МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Тольяттинский государственный университет»

Институт математики, физики и информационных технологий
(наименование института полностью)

Кафедра «Высшая математика и математическое образование»
(наименование кафедры)

44.03.01 «Педагогическое образование»
(код и наименование направления подготовки, специальности)

«Математика»
(направленность (профиль)/специализация)

БАКАЛАВРСКАЯ РАБОТА

на тему **«МЕТОДИКА ОБУЧЕНИЯ ТЕМЕ «ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ» В КУРСЕ АЛГЕБРЫ ОСНОВНОЙ ШКОЛЫ»**

Студент Е.Э. Василика ____________
(И.О. Фамилия) (личная подпись)

Руководитель Н.А. Демченкова ____________
(И.О. Фамилия) (личная подпись)

Консультант С.А. Гудкова ____________
(И.О. Фамилия) (личная подпись)

Допустить к защите

Заведующий кафедрой д.п.н., профессор, Р.А. Утеева ____________
(ученая степень, звание, И.О. Фамилия) (личная подпись)

«____»__________2018 г.

Тольятти 2018

АННОТАЦИЯ

Цель бакалаврской работы состоит в выявлении методических особенностей обучения учащихся теме «Последовательности» в курсе алгебры основной школы.

Вопрос изучения числовых последовательностей описан многими учеными. Задачи на последовательности имели место в древности и возникли из практической жизни. Например, распределение наследства между людьми, продуктов питания, и т.д. В мире есть любопытные закономерности, которые могут быть описаны с помощью математики. Последовательности часто встречаются в нашей жизни, например, номера домов, номера этажей, возраст, время, даты и так далее. Задачи по теме «Последовательности» представлены в основном государственном экзамене.

Бакалаврская работа состоит из введения, двух глав, заключения и списка литературы.

В *Главе I* раскрываются основные цели и задачи обучения теме в курсе алгебры основной школы; требования к знаниям, умениям и навыкам учащихся по этой теме; логико-математический анализ темы «Последовательности»; анализ теоретического и задачного материала по данной теме в учебниках алгебры разных авторов.

В *Главе II* представлены методические рекомендации обучения теме «Последовательности» в курсе алгебры основной школы; формы, методы и средства обучения; приведена типология задач основного государственного экзамена по теме исследования.

В *заключении* приведены основные выводы и результаты исследования, проводимые нами в результате работы по теме ВКР.

Список литературы содержит 21 наименование.

Объём работы составляет 58 страниц.

ABSTRACT

The title of graduation project is teaching methodology of the “Sequences” theme in the course of algebra at secondary school.

The purpose on the bachelor thesis is to identify methodological specifics of organizing the students teaching on the topic "Sequences" in the course of the algebra in the secondary school and develop a methodology of teaching the solution of tasks of increased difficulty on the topic of research.

Bachelor’s thesis consists of an introduction, two chapters, a conclusion and a list of references.

In the introduction the relevance of the topic is justified, the main characteristics are given.

Chapter 1 reveals the theory of the “Sequences” theme in the course of algebra at secondary school. The concept of logical-mathematical analysis of the theme is considered. The content of the theoretical and objective materials on the research topic is analyzed.

Chapter II presents the methodological basis for teaching students the topic of "Sequences". The main goals and tasks of teaching this subject and the requirements for knowledge and skills of students on this topic are determined. Methodical recommendations for teaching students the sequences in the course of algebra of the secondary school are presented. The technique of teaching the solution of problems of increased difficulty on the topic “Sequences”.

The conclusion contains the summary and the results of the study.

References include 21 items.

The **volume** of work is 58 pages.

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Актуальность исследования. Вопрос изучения числовых последовательностей описан многими учеными. Задачи на последовательность имели место в древности и возникли из практической жизни. Например, распределение наследства между людьми, продуктов питания, и т.д. В мире есть любопытные закономерности, которые могут быть описаны с помощью математики. Последовательности часто встречается в нашей жизни. Например, номера домов, номера этажей, возраст, время, даты и так далее.

Тема «Последовательности» изучается в курсе алгебры основной школы в программе 9 класса. Согласно федеральному государственному образовательному стандарту [15] основного общего образования, требования к предметным результатам темы «Последовательности» должны отражать:

«1. Сформированность представлений о математических понятиях как о важнейших математических моделях, позволяющих описывать и изучать разные процессы и явления; понимание возможности аксиоматического построения математических теорий.

2. Владение методами доказательств и алгоритмов решения; умение их применять, проводить доказательные рассуждения в ходе решения задач.

3. Владение стандартными приемами решения рациональных и иррациональных, показательных, степенных уравнений и неравенств, их систем.

4. Сформированность представлений об основных понятиях, идеях и методах математического анализа» [15].

Задачи по теме «Последовательности» представлены в основном государственном экзамене: задание 6 (раздел «Арифметические и геометрические прогрессии»).

Проблема исследования состоит в выявлении методических особенностей обучения теме «Последовательности» в курсе алгебры основной школы.

Объект исследования: процесс обучения алгебре в основной школе.

Предмет исследования: методика обучения теме «Последовательности» в курсе алгебры основной школы.

Цель исследования: выявить методические особенности обучения теме «Последовательности» в курсе алгебры основной школы.

Задачи исследования:

1. Сформулировать основные цели и задачи обучения теме «Последовательности» в курсе алгебре основной школы.

2. Рассмотреть логико-математический анализ темы «Последовательности» в школьном курсе математики (на примере темы «Последовательности»).

3. Выполнить анализ теоретического и задачного материала темы «Последовательности» в учебниках алгебры девятых классов.

4. Представить методические рекомендации обучения последовательностям в курсе алгебры основной школы.

5. Представить типологию задач основного государственного экзамена по теме «Последовательности»

Для решения задач были использованы следующие **методы исследования**: сравнительный анализ методической литературы; сравнительный анализ школьных программ и учебников; изучение опыта работы учителей математики; анализ собственного педагогического опыта, полученного во время прохождения педагогической практики.

Теоретическая значимость исследования состоит в том, что в нем выявлены методические особенности обучения учащихся теме «Последовательности» в курсе алгебры основной школы.

Практическая значимость исследования заключается в том, что в нем представлены методические рекомендации обучения учащихся теме

«Последовательности» в курсе алгебры основной школы, которые могут быть использованы учителями математики в практической деятельности и студентами в период педагогической практики в общеобразовательной школе.

На защиту выносятся:

1. Методические рекомендации обучения учащихся теме «Последовательности» в курсе алгебры основной школы.

2 Типология задач основного государственного экзамена по теме «Последовательности»

Бакалаврская работа состоит из введения, двух глав, заключения, списка литературы.

Во введении сформулированы основные характеристики исследования: актуальность, проблема, объект, предмет, цель, задачи и методы исследования.

Глава I бакалаврской работы раскрывает теоретические основы обучения теме «Последовательности» в курсе алгебры основной школы. В данной главе рассмотрено понятие логико-математического анализа содержания темы школьного курса математики (на примере темы «Последовательности»), выявлены основные цели и задачи обучения данной теме в курсе математики основной школы; определены требования к знаниям и умения учащихся по данной теме; выполнен анализ содержания теоретического и задачного материала по теме исследования.

В Главе II представлены методические основы обучения учащихся теме «Последовательности» в курсе алгебры основной школы; представлены методические рекомендации обучения учащихся теме «Последовательности» в курсе алгебры основной школы; выявлена типология задач основного государственного экзамена по теме исследования.

В заключении сформулированы основные результаты и выводы проведенного исследования.

Список литературы содержит 21 источник.

ГЛАВА I ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ОБУЧЕНИЯ ТЕМЕ «ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ» В КУРСЕ АЛГЕБРЫ ОСНОВНОЙ ШКОЛЫ

§ 1. Цели обучения и основные требования к знаниям и умениям учащихся по теме «Последовательности» в курсе алгебры основной школы

Тема «Последовательности» изучается в 9 классе. Проходя данную тему в школе, ученики не только учатся решать задания с арифметическими и геометрическими прогрессиями, но и находить члены последовательности по предложенным формулам, а также находить саму формулу, задающую последовательность.

Важность умения решать задания с последовательностью трудно недооценить. Если не забывать о том, что последовательности встречаются на каждом шагу в нашей повседневной жизни, то это ставить точку в вопросе о важности овладения навыком решения заданий с последовательностями рано.

В сборнике рабочих программ по алгебре Т.А. Бурмистровой, в разделе «Планируемые результаты изучения курса алгебры в 7-9 классах» выделяются следующие результаты изучения темы «Числовые последовательности»:

«Выпускник научится:

- понимать и использовать язык последовательностей (термины, символические обозначения);

- применять формулы, связанные с арифметической и геометрической прогрессиями, и аппарат, сформированный при изучении других разделов курса, к решению задач, в том числе с контекстом из реальной жизни.

Выпускник получит возможность научиться:

- решать комбинированные задачи с применением формул n-го члена и суммы первых n членов арифметической и геометрической прогрессий;

- понимать арифметическую и геометрическую прогрессии как функции натурального аргумента; связывать арифметическую прогрессию с линейным ростом, геометрическую — с экспоненциальным ростом» [1, С.16].

По окончанию изучения данной темы в школьном курсе математики основной школы ученик должен:

– «знать:

понятие числовой последовательности, понятие бесконечной числовой последовательности, понятие членов последовательности, два способа задания последовательности (с помощью формулы ее n-ого члена и рекуррентный способ), определение арифметической прогрессии, определение геометрической прогрессии, рекуррентную формулу n-ого члена арифметической прогрессии, рекуррентную формулу n-ого члена геометрической прогрессии, характеристическое свойство арифметической прогрессии и геометрической прогрессии, формулу n-ого члена арифметической и геометрической прогрессии; формулу суммы n первых членов арифметической прогрессии и геометрической прогрессии, определение бесконечно убывающей геометрической прогрессии, определение суммы бесконечно убывающей геометрической прогрессии, формулу суммы бесконечно убывающей геометрической прогрессии» [12].

– «уметь:

формулировать определение рекуррентного способа задания последовательности, формулировать определение арифметической и геометрической прогрессии, применять рекуррентную формулу n-ого члена арифметической и геометрической прогрессии, формулировать, доказывать и применять характеристическое свойство арифметической и геометрической прогрессии, применять формулу n-ого члена арифметической и геометрической прогрессии; доказывать и применять формулу суммы n первых членов арифметической и геометрической прогрессии, формулировать определение бесконечно убывающей геометрической прогрессии, формулировать определение суммы бесконечно убывающей геометрической прогрессии, применять формулу суммы бесконечно убывающей геометрической прогрессии» [12].

В пособии для учителей к учебникам Ю.Н. Макарычева, Н.Г. Миндюк, С.Б. Суворовой, И.С. Шлыковой говорится, что основными целями изучения арифметической прогрессии являются: «Понятие о последовательности и арифметической прогрессии, ознакомление учащихся с формулами n-го члена и суммы первых n членов арифметической прогрессии» [7, С.233]; геометрической прогрессии является: «Знакомство учащихся с понятием геометрической прогрессии, формулами n-го члена и суммы первых n членов геометрической прогрессии» [7, С.242].

Таким образом, выпускник получит возможность научиться в 7-9 классах для успешного продолжения образования на базовом уровне: *«В повседневной жизни и при изучении других предметов*: оперировать понятиями: последовательность, арифметическая прогрессия, геометрическая прогрессия; решать задачи на арифметическую и геометрическую прогрессию» [12, С.96].

Аналогично, выпускник получит возможность научиться в 7-9 классах для успешного продолжения образования на углубленном уровне: «В повседневной жизни и при изучении других предметов: исследовать последовательности, заданные рекуррентно; решать комбинированные задачи на арифметическую и геометрическую прогрессии» [12, С .108].

§2. Логико-математический анализ содержания темы «Последовательности» в курсе алгебры основной школы

Логико-математический анализ темы рассматривается в различной методической литературе. Е.И. Лященко описывает логико-математический анализ как содержимое логико-дидактического анализа. Н.Л. Стефанова же наоборот выделяет логико-математический анализ как более широкое понятие, содержащее логико-дидактический.

Прежде всего отметим, что предполагают под логико-математическим и логико-дидактическим анализами упомянутые выше авторы в методической литературе. Н.Л. Стефанова пишет, что в ходе логико-математического анализа, описывают:

«- цели обучения данной теме и результаты, полученные по окончанию обучения;

- определения, применяемые в теме и понятия, через которые эти определения задаются;

- математические утверждения в теме, не являющиеся определениями и их виды (теоремы, формулы и т.д.), вводимые и доказываемые в учебниках;

- роли и задачи геометрического и алгебраического материалов, приводимых в учебниках, и их особое место в рассматриваемой теме;

- решение, методы решения и оформление решения задач, которые рассматриваются в школьной программе.

О логико-дидактическом анализе, говорится, что его выполнение основывается на логико-математическом анализе и включает в себя:

- учебные задачи и выбор правильных сопутствующих познавательных действий;

- приёмы, средства и методы при обучении данной теме;

- формы контроля и формы оценки результатов учебной деятельности» [14].

Но Е.И. Лященко описывает логико-математический анализ как элемент, входящий в логико-дидактический, поэтому сначала опишем что такое логико-дидактический анализ в книге под редакцией Е.И. Лященко:

«- цели обучения теме;

- логико-математический анализ темы;

- выделение задач и применение учебно-познавательных действий;

- приёмы, методы и средства обучения;

- контроль, его формы, оценка обучения и результатов обучения» [5].

Теперь рассмотрим, что конкретно понимается под логико-математическим анализом, как элементом логико-дидактического анализа у Е.И. Лященко. Как пишет автор: «Логико-математический анализ сводится к определению понятной и обоснованной организации материала, основанной на специфике аксиоматического метода» [5]. Логико-математический анализ даёт нам ответ на вопрос «О чём можно узнать, при изучении данной темы?», помогает определить почему были выполнены те или иные преобразования, схемы исследований и доказательств.

При выполнении логико-математического анализа содержания темы школьного курса математики (на примере темы «Последовательности» в школьном курсе алгебры) остановимся на использовании методической работы Н.Л. Стефановой.

Далее, в следующих параграфах, мы подробнее рассмотрим элементы логико-математического анализа на примере темы «Последовательности» в школьном курсе математики.

Понятия необходимые для изучения темы «Последовательности»: Понятие функции, понятие области определения, понятие степени, понятие графика функции, понятие кусочной функции, понятие четных и нечетных чисел, понятие иррационального числа, понятие монотонности функции, решение уравнений, решение неравенств.

«Новые понятия темы «Последовательности»: Понятие числовой последовательности, понятие арифметической прогрессии, понятие разности арифметической прогрессии, понятие n-го члена арифметической прогрессии, понятие суммы первых n-членов арифметической прогрессии, свойство арифметической прогрессии, понятие геометрической прогрессии, понятие знаменателя геометрической прогрессии, понятие n-го члена геометрической прогрессии, понятие суммы первых n-членов геометрической прогрессии, свойство геометрической прогрессии» [3].

«Темы, в которых в дальнейшем используется понятие последовательности: Понятие предела последовательности, понятие суммы бесконечной геометрической прогрессии» [3].

Таблица 1

Методическое планирование темы «Последовательности» к учебнику А.Г. Мордковича

№ урока	Тема урока	Цель урока	Распределение задач	
			В классе	дома
1. Числовые последовательности (1-4 уроки)				
1.1	«Определение числовой последовательности. Способы задания» [8].	«Познакомить учащихся с понятием последовательности и способами задания последовательности» [8].	Отработка способов задания последовательности. Переход от словесного к аналитическому способу задания. № 15.1(а, в), 15.2(а,в), 15.3, 15.5, 15.8	§15 п1,2,3,4. №15.1(б, г), 15.2(б, г), 15.9.
1.2	«Способы задания числовой последовательности» [8].	«Решить задачи на определение способов задание на последовательности. Научиться различать» [8].	Решение задач на способы задания числовой последовательности. № 15.12(а), 15.15(а), 15.18(а), 15.19(а), 15.20(а).	§15 п1,2,3,4. № 15.12(б), 15.15(б), 15.18(б), 15.20(б).
1.3	«Монотонность числовой последовательности» [8].	«Ввести понятие монотонности последовательности» [8].	Отработка задач на монотонность последовательности. № 15.21(а, г), 15.22(а), 15.23(а, г), 15.24, 15.25(а).	§15 п5 № 15.22(б), 15.23(б), 15.25(б).
1.4	«Определение числовой последовательности» [8].	«Определить уровень усвоения о пройденной теме» [8].	Дифференцируемая самостоятельная работа.	§15 повтор.
2. Арифметическая прогрессия (5-9 уроки)				
2.1	«Основные понятия арифметической прогрессии .Формула n-го члена» [8].	«Познакомить учащихся с определением арифметической прогрессии, с разностью арифметической прогрессии. Вывести формулу арифметической прогрессии» [8].	Рассмотреть примеры арифметической прогрессии. Уметь узнавать арифметическую прогрессию. Отработать формулу n-го числа. № 16.1, 16.3(а, б), 16.4(а, в), 5(а), 6(а).	§ 16 п1,2 № 16.2, 16.3(б), 16.5(б), 16.6(б).
2.2	«Формула n-го члена арифметической прогрессии» [8].	«Отработка материала. Диагностическая работа» [8].	«Научиться применять формулу n-го члена арифметической прогрессии» [8] № 16.4(а, б), 16.6(а, б), 16.7(а, б), 16.18(а, б), 16.19(а, б), 16.26(а), 16.27(а).	§16 п2 № 16.4(в, г), 16.6(в, г), 16.7(в), 16.18(в), 16.19(б).

Продолжение Таблицы 1

2.3	«Сумма первых n членов арифметической прогрессий» [8].	«Познакомить учащихся с формулой суммы первых n членов арифметических прогрессий» [8].	«Научиться применять формулу суммы первых n членов арифметической прогрессии» [8]. № 16.33(а, б), 16.34(а, б), 16.36(а, б), 16.38.	§16 п3 № 16.33(в,г) 16.34(в, г), 16.36(в).
2.4	«Формула суммы первых n членов арифметикой прогрессии Характеристическое свойство арифметической прогрессии» [8].	«Выведение формулы суммы первых n членов арифметической прогрессии. Введение понятия характеристического свойства арифметической прогрессии» [8].	Решение задач на нахождение суммы первых n членов арифметической прогрессии. Решение задач на характеристическое свойство арифметической прогрессии. №16.39, 16.40(а, б), 16.41(а, б), 16.42(а), 16.47(а),16.59(а).	§16 п3,4 № 16.40(в), 16.41(в), 16.42(б), 16.47(в).
2.5	«Обобщающий урок по теме арифметические прогрессии» [8].	«Проведение дифференцируемой работы по теме арифметические прогрессии» [8].	Дифференцируемая самостоятельная работа.	§16 Повтор.
3. Геометрическая прогрессия (10-15 уроки)				
3.1	«Основные понятия геометрической прогрессии» [8].	«Познакомить учащихся с определением прогрессии, с знаменателем прогрессии» [8].	Рассмотреть примеры геометрической прогрессии. Уметь узнавать геометрическую прогрессию и отличать от арифметической прогрессии. № 17.1(а, б), 17.2, 17.5, 17.6.	§17 п 1 № 17.1(в, г), 17.3, 17.4.
3.2	«Формула n-го члена геометрической прогрессии» [8].	«Вывод формулы n-го члена геометрической прогрессии» [8].	«Научиться применять формулу n-го члена геометрической прогрессии» [8]. № 17.8(а, б) 17.9, 17.10(а, в), 17.12(а).	§17 п 2 № 17.8(в, г), 17.10(б, г), 17.12(б).
3.3	«Формула n-го члена геометрической прогрессии» [8].	«Отработка материала Диагностическая работа» [8].	Научиться решать задания на нахождение n-го члена геометрической прогрессии. № 17.13(а, б), 17.15(а, б), 17.17(а, б), 17.19(а).	§17 п2 № 17.13(в, г), 17.15(в), 17.17(в), 17.19(б).
3.4	«Сумма первых n членов геометрической прогрессии» [8].	«Познакомить учащихся с формулой суммы первых n членов геометрической прогрессии» [8].	«Научиться применять формулу суммы первых n членов геометрической прогрессии» [8]. № 17.25(а, б), 17.26(а, б), 17.28(а, б), 17.29(а, б).	§17 п3 № 17.25(в), 17.26(в), 17.28(в), 17.29(в).

Продолжение Таблицы 1

3.5	«Сумма первых n членов геометрической прогрессии Характеристичес кие свойства» [8].	«Решение задач. Введение понятия характеристического свойства геометрической прогрессии» [8].	«Решение задач на нахождение суммы первых n членов геометрической прогрессии. Решение задач на характеристическое свойство геометрической прогрессии» [8] № 17.30, 17.31(а), 17.47(а), 17.48(а), 17.50, 17.53.	§17 п3,4 17.31(б), 17.47(б), 17.48(б).
3.6	«Обобщающий урок по теме геометрические прогрессии» [8].	«Проведение дифференцируемой работы по теме геометрические прогрессии» [8].	Дифференцируемая самостоятельная работа.	§17 повтор. Дом. К.Р. стр. 118.
4. Контрольная работа по теме «Последовательности» (16 урок).				

Таким образом, умение хорошо выполнять логико-математический анализ отлично помогает в подготовке к уроку, так как включает в себя анализ учебных материалов, выбор форм методов и средств контроля обучения и обоснование этого выбора.

Логико-математический анализ основа методики обучения, лишь после его проведения, можно приступать к построению методики обучения.

§3. Анализ теоретического материала по темы «Последовательности» в учебниках алгебры основной школы

В учебниках алгебры разных авторов объем материала и его содержание имеют отличия. Но у большинства авторов прослеживается схожая стратегия, по которой строится структура программы.

Ниже будет представлен анализ содержания теоретического материала по теме «Последовательности» в Таблице 2 в различных учебниках алгебры 9 класса. Для анализа мы рассмотрим учебники из федерального перечня учебников, рекомендованных к использованию при реализации программ общего образования.

Таблица 2

Содержание темы
«Последовательности» в различных учебниках алгебры 9 класса

Авторы учебников	Содержание материала по теме «Последовательности»	Количество часов на изучение темы
Ю.М. Колягин, Ш.А. Алимов, Ю.В. Сидоров, М.В. Ткачёва, Н.Е. Фёдорова, М.И. Шабунин	«Прогрессии. Числовая последовательность. Арифметическая прогрессия. Сумма n первых членов арифметической прогрессии. Геометрическая прогрессия. Сумма n первых членов геометрической прогрессии» [4].	14 часов
Ю.Н.Макарычев, Н.Г. Миндюк, К.И. Нешкова, С.Б. Суворова	«Арифметическая и геометрическая прогрессии. Арифметическая прогрессия. Геометрическая прогрессия» [6].	17 часов
А.Г. Мордкович	«Прогрессии. Числовые последовательности. Арифметическая прогрессия. Геометрическая прогрессия» [9].	22 часа
Г.В. Дорофеев, С.Б. Суворова, Е.А. Бунимович, Л.В. Кузнецова, С.С. Минаева	«Арифметическая и геометрическая прогрессии. Числовые последовательности. Арифметическая прогрессия. Сумма первых n членов арифметической прогрессии. Геометрическая прогрессия. Сумма первых n членов геометрической прогрессии. Простые и сложные проценты квадратов первых n натуральных чисел. Треугольник Паскаля» [2].	17 часов

В учебнике «Алгебра. 9 класс» Ю.М. Колягина понятие последовательности вводится в 4 главе Прогрессии. §17 автор начинает с понятий *числовой последовательности* и *бесконечной числовой последовательности*. §18 Арифметическая прогрессия. В этом параграфе автор выделяет такие понятия как «*арифметическая прогрессия* и *формула n-го члена арифметической прогрессии*.» [4]. §19 «Сумма n первых членов арифметической прогрессии» [4]. Этот параграф начинается с *теоремы суммы n первых членов арифметической прогрессии* и *формулы нахождения суммы*. Так же авторы на примере показывают, как использовать эту формулу. §20 Геометрическая прогрессия. «В этом параграфе даются определения *геометрической прогрессии*, *знаменателя геометрической прогрессии* и *формула n-го члена геометрической прогрессии»* [4]. §21

«Сумма n первых членов геометрической прогрессии. Параграф посвящён *сумме n первых членов геометрической прогрессии и ее нахождению*» [4]. После каждого параграфа идут задачи на закрепление и отработку навыков, а в конце главы вопросы для самопроверки.

В учебнике «Алгебры 9 класс» Ю.Н. Макарычева изучение темы «Последовательности» рассматривается в 4 главе Арифметическая и геометрическая прогрессия. §9 «Арифметическая прогрессия». В пункте 24 автор рассматривает определение *последовательности, членов последовательности*, *бесконечной последовательности*, *n-ого члена последовательности*, *конечной последовательности*, дана *формула n-го члена последовательности* и *числа Фибоначчи*. «Темой пункта 25 является определение *арифметической прогрессии* и *Формула n-го члена арифметической прогрессии*. Следующей темой рассматривается определение *арифметической прогрессии*, *разности арифметической прогрессии* и вводится *формула нахождения n-го члена арифметической прогрессии*» [6]. Также в этом пункте рассматривают *свойства арифметической прогрессии*, чего не делают авторы других учебников. Пункт 26 начинается с изучения «*формулы суммы первых n членов арифметической прогрессии*» [6]. §10 «Геометрическая прогрессия» [6]. В пункте 27 автор подробно рассматривает «определение *геометрической прогрессии* и *формулу n-го члена геометрической прогрессии*» [6]. Так же этом пункте дается «определение *знаменателя геометрической прогрессии* и *формула геометрической прогрессии»* [6], определение *показательной (экспоненциальной) функции*, а также приводят *свойства геометрической прогрессии,* чего не делают авторы других учебников. Пункт 28 «Формула суммы первых n членов геометрической прогрессии начинается с введения *формулы суммы первых n членов геометрической прогрессии*» [6]. Пункт 29 предлагается для классов с углубленным изучением математики, в нем вводится *понятие математической индукции* и *принцип математической индукции*.

После каждого параграфа идут задачи на закрепление и отработку навыков, а в конце главы вопросы для самопроверки

В учебнике «Алгебра. 9 класс», А.Г. Мордкович вводит последовательности в 4 главе «Прогрессия». §15 «Числовые последовательности». В 1 пункте А.Г. Мордкович вводит определение *числовых последовательностей* и *функцию натурального аргумента*. В следующих 4-х пунктах автор показывает разные виды последовательностей, такие как *аналитически заданная, словесно заданная, рекуррентно заданная* и *монотонная последовательность*. §16 «Арифметическая прогрессия». В 1 пункте рассматриваются такие основные понятия, как *определение арифметической прогрессии* и *разность арифметической прогрессии*. В пункте 2 – *формула n-го члена арифметической прогрессии*» [9]. В пункте 3 дана *формула суммы членов конечной арифметической прогрессии*. Приводится сама формула в двух видах. В пункте 4 рассматривается *характеристическое свойство арифметической прогрессии*. §17 «Геометрические прогрессии». Темой пункта 1 является «*основные понятия геометрической прогрессии*, далее дается *формула n-го члена геометрической прогрессии*» [9]. В пункте третьем – *формула суммы членов конечной геометрической прогрессии*, в 4 пункте автор вводит такое понятие, как *характеристические свойства геометрической прогрессии*, в 5 – *прогрессия и банковские расчеты*. В конце главы приводятся основные результаты изученной темы.

В учебнике «Алгебра 9 класс» В.В. Дорофеева, изучение темы «Последовательности» начинается с изучения темы *числовые последовательности*, так же вводится понятие *чисел Фибоначчи, формула n-го члена последовательности»* [2]. В следующем пункте рассматривается «определение *арифметической прогрессии* и *формула n-го члена арифметической прогрессии*» [2]. В пункте 4.3 автор рассматривает тему *суммы первых n – х членов арифметической прогрессии в двух видах*. Пункт 4.4. дается «определение *арифметической прогрессии* и *формула n-го члена* *арифметической прогрессии*» [2]. В следующем пункте автор дает *формулу суммы первых n членов геометрической прогрессии*, темой пункта 4.6. является *простые и сложные проценты*. После этого в пункте 4.7. *дается формула суммы квадратов первых n натуральных чисел* (для классов с углубленным изучением алгебры). Пункт 4.8. начинается с понятия *треугольника Паскаля* и *формулы бинома Ньютона*. В завершении главы представлена подборка заданий для закрепления изученных тем, а также задания для самопроверки и тест.

Таким образом, все авторы рассмотренных учебников алгебры 9 класса придерживаются одного плана рассмотрения содержания темы «Последовательности». Более подробно содержание данной темы рассмотрено в учебниках А.Г. Мордковича и Г.В. Дорофеева. Так, А.Г.Мордкович включает в тему разные виды последовательностей, такие как аналитически, словесно, рекуррентно заданная и выделяет на всю тему самое большое количество часов. А Г.В. Дорофеев включает в тему понятие треугольника Паскаля и формулы бинома Ньютона. В каждом учебнике данной теме уделяется отдельная глава. В остальном авторы придерживаются одной структуры выстраивания параграфов и пунктов по данной теме.

Таблица 3

Основные понятия темы «Последовательности»

Ю.Н.Макарычев, Н.Г. Миндюк	А.Г. Мордкович	Ш.А. Алимов, Ю.М. Колягин	Г.В. Дорофеев, С.Б. Суворова
Понятие числовой последовательности			
«Последовательность –это порядок возрастания положительных четных чисел» [6, С.138].	«Функцию $y = f(x)$, $x \in N$, называют функцией натурального аргумента или числовой последовательностью и обозначают $y=f(n)$ или $y_1, y_2, y_3,\ldots,y_n, \ldots$» [9, С.139].	Автор данного учебника рассматривает понятие числовой последовательности на конкретном примере.	Автор данного учебника рассматривает понятие числовой последовательности на примере чисел Фибоначчи.

Продолжение Таблицы 3

Понятие арифметической прогрессии			
«Арифметической прогрессией называется последовательность, каждый член которой, начинается со второго, равен предыдущему члену, сложенному с одним и тем же числом»[6, С.141].	«Числовую последовательность, каждый член которой, начиная со второго, равен сумме предыдущего члена и одного и того же числа d, называют арифметической прогрессией»[9, С.145].	«Числовая последовательность $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_N, \ldots$ называется арифметической прогрессией, если для всех натуральных n выполняется равенство $a_{n+1} = a_n + d$, где d- некоторое число» [4, С.92].	«Арифметической прогрессией называется последовательность, каждый член которой, начиная со второго, получается прибавлением к предыдущему одного и того же числа» [2, С.209].
Понятие разности арифметической прогрессии			
«Из определения арифметической прогрессии следует, что разность между любым ее членом, начиная со второго, и предыдущим членом равна d, т.е при любом натуральном n верно равенство $a_{n+1} - a_n = d$.» [6, С.141].	«Числовую последовательность, каждый член которой, начиная со второго, равен сумме предыдущего члена и одного и того же числа d, называют арифметической прогрессией. При этом число d называют разностью прогрессии» [9, С.145].	«Из формулы $a_{n+1} = a_n + d$, следует, что $a_{n+1} - a_n = d$. Число d называют разностью арифметической прогрессии» [4, С.92].	«Прибавляемое число равно разности между любыми двумя соседними членами прогрессии-последующими предыдущим. Это число называют разностью арифметической прогрессии и обозначают буквой d» [2, С. 210].
Понятие свойства арифметической прогрессии			
«Каждый член арифметической прогрессии, начиная со второго, равен среднему арифметическому предыдущего и последующего членов» [6, С.143].	«Числовая последовательность является арифметической прогрессией тогда и только тогда, когда каждый ее член, кроме первого (и последнего – в случае конечной последовательности), равен среднему арифметическому предшествующего и последующего членов» [9, С.155].	Свойство не рассматривается.	Свойство не рассматривается

Продолжение Таблицы 3

Понятие геометрической прогрессии			
«Геометрической прогрессией называется последовательность отличных от нуля чисел, каждый член которой, начиная со второго, равен предыдущему члену, умноженному на одно и то же число»[6, С.153].	«Числовую последовательность, все члены которой отличны от нуля и каждый член которой, начиная со второго, получается из предыдущего члена умножением его на одно и то же число q, называют геометрической прогрессией» [9, С.156].	«Числовая последовательность $b_1, b_2, b_3, \ldots, b_N, \ldots$ Называется геометрической прогрессией, если для всех натуральных n выполняется равенство $b_{n+1} = b_n q$, где $b_n \neq 0$, q - некоторое число, не равное нулю» [4, С.101].	«Геометрической прогрессией называют последовательность, каждый член которой, начиная со второго, равен предыдущему члену, умноженному на одно и то же не равное нулю число» [2, С.225].
Понятие знаменателя геометрической прогрессии			
«Из определения геометрической прогрессии следует, что отношение любого ее члена, начиная со второго, к предыдущему члену равно q, т.е. при любом натуральном n верно равенство $\frac{b_n+1}{b_n} = q$. Число q называют знаменателем геометрической прогрессии.» [6, С.154].	«Числовую последовательность, все члены которой отличны от нуля и каждый член которой, начиная со второго, получается из предыдущего члена умножением его на одно и то же число q, называют геометрической прогрессией. При этом число q называют знаменателем прогрессии» [9, С.156].	«Из формулы $b_{n+1} = b_n q$ следует, что (дробь стр 101) Число q называется знаменателем геометрической прогрессии» [4, С.101].	«Число, на которое умножаются члены прогрессии, называют знаменателем геометрической прогрессии» [2, С.225].
Понятие свойства геометрической прогрессии			
«Квадрат любого члена геометрической прогрессии, начиная со второго, равен произведению предыдущего и последующего ее членов» [6, С.156].	«Числовая последовательность является геометрической прогрессией тогда и только тогда, когда квадрат каждого ее члена, кроме первого, равен произведению предшествующего и последующего членов» [9, С.167].	Автор данного учебники не рассматривает понятие свойства геометрической прогрессии	Автор данного учебники не рассматривает понятие свойства геометрической прогрессии

Таблица 4

Последовательность рассмотрения материала

Учебник	Количество часов	Последовательность рассмотрения материала
Ю.Н. Макарычев Н.Г. Миндюк, К.И. Нешкова, С.Б. Суворова	17	«-числовая последовательность; члены последовательности; бесконечная числовая последовательность; n - ый член; последовательности; конечная последовательность; формула n-го члена последовательности; числа Фибоначчи; -арифметическая прогрессии; формула n- го члена арифметической прогрессии; разность арифметической прогрессии; свойства арифметической прогрессии; формула суммы первых n арифметической прогрессии; -геометрическая прогрессия; знаменатель геометрической прогрессии; показательная (экспонентная) функция; свойства геометрической прогрессии; формула суммы первых n членов геометрической прогрессии; -математическая индукция; принцип математической индукции» [6].
А.Г. Мордкович	22	«-числовая последовательность; формула натурального аргумента; -аналитическое задание последовательности; словесное задание последовательности; рекуррентное задание последовательности; монотонная последовательность; -арифметическая прогрессия; разность арифметической прогрессии; формула n-го члена арифметической прогрессии; формула суммы членов конечной арифметической прогрессии (в 2х видах); характеристическое свойство арифметической прогрессии; -геометрическая прогрессия; формула n- го члена геометрической прогрессии; формула суммы первых n членов геометрической прогрессии; характеристическое свойство геометрической прогрессии; -банковские расчеты» [9].
Ш.А. Алимов, Ю.М. Колягин, Ю.В. Сидоров, М.В. Ткачёва, Н.Е. Фёдорова, М.И. Шабунин	14	«-числовая последовательность; члены последовательности; бесконечная числовая последовательность; рекуррентный способ задания последовательности; -арифметическая прогрессия; разность арифметической прогрессии; формула n-го члена арифметической прогрессии; формула суммы первых n членов арифметической прогрессии; -геометрическая прогрессия; знаменателя геометрической прогрессии; формула n-го члена геометрической прогрессии; формула сложных процентов; формула суммы первых n членов геометрической прогрессии» [4].

Продолжение Таблицы 4

Г.В. Дорофеев, С.Б. Суворова, Е.А. Бунимович, Л.В. Кузнецова, С.С. Минаева	17	«-числа Фибоначчи; -числовая последовательность; формула n -го члена последовательности; -арифметическая прогрессия; формула n-го члена; арифметической прогрессии; формула суммы первых n членов арифметической прогрессии; -Геометрическая прогрессия; формула n-го члена геометрической прогрессии; формула суммы первых n членов геометрической прогрессии; -Простые и сложные проценты; -Формула суммы квадратов первых n натуральных чисел; -Треугольник Паскаля; -Формула Бинома Ньютона»[2].

§4. Анализ задачного материала по темы «Последовательности» в учебниках алгебры основной школы

В результате анализа задачного материала в общеобразовательных учебниках алгебры основной школы можно выделить следующие типы задач по теме «Последовательности»:

1 тип. Числовые последовательности.

1. Аналитическое задание последовательности.
2. Словесное задание последовательности.
3. Рекуррентное задание последовательности.

2 тип. Арифметическая прогрессия.

1. Нахождение арифметической прогрессии с помощью определения.
2. Нахождение арифметической прогрессии с помощью формулы n-го члена.
3. Нахождение n-го члена арифметической прогрессии.
4. Нахождение разности арифметической прогрессии.
5. Является ли число членом заданной арифметической прогрессии.
6. Нахождение суммы первых n членов арифметической прогрессии.
7. Характеристическое свойство арифметической прогрессии.

3 тип. Геометрическая прогрессия.

1. Нахождение геометрической прогрессии с помощью определения.

2. Нахождение n-го члена геометрической прогрессии.

3. Нахождение знаменателя геометрической прогрессии.

4. Является ли число членом заданной геометрической прогрессии.

5. Нахождение суммы первых n членов геометрической прогрессии.

6. Характеристическое свойство геометрической прогрессии.

В результате анализа задачного материала в учебниках с углубленным изучением алгебры основной школы, можно добавить следующие виды задач:

1. Задачи на применение метода математической индукции.

2. Задачи на простые и сложные проценты квадратов первых n натуральных чисел.

3. Числа Фибоначчи.

Рассмотрим вышеперечисленные виды заданий с последовательностями на примере общеобразовательного учебника А.Г. Мордковича [10].

1 тип. Числовые последовательности

1. *Аналитическое задание последовательности*

Пример 1.

«По заданной формуле n-го члена последовательности вычислите ее первые пять членов $x_n = (-2)^n$» [10, С.96].

Решение: $x_n=(-2)^n$; $x_1=-2$, $x_2=4$, $x_3=-8$, $x_4=16$, $x_5=-32$

Ответ: $x_1=-2$, $x_2=4$, $x_3=-8$, $x_4=16$, $x_5=-32$

2. *Словесное задание последовательности.*

Пример 2.

«Найдите сумму первых семи членов последовательности, заданной словесно: n-й член последовательности равен десятичной дроби, целая часть которой равна нулю, а после запятой стоят подряд ровно n единиц» [10, С.97].

Решение: a_n – последовательность

$a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+a_6+a_7=0{,}1+0{,}11+0{,}111+0{,}1111+0{,}11111+0{,}111111+0{,}1111111+0{,}11111111=0{,}7654321$.

Ответ: *0,7654321*.

3. *Рекуррентное задание последовательности*

Пример 3.

«Задайте последовательность рекуррентным способом *2, 2, 2, 2, 2,…* » [10, С.97].

Решение: $x_{n+1} = x_n,\ x_1=2;$

Ответ: $x_{n+1} = x_n,\ x_1=2;$

Пример 4.

«Выпишите первые шесть членов последовательности (x_n), заданной рекуррентно *x1 = 1, xn = -x(n-1) + 5 (n = 2, 3, 4, ...)*» [10, С.95].

Решение: $x_1 = 1,\ x_2 = 4,\ x_3 = 1,\ x_4=4,\ x_5 = 1,\ x_6=4$

Ответ: *1,4,1,4,1,4*

2 тип. Арифметическая прогрессия.

1. *Нахождение арифметической прогрессии с помощью определения.*

Пример 5.

«Запишите конечную арифметическую прогрессию (a_n), заданную следующими условиями:

а) $a_1 = -2,\ d = 4,\ n = 5$» [10, С.99].

Решение: $a_1=-2,\ d=4,\ n=5;-2;2;6;10;14$

Ответ: *5;-2;2;6;10;14*

2. *Нахождение арифметической прогрессии с помощью формулы n-го члена.*

Пример 6.

«Зная формулу n-го члена арифметической прогрессии (a_n), найдите a_1 и d. $a_n = -((n + 1) / 4)$» [10, С.104].

Решение: $a_n=-\frac{n+1}{4},\ a_1=-\frac{1}{2},\ d=-\frac{1}{4},$

Ответ: $a_1=-\frac{1}{2}$,$d=-\frac{1}{4}$

Пример 7.

«Зная формулу *n*-го члена арифметической прогрессии (a_n), найдите a_1 и d а) $a_n = 3_n - 2$» [10, С.100].

Решение: $a_n=3_n-2 => a_1=1$ *и* $d=a_{n+1}-a_n=3(n+1)-2-3_n+2=3$

Ответ: $a_1=1;\ d=3$

3. Нахождение n-го члена арифметической прогрессии.

Пример 8.

«Дана арифметическая прогрессия (a_n). Вычислите: а) $a6$, если $a1 = 4,\ d = 3$» [10, С.100].

«Решение: $a_6 = a_1 + 5d = 4+5\bullet3 = 19$;

Ответ: $a_6 = 19$» [8].

Пример 9.

«Найдите первый член арифметической прогрессии (a_n), если: а) $a_7 = 9,\ d = 2$» [10, С.101].

Решение: $a_7 = a_1 + 6d,\ a_1 = a_7 - 6d = 9-6\cdot 2 = -3$

Ответ: $a_1 =-3$

4. Нахождение разности арифметической прогрессии.

Пример 10.

«Найдите первый член и разность арифметической прогрессии: $3, -1,-5, -9,...$ » [10, С.99].

«Решение: $a_1 =3;\ d = - 4$

Ответ: $a_1 =3;\ d = - 4$» [8].

Пример 11.

«Найдите разность и десятый член арифметической прогрессии: $1, 3, 5, 7, ...$» [10м, С.99].

Решение: $d = a_2 - a_1 = 3-1=2;\ a_{10} = a_1 + 9d =1+ 9 \cdot 2 = 19;$

Ответ: $d = 2,\ a_{10} =19$

5. *Является ли число членом заданной арифметической прогрессии.*

Пример 12.

«Проверьте является ли число $4{,}5$ членом арифметической прогрессии $1{,}5$, -1, $-0{,}5$, ...» [10, С.101].

Решение: $a_1 = -1{,}5;\ d = 0{,}5$, так что $4{,}5 = a_1 + 12d$, то есть $4{,}5$ – 13-й член прогрессии.

Ответ: да, является

Пример 13.

«Является ли число b членом заданной арифметической прогрессии (an)? Если да, то укажите номер этого члена» [10, С.102].

$a1 = 5,\ d = 0{,}3,\ b = 21{,}2$

Решение: $b = a_1 + (n-1)d,\ \ n = \frac{b - a_1}{d} + 1$, если b является членом прогрессии; $n = \frac{21{,}22-5}{0{,}3} + 1 = 55$

Ответ:55

6 Нахождение суммы первых n членов арифметической прогрессии.

Пример 14.

«Найдите сумму Sn членов конечной арифметической прогрессии (a_n), если известны первый и последний ее члены: » [10, С.103] а) $a_1 = -1,\ a_{30} = 86$

Решение: $S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$; а) $S_{30} = \frac{-1+86}{2} \cdot 30 = 1275$

Ответ: $S_n = 1275$

Пример 15.

«Найдите сумму первых тридцати членов арифметической прогрессии (an), заданной формулой n-го члена: $a_n = 4_n + 3$» [10, С.103].

Решение: $S_{30} = \frac{a_1 + a_{30}}{2} \cdot 30 = 15(a_1 + a_{30});\ S_{30} = 15(4+3+4 \cdot 30+3) = 1950$

Ответ: $S_{30} = 1950$

7 Характеристическое свойство арифметической прогрессии.

Пример 16.

«Дана арифметическая прогрессия (a_n). Найдите $a_{10} + a_{20}$, если известно, что $a_9 + a_{11} = 44$ и $a_{19} + a_{21} = 104$» [10, С.104].

Решение: $a_{10}+a_{20}=\frac{a_9+a_{11}}{2}+\frac{a_{19}+a_{21}}{2}=\frac{44}{2}+\frac{104}{2}=74$

Ответ: $a_{10}+a_{20}=74$

3 тип. Геометрическая прогрессия.

1. Нахождение геометрической прогрессии с помощью определения.

Пример 17.

«Дана возрастающая последовательность всех степеней числа 3 с натуральными показателями. Является ли эта последовательность геометрической прогрессией? Если да, то чему равен ее знаменатель?» [10, С.108].

Решение: $b_1 = 3$, $b_2 = 3^2 = 9$, $b_3 = 3^3 = 27,\ldots$ Это геометрическая прогрессия со знаменателем $q = 3$.

Ответ: $q = 3$

2. Нахождение n-го члена геометрической прогрессии.

Пример 18.

«Найдите первый член и знаменатель геометрической прогрессии, заданной формулой n-го члена: $b_n = 2/5 \cdot 3^n$» [10, С.114].

Решение: $b_1=\frac{6}{5}$, $q=3$

Ответ: $b_1=\frac{6}{5}$, $q=3$

Пример 19.

«Зная формулу n-го члена геометрической прогрессии (b_n), определите b_1 и q: $b_n = 5^{(n-1)}$» [10, С.110].

Решение: $b_n= 5^{n-1}$, $b_n= b_1.q^{n-1}$, $b_1 = 1$, $q = 5;$

Ответ: $b_1 = 1$, $q = 5;$

Пример 20.

«Последовательность (b_n) — геометрическая прогрессия. Найдите: b_4, если $b_1 = 128$, $q = -(1/2)$» [10, С.109].

«Решение: $b_4=b_1\cdot q^3=128\cdot(-\frac{1}{2})^3=-16$

Ответ: $b_4=-16$» [8].

Пример 21.

«Найдите указанный член геометрической прогрессии (b_n) по заданным условиям: $b_1 = -2,\ q = -1\cdot(1/2);\ b_4 = ?$» [10, С.110].

Решение: $b_4=b_1\cdot q^3=-2\cdot(-\frac{3}{2})^3=\frac{27}{4}$

Ответ: $b_4=\frac{27}{4}$

3. Нахождение знаменателя геометрической прогрессии.

Пример 22.

«Найдите знаменатель геометрической прогрессии (b_n), если: $b_1 = 7,\ b_4 = 448$» [10, С.111].

Решение: $b_1=7,\ b_4=448,\ b_4=b_1*q^3=>q=\sqrt[3]{\frac{b_4}{b_1}}=\sqrt[3]{64}=4$

Ответ: $q=4$

Пример 23.

«Найдите b_1 и q для геометрической прогрессии (b_n), заданной следующими условиями: $b_2 = 8,\ b_3 = -32$» [10, С.110].

Решение: $q=\frac{b_3}{b_2}=\frac{-32}{8}=-4;\ b_1=\frac{b_2}{q}=-2$

Ответ: $q=-4; b_1=-2$

4. Является ли число членом заданной геометрической прогрессии

Пример 24.

«Является ли число b членом геометрической прогрессии (b_n)? Если да, то укажите его номер: $b_n = 1/6 \cdot 0{,}1\text{^}(2n+1),\ b = 1/600$» [10, С.111].

Решение: $b_n=\frac{1}{6} * 0{,}1^{2n+1}$, $B=\frac{1}{600}$; $\frac{1}{6} *0{,}1^{2n+1}=\frac{1}{600} \Leftrightarrow 0{,}1^{2n+1}=0{,}1^2 \Leftrightarrow 2_n+1=2 \Leftrightarrow n=0{,}5$, чего не может быть. b не является членом геометрической прогрессии.

Ответ: не является

5. Нахождение суммы первых n членов геометрической прогрессии.

Пример 25.

«Найдите сумму первых четырех членов геометрической прогрессии (b_n), заданной следующими условиями: $b_1 = 1,\ q = 2$» [10, С.112].

«Решение: $S_n=\frac{b_1(q^n-1)}{q-1}$; а)$S_4=\frac{1(2^4-1)}{2-1}$=15» [8].

Ответ: S_4=15

Таблица 5

Типы задач по уровням сложности (по учебнику А.Г. Мордковича)

Типы задач	Базовый уровень	Повышенный уровень	Продвинутый уровень
1 тип Числовые последовательности			
1. Аналитическое задание последовательности	№15.5, 15.12, 15,14, 15.25-15.27, 15.35, 15.37-15.40	15.18, 15.19	
2. Словесное задание последовательности	15.5, 15.28, 15.29, 15.34	15.15-15.17	
3. Рекуррентное задание последовательности	15.5, 15.31, 15.32	15.20, 15.21	
2 тип Арифметическая прогрессия			
1. Нахождение арифметической прогрессии с помощью определения	16.1-16.6		
2. Нахождение арифметической прогрессии с помощью формулы n-го члена последовательности	16.47	16.11, 16.13	
3. Нахождение n-го члена арифметической прогрессии	16.14-16.16, 16.22, 16.23, 16.48, 16.49, 16.51, 16.54, 16.58, 16.60-16.66	16.7, 16.18, 16.19, 16.24, 16.26, 16.30-16.32	16.52, 16.56, 16.57, 16.68-16.70
4. Нахождение разности арифметической прогрессии	16.3, 16.50, 16.53	16.11, 16.12, 16.17, 16.25	
5. Является ли число членом заданной арифметической прогрессии	16.20, 16.21, 16.55	16.27-16.29	
6. Нахождение суммы первых n членов арифметической прогрессии	16.33-16.36	16.37-16.39, 16.45, 16.46	16.59

Продолжение Таблицы 5

7.Характеристическое свойство арифметической прогрессии	16.40, 16.41, 16, 67	16.42-16.44	
3 тип Геометрическая прогрессия			
1. Нахождение геометрической прогрессии с помощью определения	17.1-17.5		
2. Нахождение геометрической прогрессии с помощью формулы n-го члена последовательности			
3. Нахождение n-го члена геометрической прогрессии	17.9, 17.10, 17.13, 17.14, 17.18, 17.36-17.39, 17.43, 17.51, 17.52	17.11, 17.12, 17.15, 17.16, 17.18, 17.21-17.24, 17.31, 17.35, 17.53-17.58	
4. Нахождение знаменателя геометрической прогрессии	17.8, 17.9, 17.36, 17.37, 17.39, 17.40, 17.41, 17.44	17.12, 17.15, 17.19, 17.20, 17.22, 17.31	
5. Является ли число членом заданной геометрической прогрессии		17.17	
6. Нахождение суммы первых n членов геометрической прогрессии	17.25, 17.36, 17.39, 17.45-17.49, 17.51, 17.52	17.26-17.30	17.50
7.Характеристическое свойство геометрической прогрессии		17.31-17.34	

Выводы по первой главе

При написании первой главы были решены поставленные задачи и выполнено следующее:

1. Рассмотрено понятие логико-математического анализа содержания темы «Последовательности». Понятие было рассмотрено в учебниках Н.Л. Стефановой и Е.И. Лященко.

2. Выявлены основные цели и задачи обучения теме «Последовательности» в курсе алгебры основной школы.

3. Прописаны основные требования к знаниям и умениям учащихся по теме «Последовательности» в курсе алгебры основной школы.

4. Выполнен анализ содержания теоретического материала темы «Последовательности» в учебниках алгебры 9 классов; рассмотрены общеобразовательные учебники и учебники с углубленным с изучением алгебры разных авторов.

5. Предоставлен анализ содержания задачного материала темы «Последовательности» в учебниках алгебры 9 классов; решены примеры по каждому виду последовательности.

ГЛАВА II. МЕТОДИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ОБУЧЕНИЯ ТЕМЕ «ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ» В КУРСЕ АЛГЕБРЫ ОСНОВНОЙ ШКОЛЫ

§5. Формы, методы и средства обучения теме «Последовательности» в курсе алгебры основной школы

Прежде чем перейти к формам, методам и средствам обучения теме «Последовательности» необходимо определить, что именно понимается под этими понятиями.

«Метод в своем общем значении есть путь, способ, система приемов, применяемая человеком для достижения определенной цели» [13, С.13].

Таблица 6

«Классификация методов обучения

<table>
<tr><td colspan="7">Методы обучения</td></tr>
<tr><td colspan="7">1 По источникам и способам передачи информации</td></tr>
<tr><td colspan="2">Словесные</td><td colspan="2">Наглядные е</td><td colspan="2">Практические</td><td>Информационно-коммуникационные</td></tr>
<tr><td colspan="7">2 По характеру и уровню познавательной деятельности учащихся</td></tr>
<tr><td colspan="3">Методы готовых знаний</td><td colspan="4">Исследовательские методы</td></tr>
<tr><td>Словесно-догматический</td><td>Объяснительно-иллюстративный</td><td>Репродуктивный</td><td>Проблемный</td><td>Частично-поисковый</td><td colspan="2">Эвристический</td></tr>
<tr><td colspan="7">3 По характеру деятельности учащихся</td></tr>
<tr><td colspan="2">Активные</td><td colspan="3">Пассивные</td><td colspan="2">Творческие</td></tr>
<tr><td colspan="7">4 В зависимости от характера дидактических задач</td></tr>
<tr><td>Методы приобретения Знаний Умений Навыков</td><td>Методы формирования Способов Умственной Деятельности</td><td>Методы формирования Сферы Творческих Качеств</td><td>Методы закрепления</td><td>Методы повторения</td><td>Методы контроля</td><td>Методы самостоятельной домашней работы</td></tr>
</table>

» [13, С.14]

Так как задания на последовательности встречаются в ОГЭ по математике, то эффективнее использовать исследовательские методы:

1. Проблемный метод

При объяснении нового материала по теме «Формула n-го члена арифметической прогрессии» учитель задает проблемную ситуацию. Например, найти 1000-ый член арифметической прогрессии.

Ученики, решая эту проблему выводят формулу n-го члена арифметической прогрессии.

2. Частично-поисковый метод

Учитель задает задачу, направляет детей в нужную сторону для решения этой задачи. Учащиеся должны прийти к выводу формулы, например, суммы первых n членов арифметической прогрессии

3. Эвристический

Этот метод используется в классах с углубленным изучением математики

Так же при работе с этой темой можно использовать методы готовых знаний. Например, объяснительно-иллюстративный, учитель с помощью плакатов и презентаций объясняет тему, показывая на примерах верное решение задач на последовательности.

Для закрепления темы «Последовательности» лучше всего использовать практические методы обучения. Например, учитель дает большое количество однотипных задач, для формирования у учащихся общего умения решать эти задачи.

«Иногда выделяют большую группу методов с условным названием «*Активные методы обучения*», подразумевая предполагаемое ими более активное участие обучаемого в планировании и проведении самого учебного мероприятия. Сюда относят *интерактивные*, *игровые* и *модельные* методы обучения (учебные, деловые или деятельностные игры, основанные на принципе имитационного моделирования ситуаций реальной профессиональной деятельности в сочетании с принципами проблемной и совместной деятельности), методы тренинга (активного социально – психологического воздействия в процессе обучения), и др. К пассивным методам относятся словесные, догматические, характеризующиеся отсутствием обратной связи. Однако чисто пассивных методов не существует: при соответствующих условиях они также становятся активными. Так, получившие интенсивное развитие в 60 годах прошлого века методы программированного обучения с жестким пошаговым контролем действий учащегося уступили свое место гораздо более гибким методам компьютеризированного обучения, основанного на использовании интерактивных обучающих систем» [13, С.14].

«Формы организации обучения. Методы на практике реализуется в различных формах. Форма представляет собой конкретную практическую совокупность действий учителя и учащихся и условий их осуществления. Пример: фронтальные, групповые, индивидуальные методы и формы. Метод детерминирует и подчиняет себе форму. Реализация метода требует определенных форм; каждому из сложившихся методов адекватны определенные формы. Но форма обладает по отношению к методу определенной автономностью и устойчивостью. Пример: урок – устойчивая форма, осуществляющаяся при применении самых различных методов» [13, С.15]. Все эти формы в равной степени можно применить к теме «Последовательности»

Средства обучения. «Современные средства обучения и воспитания кладутся в основу классификации технологий по их типам: вербальные (аудио), наглядные (в том числе видео обучение), аудиовизуальные, программированные, электронно-обучающие, компьютерные, телекоммуникационные, дистанционные, спутниковые и разнообразные действенно-практические. Все эти 56 средства являются внешними по отношению к обучаемому» [13, С.56].

§6. Методические рекомендации по обучению теме «Последовательности» в курсе алгебры основной школы

1. В начале изучения темы необходимо ввести понятия последовательности и n-го члена последовательности. На первом уроке

уместно разъяснить смысл этих понятий и показать различные способы задания последовательности. Используя задания типа №15.5, 15.12-14, 15.20-21 учебника «Алгебра, 9» А.Г. Мордковича

Пример 1. Приведите примеры последовательностей, заданных:

а) с помощью формулы n-го члена;

б) словесно;

в) рекуррентным способом.

Решение:

а) $a_n = n^2 \; n \in N$

б) Последовательность натуральных чисел

в) $a_1 = 1$; $a_n = a_{n-1} + 1$

Пример 2. «По заданной формул n-го члена последовательности вычислите первые пять членов последовательности: » [10, С.94] $a_n = 4n + 1$

«Решение:

а) $a_n = 4n + 1; a_1 = 5, a_2 = 9, a_3 = 13, a_4 = 17, a_5 = 21;$

Ответ: $a_1 = 5, a_2 = 9, a_3 = 13, a_4 = 17, a_5 = 21$» [8].

Пример 3. По заданной формуле n-го члена последовательности вычислите первые пять членов последовательности:

$a_n = \frac{1}{n+5};$

Решение: $a_n = \frac{1}{5}; a_2 = \frac{1}{7}; a_3 = \frac{1}{8}; a_4 = \frac{1}{9}; a_5 = \frac{1}{10};$

Пример 4. По заданной формуле n-го члена последовательности вычислите первые пять членов последовательности:

а) $x_n = n^2 + 1;$

Решение: $x_n = n^2 + 1;$

$x_1 = 1; x_2 = 5; x_3 = 10; x_4 = 17; x_5 = 26;$

Пример 5. «Выпишите первые шесть членов последовательности (x_n), заданной рекуррентно

а) $x_1 = 1,\ x_n = -x(n-1) + 5\ (n = 2, 3, 4, \ldots)$ » [10, С.95].

«Решение

$x_1 = 1,\ x_2 = 4,\ x_3 = 1,\ x_4=4,\ x_5 = 1\ ,\ x_6=4$

Ответ: *1,4,1,4,1,4*» [8].

2. На следующих уроках следует ввести понятие арифметической прогрессии и обратить внимание на то, что натуральные числа образуют арифметическую прогрессию с разностью равной единице и прорешать задания типа №16.1, 16.3, 16.4 учебника А.Г.Мордковича

Пример 6. Определите, является ли приведенная ниже последовательность арифметической прогрессий:

а)2,4,6,8,10,12…;

Ответ: Да, является.

Пример 7. Найдите первый член и разность арифметической прогрессии:

а) 3, -1, -5, -9…;

Решение: $a_1 = 3$; $a_2 = - 1$;

Пример 8. «Запишите конечную арифметическую прогрессию (a_n), заданную следующими условиями:

а) $a_1 = -2,\ d = 4,\ n = 5$» [10, С.99].

Решение:

а) $a_1=-2,\ d=4,\ n=5;-2;2;6;10;14$

Ответ: *5;-2;2;6;10;14*

3. Закрепление понятия арифметической прогрессии осуществляется при помощи введения и использования формулы n-го члена арифметической прогрессии для решения задач. Уместно напомнить, что арифметическая прогрессия может быть задана разными способами (аналитическим,

рекуррентным и словесным). Пример данных видов заданий представлен ниже

Пример 9. «Число 29 является членом арифметической прогрессии 9,11, 13, … . найдите номер этого члена.» [10, С. 101].

Решение: У данной прогрессии $a_1 = 9$ и $d = 2$, тогда если $a_n = 29$, то $29 = 9+2(n-1)$, $29 = 7 +2n$, $n = 11$;

Ответ: $n=11$

Пример 10. «Содержит ли арифметическая прогрессия 2; 9; … число 156?» [6,С.145].

Решение: $x_1=2$; $x_2=9$; $d=x_2-x_1=7$; $x_n=x_1+d(n-1)$; $x_n=2+7n-7=7n-5$;

$7n-5=156$; $7n=161$; $n=23$. Число целое, тогда $a_{23}=156$

Ответ: $a_{23}=156$

4. «Вывод суммы первых n членов арифметической прогрессии способом, предложенном в учебном пособии Ю.Н. Макарычева не вызывает у учащихся затруднений. Но чтобы эта работа заинтересовала учащихся, эту тему можно объяснить с помощью проблемной ситуации. Например, предложить им решить задачу на нахождение суммы первых 100 натуральных чисел. А потом рассказать придание о маленьком Карле Гауссе, который решил эту задачу за несколько минут. И только после этого стоит приступить к выводу формулы суммы первых n членов арифметической прогрессии» [8]

5. «На следующем уроке учитель подводит учащихся к свойству арифметической прогрессии (у А.Г. Мордковича оно называется характеристическим свойством) с помощью заданий, предлагаемых ученикам последовательно» [8].

«– найти среднее арифметическое чисел 2 и 8.

– записать найденное число с данными в порядке возрастания.

– образуют ли эти числа арифметическую прогрессию?

– справедлива ли зависимость: $a_2 = \dfrac{a_1 + a_3}{2}$ для трех последовательных членов арифметической прогрессии.

– доказать, что для членов арифметической прогрессии справедлива закономерность: $a_{n+1} = \dfrac{a_n + a_{n+2}}{2}$» [8].

Формула, представленная выше называется свойством арифметической прогрессии.

6. «Так как тема геометрической прогрессии сложнее, чем тема арифметической прогрессии, является ли прогрессия возрастающей, убывающей или монотонной зависит от ее знаменателя, поэтому следует разобрать соответствующие примеры:

Пример 11. «Пусть $q > 1$, тогда члены геометрической прогрессии таковы, что их значения имеют один и тот же знак и возрастают по модулю.

1, 3,9, 27,81, ... (т. е. $a_1 = 1$, $q = 3$), или – 2, – 8, – 32, ... (т. е. $a_1 = 2,\ q = 4$)» [8].

Пример 12. «Если $0 < q < 1$, то члены геометрической прогрессии таковы, что их значения имеют один и тот же знак и убывают по модулю.

$2,\ \dfrac{1}{2},\ \dfrac{1}{8},\ \dfrac{1}{32},\ \ldots$ $\left(\text{т.е. } a_1 = 2,\ q = \dfrac{1}{4}\right)$, или $-1,\ -\dfrac{1}{5},\ -\dfrac{1}{25},\ \ldots$ $\left(\text{т.е. } a_1 = -1,\ q = \dfrac{1}{5}\right)$» [8].

Пример 13. «Пусть $q < -1$, тогда члены геометрической прогрессии принимают знакочередующиеся значения, возрастающие по модулю,

– 3, 6, – 12, 24, ... $\left(a_1 = -3,\ q = -2\right)$» [8].

Пример 14. «Если $-1 < q < 0$, то члены геометрической прогрессии принимают знакочередующиеся значения, убывающие по модулю.

$-8, 1, -\frac{1}{8}, \frac{1}{64}, \ldots \left(\text{т.е. } a_1 = -8, q = -\frac{1}{8}\right)$» [8].

Пример 15. «При $q = 1$ все члены геометрической прогрессии одинаковы, т. е. $b_1, b_1, \ldots, b_1, \ldots$, а при $q = -1$ все члены геометрической прогрессии отличаются друг от друга лишь знаками, т.е. $b_1, -b_1, b_1, -b_1, \ldots$» [8].

7. Остановимся теперь на выводе формулы n-го члена геометрической прогрессии. Для этого можно применить частично-поисковый метод, где учащиеся с помощью учителя выводят формулу n-го члена геометрической прогрессии.

8. При изучении характеристического свойство геометрической прогрессии можно предложить ученикам следующие задания:

«Найти среднее геометрическое чисел 1 и 9.

Записать найденное число с данными в порядке возрастания.

Образуют ли эти числа геометрическую прогрессию?

Справедлива ли зависимость $b_2^2 = b_1 \cdot b_3$ для трех последовательных членов геометрической прогрессии?

Доказать, что для членов прогрессий справедлива закономерность: $\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{b_{n+2}}{b_{n+1}}$, $b_{n+1}^2 = b_n \cdot b_{n+2}$» [8].

Формула, представленная выше является свойством геометрической прогрессии.

9. При изучении формулы суммы первых n членов геометрической прогрессии, можно так же создать проблемную ситуацию учащимся. И рассказать древнеиндийскую легенду об изобретателе Сете и попросить ответить на вопрос: сколько зерен должен получить Сете за свое изобретение?

10. Вывод формулы суммы первых n членов арифметической и геометрической прогрессии проводится с помощью метода индукции (от частного к общему)

11. «Необходимым условием умений решать задачи и примеры с по теме «Последовательности» является знание всех формул и наличие вычислительных навыков» [8].

12. Типичные ошибки допускаемые учащимися по теме «Последовательности».

1. *Учащиеся не владеют индексными обозначениями*

a_n - n-ый член арифметической прогрессии

b_n - n-ый член геометрической прогрессии

S_n – сумма первых n членов арифметической или геометрической прогрессии

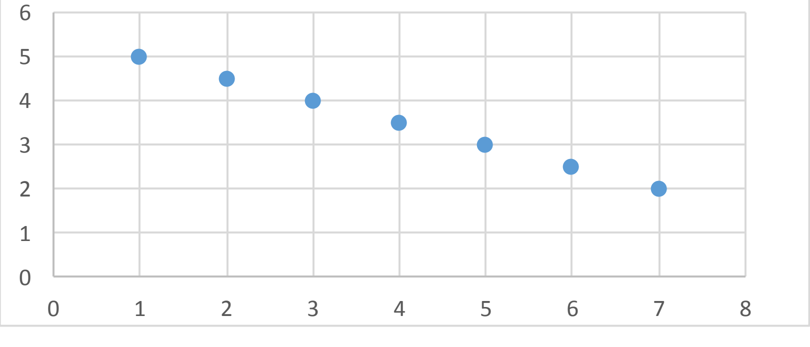
2. Учащиеся *не могут перевести на естественный язык рекуррентное соотношение.*

Например, последовательность (a_n) задана рекуррентной формулой: $a_1 = 2$, $a_{n+1} = 2 \cdot a_n$. Найти a_5. Чтобы получить следующий член прогрессии, нужно предыдущий член умножить на 2.

Возможно одна из причин возникающей проблемы: рекуррентные формы последовательности на уроках рассматриваются поверхностно.

3. «*Большие трудности вызывают задачи, связанные с обозначением членов арифметической прогрессии точками на координатной плоскости.*

Пример 16: Для этого по горизонтальной оси откладывают номер члена, а по вертикальной – соответствующий член последовательности. На рисунке изображены точками первые семь членов арифметической прогрессии (a_n). Найдите a_1 и d.



» [8].

Ввиду того, что некоторому количеству учащихся сложно даются темы «Координатная плоскость», «Функции», «Изображение точек на координатной плоскости», они не справляются с заданиями такого вида

4. *Вычислительные ошибки*

Так как при решении задач на тему «Последовательности», учащиеся в основном пользуются готовыми формулами, подставляют в них значения чисел и решают, как обычный пример, у многих возникают проблемы в вычислении обыкновенных и десятичных дробей, корней, возведение в степень в следствии чего появляются ошибки в ответе

5. *Ошибка в выражении неизвестной величины*

Здания, в которых требовалось определить разность арифметической прогрессии по формуле n-го члена арифметической прогрессии оказываются трудными для учащихся, так как они не могут выразить неизвестную величину из формулы

Пример 17. $a_1=10$, $a_{10}=46$. Найти d.

$a_n=a_1+d(n-1)$

$a_{10}=10+d(10-1)$; $46=10+9d$; $9d=36$; $d=4$

Ответ: 4

§7. Типология заданий основного государственного экзамена по теме исследования

Нами были выделены основные типы задач, которые встречаются в **части 1** основного государственного экзамена [16] по данной теме исследования:

Числовая последовательность.

1тип. Задания на узнаваемость арифметической и геометрической прогрессий.

2 тип. Запись числовой последовательности по заданным условиям.

3 тип. Запись числовой последовательности с помощью заданной формулы.

Арифметическая прогрессия.

1 тип. Задание на нахождение суммы первых n членов арифметической прогрессии.

2 тип. Задание на нахождение n-го члена арифметической прогрессии.

3 тип. Нахождение разности арифметической прогрессии.

4 тип. Текстовые задачи, приводящие к составлению арифметической прогрессии.

Геометрическая прогрессия.

1 тип. Нахождение n-го члена геометрической прогрессии.

2 тип. Нахождение суммы первых n членов геометрической прогрессии.

3 тип. Нахождение знаменателя геометрической прогрессии.

Числовые последовательности.

1тип. Задания на узнаваемость арифметической и геометрической прогрессий.

Пример 1.

«Последовательности заданы несколькими первыми членами. Одна из них - арифметическая прогрессия. Укажите ее» [16].

1) 1;2;3;5;… 2) 1;2;4;8;… 3) 1;3;5;7;… 4) 1; $\frac{1}{2}$ $\frac{2}{3}$ $\frac{3}{4}$ …

Решение. Арифметической прогрессией называется такая последовательность, в которой разность между последующим и предыдущим членами прогрессии остается неизменной. Поэтому арифметической прогрессией является последовательность: 1; 3; 5; .... Получается, что правильный ответ указан под номером 3.

Ответ: 3.

Пример 2.

«Какая из следующих последовательностей является арифметической прогрессией? Последовательность натуральных степеней числа 2; Последовательность натуральных чисел, кратных 5; Последовательность кубов натуральных чисел; Последовательность всех правильных дробей, числитель которых на 1 меньше знаменателя» [16].

«Решение: Арифметической прогрессией называется такая последовательность, в которой разность между последующим и предыдущим членами прогрессии остается неизменной. Поэтому арифметической прогрессией является последовательность: 5; 10; 15; ... Получается, что правильный ответ указан под номером 2» [16].

Ответ: 2.

2 тип. Запись числовой последовательности по заданным условиям

Пример 3.

«Последовательность задана условиями $c_1 = -3$, $c_{n+1} = c_n - 1$. Найдите c_7» [16]

Решение: Будем вычислять последовательно: $c_2 = -4$; $c_3 = -5$; $c_4 = -6$; $c_5 = -7$; $c_6 = -8$; $c_7 = -9$.

Данная последовательность образует арифметическую прогрессию. Разность арифметической прогрессии равна -1,03:

Ответ: -9

3 тип. Запись числовой последовательности с помощью заданной формулы

Пример 4.

«Последовательность задана формулой $a_n = \frac{34}{n+1}$. Сколько членов в этой последовательности больше 6?» [16].

«Решение: Необходимо решить неравенство:

$\frac{34}{n+1} > 6 \Leftrightarrow 34 > 6_n + 6 \Leftrightarrow 6_n < 28 \Leftrightarrow n < 4,6\,(6)$.

Поскольку n — целые числа, неравенство выполняется при n равном 1, 2, 3 и 4. Таким образом, четыре члена данной последовательности больше 6.

Ответ: 4.» [16].

4 тип Текстовые задачи, приводящие к составлению арифметической прогрессии.

Пример 5.

«Сколько натуральных чисел n удовлетворяет неравенству $\frac{40}{n+1} > 2$?» [16].

«Решение: Дробь, числитель и знаменатель которой положительны, больше двух, если числитель больше знаменателя более чем в два раза. Поэтому, имеем: $2\cdot(n+1) < 40 \Leftrightarrow n < 19$. Таким образом, восемнадцать натуральных чисел удовлетворяют данному неравенству.

Ответ: 18» [16].

Арифметическая прогрессия

1 тип. Задание на нахождение суммы первых n членов арифметической прогрессии.

Пример 6.

«Дана арифметическая прогрессия: -4; -2; 0; … . Найдите сумму первых десяти её членов» [16].

Ответ:50

Пример 7.

«Найдите сумму всех отрицательных членов арифметической прогрессии: −8,6; −8,4; ... » [16].

Решение:

1. Найдём разность прогрессии: $d=-8,4+8,6=0,2$.

2. Найдём число отрицательных членов прогрессии.

Составим формулу n -го члена: $a_n=-8,6+0,2(n-1)=0,2n-8,8$.

Решим неравенство

$0,2n-8,8<0$; получим $n < 44$. Значит, $n = 43$.

$$S_{43} = \frac{2\cdot(-8,6)+0,2\cdot 42}{2}\cdot 43 = -189,2$$

Ответ: -189,2

Пример 8.

«Какое наименьшее число последовательных натуральных чисел, начиная с 1, нужно сложить, чтобы получившаяся сумма была больше 465» [16].

«Решение: Найдем такое наименьшее n, что $1+2+3+...+n>465$. Для этого рассмотрим арифметическую прогрессию с первым членом $a_1=1$ и разностью $d=1$. Сумма n первых членов арифметической прогрессии вычисляется по формуле:

$$S_n = \frac{2a_1+(n-1)d}{2}n$$

в нашем случае

$$S_n = \frac{2\cdot 1+(n-1)\cdot 1}{2}n = \frac{n+1}{2}n$$

Найдем наименьшее натуральное решение неравенства $S_n>465$. Для этого найдём корни уравнения

$\frac{1}{2}(n-1)n = 465 \Leftrightarrow n^2+n-930=0$

Вычислим дискриминант:

$D=b^2-4ac=1+4\cdot 930=3721=61^2$

откуда получаем:

$$\begin{matrix} n = \frac{-1+61}{2}, \\ n = \frac{-1-61}{2} \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{matrix} n = 30, \\ n = -31 \end{matrix}$$

Таким образом, при $n=30$ сумма 30 слагаемых равна 465. Следовательно, наименьшее натуральное число, для которого сумма будет больше 465, равно 31.

Ответ: 31» [16].

Примечание: Можно заметить, что $n(n+1)=930 \Leftrightarrow 9n(n+1)=30\cdot 31$ откуда сразу же получаем: $n=30$ или$n=-31$

Пример 9.

«Арифметическая прогрессия задана условием $a_n = -0{,}6 + 8{,}6n$. Найдите сумму первых 10 её членов.» [16].

Решение: Сумма n первых членов арифметической прогрессии даётся формулой

$$S_n = \frac{2a_1 + (n-1)d}{2}n$$

Найдем разность и первый член прогрессии:

$d=a_{n+1}-a_n=-0{,}6+8{,}6(n+1)+0{,}6-8{,}6n=8{,}6,\ a_1=-0{,}6+8{,}6=8$

Подставим найденные значения в формулу:

$$S_{10} = \frac{2\cdot 8 + 9\cdot 8{,}6}{2}\cdot 10 = \frac{16+77{,}4}{2}\cdot 10 = 467.$$

Ответ: 467

2 тип. Задание на нахождение n-го члена арифметической прогрессии.

Пример 10.

«Дана арифметическая прогрессия: 33; 25; 17; …. Найдите первый отрицательный член этой прогрессии.

1)-7 2)-8 3)-9 4)-1» [16].

«Решение: Для члена a_n имеем: $d=a_2-a_1=25-33=-8$ По формуле нахождения n-го члена арифметической прогрессии имеем:

$a_n=33-8(n-1)<0 \Leftrightarrow n>\frac{41}{8}$

Первое число, которое удовлетворяет этому условию, число 6. Следовательно, первым отрицательным членом прогрессии является

$a_6=33-8\cdot 5=-7$

Таким образом, правильный ответ указан под номером 1.

Ответ: 1» [16].

Пример 11.

«В арифметической прогрессии a_n известно, что $a_1=-2,\ d=3$. Найдите четвёртый член этой прогрессии» [16].

Решение: Имеем: $a_4=a_1+d(n-1)=-2+3\cdot3=7$

Ответ: 7

Пример 12.

«Дана арифметическая прогрессия (a_n), разность которой равна −8,5, a_1=−6,8. Найдите a_{11}» [16].

«Решение: Член арифметической прогрессии с номером n можно найти по формуле $a_n=a_1+d(n-1)$. Требуется найти a_{11}:

$a_{11}=-6{,}8-10\cdot8{,}5=-6{,}8-85=-91{,}8$.

Ответ: -91,8» [16].

Пример 13.

«Даны пятнадцать чисел, первое из которых равно 6, а каждое следующее больше предыдущего на 4. Найти пятнадцатое из данных чисел» [16].

«Решение: Последовательность, описанная в условии, образует арифметическую прогрессию с первым членом, равным шести, и разностью 4. Пятнадцатый член данной прогрессии равен: $a_{15}=a_1+14d=6+4\cdot14=6+56=62$.

Ответ: 62» [16].

Пример 14.

«Арифметическая прогрессия a_n задана формулой n-го члена $a_{n+1}=a_n+2$ и известно, что $a_1=3$. Найдите пятый член этой прогрессии» [16].

«Решение: Найдём разность прогрессии: $d=a_{n+1}-a_n=2$

Тогда для пятого члена прогрессии $a_5=3+2\cdot(5-1)=3+8=11$

Ответ: 11» [16].

Пример 15.

«Арифметическая прогрессия (a_n) задана условиями: a_n=3,8-5,7n. Найдите a_6» [16].

«Решение: Воспользовавшись формулой, получаем:

$a_6=3,8-5,7\cdot 6=3,8-34,2=-30,4$.

Ответ: -30,4» [16].

Пример 16.

«Первый член арифметической прогрессии равен −11,9, а разность прогрессии равна 7,8. Найдите двенадцатый член этой прогрессии» [16].

Решение: Член арифметической прогрессии с номером n может быть найден по формуле

$a_n=a_1+d(n-1)$

Необходимо найти a_{12}. имеем:

$a_{12}=a_1+(12-1)\cdot d=(-11,9)+11\cdot 7,8=73,9$

Ответ: 73,9

Пример 17.

«Дан числовой набор. Его первое число равно 6,2, а каждое следующее число на 0,6 больше предыдущего. Найдите пятое число этого набора» [16].

Решение: Заметим, что дана арифметическая прогрессия, первый член которой равен 6,2, а разность равна 0,6. Таким образом, пятый элемент данной прогрессии вычисляется по формуле:

$a_5=a_1+(5-1)\cdot d=(6,2)+4\cdot 0,6=8,6$.

Ответ: 8,6

3 тип Нахождение разности арифметической прогрессии

Пример 18.

«Арифметические прогрессии x_n, y_n *и* z_n заданы формулами n-го члена:

$x_n=2n+4$, $y_n=4n$, $z_n=4n+2$.

Укажите те из них, у которых разность d равна 4.

1)x_n *и* y_n 2)y_n *и* z_n 3) x_n, y_n *и* z_n 4) x_n» [16].

«Решение: Найдем (x_{n+1}), (y_{n+1}), (z_{n+1}):

$x_{n+1}=2(n+1)+4=2n+6$,

$y_{n+1}=4(n+1)4n+4$,

$z_{n+1}=4(n+1)+2=4n+4+2=4n+6$

Для каждой из прогрессий x_n, y_n *и* z_n *найдем* разность:

$d_x= x_{n+1}- x_n=2n+6-2n-4=2$

$d_y= y_{n+1}- y_n=4n+4-4n=4$

$d_{z=}\ z_{n+1}- z_n=4n+6-4n-2=4$

Разность прогрессии равна 4 для прогрессии y_n *и* z_n. Таким образом, верный ответ указан под номером 2.

Ответ: 2» [16].

Пример 19.

«Дана арифметическая прогрессия (a_n), для которой a_{10} = 19, a_{15} = 44. Найдите разность прогрессии» [16].

Решение: Член арифметической прогрессии с номером n вычисляется по формуле $a_n=a_1+d(n-1)$. Зная, что a_{10} = 19, a_{15} = 44, получаем систему уравнений. Вычтем первое уравнение из второго и решим систему:

$$\begin{matrix} 19 = a_1 + d\ 10-1\ , \\ 44 = a_1 + d\ 15-1\ , \end{matrix} \Leftrightarrow 25=14d-9d\ \Leftrightarrow d=5$$

Ответ: 5

4 тип. Текстовые задачи приводящие к составлению арифметической прогрессии.

Пример 20.

«В первом ряду кинозала 30 мест, а в каждом следующем на 2 места больше, чем в предыдущем. Сколько мест в ряду с номером n?

1) $28+2n$ 2) $30+2n$ 3) $32+2n$ 4) $2n$» [16].

«Решение: Количество мест в рядах кинозала образуют арифметическую прогрессию. По формуле для нахождения n-го члена арифметической прогрессии имеем:

$a_n=a_1+d(n-1)=30+2(n-1)=30+2n-2=28+2n$

Таким образом, правильный ответ указан под номером 1.

Ответ: 1» [16].

Геометрическая прогрессия

1 тип. Нахождение n-го члена геометрической прогрессии.

Пример 21.

«В геометрической прогрессии (b_n) известно, что $b_1 = 2$, $q = -2$. Найти пятый член этой прогрессии» [16].

«Решение: В силу формулы $b_n = b_1 \bullet q^{n-1}$, имеем:

$b_5 = 2 \cdot (-2)^{5-1} = 2 \cdot (-2)^4 = 32$.

Ответ: 32»

Пример 22.

«Выписаны первые несколько членов геометрической прогрессии: 17, 68, .272, ... Найдите её четвёртый член» [16].

«Решение: Найдём знаменатель геометрической прогрессии:

$q = \frac{b_2}{b_1} = \frac{68}{17} = 4$.

Четвёртый член прогрессии равен $b_4 = b_3 q = 272 \cdot 4 = 1088$.

Ответ: 1088» [16].

Пример 23.

«Выписано несколько последовательных членов геометрической прогрессии: … ; 150 ; x ; 6 ; 1,2 ; … Найдите член прогрессии, обозначенный буквой x» [16]

«Решение: Найдем знаменатель геометрической прогрессии: $q = \frac{1,2}{6} = 1/5$. Поэтому, $x = 150 \cdot 1/5 = 30$.

Ответ: 30» [16].

Пример 24.

«Дана геометрическая прогрессия (b_n), знаменатель которой равен 2, а $b_1 = 16$. Найдите b_4» [16].

«Решение: Член геометрической прогрессии с номером n можно найти по формуле

$b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$. В нашем случае $n = 4$:

$b_4 = 16 \cdot 2^3 = 128$.

Ответ: 128» [16].

2 тип. Нахождение суммы первых n членов геометрической прогрессии.

Пример 25.

«Выписаны первые несколько членов геометрической прогрессии: −1024; −256; −64; … Найдите сумму первых 5 её членов» [16].

«Решение: Найдём знаменатель геометрической прогрессии:

$q = \frac{b_2}{b_1} = \frac{-256}{-1024} = \frac{1}{4}$.

Найдём четвёртый и пятый члены прогрессии:

$b_4 = b_3 q = -64 \cdot \frac{1}{4} = -16,\ b_5 = b_4 q = -16 \cdot \frac{1}{4} = -4$

Сумма первых пяти членов прогрессии равна -1024 –256–64–16–4 = –1364

Ответ: –1364» [16].

Пример 26.

«Геометрическая прогрессия задана условием $b_1 = -7$, $b_{n+1} = 3b_n$. Найдите сумму первых 5 её членов» [16].

«Решение: Найдём знаменатель геометрической прогрессии:

$q = \frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{3b_n}{b_n} = 3$

Сумма первых n членов геометрической прогрессии может быть найдена по формуле:

$S_n = \frac{b_1\ 1-q^n}{1-q}$

Необходимо найти S_5 имеем:

$$S_5 = \frac{-7 \cdot\ 1-3^5}{1-3} = \frac{-7 \cdot\ 1-243}{-2} = \frac{7 \cdot\ -242}{2} = -847$$

Ответ: -847» [16].

3 тип. нахождение знаменателя геометрической прогрессии.

Пример 27.

«Дана геометрическая прогрессия (b_n), для которой $b_5 = -14$, $b_8 = 112$. Най-дите знаменатель прогрессии» [16].

«Решение: Член геометрической прогрессии с номером n вычисляется по формуле $b_n = b_1 \bullet q^{n-1}$. Зная, что $b_5 = -14$ и $b_8 = 112$, получаем систему уравнений. Решим систему, разделив второе уравнение на первое:

$$\begin{matrix} -14 = b_1 \cdot q^4 \\ 112 = b_1 \cdot q^7 \end{matrix} \Leftrightarrow \frac{112}{-14} = \frac{b_1 \cdot q^7}{b_1 \cdot q^4} \Leftrightarrow q^3 = -8 \Leftrightarrow q = -2$$

Ответ: -2» [16].

Выводы по второй главе

Во второй главе бакалаврской работы сделано следующе:

1. Выявлены формы методы и средства обучения теме «Последовательности» в курсе алгебры основной школы;

2. Представлены методические рекомендации обучения последовательностям в курсе алгебры основной школы; выявлены типичные ошибки учащихся по данной теме.

3. Были рассмотрены задач ОГЭ по данной теме; проанализирован банк заданий ОГЭ; рассмотрены встречающиеся типы заданий с последовательностями.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

1. Рассмотрено понятие логико-математического анализа содержания темы «Последовательности». Понятие было рассмотрено в учебниках Н.Л. Стефановой и Е.И. Лященко. Так же нами было выделено понятие и логико-дидактического анализа, которое тесно связано с понятием логико-математического анализа. Рассмотрена связь понятий и выделены их отличия.

2. Сформулированы основные цели и задачи обучения теме «Последовательности» в курсе алгебры основной школы.

3. Были обозначены основные требования к знаниям и умениям учащихся по теме «Последовательности» в курсе алгебры основной школы. Задача была выполнена также с помощью двух источников, перечисленных в предыдущем пункте. В них описаны современные требования и подразумеваемые умения и навыки, необходимые для перехода к изучению новой темы.

4. Выполнен анализ содержания теоретического материала темы «Последовательности» в учебниках алгебры 9 классов. Рассмотрены общеобразовательные учебники и учебники с углубленным с изучением разных авторов.

5. Предоставлен анализ содержания задачного материала темы «Последовательности» в учебниках алгебры 9 классов. Решены примеры по каждому виду последовательности.

6. Выявлены формы, методы и средства обучения теме «Последовательности» в курсе алгебры основной школы. Были рассмотрены основные понятия по методической литературе.

7. Представлены методические рекомендации по обучению последовательностям и выявлены основные ошибки учащихся по данной теме.

8. Были рассмотрены задачи ОГЭ по данной теме. Мы проанализировали банк заданий ОГЭ и рассмотрели встречающиеся типы заданий с последовательностями.

СПИСОК ИСПОЛЬЗУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бурмистрова, Т.А. Алгебра. Сборник рабочих программ. 7 – 9 классы [Текст]: пособие для учителей общеобразовательных организация/ Т.А. Бурмистрова. – 2-е изд., доп. – М.: Просвещение, 2014. – 96 с.

2. Дорофеев, Г.В. Алгебра. 9 класс [Текст]: учебник для общеобразовательных организаций/Г.В. Дорофеев, С.Б. Суворова, Е.А. Бунимович. – 5-е изд. – М.: Просвещение, 2010. – 304 с.

3. Колягин Ю.М. Изучение алгебры в 7-9 классах [Текст]: Книга для учителей/ Ю.М. Колягин и др. – М.: Просвещение, 2002. –287 с.

4. Колягин, Ю.М. Алгебра. 9 класс [Текст]: учеб. для общеобразоват. учреждений / Ю.М. Колягин, М.В. Ткачёва, Н.Е. Фёдорова, М.И. Шабунин. – М.: Просвещение, 2014. – 304 с.

5. Лабораторные и практические работы по методике преподавания математики: Учеб. пособие для студентов физ.-мат. спец. пед. ин-тов / Е. И. Лященко, К. В. Зобкова, Т. Ф. Кириченко и др.; Под ред. Е. И. Лященко.— М.: Просвещение, 1988.—223 с.: ил.

6. Макарычев, Ю.Н. Алгебра. 9 класс [Текст]: учеб. для общеобразоват. учреждений/ Ю.Н. Макарычев, Н.Г. Миндюк, К.И. Нешков, С.Б. Суворова; под ред. С.А. Теляковского. – 18-е изд. - М.: Просвещение, 2011. – 271 с.

7. Макарычев, Ю.Н. Изучение алгебры в 7 – 9 классах [Текст]: пособие для учителей / Ю.Н. Макарычев, Н.Г. Миндюк, С.Б. Суворова, И.С. Шлыкова. – 4-е изд. – М.: Просвещение, 2011. – 304 с.

8. Мордкович, А.Г. Алгебра. 9 класс [Текст]: методическое пособие для учителя / А.Г. Мордкович, П.В. Семенов. – М.: Мнемозина, 2010. – 72 с.

9. Мордкович, А.Г. Алгебра. 9 класс. В 2 ч. Ч. 1 [Текст]: учебник для учащихся общеобразовательных учреждений / А.Г. Мордкович, П.В. Семенов. – 12-е изд., стер. – М.: Мнемозина, 2010. – 224 с.

10. Мордкович, А.Г. Алгебра. 9 класс. В 2ч. Ч 2 [Текст]: задачник для учащихся для учащихся общеобразовательных учреждений / А.Г.

Мордкович, Л.А Александрова. – 10-е изд., стер. – М.: Мнемозина, 2008. – 222 с.

11. Муравин, Г.К. Алгебра. 9 класс [Текст]: учеб. для общеобр. учрежд./ Г.К. Муравин, К.С. Муравин, О.В. Муравина. – 14-е изд., стереотип. – М.: Дрофа, 2014. – 315 с.

12. Примерная основная образовательная программа основного общего образования. Одобрена решением федерального учебно-методического объединения по общему образованию / М-во образования и науки РФ. – М.: Просвещение, 2015. – 560 с. [Электронный ресурс]. – Режим доступа: http://mosmetod.ru/files/dokumenty/primernaja-osnovnaja-obrazovatelnaja-programma-osnovogo-obshchego-obrazovanija.pdf – Последнее обновление 03.04.2018.

13. Селевко, Г.К. Энциклопедия образовательных технологий. В 2-х т. Т. 1./ Г.К.Селевко – М.: Народное образование, 2005.-556 с.

14. Стефанова, Н.Л. Методика и технология обучения математики. Курс лекций [Текст]: пособие для вузов/ Н.Л. Стефанова, Н.С. Подходова, В.В. Орлов и др. – М.: Дрофа, 2005. – 276 с.

15. Федеральный государственный образовательный стандарт основного общего образования: Приказ Мин. образования и науки РФ от 17.12.2010 г. №1897. [Электронный ресурс]. – Режим доступа: http://минобр-науки.рф/документы/938. – Последнее обновление 20.12.2017.

16. Сдам ГИА: решу ОГЭ и ЕГЭ. Образовательный портал для подготовки к экзаменам [Электронный ресурс] / Д.Д.Гущин. – Режим доступа: https://sdamgia.ru. – Последнее обновление 31.05.2018.

17. Aigner-Horev E., Han H.. Arithmetic progressions with a pseudorandom step [Text] / Electronic notes in Discrete Mathematics // 2015. – PP.447-455

18. Chen Y.G., Lei C.. Arithmetic progressions in the least positive reduced residue systems [Text] / Journal of Number Theory // 2018. – PP.303-310

19. Merlini D., Sprugnoli R.. Arithmetic into geometric progressions through Riordan arrays [Text] / Discrete Mathematics // 2017. – PP.160-174

20. Pongsriliam P.. Longest arithmetic progressions in reduced residue systems [Text] / Journal of Number Theory // 2018. – PP.309-325

21. He X. Geometric progression-free sequences with small gaps [Text] / Journal of Number Theory // 2015. – PP.197-210