$.

Пример 6. $x_1 = 3, x_2 = 6$.

Пример 7. $x_1 = 5, x_2 = -1 - \sqrt{20}$.

Пример 8. $x_1 = 1, x_2 = -2, x_1 = 0, x_2 = -3$.

Пример 9. $-1 \le x \le 4$.

Пример 10. $1 \le x \le 3$.

Пример 11. $x_1 = -1, x_2 = 2, x_3 = 15$.

Пример 12. $x_1 = \frac{9}{16}, x_2 = -\frac{9}{16}$.

Пример 13. Решение. В случае $x \ge 1$ получаем

$$2px - 2x - 4|x-1| - 1 = 0 <=> 2px - 2x - 4(x-1) - 1 = 0 <=>$$

$$<=> 2px - 6x + 3 = 0 <=> 2x(p-3) = -3.$$

Таким образом, при $p \ne 3$ решение уравнения имеет вид

$$x = \frac{-3}{2(p-3)}, \qquad (1)$$

а при $p = 3$ уравнение решений не имеет. Кроме того, поскольку $x \ge 1$, то должно выполняться неравенство

$$\frac{-3}{2(p-3)} \ge 1 <=> \frac{-3}{p-3} \ge 2 <=> \frac{-3}{p-3} - 2 \ge 0 <=>$$

$$<=> \frac{-3-2(p-3)}{p-3} \ge 0 <=> \frac{3-2p}{p-3} \ge 0 <=> \frac{2p-3}{p-3} \le 0 <=>$$

$$<=> \frac{p-\frac{3}{2}}{p-3} \le 0 <=> p \in \left[\frac{3}{2}; 3\right).$$

В случае $x < 1$ получаем

$$2px - 2x - 4|x-2| - 1 = 0 <=> 2px - 2x + 4(x-1) - 1 = 0 <=>$$

$$2px + 2x - 5 = 0 <=> 2x(p+1) = 5.$$

Таким образом, при $p \ne 1$ решение уравнения имеет вид

$$x = \frac{5}{2\ \ p+1}, \qquad (2)$$

а при $p = -1$ уравнение решений не имеет. Кроме того, поскольку $x < 1$, то должно выполняться неравенство

$$\frac{5}{2\ \ p+1} < 1 <=> \frac{5}{p+1} < 2 <=> \frac{5}{p+1} - 2 < 0 <=>$$

$$<=> \frac{5-2\ \ p+1}{p+1} < 0 <=> \frac{3-2p}{p+1} < 0 <=> \frac{2p-3}{p+1} > 0 <=>$$

$$<=> \frac{p-\frac{3}{2}}{p+1} > 0 <=> p \in\ -\infty;-1\ \ \cup\ \ \frac{3}{2};+\infty\ .$$

Следовательно, в случае

$$p \in\ \frac{3}{2};3$$

исходное уравнение имеет 2 решения: решение, определяемое по формуле (1) и удовлетворяющее неравенству $x \geq 1$, и решение, определяемое по формуле (2) и удовлетворяющее неравенству $x < 1$.

Ответ: $p \in\ \frac{3}{2};3$.

Пример 14. Решение. Данное уравнение имеет не менее трёх различных корней $\Leftrightarrow$ прямая $y = 4a - 2$ пересекает график функции $y =\ \ x^2 + 2x - 3$ не менее чем в трёх различных точках. График функции $y =\ \ x^2 + 2x - 3$ изображён на рисунке 2. Из этого рисунка следует, что искомыми являются те значения a, которые удовлетворяют неравенствам: $0 < 4a - 2 \leq 4 \Leftrightarrow 0{,}5 < a \leq 1{,}5$.

Ответ: $a \in\ 0{,}5;1{,}5$

Пример 15: $\overline{x^2 - 4x + 4} = -2(x-2)^2$

$$\overline{x^2 - 4x + 4} =\ \ \overline{(x-2)^2} =\ \ x - 2\ \ \text{(по определению)}$$

Построим графики функций: $y =\ \ x - 2$ **и** $y = -2(x-2)^2$

1) $y =\ \ x - 2$ **и** 2) $y = -2(x-2)^2$

Составим таблицы:

x	2	4
y	0	2

x	1	2	3
y	-2	0	-2

Построим графики:

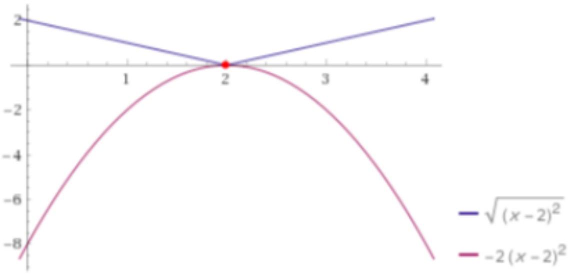

Рис. 18. Рисунок к примеру 15

Ответ: x=2.

Пример 16: $\sqrt{x^2-2x+1}=\frac{2}{x}$

$$\sqrt{x^2-2x+1}=\sqrt{(x-1)^2}= x-1 \ \textbf{(по определению)}$$

Построим графики функций аналогичным способом: $y = x-1$ **и** $y=\frac{2}{x}$

$$y = x-1$$

1 случай: $x-1\geq 0$,x ≥ 1

x	1	2
y	0	1

2 случай: $x-1<0, x<1$

x	-1	1
y	2	0

Составим так же таблицу для второй функции: $y=\frac{2}{x}$

x	1	2	4
y	2	1	1/2

Построим графики:

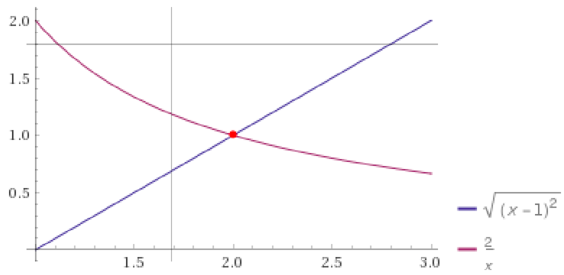

Рис. 19. Рисунок к примеру 16

Ответ: x=2

Пример 17: $\overline{x^2+6x+9} = (x+3)^2$

$$\overline{x^2+6x+9} = \overline{(x+3)^2} = x+3 \quad \text{(по определению)}$$

Построим графики функций аналогично предыдущим заданиям:

$$y = x+3 \ \text{ и } y = (x+3)^2$$

Составим таблицы для этих двух функций:

x	-2	-3	-4	-5	-6
y	1	0	1	2	3

x	-1	-2	-3	-4	-5
y	4	1	0	1	4

Построим графики:

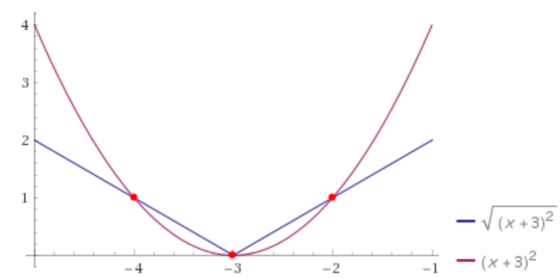

Рис. 20. Рисунок к примеру 17

Ответ: -4,-3,-2

Пример 18: $\overline{x^2+4x+4} = -x$

$$\overline{x^2-4x+4} = \overline{(x+2)^2} = x+2 \quad \text{(по определению)}$$

Для того, чтобы построить графики функций: $y = x+2$ и $y = -x$, составим таблицы

x	-2	1	-3
y	0	3	1

x	-1	-2
y	1	2

Построим графики функций:

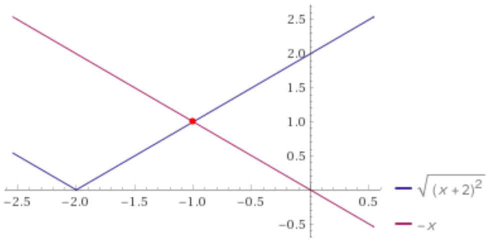

Рис. 21. Рисунок к примеру 18

Ответ: x=2

Пример 19: $x-1\ +\ x+1\ =2$

$$y=\ x-1\ +\ x+1 \text{ и } y=2$$

1 случай: $x\in\ \ -\infty;-1$ – оба выражения под знаком модуля принимают отрицательное значение

$$y=-x+1-x-1$$

$$y=-2x$$

Составим таблицу:

x	-2	-1
y	4	2

2 случай: $x\in\ \ -1;1$ – 1 выражение под знаком модуля принимает отрицательное значение, второе - положительное

$$y=-x+1+x+1$$

$$y=2$$

3 случай: $x \in [1;+\infty)$ - оба выражение под знаком модуля принимают положительные значения

$$y = x - 1 + x + 1$$
$$y = 2x$$

Составим таблицу:

x	1	2
y	2	4

Построим графики функций:

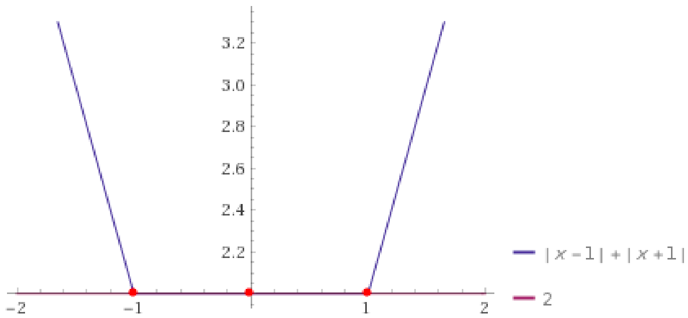

Рис. 22. Рисунок к примеру 19

Ответ: $-1 \le x \le 1$.