МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Тольяттинский государственный университет»

Институт математики, физики и информационных технологий
(наименование института полностью)
Кафедра «Высшая математика и математическое образование»
(наименование кафедры)

44.03.01 «Педагогическое образование»
(код и наименование направления подготовки, специальности)
«Математика»
(направленность (профиль)/специализация)

БАКАЛАВРСКАЯ РАБОТА

на тему **«МЕТОДИКА ОБУЧЕНИЯ РЕШЕНИЮ НЕРАВЕНСТВ С МОДУЛЕМ В КУРСЕ АЛГЕБРЫ ОСНОВНОЙ ШКОЛЫ»**

Студент	А.П. Лисненко (И.О. Фамилия)	____________ (личная подпись)
Руководитель	И.В. Антонова (И.О. Фамилия)	____________ (личная подпись)
Консультант	Е.Ю. Аношина (И.О. Фамилия)	____________ (личная подпись)

Допустить к защите

Заведующий кафедрой д.п.н., профессор, Р.А. Утеева ____________
(ученая степень, звание, И.О. Фамилия) (личная подпись)

«____»__________2018 г.

Тольятти 2018

АННОТАЦИЯ

Цель бакалаврской работы состоит в выявлении методических особенностей обучения учащихся теме «Неравенства с модулем» в курсе алгебры основной школы и разработке систем задач по теме исследования.

Одним из вопросов методики обучения математике в основной школе является вопрос методики формирования у учащихся умений и навыков решения неравенств, в том числе неравенств с модулем.

Изучению темы «Неравенства с модулем» уделяется достаточно мало внимания. Необходимость рассмотрения данной темы обусловлена тем, что неравенства с модулем вызывают у учеников затруднения при их решении.

Бакалаврская работа состоит из введения, двух глав, заключения, списка литературы и приложений.

В *Главе I* раскрываются основные цели и задачи обучения данной теме в курсе алгебры основной школы, а также требования к знаниям, умениям и навыкам учащихся. Выполнен анализ теоретического и задачного материалов по теме исследования в учебниках разных авторов.

В *Главе II* представлены методические рекомендации по обучению решению неравенств с модулем в курсе алгебры основной школы; описаны формы, методы и средства обучения данной теме. Разработаны системы задач по обучению теме «Неравенства с модулем».

В *заключении* приведены основные выводы и результаты исследования.

Список литературы содержит 55 наименований.

Объем работы составляет 82 страницы.

ABSTRACT

The title of the bachelor's thesis is "Teaching methods for solving absolute value inequalities in a course on algebra of the intermediate school".

The issue of how to develop the students' skills and habits to solve inequalities, including absolute value inequalities, is one of the issues of math teaching methodology in the intermediate school. The study of the topic of "Absolute value inequalities" is paid very little attention. The necessity of considering this topic is due to the fact that absolute value inequalities cause difficulties for students while solving them.

The aim of the bachelor's thesis is to reveal the methodological features of teaching students the topic of "Absolute value inequalities" in a course on algebra of the intermediate school and to develop a system of problems on the topic of the research.

The bachelor's thesis consists of an introduction, two chapters, a conclusion and a list of 50 references, including 5 foreign sources.

The first part of the work shows the main goals and tasks of teaching the topic mentioned in a course on algebra of the intermediate school; the requirements for knowledge and skills of students on this topic are identified. It also represents the analysis of the content of the theoretical and problem materials on the research topic.

The second part of the work presents the methodological recommendations for teaching the solution of absolute value inequalities in a course on algebra of the intermediate school. It gives the forms, methods and means of teaching. The part also provides and develops a system of problems for teaching students the topic of "Absolute value inequalities".

The conclusion contains the summary and the results of the study.

References include 55 items. The volume of work is 82 pages.

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Актуальность темы. Понятие неравенства связано со сравнением двух объектов и говорит о том, что эти объекты являются различными. В жизни неравенство сравниваемых объектов познается с таким смыслом слов, как «дальше», «ближе» (неравенство по удаленности), «выше», «ниже» (неравенство по высоте), «тяжелее», «легче» (неравенство по весу) и т.д. В математике смысл понятия «неравенство» сохраняется, но речь идет уже о неравенстве двух математических объектов, таких как: числа, фигур и т.п.

Большинство школьников привычно пользуются математическими символами, но никогда не задумываются, когда и как они возникли, и кто вообще стоит за их созданием. Первые понятия «больше» и «меньше» возникли из-за потребностей людей сравнивать различные предметы и величины. Одними из первых, кто применил понятие неравенства в практической деятельности были древние греки. Известный ученый Архимед, занимаясь вычислением длины окружности, установил пределы для периметра всякого круга, воспользовавшись понятием неравенства. Евклид, в своем знаменитом трактате «Начала» также воспользовался рядом неравенств, доказав, что среднее геометрическое двух положительных чисел не больше их среднего арифметического.

Однако все эти рассуждения проводились на словах и опирались на другую более известную терминологию. Знаки неравенств, которыми мы пользуемся до сих пор, появились лишь в XVII-XVII веках: знаки $<$ и $>$ ввел английский математик Томас Гарриот, знаки $\leq$ и $\geq$ - французский математик Пьер Бугер.

Неравенствам в школьном курсе математики отводится значительная часть программы. Следует отметить, что тема «Неравенства с модулем» не изучается в основной школе как отдельная тема, но некоторые ее понятия рассматриваются, начиная с 8 класса.

Понятие модуля (абсолютной величины) является одной из важнейших характеристик числа в области действительных чисел. Это понятие широко применяется не только в различных разделах школьного курса математики. Понятие неравенства также является одним из основополагающих объектов в обучении математике [51].

Кроме того, одним из вопросов методики обучения математике в основной школе является вопрос методики формирования у учащихся умений и навыков решения неравенств, в том числе неравенств с модулем.

Изучению темы «Неравенства с модулем» уделяется достаточно мало внимания в общеобразовательной школе [52]. Необходимость рассмотрения данной темы обусловлена тем, что неравенства с модулем, вызывают у учеников затруднения при их решении; они встречаются в заданиях ОГЭ и ЕГЭ, олимпиадах.

А.В. Боровских в статье «Предметные и метапредметные проблемы школьного курса математики. Тема неравенства» указывает причину основных затруднений школьников при изучении данной темы – это «каскад из неявных смен представлений о математических объектах и действиях с ними, которые никак не отрабатываются в методике. Школьники расценивают задачи с неравенствами как специально придуманный лабиринт, в котором никогда не знаешь куда идти и оттуда выбраться простому человеку, не обладающему неким особым даром невозможно» [4].

В статье В.А. Тестова «О проблемах при изучении неравенств» [46] отмечается, что в последние годы совершенно неблагополучным стало положение с изучением неравенств в школьном курсе математики. Это связано с отсутствием четкой и понятной терминологии, сокращением и упрощением школьной программы по математике, сложностями данного раздела и оторванности преподавания этой темы от практического опыта. Автор предполагает, что для исправления положения необходимо опираться на четко продуманную стратегию обучения учащихся.

Все вышесказанное определяет актуальность темы исследования.

Проблема исследования состоит в выявлении методических особенностей обучения теме «Неравенства с модулем» учащихся основной школы.

Объект исследования: процесс обучения алгебре в основной школе.

Предмет исследования: методика обучения учащихся теме «Неравенства с модулем» на уроках алгебры в основной школе.

Цель исследования: выявить методические особенности обучения учащихся теме «Неравенства с модулем» в курсе алгебры основной школы и разработать системы задач по теме исследования.

Задачи исследования:

1. Выявить основные цели и задачи обучения решения неравенств с модулем в курсе математики основной школы.

2. Выполнить анализ содержания теоретического материала темы «Неравенства с модулем» в учебниках алгебры 7-9 классов.

3. Представить анализ содержания задачного материала темы «Неравенства с модулем» в учебниках алгебры 7-9 классов.

4. Выявить формы, методы и средства обучения теме «Неравенства с модулем» в курсе алгебры основной школы.

5. Представить методические рекомендации по обучению решению неравенств с модулем в курсе алгебры основной школы.

6. Разработать системы задач по теме исследования для учащихся 7-9-х классов.

Для решения задач были использованы следующие **методы исследования**: анализ методической литературы; анализ школьных программ и учебников; изучение опыта работы учителей математики.

Теоретическая значимость исследования состоит в том, что в нем выявлены методические особенности обучения учащихся теме «Неравенства с модулем» в курсе алгебры основной школы.

Практическая значимость работы заключается в том, что в ней представлены системы задач и методические рекомендации по обучению учащихся 7-9-х классов решению неравенств с модулем, которые могут быть использованы учителями математики и студентами в период педагогической практики в общеобразовательной школе.

На защиту выносятся:

1. Методические рекомендации по обучению учащихся решению неравенств с модулем в курсе алгебры основной школы.

2. Системы задач по теме «Неравенства с модулем» в курсе алгебры основной школы.

Бакалаврская работа состоит из введения, двух глав, заключения, списка литературы.

Во введении сформулированы основные характеристики исследования: актуальность, проблема, объект, предмет, цель, задачи и методы исследования.

Глава I бакалаврской работы раскрывает теоретические основы обучения теме «Неравенства с модулем» в курсе алгебры основной школы. Выявлены основные цели и задачи обучения решению неравенств с модулем в курсе математики основной школы, определены требования к знаниям и умения учащихся по теме «Неравенства с модулем». Выполнен анализ содержания теоретического и задачного материалов по теме исследования.

В Главе II представлены методические основы обучения учащихся теме «Неравенства с модулем» в курсе алгебры основной школы. Выявлены формы, методы и средства обучения данной теме в курсе алгебры основной школы. Представлены методические рекомендации по обучению решению неравенств с модулем в курсе алгебры основной школы. Разработаны системы задач по теме «Неравенства с модулем» в курсе алгебры основной школы.

В заключении сформулированы основные результаты и выводы проведенного исследования.

Список литературы содержит 55 наименований.

Объем работы составляет 82 страниц.

ГЛАВА I. ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ОБУЧЕНИЯ РЕШЕНИЮ НЕРАВЕНСТВ С МОДУЛЕМ В КУРСЕ АЛГЕБРЫ ОСНОВНОЙ ШКОЛЫ

§1. Цели обучения теме «Решение неравенств с модулем» в школьном курсе математики

Линия неравенств – одна из ключевых содержательных линий математики. Линия неравенств реализуется как в исследовании вопросов, которые напрямую относятся к понятию функции, так и в многих других понятиях.

В *федеральном государственном образовательном стандарте основного общего образования* [48] утверждается, что результаты изучения предметной области «Математика» *должны отражать*:

1) развитие умения работать с учебным математическим текстом (анализировать, извлекать необходимую информацию), точно и грамотно выражать свои мысли с применением математической терминологии и символики, проводить классификации, логические обоснования, доказательства математических утверждений;

2) развитие представлений о числе и числовых системах от натуральных до действительных чисел; овладение навыками устных, письменных, инструментальных вычислений;

3) овладение символьным языком алгебры, приемами выполнения тождественных преобразований выражений, решения уравнений, систем уравнений, неравенств и систем неравенств; умения моделировать реальные ситуации на языке алгебры, исследовать построенные модели с использованием аппарата алгебры, интерпретировать полученный результат;

4) овладение системой функциональных понятий, развитие умения использовать функционально-графические представления для решения различных математических задач, для описания и анализа реальных зависимостей;

В примерной основной образовательной программе основного общего образования от 8 апреля 2015 года [39, С. 86-87] указывается, «что в ходе изучения линии неравенств в 7-9 классе для применения в обыденной жизни, при изучении других предметов и обеспечении возможности успешного продолжения образования *на базовом уровне* учащиеся должны научиться:

1. Оперировать на базовом уровне понятиями: числовое неравенство, неравенство, решение неравенства.

2. Проверять справедливость числовых неравенств.

3. Решать линейные неравенства и несложные неравенства, сводящиеся к линейным.

4. Решать системы несложных линейных неравенств.

5. Проверять, является ли данное число решением неравенства;

6. Изображать решение неравенств и их систем на числовой прямой [39, С.86-87]. Учащийся получает возможность научиться в 7-9 классах для обеспечения возможности успешного продолжения образования *на базовом и углубленном уровнях*:

1. Оперировать понятиями: неравенство, решение неравенства, область определения неравенства, системы неравенства.

2. Использовать метод интервалов для решения целых и дробно-рациональных неравенств.

3. Решать линейные неравенства с параметром.

4. Составлять и решать системы линейных неравенств при решении задач других учебных предметов.

5. Выполнять оценку правдоподобия результатов, получаемых при решении систем линейных неравенств в задачах других учебных предметов.

6. Выбирать соответствующие неравенства или их системы для составления математической модели заданной реальной ситуации или прикладной задачи.

7. Уметь интерпретировать полученный при решении неравенства или их системы результат в контексте заданной реальной ситуации или прикладной задачи [39, С. 95].

Учащийся получает возможность научиться в 7-9 классах для благополучного продолжения образования *на углубленном уровне*, а также для применения в житейских ситуациях и решения проблем различных предметных областей:

1. Свободно оперировать понятиями: неравенство, равносильные неравенства.

2. Решать различные виды неравенств и их систем.

3. Владеть разными методами решения неравенств и их системы, уметь выбирать метод решения и обосновывать свой выбор.

4. Использовать метод интервалов для решения неравенств, в том числе дробно-рациональных и включающих в себя иррациональные выражения.

5. Решать алгебраические неравенства и их системы с параметрами алгебраическим и графическим методом.

6. Владеть разными методами доказательства неравенств.

7. Изображать множества на плоскости, задаваемые неравенствами и их системами [39, С. 106-107].

В сборнике рабочих программ по алгебре Т.А. Бурмистровой [5, С. 5] содержится указание на то, что в курсе математики содержание линии алгебры способствует формированию у учащихся математического аппарата для решения задач из разделов математики, смежных предметов и окружающей реальности. Язык алгебры подчеркивает значение математики как языка построения математических моделей процессов и явлений реального мира.

В результате изучения темы «Неравенства» в школьном курсе математики основной школы выпускник научится:

1) понимать и применять терминологию и символику, связанные с отношением неравенства, свойства числовых неравенств;

2) решать линейные неравенства с одной переменной и их системы; решать квадратные неравенства с опорой на графические представления;

3) применять аппарат неравенств для решения задач из разных разделов курса;

Выпускник получит возможность научиться:

4) разнообразным приемам доказательства неравенств; уверенно применять аппарат неравенств для решения разнообразных математических задач и задач из смежных предметов, практики;

5) применять графические представления для исследования неравенств, систем неравенств, содержащих буквенные переменные [5, С. 86-15].

Н.А. Хамедова в статье «Уравнения и неравенства, содержащие переменную под знаком модуля» [50] видит при решении неравенств с модулем логическую стройность математических умозаключений: в процессе их решения получаются разнообразные системы, совокупности, неожиданные выводы.

В статье В.А. Далингера «Различные способы решения неравенства вида $f(x) + g(x) > f \;\; x \;\; + g(x)$ » [7] указывается, что тема «Неравенства, содержащие переменную под знаком модуля» входит в образовательный минимум содержания образовательных программ по математике, однако ей не уделяется должное внимание. Автор призывает к более углубленному изучению данной темы, так как неравенства с модулем решают такие цели как систематизация, расширение и укрепление знаний, связанных с абсолютной величиной. Разнообразие способов решения неравенств с модулем позволяет не всегда идти по «накатанной колее», пытаясь найти решение «в лоб», а предоставляет возможность выбрать и применить рациональный и оптимальный способ.

М.И. Башмаков в книге «Уравнения и неравенства» [2, С. 3] выделяет одну из главных целей в работе со сложными неравенствами – научиться видеть пример так, чтобы на глазах ученика осталась только важная часть, которая поможет найти путь к решению, а все лишнее, то что не влияет на огромную роль при отыскании способа его решения, попытаться убрать с поля зрения. Автор обращает внимание на необходимость четкого понимания того, что подразумевается под словами «решить неравенство», обдумывание смысла этой операций, последующих преобразований, которые мы используем для достижения указанной им цели.

Таким образом, подводя итог вышесказанному, можно сформулировать следующие основные цели обучения линии неравенств в основной школе, в том числе неравенствам с модулем: формирование у учащихся целостного представления о линии неравенств, знаний, умений и навыков понятийного аппарата, связанного с линией неравенств в математике и других науках; развитие у них логического мышления при решении неравенства с модулем, нахождения рационального способа решения неравенств с модулем для разных видов задач, умения акцентировать внимание на основной идее решения неравенства с модулем.

§2. Анализ содержания теоретического материала темы «Решение неравенств с модулем» в учебниках разных авторов

В учебниках алгебры разных авторов изучение материала по неравенствам с модулем и его содержание имеют отличия. Имеются отличия и в порядке изучения основной терминологии темы. Но у большинства авторов прослеживается схожая стратегия ее изучения.

Базовые знания (известные из школьного курса математики 5-6 классов): понятие координатной прямой, координаты точки на координатной прямой, понятие модуля числа, числового неравенства, понятие знаков неравенств, сравнение чисел при помощи знаков неравенств.

Базовые знания (известные из школьного курса алгебры 7-9 классов): понятие неравенства и его свойства, решение неравенства, понятие равносильных неравенств, равносильного преобразования неравенства, понятие линейного неравенства с одной переменной, решение линейного неравенства с одной переменной; понятие рационального неравенства с одной переменной, дробно-рациональных неравенств с одной переменной.

Вводимые (новые) знания: понятие неравенства, содержащий неизвестное под знаком с модуля, решение неравенства, содержащий неизвестное под знаком с модуля, системы неравенств с одной переменной, содержащей неизвестное под знаком модуля, решение неравенства с двумя переменными, содержащего неизвестную под знаком модуля, системы неравенств с двумя переменными, содержащей неизвестное под знаком модуля.

Представим содержание теоретического материала по теме «Неравенства с модулем» в Приложении 1 (Таблица 1) в различных учебниках алгебры 7 класса. В учебнике Г.К. Муравина в самом начале изучения курса алгебры 7 класса начинается рассмотрение темы «Сравнение чисел», в этой теме ученики впервые рассматривают понятие «числовое неравенство», какие математические символы используют в неравенствах, понятие «модуль числа», понятие «координатная прямая» и как эти понятия связаны между собой. В данном учебнике 7 класса теоретический материал по теме «Неравенства с модулем» не представлен.

Автор учебника алгебры для 7 класса Ю.Н. Макарычев не рассматривает тему «Неравенства с модулем». Но в теме «Сравнение значений выражений» автор приводит определение понятия «неравенства» и основных понятий, связанных с ним: понятие «знаки неравенства», понятия строгого и нестрого неравенств.

В учебнике алгебры автора Г.В. Дорофеева есть глава «Координаты и графики», которая связана с темой «Неравенства с модулем». В теме «Расстояние между двумя точками координатной прямой» рассматривается понятие модуля числа, о котором говорится как о множестве точек, координаты которых удовлетворяют условиям, записанным в виде неравенства с модулем. В теме «Множество точек на координатной плоскости» при записи указанного множества также используют понятие неравенства, в котором присутствует модуль. В теме «Графики» понятие неравенства с модулем используют, чтобы задать область определения функции.

В учебнике С.М. Никольского понятия «неравенство» и «модуль числа» встречаются при изучении тем «Понятие действительного числа» и «Сравнение действительных чисел» автор использует понятия «неравенство» и «модуль» чтобы показать теоретическую составляющую данных тем.

В учебниках А.Г. Мордковича, Ю.М. Колягина в 7 классе данная и близкие по изучению темы к теме исследования не рассматриваются.

Итак, в большинстве учебников алгебры 7 класса тема «Неравенства с модулем» отдельно не рассматривается, определяются некоторые понятия, связанные с данной темой. Отдельные понятия этой темы представлены в учебниках авторов Г.К. Муравина и Г.В. Дорофеева. В учебниках Ю.Н. Макарычева и С.М. Никольского имеется теоретический материал, связанный с понятиями неравенства и модуля числа. В учебниках алгебры за 7 класс А.Г. Мордковича и Ю.М. Колягина теоретический материал по теме исследования отсутствует.

В Приложении 1 (Таблица 2) представлен содержание теоретического материала по теме «Неравенства с модулем» в различных учебниках алгебры 8 **класса.**

В учебнике А.Г. Мордковича теме «Неравенства» отведена отдельная глава, но там рассматриваются темы «Линейные неравенства», «Квадратные неравенства», «Доказательство неравенств». И лишь в теме «Приближенные вычисления» упоминается, что такое модуль числа, используя при определении понятия «погрешность вычисления».

Автор учебника по алгебре Ю.Н. Макарычев широко рассмотрел линию неравенств, выделил ее в отдельную главу. В данном учебнике автор использует понятия «модуль» и «неравенство» в теме «Погрешность и точность приближения». Ю.Н. Макарычев в своем учебнике *для углубленного изучения математики* выделил тему «Неравенства с модулем» в отдельный параграф, отвел на ее изучение 3 часа и рассмотрел понятие «неравенство с модулем», его геометрическое истолкование и приемы решения простейших неравенств с переменной под знаком модуля.

В учебнике алгебры для 8 класса С.М. Никольского в главе «Функции и графики» рассматриваются темы «Числовые неравенства», «Координатная ось. Модуль числа», в которых используются понятия неравенства, знаков неравенства и модуля числа.

Автор учебника по алгебре для 8 класса Ю.М. Колягин выделил главу для линии неравенств. Он является одним из первых авторов, который выделил тему «Неравенства с модулем» как отдельную тему и отвел на ее изучение 2 часа по базисному учебному плану и 3 часа для классов с углубленным изучением математики. Перед тем как раскрывать содержание этой темы, он рассмотрел такие понятия как числовые неравенства и его свойства, сложение и умножения неравенств, понятие строгого и нестрогого неравенства, понятие неравенства и системы неравенств с одним неизвестным, понятие модуля числа. Автор в данном пункте привел определение понятия модуля числа, показал, как осуществлять перевод алгебраической записи неравенства на геометрическую модель, разобрал решение неравенств с модулем при помощи его геометрического истолкования.

В учебниках Г.В. Дорофеева, Г.К. Муравина в 8 классе теоретический материал по теме исследования отсутствует.

Отметим, что в большинстве учебников алгебры 8 класса тема «Неравенства с модулем» отдельно не рассматривается, определяются некоторые понятия, связанных с данной темой. Только Ю.М. Колягин, выделил отдельный пункт для изучение данной темы и отвел на них 2 часа по базисному учебному плану и 3 часа для классов с повышенным уровнем математической подготовки учащихся. А.Г. Мордкович и Ю.Н. Макарычев выделили целую главу для линии неравенств, но неравенства с модулем как отдельную тему не рассматривают и не включают ее в перечень других тем. Однако ими раскрывалось содержание таких тем, как «Приближенные вычисления» и «Погрешность и точность приближения», в которых использовались понятия неравенства и модуля числа. В учебнике для углубленного изучения математики Ю.Н. Макарычев выделил тему «Неравенства с модулем» в отдельный параграф, рассмотрел теоретической материал по данной теме и показал приемы решений простейших неравенств с переменной под знаком модуля. С.М. Никольский к изучению неравенств с модулем не переходил. В учебниках алгебры за 8 класс Г.В. Дорофеева и Г.К. Муравина теоретический материал по теме исследования отсутствует, большое внимание уделяется другим темам, которые не связаны с темой «Неравенства с модулем».

В Приложении 1 (Таблица 3) представлен содержание теоретического материала по теме «Неравенства с модулем» в различных учебниках алгебры 9 **класса.** В учебнике алгебры для 9 класса А.Г. Мордковича первая глава выделена на изучение рациональных неравенств и их систем. В первом параграфе «Линейные и квадратные неравенства» рассматривается решение неравенств с модулем при помощи перевода аналитической модели записи неравенства на геометрический язык, показывая их решения на координатной прямой. В дальнейших параграфах теоретический материал по теме исследования отсутствует.

В учебнике с *углубленным изучением* математики А.Г. Мордковича в первой главе «Неравенства с одной переменной. Системы и совокупности неравенств» выделяется параграф на изучение темы «Неравенства с модулем» и отводится на его изучение 4 часа. Автор приводит определение понятия «модуля числа» и утверждения, связанные с решением неравенств с модулем, приводит их доказательство и выделяет три способа решения неравенств с модулем: *первый способ* – решение неравенства с модулем при помощи совокупности двух систем неравенств, *второй способ* – использование двойного неравенства в решении и третий способ – возведение обеих частей неравенства в квадрат.

Автор учебника алгебры для 9 класса С.М. Никольский выделяет главу для изучения темы «Неравенства», тему «Неравенства с модулем» относит в отдельный пункт и отводит на его изучение 2 часа. Автор рассматривает приводит три способа решения неравенств с модулем: *первый способ* – использование определение понятия модуля числа, *второй способ* – применение геометрического истолкования модуля числа и *третий способ* – графический.

В учебниках алгебры для 9 класса Ю.Н. Макарычева, Г.В. Дорофеева и Г.К. Муравина выделяются отдельные главы для темы «Неравенства», но теоретический материал по теме исследования отсутствует.

В учебнике «Алгебра. Дополнительные главы к школьному учебнику 9 класса» Ю.Н. Макарычев раскрыл содержание темы исследования в двух пунктах: «Решение неравенств, содержащих переменную под знаком модуля» и «Неравенства и системы неравенств с переменными под знаком модуля» и выделил на их изучения 3 и 2 часа соответственно. В первом пункте автор рассматривает способы решения неравенств с модулем – при помощи двойного неравенства, определения понятия модуля числа, при помощи равносильной системы неравенств. Во втором пункте автор показывает решения неравенства с двумя переменными под знаком модуля графическим методом.

В учебниках Ю.М. Колягина в 9 классе теоретический материал по теме исследования отсутствует.

Отметим, что в учебниках 9 класса теме «Неравенства с модулем» отводится больше часов, чем в 7-8 классах. Данная тема появляется в отдельных параграфах. В учебнике А.Г. Мордковича данная тема была рассмотрена внутри темы, связанной с понятием неравенства, но в учебнике с углубленным изучением математики этого же автора, данная тема выносится как отдельный параграф и изучается 4 часа. В своем учебнике «Алгебра. Дополнительные главы к школьному учебнику 9 класса» Ю.Н. Макарычев достаточно подробно раскрыл содержание данной темы исследования, выделив 5 часов на ее изучение. С.М. Никольский в своем учебнике также отдельно рассмотрел тему «Неравенства с модулем» и отвел 2 часа для классов с повышенным уровнем математической подготовки учащихся. В учебниках для математики авторов Ю.Н. Макарычев, Г.К. Муравин, Г.В. Дорофеев и Ю.М. Колягин теоретический материал по теме исследования отсутствует.

Таким образом, на изучение темы «Неравенства с модулем» в учебниках алгебры 7-9 классов отводится от 2 до 5 часов. В большей степени авторы уделяют внимание линии неравенств. Так в 7 классе содержание данной темы не раскрывается ни в одном из рассмотренных учебников алгебры, выделяются лишь отдельные понятия, связанные с данной темой: такие, как понятие неравенства, понятие знаки неравенства, понятие модуля числа. В 8 классе лишь в учебнике Ю.Н. Макарычева для углубленного изучения математики и учебнике для общеобразовательных классов Ш.А. Алимова упоминается данная тема и представляется в виде отдельного параграфа. В 9 классе данная тема встречается рассматривается в учебниках для общеобразовательных классов А.Г. Мордковича, С.М. Никольского и учебниках для углубленного изучения математики Ю.Н. Макарычева.

§3. Анализ задачного материала по теме «Решение неравенств с модулем» в учебниках разных авторов

В результате анализа задачного материала в учебниках алгебры основной школы для общеобразовательных учреждений можно выделить такие *виды неравенств с модулем* как:

- неравенства с модулем вида $f(x) < b$ **или** $f(x) > b$ (9 класс);

- неравенства с модулем вида $f(x) < g\ x$ **или** $f\ x\ > g\ x$ (9 класс);

- неравенства с модулем, решаемое с помощью метода замены переменных (9 класс);

В результате анализа задачного материала в учебниках алгебры основной школы для общеобразовательных учреждений, можно выделить такие *виды систем неравенств с модулем* как:

- системы неравенств с одной переменной, содержащие неравенство с модулем (9 класс);

В результате анализа задачного материала в учебниках алгебры основной школы для классов с углубленным изучением математики, можно выделить такие *виды неравенств с модулем* как*:*

- неравенства с модулем вида $f(x) \ < b$ **или** $f(x) \ > b$ (9 класс);

- неравенства с модулем вида $f(x) \ < g(x)$ **или** $f \ x \ > g(x)$ (9 класс);

- неравенства с модулем вида $f(x) \ < \ g(x)$ **или** $f \ x \ > \ g(x)$;

- неравенства с модулем вида $f(x) \ + \ g(x) \ < b$ **или** $f(x) \ + \ g(x) \ >$ $> b$ (9 класс);

- неравенства с модулем, решаемое с помощью метода замены переменных (8 класс);

- неравенство с двумя переменными, содержащее знак модуля (9 класс);

В результате анализа задачного материала в учебниках алгебры основной школы для классов с углубленным изучением математики, можно выделить следующий виды *систем неравенств с модулем:*

- системы неравенств с одной переменной, содержащие неравенство с модулем (9 класс);

- системы неравенств с двумя неизвестными, содержащие знак модуля (9 класс);

Рассмотрим вышеперечисленные виды неравенств с модулем на основе анализа учебников алгебры основной школы для общеобразовательных учреждений различных авторов.

1. Неравенства с модулем вида $\boldsymbol{f(x) \ < b}$ или $\boldsymbol{f(x) \ > b}$

Приведем типы задач к данному виду неравенств с модулем.

1. *Нахождение решения неравенства с модулем.*

Решить простейшее неравенство с модулем можно разными *способами*:

1.1 Нахождение решения неравенства с модулем на основе геометрического смысла.

Простейшие неравенства вида $x - a \;\; < b$ или $x - a \;\; > b$, где a и b – некоторые числа, причем $b > 0$, можно решать, используя геометрические представления.

Задача 1 [22, С. 100]. Решить неравенство $x + 1 \;\; < 5$.

Решение. Необходимо записать данное неравенство в виде $x - (-1) \;\; < 5$. Если перевести аналитическую модель $x - (-1) \;\; < 5$ на геометрический язык, то получится, что нужно найти на координатной прямой такие точки x, которые удалены от точки -1 на расстояние, меньшее 5. На 5 единиц от точки с координатой -1 удалены на координатной прямой точки с координатами -6 и 4, а менее чем на 5 единиц, точки, заключенные между ними. Значит, искомое множество есть интервал $(-6; 4)$ (Рис. 1).

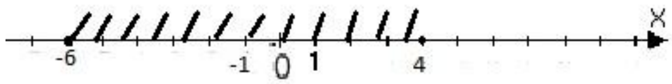

Рис. 1.

Ответ: $(-6; 4)$.

1.2 Нахождение решения неравенств с модулем на основе определения модуля.

Основной прием решения неравенств с переменной под знаком модуля состоит в том, чтобы, используя определения и свойства модуля числа, освободиться от знака модуля, заменяя данное неравенство *равносильным ему неравенством, системой или совокупностью неравенств.*

Можно рассмотреть неравенства вида $f(x) \;\; < b$ **или** $f(x) \;\; > b$, где b – некоторое число. Если $b < 0$, то неравенство $f(x) \;\; < b$ не имеет решения, а неравенство $f(x) \;\; > b$ верно при любом значении x, то есть его решением является числовая прямая $-\infty; +\infty$. Если $b > 0$, то неравенство $f(x) \;\; < b$ равносильно системе $\begin{cases} f \; x \;\; < b, \\ f \; x \;\; > -b, \end{cases}$ то есть двойному неравенству $-b < f \; x \;\; < b,$ а неравенство $f(x) \;\; > b$ равносильно совокупности неравенств $f\ \ x\ \ < -b$ **или** $f\ \ x\ \ > b$. Это обусловлено тем, что при $b > 0$, модуль, меньший, чем b, имеют числа, принадлежащие промежутку $\ -b, b\ $, а модуль, больший, чем b, имеют числа, находящиеся вне этого промежутка. Если $b = 0$, то неравенство $f(x)\ < b$ не имеет решения, а неравенство $f(x)\ > b$ верно для любых значений x, для которых $f(x) \neq 0$.

Задача 2 [34, С. 23]. Решить неравенство $\ x - 3\ \ < 4$.

Решение. Решение этого неравенства есть все x, которые удовлетворяют системе неравенств $\begin{matrix} x - 3 > -4, \\ x - 3 < 4. \end{matrix}$. Необходимо решить каждое неравенство:

$$1)x - 3 > -4, \qquad 2)x - 3 < 4,$$
$$x > -1. \qquad x > 7.$$

Решением системы является общее решение этих двух неравенств: $x \in\ \ -1{,}7\ $. **Ответ:** $\ -1{,}7\ $.

1.3 Нахождение решения неравенств с модулем графическим методом.

Простейшие неравенства можно решать, используя графический метод.

Задача 3 [34, С. 22]. Решить неравенство $\ x\ \ < 3$.

Решение. Можно построить графики функции $y = \ x\ $ и $y = 3$ (Рис. 2). Решением данного неравенства являются только те числа x (точки x **оси** Ox), для каждого из которых соответсвующие точки графика функции $y = \ x\ $ расположены ниже прямой $y = 3$. Следовательно, все решения неравенства составляют интервал $\ -3;3\ $.

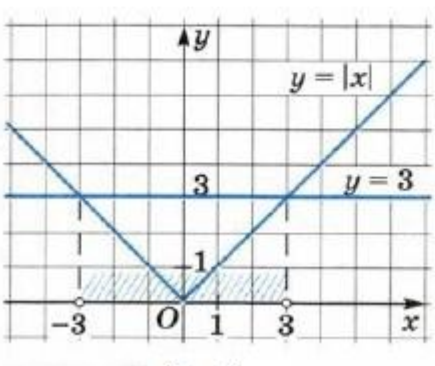

Рис. 2.

Ответ: $\ -3;3\ $.

1.4 Нахождение решения неравенства, содержащего несколько модулей, на основе определения модуля.

Задача 4 [34, С. 24]. Решить неравенство $2\ x\ -5\ < 4.$ (1)

Решение. Множество всех решений неравенства (1) есть все x, которые удовлетворяют системе неравенств: $\begin{array}{l} 2\ x\ -5 < 4, \\ 2\ x\ -5 > -4. \end{array}$ Эту систему можно упросить и переписать в виде: $\begin{array}{l} 2\ x\ < 9, \\ 2\ x\ > 1. \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} x\ < 4{,}5\,, \\ x\ > 0{,}5. \end{array}$ (2)

Необходимо решить первое неравенство системы $x\ < 4{,}5$:

$$\begin{array}{l} x < 4{,}5\,, \\ x > -4{,}5. \end{array}$$

Множество решение этого неравенства служит интервал $-4{,}5; 4{,}5$.

Необходимо решить второе неравенство системы $x\ > 0{,}5$:

$$\begin{array}{l} x > 0{,}5\,, \\ x < -0{,}5. \end{array}$$

Множество решение этого неравенства служит интервал $-\infty; -0{,}5) \cup (0{,}5; +\infty$.

Множество всех решений системы (2) есть объединение двух интервалов: $-4{,}5; -0{,}5\ \cup\ 0{,}5; 4{,}5$. Следовательно, множество всех решений неравенства (1) есть объединение этих двух интервалов.

Ответ: $-4{,}5; -0{,}5\ \cup\ 0{,}5; 4{,}5$.

Данная типология задач встречается в общеобразовательных учебниках. В учебниках для классов с углубленным изучением математики добавляется еще один тип.

1.5 Нахождение решения двойного неравенства с модулем на основе определения модуля.

Данный тип неравенства решается при помощи раскрытия модуля по его определению.

Задача 5 [34, С. 57]. Решить неравенство $5 \le\ x-3\ \le 7.$ (3)

Решение. Необходимо избавиться от модуля при помощи его определения: $1) x-3 \ge 0, x \ge 3$ $\qquad 2) x-3 < 0, x < 3$

$5 \le x - 3 \le 7$ $\qquad$ $5 \le -x + 3 \le 7, -7 \le x - 3 \le -5$

$x - 3 \ge 5,$ $\qquad$ $x - 3 \ge -7,$
$x - 3 \le 7.$ $\qquad$ $x - 3 \le -5.$

$x \ge 8,$ $\qquad$ $x \ge -4,$
$x \le 10.$ $\qquad$ $x \le -2.$

$x \in \ 8;10$ $\qquad$ $x \in [-4;-2]$

Объединив эти два промежутка и получается, что неравенство (3) имеет множество решений $x \in \ -4;2 \ \cup \ 8;10$. **Ответ:** $-4;2 \ \cup \ 8;10$.

Задача 6 [22, С. 101]. Решить неравенство $x^2 - 5x \ > 6$.

Решение.

Данное неравенство раносильно совокупности двух неравенств:

$$x^2 - 5x < -6,$$
$$x^2 - 5x > 6.$$

Необходимо решить каждое неравенство.

Решая первое неравенство, получается:

$$x^2 - 5x < -6; \quad x^2 - 5x + 6 < 0; \quad x^2 - 5x + 6 = 0$$

$$x - 2 \quad x - 3 \ = 0; \qquad x_1 = 2, x_2 = 3.$$

Можно воспользоваться методом интервалов (Рис. 3):

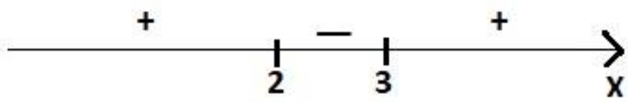

Рис. 3.

Решением данного неравенства является промежуток $(2,3)$.

Решая второе неравенство, получается:

$$x^2 - 5x > 6.$$

$$x - 6 \quad x + 1 \ = 0$$

$$x_1 = 6, x_2 = -1.$$

Можно воспользоваться методом интервалов (Рис. 4):

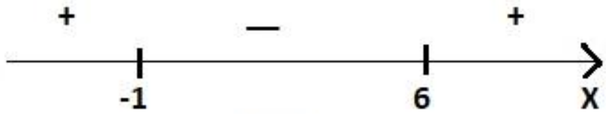

Рис. 4.

Решением неравенства является промежуток $-\infty,-1 \ \cup \ -6;+\infty$. Множеством решений исходного неравенства является объединение множеств $-\infty,-1 \ \cup (2,3) \cup \ -6;+\infty$. **Ответ:** $-\infty,-1 \ \cup (2,3) \cup \ -6;+\infty$.

Еще одним отличием в данном виде неравенств с модулем состоит в том, что в учебниках для общеобразовательных учреждений под знаком модуля рассматриваются простейшие линейные функции, в учебниках для классов с углубленным изучением математики кроме линейных рассматриваются квадратичные функции.

Рассмотрев задачный материал различных учебников по данному виду неравенств с модулем, можно сделать вывод о том, что неравенства вида $f(x) < b$ **или** $f(x) > b$ рассматриваются в учебниках алгебры для обще-образовательных классов только авторов С.Н. Никольского [34] и А.Г Мордковича [28], и в учебниках для классов с углубленным изучением математики авторов Ю.Н. Макарычева [17; 19], А.Г. Мордковича [27; 30] и дополнительных главах к учебнику Ю.Н. Макарычева [23].

2. Неравенства с модулем вида $f(x) < g(x)$ или $f\ x > g(x)$

Приведем типы задач к данному виду неравенств с модулем.

1. Нахождение решения неравенства с модулем.

Данный тип задач решить разными *способами*:

1.1 Нахождение решения неравенства с модулем на основе определения модуля.

Задача 7 [34, С. 24]. Решить неравенство $x+2 < 0{,}5x+4$. (4)

Решение. Необходимо раскрыть модуль при помощи его определения

$$\begin{cases} x+2 \geq 0, \\ x+2 < 0{,}5x+4. \end{cases} \qquad \begin{cases} x+2 < 0, \\ -\ x+2 \ < 0{,}5x+4. \end{cases}$$

Решая каждую систему неравенств, получится:

$$x \geq -2, \qquad x < -2,$$
$$0{,}5x < 2.; \qquad -1{,}5x < 6.$$
$$x \geq -2, \qquad x < -2,$$
$$x < 4. ; \qquad x > -4.$$

Решением первой системы будет служить промежуток $-2, 4$, решением второй системы - $-4; -2$. Объединив все, для которых справедливо неравенство (4), получим, что решение неравенства (4) составляют интервал $-4; 4$. **Ответ:** $-4; 4$.

1.2 Нахождение решения неравенства с модулем графическим методом.

Задача 8 [34, С. 24]. Решить неравенство $x + 2 < 0{,}5x + 4$. (5)

Решение. Необходимо построить графики функций $y = x + 2$ и $y = 0{,}5x + 4$ Рис. 5 . Решениями неравенства (5) являются только те числа x (точки x **оси** Ox), для каждого из которых соответствующие точки графика функции $y = x + 2$ расположены ниже прямой $y = 0{,}5x + 4$. Следовательно, все решения неравенства (5) составляют интервал $-4; 4$.

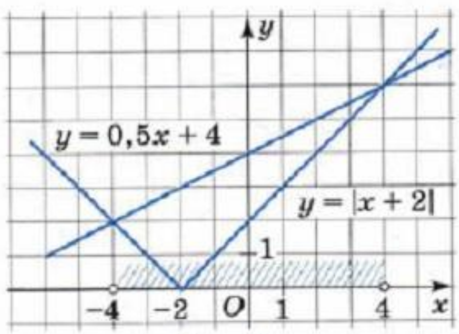

Рис. 5.

Ответ: $-4; 4$.

Рассмотрев задачный материал различных учебников по данному виду неравенств с модулем, можно сделать вывод о том, что неравенства вида $f(x) < g(x)$ **или** $f\ x > g(x)$ рассматриваются учебниках алгебры для общеобразовательных классов только С.Н. Никольского [34] и А.Г. Мордковича [28], и в учебниках для классов с углубленным изучением математики авторов Ю.Н. Макарычева [22], А.Г. Мордковича [27; 30] и дополнительных главах к учебнику Ю.Н. Макарычева [23].

3. Неравенство с модулем, решаемое с помощью метода замены переменных

1. Нахождение решения неравенства с модулем.

При решении рациональных неравенств иногда удобно применять замену неизвестного.

Задача 9 [34, С. 60]. Решить неравенство $x^2 - 4x - 5\ \ x - 2\ \ + 10 \leq 0$.

Решение. В этом неравенстве можно выразить квадрат разности:

$$(x^2 - 4x + 4) - 5\ \ x - 2\ \ + 6 \leq 0,$$

$$x - 2\ ^2 - 5\ \ x - 2\ \ + 6 \leq 0. \qquad (6)$$

Можно сделать замену переменной: $t = \ x - 2\ $. Переписывая неравенство (6) в виде: $t^2 - 5t + 6 \leq 0$. По теореме Виета найдем корни данного квадратного трехчлена: $t_1 = 2, t_2 = 3$. Воспользуемся методом интервалов (Рис. 6):

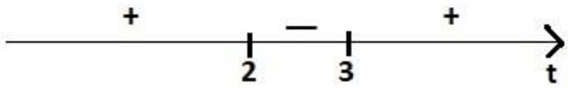

Рис. 6.

Решением данного неравенства будет $2 \leq t \leq 3$. Сделаем обратную замену: $2 \leq \ \ x - 2\ \ \leq 3$. (7)

Избавимся от модуля при помощи его определения:

$1) x - 2 \geq 0, x \geq 2$	$2) x - 2 < 0, x < 2$
$2 \leq x - 2 \leq 3$	$2 \leq -x + 2 \leq 3, -3 \leq x - 2 \leq -2$
$x - 2 \geq 2,$ $x - 2 \leq 3.$	$x - 2 \geq -3,$ $x - 2 \leq -2.$
$x \geq 4,$ $x \leq 5.$	$x \geq -1,$ $x \leq 0.$
$x \in\ \ 4;5$	$x \in [-1;0)$

Объединяем эти два промежутка и получаем, что неравенство (7) имеет множество решений $x \in\ \ -1;0\ \ \cup\ \ 4;5\ $. Следовательно и неравенство (6) имеет то же множество решений. **Ответ:** $\ -1;0\ \ \cup\ \ 4;5\ $.

Рассмотрев задачный материал различных учебников, связанных с неравенствами с модулем, которые решаются методом заменых переменных, можно сделать вывод о том, что неравенства вида $f(x) < g(x)$ или $f\ \ x\ \ > g\ \ x$ рассматриваются учебнике алгебры для общеобразовательных классов С.Н. Никольского [34] и в учебниках для классов с углубленным изучением математики авторов Ю.Н. Макарычева [20; 22], А.Г. Мордковича [30] и дополнительных главах к учебнику Ю.Н. Макарычева [23].

Рассмотрим вышеперечисленный вид системы неравенств с модулем на примерах общеобразовательных учебников разных авторов.

4. Системы неравенств с одной переменной, содержащие неравенство с модулем

Приведем типы задач к данному виду систем неравенств с модулем.

1. Нахождение решения системы неравенств с модулем.

Если необходимо найти все числа x, каждое из которых есть решение одновременно всех данных неравенств, то говорят, что надо решить систему неравенств с одним неизвестным x. В учебниках встречают такие системы неравенств, в которых появляется неравенство с модулем.

Для того чтобы решить такую систему, надо решить каждое неравенство системы, затем найти общую часть (пересечение) полученных множеств решений – она и будет множеством всех решений системы [34, С. 50].

Задача 10 [34, С. 58]. Решить систему неравенств $\begin{matrix} x\ \ < 2, \\ (x-3)(x-2) \geq 0. \end{matrix}$

Решение. Решим первое неравенство с модулем при помощи определения модуля: $x\ \ < 2, \Leftrightarrow \begin{matrix} x < 2, \\ x > -2. \end{matrix}$ Другими словами, решением данного неравенства будет промежуток $x \in\ \ -2;2\ $. Второе неравенство можно решить при помощи метода интервалов: $(x-3)(x-2) \geq 0.$

От неравенства переходим к уравнению: $x-3 \quad x-2 \ =0$. Найдем корни уравнения: $x_1=3, x_2=2$. Отметим решения на координатной прямой (Рис. 7):

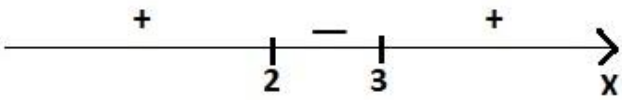

Рис. 7.

Решением данного неравенства будет промежуток $x \in \ -\infty;2 \ \cup \ 3;+\infty$. Теперь необходимо найти общее рещение этих двух неравенств: $x \in \ -2,2$. **Ответ:** $x \in \ -2,2$.

2. Нахождения решения системы неравенсв с модулем методом замены переменных.

Задача 11 [34, С. 61]. Решить систему неравенств $\begin{matrix} x^2-3 \ x \ +2>0, \\ \frac{10}{3- \ x}>0. \end{matrix}$

Решение. Воспользуемся свойством модуля и заменим $x^2=|x|^2$:

$$|x|^2-3 \ x \ +2>0,$$
$$\frac{10}{3- \ x}>0.$$

Сделаем замену переменной: $t= \ x$. Перепишем систему неравенств в виде: $\begin{matrix} t^2-3t+2>0, \\ \frac{10}{3-t}>0. \end{matrix}$

Как было написано выше, для того чтобы решить систему неравенств с модулем, надо решить каждое неравенство системы, затем найти общую часть (пересечение) полученных множеств решений – она и будет множеством всех решений системы. Решим первое неравенство:

$$t^2-3t+2>0; \qquad t-1 \quad t-2 \ >0; \qquad t_1=1, t_2=2.$$

Отметим корни квадратного трехчлена на координатной прямой (Рис. 8):

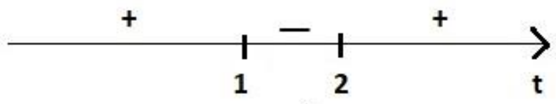

Рис. 8.

Решением данного неравенства служит промежуток $-\infty;1\ \cup\ 2,+\infty$.

Решим второе неравенство: $\frac{10}{3-t} > 0; \quad 10\ 3-t\ > 0; \quad t = 3.$

Отметим решения на координатной прямой (Рис. 9):

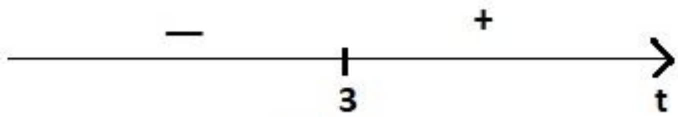

Рис. 9.

Решением данного неравенства служит промежуток $-\infty;3$.

Решением системы неравенств с переменной t будет пересечение этих промежутков: $-\infty;1\ \cup\ 2,3$. Сделаем обратную замену переменной и рассмотрим каждый из этих двух промежутков.

$$-\infty < t < 1,$$

$$-\infty < \ x\ < 1.$$

$$\begin{array}{ll} x \geq 0, & x < 0, \\ -\infty < x < 1. & -\infty < -x < 1. \\ x \in \ 0;1 & x < 0, \\ & -1 < x < +\infty. \\ & x \in (-1;0) \end{array}$$

Решением с переменной x будет промежуток $-1;1$.

$$2 < t < 3,$$

$$2 < \ x\ < 3.$$

$$\begin{array}{ll} x \geq 0, & x < 0, \\ 2 < x < 3. & 2 < -x < 3. \\ x \in (2;3) & x < 0, \\ & -3 < x < -2. \\ & x \in (-3;-2) \end{array}$$

Решением с переменной x будет промежуток $-3;2\ \cup (2;3)$.

Общее решение системы неравенств с переменной x будет промежуток $-3;-2 \ \cup \ -1;1 \ \cup \ 2;3$. **Ответ:** $-3;-2 \ \cup \ -1;1 \ \cup \ 2;3$.

Рассмотрев задачный материал различных учебников, связанных с системами неравенств с модулем, можно сделать вывод о том, что данный вид и тип заданий рассматриваются в учебниках алгебры для общеобразовательных классов С.Н. Никольского [34], А.Г. Мордковича [28] и в учебнике для классов с углубленным изучением математики Ю.Н. Макарычева [22].

Рассмотрим вышеперечисленные виды неравенств с модулем на примерах, которые встречаются только в учебниках с углубленным изучением разных авторов.

5. Неравенство с модулем вида $\boldsymbol{f(x) < g(x)}$ или $\boldsymbol{f \ x \ > g(x)}$

В данном виде существует только один тип заданий

1. *Нахождение решения неравенства с модулем методом возведения в квадрат.*

Если a и b – некоторые числа, то неравенство $a < b$ верно только равносильно неравенству $f^2 \ x \ < g^2 \ x$,а неравенство $f(x) > g(x)$ равносильно неравенству $f^2 \ x \ > g^2 \ x$.

Задача 12 [22, С. 103]. Решить неравенство $x^2 - x < x - 10$.

Решение. Данное неравенство равносильно неравенству:

$$(x^2 - x)^2 < (x - 10)^2.$$

Решая это неравенство, получается:

$$x^2 - x \ ^2 - \ x - 10 \ ^2 < 0,$$

$$x^2 - x - x + 10 \ \ x^2 - x + x - 10 \ < 0,$$

$$x^2 - 2x + 10 \ \ x^2 - 10 \ < 0.$$

Так как трехчлен $x^2 - 2x + 10$ при любом x принимает положительные значения, то полученное неравенство равносильно неравенству $x^2 - 10 < 0$.

Воспользуемся методом интервалов (Рис. 10): $x_1 = \ \overline{10}$, $x_2 = - \ \overline{10}$.

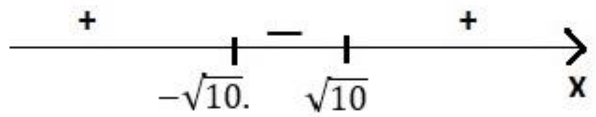

Рис. 10

Решением данного неравенства, а значит, и равносильного ему исходного неравенства является промежуток $-\overline{10},\ \overline{10}$. **Ответ:** $-\overline{10},\ \overline{10}$.

Рассмотрев задачный материал различных учебников, можно сделать вывод о том, что неравенства вида $f(x) < g(x)$ **или** $f\ x\ > g(x)$ рассматриваются только в учебнике для классов с углубленным изучением математики Ю.Н. Макарычева [22].

6. Неравенство с модулем вида $\boldsymbol{f\ x\ +\ g\ x\ < b}$ или $\boldsymbol{f(x)\ +\ g(x)\ > b}$

В данном виде существует только один тип заданий неравенств с модулем.

1. Нахождение решения неравенства с модулем.

К решению данного типа задач можно прийти несколькими способами:

1.1 Нахождение решения неравенства с модулем методом разбиения на промежутки («методом интервалов»).

Иногда, при решении неравенств удается освободиться от знака модуля, выделяя промежутки, на которых выражение, записанное под знаком модуля, сохраняет знак.

Задача 13 [23, С. 100]. Решить неравенство $x\ +\ 2x-6\ < 9.$ (8)

Решение. Выражения, стоящие под знаком модуля, обращаются в нуль при $x = 0$ и $x = 3$. Числа 0 и 3 разбивают координатную прямую на три промежутка: $-\infty; 0$, $0; 3$ и $3; +\infty$.

В первом промежутке оба выражения x и $2x-6$ отрицательны. Поэтому $x\ +\ 2x-6\ = -x-2x+6 = -3x+6$. Во втором промежутке $x \geq 0$, а $2x-6 \leq 0$. Значит, $x\ +\ 2x-6\ = x-2x+6 = -x+6$. В третьем промежутке $x > 0$ и $2x-6 > 0$. Следовательно, $x\ +\ 2x-6\ = x+2x-6 = 3x-6$.

Таким образом, $x + 2x - 6 = \begin{cases} -3x + 6, \text{ если } x < 0, \\ -x + 6, \text{ если } 0 \leq x \leq 3, \\ 3x - 6, \text{ если } x > 3. \end{cases}$

Отсюда следует что данное неравенство равносильно совопукности трех систем:1) $\begin{cases} -3x + 6 < 9, \\ x < 0. \end{cases}$ 2) $\begin{cases} -x + 6 < 9, \\ 0 \leq x \leq 3. \end{cases}$ 3) $\begin{cases} 3x - 6 < 9, \\ x > 3. \end{cases}$

$\begin{cases} x > -1, \\ x < 0. \end{cases}$ $\begin{cases} x > -3, \\ 0 \leq x \leq 3. \end{cases}$ $\begin{cases} x < 5, \\ x > 3. \end{cases}$

Решением первой системы является промежуток $-1;0$, решение второй – промежуток $0;3$, решение третьей системы – промежуток $3;5$.

Множеством решений неравенства (8) является объединение этих промежутков, то есть $x \in -1;0 \cup 0;3 \cup 3;5 = -1;5$. **Ответ:** $-1;5$.

1.2 Нахождение решения неравенства на основе геометрического смысла.

Задача 14 [30, С. 100]. Решить неравенство $x - 2 + x + 4 \leq 10.$ (9)

Решение. Переведем аналитическую модель на геометрический язык: нам надо найти на координатной прямой такие точки x, которые удовлетворяют условияю $\rho\ x, 2 + \rho\ x, -4 \leq 10$, т.е сумма расстояний каждой из таких точек от точек 2 и -4 меньше или равна 10. Точки 4 и -6 удовлетворяют условию $\rho\ x, 2 + \rho\ x, -4 = 10$; в самом деле,

$$\rho\ 4,2 + \rho\ 4,-4 = 2 + 8 = 10$$

$$\rho\ -6,2 + \rho\ -6,-4 = 8 + 2 = 10$$

Условию же $\rho\ x, 2 + \rho\ x, -4 \leq 10$ удовлетворяют точки из интервала $-6;4$ Рис. 11. Следовательно, решения заданного неравенства таковы.

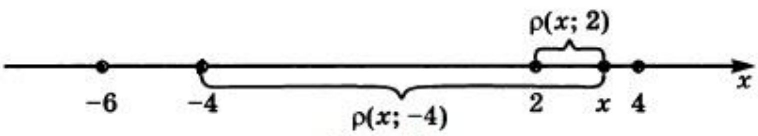

Рис. 11.

Ответ: $-6;4$.

Рассмотрев задачный материал различных учебников, связанных с неравенствами с модулем данного вида, можно сделать вывод о том, что неравенства видов $f(x) + g(x) < b$ $f(x) + g(x) > b$ рассматриваются в учебниках для классов с углубленным изучением математики авторов Ю.Н. Макарычева [22], А.Г. Мордковича [27; 30] и дополнительных главах к учебнику Ю.Н. Макарычева [23].

7. Неравенство с двумя переменными, содержащее знак модуля

Приведем типы задач к данному виду неравенств с модулем.

1. Изображение на координатной плоскости множество решений неравенства.

Задача 15 [22, С. 164]. Изобразить на координатной плоскости множетсво решений неравенства $y + x^2 - 2\ \ x - 1\ \ \le 0$.

Решение. Освободимся от знака модуля. Получается:

$$y + x^2 - 2x + 2 \le 0, \quad x \ge 1. \qquad \text{или} \qquad y + x^2 + 2x - 2 \le 0, \quad x \le 1.$$

Далее нужно построить графики уравнений $y = -x^2 + 2x - 2$ и $y = -x^2 - 2x + 2$.

Эти уравнения можно представить в виде $y = -\ \ x - 1\ \ ^2 - 1$ и $y = -\ \ x + 1\ \ ^2 + 3$. Их графиками являются параболы. Множество решений неравенства $y + x^2 - 2\ \ x - 1\ \ \le 0$ показано на (Рис. 12).

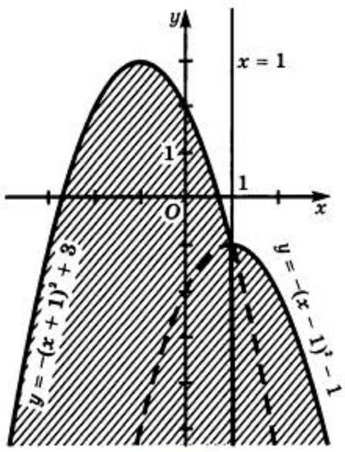

Рис. 12.

2. Выяснение, какую фигуру задает на координатной плоскости неравенство с двумя переменными, содержащее знак модуля и вычисление ее площади.

Задача 16 [23, С. 157]. Выяснить какую фигуру задает на координатной плоскости неравенство $\ x - 2\ \ + \ \ y - 2\ \ \le 2$, и вычислить ее площадь.

Решение. Освободимся от знаков модуля. При это будем учитывать, что каждое из выражений $x-2$ и $y-2$ меняет знак при переходе через точку 2. Получаем, что данное неравенство равносильности четырех систем:

$$x \geq 2, \qquad\qquad x < 2,$$
$$y \geq 2, \qquad\qquad y > 2,$$
$$x-2 \;+\; y-2 \;\leq 2\#; \qquad\qquad 2-x \;+\; y-2 \;\leq 2\#;$$

$$x < 2, \qquad\qquad x > 2,$$
$$y < 2, \qquad\qquad y < 2,$$
$$2-x \;+\; 2-y \;\leq 2\#; \qquad\qquad x-2 \;+\; 2-y \;\leq 2\#;$$

Найдем, какое множество точек задает на координатной плоскости каждая из этих систем. Рассмотрим сначала первую систему. Заменим неравенство $x-2 \;+\; y-2 \;\leq 2$ равносильным ему неравенством $y \leq 6-x$, получаем что эта система задает на координатной полоскот треугольник, органиченный прямыми $x=2, y=2$ и $y=6-x$.

Аналогично находим, что вторая истема адает на коодинатной плоскости треугольник, органиченный прямыми $x=2, y=2, y=x+2$. Соответственно третья система задает треугольник, ограниченный прямыми $x=2, y=2, y=2-x$, а четвертая – треугольник, ограниченный прямыми $x=2, y=2, y=x-2$. Каждый из этих треугольник явлется равнобедренным и прямоугольник и все они равны между собой. Фигура, которую задает на координатной плоскости неравенство $x-2 \;+\; y-2 \;\leq 2$ является объединением этих треугольник и представляет собой квадрат (Рис. 13). Его площадь модно вычислить как сумму площадей четырез равных треугольников, составляющих его. Длины катетов каждого из этих треугольников равны 2. Отсюда получаем, что искомая площадь равна $\mathbf{4} \cdot \frac{2 \cdot 2}{2}$, т.е равна 8 квадратным единицам.

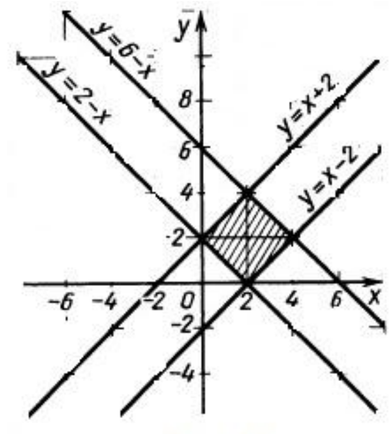

Рис. 13.

Ответ: 8.

Рассмотрев задачный материал различных учебников, связанных с неравенствами с модулем данного вида, можно сделать вывод о том, неравенства с двумя переменными, содержащие модуль рассматриваются в учебниках для классов с углубленным изучением математики авторов Ю.Н. Макарычева [22], и дополнительных главах к учебнику Ю.Н. Макарычева [23].

Рассмотрим вышеперечисленный вид системы неравенств с модулем на примерах общеобразовательных учебников разных авторов.

8. Системы неравенств с двумя неизвестными, содержащие неравенства с модулем

В учебниках для классов с углубленным изучением математики есть только один тип заданий к данному виду систем неравенств с модулем.

1. Выделение на координатной плоскости множество точек, которое задает система неравенств.

Задача 17 [22, С. 159]. Выделить на координатной плоскости множество точек, которое задает система неравенств $\begin{array}{l} 3y-x \ \le 3, \\ 2x-y \ \le 2. \end{array}$

Решение. Из определения модуля числа следует, что данная система раносильна системе $\begin{array}{l} -3 \le 3y-x \le 3, \\ -2 \le 2x-y \le 2. \end{array}$

Выясним, какое множество точек задает на координатной плоскости первое из двойных неравенств, входящих в эту систему. Имеем:

$$x - 3 \le 3y \le x + 3; \qquad \frac{1}{3}x - 1 \le y \le \frac{1}{3}x + 1.$$

Отсюда получаем, что это неравенство задает на координатной плоскости полосу, заключенную между параллельными прямыми

$$y = \frac{1}{3}x - 1 \text{ и } y = \frac{1}{3}x + 1.$$

Для второго неравенства имеем:

$$-2 \le 2x - y \le 2, \qquad -2 - 2x \le -y \le 2 - 2x,$$

$$2x - 2 \le y \le 2x + 2.$$

Значит, второе двойное неравенство задает на координатной плоскости полосу, ограниченную параллельными прямыми $y = 2x - 2$ и $y = 2x + 2$.

Отсюда можно сделать вывод, что множеством точек, которое задает система неравенств $\begin{matrix} 3y - x & \le 3, \\ 2x - y & \le 2, \end{matrix}$ является пересечение этих полос, представляющее собой параллелограмм (Рис 14).

Для того чтобы охарактеризировать это множество аналитически найдем координаты вершин параллелограмм .

Для вычисления абсциссы точки A решим уравнение $\frac{1}{3}x + 1 = 2x + 2$

Получаем, что $x = -0{,}6$. Из равенства $y = 2x + 2$ найдем ординату этой точки: $y = 2 \cdot \ -0{,}6 \ + 2 = 0{,}8$.

Таким образом, мы нашли координаты одной из вершин: $A \ -0{,}6; 0{,}8$.

Таким же образом можно вычислить координаты других вершин параллелограмма: $B \ 1{,}8; 1{,}6$, $C \ 0{,}6; -0{,}8$, $D \ -1{,}8; -1{,}6$.

Теперь можно охарактеризовать множество решений системы

неравенств: если $-1{,}8 \le x \le -0{,}6$, то $\frac{1}{3}x - 1 \le y \le 2x + 2$;

если $-0{,}6 \le x \le 0{,}6$, то $\frac{1}{3}x - 1 \le y \le \frac{1}{3}x + 1$;

если $0{,}6 \le x \le 1{,}8$ то $2x - 2 \le y \le \frac{1}{3}x + 1$.

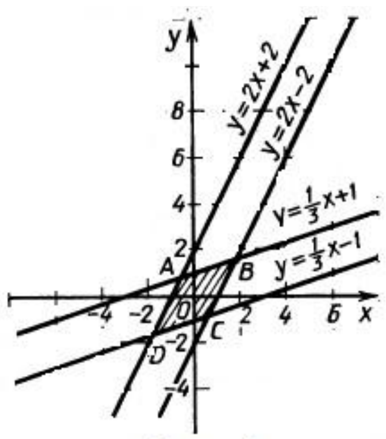

Рис. 14.

Рассмотрев задачный материал различных учебников, связанных с неравенствами с модулем данного вида, можно сделать вывод о том, неравенства с двумя переменными, содержащие модуль рассматриваются в учебниках для классов с углубленным изучением математики авторов Ю.Н. Макарычева [22], и дополнительных главах к учебнику Ю.Н. Макарычева [23].

Таким образом, подводя итог вышесказанному, можно сделать вывод о том, что в учебниках алгебры для общеобразовательных классов авторов А.Г. Мордкович, Ш.А. Алимов, С.М. Никольский рассматриваются неравенства с модулем вида $f(x) < b$ **или** $f(x) > b$, неравенства с модулем вида $f(x) < g\ x$ **или** $f\ x > g\ x$ **,** неравенства с модулем, решаемое с помощью метода замены переменных и системы неравенств с одной переменной, содержащие неравенство с модулем, в остальных учебниках алгебры для общеобразовательных классов теоретический материал по теме «Неравенства с модулем» не рассматривается. Вышеуказанные авторы при решении неравенств с модулем опираются на три *способа решения*: на основе геометрического смысла, на основе определения модуля и графическим методом. Также в учебнике алгебры для общеобразовательных учреждений С.М. Никольского рассматривается вид неравенств, содержащих несколько модулей, решаемые на основе определения модуля.

Для рассмотрения учебников для классов с углубленным изучением математики использовались учебники авторов А.Г. Мордкович (8, 9 класс), Ю.Н. Макарычев (8, 9 класс) и дополнительные главы к учебнику Ю.Н. Макарычев (9 класс). А.Г. Мордкович рассмотрел только неравенства с модулем вида $f(x) < b$ **или** $f(x) > b$, неравенства с модулем вида $f(x) < g\ x$ **или** $f\ x > g\ x$, неравенства с модулем вида $f(x) + g(x) < b$ **или** $f(x) + g(x) > b$. Ю.Н. Макарычев в своих учебниках рассмотрел все вышеперечисленные виды неравенств с модулем, к каждому виду показал методику решения. В дополнительных главах к учебнику Ю.Н. Макарычев рассматриваются почти все виды неравенств с модулем, за исключением неравенств с модулем вида $f(x) < g(x)$ **или** $f\ x > g(x)$ и систем неравенств с одной переменной, содержащие неравенство с модулем. В учебниках с углубленным изучением также показываются все три метода решения неравенств с модулем и к неравенствам с модулем вида $f(x) + g(x) < b$ **или** $f(x) + g(x) > b$ была показана особая методика решения. Несмотря на то, что учебники предназначены для учеников с повышенной подготовкой, авторы объясняют материал в понятной для любого ученика форме.

В учебниках для классов с углубленным изучением математики кроме имеющихся методов решения неравенств с модулем в учебниках алгебры для общеобразовательных учреждений добавляется метод возведения в квадрат и метод разбиения на промежутки.

По таблице №4 из Приложения 1 можно сделать вывод, что неравенства вида Неравенства с модулем вида $f\ x < b$ **или** $f\ x > b$ присутствует в каждом учебнике алгебры для общеобразовательных классов и в учебнике для классом с углубленным изучением математики, авторы которых рассматривают тему «Неравенство с модулем».

Неравенства с модулем вида $f\ x < g\ x$ **или** $f\ x < g\ x$ рассматриваются везде, кроме учебника алгебры для общеобразовательных учреждений А.Г. Мордковича (9 класс) и учебника для классов с углубленным изучением математики Ю.Н. Макарычева (8 класс). Неравенство с модулем вида $f(x) < g(x)$ **или** $f\ \ x \ > g(x)$ присутствует только в учебнике для классов с углубленным изучением математики Ю.Н. Макарычева (9 класс). Неравенство с модулем вида $f(x) + g(x) < b$ **или** $f(x) + g(x) > b$ рассматриваются во всех учебниках для классов с углубленным изучением математики. Неравенство с модулем, решаемое с помощью метода замены переменных присутствует в учебнике алгебры для общеобразовательных учреждений С.М. Никольского и учебнике для классов с углубленным изучением математики Ю.Н. Макарычева.

Неравенство с двумя переменными, содержащее знак модуля содержатся только в учебнике для классов с углубленным изучением математики Ю.Н. Макарычева (9 класс) и дополнительных главах к учебнику Ю.Н. Макарычева (9 класс). Системы неравенств с одной переменной, содержащая неравенство с модулем присутствует в учебнике алгебры для общеобразовательных классов С.Н. Никольского и учебнике для классов с углубленным изучением математики Ю.Н. Макарычева (9класс). Системы неравенств с двумя неизвестными, содержащая неравенство с модулем рассматриваются только в учебнике для классов с углубленным изучением математики Ю.Н, Макарычева и дополнительных главах к учебнику Ю.Н. Макарычева.

По Таблице №5 из Приложения №1 можно сделать вывод, что неравенства с модулем вида $f\ \ x \ < b$ **или** $f\ \ x \ > b$ подробнее всех рассмотрели Ш.А. Алимов, С.М. Никольский и Ю.Н. Макарычев в своем учебнике для классов с углубленным изучением математики (9 класс). Неравенству с модулем вида $f\ \ x \ < g\ \ x$ **или** $f\ \ x \ < g\ \ x$ более широкое внимание уделил А.Г. Мордкович в учебнике для классов с углубленным изучением математики за 8, 9 класс – 3 задания. Неравенство с модулем вида $f\ \ x \ < g\ \ x$ **или** $f\ \ x \ > g\ \ x$ в учебнике Ю.Н. Макарычева (9 класс) присутствует в одном задании. Неравенство с модулем вида $f\ \ x \ + g\ \ x \ < b$ **или** $f(x) + g(x) > b$ рассматриваются в 2 заданиях в учебниках для классов с углубленным изучением математики А.Г. Мордковича (8, 9 класс) и дополнительных главах к учебнику Ю.Н. Макарычева (9 класс). Неравенство с модулем, решаемое с помощью метода замены переменных подробнее рассматриваются в учебнике алгебры для общеобразовательных классов С.М. Никольского. В дополнительных главах к учебнику Ю.Н. Макарычеву широко рассматриваются неравенства с двумя переменными, содержащие знак модуля – 9 заданий. Системы неравенств с одной переменной, содержащие неравенство с модулем больше всего упоминаются в учебнике А.Г Мордковича – 4 задания, с двумя переменными в дополнительных главах к учебнику Ю.Н. Макарычева – 10 заданий.

По Таблице №6 из Приложения №1 можно сделать вывод, что в любом учебнике на рассмотрение вида уходит не более двух часов, в большинстве случаев – не более часа. Лишь в учебнике алгебры для общеобразовательных классов А.Г. Макарычева (9 класс) на рассмотрение систем неравенств с одной переменной, содержащие неравенство с модулем отводится 5 часов на рассмотрение данной темы.

Выводы по первой главе

В первой главе были получены следующие результаты:

1. Выявлены основные цели и задачи обучения решения неравенств с модулем в курсе математики основной школы. Так, решение неравенств с модулем способствует развитию логического мышления учащихся; формированию у них умения находить рациональный способ решения для разных видов задач, акцентировать внимание на основной идее решения данных видов неравенств.

2. Представлены основные требования к знаниям и умениям учащихся по теме «Неравенства с модулем» в курсе алгебры основной школы.

3. Выполнен анализ содержания теоретического материала темы «Неравенства с модулем» в учебниках алгебры 7-9 классов.

4. Предоставлен анализ содержания задачного материала темы «Неравенства с модулем» в учебниках алгебры 7-9 классов. Определено, что

неравенства с модулем в основной школе решаются на основе геометрического смысла понятия модуля, определения модуля; при их решении используются графический метод, методом возведения в квадрат и метод разбиения на промежутки.

ГЛАВА II. МЕТОДИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ОБУЧЕНИЯ РЕШЕНИЮ НЕРАВЕНСТВ С МОДУЛЕМ В КУРСЕ АЛГЕБРЫ ОСНОВНОЙ ШКОЛЫ

§4. Формы, методы, средства обучения решения неравенств с модулем в курсе алгебры основной школы

Прежде чем перейти непосредственно к формам, методам, средствам обучения решений неравенств с модулем в курсе алгебры основной школы, необходимо определить, что именно понимается под этими понятиями в методической литературе.

Основной формой организации учебно-воспитательного процесса является *урок.* А.А. Темербекова и другие авторы в своем пособии отмечают, что «урок-логически законченный, целостный, ограниченный определенными рамками времени отрезок учебно-воспитательный процесс, где представлены (Схема 1) все основные элементы этого процесса (цели, содержание, средства, методы, формы организации)» [47, 135].

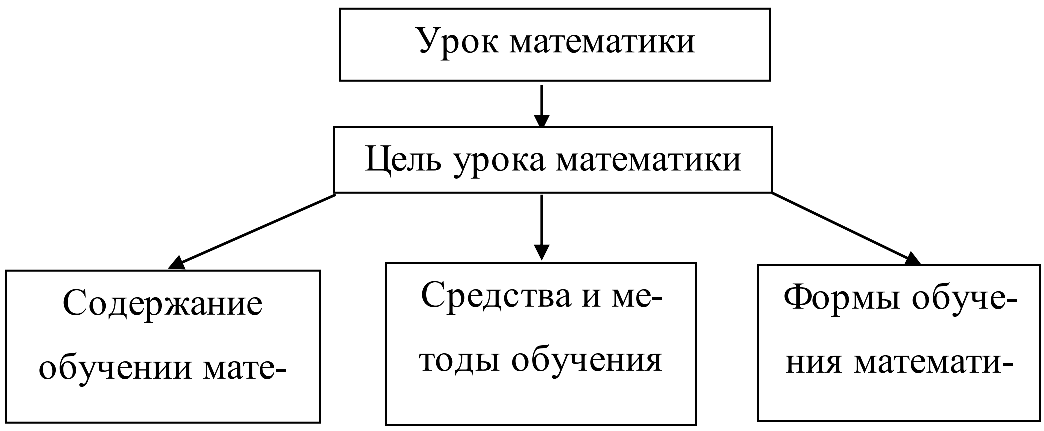

Схема 1. Компоненты урока.

Обучение учеников в школе осуществляется при помощи разнообразных форм, характер которых определяется за счет целей и задач обучения, количеством учащихся, местом и оснащенностью математической литературы.

Рассмотрим определение организационной формы обучения, которое представлено в учебном пособии [43]. Авторы данного пособия определяют *форму обучения* как «внешнее отражение согласованной деятельности педагогов и воспитанников, осуществляемой в установленном порядке и определенном режиме. Они имеют социальную обусловленность, регламентируют социальную деятельность педагога и воспитанников, определяют соотношение индивидуального и коллективного в образовательном процессе, степень активности учащихся в учебной деятельности и способы руководства ею со стороны учителя» [43, С. 214]. В литературе по методике обучения математике авторы по-разному формулируют определение форм обучения, поэтому определение, представленное выше, не является единственным.

В дидактике на сегодняшний день принято выделять три организационные формы обучения: фронтальную, групповую и индивидуальную.

Суть *фронтального обучения* заключается в том, что учитель руководит деятельностью всего класса, организует сотрудничество между учениками, определяет скорость и темп подаваемого материала для всего класса. Но в этом можно найти минус: так как темп рассчитан на среднего ученика, некоторые обучающиеся («ниже среднего») отстают от заданного темпа, другие же («выше среднего») наоборот превышают его и выполняют задания намного быстрее. Эффективность данной формы обучения полностью зависит от педагога, так как он должен уметь держать в поле зрения весь класс. Если учителю удастся создать в классе атмосферу творческого коллективного взаимодействия, то объем проделанной работы существенно возрастет.

Индивидуальная форма обучения используется с целью оптимальной занятости обучающихся на уроке. Данная форма не предполагает, что ученики будут контактировать между собой, а подразумевает самостоятельное выполнение абсолютно одинаковым заданий каждый школьником. Если ученик справляется с самостоятельным упражнением, то такую форму обучения принято называть *индивидуализированной*. В данной организационной форме обучения целесообразно использовать специально-подготовленные карточки, которые увеличивают эффективность урока.

Учитель математики Т.В. Струкова в своей статье «Основные формы учебной деятельности на уроках математики» отмечает, что «индивидуальные занятия особенно важны для школьников с негативным отношением к учебе. Определяя индивидуальные учебные работы для учащихся, потерявших веру в свои силы, учитель исходит из того, что для них посильно. Необходимо предварительно убедить ученика в посильности выполнения задания» [44]. Уровень ученика в глазах класса поднимется, если учитель заметит выполненное задание этим учеником.

Учитель математики С.А. Рябова [41] при составлении урока по теме «Решение неравенств и их систем, содержащих модуль» использует индивидуальную форму организации учебной деятельности: после решения всех запланированных видов неравенств и их систем, содержащих модуль, обучающимся дается самостоятельная работа, состоящая из одной задачи на закрепление изученного материала.

Учитель математики Жанузакова Ж.Т. в статье «Способ самостоятельного изучения материала (по учебным листам)» [10] считает, что в алгебре есть темы, которые можно давать для самостоятельного изучения. Тема «Неравенства с модулем» тоже относится к таким. Суть способа такова: учащиеся самостоятельного изучают тему по заранее заготовленным листам, на каждом из них разбирается часть темы, даются примеры решений и небольшой задание для того чтобы закрепить материал. После того, как учащиеся изучит все листы, дается тренинг по всему изученному материалу. Данный способ удобен тем, что каждый учащийся получается себе индивидуальный лист и работает самостоятельно. Жанузакова Ж.Т. отмечает, что практика показала, дети с интересом работают с этими листами и вовлечены в учебный процесс. В таком методе обучения хорошо формируются навыки решения неравенств с модулем и развиваются способности к самостоятельному изучению материала.

Групповая форма обучения является весьма распространенной формой организации учебной деятельности учащихся. Она характеризуется постоянным наличием групп (4-6 человек). В группы входят учащиеся с разными способностями, что определяет эффективный обмен информации во время урока.

В пособии Л.М. Фридмана описывается опыт групповой работы на уроках математики в школах эстонская педагога Х.Й. Лийметса, который отмечает, что «каждая группа получает отпечатанные на листках дифференцированные задания. Ученики знакомятся с первой задачей и приступают к индивидуальному ее решению. Затем они сверяют свои решения, и если обнаруживают расхождения в решении, то отыскивают ошибку и анализируют причины ее появления. Затем переходят к решению второй задачи и т.д. Учитель в это время наблюдает за работой групп, устанавливает, не остались ли какие-либо ошибки неисправленными, нашла ли группа наиболее рациональный путь решения задач, какие типичные ошибки допускали члены каждой группы, оказывает помощь отдельным группам» [49, С. 120].

Данную форму работы учитель может применить на самостоятельной работе по теме «Неравенства с модулем», так как тема является одной из сложнейших в курсе алгебры основной школы и при помощи друг другу у учащихся не пропадет интерес к работе, потому что процесс будет продвигаться в положительном ключе.

В современной общеобразовательной практике чаще используют индивидуальную и фронтальную форму обучения, гораздо реже групповую. Но ни одна из этих форм не являются коллективными, хотя их часто представляют таковыми.

В статье «Коллективный способ обучения на уроках математике» О.Г. Скокова подчеркивает, что «*коллективный способ обучения* включает в себя несколько организационных форм: индивидуальную, парную, групповую и коллективную. Обучение осуществляется путем общения в динамических парах (парах сменного состава), когда *каждый учит каждого*, то есть все обучающиеся по очереди выполняют функции учителя» [42, С. 47].

Принципы, на которых основывается коллективный способ обучения: ориентация на высокие конечные результаты, непрерывная передача друг другу полученных знаний, сотрудничество и взаимопомощь между учениками, дифференцированный подход: каждый работает согласно своим возможностям и способностям.

Учитель управляет всей учебной деятельностью на уроке, используя при этом различные формы организации деятельности учеников в различных сочетаниях и последовательностях. Большую роль играет коллективная форма обучения, благодаря которой получается уплотнять время урока, создавать атмосферу взаимообучения учащихся. Стоит отметить, что урок как форма организации учебной деятельности существует с семнадцатого века.

Теперь перейдем к такому понятию, как *метод обучения*.

В методической литературе подчеркивается, что «методам обучения, от которых в немалой степени зависит результативность учебной работы в школе, посвящен не один десяток фундаментальных исследований, как в общей теории педагогики, так и в методике преподавания математики» [47, С. 55].

Ю.М. Колягин подчёркивает, что все общие методы обучения современного учителя должны быть направлены на обеспечение активной познавательной деятельности учеников, что не учитель призван обучать учащихся, а ученики под условиями, созданными педагогом, самостоятельно овладевают системой математических знаний, навыков и умений. [15, С. 206].

В пособии «Методика обучения математики» А.А. Темербековой и других авторов дается следующее определение: «*метод обучения* – упорядоченный комплекс дидактических приемов и средств, посредством которых реализуются цели обучения и воспитания. *Методы обучения* – это взаимосвязанные способы целенаправленной деятельности учителя и обучающихся» [47, С. 57].

В современной дидактике выделяют большое количество классификаций методов обучения. Наиболее широкое распространение получила классификация авторов М.Н. Скаткина, М.И Махмутова, И.Я. Лернера. Они делят методы обучения *по характеру познавательной деятельности:*

1. Объяснительно-иллюстративный метод – учитель доносит до учеников готовый материал, ученикам остается только его понять и отложить в своей голове (рассказ, лекция, беседа и т.д.).

2. Репродуктивный метод – ученик воспроизводит какие-то действия, решения уже по известному алгоритму; хорошо формирует умения и навыки.

3. Метод проблемного изложения – учитель должен объяснить ученикам в чем заключается проблема изучаемой темы и предложить варианты ее устранения.

4. Частично-поисковый-эвристический метод заключается в том, каждая проблема в изучаемой теме подразделяется на несколько меньших проблем и перед учащимися стоит задача под руководством педагога найти пути ее решения.

5. Исследовательский метод заключается в том, что ученик должен исследовать проблему и попытаться самостоятельно ее изучить и решить.

Еще известна классификация Ю.К. Бабанского. Он выделяет методы обучения *по компонентам деятельности:* организационно-действенному – методы организации и осуществления учебной деятельности; стимулирующему – методы стимулирования и мотивации учебно-познавательной деятельности; контрольно-оценочному – методы контроля и самоконтроля эффективности работы.

Рассказ как метод обучения математике играет вспомогательную роль. Цель рассказа – сообщить учащимся какой-нибудь факт, описать явление или событие. Любой рассказ должен иметь сюжет и отличаться между собой содержательностью. С помощью рассказа желательно сообщать информацию о значении изучаемого материала. По теме бакалаврской работы можно рассказать историческую справку появления неравенств, модуля числа и т.д.

Много внимания в методической литературе уделено м*етоду проблемного обучения.*

Суть проблемного обучения состоит в следующем: перед школьниками ставится проблема, пути и способы решения которой они исследуют самостоятельно, но при непосредственном участии самого учителя. То есть основа в проблемном методе обучения есть создание проблемной ситуации.

Д.В. Чернилевский утверждал, что «проблемное изучение – это дидактическая система, основанная на закономерностях творческого усвоения знаний и способов деятельности, включающая сочетание приемов и методов преподавания и учения, которым присущи основные черты научного поиска» [45, с. 65].

Учитель по математике Н.Ф. Пономаренко в своей статье «Методы проблемного обучения в современной школе на уроках математики» [37] выделяет три группы проблемных ситуаций:

- познавательные (теоретическое мышление);
- оценочные (критическое мышление);
- организаторско-производственные (практическое мышление).

А.А. Темербекова и другие авторы в своей методической литературе отмечают, что «проблемное обучение ориентировано на формирование и развитие учащихся к творческой деятельности и потребности в ней. В осуществлении проблемного обучения целесообразно начинать с проблемных задач, подготавливая этим самым почву для постановки учебных задач» [47, С. 66].

Средства обучения – это элементы управления осуществления процесса обучения.

При разумном использовании на уроке разнообразных средств обучения обучающимся легче воспринимать и усваивать математические знания.

Классификация средств обучения подразделяется на: зрительные (наглядные) такие как учебники и учебные пособия, раздаточный материал, плакаты, чертежи, таблицы и так далее; слуховые (аудиальные) средства;

зрительно-слуховые (аудиовизуальные) средства такие как мультимедийные учебники, слайды, компьютеры, учебные фильмы и так далее.

В.А. Сластенин подчеркивает, что выбор средств обучения для урока зависит, прежде всего, от целей, поставленных учителем на уроке, методов учебной работы, также возраста обучающихся, а не только от материальной оснащенности школы [43, С. 229].

Средства обучения должны реализовывать основные *дидактические функции*:

1. Компенсаторность – облегчение обучения для учеников, уменьшение затрат времени, сил учеников и учителя.

2. Информативность – ученик должен сохранять и уметь передавать информацию, которая необходима для обучения.

3. Интегративность – возможность изучить материал либо по частям, либо в целом варианте.

На сегодняшний день одно из самых распространённых средств обучения становится *компьютер*. Тангиров Х.Э. в статье «Использование электронных средств обучения при изучении курса Алгебра» отмечает, что «информационно-коммуникационные и компьютерные технологии существенно влияют на формирование нового содержания образования, изменение организационных форм и методов обучения, поскольку имеют ряд преимуществ по сравнению с традиционными образовательными технологиями: новые возможности предъявления и работы с информацией (электронные библиотека, базы данных, поиск по тексту, гипертекст, мультимедиа, моделирование изучаемых процессов и явлений и т. д.; возможность виртуального сотрудничества и сотрудничества (участие в совместных проектах, обсуждениях и т.д.).

Электронные средства обучения повышают качество учебного процесса, облегчают труд учителя, увеличивают уровень знаний учащихся. На сегодняшний день уже создаются электронные учебники по математике» [45].

Учитель математики Т.В. Болдырева в разработке своего уроке по теме «Неравенства, содержащие модуль» [3] использует такое средство обучения как презентация и говорит о том, что данный вид создают более широкое пространство для объяснения материала учащимся, нежели традиционные средства. Ученики в ходе такого урока при просмотре презентации получают дополнительный стимул к овладению рациональными приемами и методами решений неравенств с модулем, ведь наглядная компьютеризированная подача материала намного живее и интереснее выглядит и звучит для современных детей.

Тенденции складываются таким образом, что роль компьютера в современном обучении велика. Поэтому необходимо подчеркнуть, что такое средство обучения никогда не заменит педагога, его настоящая функция всего лишь дополнять традиционные методы обучения.

Принцип дифференциации образования в школе на сегодняшний день является образующим в математическом образовании. Ученик обязан достигнуть уровень обязательно подготовки, которая ему понадобиться в учебной работе. Ключевой ролью в этом компоненте играют упражнения и задачи, которые при обучении математики одновременно являются и целью, и средством развития мышления у учащихся. Чтобы ученик хорошо запомнил материал, необходимо использовать его на практике.

Чтобы учебно-воспитательный процесс был грамотно организован, необходимо выбрать рациональную систему методов и приемов обучения. Необходимо сбалансированно сочетать новые и традиционные методы обучения, оптимизировать использование технических средств обучения. В учебном процессе важно использовать как устные работы, так и письменные работы при изучении теории или при решении задач в рациональном сочетании. Учитель должен следить за тем выработкой у учащихся грамотной и правильной речи, формирование умственной деятельности.

Согласно учебной программе И.С. Зудиной [11], на основе учебника Ю.М. Колягина, при изучении темы «*Неравенства, содержащие переменную* *под знаком модуля*» целесообразней всего использовать такие форму обучения, как индивидуальная и групповая. В качестве видов и формы контроля уровня знаний используются такие *методы как самопроверка* (СП), *взаимопроверка* (ВП), *устный опрос* (УО), *тест* (Т), *самостоятельная работа* (СР) и *работа по карточкам* (РК) (Таблица 7). Ученики сначала самостоятельно выполняют один из видов контроля, потом в парах проверяют правильно выполнения, ищут друг у друга ошибки.

Таблица 7

Виды и формы контроля уровня знаний обучающихся
по теме «Модуль числа. Неравенства, содержащие модуль»

Название темы	Кол-во часов	Тип урока	Планируемые результаты обучения		Виды и формы контроля
			Предметные	Метапредметные	
Модуль числа. Неравенства, содержащие модуль	4	ЗИМ СЗУН	Решать простейшие неравенства с модулем	Регулятивные: оценка правильность выполнения действий Познавательные: умение устно и письменно показать знания по изучаемой теме. Коммуникативные: взаимодействие с товарищем.	СП, ВП, УО, Т, СР, РК

На первом уроке учащиеся должны вспомнить, что такое модуль числа, как решаются простейшие неравенства и понять, как решить неравенство с модулем. Учитель может воспользоваться таким методом обучения как объяснительно-иллюстративный и виде беседы поговорить с учениками о материале данной темы. В средних классах урок проводится при помощи демонстрации наглядных примеров и их практических применений.

Таким образом, при обучении в школе темы «Неравенства с модулем» необходимо использовать разные формы обучения, так как тема является сложная для понимание среднестатистического ученика. Опытный учитель никогда не будет придерживаться одного какого-либо метода обучения. Чтобы разнообразить учебно-познавательную деятельность учащихся и привлечь учеников к активному изучения темы «Неравенства с модулем» необходимо комплексное использование методов обучения на уроке.

Чтобы учащиеся максимально полно и четко осознавали изучаемый материал, существует много методов его подачи. Так как данная тема является сложной для понимания учеников и не всегда включается в обязательный перечень тем, необходимых для изучений, можно использовать проблемный метод обучения, дать учащийся самостоятельно понять, как решать неравенства с модулем под руководством педагога. Согласно современной тенденции в обучении математики, очень эффективно использовать электронные средства обучения, развивая визуальные навыки обработки информации у учеников. Тему «Неравенства с модулем» необходимо подкреплять такими средствами обучения, чтобы увеличить возможность понять материал у ученика. Наглядные средства обучения облегчают восприятие и усвоение учениками материала по данной теме.

§5. Методические рекомендации по обучению решению неравенств с модулем в курсе алгебры основной школы

Изучив теоретический и задачный материалы в первой главе, можно сделать вывод, что учебники для общеобразовательных классов Ю.М. Колягина (8 класс), С.М. Никольского (9 класс) и А.Г. Мордковича (9 класс) наиболее полно раскрывает тему «Неравенства с модулем». Обратимся к методической литературе авторов этих учебников. В учебнике для классов с углубленным изучением математики Ю.Н. Макарычева также достаточно подробно рассматривается данная тема, но к данному учебнику нет методической литературы, кроме самостоятельных и контрольных работ.

В поурочных разработках по алгебре к УМК А.Г. Мордковича [40] предлагается следующее поурочное планирование к проведению уроков по теме «Неравенства с модулем», включающее в себя три вида занятий:

1. Урок изучения нового материала.

2. Урок отработки и закрепления пройденного материала.

3. Письменный опрос, самостоятельная работа.

В урок изучения нового материала входит шесть этапов.

I. *Сообщение темы и цели урока*. Задача учителя состоит в том, чтобы объяснить ученика, зачем они будут изучать данную тему (цель урока) и что должно быть усвоено в конце рассмотрения материала.

II. Изучение нового материала. А.Н. Рурукин отмечает, что «изучение нового материала ($\sim$15 **мин**) возможно двумя путями.

1. С помощью подсказок, примеров, наводящих вопросов учителя школьники самостоятельно (при фронтальной работе) приходят к формулировке основных понятий и правил рассматриваемого раздела алгебры. Зачем учитель уточняет и корректирует эти результаты. Однако, учитывая сложность курса, этот подход можно рекомендовать лишь для самых простых тем или отдельных фрагментов урока.

2. Учитель формулирует основные понятия и правила, иллюстрируя их примерами. Такой подход требует меньше времени, но менее эффективен (всегда полезнее самостоятельно решить задачу, чем услышать объяснения ее решения)» [40].

III. *Контрольные вопросы* по данной теме учитель задает для проверки усвоения материала. Вопросы могут задаваться как индивидуально, так и фронтально.

IV. *Задания на уроке* дается из числа наиболее характерных и типовых. Они могут выполнятся самостоятельно в тетради с последующим разбором у доски, в виде диалога учащихся на одной парте, работа у доски одного или нескольких школьников.

V. *Задание на дом* дается из числа похожих задач, которые были рассмотрены в классе, рассчитанное на 60-80 минут. Желательно, чтобы учащиеся использовали разные способы решения, так как это приводит к активизации мыслительных и творческих процессов.

VI. *Подведение итогов урока.* В конце занятия учитель ставит оценки, в зависимости от самостоятельной работы ученика, решений заданий у доски и дополнительных ответов.

А.Н. Рурукин подчеркивает, что «урок отработки и закрепления пройденного материала отличается этапом II. Теперь на этом этапе предусмотрены повторение материала и отработка навыков решения задач (~20 мин). Прежде всего, он включает ответы на вопросы по домашнему заданию. Желательно, чтобы ответы давали сами учащиеся. Вопросы могут включать в себя непонятные определения, термины, правила и другой теоретический материал. По-видимому, возникнет необходимость разбора нерешенных задач» [38].

В письменного опрос входит вопросы и одна-две задачи. Когда учитель проверяет, то должен смотреть на правильность, а нечеткость формулировки.

Самостоятельная работа включается 2-3 задачи. Главное – это рациональный способ решения.

В методических рекомендациях к учебнику алгебры Ю.М. Колягина [15] отмечено, что учителю следует придерживаться следующих правил:

- давать мотивацию на изучение нового понятия;

- требовать учащихся понимания, а не зазубривания формулировок определений;

- искать самый простой и рациональный способ решения и его оформления;

- давать учащимся возможность самостоятельно что-либо изучить, но при этом организовывать и контролировать этот процесс;

- при решении учеником задания у доски, просить комментировать каждое действие;

- проводить тесты на проверку минимальных знаний по изученному материалу;

Ю.М. Колягин подчеркивает, что «*алгоритм решения неравенства с модулем* сложнее чем алгоритм решения уравнения с модулем, так как на последнем этапе решения приходится учитывать знак коэффициента при неизвестном. Кроме того, в отличии от уравнения, неравенство не имеет отдельные решения, а, как правило, множество решений

Геометрическое изображение множества решений неравенства на числовой прямой является необычным для учащихся, но очень нужным и полезным, в особенности при решении систем неравенств.

Решение систем неравенств с одним неизвестным тесно связано с числовыми промежутками, с которыми учащиеся также знакомятся впервые, получая представления о символьной записи и изображении числовых множеств» [15].

Правильное решения уравнения легко проверяется подстановкой, тогда как решение неравенства таким способом проверить нельзя.

Со многими понятиями учащиеся знакомятся впервые. Как и любое неравенство, неравенство с модулем часто упирается в числовые промежутки, которые учащиеся только узнали, поэтому данная тема носит такой сложный характер, так как имеет еще ряд других затруднений.

Понятие модуль числа в совокупности с неравенством даются учащимся очень тяжело, поэтому важно чтобы учитель нашел правильный подход к объяснению.

Ю.М. Колягин отмечает, что тема «Неравенства» тесно связана со всеми темами курса алгебры. Вместе с этим, неравенство с модулем можно решить графически и рассмотреть, как графики двух функций, а сюда уже подключается множество других компонентов алгебры.

Цель изучения темы «Модуль числа. Неравенства, содержащие неизвестное под знаком модуля» – знакомство с решениями неравенств, содержащее неизвестное под знаком модуля; обучение выбору наиболее эффективных способов решения задач.

Ю.М. Колягин сосредотачивает внимание на том, что «в курсе математики 5-6 классов учащиеся познакомились с понятием модуля числа и его геометрической интерпретации. В этом параграфе дается строгое определение модуля числа.

Такой подход к изучению теоретического материала выбран не случайно: он упрощает формирование умения решать уравнения и неравенства, содержащие модуль» [15]. Однако если учащиеся решат упражнение 168 [1], то они смогут применить геометрическую интерпретацию при решении неравенств с модулем.

Задание №168 [1]. Доказать, что число $a - b$ равно расстоянию между точками a **и** b числовой оси. Можно привести пример на конкретных значение и решить подобное уравнение с модулем, чтобы учащиеся разобрались, что такое геометрическая интерпретация.

Решение. Если $b > a$, то расстояние между точками b **и** a равно $b - a$; если $b < a$, то расстояние равно $a - b$; если число $a - b$, **то** $a - b = 0$, что соответствует определению модуля числа $a - b$.

Пример 1. Решить уравнение $x - 5 = 7$.

Решение. Расстояние от точки 5 до точки x должно быть равно 7, таких точек на числовой прямой ровно 2: точка 12 и точка -2, следовательно $x_1 = 12, x_2 = -2$ (Рис. 15).

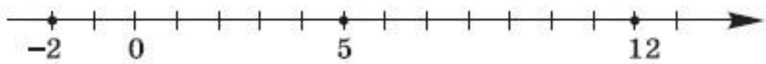

Рис. 15.

Также в методических рекомендациях выделено, что от всех учащихся проведения подобных рассуждений требовать не следует.

Автор предлагает два *способа оформление решения задач*: с помощью системы неравенств или с помощью двойного неравенства:

I способ оформление решения неравенства

$$3x - 2 < 10$$

$$3x - 2 > -10,$$
$$3x - 2 < 10;$$

$$3x - 2 > -10, \qquad 3x - 2 < 10$$

$$3x > -8, \qquad\qquad 3x < 12,$$

$$x > -2\frac{2}{3}; \qquad\qquad x < 4.$$

$$-2\frac{2}{3} < x < 4.$$

II способ оформление решения неравенства

$3|x - 2| < 10$; $\quad -10 < 3x - 2 < 10$; $\quad -10 + 2 < 3x < 10 + 2$; $-8 < 3x < 12, -2\frac{2}{3} < x < 4$. **Ответ:** $-2\frac{2}{3} < x < 4$.

Оформить решения задач можно короче, чем это показано в учебнике.

Пример 2. Решить неравенство $|10 - 3x| \geq 1$.

$$1) 10 - 3x \geq 1, \qquad 2) 10 - 3x \leq -1,$$

$$-3x \leq -9, \qquad\qquad -3x \leq -11,$$

$$x \leq 3; \qquad\qquad x \geq 3\frac{2}{3}.$$

Ответ: $x \leq 3, x \geq 3\frac{2}{3}$.

В учебнике для общеобразовательных классов [1] есть рубрика «Это интересно», автор настоятельно рекомендует рассмотреть ее со всеми учащимися класса или включить ее изучение как обязательное задание в домашнюю работу. Распределение учебного материала по урокам может быть таким (Таблица 8).

Таблица 8

Распределение заданий по урокам

№ урока	*Теорет. материал*	*Задания*		
		Основные для работы в классе и дома	*Для самостоятельной работы в классе*	*Дополнительные*
1	§10	№149-152, 154-156	№152(3)	№163, 168, это интересно с.67, ДМ №13
2	§10	№153, 157-162, 164	№158 (1,3), 159(1,3), 162 (3,4), тест 1.	№166-167, 195, 196; ДМ №12, РТ №10.

В результате изучения данной темы учащиеся должны уметь отвечать на устные вопросы и выполнять устные задания, приведенные в конце параграфа.

Также в данном учебнике есть задания, которые предназначены для учеников с высокой подготовкой, которые раскрывают все тонкости данной темы.

Далее можно обратиться к методическим рекомендациям к учебнику для общеобразовательных классов С.М. Никольского [38]. Автор данных рекомендаций М.К. Потапов считает, что главная цель изучения темы «Неравенства с модулем» - освоить методы решений данных неравенств. Тема «Неравенства с модулем» поставлена тогда, когда учащиеся уже изучили темы «Линейные неравенства с одним неизвестным», «Системы линейных неравенств с одним неизвестным».

По примерному тематическому планированию на данную тему отводится 2 часа, и то для классов с углубленным изучением математики (4 часа в неделю).

В пункте «Неравенства, содержащие неизвестное под знаком модуля» разобрано несколько способов решения неравенств. Автор отмечает, что перед объяснением нового материала полезно повторить определение модуля числа, построение графиков функции $y = x$, $y = x - a$, $y = x - a + b$.

После проведении пропедевтики по заданной теме, автор предлагает решить несколько легких заданий и переходить уже к основным неравенствам с модулем. Автор отмечает что всегда нужно давать учащимся разные варианты решения заданий.

Задание №67 [34]. Решить неравенство $2x - 3 > 5$.

I способ решения. Множество решений неравенства $2x - 3 > 5$ есть множество всех x, удовлетворяющих или неравенству $1)\ 2x - 3 > 5$ или неравенству $2)\ 2x - 3 < -5$. Решив эти два неравенства, необходимо объединить множества их решений.

Неравенство 1) равносильно неравенству $2\ x\ > 8,$ множество его решение есть объединение промежутков $-\infty, -4$ **и** $4, +\infty$.

Неравенство 2) равносильно неравенству $2\ x\ < -2,$ которое не имеет решений. Следовательно, все решения исходного неравенства составляют множество $-\infty, -4\ \cup\ 4, +\infty$.

II способ решения. Необходимо построить графики функций $y =\ 2\ x\ -3$ и $y = 5,$ найдем все значения x, для каждого из которых точки первого графика расположены выше точек второго графика. (Рис. 3). Получим тоже множество $-\infty, -4\ \cup\ 4, +\infty$.

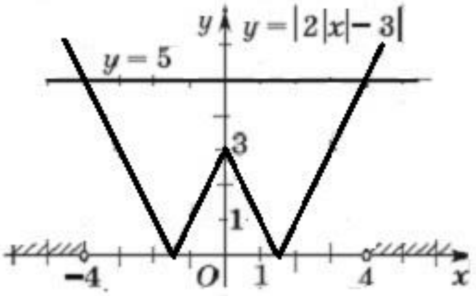

Рис. 16.

Ответ: $-\infty, -4\ \cup\ 4, +\infty$.

Упражнения составлены с возрастанием усложнения видов неравенств с модулем.

Задание №68 [34]. Решить неравенство $x - 3\ > x + 1.$

Решение. При решении данного неравенства рассмотрим три случая: $x = 3, x > 3, x < 3$ и объединим все найденные решения.

Сразу можно заметить, что $x = 3$ не является решением данного неравенства. Все остальные решения исходного неравенства являются решениями:

или системы 1) $\begin{array}{c} x > 3, \\ x - 3 > x + 1, \end{array} \Rightarrow \begin{array}{c} x > 3, \\ 0 \cdot x > 4, \end{array}$

или системы 2) $\begin{array}{c} x < 3, \\ -x + 3 > x + 1. \end{array} \Rightarrow \begin{array}{c} x < 3, \\ -2x > -2. \end{array} \Rightarrow \begin{array}{c} x < 3, \\ x < 1. \end{array}$

Система 1) не имеет решения, система 2) имеет множество решений $-\infty; 1$. Следовательно, исходное неравенство имеет множество решений $-\infty; 1$. **Ответ:** $-\infty; 1$.

В данном учебнике в каждом параграфе есть задание с параметром.

Задание №69 [34]. При каких значениях a неравенство $2x - a \ \ < x + 1$ не имеет решений.

Решение. Необходимо разделить обе части исходного неравенство на 2, получится равносильное ему неравенство $x - \frac{a}{2} \ \ < \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$. Сначала построим график функции $y = g\ \ x$, где $g\ \ x \ \ = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$, он пересекает ось Ox в точке с абсциссой $x = -1$ Рис. 17 . Затем нужно построить график функции $y = f\ \ x$, где $f\ \ x \ \ = \ \ x - \frac{a}{2}$ для $\frac{a}{2} = -1$, т.е для $a = -2$. В этом случае исходного неравенство не имеет решений, так как для любого x верно неравенство $f\ \ x \ \ \geq g\ \ x$. Если $a < -2$, то вершина угла, являющегося графиком функции $y = f\ \ x$, находится на оси Ox левее точки $x = -1$ Рис. 18 . В этом случае исходное неравенство не имеет решений, так как для любого x верно неравенство $f\ \ x \ \ > g\ \ x$.

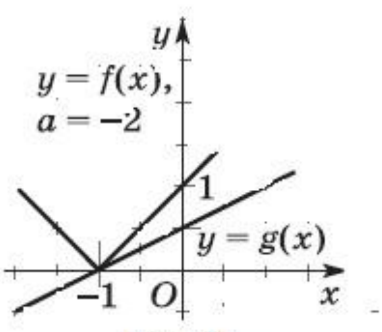

Рис. 17.

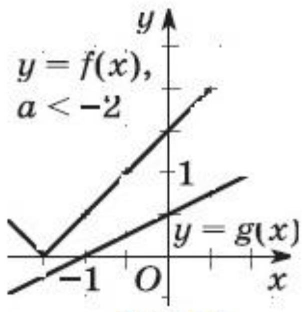

Рис. 18.

Если же $a > -2$, то вершина угла, являющегося графиком функции $y = f(x)$, находится на оси Ox правее точки $x = -1$ Рис. 6 . В этом случае исходное неравенство имеет решение – все x, заключенные между абсциссами точек пересечения графиков. Находить эти решения не требуется.

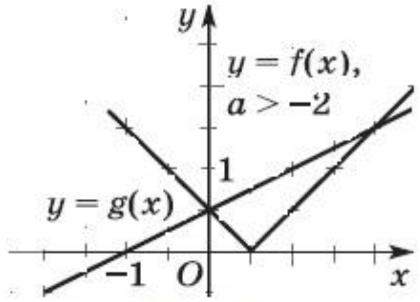

Рис. 19.

Итак, при $a \leq -2$ неравенство $2x - a < x + 1$ не имеет решений.

Таким образом, как уже замечалось выше, модуль числа и неравенства с модулем даются ученикам очень тяжело, поэтому учитель должен найти правильный подход, чтобы урок не прошел зря и найти правильные методы объяснения материала. Всегда нужно мотивировать и заинтересовывать учеников в стремлении изучить что-то новое. Учитель должен акцентировать итог знаний на практическом применении знаний учеников, а не заученном воспроизведении определений; стараться показать компактное оформление неравенств. Давать ученикам какой-то материал или какое-то решение задачи на самостоятельную работу, которую учитель также будет контролировать и организовывать. Чтобы ученики развивали свою речевую грамотность, требовать, чтобы задания у доски комментировались и обосновывались. Чтобы понять тенденцию изучения темы проверить тесты на проверку знаний.

§6. Системы задач по теме «Решение неравенств с модулем» в курсе алгебры основной школы

Задачи являются одним из основных средств, которые используются при обучении математике для формирования знаний, умений и навыков учащихся. Посредством решения задач реализуется как образовательная, так и воспитательная и развивающая цели.

К системам задач существуют различные требования. В учебном пособии Е.И. Лященко [17] выделены требования к системам задач на усвоение понятия и его определения, на усвоение теоремы и ее доказательства, на усвоение правил. Г.И. Саранцев приводит требования к системам задач на формирование понятий, на усвоение теоремы и ее доказательства.

Л.В. Виноградова в учебном пособии выделяет следующие принципы отбора и составления систем упражнений:

1. Принцип систематичности. В системе задач должны присутствовать упражнения на изучение отдельных фактов изолированно от ранее изученного, упражнения, связывающие новый факт с ранее изученным материалом, и упражнения на систематизацию изученного материала.

2. Принцип последовательности. Упражнения располагаются в порядке возрастания сложности: от менее сложного к более сложному.

3. Принцип прочности. Данный принцип проявляется в наличии однотипных упражнений.

После изучения различных систем задач, можно сделать вывод о том, что для темы «Неравенства с модулем» больше всего подходит требования, которые выделила Л.В. Виноградова. С учетом этих требований к системам упражнений, нами были составлены системы задач на тему: «Неравенства с модулем» и включающие разные виды.

Система задач на тему «Неравенства с модулем»

1. *Решение неравенства с модулем на основе геометрического смысла*

Задача 1 [28, С. 13]. Решить неравенство $x-2\ <3$.

Решение. Если перевести аналитическую модель $x-2\ <3$ на геометрический язык, то получится, что нужно найти на координатной прямой такие точки x, которые удовлетворяют условию $\rho\ x;2\ <3$, т.е. удалены от точки 2 на расстояние, меньшее 3. На 3 единиц от точки с координатой 2 удалены на координатной прямой точки с координатами -1 и 5, а менее чем на 3 единиц, точки, заключенные между ними. Значит, искомое множество есть интервал $(-1;5)$. **Ответ:** $(-1;5)$.

Задача 2 [28, С. 13]. Решить неравенство $10x\ >27$

Решение. Сначала необходимо разделить обе части неравенства на одно и то же положительное число 10, получается $x\ > 2{,}7$. Если перевести аналитическую модель $x\ > 27$ на геометрический язык, то получится, что нужно найти на координатной прямой такие точки x, которые удовлетворяют условию $\rho\ x;0\ \ > 2{,}7$, т.е. удалены от точки 0 на расстояние, большее 2,7. Это все точки, принадлежащие открытым лучам $-\infty,-2{,}7$ или $2{,}7;+\infty$.

Ответ: $-\infty,-2{,}7\ \cup\ 2{,}7;+\infty$.

Задача 3 [30, С. 100]. Решить неравенство $x-2\ +\ x+4\ \leq 10.$ (11)

Решение. Переведем аналитическую модель на геометрический язык: нам надо найти на координатной прямой такие точки x, которые удовлетворяют условияю $\rho\ x,2\ +\rho\ x,-4\ \leq 10$, т.е сумма расстояний каждой из таких точек от точек 2 и -4 меньше или равна 10. Точки 4 и -6 удовлетворяют условию $\rho\ x,2\ +\rho\ x,-4\ =10$; в самом деле,

$$\rho\ 4,2\ +\rho\ 4,-4\ =2+8=10$$

$$\rho\ -6,2\ +\rho\ -6,-4\ =8+2=10$$

Условию же $\rho\ x,2\ +\rho\ x,-4\ \leq 10$ удовлетворяют точки из интвервала $-6;4$ Рис. 11 .

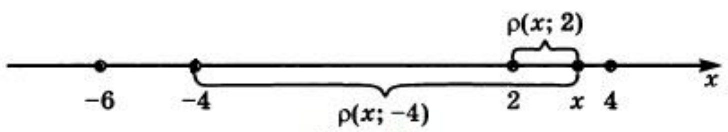

Рис. 11.

Ответ: $-6;4$.

2. Решение неравенства с модулем графическим методом

Задача 4 [34, С. 24]. Решить неравенство $2x-5\ >3$ графическим способом.

Решение. Необходимо построить графики функций $y=\ 2x-5$ и $y=3$. Рис. 5 . Решениями неравенства являются только те числа x (точки x оси Ox), для каждого из которых соответствующие точки графика функции $y=\ 2x-5$ расположены выше прямой $y=3$. Следовательно, все решения неравенства (5) составляют интервал $-\infty,1)\cup(4;+\infty$.

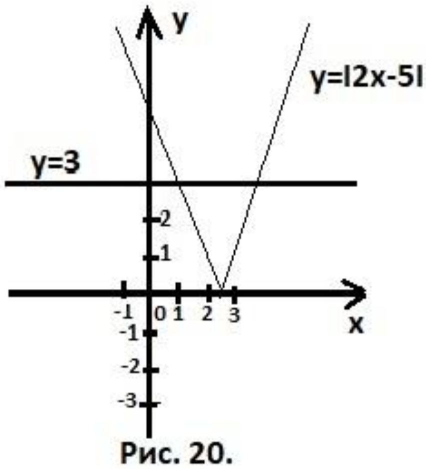

Рис. 20.

Ответ: $-\infty, 1) \cup (4;+\infty$.

Задача 5 [34, С. 25]. Решить неравенство $x+3 \ < 2x+4$ графическим методов.

Решение. Необходимо построить графики функций $y= \ x+3$ и $y=2x+4$ Рис.5 . Решениями неравенства являются только те числа x (точки x **оси** Ox), для каждого из которых соответствующие точки графика функции $y= \ x+3$ расположены ниже прямой $y=2x+4$. Следовательно, все решения неравенства (5) составляют интервал $1;+\infty$.

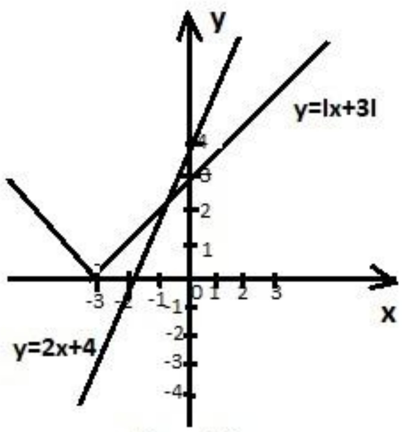

Рис. 21.

Задача 6 [22, С. 165]. Изобразить на координатной плоскости фигуру, которую задает неравенство $x \ + \ y \ \leq 4$.

Решение. Если пара $x_0;y_0$ является решением неравенства, то каждая из пар $x_0;-y_0$, $-x_0;y_0$ и $-x_0;-y_0$ также является его решением. Значит, искомая фигура симметрична относительно оси x и относительно оси y.

Изобразим сначала ее часть, расположенную в первом координатном углу. Для первого координатного угла имеем систему

$$\begin{matrix} x \geq 0, \\ y \geq 0, \\ x + y \leq 4. \end{matrix}$$

Эта система задает треугольник, ограниченными прямыми $x = 0$, $y = 0, x + y = 4$. Построим этот треугольник и, используя свойства симметрии, изобразим три остальные части. Полученная фигура – квадрат (Рис. 22).

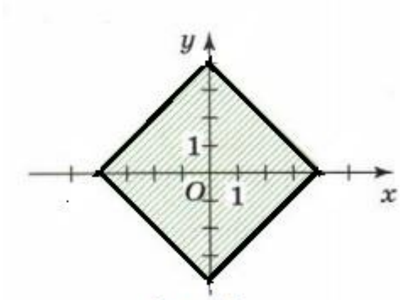

Рис. 22.

3. Решение неравенства с модулем, при помощи определения модуля

Задача 7 [34, С. 23]. Решить неравенство $x \ > 5$, используя определения модуля.

Решение этого неравенства есть все x, которые удовлетворяют системе неравенств $\begin{matrix} x < 5, \\ x > -5. \end{matrix}$ Решение системы является общее решение этих двух неравенств: $x \in \ -5,5$. **Ответ:** $-5,5$.

Задача 8 [22, С. 105]. Решить неравенство $x - 3 \ < 4$.

Решение. Решение этого неравенства есть все x, которые удовлетворяют системе неравенств $\begin{matrix} x - 3 > -4, \\ x - 3 < 4. \end{matrix}$ Необходимо решить отдельно каждое неравенство:

$$1) x - 3 > -4 \qquad\qquad 2) x - 3 < 4$$

$$x > -1 \qquad\qquad x > 7.$$

Решение системы является общее решение этих двух неравенств: $x \in \ -1{,}7$. **Ответ:** $-1{,}7$.

Задача 9 [22, С. 105]. Решить неравенство $x^2 + 4x \ < 5$.

Решение. Данное неравенство раносильно совокупности двух неравенств: $\left[\begin{array}{l} x^2+4x<5, \\ x^2+4\text{x}>-5. \end{array}\right.$

Необходимо решить каждое неравенство.

Решая первое неравенство, получается:

$$x^2+4\text{x}<5,$$

$$x^2+4\text{x}-5<0$$

$$(x+5)(x-1)<0$$

$$x_1=-5, x_2=1.$$

Можно воспользоваться методом интервалов (Рис. 3):

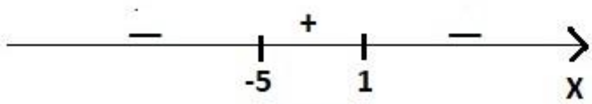

Рис. 23.

Решением данного неравенства является промежуток $(-5,1)$.

Решая второе неравенство, получается:

$$x^2+4x>-5,$$

$$x^2+4x+5>0$$

$$x^2+4x+5=0$$

$$D=16-20=-4$$

Корней действительных нет.

Решением данного неравенства является промежуток $-5,1$.

Значит, множеством решений исходного неравенства является объединение множеств $-5,1$. **Ответ:** $-5,1$.

Задача 10 [34, С. 25]. Решить неравенство $|x-3|>x+1$, используя определение модуля.

Решение. Необходимо раскрыть модуль при помощи его определения

$$\begin{cases} x-3\geq 0, \\ x-3>x+1. \end{cases} \qquad \begin{cases} x-3<0, \\ -(x-3)>x+1. \end{cases}$$

Решая каждую систему неравенств, получется:

$$\begin{array}{ll} x \geq 3, & x < 3, \\ 0 \cdot x < 4.' & -2x < 4.^{\cdot} \end{array}$$

$$\text{Решений нет,} \qquad \begin{array}{l} x < 3, \\ \mathrm{x} > -2. \end{array}$$

У первой системы решений нет, решением второй системы является промежуток $-2;\ 3$. Объединив все, получим что решение неравенства (4) составляют интервал $-2;3$. **Ответ:** $-2;3$.

Задача 11 [34, С. 57]. Решить двойное неравенство $1 \leq\ x-2\ \leq 4$, используя определение модуля.

Решение. Необходимо избавиться от модуля при помощи его определения:$1)x-2 \geq 0, x \geq 2$ $\qquad$ $2)x-2 < 0, x < 2$

$$1 \leq x-2 \leq 4 \qquad\qquad 1 \leq -x+2 \leq 4, -4 \leq x-2 \leq -1$$

$$\begin{array}{ll} x-2 \geq 1, & x-2 \geq -4, \\ x-2 \leq 4. & x-2 \leq -1. \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} x \geq 3, & x \geq -2, \\ x \leq 6. & x \leq 1. \end{array}$$

$$x \in\ 3;6 \qquad\qquad x \in [-2;1]$$

Объединив эти два промежутка и получается, что неравенство (3) имеет множество решений $x \in [-2;1] \cup\ 3;6$. **Ответ:** $[-2;1] \cup\ 3;6$.

Задача 12 [34, С. 24]. Решить неравенство, содержащее два модуля: $2\ x\ -5\ < 3.$

Решение. Множество всех решений неравенства (1) есть все x, которые удовлетворяют системе неравенств: $\begin{array}{l} 2\ x\ -5 < 3, \\ 2\ x\ -5 > -3. \end{array}$ Эту систему можно упросить и переписать в виде: $\begin{array}{l} 2\ x\ < 8, \\ 2\ x\ > 2. \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} x\ < 4, \\ x\ > 1. \end{array}$ $\quad (2)$

Необходимо решить первое неравенство системы $x\ < 4$: $\begin{array}{l} x < 4\,, \\ x > -4. \end{array}$

Множество решение этого неравенства служит интервал $-4;4$.

Необходимо решить второе неравенство системы $x\ > 1$: $\begin{array}{l} x > 1\,, \\ x < -1. \end{array}$

Множество решение этого неравенства служит интервал $-\infty;-0{,}5) \cup (0{,}5;+\infty$. Множество всех решений системы (2) есть объединение двух интервалов: $-4;-1 \ \cup \ 1;4$. Множество всех решений неравенства (1) есть объединение этих двух интервалов. **Ответ:** $-4;-1 \ \cup \ 1;4$.

4. Решение неравенства с модулем методом замены переменных

Задача 13 [34, С. 60]. Решить неравенство $x-3 \ ^2-5 \ x-3 \ +4\leq 0$ с помощью метода замены переменных.

Решение. Можно сделать замену переменной: $t= \ x-3$. Переписывая неравенство (7) в виде:

$$t^2-5t+4\leq 0.$$

По теореме Виета найдем корни данного квадратного трехчлена:

$$t_{\mathbf{1}}=1, t_2=4.$$

Воспользуемся методом интервалов (Рис. 24):

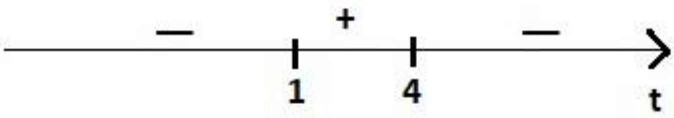

Рис. 24.

Решением данного неравенства будет $1\leq t\leq 4$. Сделаем обратную замену: $1\leq \ x-3 \ \leq 4$. (8) Избавимся от модуля при помощи его определения:1)$x-3\geq 0, x\geq 3$ 2)$x-3<0, x<3$

$$1\leq x-3\leq 4 \qquad 1\leq -x+3\leq 4, -4\leq x-3\leq$$

$$x-3\geq 1, \quad x-3\leq 4. \qquad x-3\geq -4, \quad x-3\leq -1.$$

$$x\geq 4, \quad x\leq 7. \qquad x\geq -1, \quad x\leq 2.$$

$$x\in \ 4;7 \qquad x\in[-1;2]$$

Объединяем эти два промежутка и получаем, что неравенство (8) имеет множество решений $x\in \ -1;2 \ \cup \ 4;7$. Следовательно и неравенство (6) имеет то же множество решений. **Ответ:** $-1;2 \ \cup \ 4;7$

Задача 14 [34, С. 60]. Решить неравенство $3x^2+12x+14-5 \ x+2 \ \leq 0$ с помощью метода замены переменных.

Решение. В неравенстве (4.1) можно выразить квадрат разности:

$$(3x^2+12x+4)-5\ \ x+2\ \ +6 \le 0,$$
$$x-2\ ^2-5\ \ x-2\ \ +6 \le 0. \qquad (7)$$

Можно сделать замену переменной: $t=\ x-2\ $. Переписывая неравенство (7) в виде: $t^2-5t+6 \le 0$.

По теореме Виета корни данного квадратного трехчлена: $t_1=2, t_2=3$.

Воспользуемся методом интервалов (Рис. 6):

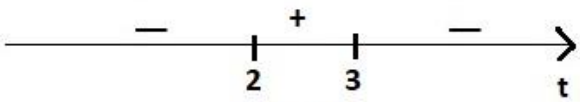

Рис. 25.

Решением данного неравенства будет $2 \le t \le 3$. Сделаем обратную замену: $2 \le \ x-2\ \le 3$. (8) Избавимся от модуля при помощи его определения: 1) $x-2 \ge 0, x \ge 2$ 2) $x-2<0, x<2$

$2 \le x-2 \le 3$ $\qquad$ $2 \le -x+2 \le 3, -3 \le x-2 \le -2$

$\begin{cases} x-2 \ge 2, \\ x-2 \le 3. \end{cases}$ $\qquad$ $\begin{cases} x-2 \ge -3, \\ x-2 \le -2. \end{cases}$

$\begin{cases} x \ge 4, \\ x \le 5. \end{cases}$ $\qquad$ $\begin{cases} x \ge -1, \\ x \le 0. \end{cases}$

$x \in \ 4;5$ $\qquad$ $x \in [-1;0)$

Объединяем эти два промежутка и получаем, что неравенство (8) имеет множество решений $x \in \ -1;0\ \cup\ 4;5$. Следовательно и неравенство (6) имеет то же множество решений. **Ответ:** $-1;0\ \cup\ 4;5$.

Задача 15 [34, С. 61]. Решить систему неравенств $\begin{cases} x^2-3\ x\ +2>0, \\ \frac{10}{3-\ x}>0. \end{cases}$ с помощью метода замены переменных.

Решение. Воспользуемся свойством модуля и заменим $x^2=|x|^2$

$$\begin{cases} |x|^2-3\ x\ +2>0, \\ \dfrac{10}{3-\ x}>0. \end{cases}$$

Сделаем замену переменной: $t = \ x$. Перепишем систему неравенств (9) в виде: $\begin{cases} t^2 - 3t + 2 > 0, \\ \frac{10}{3-t} > 0. \end{cases}$. Как было написано выше, для того чтобы решить систему неравенств с модулем, надо решить каждое неравенство системы, затем найти общую часть (пересечение) полученных множеств решений – она и будет множеством всех решений системы.

Решим первое неравенство: $t^2 - 3t + 2 > 0$

$$t_1 = 1, t_2 = 2.$$

Отметим решения на координатной прямой (Рис. 8):

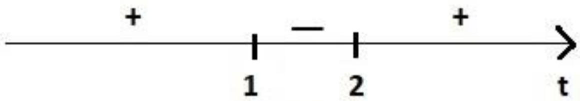

Рис. 26.

Решением данного неравенства служит промежуток $-\infty;1 \ \cup \ 2,+\infty$.

Решим второе неравенство: $\frac{10}{3-t} > 0,$

$$10 \ 3-t \ > 0,$$

$$t = 3$$

Отметим решения на координатной прямой (Рис. 9):

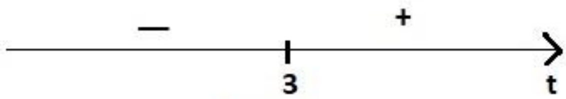

Рис. 27.

Решением данного неравенства служит промежуток $-\infty;3$.

Решеинем системы неравенств с переменной t будет пересечение этих промежутков: $-\infty;1 \ \cup \ 2,3$.

Сделаем обратную замену переменной и рассмотрим каждый из этих двух промежутков.

$$-\infty < t < 1,$$

$$-\infty < \ x \ < 1.$$

$$\begin{cases} x \geq 0, \\ -\infty < x < 1. \end{cases} \qquad \begin{cases} x < 0, \\ -\infty < -x < 1. \end{cases}$$

$x \in [0;1)$

$$\begin{cases} x < 0, \\ -1 < x < +\infty. \end{cases}$$

$$x \in (-1;0)$$

Решением с переменной x будет промежуток $(-1;1)$.

$$2 < t < 3,$$

$$2 < |x| < 3.$$

$$\begin{cases} x \geq 0, \\ 2 < x < 3. \end{cases} \qquad \begin{cases} x < 0, \\ 2 < -x < 3. \end{cases}$$

$$x \in (2;3) \qquad \begin{cases} x < 0, \\ -3 < x < -2. \end{cases}$$

$$x \in (-3;-2)$$

Решением с переменной x будет промежуток $(-3;2) \cup (2;3)$.

Общее решение системы неравенств с переменной x будет промежуток $(-3;-2) \cup (-1;1) \cup (2;3)$. **Ответ:** $(-3;-2) \cup (-1;1) \cup (2;3)$.

5. Решение неравенства с модулем методом возведения в квадрат

Задача 16 [22, С. 97]. Найдите множество решений неравенства $|x^2 + 3x - 4| < |3x|$.

Решение. Данное неравенство равносильно неравенству:

$$(x^2 + 3x - 4)^2 < (3x)^2.$$

$$(x^2 + 3x - 4)^2 - (3x)^2 < 0,$$

$$(x^2 + 3x - 4 - 3x)(x^2 + 3x + 3x - 4) < 0,$$

$$(x^2 - 4)(x^2 + 6x - 4) < 0.$$

$$(x^2 + 6x - 4) = 0; D = 36 + 16 = 52$$

$$x_{1,2} = \frac{-6 \pm 2\sqrt{13}}{2}, x_1 = -3 + \sqrt{13}, x_2 = -3 - \sqrt{13}$$

$$(x - 2)(x + 2)(x + 3 - \sqrt{13})(x + 3 + \sqrt{13}) < 0,$$

$$(x - 2)(x + 2)(x + 3 - \sqrt{13})(x + 3 + \sqrt{13}) = 0$$

$$x_1 = 2,\ x_2 = -2,\ x_3 = -3 + \sqrt{13}, x_4 = -3 - \sqrt{13}.$$

Воспользуемся методом интервалов (Рис. 28):

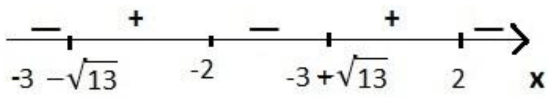

Рис. 28.

Решением данного неравенства, а значит, и равносильного ему исходного неравенства является промежуток $\left(-3-\sqrt{13};-2\right)\cup\left(-3+\sqrt{13};2\right)$.

Ответ: $\left(-3-\sqrt{13};-2\right)\cup\left(-3+\sqrt{13};2\right)$.

Задача 17 [22, С. 97]. Найдите множество решений неравенства $\left|x^2-3x+2\right| < \left|3x-2\right|$.

Решение. Данное неравенство равносильно неравенству:

$$(x^2-3x+2)^2<(3x-2)^2.$$

Решая это неравенство, получается:

$$\left(x^2-3x+2\right)^2-\left(3x-2\right)^2<0,$$

$$\left(x^2-3x+2-3x+2\right)\left(x^2-3x+2+3x-2\right)<0,$$

$$\left(x^2-6x+4\right)\cdot x^2<0.$$

$$\left(x^2-6x+4\right)=0;\quad D=36-16=20$$

$$x_{1,2}=\frac{6\pm2\sqrt{5}}{2},x_1=3+\sqrt{5},x_2=3-\sqrt{5}$$

$$x^2\left(x-3-\sqrt{5}\right)(x-3+\sqrt{5})<0,$$

$$x^2\left(x-3-\sqrt{5}\right)(x-3+\sqrt{5})=0$$

$$x_1=0,\qquad x_2=3+\sqrt{5},\qquad x_3=3-\sqrt{5}.$$

Воспользуемся методом интервалов (Рис. 29):

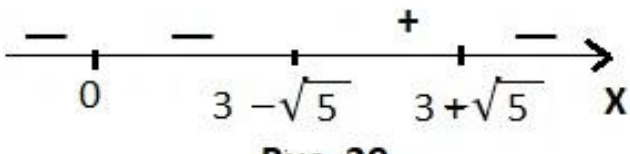

Рис. 29.

Решением данного неравенства и равносильного ему исходного неравенства является промежуток $\left(3-\sqrt{5};3+\sqrt{5}\right)$. **Ответ:** $\left(3-\sqrt{5};3+\sqrt{5}\right)$.

Выводы по второй главе

Во второй главе были получены следующие результаты:

1. Рассмотрены различные формы, методы и средства обучения решению неравенств с модулем. Основной формой организации обучения является урок. Проблемный метод обучения является ведущим в обучении учеников теме «Неравенства с модулем. При организации обучения решению неравенств с модулем желательно использовать задания на карточках. На сегодняшний день в образовательном процессе активно применяются компьютерные технологии, поэтому для более продуктивного изучения данной темы их целесообразно задействовать.

2. Представлены методические рекомендации по обучению теме «Неравенства с модулем». Определено, что при обучении учащихся данной теме, необходимо научить выделять учащихся самый рациональный способ решения, акцентировать итог изучения на практическом применении знаний учеников, стараться показывать компактное оформления решений неравенств.

3. Разработана система задач по теме «Неравенства с модулем» в курсе алгебры основной школы, которые удовлетворяют требованиям Л.В. Виноградовой. В систему задач включаются такие методы решения как метод на основе геометрической интерпретации, решение при помощи определения модуля, графический метод, метод замены переменной и метод возведения в квадрат. Система задач подобрана в соответствии с основными знаниями и требованиями, предъявляемые ученику после окончания изучении темы.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Сформулируем основные выводы и полученные результаты исследования.

1. Выявлены основные цели и задачи обучения решения неравенств с модулем в курсе математики основной школы. Так, решение неравенств с модулем способствует развитию логического мышления учащихся; формированию у них умения находить рациональный способ решения для разных видов задач, акцентировать внимание на основной идее решения данных видов неравенств.

2. Представлены основные требования к знаниям и умениям учащихся по теме «Неравенства с модулем» в курсе алгебры основной школы.

3. Выполнен анализ содержания теоретического материала темы «Неравенства с модулем» в учебниках алгебры 7-9 классов.

4. Предоставлен анализ содержания задачного материала темы «Неравенства с модулем» в учебниках алгебры 7-9 классов. Определено, что неравенства с модулем в основной школе решаются на основе геометрического смысла понятия модуля, определения модуля; при их решении используются графический метод, методом возведения в квадрат и метод разбиения на промежутки.

5. Рассмотрены различные формы, методы и средства обучения решению неравенств с модулем. Основной формой организации обучения является урок. Проблемный метод обучения является ведущим в обучении учеников теме «Неравенства с модулем. При организации обучения решению неравенств с модулем желательно использовать задания на карточках. На сегодняшний день в образовательном процессе активно применяются компьютерные технологии, поэтому для более продуктивного изучения данной темы их целесообразно задействовать.

6. Представлены методические рекомендации по обучению теме «Неравенства с модулем». Определено, что при обучении учащихся данной теме, необходимо научить выделять учащихся самый рациональный способ реше-

ния, акцентировать итог изучения на практическом применении знаний учеников, стараться показывать компактное оформления решений неравенств.

7. Разработана система задач по теме «Неравенства с модулем» в курсе алгебры основной школы, которые удовлетворяют требованиям Л.В. Виноградовой. В систему задач включаются такие методы решения как метод на основе геометрической интерпретации, решение при помощи определения модуля, графический метод, метод замены переменной и метод возведения в квадрат. Система задач подобрана в соответствии с основными знаниями и требованиями, предъявляемые ученику после окончания изучении темы.

Все это дает основание считать, что задачи, поставленные в исследовании, полностью решены.

СПИСОК ИСПОЛЬЗУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Алимов, Ш. А. Алгебра. 8 класс [Текст]: учебник для Общеобразовательных учреждений / Ш. А. Алимов, Ю. М. Колягин, Ю. В.Сидоров. — 19-е изд. — М.: Просвещение, 2012. — 255 с.

2. Башмаков М.И. Уравнения и неравенства. / М.И. Башмаков. – М.: Наука. 1976. – 96 с.

3. Болдырева Т.В. Урок алгебры в 8-м классе. Тема «Неравенства, содержащие модуль». Повторение. [Электронный ресурс] - Режим доступа: http://открытыйурок.рф/статьи/525945/ . - Последнее обновление 21.05.2018.

4. Боровских А.В. Предметные и метапредметные проблемы школьного курса математики. Тема «Неравенства». [Электронный ресурс]/ А.В. Боровских., В.Е. Веревкина// Наука и школа. Московский педагогический государственный университет. – 2015. - №5. – С. 77 – 87. – Режим доступа: https://elibrary.ru/item.asp?id=24852670. - Последнее обновление 19.05.2018.

5. Бурмистрова, Т.А. Алгебра. Сборник рабочих программ. 7 – 9 классы [Текст]: пособие для учителей общеобразовательных организация/ Т.А. Бурмистрова. – 2-е изд., доп. – М.: Просвещение, 2014. – 96 с.

6. Вавилов, В.В. Задачи по математике. Уравнения и неравенства. Справочное пособие. / Вавилов, В.В., Мельников, И.И., Олехник, С.Н., Пасиченко, П.И. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1987. – 240 с.

7. Далингер, В.А. Различные способы решения неравенств вида |f(x)|+|g(x)|>|f(x)+g(x)| [Электронный ресурс]/ В.А. Далингер, Е.А. Пустовит // Ученые записки Забайкальского государственного университета. – 2012. - №6. – С. 124 – 128. – Режим доступа: https://elibrary.ru/item.asp?id=18076619. - Последнее обновление 18.05.2018.

8. Дорофеев, Г.В. Алгебра. 7 класс [Текст]: учебник для общеобразовательных организаций/ Г.В. Дорофеев, С.Б. Суворова, Е.А. Бунимович. – 2-е изд. – М.: Просвещение, 2014. – 287 с.

9. Дорофеев, Г.В. Алгебра. 8 класс [Текст]: учебник для общеобразовательных организаций/Г.В. Дорофеев, С.Б. Суворова, Е.А. Бунимович. – 3-е изд. – М.: Просвещение, 2016. – 320 с.

10. Жанузакова Ж.Т. Способ самостоятельного изучения материала (по учебным листам). [Электронный ресурс] - Режим доступа: http://открытыйурок.рф/статьи/584037/ . - Последнее обновление 20.05.2018.

11. Зудина И.С. Рабочая программа по алгебре 7-9 класс. [Электронный ресурс] – 2015. – Режим доступа: http://spb-school-38.ru/pdf/rp/6-9/23.pdf. - Последнее обновление 17.05.2018.

12. Колягин, Ю.М. Алгебра. 7 класс: учеб. для общеобразоват. организаций / Ю.М. Колягин, М.В. Ткачёва, Н.Е. Фёдорова, М.И. Шабунин.- М.: Просвещение, 2012. – 319 с.

13. Колягин, Ю.М. Алгебра. Методические рекомендации. 8 класс: учеб. для общеобразоват. организаций / Ю.М. Колягин, М.В. Ткачёва, Н.Е. Фёдорова, М.И. Шабунин.- М.: Просвещение, 2017. – 128 с.

14. Колягин, Ю.М. Алгебра. 9 класс: учеб. для общеобразоват. организаций / Ю.М. Колягин, М.В. Ткачёва, Н.Е. Фёдорова, М.И. Шабунин.- М.: Просвещение, 2014. – 304 с.

15. Колягин, Ю.М. Методика преподавания математики в средней школе. Общая методика [Текст]: учеб. пособие для студентов физ.-мат. факультетов пед. вузов / Ю.М. Колягин, В.А. Оганесян, В.Я. Саннинский, Г.Л. Луканкин. – М.: «Просвещение», 1975. – 462 с.

16. Лихачев Б.Т.. Педагогика: Курс лекций [Текст]: учеб. пособие для студентов педагог, учеб. заведений и слушателей ИПК и ФПК. — 4-е изд., перераб. и доп. — М.: Юрайт-М.—7с.. 2001.

17. Лященко, Е.И. Лабораторные и практические работы по методике преподавания математики [Текст]: Учеб. пособие для студентов физ.-мат. спец. пед. ин-тов/ Е.И. Лященко, К.В. Зобкова, Т.Ф. Кириченко и др.; под ред. Е.И. Лященко – М.: Просвещение, 1988. – 223 с.

18. Макарычев, Ю.Н. Алгебра. 7 класс [Текст]: учеб. для общеобразоват. учреждений/ Ю.Н. Макарычев, Н.Г. Миндюк, К.И. Нешков, С.Б. Суворова; под ред. С.А. Теляковского. – М.: Просвещение, 2013. – 256 с.

19. Макарычев, Ю.Н. Алгебра. 8 класс [Текст]: учеб. для общеобразоват. учреждений/ Ю.Н. Макарычев, Н.Г. Миндюк, К.И. Нешков, С.Б. Суворова; под ред. С.А. Теляковского. – М.: Просвещение, 2013. – 287 с.

20. Макарычев, Ю.Н. Алгебра. 8 класс. Углубленное изучение. [Текст]: учеб. для общеобразоват. учреждений/ Ю.Н. Макарычев, Н.Г. Миндюк, К.И. Нешков, И.Е. Феоктистов. – М.: Просвещение, 2010. – 384 с.

21. Макарычев, Ю.Н. Алгебра. 9 класс [Текст]: учеб. для общеобразоват. учреждений/ Ю.Н. Макарычев, Н.Г. Миндюк, К.И. Нешков, С.Б. Суворова; под ред. С.А. Теляковского. – 18-е изд. - М.: Просвещение, 2011. – 271 с.

22. Макарычев, Ю.Н. Алгебра. 9 класс. Учебник для школы и класса с углубленным изучением математики [Текст]: учеб. для общеобразоват. учреждений/ Ю.Н. Макарычев, Н.Г. Миндюк, К.И. Нешков, И.Е. Феоктистов. – М.: Мнемозина, 2006. – 439 с.

23. Макарычев, Ю.Н. Алгебра. Дополнительные главы к шк. учеб. 9 кл. [Текст]: учеб.пособие для учащихся шк. и кл. с углубл. изуч. математики / Ю.Н. Макарычев, Н.Г Миндюк; под ред. Г.В. Дорофеева. – М.: Просвещение, 1997. – 224 с.

24. Мордкович, А.Г. Алгебра. 7 класс. В 2 ч. Ч. 1 [Текст]: учебник для учащихся общеобразовательных учреждений / А.Г. Мордкович. – 17-е изд., доп. – М.: Мнемозина, 2013. – 175 с.

25. Мордкович, А.Г. Алгебра. 8 класс. В 2 ч. Ч. 1 [Текст]: учебник для учащихся общеобразовательных учреждений / А.Г. Мордкович. – 12-е изд., доп. – М.: Мнемозина, 2010. – 215 с.

26. Мордкович, А.Г. Алгебра. Углубленное изучение. 8 класс. В 2 ч. Ч. 1 [Текст]: учебник / А.Г. Мордкович. – 12-е изд., доп. – М.: Мнемозина, 2006. – 256 с.

27. Мордкович, А.Г. Алгебра. Углубленное изучение. 8 класс. В 2 ч. Ч. 2 [Текст]: задачник / А.Г. Мордкович. – 12-е изд., доп. – М.: Мнемозина, 2006. – 286 с.

28. Мордкович, А.Г. Алгебра. 9 класс. В 2 ч. Ч. 1 [Текст]: учебник для учащихся общеобразовательных учреждений / А.Г. Мордкович, П.В. Семенов. – 12-е изд., стер. – М.: Мнемозина, 2010. – 224 с.

29. Мордкович, А.Г. Алгебра. 9 класс. Углубленное изучение. В 2 ч. Ч. 1 [Текст]: учебн. для учащихся общеобразоват. учрежд./ А.Г. Мордкович, Н.П. Николаев. – 3-е изд., перераб. – М.: Мнемозина, 2008. – 255 с.

30. Мордкович, А.Г. Алгебра. 9 класс. Углубленное изучение. В 2 ч. Ч. 2 [Текст]: учебн. для учащихся общеобразоват. учрежд./ А.Г. Мордкович, Н.П. Николаев. – 3-е изд., перераб. – М.: Мнемозина, 2008. – 275 с.

31. Муравин, Г.К. Алгебра. 7 класс [Текст]: учеб. для общеобразоват. учреждений / Г.К. Муравин, К.С. Муравин, О.В. Муравина. – 9-е изд., стереотип. – М.: Дрофа, 2013. – 285 с.

32. Муравин, Г.К. Алгебра. 8 класс [Текст]: учеб. для общеобразоват. учреждений / Г.К. Муравин, К.С. Муравин, О.В. Муравина. – 15-е изд., стереотип. – М.: Дрофа, 2013. – 254 с.

33. Муравин, Г.К. Алгебра. 9 класс [Текст]: учеб. для общеобразоват. учреждений / Г.К. Муравин, К.С. Муравин, О.В. Муравина. – 14-е изд., стереотип. – М.: Дрофа, 2014. – 315 с.

34. Никольский С.М. Алгебра. 7 класс [Текст]: учеб. для общеобразоват. организаций / С.М. Никольский, М.К. Потапов, Н.Н. Решетников, А.В. Шевкин. – М.: Просвещение, 2013. – 287с.

35. Никольский С.М. Алгебра. 8 класс [Текст]: учеб. для общеобразоват. организаций / С.М. Никольский, М.К. Потапов, Н.Н. Решетников, А.В. Шевкин. – М.: Просвещение, 2014. – 301с.

36. Никольский С.М. Алгебра. 9 класс [Текст]: учеб. для общеобразоват. организаций / С.М. Никольский, М.К. Потапов, Н.Н. Решетников, А.В. Шевкин. – М.: Просвещение, 2014. – 335с.

37. Пономаренко Н.Ф. Метод проблемного обучения в современной школе на уроках математики. [Электронный ресурс] - Режим доступа: http://открытыйурок.рф/статьи/ 507497/ . - Последнее обновление 20.05.2018.

38. Потапов М.К. Алгебра. Методические рекомендации. 9 класс: пособие для учителей общеобразовательных организаций / М.К. Потапов, А.В. Шенкин. – М.:Просвещение, 2015. – 191 с.

39. Примерные программы основного общего образования по учебным предметам / ОДОБРЕНО Федеральным учебно-методическим объединением по общему образованию. Протокол заседания от 8 апреля 2015 г. № 1/15.

40. Рурукин А.Н. Поурочные разработки по алгебре: 9 класс / А.Н. Рурукин, И.А. Масленникова, Т.Г. Мишина. – М.: ВАКО, 2011. – 288 с.

41. Рябова С.А. Элективный курс «Абсолютная величина». [Электронный ресурс] - Режим доступа: http://открытыйурок.рф/статьи/582217/ . - Последнее обновление 20.05.2018.

42. Скокова, О.Г. Коллективный способ обучения на уроках математики / О.Г. Скокова // Математика в школе. – 2008. – №6. – С. 47.

43. Сластенин, В.А. Педагогика [Текст]: учеб. пособие для студ. высш. пед. учеб. заведений / В. А. Сластенин, И. Ф. Исаев, Е. Н. Шиянов; Под ред. В.А. Сластенина. - М.: Издательский центр «Академия», 2013. – 576 с.

44. Струкова Т.В. Основные формы учебной деятельности на уроках математики. [Электронный ресурс] - Режим доступа: http://открытыйурок.рф/статьи/591332/ . - Последнее обновление 20.05.2018.

45. Тангиров Х. Э., Хаитова Н. Ф. Использование электронных средств обучения при изучении курса «Алгебра» // Молодой ученый. — 2013. — №4. — С. 34-38. — Режим доступа: https://moluch.ru/archive/51/6635/ (дата обращения: 23.05.2018).

46. Тестов В.А. О некоторых проблемах при изучении неравенств [Электронный ресурс]/ В.А. Тестов // Математический вестник педвузов и университетов Волго-Вятского региона. – 2015. - №17. – С. 279 – 289. – Ре-

жим доступа: https://elibrary.ru/item.asp?id=28213876. - Последнее обновление 15.05.2018.

47. Темербекова, А.А. Методика обучения математике [Текст]: учебное пособие / А.А. Темербекова, И.В. Чугунова, Г.А. Байгонакова. – СПб.: Издательство «Лань», 2015. – 512 с.

48. Федеральный государственный образовательный стандарт основного общего образования: Приказ Мин. образования и науки РФ от 17.12.2010 г. №1897. [Электронный ресурс]. – Режим доступа: http://минобрнауки.рф/документы/938. – Последнее обновление 11.05.2018.

49. Фридман, Л.М. Психолого-педагогические основы обучения математике в школе: Учителю математики о пед. психологии / Л.М. Фридман. – М.: «Просвещение», 1983. – 160 с.

50. Хамедова Н.А. Уравнения и неравенства, содержащие переменную под знаком модуля [Электронный ресурс]/ Н.А. Хамедова // Вестник современной науки. – 2016. - №3-1(15). – С.18 – 20. – Режим доступа: https://elibrary.ru/item.asp?id=25896782. - Последнее обновление 13.05.2018.

51. Almog N., Ilany B. Absolute value inequalities: high school students' solutions and misconceptions [Text] / N. Almog, B. Ilany // 2012. – PP. 1-3.

52. Ciltas A., Tatar E. Diagnostic learning difficulties related to equation and inequality that contain terms with absolute value [Text] / A. Ciltas, E. Tatat // International online journal of educational sciences, 2011. – PP. 461-473.

53. Cvetkovski Z. Inequalities. Theorems, techniques and selected problems [Text] Z. Cvetkovski // Springer, 2012. – PP. 80-83.

54. Michaele Steele J. The Cauchy-Schwarz Master Class [Text] / J. Michaele Steele // An introduce tho the art of mathematical inequalities. Cambridge University Press, 2004.- PP. 19-21.

55. Riasat S. Basic of olimpiad inequalities [Text] / S. Riasat // 2008, - PP. 3-5.

Приложение 1

Таблица 1

Содержание теоретического материала по теме «Неравенства с модулем» в различных учебниках алгебры 7 класса

Автор учебников	Содержание учебного материала
Г.К. Муравин, К.С. Муравин, О.В. Муравина	Сравнение чисел. Понятие неравенства. Знаки неравенства. Координатная прямая. Расстояние между двумя точками на координатной прямой. Понятие модуля числа.
Ю.Н. Макарычев, Н.Г. Миндюк, К.И. Нешков, С.Б. Суворова	Сравнение значений выражений. Понятие неравенства. Строгое и нестрогое неравенство.
Г.В. Дорофеев С.Б. Суворова Е.А. Бунимович Л.В. Кузнецова С.С. Минаева	Координаты и графики. Множества, задаваемые двойным неравенством. Расстояние между точками на координатной прямой. Множество точек на координатной прямой. Графики. Область определения графиков.
С.М. Никольский, М.К. Потапов, Н.Н. Решетников, А.В. Шевкин	Понятие действительного числа. Сравнение действительных чисел. Понятие неравенства. Модуль действительного числа.
А.Г. Мордкович	Теоретический материал по теме не рассматривается
Ю.М. Колягин, М.В. Ткачёва, Н.Е. Фёдорова, М.И. Шабунин	Теоретический материал по теме не рассматривается
А.Г. Мерзляк, В.Б. Полонский, М.С. Якир	Теоретический материал по теме не рассматривается

Таблица 2

Содержание теоретического материала по теме

«Неравенства с модулем» в различных учебниках алгебры 8 класса

Автор учебников	**Содержание учебного материала**
А.Г. Мордкович	Линейные неравенства. Квадратные неравенства. Доказательства неравенств. Приближенные вычисления. Погрешность вычисления (абсолютная погрешность)
Ю.Н. Макарычев, Н.Г. Миндюк, К.И. Нешков, С.Б. Суворова	Числовые неравенства. Свойства числовых неравенств. Сложение и умножение числовых неравенств. Погрешность и точность приближения. Абсолютная погрешность. Относительная погрешность.
Ю.Н. Макарычев, Н.Г. Миндюк, К.И. Нешков С.Б. Суворова (углубленное изучение)	Решение неравенств с одной переменной. Решение неравенств, содержащих переменную под знаком модуля. Геометрическая модель.
Ш.А. Алимов Ю.М. Колягин, М.В. Ткачёва, Н.Е. Фёдорова, М.И. Шабунин	Числовые неравенства. Основные свойства числовых неравенств. Сложение и умножение неравенств. Строгие неравенства. Неравенства с одним неизвестным. Модуль числа. Уравнения и неравенства, содержащие модуль.
С.М. Никольский, М.К. Потапов, Н.Н. Решетников, А.В. Шевкин	Функции и графики. Числовые неравенства. Координатная ось. Модуль числа.
Г.К. Муравин, К.С. Муравин, О.В. Муравина	теоретический материал по теме не рассматривается
Г.В. Дорофеев С.Б. Суворова Е.А. Бунимович Л.В. Кузнецова С.С. Минаева	теоретический материал по теме не рассматривается
А.Г. Мерзляк, В.Б. Полонский, М.С. Якир	теоретический материал по теме не рассматривается

Таблица 3

Содержание теоретического материала по теме «Неравенства с модулем» в различных учебниках алгебры 9 класса

Авторы учебников	**Содержание учебного материала**
А.Г. Мордкович	Рациональные неравенства и их системы. Линейные и квадратные неравенства. Неравенства с модулями. Геометрическое истолкование. Аналитическая модель.
А.Г. Мордкович (углубленное изучение)	Неравенства с одной переменной. Системы и совокупности неравенств. Рациональные неравенства. Неравенства с модулем.
С.М. Никольский, М.К. Потапов, Н.Н. Решетников, А.В. Шевкин	Линейные неравенства с одним неизвестным. Неравенства, содержащие неизвестное под знаком модуля.
Ю.Н. Макарычев, Н.Г. Миндюк. (дополнительные главы)	Решение неравенств, содержащих переменную под знаком модуля. Двойное неравенство. Определение модуля. Неравенства и системы неравенств с переменными под знаком модуля. Графический метод.
А.Г. Мерзляк, В.Б. Полонский, М.С. Якир	теоретический материал по теме не рассматривается
Ю.Н. Макарычев, Н.Г. Миндюк, К.И. Нешкова, С.Б. Суворова.	теоретический материал по теме не рассматривается
Г.К. Муравин, К.С. Муравин, О.В. Муравина	теоретический материал по теме не рассматривается
Г.В. Дорофеев, С.Б. Суворова, Е.А. Бунимович, Л.В. Кузнецова, С.С. Минаева	теоретический материал по теме не рассматривается
Ю.М. Колягин, М.В. Ткачёва, Н.Е. Фёдорова, М.И. Шабунин.	теоретический материал по теме не рассматривается

Таблица 4

Наличие видов неравенств с модулем в учебниках алгебры 7-9 классов

	Ш.А. Алимов и др.	С.М. Никольский и др.	А.Г. Мордкович и др.	А.Г. Мордкович и др. (углубл.)		Ю.Н. Макарычев и др. (углубл.)		Доп.Главы Ю.Н. Макарычев
Виды неравенств с модулем и их систем	*8 класс*	*9 класс*	*9 класс*	*8 класс*	*9 класс*	*8 класс*	*9 класс*	*9 класс*
Неравенства с модулем вида $f\ x\ < b$ или $f(x)\ > b$	+	+	+	+	+	+	+	+
Неравенства с модулем вида $f(x)\ < g(x)$ или $f\ x\ > g(x)$	+	+	-	+	+	-	+	+
Неравенство с модулем вида $f(x)\ < g(x)$ или $f\ x\ > g(x)$	-	-	-	-	-	-	+	-
Неравенство с модулем вида $f(x)\ +\ g(x)\ < b$ или $f(x)\ +\ g(x)\ > b$	-	-	-	+	+	-	+	+
Неравенство с модулем, решаемое с помощью метода замены переменных	-	+	-	-	-	+	+	+
Неравенство с двумя переменными, содержащее знак модуля	-	-	-	-	-	-	+	+
Система неравенств с одной переменной, содержащая неравенство с модулем	-	+	+	-	-	-	+	-
Система неравенств с двумя неизвестными, содержащая неравенство с модулем	-	-	-	-	-	-	+	+

Таблица 5

Количество заданий каждого вида неравенств с модулем, рассматриваемых в учебниках алгебры

	Ш.А. Алимов и др.	С.М. Никольский и др.	А.Г. Мордкович и др.	А.Г. Мордкович и др. (углуб)		Ю.Н. Макарычев и др. (углуб)		Доп.Главы Ю.Н. Макарычев и др.
Виды	*8 класс*	*9 класс*	*9 класс*	*8 класс*	*9 класс*	*8 класс*	*9 класс*	*9 класс*
Неравенства с модулем вида $f\ x\ < b$ или $f(x)\ > b$	10	8	4	4	5	7	8	5
Неравенства с модулем вида $f(x)\ < g(x)$ или $f\ x\ > g(x)$	1	2	-	3	3	-	2	2
Неравенство с модулем вида $f(x)\ < g(x)$ или $f\ x\ > g(x)$	-	-	-	-	-	-	1	-
Неравенство с модулем вида $f(x)\ +\ g(x)\ < b$ или $f(x)\ +\ g(x)\ > b$	-	-	-	2	2	-	1	2
Неравенство с модулем, решаемое с помощью метода замены переменных	-	3	-	-	-	2	2	1
Неравенство с двумя переменными, содержащие знак модуля	-	-	-	-	-	-	5	9
Система неравенств с одной переменной, содержащие неравенство с модулем	-	3	4	-	-	-	1	-
Система неравенств с двумя неизвестными, содержащие знак модуля	-	-	-	-	-	-	6	10

Таблица 6

Распределение часов на изучение различных видов неравенств с модулем в учебниках алгебры 7-9 классов

УЧЕБНИКИ АЛГЕБРЫ, 8 КЛАСС

Название тем учебника	Рассматриваемые виды неравенств с модулем	Кол-во часов
Ш.А. Алимов и др.		
§ 10. «Уравнения и неравенства, содержащие модуль».	1. Неравенства с модулем вида $f(x) < b$ или $f(x) > b$ 2. Неравенства с модулем вида $f(x) < g(x)$ или $f\ x\ > g(x)$	1
А.Г. Мордкович и др. (для углубленного изучения)		
§ 34. «Модуль действительного числа».	1. Неравенства с модулем вида $f(x) < b$ или $f(x) > b$ 2. Неравенства с модулем вида $f(x) < g(x)$ или $f\ x\ > g(x)$ 3. Неравенство с модулем вида $f(x) + g(x) < b$ или $f(x) + g(x) > b$	2
Ю.Н. Макарычев и др. (для углубленного изучения)		
§13 п.42. «Решение неравенств, содержащих переменную под знаком модуля».	1. Неравенства с модулем вида $f(x) < b$ или $f(x) > b$ 2. Неравенство с модулем, решаемое с помощью метода замены переменных	2

УЧЕБНИКИ АЛГЕБРЫ, 9 КЛАСС

Название тем учебника	Типы задач	Кол-во часов
С.М. Никольский и др.		
Гл. I, § 1 п.1.5 «Неравенства, содержащие неизвестное под знаком модуля».	1. Неравенства с модулем вида $f(x) < b$ или $f(x) > b$ 2. Неравенства с модулем вида $f(x) < g(x)$ или $f\ x\ > g(x)$	2
Гл. I, § 1 п.3.4 «Системы рациональных неравенств».	1. Система неравенств с одной переменной, содержащие неравенство с модулем	2
Гл. I, § 1 п.3.5 «Замена неизвестного при решении неравенств».	1. Неравенство с модулем, решаемое с помощью метода замены переменных	1
А.Г. Мордкович и др.		
Гл. I, § 1 «Линейные и квадратные неравенства».	1. Неравенства с модулем вида $f(x) < b$ или $f(x) > b$	3
Гл. I, § 3 «Системы рациональных неравенств».	1. Система неравенств с одной переменной, содержащие неравенство с модулем	5
А.Г. Мордкович и др. (для углубленного изучения)		
Гл. I, «Неравенства с модулем».	1. Неравенства с модулем вида $f(x) < b$ или $f(x) > b$ 2. Неравенства с модулем вида $f(\square) < g(x)$ или $f\ x\ > g(x)$ 3. Неравенство с модулем вида $f(x) + g(x) < b$ или $f(x) + g(x) > b$	4

Продолжение Таблицы 6

Ю.Н. Макарычев и др. (для углубленного изучения)		
§6, п.15. «Решение неравенств с переменной под знаком модуля».	1. Неравенства с модулем вида $f(x) < b$ или $f(x) > b$ 2. Неравенства с модулем вида $f(x) < g(x)$ или $f\ x > g(x)$ 3. Неравенство с модулем вида $f(x) + g(x) < b$ или $f(x) + g(x) > b$ 4. Неравенство с модулем, решаемое с помощью метода замены переменных 5. Система неравенств с одной переменной, содержащие неравенство с модулем 6. Неравенство с модулем вида $f(x) < g(x)$ или $f\ x > g(x)$	6
§9, п.26. «Неравенства с двумя переменными содержащие знак модуля».	1. Неравенство с двумя переменными, содержащие знак модуля 2. Система неравенств с двумя неизвестными, содержащие знак модуля	2
Дополнительные главы к учебнику Ю.Н. Макарычев и др. (для углубленного изучения)		
§7, п.19. «Решение неравенств, содержащих переменную под знаком модуля».	1. Неравенства с модулем вида $f(x) < b$ или $f(x) > b$ 2. Неравенства с модулем вида $f(x) < g(x)$ или $f\ x > g(x)$ 3. Неравенство с модулем вида $f(x) + g(x) < b$ или $f(x) + g(x) > b$ 4. Неравенство с модулем, решаемое с помощью метода замены переменных 5. Система неравенств с одной переменной, содержащие неравенство с модулем	2
§12, п.29. «Неравенства и системы неравенств с переменными под знаком модуля»	1. Неравенство с двумя переменными, содержащие знак модуля 2. Система неравенств с двумя неизвестными, содержащие знак модуля	2