МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Тольяттинский государственный университет»

Институт математики, физики и информационных технологий
(наименование института полностью)
Кафедра «Высшая математика и математическое образование»
(наименование кафедры)

44.03.01 «Педагогическое образование»
(код и наименование направления подготовки, специальности)
«Математика»
(направленность (профиль)/специализация)

БАКАЛАВРСКАЯ РАБОТА

на тему **«МЕТОДИКА ОБУЧЕНИЯ РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ НА ПОСТРОЕНИЕ ГРАФИКОВ РАЦИОНАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ В КУРСЕ АЛГЕБРЫ ОСНОВНОЙ ШКОЛЫ»**

Студент Е.В. Легаева ____________
(И.О. Фамилия) (личная подпись)

Руководитель Н.С. Симонова ____________
(И.О. Фамилия) (личная подпись)

Консультант С.А. Гудкова ____________
(И.О. Фамилия) (личная подпись)

Допустить к защите

Заведующий кафедрой д.п.н., профессор Р.А. Утеева ____________
(ученая степень, звание, И.О. Фамилия) (личная подпись)

«____»__________2018 г.

Тольятти 2018

АННОТАЦИЯ

Целью бакалаврской работы является разработка методики обучения решению задач на построение графиков рациональных функций в курсе алгебры основной школы.

Изучение поведения рациональных функций и построение их графиков является важным разделом математики. Свободное владение техникой построения графиков часто помогает решать многие задачи и порой является единственным средством их решения. Кроме того, умение строить графики рациональных функций представляет большой самостоятельный интерес.

Бакалаврская работа состоит из введения, двух глав, восьми параграфов, заключения и списка литературы.

Во введении приведены основные характеристики исследования: актуальность, проблема, объект, предмет, цель, задачи и методы исследования.

Глава I бакалаврской работы посвящена теоретическим основам обучения учащихся решению задач на построение графиков рациональных функций. Рассмотрены основные понятия и виды рациональных функций. Сформулированы цели и задачи обучения данной теме. Выполнен анализ теоретического и задачного материала по теме исследования.

В Главе II представлены методические рекомендации по обучению решению задач на построение графиков рациональных функций в курсе алгебры основной школы. Выполнен анализ задач основного государственного экзамена по теме исследования. Составлена система задач по теме «Построение графиков рациональных функций» в курсе алгебры основной школы.

Список литературы содержит 41 наименование.

Объем работы составляет 57 страниц.

ABSTRACT

The aim of the bachelor's work is to develop a methodology for teaching the solution of problems on the designing the of graphs of rational functions in the course of the algebra of the secondary school.

The study of the behavior of rational functions and the construction of their graphs is an important section of mathematics. Free knowledge of charting techniques often helps to solve many problems and sometimes is the only way to solve them. In addition, the ability to construct graphs of rational functions is of great independent interest.

Bachelor's work consists of an introduction, two chapters, eight paragraphs, a conclusion and a bibliography.

The introduction gives the main characteristics of the study: relevance, problem, object, subject, purpose, objectives and methods of research.

The first chapter of the bachelor's work is devoted to the theoretical basis of training of pupils to the decision of problems on construction of schedules of rational functions. The basic concepts and types of rational functions are considered. The analysis of theoretical and objective material on the research topic is performed.

The second chapter of the bachelor's work presents methodological recommendations for teaching the solution of problems on the construction of graphs of rational functions in the Algebra course of the basic school. The analysis of the for secondary school exam tasks on the research topic is performed. A system of tasks on the topic "Construction of graphs of rational functions" in the course of the algebra of the basic school was compiled.

In conclusion, the main results, conclusions and results of the research are formulated.

The list of literature contains 41 items.

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Актуальность исследования. Изучение поведения функций и построение их графиков является важным разделом математики. Свободное владение техникой построения графиков часто помогает решать многие задачи и порой является единственным средством их решения. Кроме того, умение строить графики функций представляет большой самостоятельный интерес. Всегда, когда нужно выяснить общий характер поведения функции, обнаружить ее особенности, график в силу своей наглядности является незаменимым.

При изучении функций у учащихся формируется представление о математике как о методе познания действительности, позволяющем описывать и изучать реальные процессы и явления, а также развитие умений использовать функционально-графические представления для решения математических задач, для описания и анализа реальных зависимостей.

«*Рациональной функцией*, - отмечает М.И. Башмаков, называется функция, значения которой могут быть вычислены по формуле $y = \frac{P(x)}{Q(x)}$, где *P(x)* и *Q(x)* – многочлены» [4, С.28].

Действительно, график функции есть изображение нашего понимания того, как ведет себя функция. Для этого необходимо знать элементарные функции, их свойства и графики, владеть методикой построения графиков.

Задачи по теме *«Построение графиков рациональных функций»* включены в основной государственной экзамен: часть 1 включает в себя задание №10, часть 2 – задание №23.

Проблема исследования: выявление методических особенностей обучения решению задач на построение графиков рациональных функций в курсе алгебры основной школы.

Объектом исследования является процесс обучения алгебре учащихся 7 – 9 классов.

Предмет исследования: методические особенности обучения решению задач на построение графиков рациональных функций в курсе алгебры основной школы.

Цель исследования заключается в разработке методики обучения решению задач на построение графиков рациональных функций в курсе алгебры основной школы.

Задачи исследования:

1. Выделить виды рациональных функций.
2. Рассмотреть свойства рациональных функций.
3. Выполнить анализ содержания программы и школьных учебников по теме исследования.
4. Проанализировать задачный материал по теме исследования.
5. Исследовать некоторые рациональные функции и построить их графики.
6. Провести анализ задач ОГЭ по теме исследования.
7. Разработать системы задач по теме «Построение графиков рациональных функций» в курсе алгебры основной школы.
8. Сформулировать методические рекомендации по обучению решению задач на построение графиков рациональных функций в курсе алгебры основной школы.

Для решения поставленных задач были использованы следующие **методы исследования:** изучение литературы по теме исследования, самостоятельное решение задач.

Теоретическая значимость исследования состоит в том, что в нем выявлены методические особенности обучения решению задач на построение графиков рациональных функций в курсе алгебры основной школы.

Практическая значимость исследования заключается в том, что в ней представлены системы задач по теме «Построение графиков рациональных функций» в курсе алгебры основной школы.

На защиту выносятся

1. Методические рекомендации по обучению решению задач на построение графиков рациональных функций в курсе алгебры основной школы.

2. Системы задач по теме «Построение графиков рациональных функций» в курсе алгебры основной школы.

Бакалаврская работа состоит из введения, двух глав, восьми параграфов, заключения и списка литературы.

Во введении приведены основные характеристики исследования: актуальность, проблема, объект, предмет, цель, задачи и методы исследования.

Глава I бакалаврской работы посвящена теоретическим основам обучения учащихся решению задач на построение графиков рациональных функций. Рассмотрены основные понятия и виды рациональных функций. Сформулированы цели и задачи обучения данной теме. Выполнен анализ теоретического и задачного материала по теме исследования.

В Главе II бакалаврской работы представлены методические рекомендации по обучению решению задач на построение графиков рациональных функций в курсе алгебры основной школы. Выполнен анализ задач ОГЭ по теме исследования. Составлена система задач по теме «Построение графиков рациональных функций» в курсе алгебры основной школы.

В заключении сформулированы основные результаты, выводы и итоги проведенного исследования.

Список литературы содержит 41 наименование.

В Приложении представлены ответы и указания к решению задач из п. 4. «Анализ задачного материала» и п. 7. «Системы задач» по теме «Построение графиков рациональных функций».

ГЛАВА I. ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ОБУЧЕНИЯ РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ НА ПОСТРОЕНИЕ ГРАФИКОВ РАЦИОНАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ В КУРСЕ АЛГЕБРЫ ОСНОВНОЙ ШКОЛЫ

§ 1. Понятие и виды рациональных функций в курсе алгебры основной школы

Рациональной функцией, отмечает М.И. Башмаков, называется «функция, значения которой могут быть вычислены по формуле $y = \frac{P(x)}{Q(x)}$, где *P(x)* и *Q(x)* – многочлены» [4, С.28].

А.С. Ярский в своей статье «Числа и функции» [35, С.15] вводит аналогичное определение рациональной функции: функция $y = f(x)$ называется *рациональной*, если она представима в виде отношения многочленов $y = \frac{P}{Q}$, $P, Q \in \boldsymbol{R}[x]$.

Множество всех рациональных функций обозначается символом $\boldsymbol{R}(x)$.

Шнейдер В.Е. подразделяет рациональные функции на два вида [34, С.27]: *целые рациональные функции; дробные рациональные функции*.

Такую же классификацию приводит Башмаков М. И. [4, С.28], и отмечает, что (целая рациональная функция является частным случаем дробно-рациональной функции, когда $Q(x) -$ постоянная).

Определение 1 [34, С.29]. *Целой рациональной функцией* или многочленом называется функция вида

$$y = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n,$$

где $n -$ натуральное число, называемое степенью многочлена, а $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, a_n -$ действительные числа, называемые коэффициентами многочлена.

Примерами *целых рациональных функций* являются: *линейная функция*;

прямая пропорциональность (частный случай линейной функции); *квадратичная функция*; *кусочно-линейная функция; степенная функция*

$$y = x^n \ (n \in N).$$

Определение 2[34, С. 30]. *Дробной рациональной функцией* называется отношение двух многочленов $y = \frac{P(x)}{Q(x)}$.

Примером *дробно-рациональной функции* является *функция обратной пропорциональности.*

Для определения математических терминов, которые приведены выше, обратимся к школьным учебникам алгебры 7-9 классов.

Определение 3 [11, С. 75]. «Функцию, которую можно задать формулой вида $y = kx + b$, где $x -$ независимая переменная, k и $b -$ некоторые числа, называют *линейной*».

Данное определение приводит автор учебника алгебры для 7 класса Макарычев Ю. Н.

Определение 4 [11, С.70]. Линейную функцию, которую задают формулой $y = kx$, где $k \neq 0$, называют *прямой пропорциональностью*.

Определение 5 [13, С.29]. «*Квадратичной функцией* называется функция, которую можно задать $y = ax^2 + bx + c$, где $x -$ независимая переменная, a, b и $c -$ некоторые числа, причем $a \neq 0$».

Функция $y = ax^2$ – частный случай квадратичной функции.

Определение 6 [12, С.41]. «*Обратной пропорциональностью* называется функция, которую можно задать формулой вида $y = \frac{k}{x}$, где $x -$ независимая переменная и k – число не равное нулю».

Изобразим схематически классификацию рациональных функций в курсе алгебры основной школы (схема 1).

Схема 1

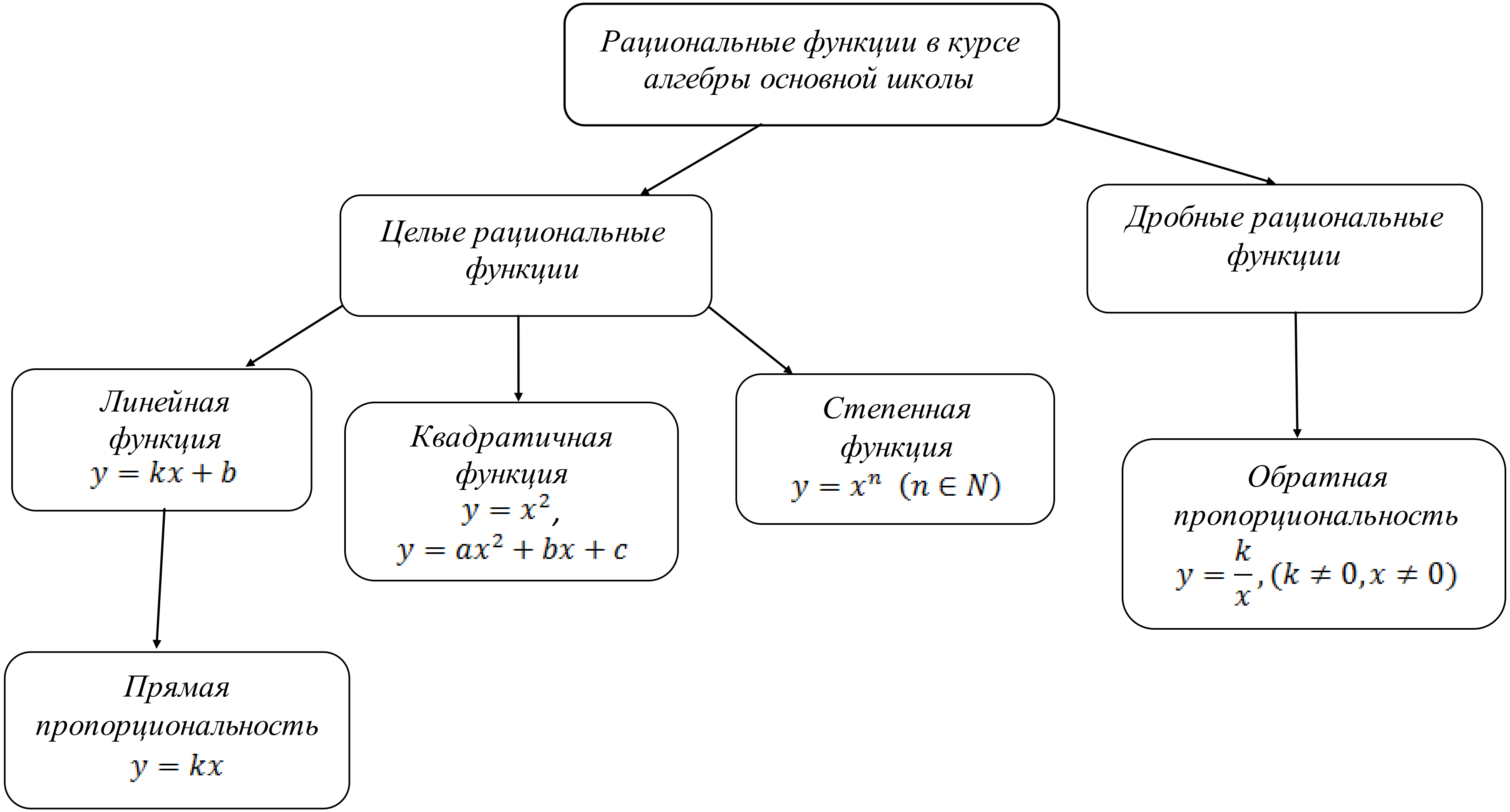


Рис. 1. Классификация рациональных функций в курсе алгебры основной школы

§2. Свойства рациональных функций

Свойства рациональных функций можно изучать по некоторой общепринятой *схеме исследования*, которая применяется для любых функций. Эту схему можно представить, как последовательность проверки или выяснения свойств функции [41, С.256].

Обратимся к примерному плану исследования функции, описанному О. Таракановой.

«*Примерный план исследования функции* $y = f(x)$:

1. Находят область определения функции f.

2. Находят множество значений функции.

3. Исследуют функцию на четность или нечетность.

4. Находят точки пересечения графика функции с осью абсцисс.

5. Точки, найденные в п. 4, разбивают ось абсцисс на несколько промежутков – это промежутки знакопостоянства функции f, находят знак функции на каждом из этих промежутков.

6. Находят асимптоты графика.

7. Исследуют функцию на возрастание и убывание.

8. Находят точки максимума и минимума функции» [32, С.9-10].

Башмаков М. И. предлагает следующую «*схему изучения свойств рациональных функций*:

1. Область определения функции.

2. Нули функции, или корни.

3. Промежутки постоянного знака функции.

4. Проверка функции на четность.

5. Область значений функции.

6. Промежутки возрастания и убывания функции.

7. Экстремумы функции.

8. Асимптоты графика» [4, С. 48-51].

Заметим, что автор указывает первых пять свойств функции, которые изучают по общепринятой схеме исследования [4]. Также приводит еще несколько свойств с указанием на то, что данные свойства подробно изучаются в курсе математики старшей школы.

Приведем определения и комментарии к некоторым этапам исследования свойств рациональных функций.

Для рациональной функции вида $y = \frac{P(x)}{Q(x)}$ *областью определения* будет совокупность всех чисел x, кроме тех, для которых $Q(x) = 0$. Корни знаменателя $Q(x)$ называются *особыми точками рациональной функции*.

Определение 7 [4, С.49]**.** Нули функции – это точки, где функция обращается в нуль. Для рациональной функции – это корни числителя $P(x)$, входящие в область определения функции.

Для нахождения промежутков знакопостоянства функции, указывает Башмаков М.И., решают неравенства вида $f(x) > 0$ (или < 0). Корни числителя и знаменателя рациональной функции разбивают числовую ось на промежутки, на каждом из которых функция сохраняет постоянный знак. При переходе через корень числителя или знаменателя знак функции меняется, если этот корень не является кратным. Если корень является кратным, то знак функции может либо смениться, либо сохраниться. Это зависит от того, будет ли кратность корня нечетным или четным числом.

График функции может быть симметричным. Простейшие виды симметрии имеют четные и нечетные функции.

Определение 8 [13, С.112]**.** «Функция $y = f(x)$ называется *четной*, если выполняется тождество $f(-x) = f(x)$. График четной функции симметричен относительно оси ординат, потому что симметричные точки $P(x; y)$ и $P'(-x; y)$ одновременно принадлежат или не принадлежат графику четной функции».

Определение 9 [13, С.114]. Функция $y = f(x)$ называется *нечетной*, если выполняется тождество $f(-x) = -f(x)$. График любой нечетной функции *симметричен относительно начала координат*.

Под *областью значений функции* понимается *«множество всех чисел, являющихся значениями функции, т.е. таких чисел* a*, для которых разрешимо уравнение* $f(x) = a$*»* [4, С.51]. Автор отмечает, что «область значений лучше определять по графику».

Выделив свойства рациональных функций можно проводить их исследование, о чем и пойдет речь ниже, в §5.

§ 3. Анализ содержания теоретического материала по теме «Построение графиков рациональных функций»

В данном параграфе выполним анализ содержания теоретического материала по теме исследования в следующих учебниках [1, 2, 3, 19, 20, 21, 24, 25, 26, 27, 28, 29]. Замечаем, что порядок, содержание и объём тем различен. Отличительна и основная терминология.

Базовые знания (знакомые из школьного курса математики 5-6 классов): числовые и буквенные выражения; квадрат и куб числа; понятия формулы и уравнения; представление натуральных чисел на координатном луче; представление дробей на координатном луче; прямые и обратные пропорциональные зависимости; понятие рациональных чисел; координатная плоскость.

Вводимые (новые) знания: линейные уравнения; понятие линейной функции $y = kx$ и ее график, взаимное расположение графиков линейной функции; степень с натуральным показателем; функция $y = kx^2$ ее свойства и график; введение записи $y = f(x)$; исследование функций на монотонность; графики функций при решении уравнений, систем и неравенств.

В Таблице 1 представим анализ теоретического содержания учебников алгебры 7 класса различных авторов.

Таблица 1

Анализ содержания теоретического материала «Построение графиков рациональных функций» в различных учебниках алгебры 7 класса

Авторы учебников	**Содержание учебного материала**
Ш. А. Алимов, Ю. М. Колягин, Ю. В. Сидоров и др. [1]	Прямоугольная система координат на плоскости. Функция. Функция $y = kx$ и ее график. Линейная функция и ее график.
А. Г. Мордкович [19]	Координатная плоскость. Линейное уравнение с двумя переменными и его график. Линейная функция и ее график. Линейная функция $y = kx$. Взаимное расположение графиков линейных функций. Функция $y = x^2$ и ее график. Математическая запись $y = f(x)$.
Г. К. Муравин, К. С. Муравин, О. В. Муравина [24]	Понятие функции. Таблица значений и график функции. Функция $y = kx$ и ее график. Определение линейной функции и ее график. Линейное уравнение с двумя переменными и его график.
С. М. Никольский, М. К. Потапов, Н. Н. Решетников, А. В. Шевкин [27]	Понятие рациональных выражений.

При рассмотрении учебников алгебры Г. К. Муравина, О. В. Муравиной [24] и Алимова Ш. А., Колягина Ю. М. [1], вводится понятие функции и способы ее задания, определение линейной функции и ее график. В учебнике А. Г. Мордковича [19] помимо определения линейной функции, вводится понятие функции вида $y = x^2$ и ее график.

В учебнике С. М. Никольского [27] авторы не формулируют какие-либо понятия о функциях в 7 классе, но вводят понятие *рациональных выражений*. Начиная с 8 класса – вводится и понятие функции, понятие линейной, квадратичной и дробно-линейной функций, а также функций вида $y = [x]$ и $y = \{x\}$.

Главной функцией для изучения в курсе алгебры 7 класса является *линейная функция*.

Ш. А. Алимов [1] на изучение темы «Линейная функция и ее график» отводит 11 часов [5, С.29]. А. Г. Мордкович [19] и Г. К. Муравин [24] на изучение этой темы отводят по 13 часов [5, С.56]. Такой объём часов, отводимый для изучения данной темы, возможно, разъясняется тем, что помимо изучения понятия и построения графика линейной функций, авторы рассматривают и решение систем уравнений при помощи графического способа. В Таблице 2 (см. ниже) показан анализ содержания теоретического материала «Построение графиков рациональных функций» в различных учебниках алгебры 8 класса. Основной функцией для изучения в курсе алгебры 8 класса является *квадратичная функция*.

Таблица 2

Анализ содержания теоретического материала «Построение графиков рациональных функций» в различных учебниках алгебры 8 класса

Авторы учебников	**Содержание учебного материала**
Ш. А. Алимов, Ю. М. Колягин, Ю. В. Сидоров и др. [2]	Понятие квадратичной функции. Функции $y = x^2$, $y = ax^2$ и $y = ax^2 + bx + c$. Построение графика квадратичной функции. Решение квадратного неравенства при помощи графика квадратичной функции. Исследование квадратичной функции.
А. Г. Мордкович [20]	Функции $y = kx^2$, $y = \frac{k}{x}$, $y = \|x\|$ и $y = \bar{x}$. Асимптоты. Построение графиков функций $y = f(x + l)$, $y = f(x) + m$ и $y = f(x + l) + m$, по известному графику функции $y = f(x)$. Функция $y = ax^2 + bx + c$, ее свойства и график. Исследование функций на монотонность.
Г. К. Муравин, К. С. Муравин, О. В. Муравина [25]	Аргумент. График функции. Область определения функции. Функции $y = x^2$, $y = \frac{k}{x}$. Свойства функции: область определения, область значений, возрастание и убывание.
С. М. Никольский, М. К. Потапов, Н. Н. Решетников, А. В. Шевкин [28]	Понятие функции и ее графика. Функции $y = x$, $y = x^2$, $y = \frac{1}{x}$ и их графики. Линейная функция: прямая пропорциональность, функции $y = \|x\|$, $y = [x]$, $y = \{x\}$ и их графики. Функции $y = ax^2$ $(a > 0)$, $y = ax^2$ $(a \neq 0)$ и $y = a(x - x_0)^2 + y_0$. Квадратичная функция и её график. Обратная пропорциональность. Функции $y = \frac{k}{x} (k > 0)$ и $y = \frac{k}{x} (k < 0)$. Дробно – линейная функция и её график. Графический способ исследования системы двух уравнений первой степени с двумя неизвестными.

В учебниках Ш. А. Алимова [2] и Г. К. Муравина [25] на изучение данной темы отводится по 14 часов, а у автора А. Г. Мордковича [20] – 17 часов. В учебнике С. М. Никольского [28] в 8 классе вводится понятие функции и её график. Автор в курсе алгебры 8 класса вводит сразу несколько главных функций. Первоначально вводит понятия и графики линейной функции и прямой пропорциональности, позже вводит понятия квадратичной и дробно – линейной функций. Кроме этого, в этом учебнике рассматриваются примеры решения систем двух уравнений с двумя неизвестными первой и второй степеней при помощи графического способа.

В учебниках Ш. А. Алимова [2] и Г. К. Муравина [25] впервые рассматривается функция вида $y = x^2$, вводится ее понятие и график. Рассматриваются свойства функции: область определения, область значения, возрастание и убывание.

А. Г. Мордкович в своем учебнике [20] знакомит учащихся не только с квадратичной функцией и функцией обратной пропорциональности, но и с функциями вида $y = |x|$ и $y = \bar{x}$. Рассматривает кусочные функции и описывает их свойства на основе графических представлений, показывает простейшие преобразования графика (параллельный перенос графика $y = f(x)$ вдоль осей x и y на $|l|$ единиц), вводит понятие выпуклости и ограниченности функции. Автор на изучение функций вида $y = kx^2$ и $y = \frac{k}{x}$ отводит по 6 часов, а на изучение функций $y = |x|$ и $y = \bar{x}$ – по 2 часа.

В Таблице 3, ниже, показан анализ содержания теоретического материала «Построение графиков рациональных функций» в различных учебниках алгебры 9 класса.

Обратимся к учебнику Ш. А. Алимова и др. [3], продолжая изучение квадратичной функции (с понятием и графиком которой учащиеся уже знакомы из курса алгебры 8 класса) автор вводит основные свойства функции: область определения и область значений функции; возрастание и убывание функции; четность и нечетность функции.

Таблица 3

Анализ содержания теоретического материала «Построение графиков рациональных функций» в различных учебниках алгебры 9 класса

Авторы учебников	**Содержание учебного материала**
Ш. А. Алимов, Ю. М. Колягин, Ю. В. Сидоров и др. [3]	Область определения функции. Возрастание и убывание функции, её четность и нечетность. Функция вида $y=\frac{k}{x}$.
А. Г. Мордкович [21]	Определение числовой функции, а также область определения и область значений этой функции. Способы задания функции. Основные свойства функций (многие из них были рассмотрены автором в курсе алгебры 7-8 классов). Определения четной и нечетной функций. Функция вида $y=x^n\ (n\in N)$, их свойства и графики. Функция вида $y=x^{-n}\ (n\in N)$, их свойства и графики.
Г. К. Муравин, К. С. Муравин, О. В. Муравина [26]	Применение функций к решению уравнений, а также неравенств. Функции вида $y=ax^2, y=a(x+p)^2, y=ax^2+q,\ y=ax^2+bx+c,$ их свойства и графики. Функция $y=x^n\ (n\in N)$.
С. М. Никольский, М. К. Потапов, Н. Н. Решетников, А. В. Шевкин [29]	Применение графиков к решению неравенств первой степени с одним неизвестным. Свойства и график функции $y=x^n, x\geq 0$. Функция $y=x^{2m}$, ее свойства и график. Функция $y=x^{2m+1}$, ее свойства и график.

Квадратичная функция и ее свойства рассматриваются в главе номер 3, имеющая название «Глава III. Степенная функция». Данная глава делится на параграфы. В каждом параграфе при рассмотрении свойств квадратичной функции приведены как примеры, так и задачный материал на закрепление изученных свойств. Автор на изучение свойств функции отводит 17 часов.

При рассмотрении теоретического материала в учебнике А.Г. Мордковича [21], можно сделать вывод, что автор представляет объемный материал для изучений свойств как квадратичной функции, так и функции вида $y=x^{-n}\ (n\in N)$. В главе 3, под названием «Глава III. Числовые функции», представлены 7 параграфов на изучение основных свойств функций. Автор вводит обозначения $D(f)$ – область определения функции и $E(f)$ – область значений функции, рассматривает способы задания функции: графический, табличный, аналитический и словесный.

В учебнике алгебры 9 класса Г.К. Муравина и О.В. Муравиной [26] изучаются функции вида

$$y = ax^2, y = a(x+p)^2, y = ax^2 + q,\ y = ax^2 + bx + c,$$

их свойства и графики. На их изучение в учебнике данных авторов отводится 10 часов.

При изучении свойств функций в приведенных учебниках, замечаем, что выстраивается определенный порядок определения свойств [3, С.75]: 1) область определения; 2) нули функции; 3) четность или нечетность функции; 4) промежутки знакопостоянства; 5) область значений.

По Таблице 4, ниже, которая составлена на основе пособия Т.А. Бурмистровой [5], видно, что по базисному учебному плану на изучение данных тем в учебниках алгебры 7 – 9 классов отводится на 3 – 4 часа меньше, чем для классов с повышенным уровнем математической подготовки учащихся.

Таблица 4

Количество часов на изучение темы «Построение графиков рациональных функций» в учебниках алгебры 7-9 класса основной школы

Авторы учебников	По базисному учебному плану			Для классов с повышенным уровнем математической подготовки		
	линейная функция	*квадра-тичная функция*	*свойства квадра-тичной функции*	*линейная функция*	*квадра-тичная функция*	*свойства квадратичной функции*
Ш. А. Алимов, Ю. М. Колягин и др.	11	14	15	13	18	19
А. Г. Мордкович	13	17	17	18	24	22
Г. К. Муравин, К. С. Муравин, О. В. Муравина	12	14	16	14	19	20
С. М. Никольский.	9	9	15	11	10	24

Проанализировав учебники алгебры разных авторов, замечаем, что порядок, содержание и объём тем различен, но везде прослеживается определенный порядок изучения тем. Например, в 7 классе основной функцией для изучения является *линейная функция и ее график* во всех приведенных учебниках. В 8 классе многие авторы вводят понятие *квадратичной функции и построение ее графика*, а в 9 классе изучаются основные *свойства квадратичной функции*.

§ 4. Анализ задачного материала по теме «Построение графиков рациональных функций»

Для анализа задачного материала по теме исследования, обратимся к учебникам [3, 4, 13].

Проанализируем учебник алгебры Ш.А. Алимова и др. [3]. Данный учебник содержит в себе теоретическую и практическую части. О теоретической части речь шла в §3, в данном параграфе рассмотрим практическую часть.

Задания разделяются на: *обязательные; дополнительные (более сложный материал); трудные; занимательные; задания «Проверь себя».*

В заданиях обязательного уровня, авторы предлагают следующие задачи на «Построение графиков рациональных функций»:

Задача 1 [3, С. 54]. Функция задана формулой $y(x) = \frac{x+5}{x-1}$.

1) Найти $y(-2), y(0), y\left(\frac{1}{2}\right), y(3)$.

2) Найти значение x, если $y(x) = -3,\ y(x) = -2,\ y(x) = 19$.

Задача 2 [3, С. 54]. Найдите область определения функции $y = \frac{2x-3}{x-3}$.

Задача 3 [3, С. 61]. «Показать, что функция $y = \frac{x^2+x-1}{x+4}$ не является четной и не является нечетной».

Задача 4 [3, С. 66]. Построив графики функций, приближенно найти точки их пересечения $y = \frac{3}{x}$, $y = x + 1$.

В обязательной части заданий в основном приведены задачи на:

- *нахождение значений переменной* x*, если известен* y*;*

- *нахождение точек пересечения графиков по готовым чертежам;*

- *исследования какого-либо из свойств рациональных функций.*

Приведем примеры задач из дополнительной части:

Задача 5 [3, С. 55]. Принадлежит ли точка $(-2; 1)$ графику функции $y = \frac{x^2+3}{x-1}$.

Задача 6 [3, С. 66]. «Постройте график функции $y = \frac{3}{1-x} + 1$».

Задача 7 [3, С. 154]. «Постройте график функции $y = \frac{1}{|x-1|}$».

В дополнительной части заданий структура задач усложняется:

- *требуется построить график данной функции;*

- *по данному графику, исследовать некоторые свойства.*

Задачи из части «трудных»:

Задача 8 [3, С. 58]. «Доказать, что функция $y = \frac{1}{x^2+1}$ убывает на промежутке $x \geq 0$ и возрастает на промежутке $x \leq 0$».

Задача 9 [3, С. 72]. Постройте график функции и выясните ее свойства $y = \frac{1}{(x-1)^3} - 2$.

«Трудная» часть заданий требует построение графиков функций, и при их помощи доказывать некоторые свойства рациональных функций.

Заметим, что в представленном учебнике число заданий в каждом номере унифицировано, т.е. содержат одну, две, четыре и шесть цифр; представлены задачи разного уровня; большое количество однотипных задач.

Теперь обратимся к учебнику Ю.Н. Макарычева и др. [13]. Практическая часть учебника состоит из дифференцированной системы упражнений, содержащей задания для обязательного уровня, задания для домашней работы, а также в конце учебника приводится ряд задач повышенной трудности.

В заданиях обязательного уровня, к уже имеющимся типам задач, представленным в учебнике Ш.А. Алимова и др. [3], добавляются задания типа:

- *приведение примера функции по уже известному какому-либо свойству (пример см. ниже);*

- *схематическое построение графика функции и иллюстрирование на нем установленных свойств;*

- *достроение графика по его части.*

Приведем примеры задач этих типов:

Задача 10 [13, С.7]. «Приведите пример какой-нибудь функции, областью определения которой является: а) множество всех чисел; б) множество всех чисел кроме 7».

Задача 11 [13, С.15]. «Начертите график какой-нибудь функции, нулями которой служат числа: а) – 3 и 3; б) – 4, 0 и 2; в) – 3, 2, 1 и 5».

Задача 12 [13, С.16]. «При каких значениях x функция $y = f(x)$ обращается в нуль, принимает положительные и отрицательные значения, если $f(x) = 30x + 10$? Начертите схематически график функции и проиллюстрируйте на нем установленные свойства».

Задача 13 [13, С.115]. «На рисунке 1 изображена часть графика некоторой функции, область определения которой – промежуток [- 2; 2]. Постройте график этой функции, зная, что она является:

а) четной функцией; б) нечетной функцией.

Найдите нули функции и промежутки, в которых функция принимает положительные значения и в которых она принимает отрицательные значения».

Приведем примеры задач повышенной трудности:

Задача 14 [13, С.15]. Найдите нули функции (если они существуют) $y = \frac{4+2x}{x^2+5}$.

Задача 15 [13, С.51]. Функция задана формулой $y = \frac{1}{x^2+1}$. Пересекает ли ее график ось x? Ось y?

Задача 16 [13, С.52]. Постройте график функции $y = \frac{6}{|x|}$.

Задача 17 [13, С.24]. Чем отличаются графики функций

$$y = x - 4 \quad \text{и} \quad y = \frac{x^2-6x+8}{x-2}\ ?$$

Задача 18 [13, С.220]. Функция $y = f(x)$ задана формулой $y = \frac{6-2x}{7}$. При каких значениях аргумента x: а) $f(x) > 0$; б) $f(x) < 0$?

Блок заданий повышенной трудности требует: построение графиков функций и описание их свойств; сравнение графиков функций и определение их свойств; определение четверти расположения графика рациональной функции. Заметим, что в представленном учебнике в конце каждого параграфа присутствуют задачи для повторения, дополнительные упражнения к каждой главе, в конце учебника приведены сведения из курса алгебры 7-8 классов.

Обратимся к академическому школьному учебнику автора М.И. Башмакова [4]. Рациональным функциям в данном учебнике посвящена первая глава, разбитая на параграфы. Каждый параграф именуется уроком. Вводится теоретический материал, приводятся примеры и комментарии к нему. Далее вводится система упражнений и вопросы для самопроверки к параграфу. После каждой главы автор вводит беседу и приводит разноуровневые задания («Задания на выбор»).

Система упражнений в данном учебнике иная, чем у авторов Ш.А. Алимова [3] и Ю.Н. Макарычева [13]. Упражнения после параграфов не разделяются на обязательные и трудные, содержат в себе от трех до десяти подпунктов заданий. На Рис. 2 ниже представлена структура изучения темы.

Схема 2

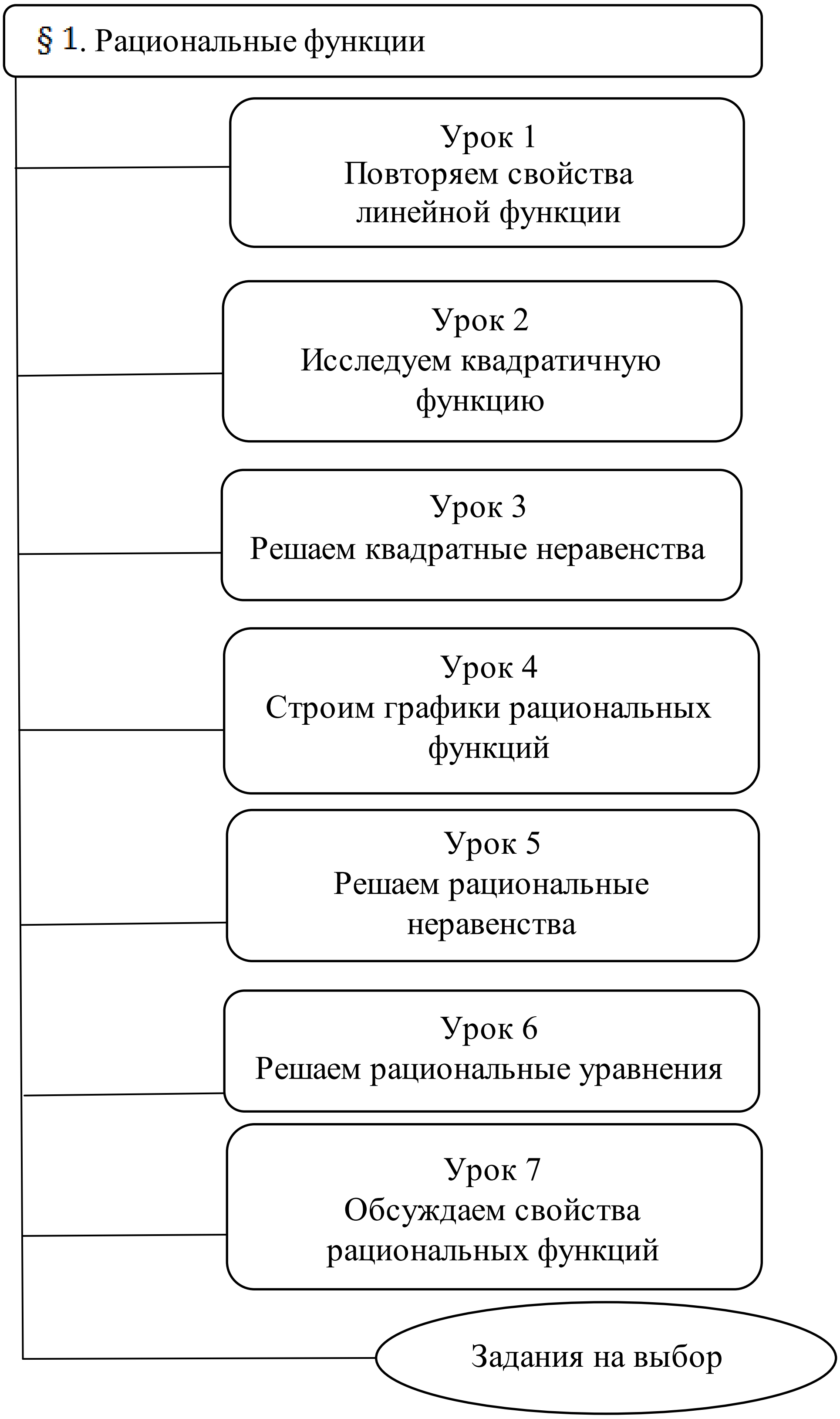


Рис. 2. Этапы изучения темы «Рациональная функция» по учебнику М.И. Башмакова

В заданиях урока 4 («Строим графики рациональных функций»), автор предлагает следующие задачи на «Построение графиков рациональных функций»:

Задача 19 [4, С.33]. «Постройте график линейной функции.

1) $y = -x + 1$; 2) $y = 2x - 2$; 3) $y = \frac{x}{2} - 2$».

Задача 20 [4, С.33]. «Постройте график квадратичной функции.

1) $y = -x^2 + 1$; 2) $y = 2x^2 - 8$; 3) $y = \frac{x^2}{2} - 2$».

Задача 21 [4, С.33]. «Постройте график функции.

1) $y = \frac{x^2-2x+1}{x-1}$; 2) $y = \frac{x+1}{x^2-1}$; 3) $y = \frac{8x^3-27}{2x-3}$».

Также в этом разделе заданий приводится упражнения типа «Сопоставь графики с функциями».

Задача 22 [4, С.34]. На Рис. 3 изображены графики шести рациональных функций. Найдите их в списке: 1) $y = \frac{x}{x-3}$; 2) $y = \frac{6x}{x^2+9}$; 3) $y = \frac{6(x^2+1)}{x}$; 4) $y = \frac{3}{x^2+3}$; 5) $y = \frac{2(x^2-1)}{3x}$; 6) $y = \frac{1}{x+2} + \frac{1}{x-2}$.

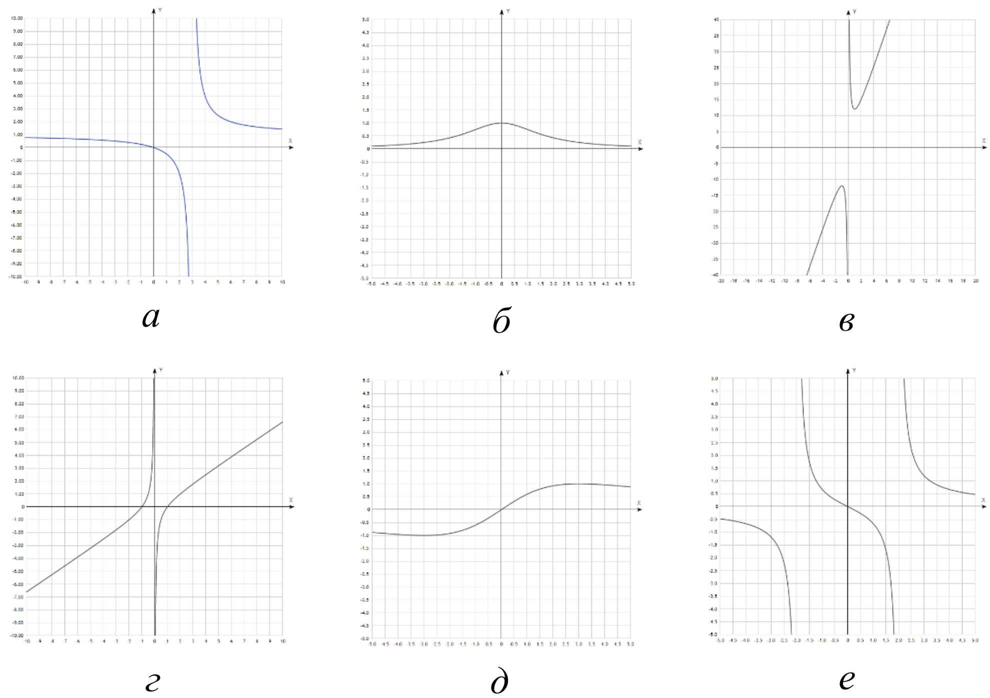


Рис. 3. Графики к задаче 22

На основе предложенных задач можно заметить, что задачи носят конкретизированный характер, требуют знаний об основных навыках по изучению данной темы.

Урок 7 («Обсуждаем свойства рациональных функций») наполнен примерами и комментариями к каждому изученному свойству рациональной функции.

Пример 1 [4, С.51]. Функция $y = \frac{(x^2-1)(x+1)}{x}$ определена при всех значениях аргумента x, кроме $x = 0$. Для нахождения нулей функции $f(x)$ нужно решить уравнение $f(x) = 0$.

В данном параграфе приводятся упражнения типа: *продолжите исследование функций; исследование рациональной функции и построение ее графика.*

Приведем пример задач типа «продолжите исследование функций».

Задача 23 [4, С.55]. Продолжите исследование функции $y = 1 - \frac{x}{x^2+\frac{4}{25}}$, если известно: *область определения* **R**, и функция является ни четной ни нечетной.

Такое название типа исходит из того, что часть исследования автор проводит в теоретической части, где не исследует некоторые свойства данной функции, а «просит» чтобы исследование провели ученики самостоятельно.

Второй тип задач основывается на задачах, приведенных в уроке 4.

Задача 24 [4, С.55]. Исследуйте рациональные функции и постройте их графики: 1) $y = \frac{x}{2} + \frac{2}{x}$; 2) $y = x - \frac{4}{x}$; 3) $y = \frac{3}{4-x^2}$; 4) $y = \frac{2}{x^2+4}$; 5) $y = \frac{x^2-2x+1}{x^2+1}$; 6) $y = \frac{x^2-1}{x^2-9}$.

Как уже отмечалось выше, задачи имеют направленность только по данной теме: отработка навыков построения графиков рациональных функций и исследование их свойств (задачи на исследование рациональных функций подробно рассмотрим в §5).

Проанализировав задачный материал учебников алгебры [3, 4, 13], замечаем, что упражнения различны: по уровням, по их количеству, по типам и структуре. Например, в учебнике [4] приведены конкретные задачи по данной теме, прослеживается четкая структура упражнений.

Ответы и указания к решению задач, представленных в данном параграфе, приведены в Приложении 1.

§5. Исследование рациональных функций и построение их графиков

Подробный разбор задач на исследование рациональных функций рассмотрим в данном параграфе.

Задача 23 [4, С.55]. Продолжите исследование функции $y = 1 - \frac{x}{x^2+\frac{4}{25}}$.

Решение:

1) Область определения: $\boldsymbol{R}$.

2) Нули функции:

$x^2 - x + \frac{4}{25} = 0, x = \frac{1}{2} \pm \frac{3}{2 \cdot 5}, x_1 = \frac{1}{5}, x_2 = \frac{4}{5}$.

3) Знаки функции:

$y > 0$ при $x \in \left(-\infty; \frac{1}{5}\right) \cup \left(\frac{4}{5}; +\infty\right)$,

$y < 0$ при $x \in \left(\frac{1}{5}; \frac{4}{5}\right)$.

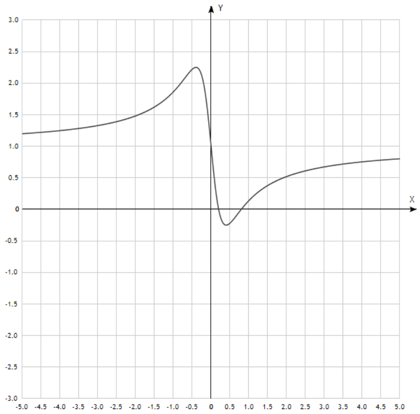


Рис. 4. График функции $y = 1 - \frac{x}{x^2+\frac{4}{25}}$

4) Проверка функции на четность:

$y(-x) = 1 + \frac{x}{x^2+\frac{4}{25}}$. Функция ни четная, ни нечетная.

5) Функция принимает наибольшее значение при $x = -\frac{2}{5}, y\left(-\frac{2}{5}\right) = \frac{9}{4}$. Наименьшее значение достигается при $x = \frac{2}{5}, y\left(\frac{2}{5}\right) = -\frac{1}{4}$. Область значений функции: $[-\frac{1}{4}; \frac{9}{4}]$.

Задача 24(1) [4, С.55]. Исследуйте рациональную функцию $y = \frac{x}{2} + \frac{2}{x}$ и постройте ее график.

Решение:

1) *Область определения.*

Так как функция представляет собой дробь, то находим нули знаменателя: $2x = 0 => x = 0$. Исключаем единственную точку $x = 0$ из области определения функции и получаем: $D(y) = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$.

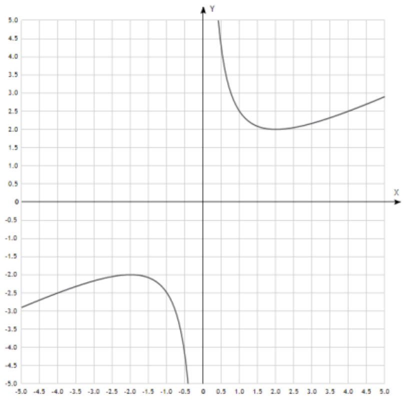


Рис. 5. График функции $\boldsymbol{y = \frac{x}{2} + \frac{2}{x}}$

2) *Нули функции*. Функция $y = \frac{P(x)}{Q(x)}$ обращается в нуль там, где $P(x) = 0$. При решении уравнения $x^2 + 4 = 0$, получаем, $x^2 \neq -4$. Следовательно, нулей функции нет.

3) *Знаки функции*. При $x \in (-\infty; 0)$ функция $y < 0$ (принимает отрицательные значения), при $x \in (0; +\infty)$ функция $y > 0$.

4) *Проверка функции на четность*. Функция является нечетной, так как $y(-x) = \frac{(-x)^2+4}{-2x} = -\left(\frac{x^2+4}{2x}\right)$; $y(-x) = -y(x)$.

Задача 24(2) [4, С.55]. Исследуйте рациональную функцию $y = x - \frac{4}{x}$ и постройте ее график.

Решение:

1) *Область определения*. Исключаем единственную точку $x = 0$ из области определения функции и получаем: $D(y) = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$.

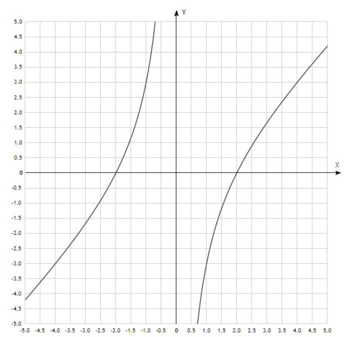


Рис. 6. График функции $\boldsymbol{y = x - \frac{4}{x}}$

2) *Нули функции*. Функция $y = \frac{P(x)}{Q(x)}$ обращается в нуль там, где $P(x) = 0$. При решении уравнения

$x^2 - 4 = 0$, получаем, $x^2 = \pm 2$.

3) *Знаки функции*. При $x \in (-\infty; -2] \cup (0; 2]$ функция $y < 0$, при $x \in [-2; 0) \cup [2; +\infty)$ функция $y > 0$ (принимает положительные значения).

4) *Проверка функции на четность*. Функция является нечетной, так как $y(-x) = \frac{(-x)^2-4}{-2x} = -\left(\frac{x^2-4}{2x}\right)$; $y(-x) = -y(x)$.

Задача 24(3) [4, С.55]. Исследуйте рациональную функцию $y = \frac{3}{4-x^2}$ и постройте ее график.

Решение:

1) *Область определения*. Исключаем точки $x = -2$ и $x = 2$ из области определения функции и получаем: $D(y) = (-\infty; -2) \cup (-2; 2) \cup (2; +\infty)$.

2) *Нули функции*. Функция $y = \frac{P(x)}{Q(x)}$ обращается в нуль там, где $P(x) = 0$, $3 \neq 0$, следовательно нулей функции нет.

3) *Знаки функции*. При $x \in (-\infty; -2) \cup (2; +\infty)$ функция $y < 0$, при $x \in (-2; 2)$ функция $y > 0$.

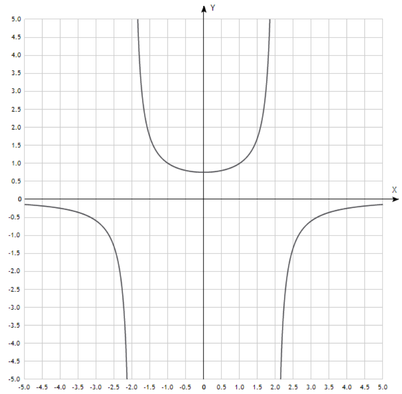


Рис.7. График функции $y = \frac{3}{4-x^2}$

4) *Проверка функции на четность*. Функция является четной, так как $y(-x) = \frac{3}{4-(-x)^2} = \frac{3}{4-x^2}$; $y(-x) = y(x)$.

Задача 24(4) [4, С.55]. Исследуйте рациональную функцию $y = \frac{2}{x^2+4}$ и постройте ее график.

Решение:

1) *Область определения*: $D(y) = (-\infty; +\infty)$.

2) *Нули функции*. Функция $y = \frac{P(x)}{Q(x)}$ обращается в нуль там, где $P(x) = 0$, $2 \neq 0$, следовательно, нулей функции нет.

3) *Знаки функции*. Данная функция принимает только положительные значения.

4) *Проверка функции на четность*.

Функция является четной, так как $y(-x) = \frac{2}{(-x)^2+4} = \frac{2}{x^2+4}$; $y(-x) = y(x)$.

5) *Область значений функции*: $E(y) = (0; \frac{1}{2}]$.

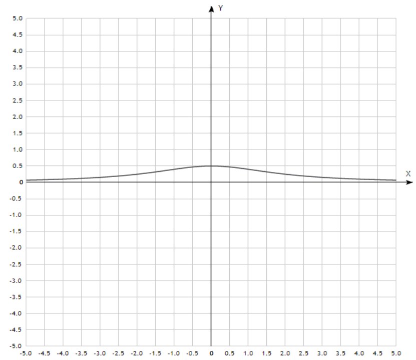


Рис. 8. График функции $\boldsymbol{y = \frac{2}{x^2+4}}$

Задача 24(5) [4, С.55]. Исследуйте рациональную функцию $y = \frac{x^2-2x+1}{x^2+1}$ и постройте ее график.

Решение:

1) *Область определения*: $D(y) = (-\infty; +\infty)$.

2) *Нули функции*. Функция $y = \frac{P(x)}{Q(x)}$ обращается в нуль там, где $P(x) = 0$. При решении уравнения $x^2 - 2x + 1$, получаем, $x = 1$.

3) *Знаки функции*. При $x \in (-\infty; 1) \cup (1; +\infty)$ функция $y > 0$.

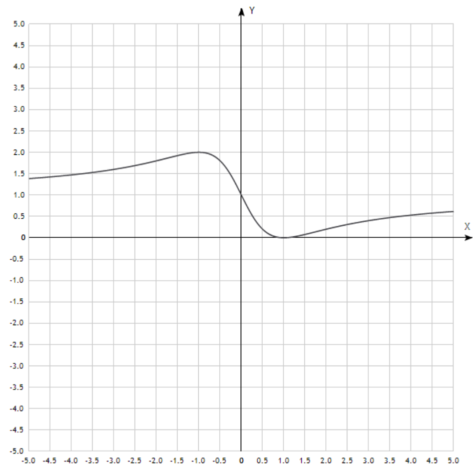


Рис. 9. График функции $\boldsymbol{y = \frac{x^2-2x+1}{x^2+1}}$

4) *Проверка функции на четность*. Функция является ни четной, ни нечетной, так как $y(-x) = \frac{(-x)^2+2x+1}{(-x)^2+1} = \frac{x^2+2x+1}{x^2+1}$; $y(-x) \neq y(x)$ и $y(-x) \neq -y(x)$.

5) *Область значений функции*: $E(y) = [0; 2]$.

Выводы по первой главе

1. Приведено определение рациональной функции такими авторами как, М.И. Башмаков в учебном тексте [4] и А.С. Ярский в статье «Числа и функции» [35]. Выделены виды рациональных функций, изучаемых в курсе алгебры основной школы, и составлена схема «Классификация рациональных функций в курсе алгебры основной школы», представленная на стр. 11 бакалаврской работы.

2. Рассмотрены основные свойства рациональных функций, изучаемые в курсе алгебры основной школы, а именно: нули функции; четность(нечетность) функции; промежутки знакопостоянства; область определения и область значения функции; возрастание и убывание функции.

3. Выполнен анализ содержания программы по пособию Т.А. Бурмистровой [5] и школьных учебников алгебры 7-9 классов по теме исследования, таких авторов как, Ш.А. Алимов, С.М. Никольский, Г.К. Муравин и А.Г Мордкович. Определено, что в 7 классе основной функцией для изучения является *линейная функция и ее график* во всех приведенных учебниках. В 8 классе изучается *функция обратной пропорциональности и ее свойства,* многие авторы вводят понятие *квадратичной функции и построение ее графика*. В 9 классе изучаются *свойства квадратичной функции*.

4. Проанализирован задачный материал учебников алгебры 7-9 классов по теме исследования, таких авторов как, М.И. Башмаков, Ш.А. Алимов и Ю.Н. Макарычев. Выделены типы задач по каждому из учебников.

5. Исследование некоторых рациональных функций проходило по схеме, выделенной М.И. Башмаковым в учебном тексте [4]. Выполнено построение графиков этих функций.

ГЛАВА 2. МЕТОДИЧЕСКИЕ АСПЕКТЫ ОБУЧЕНИЯ ПОСТРОЕНИЮ ГРАФИКОВ РАЦИОНАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ В КУРСЕ АЛГЕБРЫ ОСНОВНОЙ ШКОЛЫ

§ 6. Анализ задач ОГЭ по теме исследования

Основной государственный экзамен по математике состоит из двух частей. В первой части 20 заданий базового уровня сложности. Во второй части 6 заданий повышенного и высокого уровня сложности. Первая и вторая части состоят из двух модулей: *модуль алгебра; модуль геометрия.*

Ответом к каждому заданию части 1 является число, цифра или последовательность цифр, а к части 2 является письменное решение.

«В модуле «Алгебра» представлены задачи на знание и понимание ключевых элементов содержания (математических понятий, их свойств, приемов решения задач и пр.): *числа и вычисления; алгебраические вычисления; уравнения и неравенства; числовые последовательности; функции; координаты на прямой и плоскости; статистика и теория вероятностей»* [33].

Задачи по теме *«Построение графиков рациональных функций»* включены в основной государственной экзамен: часть 1 включает в себя задание №10, часть 2 – задание №23.

При анализе задач ОГЭ **части 1** по теме исследования можно выделить следующие типы задач:

Тип 1. Задачи на установление соответствия между графиками функций и формулами, которые их задают.

Задача 25 [33]**.** «Установите соответствие между графиками функций и формулами, которые их задают».

ГРАФИКИ (см. ниже):

ФОРМУЛЫ: 1) $y = -2x - 1$ 2) $y = -2x + 1$ 3) $y = 2x + 1$.

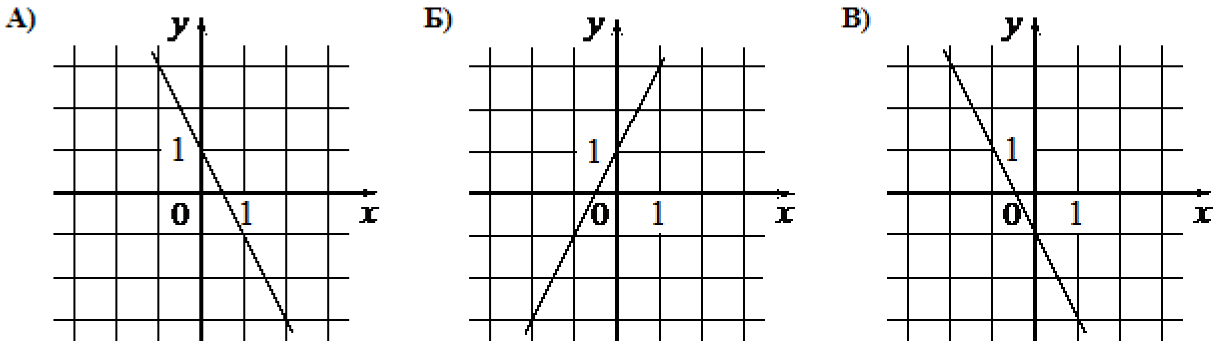


Рис. 10. Графики функций к задаче 25

Решение:

1) на Рис. 10 (А), прямая проходит через точку (1; -1), подставив данные значения в функцию – 2), получаем верное равенство, то есть А) – 2;

2) на рис. 10 (Б), прямая проходит через точку (-1; -1), подставив данные значения в функцию – 3), получаем верное равенство, то есть Б) – 3;

3) на Рис. 10 (В), прямая проходит через точку (-1; 1), рассуждая аналогично, имеем В) – 1. **Ответ:** А) – 2; Б) – 3; В) – 1.

Задача 26[36]**.** «Установите соответствие между функциями и их графиками (Рис. 11)».

ФУНКЦИИ: А) $y = -x^2 - 5x - 2$ Б) $y = -\frac{1}{3x}$ В) $y = -\frac{1}{6}x - 4$.

ГРАФИКИ:

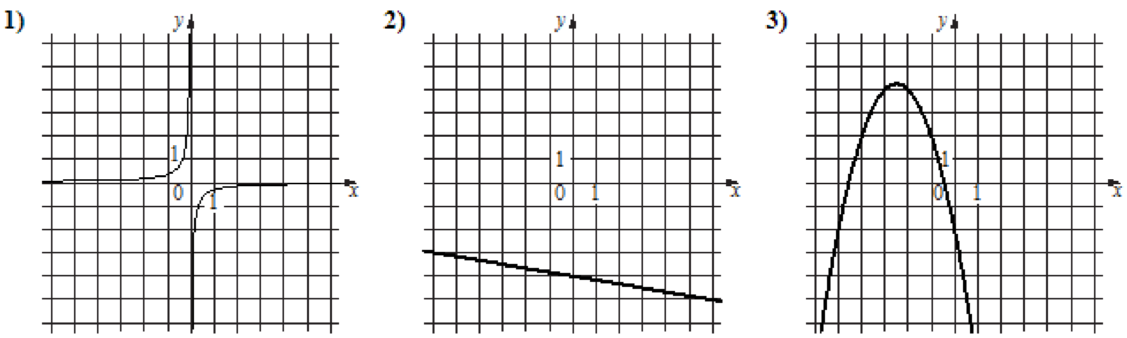


Рис. 11. Графики функций к задаче 26

Решение:

1) на Рис. 11 (1) изображена – гипербола, которая задается функцией $y = \frac{k}{x}$, следовательно, 1) – Б;

2) на Рис. 11 (2) изображена – прямая, которая задается функцией $y = kx + b$, следовательно, 2) – В;

3) на Рис. 11 (3) изображена – парабола, следовательно, 3) – А;

Ответ: А) – 3; Б) – 1; В) – 2.

Тип 2. Задачи на установление соответствия между графиками линейных функций и знаками коэффициентов k и b.

Задача 27[33]**.** «На Рис. 12 изображены графики функций вида $y = kx + b$. Установите соответствие между графиками функций и знаками коэффициентов k и b». ГРАФИКИ:

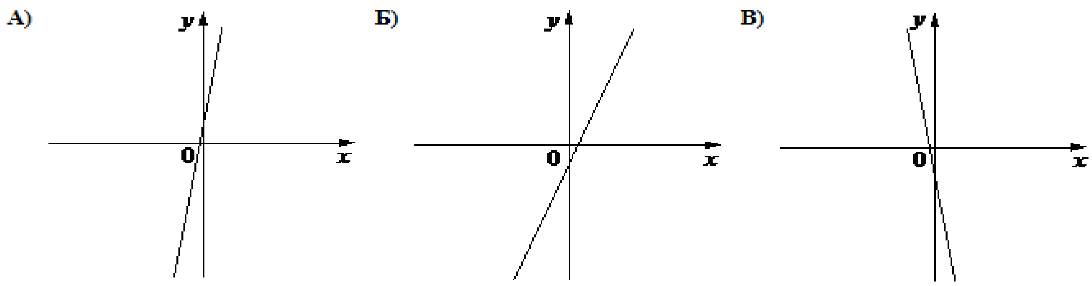


Рис. 12. Графики функций к задаче 27

КОЭФФИЦИЕНТЫ: 1) $k < 0, b < 0$; 2) $k > 0, b > 0$; 3) $k > 0, b < 0$.

Решение: если прямая задана уравнением $y = kx + b$, то при $k > 0$ функция возрастает, при $k < 0$ – убывает. Значению b соответствует значение функции в точке $x = 0$. Таким образом, графику А) соответствуют коэффициенты 2, Б) – 3, В) – 1. **Ответ:** А) – 2; Б) – 3; В) – 1.

Тип 3. Задачи на установление соответствия между знаками коэффициентов a и c, и графиками квадратичных функций.

Задача 28 [36]. «На Рис. 13 изображены графики функций вида $y = ax^2 + bx + c$. Установите соответствие между графиками функций и знаками коэффициентов a и c».

ГРАФИКИ (см. ниже):

КОЭФФИЦИЕНТЫ: 1) $a > 0, c < 0$; 2) $a < 0, c > 0$; 3) $a > 0, c > 0$.

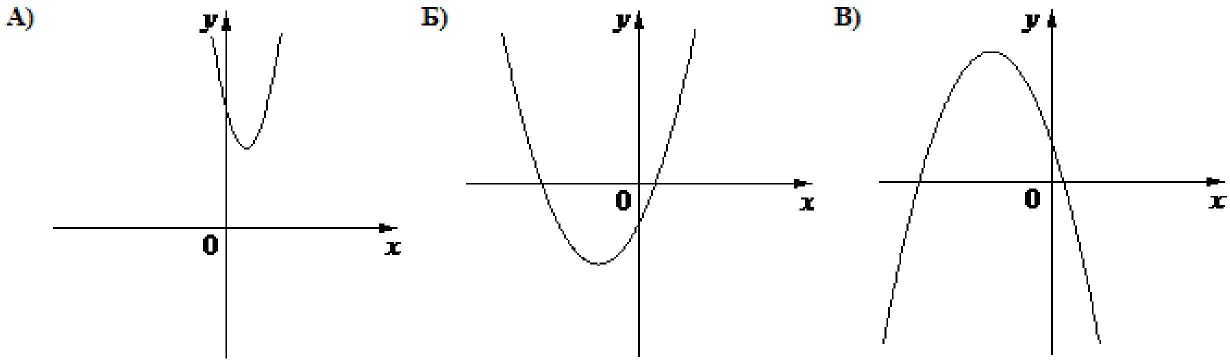


Рис. 13. Графики функций к задаче 28

Решение:

1) на Рис. 13 (А), изображена парабола ветви которой направленны вверх $\Rightarrow a > 0$. Заметим, что при $x = 0: y > 0$, то есть $y = a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c = c > 0$. Имеем, А) – 3;

2) на Рис. 13 (Б), изображена парабола ветви которой направлены вверх $\Rightarrow a > 0$. По графику находим, что при $x = 0: y < 0$, следовательно, Б) – 1;

3) рассуждая аналогично, получаем, что В) – 2.

Ответ: А) – 3; Б) – 1; В) – 2.

При анализе задач основного государственного экзамена **части 2** можно выделить следующие типы задач:

Тип 1. Задачи на построение графиков рациональных функций и определение, при каких значениях k прямая $y = kx$ не имеет с графиком общих точек / имеет одну, две, три общие точки.

Задача 29 [33]. «Постройте график функции $y = \frac{(x^2+3x)\cdot|x|}{x+3}$. Определите, при каких значениях m прямая $y = m$ не имеет с графиком ни одной общей точки» (решение данной задачи см. в Приложении 2).

Задача 30 [33]. «Постройте график функции $y = \frac{(x^2+2{,}25)(x-1)}{1-x}$. Определите, при каких значениях k прямая $y = kx$ имеет с графиком ровно одну общую точку».

Решение: «упростим выражение: $y = \frac{(x^2+2{,}25)(x-1)}{1-x} = -x^2 - 2{,}25$.

График исходной функции сводится к графику параболы $y = -x^2 - 2{,}25$ с выколотой точкой (1; -3,25). График изображен на Рис. 14.

Чтобы прямая $y = kx$ имела с построенным графиком одну общую точку, нужно чтобы или прямая $y = kx$ была касательной к графику $y = -x^2 - 2{,}25$ (и точка касания не равна 1), или прямая $y = kx$ пересекает график $y = -x^2 - 2{,}25$ в точке $x = 1$ и в какой-то второй точке.

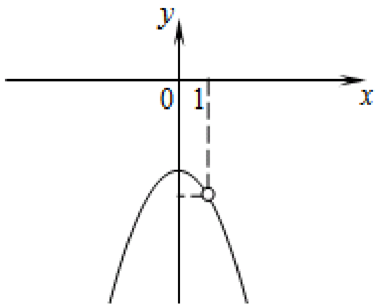


Рис. 14. График функции $y = \frac{(x^2+2{,}25)(x-1)}{1-x}$

Случай касания реализуется, когда дискриминант квадратного уравнения $-x^2 - 2{,}25 = kx$ равен нулю $\Rightarrow$ $k^2 - 9 = 0, k = \pm 3$.

При этом, если $k = -3$, точка касания $x = 1{,}5$, а если $k = 3$, точка касания $x = -1{,}5$. Для рассмотрения второго случая подставим $x = 1$ в уравнение $-x^2 - 2{,}25 = kx$. Получим $k = -3{,}25$, при этом дискриминант этого уравнения будет больше нуля, значит, еще одно решение точно есть» [33].

Ответ: -3,25; -3; 3.

Задача 31[36]. «Постройте график функции $y = \begin{cases} -x^2 + 6x - 3, & \text{при } x \geq 2, \\ -x + 7, & \text{при } x < 2 \end{cases}$. Определите, при каких значениях m прямая $y = m$ имеет с графиком ровно две общие точки».

Решение:

«построим график функции $y = -x + 7$ при $x < 2$ и график функции $y = -x^2 + 6x - 3$ при $x \geq 2$. Этот график изображен на Рис. 15. Прямая $y = m$ имеет с графиком ровно две общие точки при $m = 5$ и $m = 6$» [36].

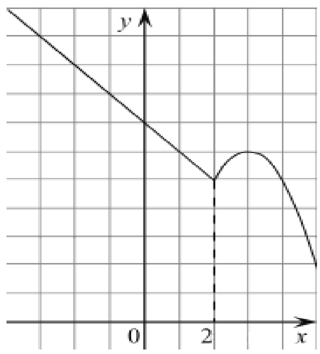


Рис. 15.

Ответ: 5, 6.

Задача 32 [33]**.** «Постройте график функции $y = \frac{2x+1}{2x^2+x}$. Определите, при каких значениях k прямая $y = kx$ имеет с графиком ровно одну общую точку».

Решение: «упростим выражение для функции:

$$y = \frac{2x+1}{2x^2+x} = \frac{2x+1}{x(2x+1)} = \frac{1}{x} \text{ (при } x \neq -0{,}5).$$

Таким образом, получим, что график данной функции сводится к графику функции $y = \frac{1}{x}$ с выколотой точкой (-0,5; -2).

Заметим, что прямая $y = kx$ проходит через начало координат и будет иметь с графиком функции ровно одну общую точку только тогда, когда будет проходить через выколотую точку (-0,5; -2)». Подставив координаты этой точки в уравнение прямой, находим коэффициент k:

$$-0{,}5k = -2 \Leftrightarrow k = 4.$$

Ответ: 4.

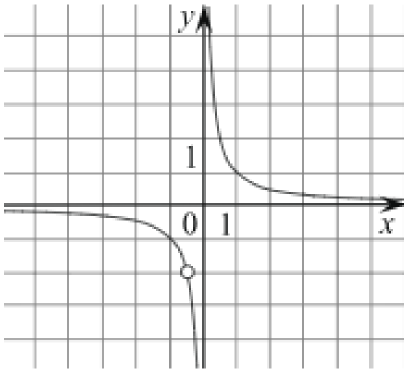


Рис. 16. График функции $y = \frac{2x+1}{2x^2+x}$

Тип 2. Задачи на построение графиков рациональных функций и нахождение наибольшего числа общих точек графика с прямой, параллельной оси абсцисс.

Задача 33 [33]**.** «Постройте график функции $y = |x^2 + 4x - 5|$. Какое наибольшее число точек может иметь график данной функции с прямой, параллельной оси абсцисс?» (Решение данной задачи, приведено в Приложении 2).

Отметим, что для решения данных заданий ОГЭ требуются: *навыки построения графиков рациональных функций и описание их свойств; сравнение графиков функций и определение их свойств; определение зависимости расположения графика рациональной функции от знака коэффициентов.*

§7. Системы задач по теме «Построение графиков рациональных функций» в курсе алгебры основной школы

Поясним, что мы понимаем под системой задач. В методике преподавания математики существуют различные подходы к раскрытию понятия упражнения. Г.И. Саранцев [30] рассматривает понятие *упражнения* «как синоним понятия *задача*». Исходя из этого, «*упражнения* наделяются различными функциями: *мотивационной; организации подготовки к изучению нового материала; усвоения; закрепления; повторения изученного*».

М.А. Данилов [7] приводит определение упражнения, как «многократное выполнение действий с целью овладения умениями и навыками». Можно сказать, что при таком понимании упражнение – частный случай задачи, используемый при закреплении и применении знаний.

Автор в книге [7] вводит определение «*Системой упражнений* называют совокупность заданий к блоку уроков по изучаемой теме, удовлетворяющая требованиям: *полнота (наличие задач на все изучаемые понятия); наличие ключевых задач (задачи, являющиеся своеобразными «ключами» к решению других задач); связность (последовательность); возрастание трудности в каждом уровне; целевая ориентация (для каждой задачи определено ее место и назначение в блоке уроков); целевая достаточность (количество задач оптимально для достижения поставленной цели); психологическая комфортность (учет мышления, типа мышления и вида памяти учащихся)»*.

В учебном пособии [6] Л.В. Виноградова выделяет следующие «принципы отбора и составления *систем упражнений*: *принцип систематичности; принцип последовательности; принцип прочности*».

Итак, нами рассмотрен ряд требований, которые целесообразно предъявить к системе упражнений, исходя из общих педагогических принципов обучения. Эти требования позволяют планомерно и целенаправленно подходить к отбору и построению системы упражнений.

На основе анализа учебников (проведенного в § 4) и выше сказанного, можно выделить следующую систему упражнений для успешного овладения учащимися умений построения графиков рациональных функций.

Предлагаем первую ***систему задач на исследование свойств рациональных функций.***

Задача 1.1. «Показать, что функция $y = \frac{x^2+x-1}{x+4}$ не является четной и не является нечетной» [3, С.61].

Задача 1.2. «Найдите область определения функции $y = \frac{2x-3}{x-3}$» [3, С.54].

Задача 1.3. «Найдите нули функции $y = \frac{4+2x}{x^2+5}$» [3, С.61].

Задача 1.4. «Имеет ли нули функция $y = \frac{6-x}{x}$» [13, С.16].

Задача 1.5. «Функция задана формулой $y(x) = \frac{x+5}{x-1}$» [3, С.54].

1) Найти $y(-2), y(0), y\left(\frac{1}{2}\right), y(3)$.

2) Найти значение x, если $y(x) = -3,\ y(x) = -2,\ y(x) = 19$.

Задача 1.6. «Найдите область определения функции $y = \frac{6x-3}{x-1}$» [3, С.54].

Задача 1.7. «Приведите пример какой-нибудь функции, областью определения которой является: а) множество всех чисел; б) множество всех чисел кроме 7» [13, С.7].

Задача 1.8. «Начертите график какой-нибудь функции, нулями которой служат числа: а) – 3 и 3; б) – 4, 0 и 2; в) – 3, 2, 1 и 5» [13, С.15].

Задача 1.9. «Принадлежит ли точка $(-2;1)$ графику функции $y = \frac{x^2+3}{x-1}$» [3, С.55].

Задача 1.10. «Функция $y = f(x)$ задана формулой $y = \frac{6-2x}{7}$. При каких значениях аргумента x: а) $f(x) > 0$; б) $f(x) < 0$?» [13, С.220].

Заметим, что в данной системе упражнений приведены задачи типов: №1.5 - нахождение значений переменной x, если известен y; №1.1 - 1.4 – исследование какого-либо из свойств рациональных функций.

Предлагаем вторую ***систему задач на построение графика рациональных функций.***

Задача 2.1. «Постройте график функции и выясните ее свойства $y = \frac{1}{(x-1)^3} - 2$» [3, С.72].

Задача 2.2. «Исследуйте рациональную функцию $y = \frac{x}{2} + \frac{2}{x}$ и постройте ее график» [4, С.55].

Задача 2.3. «Исследуйте рациональную функцию $y = x - \frac{4}{x}$ и постройте ее график» [4, С.55].

Задача 2. 4. «Исследуйте рациональную функцию $y = \frac{3}{4-x^2}$ и постройте ее график» [4, С.55].

Задача 2.5. «Исследуйте рациональную функцию $y = \frac{2}{x^2+4}$ и постройте ее график» [4, С.55].

Задача 2.6. «Исследуйте рациональную функцию $y = \frac{x^2-2x+1}{x^2+1}$ и постройте ее график» [4, С.55].

Задача 2.7. «Доказать, что функция $y = \frac{1}{x^2+1}$ убывает на промежутке $x \geq 0$ и возрастает на промежутке $x \leq 0$» [3, С.58].

Задача 2.8. «Постройте график функции $y = \frac{3}{1-x} + 1$» [3, С.66].

Задача 2.9. «Постройте график функции $y = \frac{6}{|x|}$ и опишите ее свойства» [13, С.52].

Отметим, что в данной системе упражнений приведены задачи типов: №2.8. – 2.9 – *требуется построить график данной функции*; №2.1. – 2.7 – *по данному графику, исследовать некоторые свойства.*

Ответы и указания к решению задач, представленных в данном параграфе, приведены в Приложении 2.

§8. Методические рекомендации по обучению решению задач на построение графиков рациональных функций в курсе алгебры основной школы

Для анализа теоретического и задачного материала по теме исследования, нами были использованы учебники алгебры 7-9 классов разных авторов [1, 2, 3, 4, 11, 12, 13, 19, 20, 21, 24, 25, 26, 27, 28, 29]. В данном параграфе рассмотрим приводимые методические рекомендации к УМК Ю.Н. Макарычева и др.

Как уже говорилось ранее (§3. Анализ содержания теоретического материала), изучение рациональных функций в курсе алгебры основной школы начинается с 7 класса, где основной функцией для изучения является *линейная функция и ее график*.

«Типичный и одновременно важнейший для математики класс функций – линейные функции», отмечает В.И. Мишин [18, С.160].

На изучение темы «Линейная функция» по учебнику Ю.Н. Макарычева [11] выделяется 5 часов, после изучения параграфа «Функции и их графики». Отметим, что параграф разделен на два пункта: прямая пропорциональность и ее график (частный случай линейной функции) и линейная функция и ее график.

Н.Г. Миндюк отмечает, что «общие сведения о функциях, рассмотренные в параграфе «Функции и их графики» являются опорными при изучении свойств функций различного вида» [15, С.44].

Изучение темы «Прямая пропорциональность и ее график» начинается со знакомства учащимися с примерами 1 – 3 учебного текста, где автор «просит» указать независимую и зависимую переменные. После чего рассматривается график данной функции. Автор вводит утверждение о том, что «графиком прямой пропорциональности является прямая линия» [11, С.72] и предлагает построить график функции $y = -1{,}5x$.

Важно отметить, что «график строится по двум точкам, одной из которых служит начало координат» [15, С.45].

В методических рекомендациях, И.С. Шлыкова предлагает «выполнить упражнение 301, предназначенное для работы в парах» [15, С.45].

Упражнение 301 [11, С.73]. «Задайте формулой прямую пропорциональность, график которой симметричен графику функции $y = 9x$:

а) относительно оси x; б) относительно оси y».

Далее, учащимся предлагаются более сложные задания на построение и чтение графиков. Авторами учебного пособия «рекомендуется остановиться на заданиях 307 – 309, в которых рассматривается зависимость между реальными величинами» [15, С.45].

№ 307 [11, С.73]. «Турист вышел из города и через x ч находился на расстоянии y км от него. Зависимость y от x показана в таблице:

Таблица 5

x	0	0,5	1	2	2,5	3	3,5	4
y	0	2,1	4,0	7,9	10,1	12,1	14	16,1

В координатной плоскости отметьте эти точки и покажите с помощью линейки, что они расположены почти на прямой. Составьте формулу, которая приближенно выражает зависимость y от x».

«Из дополнительных упражнений полезно уделить внимание заданию 357, в котором для построения графика требуется выбрать соответствующий масштаб» [15, С.45].

№ 357 [11, С.89]. «Постройте график функции, выбрав соответствующий масштаб: а) $y = 100x$; б) $y = 0{,}02x$».

Знакомство с прямой пропорциональностью является хорошей подготовкой к изучению *линейной функции* общего вида.

«Определение *линейной функции*, - рекомендует Ю.Н. Макарычев, лучше дать после рассмотрения примеров 1 и 2, приведенных в пункте 16 учебника» [15, С.46]. Усвоению понятия линейной функции способствуют упражнения 313 – 318, которые используются для классной и домашней работы.

№ 318 [11, С.75]. «Линейная функция задана формулой $y = -3x + 1{,}5$. Найдите: а) значение y, если $x = -1{,}5; 2{,}5; 4$; б) значение x, если $y = -4{,}5; 0; 1{,}5$».

Особое внимание следует уделить понятию *графика линейной функции*. «Данный вопрос решается с опорой на интуитивное представление учащихся» [15, С.46]. Сопоставляются значения функции $y = 0{,}5x$ и $y = 0{,}5x + 2$, соответствующие одинаковым значениям аргумента, и делается вывод, что график функции $y = 0{,}5x + 2$ может быть получен из графика функции $y = 0{,}5x$ сдвигом на две единицы вверх и представляет собой прямую, параллельную графику функции $y = 0{,}5x$. Утверждение, что «графиком линейной функции $y = kx + b$ при $k \neq 0$ является прямая, параллельная графику функции $y = kx$» [11], принимается без доказательств.

«Важно остановиться на случае, когда линейная функция задана формулой $y = b$, где $b -$ некоторое число. Учащиеся должны усвоить, что при $k = 0$ и $b \neq 0$ графиком функции $y = 0x + b$, т.е. $y = b$, является прямая, параллельная оси x, а при $k = 0$ и $b = 0 -$ сама ось x» [15, С.46].

Г.Н. Миндюк отмечает, что «уже на первом уроке, отводимом на изучение темы «Линейная функция и её график», можно предложить учащимся выполнить в классе или дома некоторые задания на построение графиков линейных функций (упражнения 319, 320, 325, 326)» [15, С.46].

319 [11, С.75]. «Постройте график функции, заданной формулой:

а) $y = -2x + 1$; б) $y = 0{,}2x + 5$».

На втором и третьем уроках, отводимых на изучение данной темы, учащимся предлагаются различные упражнения, связанные с понятием «график линейной функции». К ним относятся задания 321-324, 327.

324 [11, С.77]. «Не выполняя построения графика функции $y = 1{,}2x - 7$, выясните, проходит ли этот график через точку:

а) $A\,(100; 113)$; б) $C\,(-15; -25)$».

«Специальное внимание следует уделить заданиям 328, 329, при выполнении которых учащиеся должны учитывать особенности расположения графика линейной функции в координатной плоскости» [15, С.47], отмечают авторы пособия. Данные упражнения, также подлежат закреплению алгоритма на построение *графика линейной функции*: «для построения графика линейной функции достаточно найти координаты двух точек графика, отметить эти точки на координатной плоскости и провести через них прямую» [15, С.47].

Е.И. Лященко отмечает, что «построение графика линейной функции можно показать двумя способами: с помощью нескольких точек и по двум точкам, причем построение графика по двум точкам можно выполнять после обобщения вида графика линейной функции» [10, С.59].

«На завершающем этапе изучения данного параграфа, - рекомендуют авторы пособия, следует проверить усвоение материала учащимися, используя для этого контрольные вопросы и задания, помещенные в конце параграфа» [15, С.48].

Изучение рациональных функций продолжается в курсе алгебры 8 класса, где автор дает представление о *свойствах функции* $y = \frac{k}{x}$ *и ее графике*. На изучение темы «Функция $y = \frac{k}{x}$ и ее график» по учебнику Ю.Н.

Макарычева [12] выделяется 2 часа. В данном пункте учащиеся знакомятся с *графиком обратной пропорциональности*. Впервые они сталкиваются с ситуацией, когда график функции не является сплошной линией, а состоит из двух ветвей, называемый *гиперболой*.

Построение графика обратной пропорциональности начинается с примера, приведенного автором в учебном тексте.

Пример 2 [12, С.41]. «Постройте график функции $y = \frac{12}{x}$».

Решение: для построения графика данной функции, найдем значения y, соответствующие некоторым положительным значениям и противоположным им отрицательным значениям x:

Таблица 6

x	1	1,5	2	3	4	5	6	8	12
y	12	8	6	4	3	2,4	2	1,5	1

Таблица 7

x	-1	-1,5	-2	-3	-4	-5	-6	-8	-12
y	-12	-8	-6	-4	-3	-2,4	-2	-1,5	-1

После чего, отмечаем в координатной плоскости точки, которые помещены в таблицах 6 и 7.

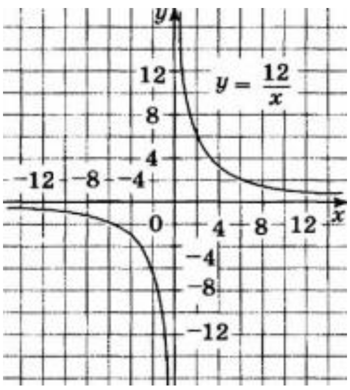


Рис. 17. График функции $y = \frac{12}{x}$

Заметим, что автор учебника [12], демонстрирует некоторые особенности графика функции $y = \frac{12}{x}$, обращая на это внимание учеников.

«Так как число 0 не входит в область определения функции, то на графике нет точки с абсциссой 0, т.е. график не пересекает ось y. Так как ни при каком x значение y не равно нулю, то график не пересекает ось x» [12, С.42].

В методических рекомендациях, И.С. Шлыкова предлагает «выполнить упражнения 178, 179, а также задание 182, предназначенное для работы в парах» [16, С.27].

№ 178 [12, С.44]. «Постройте график функции, заданной формулой $y = -\frac{8}{x}$. Найдите по графику: а) значение y, соответствующее значению x, равному $4; 2{,}5; 1{,}5; -1; -2{,}5;$ б) значение x, которому соответствует y, равное $8; -2$».

«Специальное внимание рекомендуется уделить упражнению 183, где учащимся предлагается ответить на вопросы, используя график реальной зависимости» [16, С.27].

Для дальнейшего изучения вопроса о рациональных функциях рассматривается следующий ее вид – *квадратичная функция.* Более подробно данная функция изучается в курсе алгебры 9 класса, где автор обобщает и расширяет сведения о функциях вида $y = ax^2$.

В учебнике Ю.Н. Макарычева и др. [13], *квадратичной функции* посвящена Глава I, которая так и называется «Квадратичная функция». Изучение данной главы начинается с параграфа «Функции и их свойства», в котором расширяются сведения о функциях, полученные учащимися в курсе алгебры 7 и 8 классов. Напоминается определение понятия «функция». И.С. Шлыкова отмечает, что «учащиеся делают важный шаг в овладении функциональной символикой» [17]. Также стоит отметить, что «в случае, когда зависимость переменной y от переменной x является функцией, используется запись $y = f(x)$, и следует подчеркнуть, что символом $f(x)$ обозначают значение функции, соответствующее значению аргумента, равному x» [8, С.53].

Н.Г. Миндюк считает, что «необходимо напомнить учащимся известное им понятие области определения функции, и важно, обратить их внимание на то, что если функция задана формулой $y = f(x)$ и не сделано специальных отговорок, то считают, что область определения этой функции состоит из всех значений переменной x, при которых выражение $f(x)$ имеет смысл» [17, С.9].

В систему упражнений данного параграфа включены различные задания на нахождение области определения функции, заданной формулой.

«Специальное внимание следует уделить упражнению 14, предназначенному для работы в парах. Выполнение этого упражнения должно завершаться коллективным обсуждением в классе ответов, полученных при работе пар» [17, С.10].

В учебнике [13] предлагаются различные задания на построение и чтение графиков функций. Авторы учебного пособия [17] рекомендуют «специально остановиться на заданиях 16 и 26, где представлены графики функций, описывающих реальные процессы».

№ 16 [13, С.8]. «В течение первых 10 дней марта ученики 9 класса измеряли атмосферное давление в полдень. По результатам измерений был построен график (Рис. 18). Пользуясь графиком, найдите:

а) каким было атмосферное давление 5 марта, 9 марта;

б) день, когда атмосферное давление было наибольшим».

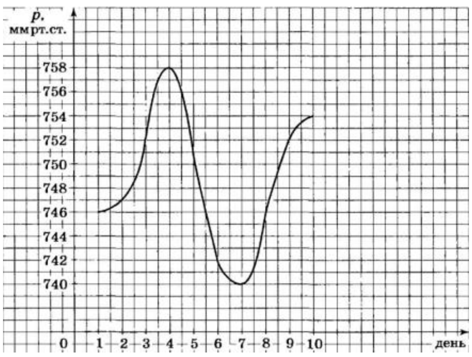


Рис. 18. График к задаче 16

Далее, в пункте 2 «Свойства функций» расширяется запас общих сведений о функциях, которыми владеют учащиеся. В данном пункте, вводятся новые понятия: «нули функции», «промежутки знакопостоянства», «функция возрастающая(убывающая)».

В систему упражнений данного пункта включены задачи на:

- *чтение графиков функций (упражнения 32-37);*

- *усвоение понятий: «область определения функции», «нули функции», «промежутки знакопостоянства» (упражнения 39-51).*

«Подобные упражнения убеждают учащихся в значимости приобретаемых знаний и умений», - отмечают авторы пособия [17].

В параграфе 3 главы I учебника [13], изучению свойств и графиков функций, заданных формулами $y = ax^2$,$y = ax^2 + n$ и $y = a(x - m)^2$, посвящены пункты 5 и 6. В приведенных пунктах рассматриваются функции вида, приведенные нами выше. Делается акцент на свойствах функции $y = ax^2$ при $a > 0$ и при $a < 0$. Учащиеся знакомятся с графиками функций $y = ax^2 + n$, $y = a(x - m)^2$ и $y = a(x - m)^2 + n$.

Сведения, о функциях, которые получили обучающиеся при изучении пунктов 5 и 6, а также накопленный ими опыт построения этих графиков создают благоприятные условия для изучения пункта 7. «Первый шаг, на который следует обратить внимание учащихся, состоит в представлении квадратного трехчлена $ax^2 + bx + c$ в виде $a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2-4ac}{4a}$» [17, С.28]. Из данного утверждения делается вывод, что графиком функции, заданной формулой $y = ax^2 + bx + c$, где $a \neq 0$, является парабола, вершиной которой служит точка с координатами $(m; n)$, где $m = -\frac{b}{2a}, n = \frac{-b^2+4ac}{4a}$. «Учащиеся должны запомнить эти формулы, научиться ими пользоваться, а также уметь определять направление ветвей параболы» [17, С.29]. Важно напомнить, что «осью симметрии параболы служит прямая $x = m$, параллельная оси y» [13]. «При $a > 0$ ветви параболы направлены вверх, при $a < 0$ – вниз» [13].

После рассмотрения авторских примеров 1 – 3, приведенных в пункте

7, учащиеся могут приступить к выполнению включенных в этот пункт упражнений. Данные примеры иллюстрируют *алгоритм построения графика квадратичной функции*, приведенный Ю.Н. Макарычевым на странице 37 учебного текста [13].

«Чтобы построить график квадратичной функции, нужно:

1. Найти координаты вершины параболы и отметить ее в координатной плоскости.

2. Построить еще несколько точек, принадлежащих параболе.

3. Соединить отмеченные точки плавной линией» [13, С.37].

Рассмотрим один из примеров.

Пример 3 [13, С.38]. «Постройте график функции
$y = -2x^2 + 12x - 19$».

Решение: «графиком этой функции является парабола, ветви которой направлены вниз. Найдем координаты ее вершины:

$$m = -\frac{b}{2a} = -\frac{12}{2\cdot(-2)} = 3, \qquad n = -2\cdot 3^2 + 12\cdot 3 - 19 = -1.$$

Вычислив координаты еще нескольких точек, получим таблицу:

Таблица 8

x	1	2	3	4	5
y	-9	-3	-1	-3	-9

Соединив плавной линией точки, координаты которых указаны в таблице, получим график функции $y = -2x^2 + 12x - 19$ (Рис. 19)»[13, С.38].

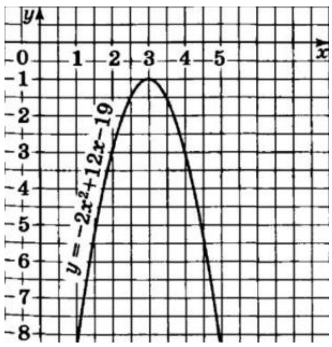


Рис. 19. График функции $y = -2x^2 + 12x - 19$

«Далее можно предложить учащимся выполнить упражнения 121-127, связанные с построением и чтением графиков квадратичной функции».

«Специальное внимание следует уделить задаче-исследованию, представленной в упражнении 131. При решении этой задачи учащиеся должны мотивировать свои ответы, приводить необходимые обоснования. Коллективное решение подобных задач способствует повышению коммуникативной компетентности учащихся» [17, С.29].

№ 131 [13, С.45]. «Выясните, график какой из функций

$y = x^2 + 6x, y = \frac{1}{2}x^2 - 3x, y = -x^2 - 6$, изображен на Рис. 20».

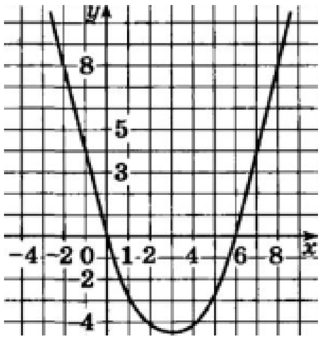


Рис. 20. График к задаче 131

Для успешного освоения учащимися *алгоритмом построения графика квадратичной функции*, многие авторы предлагают учащимся выполнить задания на раздаточном материале (т.е. карточки), который включает в себя *правило построения*, *образец* и *сами задания* (см. Приложение 3).

Кроме учебных пособий по математике, в наше время широко применяются *информационно-коммуникационные технологии* (ИКТ) для лучшего усвоения материала и для активной познавательности. «Использование ИКТ на уроках математики [9, С.123] способствует: *повышению интереса к предмету; высокому развитию коммуникативных способностей учащихся; разнообразию наглядности на уроке; умению учащихся грамотно пользоваться источниками информации, оценивать ее достоверность*». Отметим, что существует большое количество обучающих программ – по основным алгебраическим функциям, с построением их графиков и исследованием, к примеру – «Glance».

Данная программа «применима на уроках алгебры для наглядной демонстрации построения и расположения графиков рациональных функций, проведения исследования функций, а также для индивидуальной исследовательской работы учащегося, лучшего понимания и изучения темы, расширения кругозора в области математики» [38]. Программа осуществляет контроль учебных навыков, полученных при работе с помощью тестирования. Н.Л. Стефанова утверждает, что «контроль знаний – это составная часть обучения, которая включает процесс выявления и сравнения на том или ином этапе обучения результатов учебной деятельности с требованиями, заданными учебными программами» [31, С.152]. Алгоритм работы данной программа показан в Приложении 4.

Выводы по второй главе

1. Проведен анализ задач ОГЭ по теме исследования. При проведении анализа было выявлено, что основной государственной экзамен включает в себя два задания по теме исследования: задание базового уровня – №10, задание повышенного уровня – №23. В заданиях базового уровня были выделены следующие типы: задачи на установление соответствия между графиками функций и формулами, которые их задают; задачи на установление соответствия между графиками линейных функций и знаками коэффициентов k и b; задачи на установление соответствия между знаками коэффициентов a и c, и графиками квадратичных функций. В заданиях повышенного уровня были выделены следующие типы: задачи на построение графиков рациональных функций и определение, при каких значениях k прямая $y = kx$ не имеет с графиком общих точек / имеет одну, две, три общие точки; задачи на построение графиков рациональных функций и нахождение наибольшего числа общих точек графика с прямой, параллельной оси абсцисс.

2. Разработаны системы задач по теме «Построение графиков рациональных функций» в курсе алгебры основной школы, удовлетворяющая требованиям Л.В. Виноградовой. Первая система задач «Исследование свойств рациональных функций», вторая «Исследование рациональной функции и построение ее графика».

3. Сформулированы методические рекомендации по обучению решению задач на построение графиков рациональных функций в курсе алгебры основной школы. Определенно, что при обучении решению задач на построение графиков рациональных функций, нужно использовать наглядные пособия, в том числе использование ИКТ на уроках алгебры.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Сформулируем основные выводы и полученные результаты проведенного исследования.

1. Приведено определение рациональной функции такими авторами как, М.И. Башмаков в учебном тексте [4] и А.С. Ярский в статье «Числа и функции» [35]. Выделены виды рациональных функций, изучаемых в курсе алгебры основной школы и составлена схема «Классификация рациональных функций в курсе алгебры основной школы», представленная на стр. 11 бакалаврской работы.

2. Рассмотрены основные свойства рациональных функций, изучаемые в курсе алгебры основной школы, а именно: нули функции; четность(нечетность) функции; промежутки знакопостоянства; область определения и область значения функции; возрастание и убывание функции.

3. Выполнен анализ содержания программы по пособию Т.А. Бурмистровой [5]. Выполнен анализ содержания школьных учебников алгебры 7-9 классов по теме исследования, таких авторов как, Ш.А. Алимов, С.М. Никольский, Г.К. Муравин и А.Г Мордкович. Определено, что в 7 классе основной функцией для изучения является *линейная функция и ее график* во всех приведенных учебниках. В 8 классе изучается *функция обратной пропорциональности и ее свойства*, многие авторы вводят понятие *квадратичной функции и построение ее графика*. В 9 классе изучаются *свойства квадратичной функции*.

4. Проанализирован задачный материал учебников алгебры 7-9 классов по теме исследования, таких авторов как, М.И. Башмаков, Ш.А. Алимов и Ю.Н. Макарычев. Выделен типы задач по каждому из учебников.

5. Исследованы некоторые рациональные функции, исследование проходило по схеме, выделенной М.И. Башмаковым в учебном тексте [4]. Выполнено построение графиков этих функций.

6. Проведен анализ задач ОГЭ по теме исследования. При проведении анализа было выявлено, что основной государственной экзамен включает в себя два задания по теме исследования: задание базового уровня – №10, задание повышенного уровня – №23. В заданиях базового уровня были выделены следующие типы: задачи на установление соответствия между графиками функций и формулами, которые их задают; задачи на установление соответствия между графиками линейных функций и знаками коэффициентов k и b; задачи на установление соответствия между знаками коэффициентов a и c, и графиками квадратичных функций. В заданиях повышенного уровня были выделены следующие типы: задачи на построение графиков рациональных функций и определение, при каких значениях k прямая $y = kx$ не имеет с графиком общих точек / имеет одну, две, три общие точки; задачи на построение графиков рациональных функций и нахождение наибольшего числа общих точек графика с прямой, параллельной оси абсцисс.

7. Разработаны системы задач по теме «Построение графиков рациональных функций» в курсе алгебры основной школы, удовлетворяющая требованиям Л.В. Виноградовой. Первая система задач «Исследование свойств рациональных функций», вторая «Исследование рациональной функции и построение ее графика».

8. Сформулированы методические рекомендации по обучению решению задач на построение графиков рациональных функций в курсе алгебры основной школы. Определенно, что при обучении решению задач на построение графиков рациональных функций, нужно использовать наглядные пособия, в том числе использование ИКТ на уроках алгебры.

СПИСОК ИСПОЛЬЗУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Алимов, Ш.А. Алгебра. 7 класс [Текст]: учебник для общеобразовательных учреждений/Ш.А. Алимов, Ю.М. Колягин, Ю.В. Сидоров. – 18-е изд. – М.: Просвещение, 2011. – 224 с.

2. Алимов, Ш.А. Алгебра. 8 класс [Текст]: учебник для общеобразовательных учреждений/Ш.А. Алимов, Ю.М. Колягин, Ю.В. Сидоров. – 19-е изд. – М.: Просвещение, 2012. – 255 с.

3. Алимов, Ш.А. Алгебра. 9 класс [Текст]: учебник для общеобразовательных учреждений/Ш.А. Алимов, Ю.М. Колягин, Ю.В. Сидоров. – 16-е изд. – М.: Просвещение, 2011. – 287 с.

4. Башмаков М.И. Алгебра: учеб. для 9 кл. общеобразоват. учреждений / М.И. Башмаков; Рос. Акад. Наук, Рос. Акад. Образования, изд-во «Просвещение». – М.: Просвещение, 2005. -304 с. : ил.- (Академический школьный учебник).

5. Бурмистрова, Т.А. Алгебра. Сборник рабочих программ. 7-9 классы [Текст]: пособие для учителей общеобразовательных организаций/Т.А. Бурмистрова. – 2-е изд., доп. – М.: Просвещение, 2014. – 96 с.

6. Виноградова, Л.В. Методика преподавания математики в средней школе [Текст]: учеб. пособие / Л.В. Виноградова. – Ростов н/Д.: Феникс, 2005. – 252 с.

7. Данилов, М.А. Проблемы методологии педагогики и методики исследований / М.А. Данилов, Н.И. Болдырева. – М., «Педагогика», 1971. – 322 с.

8. Жумаева, У.Я. Методика изучения функций в курсе алгебры основной школы // У.Я. Жумаева// Развитие науки и техники: механизм выбора и реализации приоритетов. – 2017. – С. 52-53. Режим доступа: https://elibrary.ru/item.asp?id=31635675. – Последнее обновление 11.01.2018.

9. Захарова, И.Г. Информационные технологии в образовании[Текст]: учебное пособие для студ. пед. учеб. заведений / И.Г. Захарова. – М.: Издательский центр «Академия», 2003. – 192 с.

10. Лященко, Е.И. Изучение функций в курсе математики восьмилетней школы/ Е.И. Лященко. – Минск: Научно-исследовательский институт педагогики министерства просвещения БССР, 1970. – 176 с.

11. Макарычев, Ю.Н. Алгебра. 7 класс [Текст]: учебник для общеобразовательных учреждений/Ю.Н. Макарычев, Н.Г. Миндюк, К.И. Нешков, С.Б. Суворова. – 8-е изд. – М.: Просвещение, 2001. – 270 с.

12. Макарычев, Ю.Н. Алгебра. 8 класс [Текст]: учебник для общеобразовательных учреждений/Ю.Н. Макарычев, Н.Г. Миндюк, К.И. Нешков, С.Б. Суворова. – 13-е изд. – М.: Просвещение, 2005. – 238 с.

13. Макарычев, Ю.Н. Алгебра. 9 класс [Текст]: учебник для общеобразовательных учреждений/Ю.Н. Макарычев, Н.Г. Миндюк, К.И. Нешков, С.Б. Суворова. – 8-е изд. – М.: Просвещение, 2009. – 270 с.

14. Макарычев, Ю.Н. Алгебра. Дидактические материалы. 9 класс [Текст]: учеб. пособие для общеобразоват. организаций/Ю.Н. Макарычев, Н.Г. Миндюк, Л.Б. Крайнева. – 17-е изд. – М.: Просвещение, 2012. – 96 с.

15. Миндюк, Н.Г. Алгебра. Методические рекомендации. 7 класс [Текст]: учеб. пособие для общеобразоват. организаций / Н.Г. Миндюк, И.С. Шлыкова. – М.: Просвещение, 2017. – 176 с.

16. Миндюк, Н.Г. Алгебра. Методические рекомендации. 8 класс [Текст]: учеб. пособие для общеобразоват. организаций / Н.Г. Миндюк, И.С. Шлыкова. – М.: Просвещение, 2016. – 192 с.

17. Миндюк, Н.Г. Алгебра. Методические рекомендации. 9 класс [Текст]: учеб. пособие для общеобразоват. организаций / Н.Г. Миндюк, И.С. Шлыкова. – М.: Просвещение, 2017. – 239 с.

18. Мишин, В.И. Методика преподавания математики в средней школе: Частная методика [Текст]: Учеб. пособие для студентов пед. ин-тов по физ.-мат. спец. / В.И. Мишин и др. – М.: Просвещение, 1987. – 416 с.

19. Мордкович, А.Г. Алгебра. 7 класс. В 2 ч. Ч. 1 [Текст]: учебник для учащихся общеобразовательных учреждений/А.Г. Мордкович. – 17-е изд., доп. – М.: Мнемозина, 2013. – 175 с.

20. Мордкович, А.Г. Алгебра. 8 класс. В 2 ч. Ч. 1 [Текст]: учебник для учащихся общеобразовательных учреждений/А.Г. Мордкович. – 12-е изд., доп. – М.: Мнемозина, 2010. – 215 с.

21. Мордкович, А.Г. Алгебра. 9 класс. В 2 ч. Ч. 1 [Текст]: учебник для учащихся общеобразовательных учреждений/А.Г. Мордкович, П.В. Семенов. – 12-е изд., стер. – М.: Мнемозина, 2010. – 224 с.

22. Мордкович, А.Г. Алгебра. 8 класс [Текст]: методическое пособие для учителя /А.Г. Мордкович. – М.: Мнемозина, 2010. – 77 с.

23. Мордкович, А.Г. Алгебра. 9 класс [Текст]: методическое пособие для учителя /А.Г. Мордкович, П.В. Семенов. – М.: Мнемозина, 2010. – 72 с.

24. Муравин, Г.К. Алгебра. 7 класс [Текст]: учебник для общеобразовательных учреждений/Г.К. Муравин, К.С. Муравин, О.В. Муравина. – 9-е изд. – М.: Дрофа, 2013. – 285 с.

25. Муравин, Г.К. Алгебра. 8 класс [Текст]: учебник для общеобразовательных учреждений/Г.К. Муравин, К.С. Муравин, О.В. Муравина. – 15-е изд. – М.: Дрофа, 2013. – 254 с.

26. Муравин, Г.К. Алгебра. 9 класс [Текст]: учебник для общеобразовательных учреждений/Г.К. Муравин, К.С. Муравин, О.В. Муравина. – 13-е изд. – М.: Дрофа, 2013. – 278 с.

27. Никольский, С.М. Алгебра. 7 класс [Текст]: учебник для общеобразовательных учреждений/С.М. Никольский, М.К. Потапов, Н.Н. Решетников, А.В. Шевкин. – М.: Просвещение, 2013. – 287 с.

28. Никольский, С.М. Алгебра. 8 класс [Текст]: учебник для общеобразовательных учреждений/С.М. Никольский, М.К. Потапов, Н.Н. Решетников, А.В. Шевкин. – М.: Просвещение, 2014. – 301 с.

29. Никольский, С.М. Алгебра. 9 класс [Текст]: учебник для общеобразовательных учреждений/С.М. Никольский, М.К. Потапов, Н.Н. Решетников, А.В. Шевкин. – М.: Просвещение, 2014. – 335 с.

30. Саранцев, Г.И. Общая методика преподавания математики [Текст]: учебное пособие для студентов математических спец. педагогических вузов и

университетов / Г.И. Саранцев. – Саранск: Тип. «Красный Октябрь», 1999. – 208 с.

31. Стефанова, Н.Л. Методика и технология обучения математике. Курс лекций [Текст]: пособие для вузов / Н.Л. Стефанова, Н.С. Походова. – М.: Дрофа, 2005. – 416 с.

32. Тараканова О. О компактном изучении тригонометрии в 10 классе / О. Тараканова, Г. Муравин // Математика, 2001. - №8. – С. 9 – 10.

33. Федеральный институт педагогических измерений. [Электронный ресурс]. – Режим доступа: http://fipi.ru/. – Последнее обновление 29.03.2018.

34. Шнейдер, В.Е. Краткий курс высшей математики [Текст]: учебное пособие для вузов / В.Е. Шнейдер, А.И. Слуцкий, А.С. Шумов. – М.: Высшая школа, 1972. – 640 с.

35. Ярский, А.С. Числа и функции / А.С. Ярский // Квант, 1988. - № 6. – С. 13 – 24.

36. Ященко, И.В. ОГЭ 2018. Математика 9 класс. Основной государственной экзамен. 36 тренировочных вариантов / И.В. Ященко. – М.: «Национальное образование», 2018. – 240 с.

37. Denbel, D.G. Functions in the Secondary School Mathematics Curriculum/ D.G. Denbel // Journal of Education and Practice, 2015. - № 1. – P. 77 – 81.

38. Hawkes, H.E. First course in algebra/ H.E. Hawkes, W.A. Luby, F.C. Touton. – Boston: Ginn and company, 1910. – 334 p.

39. Hawkes, H.E. Second course in algebra/ H.E. Hawkes, W.A. Luby, F.C. Touton. – Boston: Ginn and company, 1911. – 263 p.

40. Kleiner, I. Evolution of the Function Concept: A Brief Survey/ I. Kleiner// The College Mathematics Journal, 1989. - №4. – 305 p.

41. Weiss, M. Where are the rational squares? / M. Weiss // Journal of the American Mathematical Month, 2017. - № 3. – P. 255 – 259.

Приложение 1

Ответы и указания к решению задач из

§ 4. Анализ задачного материала по теме

«Построение графиков рациональных функций»

1. Ответ:

1) $y(-2) = -1$, $y(0) = -5$, $y\left(\frac{1}{2}\right) = 11$, $y(3) = 4$;

2) $y\left(-\frac{1}{2}\right) = -3$, $y(-1) = -2$, $y\left(\frac{3}{2}\right) = 13$, $y\left(\frac{4}{3}\right) = 19$.

2. Ответ: $(-\infty; \mathbf{3}) \cup (\mathbf{3};\ +\infty)$.

3. Ответ: функция ни четная, ни нечетная.

4. Ответ: $A(1{,}2; 2{,}2), B(-2{,}2;\ -1{,}2)$.

5. Указание: подставим координаты $(-2; 1)$ в уравнение $y = \frac{x^2+3}{x-1}$.

6. График функции представлен на Рис. 23.

7.Указание: для построения графика функции $y = \frac{1}{|x-1|}$ нужно раскрыть знак модуля в знаменателе.

8. Доказательство: пусть $x_1 < x_2$ и $x_1, x_2 > 0$, покажем, что $y(x_1) > y(x_2)$:

$$y(x_1) - y(x_2) = y = \frac{1}{{x_1}^2+1} - \frac{1}{{x_2}^2+1} = \frac{{x_2}^2+1-{x_1}^2-1}{({x_1}^2+1)({x_2}^2+1)}$$

$$= \frac{{x_2}^2-{x_1}^2}{({x_1}^2+1)({x_2}^2+1)} = \frac{(x_2-x_1)(x_2+x_1)}{({x_1}^2+1)({x_2}^2+1)}.$$

Знаменатель $({x_1}^2+1)({x_2}^2+1) > 0$,

$x_2 - x_1 > 0$ т.к. $x_2 > x_1$,

$x_2 + x_1 > 0$, т.к. $x_1, x_2 > 0$.

Следовательно, $y(x_1) - y(x_2) > 0$, т.е. $y(x_1) > y(x_2)$, **ч.т.д.**

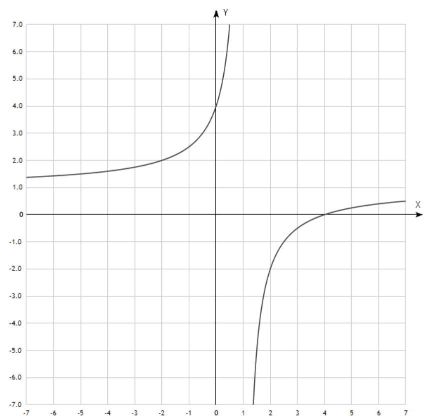


Рис. 21. График к задаче 8.

9. Решение: составим таблицу значений и построим график функции (Рис. 22):

Таблица 9

x	-4	-1	0	0,5	1,5	2	3	4
y	-2,008	-2,125	-3	-10	6	-1	-1,88	-1,96

1. Область определения: $(x-1)^3 \neq 0,\ x \neq 1$.

2. Проверка функции на четность: $y(-x) = \frac{1}{(-x-1)^3} - 2 = -\frac{1}{(x+1)^3} - 2$ – функция ни четная, ни нечетная.

3. Промежутки возрастания и убывания функции: функция убывает на промежутках $(-\infty; 1) \cup (1; +\infty)$.

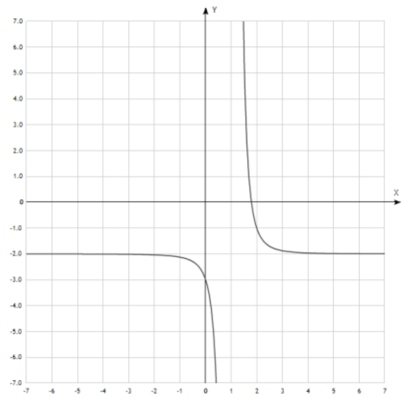


Рис. 22.

10. Ответ: а) $y = 3x - 10$; б) $y = \frac{1}{x-7}$.

11. Графики функций представлены на Рис. 23.

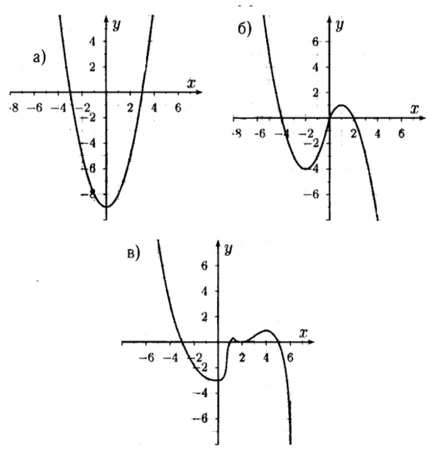


Рис. 23.

12. Ответ: 1) $x = -\frac{1}{3}$; 2) $x > -\frac{1}{3}$; 3) $x < -\frac{1}{3}$. График функции (Рис. 24).

13. График функции (Рис. 25).

14. Ответ: $x = -2,\ x^2 + 5 \neq 0$.

15. Ответ: 1) (0; 1); 2) точек пересечения с осью *Ox* нет; 3) I и II четверти.

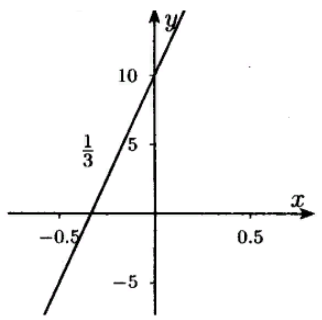


Рис. 24.

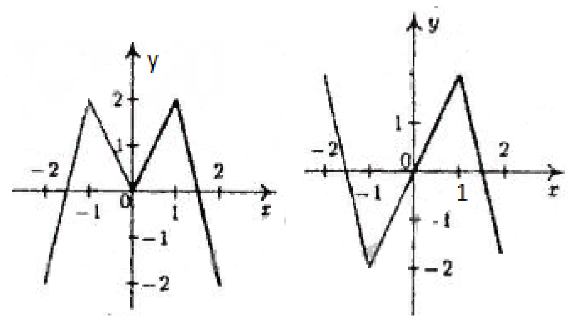


Рис. 25.

16. Ответ:

1) область определения: $(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$;

2) Функция возрастает на интервале $(-\infty; 0)$, убывает на интервале $(0; +\infty)$. График функции (Рис. 26).

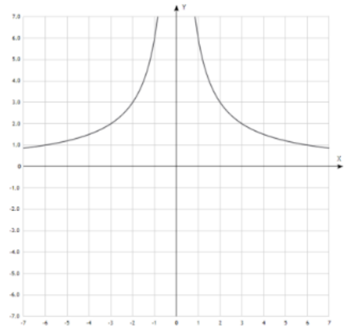


Рис. 26.

17. Ответ: $(-\infty; 2) \cup (2; +\infty)$.

18. Ответ: а) при $x < 3$; б) при $x > 3$.

19. Указание: для построения графика достаточно задать две точки.

20. График функции представлен на Рис. 27.

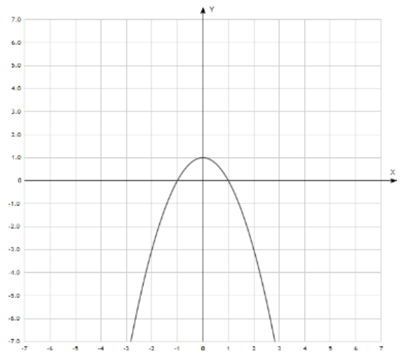
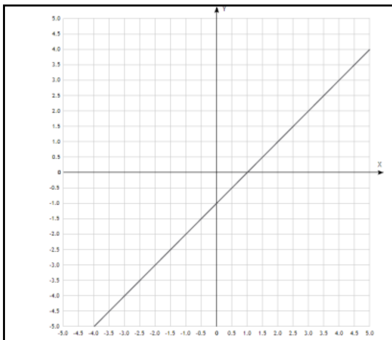
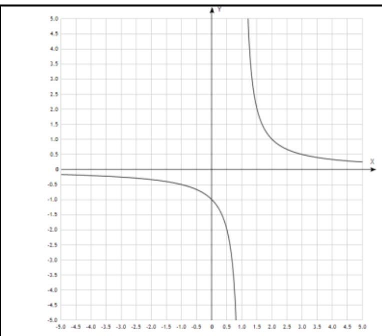
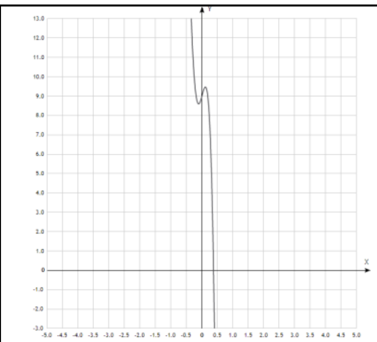


Рис. 27.

21. Графики функции (Таблица 10).

Таблица 10

		
$y = \dfrac{x^2 - 2x + 1}{x - 1}$	$y = \dfrac{x + 1}{x^2 - 1}$	$y = \dfrac{8x^3 - 27}{2x - 3}$

22. Ответ:

1	2	3	4	5	6
а	*д*	*в*	*б*	*г*	*е*

Решение задач **№ 23** и **№ 24** приведено в §5 (см. выше).

Приложение 2

Ответы и указания к решению задач из

§ 7. Системы задач по теме

«Построение графиков рациональных функций»

в курсе алгебры основной школы

Задача 1.1. Ответ: функция ни четная, ни нечетная.

Задача 1.2. Ответ: $(-\infty; \mathbf{3}) \cup (\mathbf{3};\ +\infty)$.

Задача 1.3. Ответ: $x = -2,\ x^2 + 5 \neq 0$.

Задача 1.4. Ответ: $x = 6$.

Задача 1.5. Ответ:

1) $y(-2) = -1$, $y(0) = -5$, $y\left(\frac{1}{2}\right) = 11$, $y(3) = 4$;

2) $y\left(-\frac{1}{2}\right) = -3$, $y(-1) = -2$, $y\left(\frac{3}{2}\right) = 13$, $y\left(\frac{4}{3}\right) = 19$.

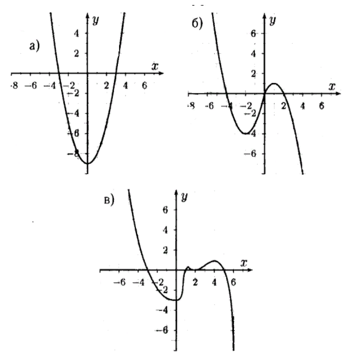


Рис. 28.

Задача 1.6. Ответ: $(-\infty; \mathbf{1}) \cup (\mathbf{1};\ +\infty)$.

Задача 1.7. Ответ: а) $y = 3x - 10$; б) $y = \frac{1}{x-7}$.

Задача 1.8. Графики функций, представлены на Рис. 28.

Задача 1.9. *Указание:* подставим координаты $(-2; 1)$ в уравнение $y = \frac{x^2+3}{x-1}$.

Задача 1.10. Ответ: а) при $x < 3$; б) при $x > 3$.

Задача 2.1 График функции, представлен на Рис. 29.

Задача 2.2. График функции, представлен на Рис. 30.

Задача 2.3. График функции, представлен на Рис. 31.

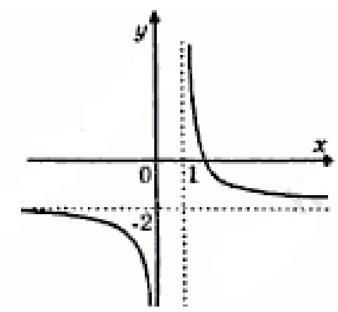


Рис. 29.

Задача 2. 4. График функции, представлен на Рис. 32.

Задача 2.5. График функции, представлен на Рис. 33.

Задача 2.6. График функции, представлен на Рис. 34.

Задача 2.7. График функции, представлен на Рис. 35.

Задача 2.8. График функции, представлен на Рис. 36.

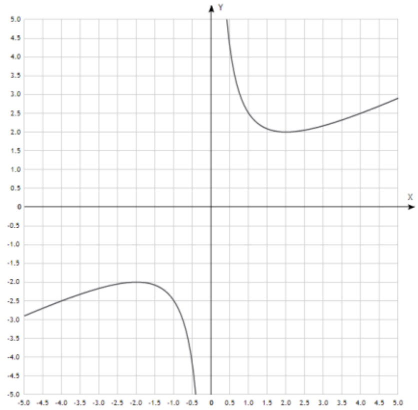


Рис. 30. График функции $y = \frac{x}{2} + \frac{2}{x}$

Задача 2.9. График функции, представлен на Рис. 37.

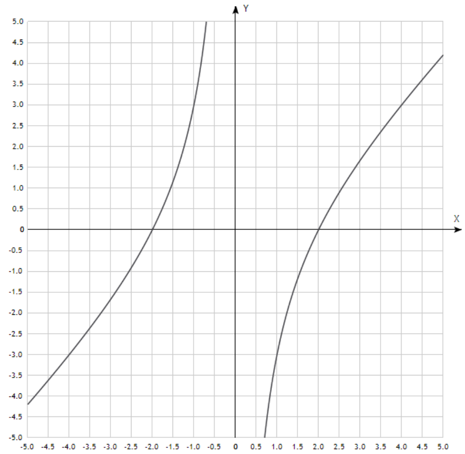


Рис. 31. График функции $y = x - \frac{4}{x}$

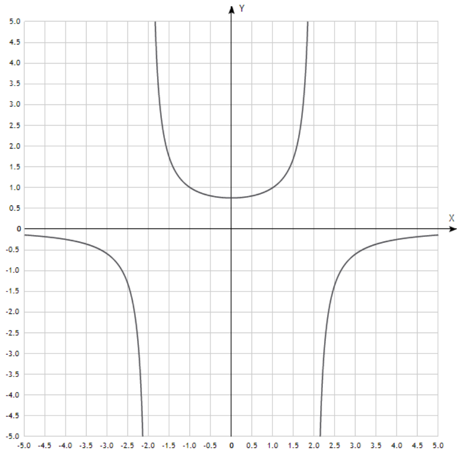


Рис. 32. График функции $y = \frac{3}{4-x^2}$

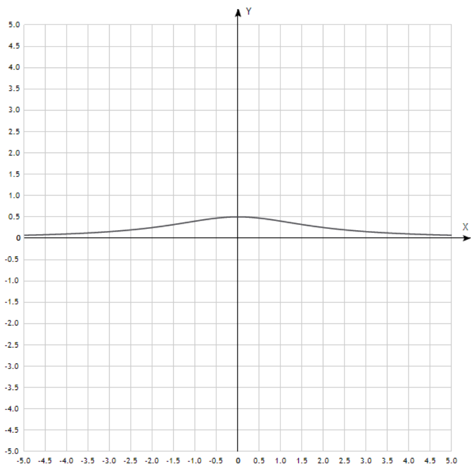


Рис. 33. График функции $y = \frac{2}{x^2+4}$

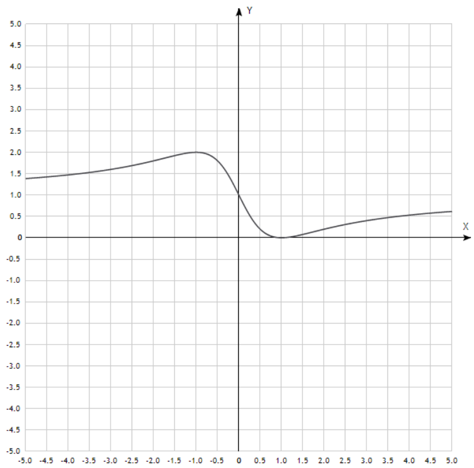


Рис. 34. График функции $y = \frac{x^2-2x+1}{x^2+1}$

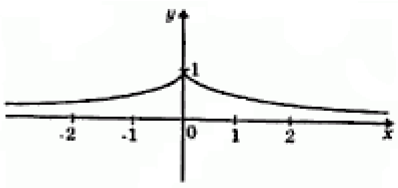


Рис. 35.

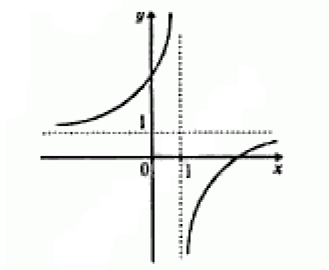


Рис. 36.

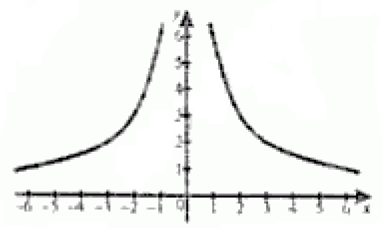


Рис. 37.

Задача 29. «Решение:

раскрывая модуль и упрощая, получим, что функцию можно представить следующим образом:

$$y = \begin{cases} -x^2, \text{при } x < 0, \\ x^2, \quad \text{при } x \geq 0. \end{cases}$$

При этом на графике функции нужно выколоть точку (-3; -9). Поскольку при упрощении мы сокращали выражение $(x + 3)$, стоящее в знаменателе» [33]. Этот график изображен на Рис. 38.

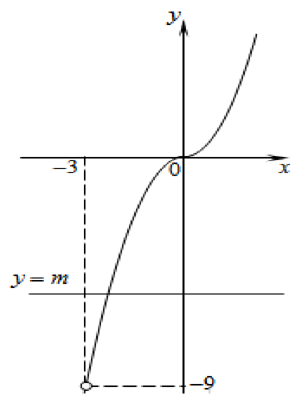


Рис. 38. График функции $\boldsymbol{y = \frac{(x^2+3x)\cdot|x|}{x+3}}$

Из графика видно, что прямая $y = m$ не имеет с графиком функции ни одной общей точки при $m = -9$.

Ответ: – 9.

Задача 33. «Решение:

график данной функции – это график параболы $y = x^2 + 4x - 5$, отрицательная часть которого отражена относительно оси *Ox*. Этот график изображен на Рис. 39.

Прямая, параллельная оси абсцисс задается формулой $y = c$, где c – постоянная. Из графика видно, что прямая $y = c$ может иметь с графиком функции не более четырех общих точек» [33].

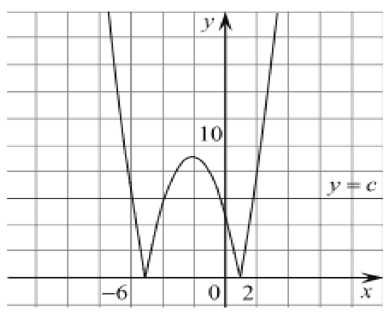


Рис. 39. График функции $\boldsymbol{y = |x^2 + 4x - 5|}$

Ответ: 4.

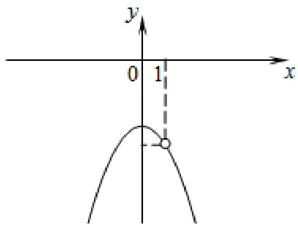
Приложение 3

Раздаточный материал по теме

«Построение графика квадратичной функции»

Таблица 11

Карточка №1. Построение графика квадратичной функции.

ПРАВИЛО	ОБРАЗЕЦ	ЗАДАНИЯ
Построить параболу можно так: 1) найти абсциссу вершины параболы по формуле $x_0 = -\frac{b}{2a}$; 2) найти ординату вершины параболы по формуле $y_0 = ax_0^2 + bx_0 + c$; 3) при вершине $(x_0;\ y_0)$ построить параболу $y = ax^2$.	Построить график: $y = \frac{(x^2+2{,}25)(x-1)}{1-x} = -x^2 - 2{,}25$ 1) $x_0 = 0$; 2) $y_0 = -2{,}25$; 3) 	1) $y = \frac{(x^2+4)(x+1)}{-1-x}$; 2) $y = \frac{(x^2+0{,}25)(x-1)}{1-x}$; 3) $y = \frac{(x^2+1)(x+2)}{-2-x}$; 4) $y = \frac{(x^2+6{,}25)(x-1)}{1-x}$; 5) $y = \frac{(x^2+3)(x-4)}{4-x}$.

Приложение 4

Алгоритм работы обучающей программы «Glance»

по построению графиков рациональных функций

Glance – обучающая программа по основным алгебраическим функциям, с построением их графиков и исследованием, с системой последующего тестирования и оценивания. «Применима на уроках алгебры для наглядной демонстрации построения и расположения графиков алгебраических функций, проведения исследования функций, а также для индивидуальной исследовательской работы учащегося, лучшего понимания и изучения темы, расширения кругозора в области математики» [38].

При помощи данной программы, ученик, задавая необходимые коэффициенты в уравнение функции, получает возможность увидеть соответствующие построение графика, проследить зависимость и закономерность в прохождении и расположении графика функции от введенных им коэффициентов, при необходимости воспользоваться масштабом. При такой работе, пользуясь наглядностью, пользователь лучше запоминает функции и вид их графиков.

Второй стороной программы являются исследования свойств функций и их графиков. Ученик самостоятельно разбирается в предоставленных ему свойствах данной функции и одновременно рассматривает изображение графика, анализируя и выстраивая зависимость. Данная часть программы дает возможность проверять домашние задачи по разделу "Алгебраические функции" как ученику, так и учителю, получать исследование функций и их графики.

Удобство работы с программой заключается во введении только коэффициентов уравнений функций, а не сложных полных записей уравнений. Программа отслеживает координаты курсора мыши, тем самым дает возможность определить координаты необходимых точек графика.

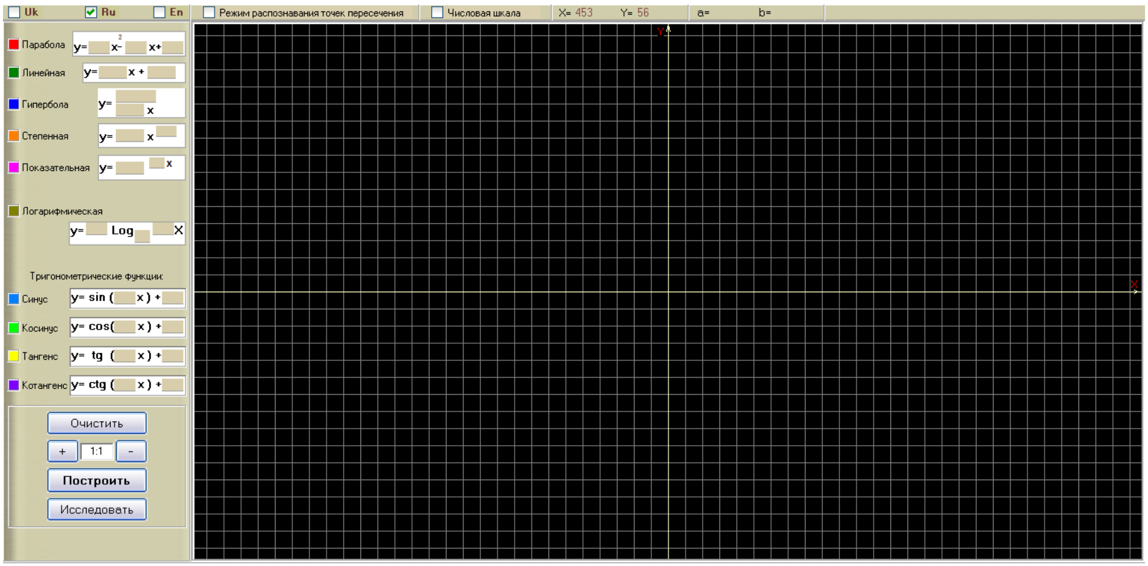


Рис. 40. Интерфейс обучающей программы «Glance»

В данной программе зададим рациональную функцию – гиперболу, задав масштаб нажимаем клавишу «Построить», получаем данную функцию с определенным цветом (цвет каждой заданной функции различен, чтобы увидеть явно точки их пересечения).

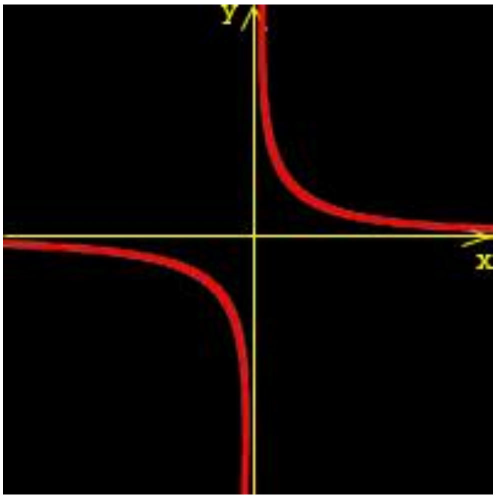


Рис. 41. Гипербола, изображенная программой «Glance»

Контроль учебных навыков, полученных при работе в данной программе, осуществляется с помощью тестирования. Ученику предлагается ответить на текстовый вопрос по данной теме или узнать название графика по его изображению, выбрав один правильный ответ из пяти.

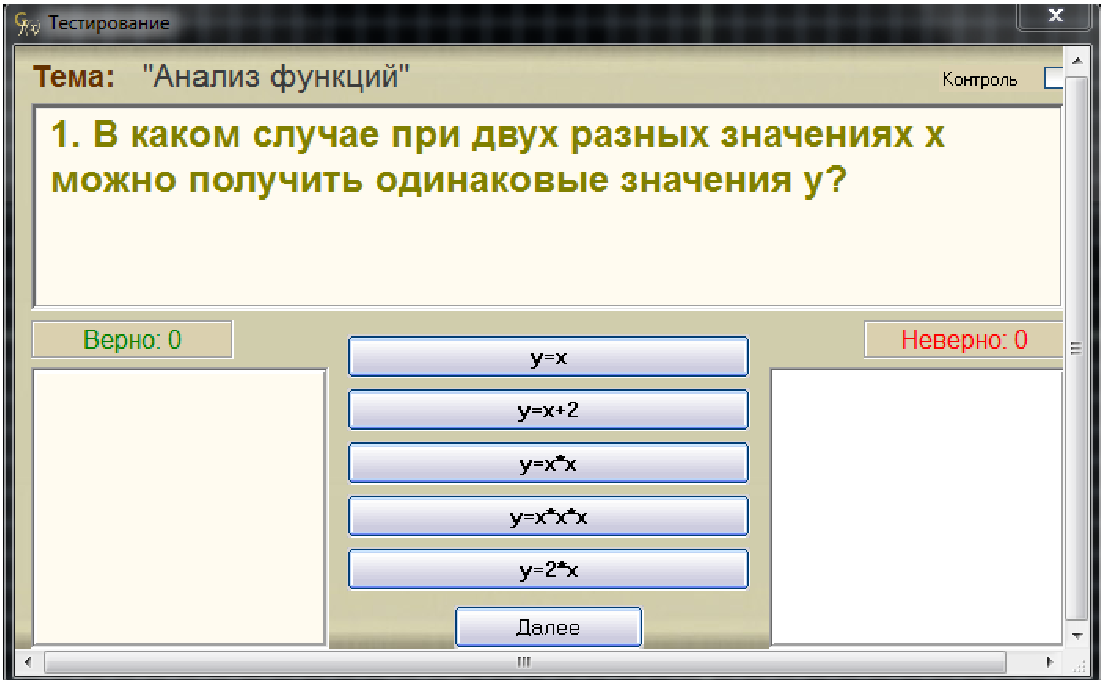


Рис. 42. Тестирование, проводимое программой «Glance»

Работа с тестом может осуществляться в режиме обучения или контроля.

Данная программа осуществляет контроль и усвоение знаний обучающихся по построению графиков алгебраических функций, в частности – *рациональных функций*.