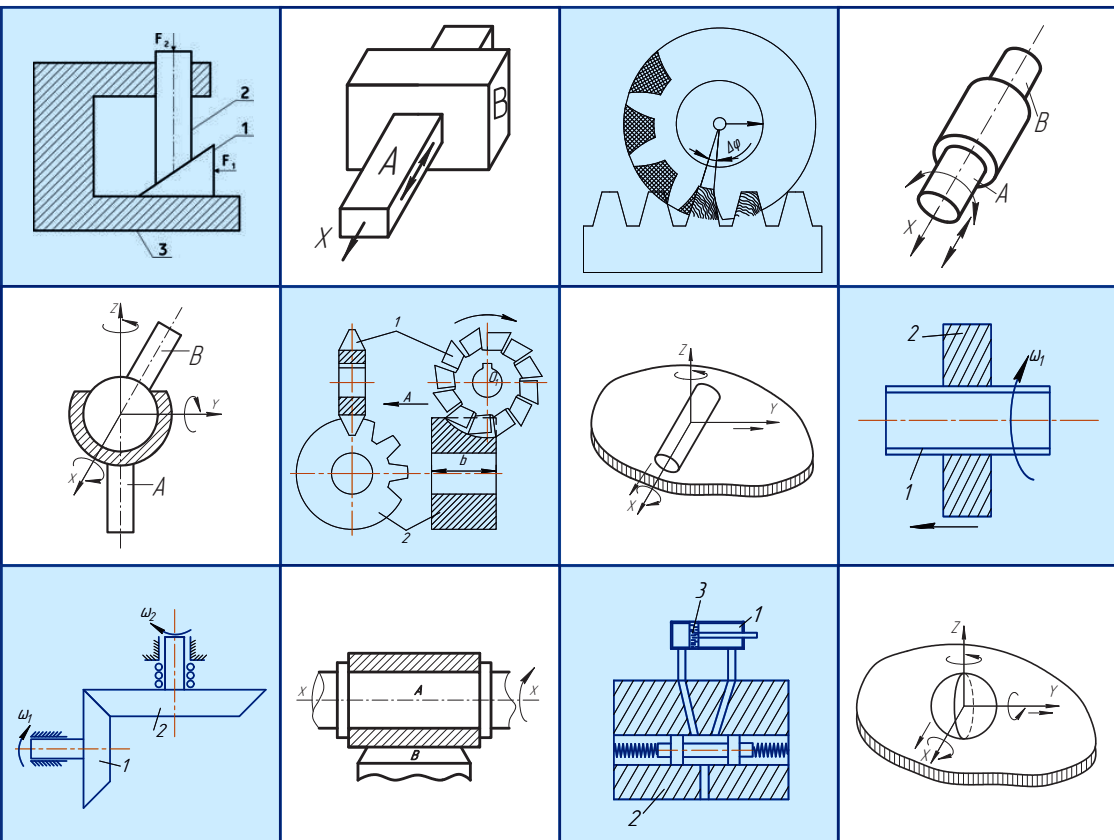


А.А. Балахнина

ПРИКЛАДНАЯ МЕХАНИКА. ТЕОРИЯ МЕХАНИЗМОВ И МАШИН

Электронное учебное пособие



УДК 621.01

ББК 34.41

Рецензенты:

д-р техн. наук, профессор, завкафедрой «Сервис технических и технологических систем» Поволжского государственного университета сервиса *Б.М. Горшков*;
д-р техн. наук, профессор Тольяттинского государственного университета *А.И. Глейзер*.

Балахнина, А.А. Прикладная механика. Теория механизмов и машин: электрон. учеб. пособие / А.А. Балахнина. — Тольятти : Изд-во ТГУ, 2015. — 1 оптический диск.

В пособии изложены основы теории механизмов и машин (ТММ): описаны методы структурного и кинематического анализа рычажных, кулачковых и зубчатых механизмов, приведена классификация этих механизмов. Рассмотрены вопросы силового анализа и уравнивания механизмов и их энергетические характеристики.

Предназначено для подготовки бакалавров направления 15.03.01 Машиностроение, изучающих курс «Теория механизмов и машин».

Текстовое электронное издание.

Рекомендовано к изданию научно-методическим советом Тольяттинского государственного университета.

Минимальные системные требования: IBM PC-совместимый компьютер: Windows XP/Vista/7/8; ПИИ 500 МГц или эквивалент; 128 Мб ОЗУ; SVGA; Adobe Acrobat Reader.

© ФГБОУ ВПО «Тольяттинский
государственный университет», 2015

Редактор *О.И. Елисеева*
Технический редактор *З.М. Малявина*
Компьютерная верстка: *Л.В. Сызганцева*
Художественное оформление,
компьютерное проектирование: *Г.В. Карасева*

Дата подписания к использованию 07.09.2015.
Объем издания 5,2 Мб.
Комплектация издания: компакт-диск, первичная упаковка.
Заказ № 1-08-14.

Издательство Тольяттинского государственного университета
445667, г. Тольятти, ул. Белорусская, 14
тел. 8(8482) 53-91-47, www.tltsu.ru

Содержание

Введение	5
Раздел 1. СТРУКТУРНЫЙ АНАЛИЗ И СИНТЕЗ МЕХАНИЗМОВ ...	7
1.1. Введение в теорию механизмов и машин. Предмет и задачи курса ТММ	7
1.2. Структура механизмов	8
1.3. Манипуляторы и промышленные роботы	45
Раздел 2. КИНЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ МЕХАНИЗМОВ	52
2.1. Кулачковые механизмы	52
2.2. Кинематика зубчатых передач	59
2.3. Кинематический анализ рычажных механизмов	69
Раздел 3. ДИНАМИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ МЕХАНИЗМОВ	89
3.1. Задачи кинетостатики	89
3.2. Силы, действующие на механизм	90
3.3. Силовой анализ механизмов. Определение реакций в кинематических парах	97
3.4. Трение в кинематических парах	102
3.5. Коэффициент полезного действия механизма	106
3.6. Определение реакций в кинематических парах с учетом трения	107
Раздел 4. АНАЛИЗ ДВИЖЕНИЯ МЕХАНИЗМА ПОД ДЕЙСТВИЕМ СИЛ	118
4.1. Уравновешивание механизмов	118
4.2. Анализ движения механизма под действием сил	127
Библиографический список	155

ВВЕДЕНИЕ

Создание новых, более совершенных машин и механизмов требует развития существующих и разработки новых инженерных методов их анализа и синтеза. Развитие машиностроения на современном этапе характеризуется широким внедрением передовых технологий, техническим перевооружением и реконструкцией действующего производства на основе комплексной механизации и автоматизации.

Успешное развитие современного машиностроения в конечном счете зависит от качества и глубины профессиональной подготовки специалиста с высшим образованием.

Прикладная механика состоит из следующих разделов.

1. Теоретическая механика, которая, в свою очередь, разделяется на статику, кинематику и динамику. Статика занимается изучением сил и условий их равновесия. Кинематика изучает механическое движение без учета действия сил. Динамика изучает законы механического движения в отношении их причин и следствий.

2. Теория машин и механизмов, которая базируется на законах и положениях теоретической механики и является научной основой создания механизмов и машин.

3. Сопrotивление материалов – наука о прочности и жесткости механических конструкций и методах их расчета, на знании основ которой базируются расчеты деталей машин.

4. Детали машин – расчетно-конструкторский курс, изучающий основы проектирования машин и механизмов.

5. Гидравлика – наука о законах движения и равновесия жидкостей и способах приложения этих законов к решению задач инженерной практики.

6. Теплотехника – наука, которая изучает методы получения, преобразования, передачи и использования теплоты, а также принципы действия и конструктивные особенности тепловых машин, аппаратов и устройств.

В данном учебном пособии рассмотрен один раздел дисциплины «Прикладная механика» – теория механизмов и машин (ТММ).

Теория механизмов и машин – одна из основных дисциплин общепрофессионального цикла, обеспечивающих подготовку специа-

листов инженерно-технических специальностей по основам проектирования машин.

Особенность курса «Теория механизмов и машин» состоит в его направленности на дальнейшее углубление фундаментальной подготовки, с одной стороны, и связи со специальными предметами в качестве профессионального научно-технического фундамента – с другой. Основная **цель курса** – дать студентам знания и навыки по применению метода исследования свойств механизмов и машин и проектированию их схем, которые являются общими для всех механизмов независимо от конкретного назначения машины, прибора или аппарата.

В результате изучения дисциплины студенты должны

знать:

- формы и структуру типовых кинематических цепей;
- основные виды механизмов и машин, методы их формирования и применения;
- структуру современных и перспективных механизмов и машин, используемых в них подсистем и функциональных узлов;
- принципы работы, технические, конструктивные особенности разрабатываемых и используемых технических средств;
- технологию проектирования, производства и эксплуатацию изделий и средств технологического оснащения;
- методы исследования, правила и условия выполнения работ;

уметь использовать:

- методы анализа и синтеза рациональной структурно-кинематической схемы проектирования устройства по западным критериям;
- вычислительные средства при проектировании технических систем;
- методы расчета типовых кинематических схем;

приобрести навыки:

- проведения расчетов основных параметров механизмов по заданным условиям с использованием графических, аналитических и численных методов вычислений;
- разработки алгоритмов вычислений на ЭВМ для локальных задач анализа и синтеза механизмов;
- использования измерительной аппаратуры для определения кинематических и динамических параметров и механизмов.

Раздел 1. СТРУКТУРНЫЙ АНАЛИЗ И СИНТЕЗ МЕХАНИЗМОВ

1.1. Введение в теорию механизмов и машин. Предмет и задачи курса ТММ

Развитие современной науки и техники неразрывно связано с созданием новых машин, повышающих производительность и облегчающих труд людей.

Целью создания машины является увеличение производительности и облегчение физического труда путем замены человека машиной.

Ведущей отраслью современной техники является машиностроение. По уровню развития машиностроения судят о развитии производительных сил в целом. Прогресс машиностроения, в свою очередь, определяется созданием новых высокопроизводительных и надежных машин. Решение этой важной проблемы основывается на использовании результатов многих научных дисциплин и в первую очередь теории механизмов и машин (ТММ).

ТММ – наука об общих методах исследования свойств механизмов и машин и проектирования их систем.

Наиболее развита в настоящее время та ее часть, которая называется *теорией механизмов*. Механизмом называется устройство для преобразования механического движения твердых тел.

Другую часть ТММ составляет *теория машин*. Она изучает методы проектирования схем машин, которые являются общими для машин различных областей техники.

Обе части ТММ неразрывно связаны между собой, так как механизмы составляют основу почти любой машины.

Машина есть устройство, выполняющее механические движения для преобразования энергии, материалов и информации с целью замены или облегчения физического и умственного труда человека.

ТММ базируется на законах и положениях теоретической механики и решает две основные задачи – анализа и синтеза механизмов.

Задачи анализа – изучение методов исследования существующих механизмов.

Задачи синтеза — создание методов проектирования механизмов, удовлетворяющих высоким требованиям современной техники.

Каждая из названных задач рассматривает следующие вопросы:

- структура и классификация механизмов;
- кинематическое исследование механизмов;
- динамическое исследование механизмов.

В связи с интенсивной автоматизацией производственных процессов в курс ТММ введен раздел «Основы теории машин-автоматов», который включает подразделы:

- системы управления машин-автоматов;
- манипуляторы и промышленные роботы.

1.2. Структура механизмов

1.2.1. Основные понятия теории механизмов и машин

Механизм есть система тел, предназначенная для преобразования движения одного или нескольких твердых тел в требуемые движения других тел.

Если в преобразовании движения кроме твердых тел участвуют жидкие или газообразные вещества, то механизм называется соответственно гидравлическим или пневматическим.

Основным признаком механизма является преобразование механического движения. Механизм состоит из многих деталей, совершающих целесообразное движение. Детали механизма, имеющие общее движение и не меняющие своей конфигурации, называются звеньями механизма. Однако детали механизма могут состоять из отдельно изготовленных частей. Например, шатун двигателя внутреннего сгорания (ДВС) состоит из десяти неподвижно соединенных между собой частей (тело шатуна, крышка, втулка, вкладыш, болты, гайки, шплинты). Все эти части совершают одно и тоже движение, поэтому объединяются в одно звено и на схеме изображаются в виде отрезка без изображения конструктивных особенностей.

В каждом механизме имеется стойка, т. е. звено, принятое условно за неподвижное.

Например, в металлорежущем станке все основные звенья движутся относительно станины. Она является стойкой.

Из подвижных звеньев выделяют входные и выходные звенья.

Входным звеном называется звено, которому сообщается движение, преобразуемое механизмом в требуемые движения других звеньев.

Выходным звеном называется звено, совершающее движение, для выполнения которого предназначен механизм.

Обычно в механизме имеется один вход и один выход.

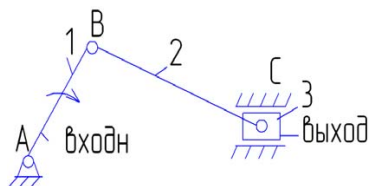


Рис. 1.1

Вход получает движение от двигателя, а выход соединяется с рабочим органом машины.

Однако есть механизмы, имеющие несколько входов и выходов.

Например, в автомобильном дифференциале имеется один вход и два выхода. Вход соединяется с двигателем, а выход — с колесами.

Ведущим звеном механизма называют одно звено, для которого элементарная работа внешних сил, приложенных к нему, является положительной.

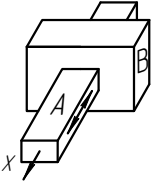
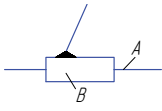
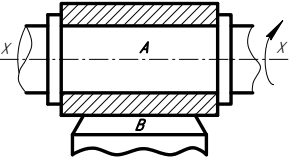
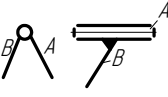
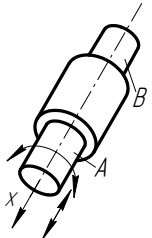
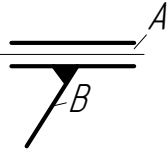
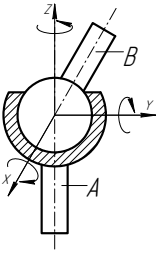
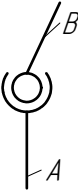
Ведомым звеном называется звено, для которого элементарная работа внешних сил, приложенных к нему, является отрицательной или равна нулю.

1.2.2. Классификация кинематических пар

Подвижное соединение двух соприкасающихся звеньев, допускающее их относительное движение, называется кинематической парой.

Все кинематические пары подразделяются по числу степеней свободы на одно-, двух-, трех-, четырех-, пятиподвижные. Виды кинематических пар приведены в табл. 1

Таблица 1

Число степеней свободы	Класс пары	Название	Рисунок	Условное изображение
1	5	Поступательная		
1	5	Вращательная		
2	4	Цилиндрическая		
3	3	Сферическая		

Число степеней свободы	Класс пары	Название	Рисунок	Условное изображение
4	2	Цилиндр – плоскость		
5	1	Шар – плоскость		

Возможные движения звеньев кинематических пар при определении степени подвижности должны быть независимыми. Так, винтовая кинематическая пара (рис. 1.2) допускает два движения – вращательное и поступательное, однако эти движения зависят друг от друга ($z = t \cdot \pi$, где t – шаг винта), поэтому эту кинематическую пару нужно рассматривать как одноподвижную.

Кинематические пары делятся на низшие и высшие.

Кинематическая пара, которая образована звеньями, соприкасающимися по поверхности, называется нижней кинематической парой.

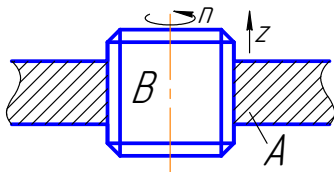


Рис. 1.2. Винтовая кинематическая пара

Кинематическая пара, которая образована звеньями, соприкасающимися только по линии или в точке, называется высшей кинематической парой.

1.2.3. Кинематические цепи и кинематическая схема механизма

Кинематической цепью называется связанная система звеньев, образующих между собой кинематические пары.

Кинематические цепи делятся на простые и сложные (рис. 1.3).

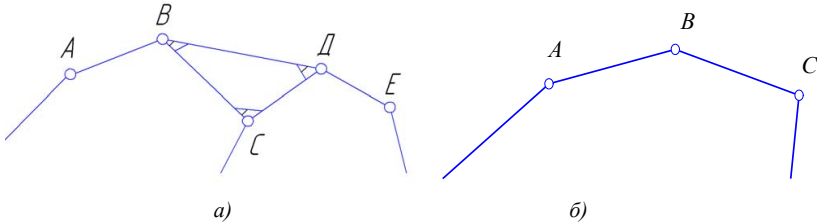


Рис. 1.3. Кинематическая цепь: *a* – сложная; *б* – простая

Простой кинематической цепью называется такая цепь, у которой каждое звено входит не более чем в две кинематические пары.

Сложной кинематической цепью называется цепь, в которой имеется хотя бы одно звено, входящее более чем в две кинематические пары.

Простые и сложные кинематические цепи делятся на замкнутые и незамкнутые.

Замкнутой кинематической цепью называется цепь, каждое подвижное звено которой входит по крайней мере в две кинематические пары (рис. 1.4, *a*).

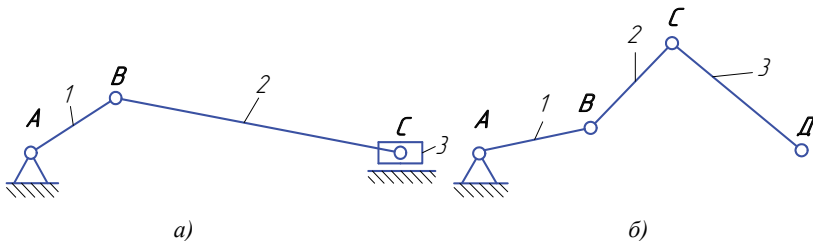


Рис. 1.4. Кинематическая цепь: *a* – замкнутая; *б* – незамкнутая

Незамкнутой кинематической цепью называется цепь, в которой есть звенья, входящие только в одну кинематическую пару (рис. 1.4, *б*).

Кинематической схемой механизма называется его изображение в выбранном масштабе с применением условных обозначений, установленных ГОСТом, звеньев и кинематических пар (рис. 1.5).

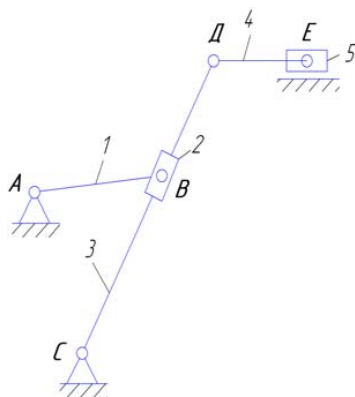


Рис. 1.5. Пример кинематической схемы

Схема позволяет определить движение ведомых звеньев по заданному движению ведущих.

AB – ведущее звено, т. е. звено, движение которого задано.

1.2.4. Степень подвижности механизма

Обобщенной координатой механической системы (механизма) (рис. 1.6) называется независимая координата φ_1 , однозначно определяющая положение системы в пространстве.

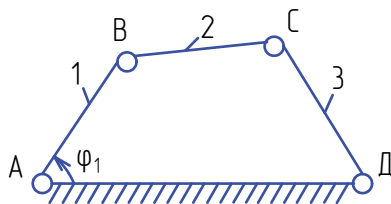


Рис. 1.6. Обобщенная координата механизма

Число обобщенных координат определяет число степеней свободы системы.

Свободное твердое тело (звено) в пространстве обладает шестью степенями свободы, т. е. оно может совершать три независимых поступательных движения вдоль взаимно-перпендикулярных осей и три вращательных движения вокруг тех же осей.

Если же звено входит в кинематическую пару, то на относительное движение его, т. е. на движение по отношению ко второму звену, входящему в эту пару, накладываются определенные ограничения. Эти ограничения называются условиями связи — S .

По числу условий связи, накладываемых на относительные движения звеньев, пары подразделяются на классы.

Класс кинематической пары соответствует числу условий связи, накладываемых на относительное движение звеньев, входящих в эту пару.

В зависимости от способа соединения звеньев в кинематическую пару число условий связи может меняться от 1 до 5.

Поэтому все кинематические пары можно разделить на 5 классов.

К I классу относятся пары, накладывающие на относительное движение звеньев одно условие (5-подвижные пары).

Ко II классу относятся пары, накладывающие два условия (4-подвижные) и т. д.

Если на движение звена в пространстве не наложено никаких условий связи, то оно обладает шестью степенями свободы.

Тогда если число звеньев кинематической цепи — K , то общее число степеней свободы, которыми обладают K звеньев до их соединения в кинематическую цепь, — $6K$, то есть $H = 6K$ степень свободы H до соединения в кинематическую цепь.

Соединение звеньев в кинематическую цепь накладывает различное число связей на относительное движение звеньев, зависящее от класса пар. Если число пар I класса обозначить P_1 , II класса — P_2 , III класса — P_3 , IV класса — P_4 , V класса — P_5 , то из $6K$ степеней свободы, которыми обладали звенья до их вхождения в кинематические пары, необходимо исключить те степени свободы, которые отнимаются вхождением звеньев в кинематические пары.

Тогда число степеней свободы H , которыми обладает кинематическая цепь, будет равно:

$$H = 6K - 5P_5 - 4P_4 - 3P_3 - 2P_2 - P_1. \quad (1.1)$$

Если одно из звеньев кинематической цепи будет неподвижным, то общее число степеней свободы цепи уменьшится на 6 и число степеней свободы W относительно неподвижного звена будет равно

$$W = H - 1. \quad (1.2)$$

Число W степеней свободы кинематической цепи относительно стойки называется числом степеней неподвижности (степенью неподвижности) кинематической цепи.

Подставляя (1.1) в (1.2), имеем:

$$W = 6(K - 1) - 5P_5 - 4P_4 - 3P_3 - 2P_2 - P_1.$$

Если обозначить $(K - 1)$ через n , то получим:

$$W = 6n - 5P_5 - 4P_4 - 3P_3 - 2P_2 - P_1,$$

где n – число подвижных звеньев кинематической цепи.

Это равенство носит название формулы подвижности, или формулы Сомова – Малышева.

Рассмотрим пространственный механизм (рис. 1.7) и определим степень свободы данного механизма по формуле Сомова – Малышева.

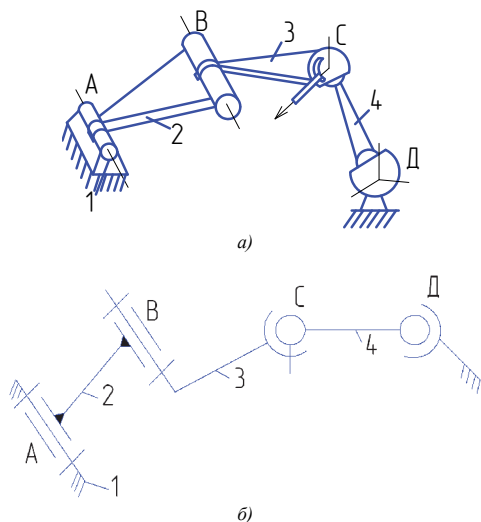


Рис. 1.7. Пример пространственного механизма и его кинематическая схема: *a* – кинематическая цепь; *б* – схема кинематической цепи

Звенья 1 и 2 входят в кинематическую пару A (V кл.), звенья 2 и 3 – в пару B (V кл.), звенья 3 и 4 – в пару C (IV кл.), звенья 4 и 5 – в пару D (III кл.), следовательно, количество пар с соответствующими классами будет: $P_5 = 2, P_4 = 1, P_3 = 1, P_2 = 0, P_1 = 0$.

Подставим в формулу и получим:

$$W = 6n - 5P_5 - 4P_4 - 3P_3 - 2P_2 - P_1 = 6 \cdot 3 - 5 \cdot 2 - 4 \cdot 1 - 3 \cdot 1;$$

$$W = 18 - 10 - 4 - 3 = 1.$$

Степень свободы (подвижности) механизма показывает, сколько надо задать независимых координат, чтобы характеризовать положение любого звена механизма относительно стойки.

Если механизм обладает $W = 1$, то при заданном движении одного из звеньев (ведущего) все остальные звенья будут иметь вполне определенные движения.

Если $W = 2$, то определенность движения звеньев может быть обеспечена или двумя ведущими звеньями, имеющими по одному независимому движению, или одним ведущим звеном, имеющим два независимых движения (двуподвижное).

Выделим формулу для определения числа степеней свободы плоского механизма, звенья которого совершают движения параллельно одной какой-либо плоскости.

В этом случае из шести движений, которые каждое отдельное звено может совершать в пространстве, исключаются три движения: одно поступательное и два вращательных.

Следовательно, звено в плоскости может совершать только три движения (рис. 1.8).

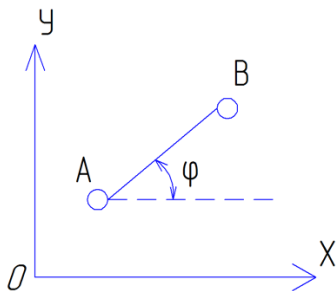


Рис. 1.8. Звено в плоскости

При этом условии в состав плоских кинематических цепей могут входить лишь кинематические пары IV и V классов, т. е. кинематическая пара V класса лишается двух из трех оставшихся движений, а кинематическая пара IV класса – одного простейшего движения.

Если

$$W = (6 - 3)n - (5 - 3)P_5 - (4 - 3)P_4 - (3 - 3)P_3,$$

то степень подвижности плоского механизма $W = 3n - 2P_5 - P_4$. Это структурная формула плоского механизма, или формула Чебышева.

В состав плоских механизмов пары I, II и III класса входить не могут. Кинематические пары V класса, входящие в состав плоского механизма, могут быть в двух видах: либо в виде вращательной пары, либо в виде поступательной пары (т. е. низшие).

Кинематические пары IV класса являются высшими кинематическими парами, имеющими две степени свободы.

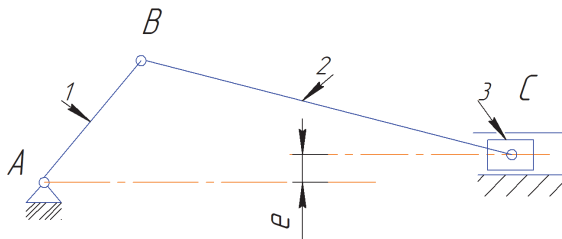


Рис. 1.9. Кривошипно-ползунный механизм

Определим степень подвижности плоского механизма, заданного на рис. 1.9, где $n = 3$, $P_5 = 4$, $P_4 = 0$:

$$W = 3 \cdot 3 - 2 \cdot 4 = 1.$$

1.2.5. Структурный анализ плоских механизмов

При структурном анализе механизма необходимо:

- 1) вычертить кинематическую схему механизма;
- 2) назвать механизм;
- 3) назвать звенья, определить ведущее (ведомое) и входное звенья;
- 4) определить кинематические пары и классифицировать их;
- 5) определить число степеней свободы.

Пример (рис. 1.10). Задан плоский рычажный механизм (кривошипно-коромыслово-ползунный), где 1 – кривошип; 2 – шатун; 3 – коромысло; 4 – шатун; 5 – ползун. Число одноподвижных кинематических пар $P_5 = 7$ (шесть вращательных, одна поступательная). Все кинематические пары низшие:

$$W = 3n - 2P_5 - 1P_4 = 3 \cdot 5 - 2 \cdot 7 - 1 \cdot 0 = 1.$$

Следовательно, для определения положения механизма необходимо знать одну обобщенную координату (например, φ_1).

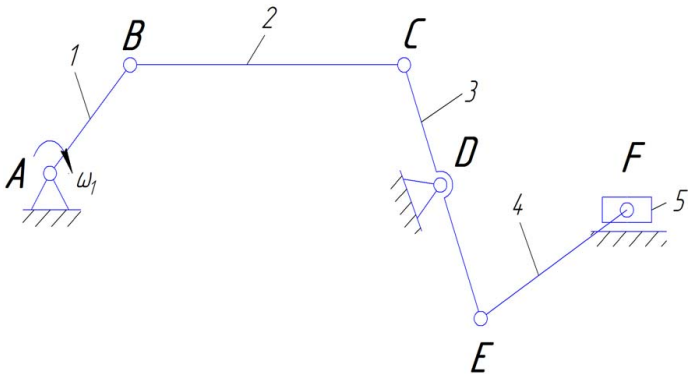


Рис. 1.10. Плоский рычажный механизм

Примечание. Некоторые механизмы имеют избыточные связи, т. е. связи, устранение которых не влияет на движение механизма (например, на рис. 1.11). Так, звено 4 повторяет движение звена 2 и не влияет на движение всего механизма. Эти связи необходимо учитывать при определении степени подвижности механизма.

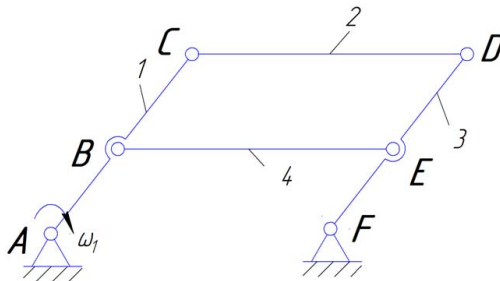


Рис. 1.11. Избыточные связи

$$W = 3n - 2P_5 - P_4 + q. \quad (1.3)$$

Звено 4 с кинематическими парами B и E образует избыточную связь $q = 1$.

$$W = 3 \cdot 4 - 2 \cdot 6 - 0 + 1.$$

1.2.6. Замена в плоских механизмах высших пар низшими

При изучении структуры и кинематики плоских механизмов удобно заменять высшие пары низшими.

При этом необходимо, чтобы механизм, полученный после такой замены, обладал прежней степенью подвижности и при этом сохранялись относительные в рассматриваемом положении движения всех его звеньев.

Пример. Задана кинематическая схема кулачкового механизма (рис. 1.12), имеющего высшую кинематическую пару, образованную кулачком и острием толкателя. Необходимо осуществить замену высшей кинематической пары на низшую.

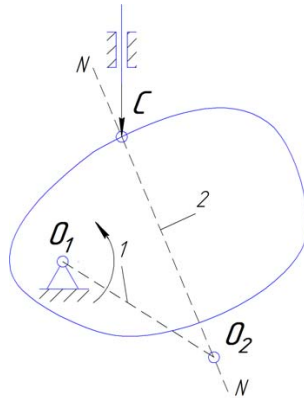


Рис. 1.12. Замена высшей кинематической пары на низшую

Кулачковый механизм образован соприкосновением элементов кривой, образующей кулачок, и точкой толкателя. Центр кривизны кулачка находится в точке O_2 , а центр кривизны толкателя в точке C . Соединив центр кривизны O_2 с осью вращения кулачка O_1 и с точкой C , получим четырехзвенный механизм, имеющий три вращательные и одну поступательную кинематические пары.

Подвижность кулачкового механизма

$$W = 3n - 2P_5 - P_4 = 3 \cdot 2 - 2 \cdot 2 = 1,$$

а четырехзвенного механизма $W = 3 \cdot 3 - 2 \cdot 4 = 1$, то есть замена высшей пары низшими равнозначна.

1.2.7. Классификация механизмов (виды механизмов)

Различают механизмы:

- 1) рычажные;
- 2) кулачковые;
- 3) зубчатые;
- 4) клиновые;
- 5) винтовые;
- 6) фрикционные;
- 7) гидравлические;
- 8) пневматические;
- 9) с электрическим устройством.

Все механизмы, составленные только из твердых тел, разделяются на две большие группы: механизмы с низшими парами и механизмы с высшими парами.

Механизмы с низшими парами называют *стержневыми* или *рычажными*.

1. Рычажные механизмы

Простейшие рычажные механизмы состоят их четырех звеньев, включая стойку, и делятся на кривошипно-коромысловые, кривошипно-ползунные, кулисные.

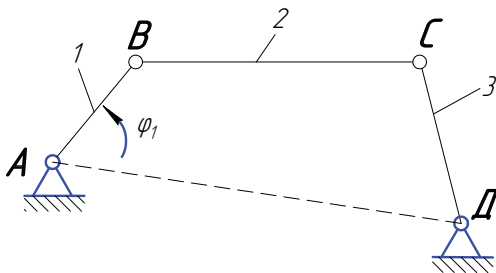


Рис. 1.13. Шарнирный четырехзвенник

Шарнирный четырехзвенник (рис. 1.13) может быть трех видов: кривошипно-коромысловый, двухкривошипный, двухкоромысловый.

Заменяя в шарнирном четырехзвеннике одну вращательную пару на поступательную, получим кривошипно-ползунный механизм (рис. 1.14) и кулисный механизм (рис. 1.15).

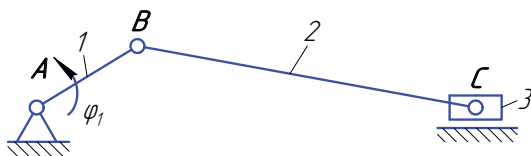


Рис. 1.14. Кривошипно-ползунный механизм

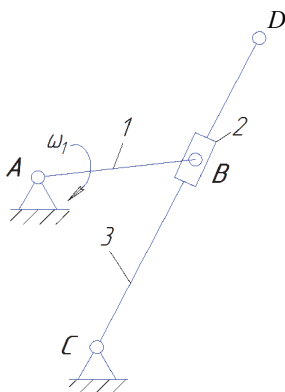


Рис. 1.15. Кулисный механизм

Остановимся на рассмотрении основного принципа образования механизмов, который был разработан русским ученым Л.В. Ассуром.

Нетрудно установить определенную закономерность процесса образования механизма. Любой механизм имеет одно неподвижное звено (стойку).

Механизм должен иметь число ведущих звеньев, равное числу его степеней подвижности.

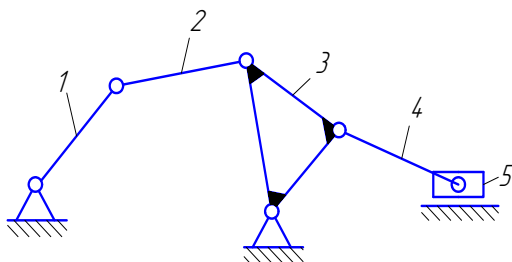


Рис. 1.16. Рычажный механизм

В нашем механизме (рис. 1.16) имеется одно ведущее звено 1 , так как $W = 1$.

После присоединения ведомых звеньев $2, 3, 4$ и 5 число степеней подвижности всего механизма осталось равным $W = 1$, следовательно, кинематическая цепь, состоящая из ведомых звеньев $2, 3, 4$ и 5 , обладает нулевой степенью подвижности относительно тех звеньев, к которым эта цепь присоединяется.

Группой Ассура будем называть кинематическую цепь с нулевой степенью подвижности относительно тех звеньев, с которыми входят в кинематические пары свободные элементы ее звеньев, не распадающуюся на более простые цепи, которые также обладают нулевой степенью подвижности.

В нашем случае звенья $2, 3, 4$ и 5 хотя и обладают нулевой степенью подвижности, но не являются группой, так как распадаются на две кинематические цепи, состоящие из звеньев $2, 3$ и $4, 5$, каждая из которых обладает нулевой степенью подвижности:

$$W_{\text{ГР}(2,3)} = W = 3n - 2P_5 - P_4 = 3 \cdot 2 - 2 \cdot 3 = 1.$$

Следовательно, механизм образован присоединением к ведущему звену 1 и стойке двух групп: первой группы, состоящей из звеньев 2 и 3 и второй группы, состоящей из звеньев 4 и 5 .

2. Кулачковые механизмы

Кулачком называется звено, которому принадлежит элемент высшей кинематической пары, выполненный в виде поверхности переменной кривизны. Механизм, в состав которого входит кулачок, называется *кулачковым механизмом* (рис. 1.17).

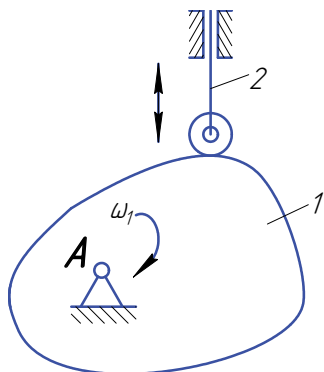


Рис. 1.17. Кулачковый механизм: 1 – кулачок, вращающийся вокруг точки A ; 2 – поступательно движущийся толкатель

Кулачковые механизмы служат для сообщения ведомому звену периодического движения по заданному закону, обусловленному профилем кулачка.

Кулачковые механизмы применяются в машинах-автоматах, прядильных машинах, ДВС и т. д.

Выходное звено кулачковых механизмов, как правило, совершает возвратное движение.

Виды кулачковых механизмов:

- по движению выходного звена: поступательное, вращательное, сложное;
- по конструкции: плоские, цилиндрические, дисковые, конические, гиперболоидные, коноидные.

Прямолинейно движущееся выходное звено кулачкового механизма называется *толкателем*, а качающееся – *коромыслом*.

Для уменьшения трения о поверхность кулачка выходное звено часто снабжают роликом (рис. 1.17).

Постоянное соприкосновение звеньев в высшей паре обеспечивается или *силовым*, или *геометрическим замыканием*.

При силовом замыкании постоянное прижатие звеньев происходит под действием пружины, силы тяжести и т. д. (рис. 1.18, *a*).

При геометрическом замыкании возможность отрыва одного звена от другого устраняется введением дополнительной (избыточной) геометрической связи.

Одним из наиболее распространенных способов геометрического замыкания является применение пазового кулачка (рис. 1.18, б).

Трудность точного выполнения паза и устранения ударов ролика привели к появлению двухдисковых кулачков (рис. 1.18, в).

Вместо двухдисковых кулачков выполняют диаметральный кулачок (рис. 1.18, г).

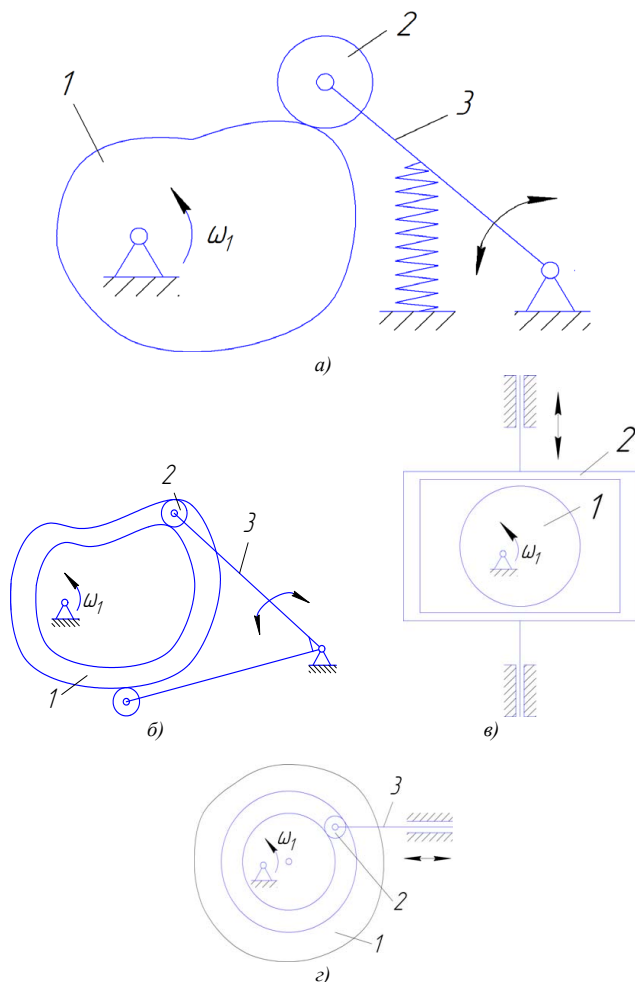


Рис. 1.18. Виды замыкания высшей кинематической пары в кулачковых механизмах

3. Зубчатые механизмы

Зубчатые механизмы (рис. 1.19) применяются для передачи вращательного движения между валами посредством зубчатого зацепления.

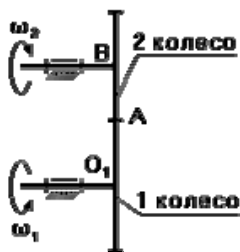


Рис. 1.19. Зубчатый механизм

В зубчатых механизмах каждый зуб может рассматриваться как кулачок.

Зубчатые механизмы наиболее широко применяются в технике и имеют большое количество видов.

4. Клиновые механизмы

К клиновым механизмам относятся трехзвенные механизмы, в которых звенья обладают только поступательным движением.

Поступательное движение звена 2 в направлении y - u вызывает поступательное движение звена 1 в направлении x - x , при этом увеличивается усилие на выходном звене ($F_2 > F_1$).

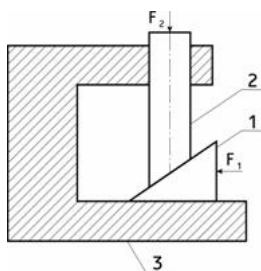


Рис. 1.20. Простой клиновый механизм

5. Винтовые механизмы

К винтовым механизмам относятся механизмы, звенья которых имеют винтовые движения (связывают между собой вращательное и поступательное движения).

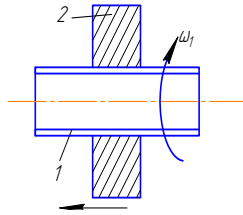


Рис. 1.21. Винтовой механизм

6. Фрикционные механизмы

Во фрикционных механизмах передача движения от ведущего звена к ведомому осуществляется посредством сил трения. Эти механизмы используются в муфтах, в вариаторах.

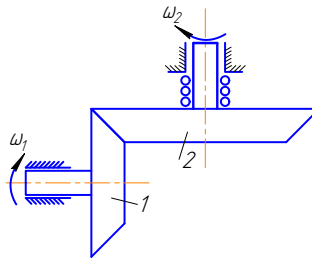


Рис. 1.22. Фрикционный механизм

7. Гидравлические механизмы

В гидравлических механизмах для осуществления поступательного или вращательного движения исполнительного звена используется энергия находящейся под давлением жидкости (рис. 1.23). Гидравлические механизмы широко используются в машиностроении.

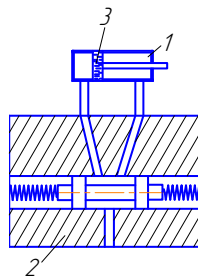


Рис. 1.23. Гидравлический механизм: 1 – гидроцилиндр; 2 – управляющий клапан; 3 – поршень

8. Пневматические механизмы

Пневматические механизмы осуществляют движение исполнительного звена за счет энергии сжатого воздуха.

9. Механизмы с электрическим устройством

Механизмы с электрическим устройством используются в качестве элементов, работающих на принципе воздействия электрических полей (электрические реле).

1.2.8. Синтез шарнирного четырехзвенника

Пусть заданы (рис. 1.24) длина стойки l_4 , угловые координаты входного звена I в трех положениях: $\varphi = \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ и соответствующие угловые координаты выходного звена 3 : $\gamma = \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$. Нужно найти длины звеньев l_1, l_2, l_3 .

Рассмотрим векторный контур $ABCD$, для которого в любом положении механизма $\vec{l}_1 + \vec{l}_2 = \vec{l}_4 + \vec{l}_3$. Проецируя этот контур на координатные оси X и Y , имеем:

$$\left\{ \begin{array}{l} l_1 \cdot \cos \varphi + l_2 \cdot \cos \theta = l_4 + l_3 \cdot \cos \gamma; \\ l_1 \cdot \sin \varphi + l_2 \cdot \sin \theta = l_3 \cdot \sin \gamma. \end{array} \right. \quad (1.4)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} l_1 \cdot \cos \varphi + l_2 \cdot \cos \theta = l_4 + l_3 \cdot \cos \gamma; \\ l_1 \cdot \sin \varphi + l_2 \cdot \sin \theta = l_3 \cdot \sin \gamma. \end{array} \right. \quad (1.5)$$

Исключим угол θ , решив уравнения (1.4) и (1.5) относительно l_2 и l_3 , возведя полученные равенства в квадрат и сложив их:

$$l_2^2 = l_1^2 + l_3^2 + l_4^2 + 2l_3 \cdot l_4 \cdot \cos \gamma - 2l_1 \cdot l_4 \cdot \cos \varphi - 2l_1 \cdot l_3 \cdot \cos(\varphi - \gamma).$$

После деления на $2l_2 \cdot l_4$ и замены текущих значений углов φ и γ на заданные φ_i и γ_i (индекс $i = 1, 2, 3$) получим систему трех линейных уравнений:

$$\frac{l_1}{l_4} \cos(\varphi_i - \gamma_i) + \frac{l_1}{l_3} \cos \varphi_i + \frac{l_2^2 - l_1^2 - l_3^2 - l_4^2}{2l_3 \cdot l_4} = \cos \gamma_i,$$

или

$$\delta_1 \cdot \cos(\varphi_i - \gamma_i) + \delta_2 \cdot \cos \varphi_i + \delta_3 = \cos \gamma_i, \quad (i = 1, 2, 3), \quad (1.6)$$

где неизвестными являются безразмерные параметры:

$$\delta_1 = \frac{l_1}{l_4}; \quad \delta_2 = \frac{l_1}{l_3}; \quad \delta_3 = \frac{l_2^2 - l_1^2 - l_3^2 - l_4^2}{2l_3 \cdot l_4}. \quad (1.7)$$

Из системы (1.6) находим p_1, p_2, p_3 , а затем согласно (1.7) находим искомые длины звеньев по формулам:

$$l_1 = p_1 \cdot l_4; \quad l_3 = \frac{l_1}{p_2}; \quad l_2 = \sqrt{2l_3 \cdot l_4 \cdot p_3 + l_1^2 + l_3^2 + l_4^2}.$$

Задачу синтеза шарнирного четырёхзвенника по трем положениям выходного звена и соответствующим углам поворота входного звена решают методом обращения движения. В этом случае заданы длины звеньев l_4, l_3 , координаты выходного звена Z в трех положениях $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ и углы поворота входного звена $(\varphi_2 - \varphi_1)$ и $(\varphi_3 - \varphi_1)$. Требуется найти длины звеньев l_1, l_2 и начальную угловую координату (в положении 1) φ_1 .

Положение шарнира B по заданным условиям находят путем сообщения всему механизму относительно центра A угловой скорости $(-\omega_1)$. В результате звено AB в системе координат A_{XY} станет неподвижным, а вместо него в противоположном направлении будет вращаться стойка AD_1 (рис. 1.25). Для второго и третьего положения механизма угловыми координатами стойки по отношению к оси абсцисс будут $(\varphi_2 - \varphi_1)$ и $(\varphi_3 - \varphi_1)$. Положение шарнира C является определенным по отношению к стойке и найдется путем построения заданных углов $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ (точки C_1, C_2, C_3). Длина шатуна BC для трех заданных положений одна и та же ($BC = BC_i, i = 1, 2, 3$), поэтому точки C_i должны находиться на окружности, описанной из центра B . Следовательно, положение неизвестной точки B найдется, если точки C_i соединить двумя отрезками C_1C_2 и C_2C_3 , провести через их середины E_{12}, E_{23} перпендикуляры и найти точку пересечения последних. При аналитическом решении для получения формул координат x_i, y_i точек C_i используется кинематическая цепь $\Delta AD_i C_i$, представленного в виде суммы двух векторов \vec{l}_4 и \vec{l}_3 . Координаты точек C_i определяются проекциями указанной векторной цепи на координатные оси:

$$\begin{aligned} x_i &= l_4 \cdot \cos(\varphi_i - \varphi_1) + l_3 \cdot \cos[\gamma_i - (\varphi_i - \varphi_1)]; \\ y_i &= -l_4 \cdot \sin(\varphi_i - \varphi_1) + l_3 \cdot \cos[\gamma_i - (\varphi_i - \varphi_1)]. \end{aligned}$$

Координаты точки B найдем из системы уравнений окружности, описанной из центра B радиусом l_2 :

$$(x_i - x_B)^2 + (y_i - y_B)^2 = l_2^2; \quad i = 1, 2, 3. \quad (1.8)$$

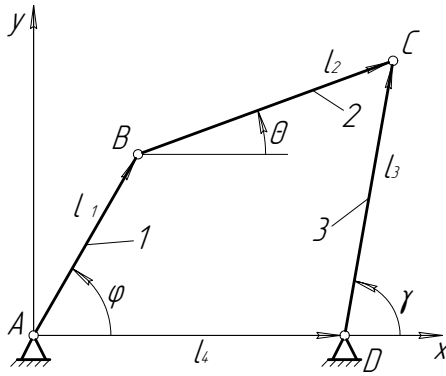


Рис. 1.24

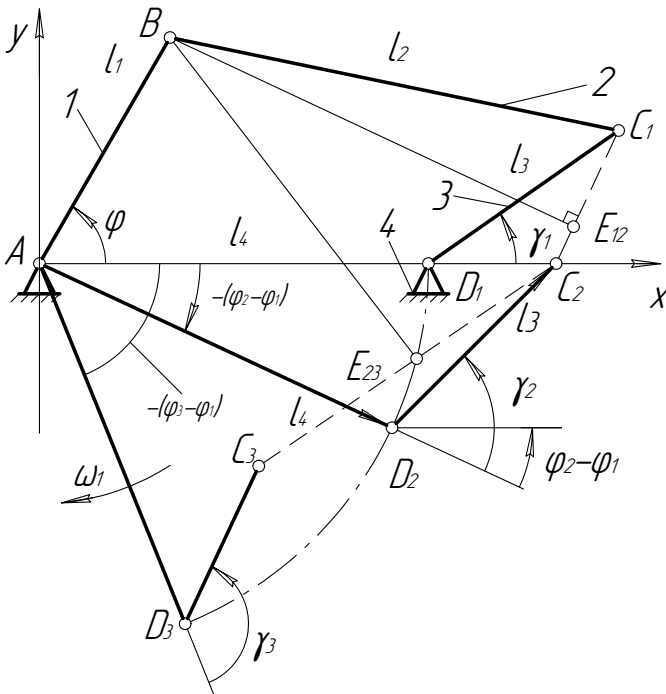


Рис. 1.25

Система (1.8) трех уравнений с тремя неизвестными x_B , y_B и l_2 после несложных преобразований для исключения x_B^2 и y_B^2 сводится к линейной.

По координатам x_B и y_B определяют искомые параметры кинематической схемы механизма:

длину входного звена l :

$$l_{AB} = l_1 = \sqrt{x_B^2 + y_B^2};$$

длину шатуна BC :

$$l_{BC} = l_2 = \sqrt{(x_1 - x_B)^2 + (y_1 - y_B)^2}$$

как расстояние между точками $B(x_B, y_B)$ и $C_1(x_1, y_1)$; начальную угловую координату входного звена:

$$\varphi_1 = \arctg \frac{y_B}{x_B}.$$

1.2.9. Синтез зубчатых механизмов

Основная теорема зацепления

Основную теорему зацепления рассмотрим на примере двух зубчатых колес (рис. 1.26). Профили зубьев двух колёс соприкасаются в точке K . Колёса вращаются вокруг точек O_1 и O_2 в направлениях, указанных стрелками. Скорость точки K в системе первого колеса:

$$V_{K1} = \omega_1 \cdot O_1K. \quad (1.9)$$

Скорость точки K в системе второго колеса:

$$V_{K2} = \omega_2 \cdot O_2K. \quad (1.10)$$

Они различны по величине и направлению.

Давление между двумя твёрдыми телами передаётся по общей нормали $N-N$, следовательно, непрерывная передача движения возможна только лишь в том случае, если проекции скоростей точек контакта обоих профилей на общую нормаль будут одинаковы по величине и направлению.

При $V_{K2} > V_{K1}$ будет происходить размыкание зацепления, чего допускать нельзя; при $V_{K1} > V_{K2}$ происходит внедрение зуба одного колеса в зуб другого колеса (этого тем более нельзя допускать), следовательно, скорости должны быть равны $V_{K2}^n = V_{K1}^n$. Зная, что

$$V_{K1}^n = V_{K1} \cdot \cos \alpha_1; \quad V_{K2}^n = V_{K2} \cdot \cos \alpha_0,$$

так как $V_{K1}^n = V_{K2}^n$, то $V_{K1} \cdot \cos \alpha_1 = V_{K2} \cdot \cos \alpha_2$, тогда, учитывая (1.9) и (1.10), получим:

$$\omega_1 \cdot O_1 K \cdot \cos \alpha_1 = \omega_2 \cdot O_2 K \cdot \cos \alpha_0. \quad (1.11)$$

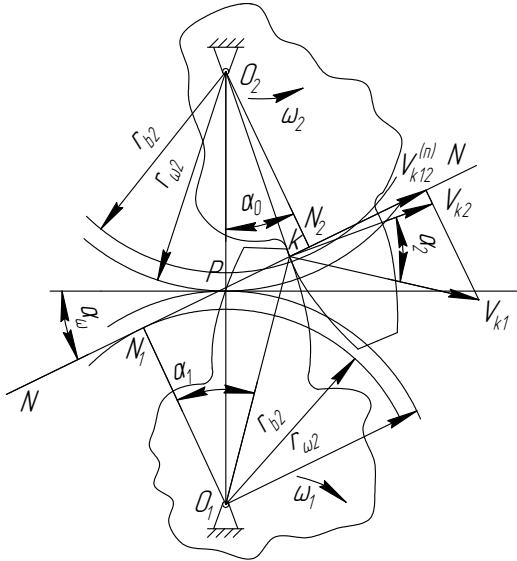


Рис. 1.26

Из точек O_1 и O_2 опустим перпендикуляры O_1N_1 и O_2N_2 на общую нормаль $N-N$:

$$r_{b1} = O_1N_1 = O_1K \cdot \cos \alpha_1; \quad r_{b2} = O_2N_2 = O_2K \cdot \cos \alpha_0..$$

Следовательно, подставив в формулу (1.11), получим:

$$O_1N_1 \cdot \omega_1 = O_2N_2 \cdot \omega_2,$$

откуда

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{O_2N_2}{O_1N_1}. \quad (1.12)$$

Соединим центры вращения профилей линией O_1O_2 и точку пересечения с общей нормалью $N-N$ обозначим P .

Из подобия треугольников $N_1PO_1 \approx N_2PO_2$ следует $\frac{O_2N_2}{O_1N_1} = \frac{O_2P}{O_1P}$, учитывая формулу (1.12), получим:

$$u_{12} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{O_2P}{O_1P} = \frac{r\omega_2}{r\omega_1}.$$

Это равенство выражает основную теорему зацепления: общая нормаль $N-N$ к сопряжённым профилям, вращающимся относительно центров O_1 и O_2 , делит линию центров O_1 и O_2 на части, обратно пропорциональные угловым скоростям этих профилей.

Итак, если точка P неподвижна, то передаточное отношение звеньев будет постоянно. Точка P называется полюсом зацепления. Она является мгновенным центром относительного вращения звеньев 1 и 2. Окружности с центрами O_1 и O_2 , проходящие через полюс, называются начальными. При работе колёс они катятся одна по другой без скольжения. Следовательно, они представляют собой центры колёс.

Угол α_ω , составленный общей нормалью $N-N$ к профилям зубьев (линией зацепления) и общей касательной к начальным окружностям, называется углом зацепления (углом давления).

По теореме зацепления всегда можно проверить, являются ли два профиля находящиеся в зацеплении зубьев сопряженными. Для этого проводим к ним общую нормаль и выясняем, проходит ли она через полюс зацепления. Требование сопряжённости профилей удовлетворяется, если профили являются эвольвентными, циклоидными и в некоторых других случаях. В эвольвентном зацеплении угол α_ω постоянный. В большинстве случаев угол $\alpha_\omega = 20^\circ$.

Образование эвольвенты и её свойства

Эвольвентой круга называют кривую, которую описывает любая точка прямой, перекатывающейся без скольжения по окружности. При этом прямую обычно называют производящей, а окружность – основной r_b .

Пусть производящая прямая [4] (рис. 1.27) $n-n$ показана в положении, когда она касается основной окружности в точке A , и требуется построить эвольвенту, описываемую точкой M . Делим отрезок AM на равные части и откладываем на r_b дуги, равные соответствующим частям отрезка AM : $4'3' = 43$; $3'2' = 32$ и так далее. Через полученные точки проводим касательные и откладываем на них отрезки, последовательно уменьшая длину каждого отрезка на одну часть. Соединяя концы отложенных отрезков, получаем эвольвенту. Уравнение эвольвенты получим из условия перекатывания производящей прямой по r_b :

$$\overset{\cup}{AM}_0 = AM. \quad (1.13)$$

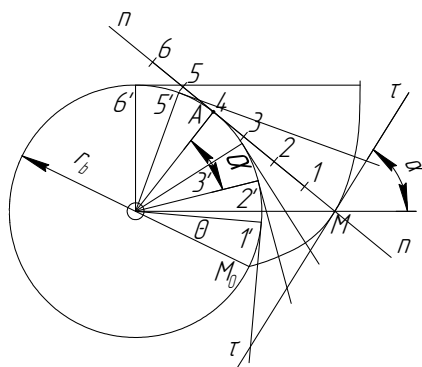


Рис. 1.27

Обозначим α острый угол между касательной τ – τ к эвольвенте и радиусом-вектором эвольвенты OM . Этот угол называется углом профиля. Угол, образованный начальным радиусом-вектором эвольвенты OM_0 и её текущим радиусом OM , называется эвольвентным углом (θ). Тогда условие (1.13) принимает вид: $r_b(\alpha + \theta) = r_b \cdot \text{tg}\alpha$ или $\theta = \text{tg}\alpha - \alpha$. Функция $\text{tg}\alpha - \alpha$ называется инволютой и обозначается inv , то есть уравнение может быть записано $\theta = \text{inv}\alpha$. Радиус-вектор эвольвенты находится из треугольника OAM : $R = \frac{r_b}{\cos\alpha}$.

Эвольвента имеет две ветви (рис. 1.28): положительная ветвь \mathfrak{E}^+ ($\theta > 0$) получается при перекаtywании прямой против хода часовой стрелки, отрицательная \mathfrak{E}^- ($\theta < 0$) – при перекаtywании по ходу часовой стрелки.

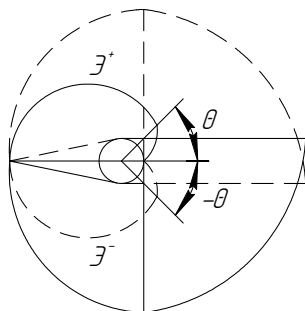


Рис. 1.28

Основные свойства эвольвенты

1. Каждая ветвь эвольвенты вполне определяется радиусом основной окружности r_b и начальной точкой M_0 .
2. Эвольвента не имеет точек внутри основной окружности.
3. Нормаль к любой точке эвольвенты направлена по касательной к основной окружности.
4. Центр кривизны эвольвенты лежит в точке касания нормали с основной окружностью r_b .

Эвольвентное зацепление

Пусть профиль зуба звена 1 (рис. 1.29) очерчен по эвольвенте \mathcal{E}_1 , а профиль зуба звена 2 по эвольвенте \mathcal{E}_2 . Поместим центры этих окружностей в точки O_1 и O_2 и приведём эвольвенты в соприкосновение в точке K .

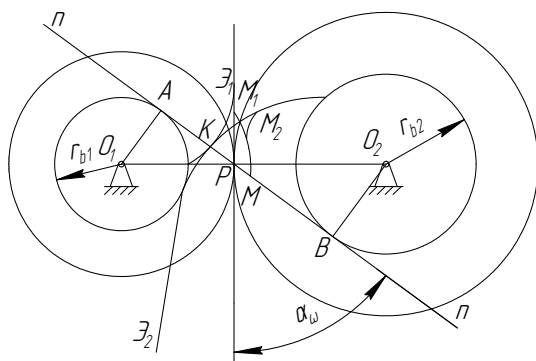


Рис. 1.29

Нормаль к эвольвенте \mathcal{E}_1 в точке K должна быть касательной к r_{b1} , а нормаль \mathcal{E}_2 — касательной к r_{b2} . В точке касания нормаль должна быть общей к обоим профилям, следовательно, точка K лежит на общей касательной к основным окружностям. При вращении звеньев 1 и 2 точка касания эвольвент перемещается по отрезку AB этой касательной, так как вне отрезка AB эвольвенты не могут касаться, то есть иметь общую нормаль. Отсюда следует, что линия зацепления эвольвентных профилей совпадает с общей нормалью к ним и лежит на отрезке AB общей касательной к основным окружностям.

Точка P – полюс зацепления – занимает неизменное положение, следовательно, центры в относительном движении представляют собой окружности с радиусами $r_{w1} = l_{O1}$ и $r_{w2} = l_{O2}$ соответственно. По свойству центроид начальные окружности при движении звеньев перекатываются без скольжения. Итак, при эвольвентном зацеплении передаточное отношение u_{12} имеет постоянную величину

$$u_{12} = \pm \frac{r_{w1}}{r_{w2}}.$$

Знак (–) относится к внешнему зацеплению, знак (+) относится к внутреннему зацеплению.

Из треугольника O_1AP и треугольника O_2BP следует:

$$r_{b1} = \cos \alpha_w \cdot r_{w1}; \quad r_{b2} = \cos \alpha_w \cdot r_{w2}.$$

Следовательно, $u_{12} = \pm \frac{r_{b1}}{r_{b2}}$.

Отсюда можно сделать выводы.

1. При эвольвентном зацеплении изменение межосевого расстояния не влияет на величину передаточного отношения вследствие неизменности радиусов основных окружностей. При изменении межосевого расстояния изменятся лишь радиусы r_w и угол зацепления α_w .

2. При эвольвентном зацеплении передаточное отношение, согласно основной теории, имеет постоянную величину.

3. При внешнем зацеплении эвольвентные профили являются сопряжёнными только в пределах отрезка AB линии зацепления.

Линией зацепления (AB) называется геометрическое место точек соприкосновения профилей боковых поверхностей зубьев колес, принадлежащее неподвижному пространству. Точки M_1 и M_2 – сопряженные.

Точки, касающиеся друг друга на линии зацепления, называются сопряжёнными.

Точки A и B – теоретические границы зацепления, за этими точками зацепление допускать нельзя – наступит заклинивание передачи.

Основные размеры зубчатых колёс с эвольвентным профилем

Эвольвентные профили удовлетворяют условию синтеза зубчатого зацепления – получению заданного передаточного отношения u_{12} . Выполнение дополнительного условия синтеза зависит от размеров зубьев. Эти размеры удобно задавать в долях какой-либо одной линейной величины. Выразим длину некоторой окружности, имеющей диаметр d , через число зубьев Z :

$$\pi \cdot d = P \cdot Z,$$

где P – окружной шаг, то есть расстояние, измеренное по дуге окружности диаметром d между двумя соответствующими точками соседних зубьев (рис. 1.30).

Отсюда

$$d = \frac{P}{\pi} \cdot Z, \text{ или } d = m \cdot z,$$

где m – отношение окружного шага к числу π – называется модулем зуба. Модуль зуба выбирается из ряда рациональных чисел от 0,05 до 100.

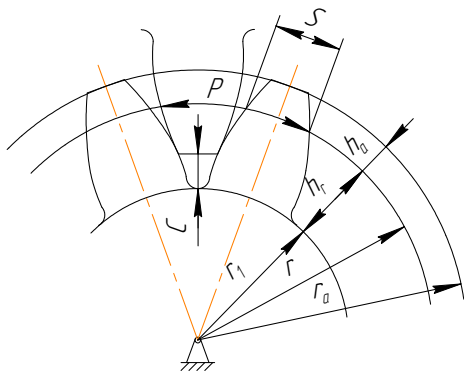


Рис. 1.30

Делительной окружностью называется окружность, для которой модуль имеет стандартную величину, она является базовой для определения размеров зубьев. Иногда начальные окружности r_w и делительные окружности r совпадают, но при этом надо иметь в виду их принципиальное отличие. Делительная окружность есть характеристика одного зубчатого колеса, а начальные окружности дают

характеристику зацепления двух зубчатых колес, и диаметры этих окружностей зависят от межосевого расстояния.

Делительная окружность делит зуб на две части: головку и ножку. Делительной головкой зуба называется часть зуба, расположенная между делительной окружностью r и окружностью вершин r_a . Ножкой зуба называется часть зуба, расположенная между делительной окружностью r и окружностью впадин r_f .

Различают внешние и внутренние зубья. У внешних окружность вершин находится снаружи окружности впадин, а у внутренних – внутри окружности впадин.

Если h_a – высота головки зуба, а h_f – высота ножки зуба, то $h = h_a + h_f$ – общая высота; при этом $h_f > h_a$, так как между окружностями вершин одного зуба и окружностями впадин другого зуба должен быть зазор, называемый радиальным зазором (C).

Для нормальных колёс высоты зуба $h_a = m$; $h_f = 1,25m$. Для укороченных зубьев $h_a = 0,8m$. Радиальный зазор $C = 0,25m$.

Каждый зуб очерчен двумя симметрично расположенными профилями. Расстояние между этими профилями, измеренное по какой-либо окружности, называется толщиной зуба. Толщина по делительной окружности обозначается S .

Способы нарезания зубчатых колёс

Применяются два основных способа нарезания зубчатых колес: копирование и обкатка (огибание). Существуют и другие способы, такие как отливка, накатка, при которой зубья образуются без дополнительной обработки, но они не обеспечивают высокую точность изготовления зубчатых колёс.

По способу копирования специальной дисковой (рис. 1.31) или пальцевой фрезой прорезают впадины, вследствие чего впадина соответствует очертаниям инструмента. После того как очередная впадина прорезана и закончился холостой ход фрезы, заготовку поворачивают на угол: $\tau = \frac{360^\circ}{Z}$; $\tau = \frac{2 \cdot \pi}{Z}$ – угловой шаг.

Недостатки: метод малопроизводителен, низкая точность нарезания колёс, сложный инструмент, необходима большая номенклатура инструмента.

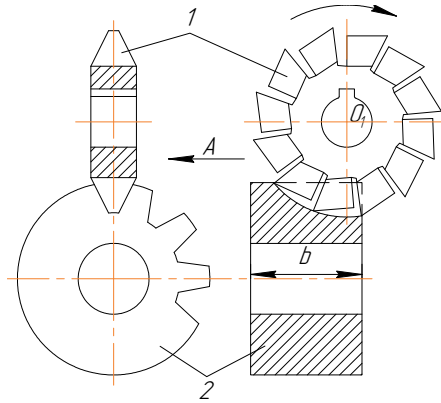


Рис. 1.31

Рассмотрим метод обкатки. Если режущий инструмент выполнить в виде зубчатой рейки (рис. 1.32), то им можно нарезать зубчатое колесо с эвольвентным профилем зубьев, используя метод обкатки.

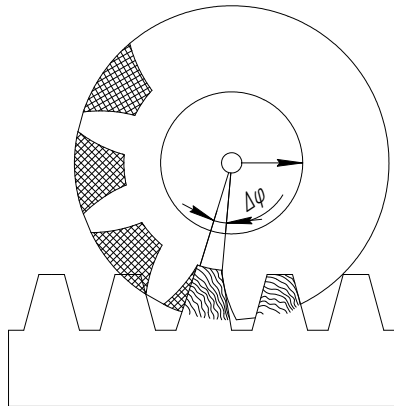


Рис. 1.32

Рассмотрим контур зубьев рейки (рис. 1.33), который называется исходным, так как служит основой для определения форм и расположения режущих кромок.

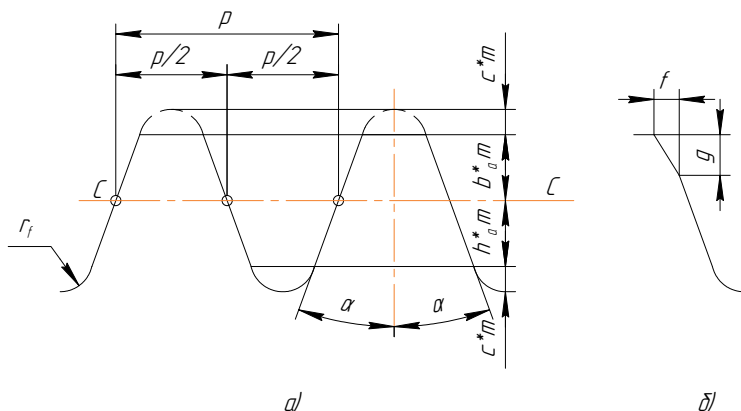


Рис. 1.33

Профиль зуба режущего инструмента отличается от исходного профиля тем, что высота головки увеличена на $C \cdot m$, то есть на величину радиального зазора, так как головка зуба рейки вырезает ножку зуба в заготовке. Этот контур называют производящим.

Прямая (C-C), проходящая по середине общей высоты зуба, называется средней прямой (иногда делительной); $h_a^* = 1$ (коэффициент зуба); $C^* = 0,25$ (при обкатке режущим инструментом заготовке сообщается такое относительное движение, какое она имела бы в зацеплении).

Существуют следующие разновидности метода обкатки.

1. Режущий инструмент выполняют в виде зубчатой рейки (рис. 1.33).

Преимущества: простота инструмента и высокая точность изготовления зубчатых колес.

2. Режущий инструмент выполнен в виде зубчатого колеса, имеющего зубья-резцы (высота головки $h_a = 1,25_m$), которое называется долбяк (рис. 1.34).

Преимущество: можно нарезать зубчатые колеса с внутренними и наружными зубьями.

3. Режущий инструмент выполнен в виде червячной фрезы, продольное сечение которой имеет вид зубчатой рейки.

Преимущества: непрерывность процесса, большая производительность.

Недостаток: можно нарезать зубья только с внешним зацеплением.

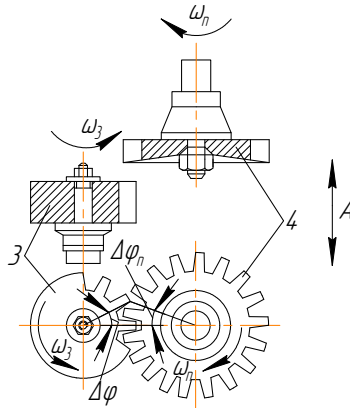


Рис. 1.34

Нулевые, положительные и отрицательные зубчатые колёса и передачи

Возможны три варианта расположения средней линии инструментальной рейки относительно делительной окружности колеса.

1. Средняя прямая производящего контура $C-C$ касается делительной окружности заготовки (рис. 1.35, *а*). Средняя линия катится без скольжения по делительной окружности, равной ширине впадины рейки по средней линии. Толщина зуба $S = 0,5\pi m$. Это колесо называется колесом с равноделенным шагом.

2. Средняя линия $C-C$ смещена (поднята) на величину Xm , где X – коэффициент смещения (рис. 1.35, *б*). По делительной окружности катится без скольжения начальная прямая $H-H$, отстоящая от средней прямой линии на $X \cdot m$. Толщина зуба по делительной окружности оказывается больше ширины впадины, что соответствует увеличению ширины впадины производящего контура начальной прямой $H-H$. Из рисунков следует:

$$S = 0,5\pi m + 2xm \cdot \operatorname{tg}\alpha. \quad (1.14)$$

Коэффициент смещения X в этом случае считается положительным.

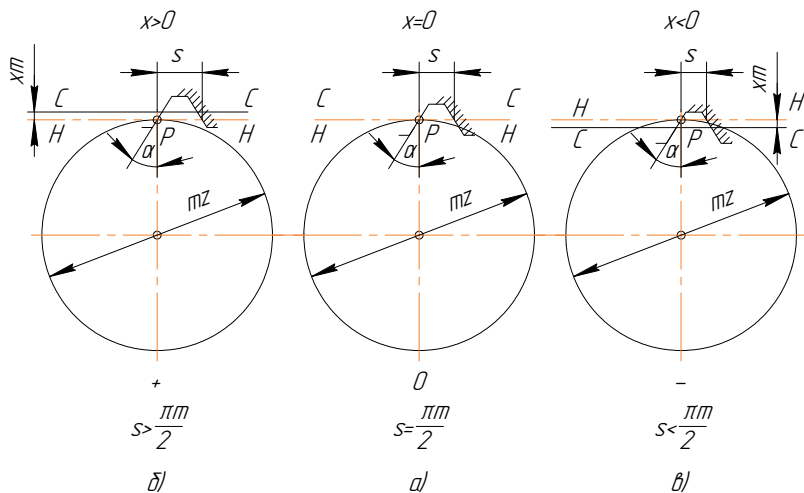


Рис. 1.35

3. Средняя прямая $C-C$ смещена к центру на величину Xm , причем коэффициент смещения X считается отрицательным (рис. 1.35, в).

Толщина зуба по делительной окружности тоже определяется по формуле (1.14) и вследствие того, что $X < 0$, оказывается меньше, чем у колеса с равноделенным шагом.

Зубчатые колеса, нарезанные со сдвигом рейки, называются исправленными колесами. Колеса, нарезанные с положительным сдвигом, называют положительными, нарезанные с отрицательным сдвигом, — отрицательными. Колеса, нарезаемые без сдвига, называют нулевыми колесами.

Для того чтобы определить, к какой из этих групп относится зубчатое колесо, надо определить толщину его зубьев по делительной окружности.

В зависимости от смещений каждого колеса можно получить три типа передач, отличающихся расположением начальных и делительных окружностей.

I тип (рис. 1.36, а). Эти окружности совпадают, если передачи удовлетворяют условию $X_1 + X_2 = 0$. Такая передача называется нулевой, то есть это передачи, составленные из колес без смещения, или передачи, в которых отрицательное смещение одного колеса равно

по абсолютной величине положительному смещению другого колеса (равносмещенные).

Межосевое расстояние в этих передачах $a = 0,5m(Z_1 + Z_2)$ называется делительным межосевым расстоянием, а угол зацепления α равен углу профиля производящего контура.

II тип (рис. 1.36, б). В передачах, у которых по делительным окружностям толщина зуба одного колеса больше ширины впадины другого, для зацепления без бокового зазора межцентровое расстояние a_w должно быть больше a .

Соответственно, увеличивается и угол α_w .

III тип (рис. 1.36, в). Аналогично для передач, у которых по делительной окружности толщина зубьев одного из колес меньше впадины другого, имеем $a_w < a$. Эти передачи получаются при $X_1 + X_2 < 0$.

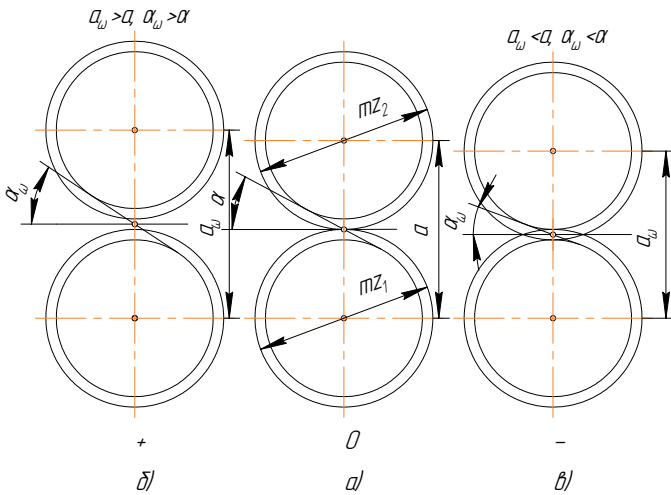


Рис. 1.36

**Геометрический расчет зубчатых передач
при заданных смещениях X_1 и X_2**

Для вычисления a_w и α_w определяем сначала толщину зуба по начальной окружности.

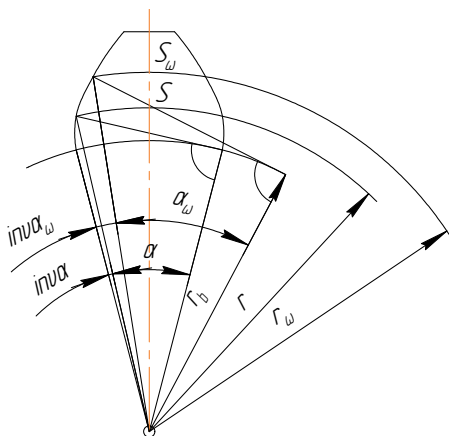


Рис. 1.37

Из рис. 1.37 с учетом уравнения эвольвенты $\Theta = \text{inv}\alpha$ имеем:

$$S_w = r_w \left(\frac{S}{r} + 2\text{inv}\alpha - \text{inv}\alpha_w \right).$$

Подставив значение толщины зуба по делительной окружности

$$S = 0,5\pi m + 2Xm \cdot \text{tg}\alpha$$

и учитывая

$$r = \frac{mZ}{2} \quad \text{и} \quad r_w = \frac{P_w Z}{2\pi},$$

где P_w – шаг по начальной окружности, получаем:

$$S_w = \frac{P_w}{\pi} \left[\frac{\pi}{2} + 2x \cdot \text{tg}\alpha + Z(\text{inv}\alpha - \text{inv}\alpha_w) \right]. \quad (1.15)$$

Для начальных окружностей сумма толщин зубьев равна шагу

$$S_{w2} + S_{w1} = P_w$$

Отсюда с учетом формулы (1.15)

$$\text{inv}\alpha_w = \text{inv}\alpha + \frac{2(x_1 + x_2) \cdot \text{tg}\alpha}{Z_1 + Z_2}.$$

По таблице определяем α_w .

Радиусы начальных окружностей определим

– из $\Delta N_1 O_1 P$

$$r_{w1} = O_1 P = \frac{r_{b1}}{\cos \alpha_w} = \frac{m Z_1 \cos \alpha}{2 \cos \alpha_w};$$

– из $\Delta N_2 O_2 P$

$$r_{w2} = O_2 P = \frac{r_{b2}}{\cos \alpha_w} = \frac{m Z_2 \cos \alpha}{2 \cos \alpha_w}.$$

Тогда

$$a_w = r_{w1} + r_{w2} = \frac{m}{2} (Z_1 + Z_2) \frac{\cos \alpha}{\cos \alpha_w}.$$

Радиусы впадин r_{f1} получаются из условия, что делительная головка режущего инструмента, равная по высоте $(h_a^* + C^*) \cdot m$, при обработке проходит внутрь делительной окружности на величину $(h_a^* + C^* - X) \cdot m$. Отсюда:

$$r_{f1} = 0,5\pi Z_1 - (h_a^* + C^* - X)m = 0,5\pi Z_1 - 1,25m + X_1 m,$$

где $h_a^* = 1$, $C^* = 0,25$; $0,5\pi Z_1$ – делительная окружность; $1,25m$ – высота ножи; $X_1 \cdot m$ – смещение рейки.

Радиусы вершин r_a получаются из условия получения радиального зазора $C^* m$:

$$r_{a1} = a_w - r_{f2} - C^* m = a_w - r_{f2} - 0,25m; \quad r_{a2} = a_w - r_{f1} - 0,25m.$$

Влияние смещения инструмента на форму зубьев

Рассмотрим профили зубьев трех колес с одинаковым числом зубьев, нарезанных одним и тем же инструментом, но с различными смещениями: $X_1 < X_2 < X_3$ (рис. 1.38).

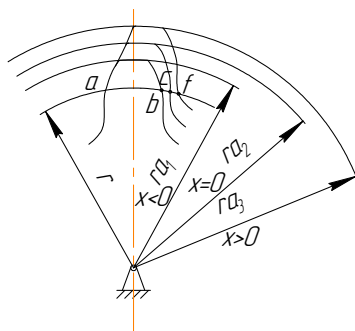


Рис. 1.38

1. По мере алгебраического увеличения X толщина зуба у основания увеличивается, а у вершины уменьшается, то есть коэффициент смещения влияет на форму зуба.

2. У положительных колес используется участок эвольвенты, наиболее удаленный от её основания, обладающий большими радиусами кривизны. Это способствует уменьшению износа и контактных напряжений на боковой поверхности зуба.

3. Положительное смещение X способствует устранению подреза зубьев, который наблюдается при нарезании зубчатых колес с малым числом зубьев инструментальной рейкой.

1.3. Манипуляторы и промышленные роботы

1.3.1. Виды манипуляторов и промышленных роботов

Манипулятором называют техническое устройство, предназначенное для воспроизведения рабочих функций руки человека.

Первые конструкции манипуляторов не только по назначению, но и по внешнему виду напоминали руку человека.

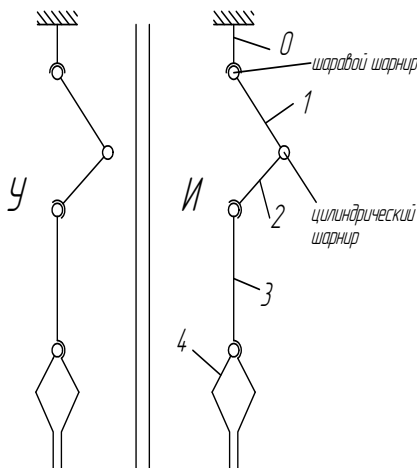


Рис. 1.39

На рис. 1.39 представлена схема копирующего манипулятора, состоящего из управляющего (У) и исполнительного (И) механизмов.

Оба механизма совершенно идентичны, причем вследствие механической, электрической или какой-либо другой связи движение звеньев исполнительного механизма повторяет (копирует) движение звеньев управляющего механизма.

Манипулятор образован из пространственной незамкнутой кинематической цепи. Звенья этой цепи по аналогии с рукой человека имеют следующие названия: *0* – корпус, *1* – плечо, *2* – предплечье, *3* – кисть или захват, *4* – палец.

Рассматриваемый манипулятор имеет семь степеней свободы, так как число степеней свободы незамкнутой кинематической цепи равно сумме подвижных кинематических пар. Звено *4* (палец) при рассмотрении структуры, кинематики и динамики манипулятора объединяется со звеном *3*. В дальнейшем появились манипуляторы с большим числом звеньев и кинематических пар, и внешнее сходство с рукой человека стало утрачиваться.

Во всех вариантах сохранилось назначение манипулятора – воспроизводить пространственные движения, подобные движениям рук человека.

Копирующие манипуляторы применяются теперь во многих областях техники для выполнения операций в условиях, исключающих возможность присутствия человека (радиоактивность, вакуум, высокая температура, повышенное давление, вредное химическое производство и т. д.)

В зависимости от вида системы управления различают манипуляторы с ручным и автоматическим управлением.

В манипуляторах с ручным управлением оператор, воздействуя на звенья управляющего механизма, приводит в движение звенья исполнительного механизма. При этом предельные усилия и перемещения исполнительного механизма ограничиваются возможностями оператора. Вследствие недостатка свободы действий манипуляторы с сервоприводом часто выполняются с дистанционным управлением.

В манипуляторах с автоматическим управлением звенья исполнительного механизма получают движение от сервопривода, работающего по заданной программе подобно станкам с программным управлением. Управляющий механизм служит в этом случае только

для выработки программы работ исполнительного механизма. Все действия оператора, связанные с перемещением звеньев управляющего механизма, преобразуются посредством датчиков перемещения в электрические и механические сигналы и записываются на магнитную ленту.

Полученная программа может многократно использоваться для управления манипуляторами.

1.3.2. Структура и геометрия манипуляторов

Структурные схемы кинематических цепей манипуляторов довольно разнообразны. Они отличаются числом звеньев, видами и расположением кинематических пар различной подвижности, числом степеней свободы.

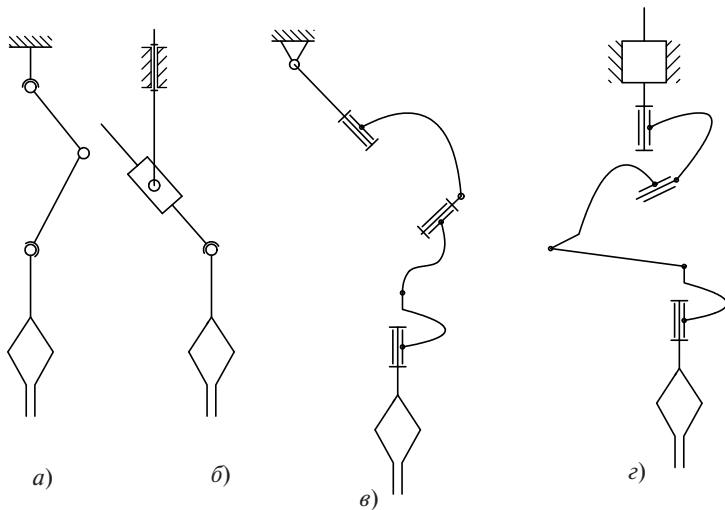


Рис. 1.40

На рис. 1.40 показаны четыре схемы, применяемые в отечественных и зарубежных манипуляторах. Простейший пространственный манипулятор (рис. 1.40, *a*) имеет три пары подвижных звеньев: одну вращательную и две сферические. Если надо обслуживать большой рабочий объем, применяются манипуляторы с одной пос-

тупательной, одной сферической и двумя вращательными парами (рис. 1.40, б).

Обычно сферические пары заменяются кинематическими соединениями, составленными из вращательных пар, оси которых пересекаются. Например, на рис. 1.40, в показана схема манипулятора с шестью степенями свободы, в состав которого входят только вращательные пары.

Число степеней свободы может быть и больше шести. Например, на рис. 1.40, г показана схема манипулятора с числом степеней свободы, равным 8, при одной поступательной, одной цилиндрической и пяти вращательных парах.

Во многих конструкциях манипуляторов сферические пары заменяются кинематическими соединениями, состоящими из двух или трех дополнительных вращательных пар, оси которых пересекаются в одной точке (рис. 1.41).

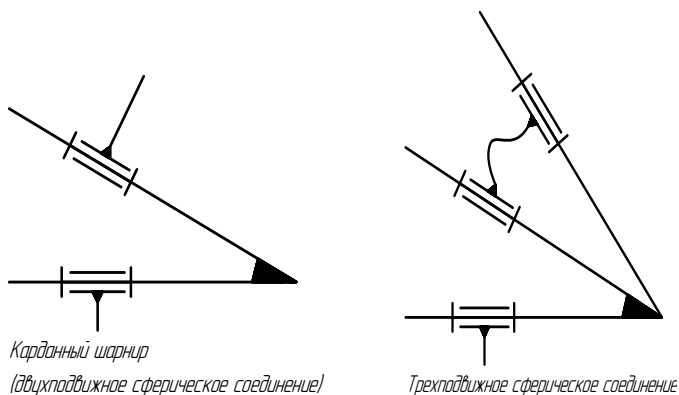


Рис. 1.41. Замена сферических пар

1.3.3. Рабочий объем манипуляторов и классификация движения захвата

Рабочим объемом манипулятора называется объем, ограниченный поверхностью, огибающей все возможные положения захвата. Однако не все части этого объема одинаково удобны для выполнения заданных движений захвата. В связи с этим движения захвата подразделяют на 4 класса.

К первому классу относятся движения в свободном рабочем объеме (рис. 1.42, а).

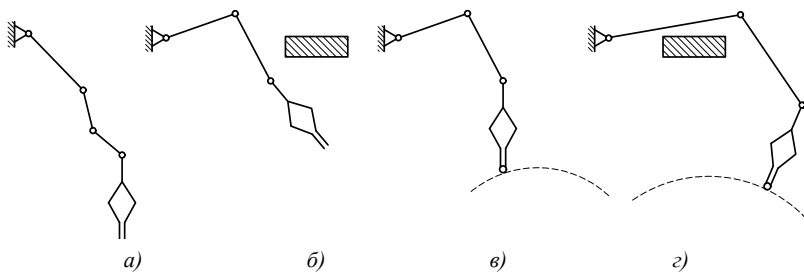


Рис. 1.42

Движение в несвободном пространстве (рис. 1.42, б), при котором часть рабочего объема занята некоторым твердым телом, относится ко второму классу. К третьему классу относятся движения, согласованные со связями, наложенными на объект манипулирования (рис. 1.42, в). Наконец, к четвертому классу относятся движения, совершенные в несвободном пространстве при несвободном объекте манипулирования (рис. 1.42, г).

Возможность выполнения заданных движений захвата различных классов определяется не только числом степеней свободы манипуляторов, но и расположением кинематических пар.

Влияние расположения кинематических пар манипулятора на его маневренность

Под маневренностью манипулятора понимается его число степеней свободы при неподвижном захвате. Одну степень маневренности имеет манипулятор, показанный на рис. 1.40, а, так как при неподвижном захвате его звенья могут вращаться вокруг оси, проходящей через центры сферических пар. В манипуляторе по схеме, показанной на рис. 1.40, б, при неподвижном захвате маневренность равна нулю, т. е. каждому положению захвата соответствует единственное расположение всех звеньев. Манипулятор по схеме на рис. 1.40, в также не имеет маневренности. Однако одному и тому же положению захвата могут соответствовать два различных варианта расположения звеньев, что позволяет оператору обходить некоторые препятствия в рабочем объеме.

Сравнение различных схем манипуляторов показывает, что маневренность зависит не только от числа степеней свободы захвата, но и от расположения кинематических пар. Повышение маневренности манипулятора позволяет выполнять движения более высоких классов и увеличивает свободу действия оператора при выполнении маневров.

1.3.4. Структурный синтез манипуляторов

Структурный синтез манипуляторов, т. е. определение числа звеньев, числа кинематических пар различной подвижности и их расположения, представляет значительные трудности из-за большого числа степеней свободы. Например, уже для манипулятора с тремя степенями свободы, если применять только вращательные и поступательные пары, получается 8 возможных комбинаций расположения этих пар. Поэтому при структурном синтезе манипуляторов с числом степеней свободы 6 и более все возможные варианты можно получить только с использованием ЭВМ. Для сравнения этих вариантов необходимо иметь коэффициенты, определяющие их кинематические и динамические свойства, а также коэффициенты, характеризующие возможность и удобство выполнения разнообразных типовых операций, для совершения которых предназначен манипулятор.

Кинематические и динамические коэффициенты для каждого варианта схемы могут быть найдены на основании общих методов кинематического и динамического анализа.

1.3.5. Зоны обслуживания, угол и коэффициент сервиса

Зоной обслуживания (рабочей зоной) называется часть рабочего объема манипулятора, в которой можно выполнить данную операцию, характеризуемую расположением захвата по отношению к объекту манипулирования. Для каждой точки объема манипулятора можно определить некоторый телесный угол ψ , внутри которого захват можно подвести к этой точке. Этот угол называется углом сервиса.

Отношение $\frac{\psi}{4\pi} = \theta$ называется коэффициентом сервиса в данной точке. Значение этого коэффициента может меняться от 0 до 1.

Вопросы для самопроверки

1. Что называется машиной, механизмом, кинематической цепью? Какие виды кинематических цепей существуют?
2. Что называется кинематической парой, и как данные пары классифицируются?
3. В чем различие между высшими и низшими парами? Как определяется степень подвижности пространственных и плоских механизмов?
4. Назовите основные виды механизмов.
5. Как осуществляется синтез четырехзвенных механизмов?
6. Как образуется эвольвента? Ее основные признаки.
7. Какие методы нарезания зубчатых колес вы знаете? Основные геометрические параметры и размеры зубчатых передач.
8. Что называется манипулятором, рабочим объемом и зоной обслуживания манипулятора?

2.1. Кулачковые механизмы

2.1.1. Кинематический анализ кулачковых механизмов методом диаграмм

Рассмотрим некоторую типовую функцию положения толкателя $S_2 = f(\varphi_1)$, заданную графически [1] (рис. 2.1).

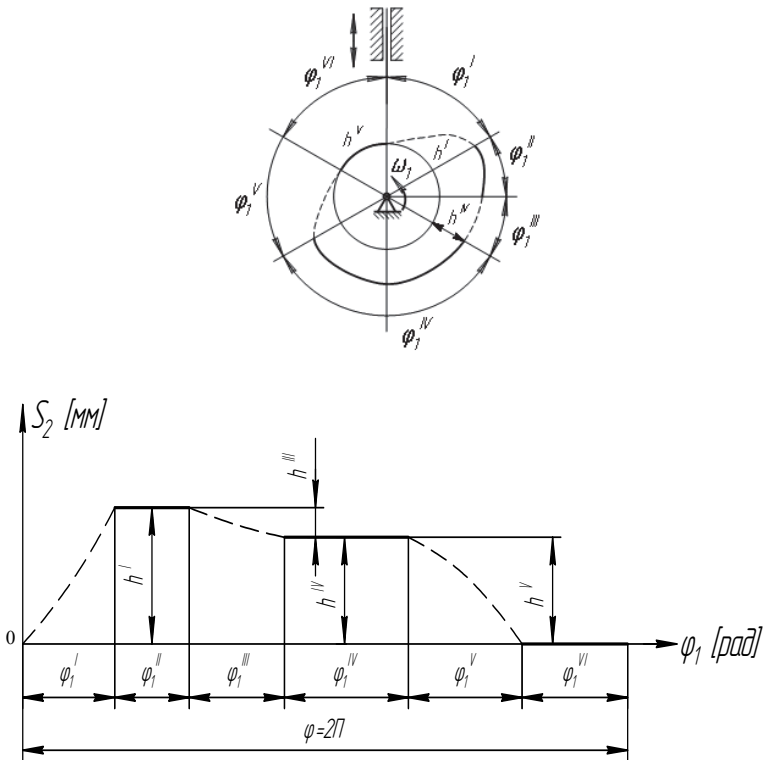


Рис. 2.1

Пусть угол поворота кулачка $\varphi = 2\pi$ соответствует полному циклу движения механизма. На угле φ_1^I происходит подъем толкателя на величину h^I .

Далее на угле поворота φ_1^{II} толкатель имеет выстой. На угле поворота φ_1^{III} происходит опускание толкателя на величину $h^{\text{III}} = h^{\text{I}} - h^{\text{IV}}$. На угле поворота φ_1^{IV} толкатель имеет второй выстой. На угле поворота φ_1^{V} он опускается на величину h^{V} и на угле φ_1^{VI} вновь имеет выстой.

Углы $\varphi_1^{\text{I}}, \varphi_1^{\text{II}}, \varphi_1^{\text{III}}, \dots$ носят название фазовых углов. Участки кривой $S_2 = f(\varphi_1)$, соответствующие фазовым углам, называются фазой подъема, фазами выстоя, фазой опускания.

Нетрудно видеть, что в углах $\varphi_1^{\text{II}}, \varphi_1^{\text{IV}}, \varphi_1^{\text{VI}}$, соответствующих фазам выстоя, профиль кулачка должен быть очерчен по дугам окружностей с радиусами $r + h^{\text{I}}$; $r + h^{\text{IV}}$ и r_0 , где r_0 — наименьший радиус кулачка.

На рисунке был рассмотрен кулачковый механизм с поступательно движущимся звеном, но все определения и положения применимы и для кулачковых механизмов с коромыслом. В этих случаях диаграмма движения задается в виде функции $\varphi_2 = f(\varphi_1)$.

Рассмотрим несколько диаграмм аналогов ускорений, определяющих законы движения ведомых звеньев.

На рис. 2.2 показана диаграмма аналога постоянного ускорения S'' . Также изображены диаграммы аналога скорости S' и пути S . Представленный этими диаграммами закон определяет равноускоренное движение ведомого звена.

Диаграмма аналога ускорения имеет разрывы, определяющие мягкие удары. Для быстроходных механизмов такой закон неприемлем из-за больших сил инерции толкателя или коромысла.

При скачкообразном изменении диаграммы аналога ускорений толкатель получает мягкий удар, происходящий из-за резкого изменения динамических нагрузок, вызывающих упругие колебания. Диаграмма аналога ускорения, изображенная на рис. 2.3, показывает, что в середине движения нет скачка ускорения, но в начале и конце движения скачки имеются.

Избежать скачков ускорений (рис. 2.4) можно при треугольной диаграмме аналогов ускорения [3].

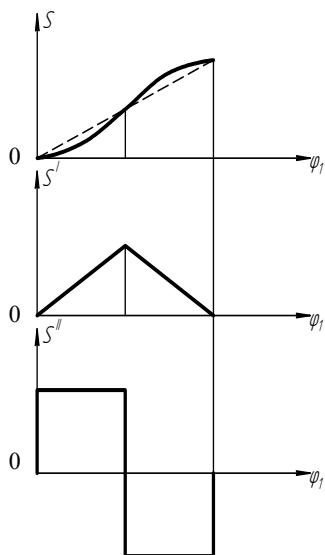


Рис. 2.2. Диаграмма пути, аналога скорости, изменяющегося по закону треугольника, и аналога ускорения толкателя

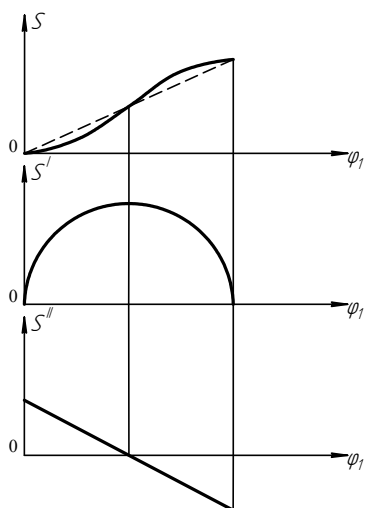


Рис. 2.3. Диаграмма пути, аналога скорости и аналога ускорения, изменяющегося по линейному закону

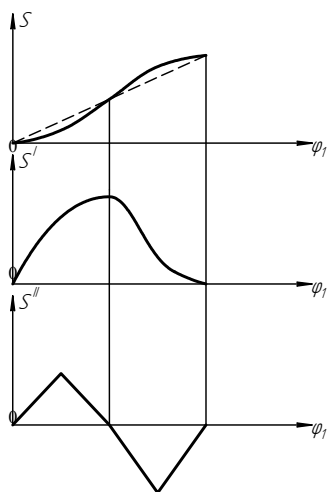


Рис. 2.4. Диаграмма пути, аналога скорости и аналога ускорения, изменяющегося по закону треугольника

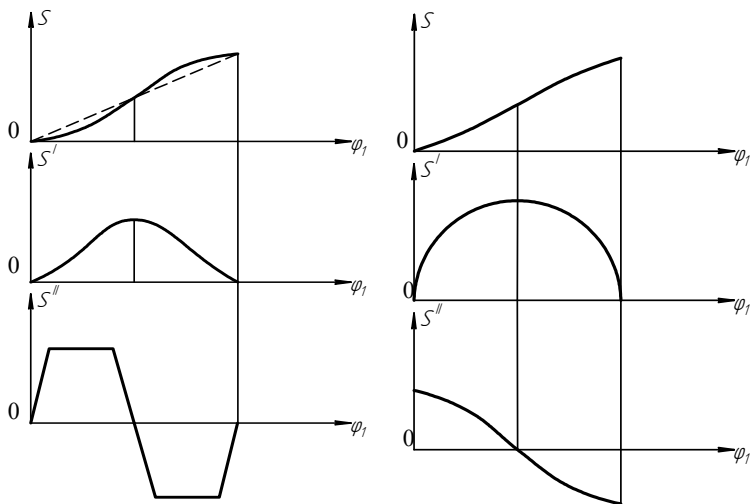


Рис. 2.5. Диаграмма пути, аналога скорости и аналога ускорения, изменяющегося по трапецидальному закону

Рис. 2.6. Диаграмма пути, аналога скорости и ускорения, изменяющегося по косинусоидальному закону

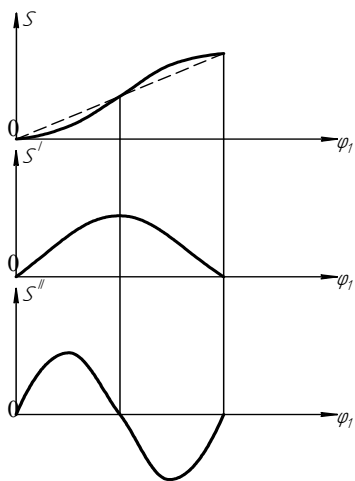


Рис. 2.7. Диаграмма пути, скорости и ускорения, изменяющегося по синусоидальному закону

Удачным законом движения считается трапецеидальный (рис. 2.5).

Значительное распространение получили диаграммы аналогов ускорения, изменяющихся по законам тригонометрических функций.

Ускорение, изменяющееся по косинусоидальному закону, вызывает мягкий удар (рис. 2.6). При синусоидальном законе ударов нет (рис. 2.7).

2.1.2. Угол передачи движения, его определение

Пусть звено 1 (рис. 2.8) со звеном 2 образуют высшую кинематическую пару в точке касания C .

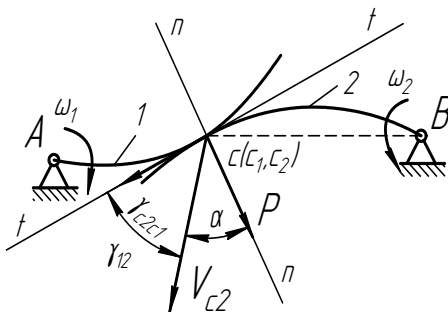


Рис. 2.8

При этом на звено 2 действует сила P , направленная по нормали $n-n$ (т. е. сила трения между звеньями не учитывается, в случае учета реакция отклонится на угол трения).

Тогда угол α между нормалью $n-n$ и направлением скорости V_{C2} называется углом движения, а угол γ_{12} , образованный касательной $t-t$ к профилям с вектором скорости V_{C2} , называется углом передачи движения.

Таким образом, угол передачи движения является углом, добавочным до 90° к углу движения α : $\gamma_{12} = 90^\circ - \alpha$.

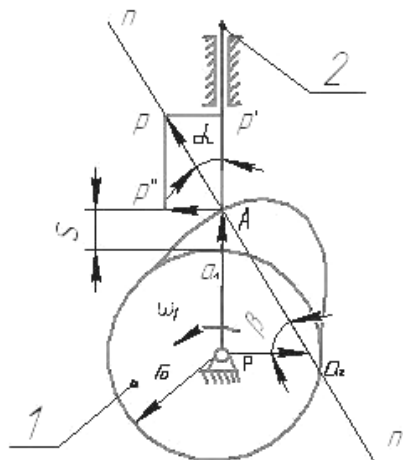


Рис. 2.9. Угол давления в кулачковом механизме: r_0 – минимальный радиус кулачка; S – координата, определяющая текущее положение толкателя

Для заданного положения механизма (рис. 2.9) угол давления определяют из повернутого плана аналогов скоростей.

Из плана pa_1a_2 , где a_1 и a_2 – концы векторов аналогов скоростей, соответственно точки A_1 кулачка и точки A_2 толкателя, имеем:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{pa_2}{pa_1} = \frac{V_{A2}}{r_0 + S};$$

Это равенство показывает, что величина угла давления α при одном и том же заданном законе движения ведомого звена зависит от величины минимального радиуса r_0 профиля кулачка, а именно, чем больше радиус r_0 , тем меньше угол давления и тем больше размеры кулачка.

2.1.3. Синтез кулачковых механизмов

Определение минимального радиуса кулачка

Определение профиля кулачка по заданному закону движения толкателя.

На рис. 2.10 изображена диаграмма $V = f(S)$ для прямого и обратного хода толкателя. Для определения минимального радиуса r_0 к части диаграммы, соответствующей прямому ходу толкателя, следует провести касательную под углом α_{\max} . Пересечение этой касательной с осью абсцисс определяет минимальный радиус r_0 .

тельной с направлением OS движения толкателя определяет точку O – центр вращения кулачка.

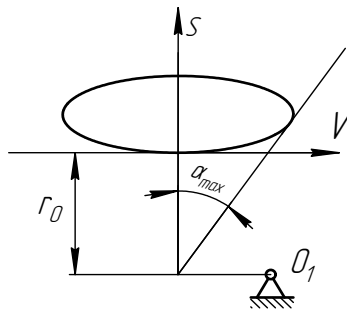


Рис. 2.10

Если выбрать центр O_1 правее указанной линии, то будет получен механизм с эксцентрично поставленным толкателем. В этом случае механизм получается несимметричным и поэтому без особой надобности применять его не следует.

Задачу об определении формы профиля кулачка решает метод обращения движения.

Применяя этот метод, надо условно остановить кулачок, а ведомое звено и стойку заставить двигаться с угловой скоростью, равной и противоположной направлению угловой скорости кулачка.

На рис. 2.11 представлена схема механизма с центрально поставленным толкателем. Пусть минимальный радиус кулачка уже определен и известно это наинизшее положение толкателя.

В обращенном движении кулачок неподвижен, а осевая линия AC_0 вращается против движения часовой стрелки с угловой скоростью кулачка.

Кроме того, толкатель движется относительно направляющих по закону, заданному диаграммой $S = f(\varphi_1)$. В условном обращенном движении осевая линия поворачивается на угол φ_{1i} и переходит в положение AC_i ; точка B перемещается вдоль оси AC_i на величину S_i и оказывается в точке B_i . Величина радиуса-вектора r_i профиля кулачка в новом положении равна $r_i = r_0 + S_i$.

Описанным способом можно найти искомый профиль кулачка.

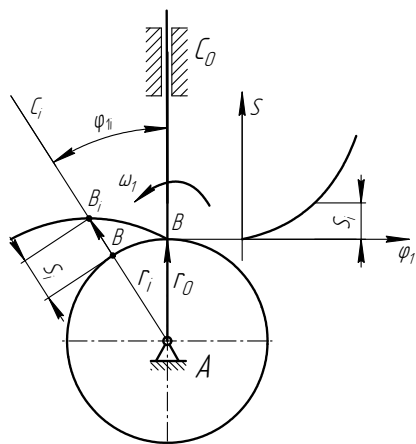


Рис. 2.11

2.2. Кинематика зубчатых передач

2.2.1. Передаточное отношение последовательного ряда колёс

Особенностью этого ряда является то, что каждое колесо имеет свою собственную ось вращения (рис. 2.12).

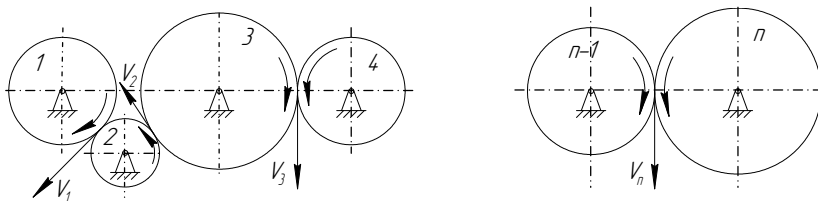


Рис. 2.12

$V_1 = V_n$, так как перекачивание происходит без скольжения.

$$r_{W1} \cdot \omega_1 = r_{Wn} \cdot \omega_n;$$

$$\frac{\omega_1}{\omega_n} = \frac{r_{Wn}}{r_{W1}} = \frac{z_n}{z_1}; \quad u_{1n} = \frac{z_n}{z_1} \cdot (-1)^m,$$

где m — число внешних зацеплений. Внутреннее зацепление не меняет направление вращения.

Этот ряд колёс служит для передачи вращения в случае, когда колёса расположены далеко друг от друга (большое межцентровое расстояние).

2.2.2. Передаточное отношение ступенчатого ряда колёс

Этот ряд (рис. 2.13) отличается тем, что колёса на осях помещаются блоками, то есть на каждой оси закреплено по два колеса, поэтому число колёс в этом ряду всегда четное. Применяя все выкладки, как для последовательного ряда, можно сделать вывод, что передаточное отношение равно произведению передаточных отношений отдельных ступеней этого ряда: $u_{1n} = u_{1,2} \cdot u_{3,4} \cdot u_{5,6} \cdot \dots \cdot u_{(n-1)} \cdot (-1)^m$.

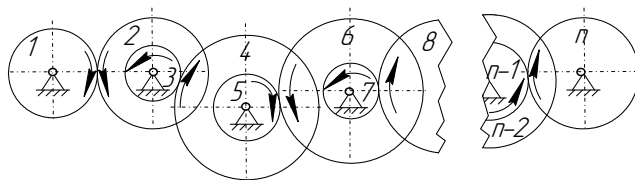


Рис. 2.13

Этот ряд применяется для получения большого передаточного отношения или для значительного увеличения (уменьшения) момента.

2.2.3. Передаточное отношение планетарных и дифференциальных механизмов

Звенья, вращающиеся вокруг неподвижной оси, называются основными, или центральными (рис. 2.14).

Центральное колесо I называется солнечным, а неподвижное 3 – коронным, или корончатым. Зубчатое колесо 2 , имеющее подвижную ось, называется сателлитом. Звено H называется водилом, или поводком. Механизмы, в состав которых входят зубчатые колеса с подвижными осями, называются планетарными, или дифференциальными.

Планетарными (рис. 2.14, а) называются механизмы, имеющие одну степень свободы. Дифференциальные (рис. 2.14, б) механизмы имеют две и более степени свободы.

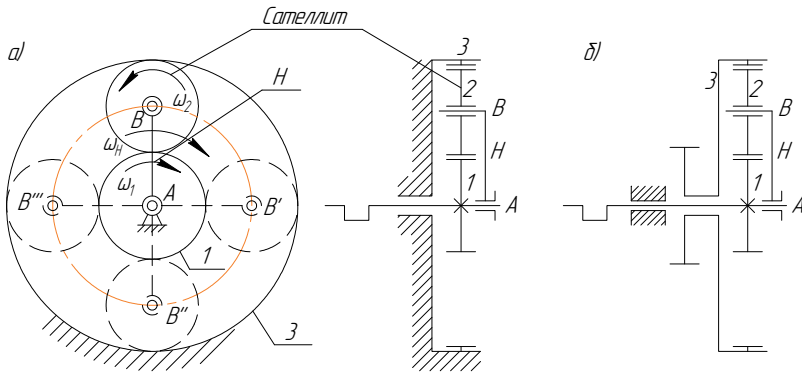


Рис. 2.14

Эти механизмы обязательно должны быть соосными, то есть оси солнечных колёс должны располагаться на одной и той же прямой линии.

Рассмотрим дифференциальный механизм (рис. 2.15). В нем

$$W = 3n - 2P_5 - P_4,$$

где $n = 4$; $P_5 = 4$; $P_4 = 2$.

Тогда $W = 3 \cdot 4 - 2 \cdot 4 - 2 = 2$.

Таким образом, определённость в движении звеньев этого механизма будет в том случае, если будут известны законы движения двух его ведущих звеньев.

Так как сателлиты имеют подвижные оси, то использовать формулы для расчёта передаточного отношения механизмов с неподвижными осями не представляется возможным. В этом случае прибегают к методу инверсии (метод обращённого движения).

Будем рассматривать движение всех колёс относительно водила. Всем звеньям зададим вращательное движение с угловой скоростью ω_H водила, но в обратном направлении ($-\omega_H$) и найдём скорости всех звеньев механизма. Для этого вычтем угловую скорость водила из всех угловых скоростей колёс (табл. 2).

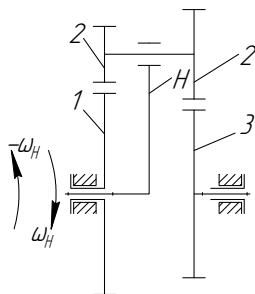


Рис. 2.15

Таблица 2

Скорость звеньев в действительном и обращённом движении

Звено	Скорость звена в действительном движении (до инверсии)	Скорость звена в обращённом движении (после инверсии)
Колесо 1	ω_1	$\omega_1^{(H)} = \omega_1 - \omega_H$
Колесо 2	ω_2	$\omega_2^{(H)} = \omega_2 - \omega_H$
Колесо 2'	$\omega_{2'}$	$\omega_{2'}^{(H)} = \omega_{2'} - \omega_H$
Колесо 3	ω_3	$\omega_3^{(H)} = \omega_3 - \omega_H$
Звено H	ω_H	$\omega_H^{(H)} = \omega_H - \omega_H$

Механизм, полученный в результате инверсии (остановки водила), называется обращённым (рис. 2.16). В результате получили обычную зубчатую передачу с неподвижными осями, передаточное отношение которой

$$u_{13}^{(H)} = \frac{\omega_1^{(H)}}{\omega_3^{(H)}} = \frac{\omega_1 - \omega_H}{\omega_3 - \omega_H} = \frac{n_1 - n_H}{n_3 - n_H}. \quad (2.1)$$

Эту зависимость (2.1) называют формулой Виллиса для дифференциальных механизмов.

Если бы было n колёс, то:

$$u_{ns}^{(H)} = \frac{\omega_n - \omega_H}{\omega_s - \omega_H} = \frac{n_n - n_H}{n_s - n_H},$$

где s – солнечное колесо.

Дифференциальный механизм никакого определённого передаточного отношения не имеет, если ведущим является одно из звеньев (колесо или водило), и приобретает определённость, если ведущих колёс будет два.

Передаточное отношение $u_{1,3}^{(i)}$ обращённого механизма можно рассчитать, зная числа зубьев колёс:

$$u_{13}^{(H)} = u_{12}^{(H)} \cdot u_{23}^{(H)} \cdot (-1)^m = \frac{Z_2 \cdot Z_3}{Z_1 \cdot Z_2'} \cdot (-1)^m.$$

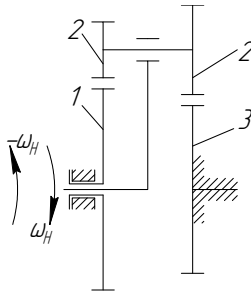


Рис. 2.16

У планетарных механизмов (рис. 2.16) одно из центральных (основных) колёс неподвижно, тогда формула Виллиса примет вид:

$$u_{13}^{(H)} = \frac{\omega_1 - \omega_H}{\omega_3 - \omega_H} = 1 - u_{1H}^{(3)}; \quad u_{1H}^{(3)} = 1 - u_{13}^{(H)},$$

или в общем случае $u_{nH}^{(s)} = 1 - u_{ns}^{(H)}$.

Передаточное отношение планетарного механизма от любого n -го колеса равно 1 минус передаточное отношение от этого же самого колеса к солнечному колесу при неподвижном водиле.

2.2.4. Графический метод кинематического исследования зубчатых механизмов

Рассмотрим простую зубчатую передачу, состоящую из двух зубчатых колёс внешнего зацепления (рис. 2.17).

Скорость общей точки P определим по формуле

$$V_{12} = \omega_1 \cdot r_1,$$

где $r_1 = O_1P \cdot \mu$, м.

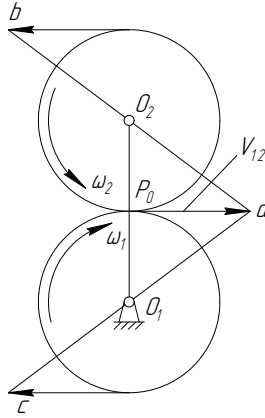


Рис. 2.17

Из точки P к прямой O_1O_2 построим отрезок Pa , изображающий в масштабе μ_V скорость точки P . Тогда

$$V_{12} = Pa \cdot \mu_V; \quad \mu_V = \frac{V_{12}}{Pa}.$$

Точку a соединим с точкой O_1 прямой линией. Продолжив эту линию до пересечения с прямой линией, перпендикулярной к O_1O_2 , получим точку C .

Прямая ac является планом линейных скоростей v_1 (тэта-линией) для точек первого колеса, т. е. геометрическим местом концов векторов скоростей точек этого колеса.

Треугольник O_1Pa называется треугольником линейных скоростей для колеса I .

Прямая aO_2 является планом линейных скоростей v_2 для звена 2 (тэта-линией). Определим угловую скорость первого колеса:

$$\omega_1 = \frac{V_{12}}{r_1} = \frac{Pa \cdot \mu_V}{O_1P \cdot \mu_l} = \frac{\mu_V}{\mu_l} \cdot \operatorname{tg} v_1. \quad (2.2)$$

Аналогично из треугольника aPO_2 :

$$\omega_2 = \frac{\mu_V}{\mu_l} \cdot \operatorname{tg} v_2.$$

То есть тангенсы углов наклона тэта-линий треугольников линейных скоростей пропорциональны угловым скоростям соответствующих колёс.

Следовательно, передаточное отношение u_{12} будет равно

$$u_{12} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{\operatorname{tg}v_1}{\operatorname{tg}v_2}.$$

Если тэта-линии, т. е. углы v_1 и v_2 , откладываются в одну сторону от линий центров (по часовой стрелке или против неё), то передаточное отношение положительное (колёса вращаются в одну сторону).

В противном случае передаточное отношение отрицательное (колёса вращаются в разные стороны).

Построим картину угловых скоростей (рис. 2.18). Перпендикулярно к линии центров проведём прямую линию β - β .

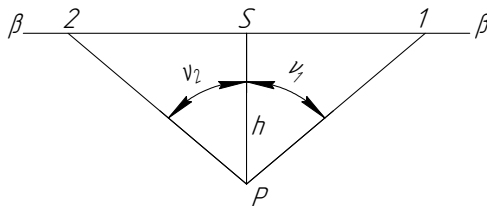


Рис. 2.18

Выберем на этой прямой произвольную точку S , проведём через неё параллель к линии центров и отложим вниз от точки S произвольный отрезок $SP = h$ (мм). Из точки P , как из полюса, проведём лучи, параллельные тэта-линиям 1 и 2 . Эти лучи пересекут прямую β - β в точках 1 и 2 . Рассмотрим треугольник $SP1$:

$$\operatorname{tg}v_1 = \frac{S1}{h}.$$

Подставив эту формулу в зависимость (2.2), получим:

$$\omega_1 = S1 \cdot \frac{\mu_V}{\mu_l \cdot h}.$$

Обозначив

$$\frac{\mu_V}{\mu_l \cdot h} = \mu_\omega,$$

получим

$$\omega_1 = S2 \cdot \mu_\omega$$

аналогично, $\omega_2 = S2 \cdot \mu_\omega$. Тогда передаточное отношение

$$u_{12} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{S1}{S2}.$$

Таким образом, передаточное отношение – это отношение отрезков на картине угловых скоростей (или чисел оборотов в минуту). Допустим, что построенная картина выполнена в масштабе μ_n , т. е. является картиной чисел оборотов в минуту; так как $\omega = \frac{\pi n}{30}$, следовательно:

$$n_1 = S_1 \cdot \mu_n; \quad n_2 = S_2 \cdot \mu_n;$$

$$\mu_n = \frac{30\mu_\omega}{\pi} = \frac{30\mu_V}{\pi\mu_1 h}.$$

Рассмотрим кинематическое исследование на примере планетарного механизма (рис. 2.19).

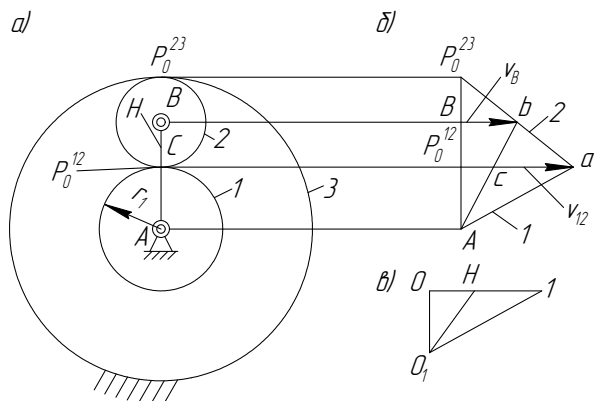


Рис. 2.19

Определим скорость первого колеса: $V_a = \omega_1 \cdot r_1$.

Выбрав масштаб μ_v , откладываем отрезок $P^{12}a$. Если соединить точку a с точкой A , то получим тэта-линию колеса 1. Точка P^{23} третьего колеса неподвижна, т. е. $V_p^{23} = 0$. Следовательно, и сателлит 2 в этой точке имеет скорость, равную нулю. Таким образом, положение тэта-линии сателлита 2 определяется двумя точками: a и P^{23} . Точка B принадлежит и сателлиту, и водилу, поэтому линейную скорость получим, спроектировав точку B на тэта-линию 2. Соединив точки A и b , получим тэта-линии водила H .

2.2.5. Синтез планетарных механизмов

Синтез планетарных механизмов – это определение числа зубьев колёс механизма, исходя из заданного передаточного отношения.

Подбор чисел зубьев должен быть произведён так, чтобы удовлетворялись условия соосности, соседства и сборки.

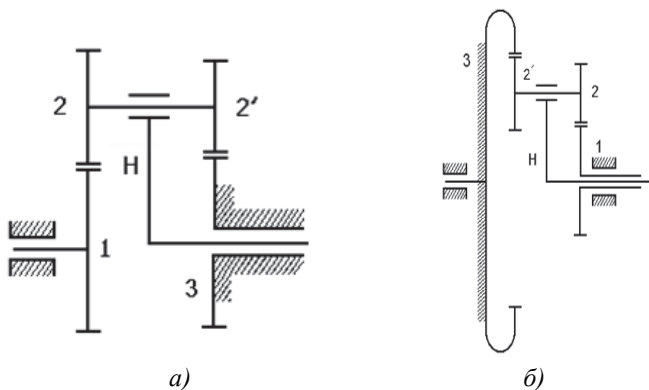


Рис. 2.20

Условие соосности заключается в том, чтобы геометрические оси ведущего и ведомого валов совпадали. Для механизма, образованного двумя внешними зацеплениями (рис. 2.20, а), межосевое расстояние определяется по формуле

$$a = a_{12} = a_{2'3};$$

$$a = m_{12} \frac{z_1 + z_2}{2} = m_{2'3} \frac{z_{2'} + z_3}{2},$$

где m_{12} и $m_{2'3}$ – модули зубчатых зацеплений пар колес 12 и 2'3 соответственно.

Обозначим $\frac{m_{12}}{m_{2'3}} = \lambda$.

Получим уравнение соосности:

$$\lambda(z_1 + z_2) = z_{2'} + z_3.$$

Для механизма, образованного двумя парами зубчатых колёс (одна – с внешним, а другая – с внутренним зацеплением (рис. 20, б)), межосевое расстояние

$$a_{12} = a_{2'3},$$

то есть

$$m_{32'} \frac{z_3 - z_{2'}}{2} = m_{12} \frac{z_2 + z_1}{2}.$$

Следовательно, условие соосности для этого случая:

$$\lambda(z_3 - z_{2'}) = z_2 + z_1.$$

Условие соседства заключается в том, чтобы окружности вершин сателлитов (рис. 2.21) не касались и не пересекались, то есть $a_{22'} > 2r_a$, где r_a – радиус выступов сателлита.

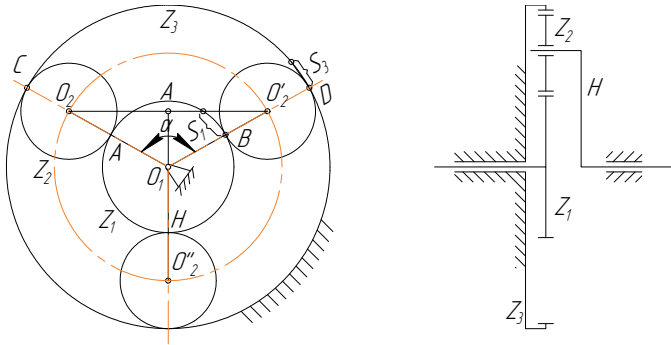


Рис. 2.21

Межосевое расстояние между сателлитами, не входящими в зацепление между собой,

$$2r_a = mz_2 + 3mf = m(z_2 + 2f),$$

где f – коэффициент высоты головки зуба, $f = 1$;

$$a_{22'} = 2a_{12} \cdot \sin\left(\frac{\beta}{2}\right),$$

где $\beta = \frac{2\pi}{k}$, здесь k – число сателлитов.

После подстановки выражения межосевого расстояния пары зубчатых колёс 1 и 2

$$a_{12} = \frac{z_1 + z_2}{2} m,$$

получим

$$a_{22'} = (z_1 + z_2)m \cdot \sin\left(\frac{\beta}{2}\right) = (z_1 + z_2)m \cdot \sin\left(\frac{\pi}{k}\right),$$

Следовательно, условие соседства можно записать

$$(z_1 + z_2)m \cdot \sin\left(\frac{\pi}{k}\right) < (z_2 + 2).$$

Условие сборки требует, чтобы зубья каждого сателлита вошли в зацепление с обоими центральными колёсами. Для планетарных механизмов условие сборки определяется по формулам, соответствующим типу механизма (рис. 2.22).

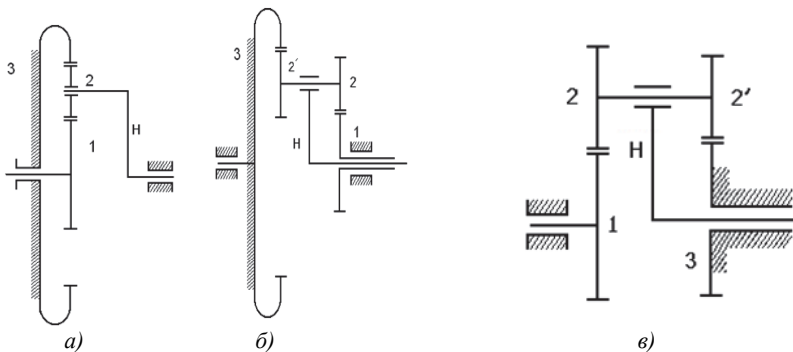


Рис. 2.22. Типы планетарных механизмов

$$a) \frac{z_1 + z_3}{k} = c; \quad б) \frac{z_3}{k} - \frac{z_1 \cdot z_2'}{k \cdot z_2} = c; \quad в) \frac{z_3}{k} + \frac{z_1 \cdot z_2'}{k \cdot z_2} = c,$$

где c — целое число.

2.3. Кинематический анализ рычажных механизмов

Задача кинематического исследования механизма состоит в определении:

- 1) положений механизма в различные моменты времени;
- 2) траекторий некоторых точек механизма;
- 3) величин линейных и угловых скоростей всех точек механизма.

2.3.1. Построение положений механизма и траекторий его точек

Для изучения движения механизма необходимо знать его кинематическую схему и основные размеры.

Кинематической схемой называют изображение механизма в выбранном масштабе $\mu_l = \frac{\ell}{\ell}$; где ℓ — истинная длина звена в метрах,

\bar{l} – изображение этого звена на чертеже в миллиметрах с применением условных обозначений звеньев и кинематических пар. Схема позволяет определить движение ведомых звеньев по заданному движению ведущих. Кинематические пары обозначают большими буквами латинского алфавита. Звенья обозначают арабскими цифрами, начиная с кривошипа.

При проектировании механизма обычно бывают заданными схема механизма и условия, которые могут быть самого различного характера. Проектирование начинается с выбора размеров звеньев, наиболее полно удовлетворяющих поставленным условиям. Выбор размеров звеньев путем решения задачи с одним из условий называется синтезом механизма [11].

Планом механизма называется графическое изображение в масштабе μ_l кинематической схемы механизма, соответствующее определенному положению главного звена. При построении планов механизма сначала следует найти его крайние положения, соответствующие возвратному движению точек ведомого звена.

В механизме четырёхтактного двигателя внутреннего сгорания (рис. 2.23) одно крайнее положение ведомого звена Z (ползуна) находят, производя на направляющей засечку дугой радиусом, равным длине кривошипа OA и шатуна AB (положение 0) из центра вращения кривошипа. Второе крайнее положение находим, производя засечку из центра вращения кривошипа радиусом, равным разности длин шатуна AB и кривошипа AO (положение 6). За начальное положение механизма удобно принять одно из крайних положений. Если требуется построить 12 положений механизма, то окружность, описываемую точкой A кривошипа, начиная от начального положения, делят на 12 равных частей. Соответствующие положения остальных звеньев (2, 3) находят путем засечек из точки A на направляющую механизма. Соединяя между собой соответствующие точки в каждом из положений, получаем двенадцать планов механизма. Построение траектории какой-либо точки механизма производят следующим образом: в начерченных положениях механизма отмечают положения точки траектории, которая должна быть построена. Найденные положения точки S соединяют последовательно между собой плавной кривой (рис. 2.23).

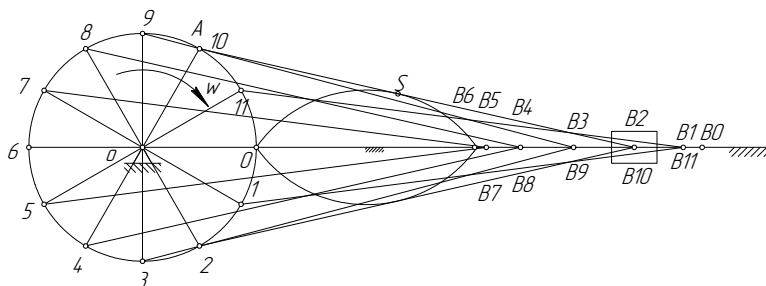


Рис. 2.23

2.3.2. Определения аналогов величин скоростей и ускорений

Аналог линейной скорости какой-либо точки M есть

$$\bar{V}_M = \frac{d\bar{r}_M}{d\varphi_1},$$

где \bar{r}_M – радиус-вектор, определяющий положение точки M на ее траектории; φ_1 – обобщенная координата; $d\varphi_1$ – элементарный угол поворота главного звена.

Аналог линейного ускорения точки M

$$\bar{A}_M = \frac{d\bar{V}_M}{d\varphi_1},$$

где \bar{V}_M – линейная скорость точки M .

Аналог угловой скорости

$$\Omega_K = \frac{d\omega_K}{d\varphi_1},$$

где $d\varphi_K$ – элементарный угол поворота звена K .

Аналог углового ускорения

$$\dot{A}_K = \frac{d\Omega_K}{d\varphi_1}.$$

2.3.3. Связь между аналогами и величинами скоростей и ускорений

Линейная скорость выразится через аналог скоростей так:

$$V_M = \bar{V}_M \cdot \omega.$$

Линейное ускорение можно вывести через аналог скорости и ускорения:

$$a_M = \omega_1 \cdot \left(A_M + \frac{\varepsilon_1}{\omega_1} \cdot V_M \right).$$

Угловая скорость выводится через аналог угловой скорости следующим образом:

$$\omega_K = \Omega_K \cdot \omega.$$

Угловое ускорение можно выразить через аналог угловой скорости и ускорения:

$$\varepsilon_K = \omega_1^2 \cdot \left(\Omega_K \cdot \frac{\varepsilon_1}{\omega_1^2} + E_K \right).$$

Отношение элементарных углов поворотов двух звеньев называется передаточным отношением

$$\frac{d\varphi_K}{d\varphi_1} = \Omega_K = i_{K1}.$$

2.3.4. Аналог скорости и ускорения главного звена

Аналог угловой скорости главного звена, т. е. $K = 1$:

$$\Omega_1 = \frac{d\varphi_1}{d\varphi_1} = 1 = \text{const}; \quad \varepsilon_1 = \frac{d\Omega}{d\varphi_1} = 0; \quad V_A = \frac{dr_A}{d\varphi_1},$$

так как $r_a = \text{const}$, то $V_A = r_A = \overline{OA}$, т. е. аналог линейной скорости точек главного звена равен расстоянию от точки вращения до мгновенного центра вращения.

Мгновенным центром вращения (МЦВ) называется точка плоской неизменяемой фигуры, совершающей непоступательное движение в своей плоскости, скорость которой в данный момент времени равна нулю. МЦВ лежит на пересечении прямых, проведенных в различных точках фигуры перпендикулярно векторам скоростей этих точек в рассматриваемый момент времени.

Аналог повернутой на 90° скорости точки M

$$\overline{U}_M = \overline{V}_M = \overline{MP}_1, \quad (2.3)$$

где \overline{MP}_1 – расстояние от точки M до МЦВ.

2.3.5. Аналог относительной скорости двух точек M и N

Возьмем какое-либо звено MN (рис. 2.24), вращающееся вокруг полюса P .

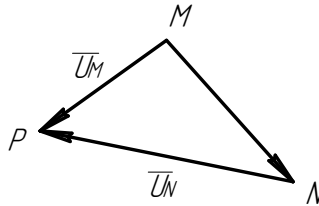


Рис. 2.24

Тогда

$$\overline{U}_{MN} = \overline{U}_M - \overline{U}_N. \quad (2.4)$$

Из (2.4) ясно, что аналог повернутой относительной скорости равен расстоянию между точками, так как $\overline{U}_M = \overline{U}_N + \overline{U}_{MN}$.

2.3.6. Аналог относительного ускорения точек звена

Полный аналог относительного ускорения

$$\overline{A}_{BC} = \overline{A}_{BC}^n + \overline{A}_{BC}^\tau.$$

Аналог центростремительного (нормального) ускорения \overline{A}_{BC}^n найдем по формуле

$$\overline{A}_{BC}^n = \Omega_1^2 \cdot \overline{BC} = BC$$

и примем равным отрезку BC , так как $\Omega = 1$.

Аналог вращательного ускорения $\overline{A}_{BC}^\tau = E_1 \cdot BC = 0$, так как $\omega_1 = \text{const}$, тогда

$$\overline{A}_{BC} = \overline{BC},$$

то есть аналог относительного ускорения двух точек главного звена равен расстоянию между этими точками.

В то же время $\overline{A}_{BC} = \overline{A}_B - \overline{A}_C$ (рис. 2.25). Отсюда

$$\overline{A}_B = \overline{A}_{BC} - \overline{A}_C.$$

Следовательно, аналоги абсолютных ускорений точек B и C сходятся в точке A , которая называется полюсом поворота.

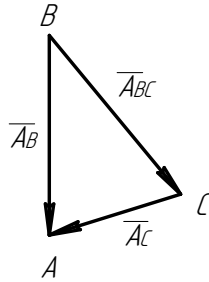


Рис. 2.25

Если известен полюс поворота, то аналог ускорения любой точки находят как расстояние от этой точки до полюса поворота.

2.3.7. Построение полярных планов аналогов скоростей

Полярным планом скоростей механизма называется совокупность векторов линейных скоростей, отложенных из одной точки, называемой полюсом.

Рассмотрим построение полярного плана аналогов скоростей для кривошипно-ползунного механизма (рис. 2.26).

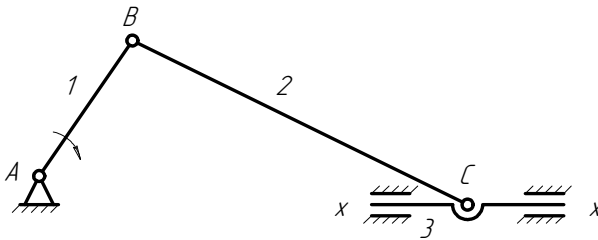
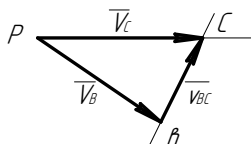


Рис. 2.26

Из полюса P – точки, произвольно выбранной на чертеже, откладываем аналог скорости точки B . Направление этого вектора перпендикулярно кривошипу, длина его равна длине кривошипа.



Для нахождения аналога скорости точки C напишем два векторных уравнения:

$$\begin{cases} \bar{V}_C = \bar{V}_B + \bar{V}_{CB} \\ \bar{V}_C \parallel X-X \end{cases}$$

В этих уравнениях вектор \bar{V}_B уже известен, аналог относительной скорости точки C вокруг B следует направить перпендикулярно радиусу вращения BC . Решив совместно эти два уравнения, получаем на полярном плане аналог скорости точки C — \bar{V}_C .

Решение этих уравнений производится в такой последовательности: из конца вектора \bar{V}_B проводим прямую, перпендикулярную отрезку BC на механизме. Из полюса P проводим прямую, параллельную направляющей $x-x$ ползуна C . Пересечение указанных прямых линий определяет конец аналога скорости точки C . Отрезок, соединяющий точки плана скоростей (bc), изображает аналог относительной скорости. Величины скорости точек B и C :

$$V_B = \bar{V}_B \cdot \omega_1 = Pb \cdot \mu_l \cdot \omega_1; \quad V_C = \bar{V}_C \cdot \omega_1 = Pc \cdot \mu_l \cdot \omega_1.$$

Итак, план скоростей является планом скоростей в масштабе

$$\mu_v = \mu_l \cdot \omega_1.$$

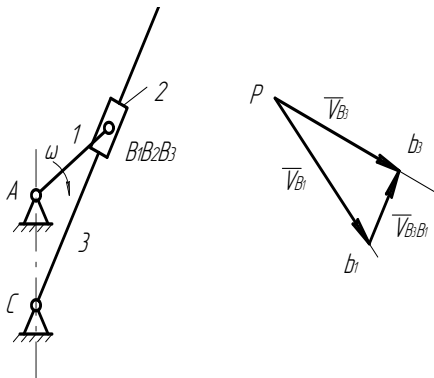


Рис. 2.27

Рассмотрим построение полярного плана аналогов скоростей для кулисного механизма (рис. 2.27). Вектор аналога скорости B_1 , принадлежащей кривошипу, направлен перпендикулярно кривошипу. Из произвольно выбранного полюса P откладываем этот

вектор Pb_1 в размере, равном длине кривошипа. Векторы аналогов скоростей точек B_1 и B_2 равны, так как объединены вращательной кинематической парой, т. е. $\overline{V}_{B_2} = \overline{V}_{B_1}$.

Для нахождения вектора скорости точки B_3 , принадлежащей кулисе, запишем систему векторных уравнений:

$$\begin{cases} \overline{V}_{B_3} = \overline{V}_{B_1} + \overline{V}_{B_3, B_1} \\ \overline{V}_{B_3} \perp CD \end{cases}$$

В этих уравнениях вектор \overline{V}_{B_3, B_1} — это релятивная (относительная) скорость точки B_3 относительно B_2 . Направлена эта скорость по кулисе. Решив совместно эти два уравнения, получаем точку b_3 ; $\overline{Pb_3}$ — вектор аналога скорости точки B_3 .

Аналог скорости точки D найдется из пропорции

$$\frac{\overline{Pd}}{\overline{Pb_3}} = \frac{\overline{CD}}{\overline{CB}}.$$

Аналог угловой скорости кулисы Ω_3 найдем из выражения $\overline{\Omega}_3 = \frac{\overline{Pb_3}}{\overline{BC}}$.

Угловая скорость кулисы определится по формуле

$$\omega_3 = \Omega_3 \cdot \omega_1 = \frac{\overline{V}_{B_3}}{\overline{BC}} \cdot \omega_1 = \frac{\overline{Pb_3}}{\overline{BC}} \cdot \omega_1.$$

Истинную скорость точек механизма найдем через аналог скоростей, как

$$v_{B_3} = V_{B_3} \cdot \omega_1 = V_{a_3} \cdot \mu_l \cdot \omega_1 \text{ и т. д.}$$

2.3.8. Построение планов аналогов скоростей методом эюр

Рассмотрим определение скоростей подобным методом в четырехзвеннике $ABCDE$ (рис. 2.28). На схеме механизма, вычерченной в масштабе μ_l , отмечаем МЦВ (P_{10} , P_{20} , P_{30}). Затем откладываем вектор аналога повернутой скорости точки B первого звена так, чтобы $\overline{U}_B = \overline{AB}$. Аналог скорости точки B первого звена равен аналогу скорости точки B второго звена. Имея вектор \overline{U}_B , переходим к нахождению аналога скорости точки C второго звена. Направление повернутой скорости \overline{U}_C совпадает с линией, соединяющей точку C с МЦВ (P_{20}) этого звена. Начало вектора в самой точке C , конец на эюре $bd \parallel BD$.

Вектор аналога повернутой скорости точки D совпадает по направлению с линией, соединяющей эту точку с P_{20} . Начало вектора лежит в точке D , конец — на эюре $bd \parallel BD$.

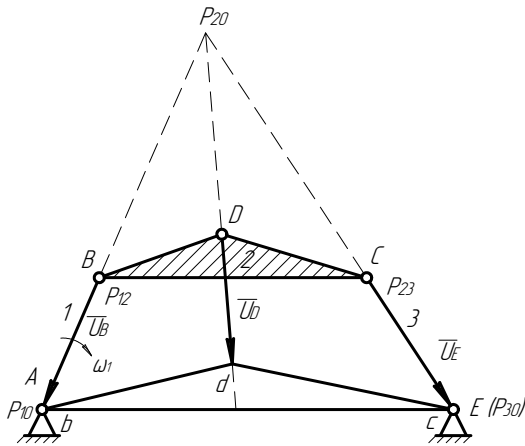


Рис. 2.28

Итак, \overline{AB} — изображение аналога скорости \overline{U}_B .

Скорость точек B , C , и D определяется как

$$\overline{V}_B = \overline{U}_B \cdot \mu_l \cdot \omega_1; \quad \overline{V}_D = \overline{U}_D \cdot \mu_l \cdot \omega_1; \quad \overline{V}_C = \overline{U}_C \cdot \mu_l \cdot \omega_1.$$

Аналог угловой скорости найдем из выражений:

$$\overline{\Omega}_2 = 1 - f = 1 - \frac{\overline{db}}{AB}; \quad \overline{\Omega}_3 = \frac{\overline{U}_C}{CE}.$$

Рассмотрим пример построения плана аналогов скоростей методом эюр для кулисного механизма (рис. 2.29). Кривошип AB совершает вращательное движение вокруг неподвижной оси A . Кулиса 3 совершает колебательное движение вокруг центра C . Находим МЦВ всех звеньев ($P_{10}P_{30}$). Точка B_2 ползуна совершает вращательное движение вместе с точкой кривошипа B_1 , поэтому $\overline{U}_{B_1} = \overline{U}_{B_2}$.

Направление аналога повернутой скорости точек B_1 и B_2 совпадает с направлением кривошипа, начало вектора — в точке B , конец — в МЦВ (P_{10}).

Скорости точек B_3 и B_1 разные, так как траектории их разные.

Точка B_1 перемещается по траектории α - α , точка B_3 — по траектории β - β .

Эти скорости связаны следующим соотношением

$$\bar{U}_{B_3} = \bar{U}_{B_1} + \bar{U}_{B_3B_1},$$

где $\bar{U}_{B_3B_1}$ – вектор относительной повернутого аналога скорости точек B_3 относительно B_1 ; на плане этот вектор необходимо направить перпендикулярно направляющей кулисы. И в то же время абсолютная скорость точки B_3 , вращающейся вокруг неподвижного центра P_{30} , направлена параллельно CD , т. е. радиусу вращения. Тогда аналог повернутой скорости

$$\bar{U}_{B_3} \parallel CD.$$

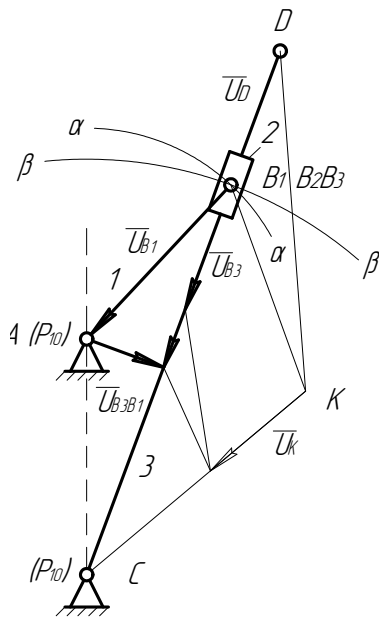


Рис. 2.29

Решая совместно эти два уравнения, находим конец вектора \bar{U}_{B_3} . Аналог повернутой скорости точки D находим с помощью вспомогательной точки K , произвольно отмеченной и принадлежащей звену 3. Вектор повернутой скорости этой точки направлен по линии, проходящей через МЦВ звена 3 и саму точку K . Начало вектора – в точке K , конец – на эпилуре $bk \parallel BK$. Далее соединим точку K

с точкой D . Вектор аналога повернутой скорости точки D направлен по звену 3, начало – в точке D , конец на эюре $dk \parallel DK$.

Таким же способом можно найти вектор повернутой скорости центра тяжести звена 3. Скорость точек определяют как

$$v = \bar{U} \cdot \mu_\ell \cdot \omega.$$

Аналог угловых скоростей определяем по формулам:

$$\Omega_1 = \frac{\bar{U}_{B1}}{AB} = 1; \quad \Omega_3 = \frac{\bar{U}_{B3}}{B_3C}.$$

2.3.9. Определение аналогов ускорений в механизме

Рассмотрим построение плана аналогов ускорений для кривошипно-ползунного механизма (рис. 2.30).

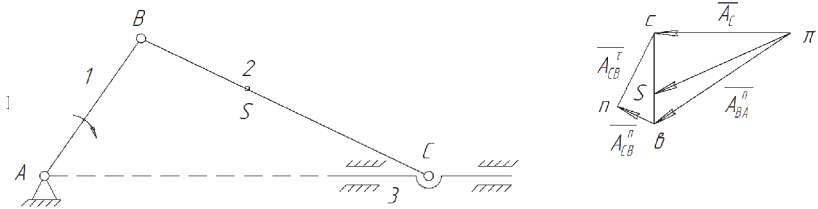


Рис. 2.30

Определяем сначала аналоги угловых скоростей звеньев. Они могут быть определены с помощью МЦВ-звена либо с помощью построения полярного плана аналогов скоростей:

$$\Omega_2 = \frac{\bar{V}_{CB}}{CB}.$$

Затем строим план аналогов ускорений в такой последовательности: от произвольно выбранного полюса откладываем вектор центростремительного ускорения точки B (A_{BA}^n) в размере кривошипа AB в направлении от B к A .

Для определения вектора аналога абсолютного ускорения точки C решаем совместно два векторных уравнения:

$$\begin{cases} \bar{A}_C = \bar{A}_B + \bar{A}_{CB}^n + \bar{A}_{CB}^\tau \\ \bar{A}_C \parallel X - X \end{cases} \quad (2.5)$$

Здесь вектор аналога центростремительного относительного ускорения $\overline{A_{CB}^n} = \Omega_2^2 \cdot \overline{CB}$. Его направление совпадает с направлением CB от C к B (центру вращения звена). Конец вектора обозначаем n . Из n проводим вектор аналога тангенциального ускорения до пересечения с направлением вектора аналога абсолютного ускорения $\overline{A_C} \parallel X - X$. Точка пересечения этих двух направлений и даст нам конец вектора аналога абсолютного ускорения точки C ($\overline{A_C}$).

Величину аналога ускорения находим так:

$$A_B = \overline{A_B} \cdot \mu_l; \quad A_C = \overline{A_C} \cdot \mu_l.$$

Величина ускорения определится так:

$$a_B = A_B \cdot \omega_l^2 = \overline{A_B} \cdot \mu_l \cdot \omega_l^2; \quad a_C = A_C \cdot \omega_l^2 = \overline{A_C} \cdot \mu_l \cdot \omega_l^2.$$

Вектор аналога ускорений точки S_2 определится построением точки S_2 на плане аналогов ускорений. Аналоги угловых ускорений звеньев определяются из равенств

$$\overline{E}_2 = \frac{\overline{A_{CB}^B}}{\overline{CB}} = \frac{nc}{\overline{CB}}.$$

Угловое ускорение звена определится как $\varepsilon_2 = \overline{E}_2 \cdot \omega_1^2$.

Рассмотрим построение плана ускорений для кулисного механизма (рис. 2.31).

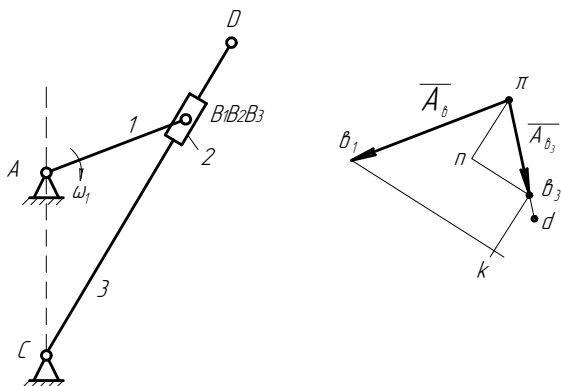


Рис. 2.31

Из полюса π откладываем вектор аналога центростремительного ускорения в точку B_1 , направление которого совпадает с направлением кривошипа, а длина равна радиусу кривошипа

$$\overline{A_{B_1}} = \overline{A_{B_1A}} = \overline{\pi B_1}.$$

Аналог ускорения точки B_2 ползуна равен ускорению точки B_1 , так как они соединены вращательной парой.

Ускорение точки B_3 , принадлежащей кулисе, находим, решив совместно два векторных уравнения:

$$\overline{A}_{B_3} = \overline{A}_{B_2} + \overline{A}_{B_3B_2}^k + \overline{A}_{B_3B_2}^\tau$$

$$\overline{A}_{B_3} = \overline{A}_{B_3C}^n + \overline{A}_{B_3C}^\tau$$

где $\overline{A}_{B_3B_2}^k$ — изображение на чертеже аналога кориолисова ускорения.

Аналог кориолисова ускорения находится по формуле

$$\overline{A}_{B_3B_2}^k = 2; \quad \Omega_3 \cdot \overline{V}_{B_3B_2} = 2 \cdot \frac{\overline{PB}_3}{\overline{CB}} \cdot v_{3B_1}.$$

Вектор кориолисова ускорения всегда перпендикулярен кулисе и направлен в ту же сторону, что и аналог повернутой относительной скорости $\overline{U}_{B_3B_2}$, если $\Omega_k < 0$. Если же $\Omega_k > 0$ (то есть вектор \overline{U}_{B_3} направлен от центра вращения), то кориолисово ускорение направлено в сторону, противоположную $\overline{U}_{B_3B_2}$.

Если пользоваться полярным планом аналогов скоростей, то для нахождения направления $\overline{A}_{B_3B_2}^k$ нужно аналог относительной скорости $\overline{V}_{B_3B_2}$ повернуть на 90° в сторону вращения кулисы. $\overline{A}_{B_3B_2}^k$ — изображение аналога релятивного ускорения, направленного по кулисе. Из конца вектора \overline{A}_{B_1} проводим вектор $\overline{A}_{B_3B_2}^k$. Из конца последнего проводим прямую линию, параллельную кулисе. Эта прямая определяет геометрическое место релятивного ускорения $\overline{A}_{B_3B_2}^\tau$.

В соответствии со вторым векторным уравнением из полюса π откладываем вектор аналога центростремительного ускорения точки B_3 относительно C , причем

$$A_{B_3C}^n = \Omega_3^2 \cdot \overline{CB} = \left(\frac{\overline{PB}_3}{\overline{CB}} \right)^2 \cdot \overline{CB}$$

и совпадает с кулисой, то есть $\overline{\pi n} \parallel BC$. Затем из конца вектора $\overline{\pi n}$ проводим прямую линию перпендикулярно кулисе, эта прямая является направлением аналога вращательного ускорения $\overline{A}_{B_3C}^n$.

Точку пересечения последней линии с направлением релятивного ускорения обозначим b_3 . Получаем равенства отрезков:

$$\begin{aligned} \overline{\pi b_3} &= \overline{A}_{B_3} & \overline{\pi b_1} &= \overline{A}_{B_1} \\ \overline{\pi b_3} &= \overline{A}_{B_3C}^n & \overline{\pi n} &= \overline{A}_{B_3C}^n \\ \overline{b_1 k} &= \overline{A}_{B_3B_1}^k & \overline{kb_3} &= \overline{A}_{B_3B_1}^\tau \end{aligned}$$

Аналоги ускорения найдутся следующим образом:

$$A_{B_3} = \bar{A}_{B_3} \cdot \mu_l; \quad A_{B_1} = \bar{A}_{B_1} \cdot \mu_l \quad \text{и т. д.}$$

Величина ускорений найдется так:

$$ab_3 = A_{B_3} \cdot \omega_1^2; \quad ab_1 = A_{B_1} \cdot \omega_1^2 \quad \text{и т. д.}$$

Аналог углового ускорения кулисы

$$E_3 = \frac{\overline{A_{B_1 C}^e}}{B_3 C} = \frac{\overline{nb_3}}{B_3 C};$$

величина углового ускорения равна

$$\varepsilon_3 = \omega_1^2 \cdot \bar{E}_3.$$

2.3.10. Определение скоростей и ускорений методом построения кинематических диаграмм

Кинематической диаграммой принято называть зависимость какого-либо параметра движения звена от времени или параметра перемещения ведущего звена, представляемую графически кривой в прямоугольной системе координат.

Наивысший интерес представляют графики перемещения S , скорости V , ускорений W ведомых звеньев. В качестве параметра перемещения S ведущего звена может быть выбран либо угол поворота φ , либо одна из координат принадлежащей ему точки. Эти параметры связаны с параметром времени.

Как известно, функции S , V и W движения какой-либо точки могут быть определены при помощи дифференцирования или интегрирования.

Построение диаграммы перемещения

Строим 12 положений (см. рис. 2.23). За начало отсчета принимаем положение поршня B_0 . Затем, выбрав систему координат $s_b(t)$, по оси абсцисс откладываем отрезок L (мм), соответствующий времени T одного оборота кривошипа. Откладываем $Y_1 = k_{B_0 B_1}$; $Y_2 = k_{B_0 B_2}$ и т. д., где $B_0 B_1$; $B_0 B_2$ и т. д. — отрезки, отражающие перемещения точки B на планах механизма; k — коэффициент кратности ординат графика $S_e = S_e(t)$ и отрезков изображающих перемещения $B_0 B_1$, $B_0 B_2$ точки B на планах механизма.

Между масштабом плана механизма и масштабом ординат диаграммы перемещений существует зависимость:

$$\mu_s = \frac{1}{k} \mu_1.$$

Масштаб времени, откладываемого по оси абсцисс:

$$\mu_t = \frac{T}{L} (\tilde{n}/i\dot{e}i),$$

где T – время одного оборота ведущего звена в секундах.

Если число оборотов кривошипа равно n (об./мин), то

$$T = \frac{60}{n} (\text{с}), \quad \text{при этом} \quad \mu_t = \frac{60}{nT} (\text{с/мин}).$$

Аналогично строится график угловых перемещений звена, совершающего вращательное движение. В этом случае по оси ординат откладываются отрезки, пропорциональные величинам угловых перемещений.

Построение графиков скорости и ускорения по графику перемещения

Построение графиков $V = V(t)$ и $a = a(t)$ по графику $S = S(t)$ осуществляется методом графического дифференцирования (рис. 2.32, а), сущность которого заключается в следующем.

Пусть есть перемещение некоторой точки за малый промежуток времени (рис. 2.32, б). Проведем секущую BC , а из полюса P , выбранного произвольно на расстоянии H от начала координат, – луч, параллельный BC . Из подобия $\triangle PAO$ и BCD следует:

$$\frac{\overline{OA}}{H} = \frac{\overline{CD}}{BD} \Rightarrow \overline{OA} = \frac{\overline{CD}}{BD} \cdot H.$$

Действительное значение перемещения за время отображается отрезком

$$\overline{CD} = \frac{\Delta S}{\mu_s}.$$

Отрезок оси абсцисс $a_1 a_2 = \overline{BD} = \frac{\Delta t}{\mu_t}$ отображает длительность интервала времени в масштабе. Подставив эти значения \overline{CD} и \overline{BD} в равенство, найдем:

$$\overline{OA} = \frac{\Delta S}{\Delta t} \cdot \frac{\mu_t}{\mu_s} \cdot H. \quad (2.6)$$

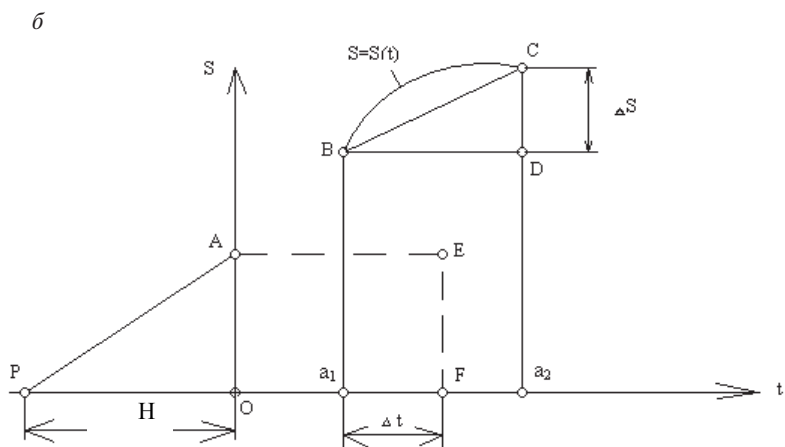
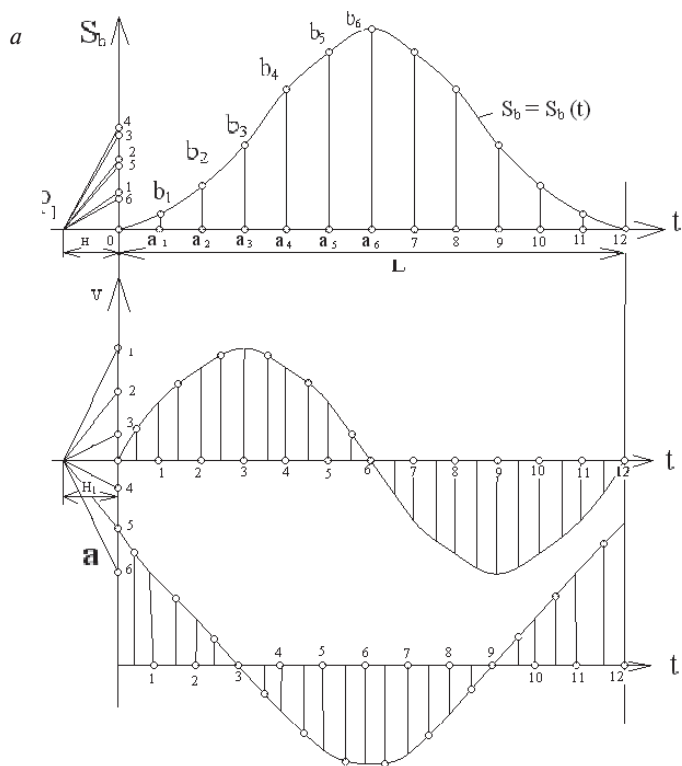


Рис. 2.32

Отношение представляет среднее значение скорости движения точки на пути длиной ΔS , следовательно,

$$V_{\text{ср}} = \overline{OA} \frac{\mu_s}{\mu_t H}. \quad (2.7)$$

Если принять масштаб скорости $\mu_V = \frac{\mu_s}{\mu_t H}$, то в равенстве (2.7) отрезок OA отображает величину средней скорости движения точки. Допуская некоторую погрешность, считают, что это среднее значение скорости соответствует среднему мгновению промежутка t , т. е. точке F .

При изложенном способе дуга BC заменилась хордой BC . Допустима также замена дуги соответствующим отрезком касательной. В обоих случаях результаты получаются с погрешностью.

Рассмотрим на примере (рис. 2.32, а). График ускорения строится аналогично, путем дифференцирования графика V . При этом новое полюсное расстояние $H_1 \neq H$. Определение масштаба графика \bar{a} получаем, заменив величину $\mu_s \rightarrow \mu_V$, а вместо $H \rightarrow H_1$:

$$\mu_a = \frac{\mu_V}{\mu_t H_1}.$$

Вследствие двукратного дифференцирования диаграммы \bar{a} могут получиться со значительными искажениями.

2.3.11. Кинематическое исследование рычажных механизмов аналитическим методом

Аналитическое исследование дает возможность получить зависимости кинематических параметров механизма и, следовательно, достичь более точных результатов, чем при графическом методе. В настоящее время этот метод получает всё большее распространение благодаря внедрению в практику ЭВМ.

Аналогии скоростей и ускорений при кинематическом исследовании механизмов, скорости и ускорения ведомых звеньев и точек удобно выражать в функции поворота φ или перемещения S ведущего звена.

Функцией положения ведомого звена называется зависимость его перемещения от перемещения ведущего звена. Вид функции положения зависит от схемы механизма, а значения постоянных, ко-

торые входят в нее, — от размерных параметров механизма. Для того чтобы составить функцию положения механизма, следует рассмотреть фигуру, которую образуют оси его звеньев. Из геометрических свойств этой фигуры находят искомую зависимость.

Аналогом скорости точки называется первая производная радиуса-вектора точки по обобщенной координате.

Аналогом ускорения точки называется вторая производная радиуса-вектора точки по обобщенной координате механизма.

Кинематическое исследование проведем на примере кривошипно-ползунного механизма (рис. 2.33).

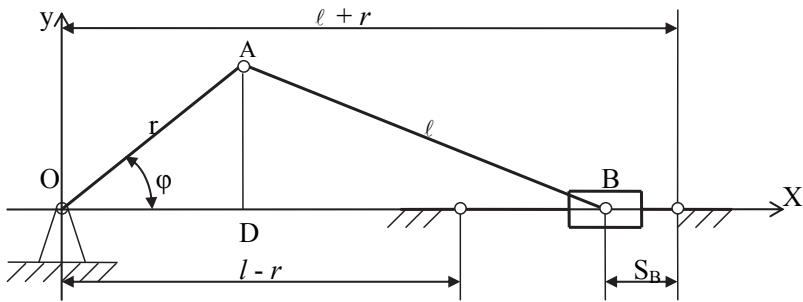


Рис. 2.33

Пусть заданы размеры центрального кривошипно-ползунного механизма

$$L_{oa} = r; \quad L_{ab} = l$$

и угловая скорость $\omega_1 = \text{const}$.

Независимым параметром является угол поворота

$$\varphi = \omega_1 t.$$

Выведем формулы для определения скорости V_b и ускорения a_b ползуна.

За время поворота кривошипа на угол φ перемещение точки B

$$S_B = OB_0 - OB = (r+1) + (r \cdot \cos \varphi + 1 \cdot \cos \beta)$$

или

$$S_B = r(1 - \cos \varphi) + 1(1 - \cos \beta). \quad (2.8)$$

По теореме синусов можно написать: $AD = r \cdot \sin \varphi = l \cdot \sin \beta$,
откуда

$$\frac{r}{l} = \frac{\sin \beta}{\sin \varphi}; \quad \frac{r}{l} = \lambda \text{ — коэффициент шатуна};$$

$$\sin \beta = \frac{r}{l} \cdot \sin \varphi = \lambda \cdot \sin \varphi;$$

$$\cos \beta = \sqrt{1 - \sin^2 \beta} = \sqrt{1 - \left(\frac{r}{l} \cdot \sin \varphi\right)^2} = \sqrt{1 - \lambda^2 \cdot \sin^2 \varphi} = (1 - \lambda^2 \cdot \sin^2 \varphi)^{\frac{1}{2}}.$$

Разложим двучлен в ряд по формуле бинома Ньютона:

$$\cos \beta = (1 - \lambda^2 \cdot \sin^2 \varphi)^{\frac{1}{2}} \cong 1 - \frac{1}{2} \lambda^2 \cdot \sin^2 \varphi - \frac{1}{8} \lambda^4 \cdot \sin^4 \varphi - \dots$$

Тогда

$$\cos \beta = 1 - \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{r}{l} \cdot \sin \varphi\right)^2.$$

Пренебрегаем всеми членами, начиная с третьего ввиду их малости. Подставляем значение $\cos \beta$ в формулу для перемещения S , получим:

$$S_B = r \cdot (1 - \cos \varphi) + \frac{r^2}{2 \cdot l} \cdot \sin^2 \varphi = r \cdot \left[1 - \cos \varphi + \frac{\lambda}{2} \cdot \sin^2 \varphi\right].$$

Последовательно дифференцируя, получим скорость точки B :

$$V_B = \frac{dS}{dt} = \frac{dS}{d\varphi} \cdot \frac{d\varphi}{dt} = \omega_1 \cdot r \cdot \left[\sin \varphi + \frac{\lambda}{2} \cdot \sin \varphi \cdot \cos \varphi\right] = \omega_1 \cdot r \cdot \left[\sin \varphi + \frac{\lambda}{2} \cdot \sin 2\varphi\right].$$

Ускорение точки B

$$a_B = \frac{dV_B}{dt} = \frac{dV_B}{d\varphi} \cdot \frac{d\varphi}{dt} = r \cdot \omega_1^2 \cdot [\cos \varphi + \lambda \cdot \cos 2\varphi].$$

Формулы для шатуна

$$\varepsilon_2 = \frac{d^2 \gamma}{dt^2}; \quad \omega_2 = \frac{d\beta}{dt}.$$

Вопросы для самопроверки

1. Что такое угол давления и как он влияет на работу кулачкового механизма?
2. В чем состоит задача синтеза кулачкового механизма?
3. Как определяется передаточное отношение последовательного и ступенчатого ряда зубчатых колес?
4. Какие механизмы называются планетарными и дифференциальными?
5. В чем заключается метод обращенного движения? Формула Виллиса.
6. В чем заключается синтез планетарных механизмов?
7. Как определяется положение механизма в различные моменты времени?
8. Как строятся траектории некоторых точек механизма?
9. Как определяются величины линейных и угловых скоростей всех точек механизма?
10. В чем преимущества и недостатки метода кинематических диаграмм (метод графического дифференцирования)?

Раздел 3. ДИНАМИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ МЕХАНИЗМОВ

3.1. Задачи кинестатики

Проектирование новых механизмов сопровождается обычно расчетом их элементов на прочность, и размеры звеньев устанавливаются в соответствии с теми силами, которые на них действуют.

Если в кинематике механизмов, в которой рассматривалась лишь геометрия движения, очертанием звеньев пренебрегали, фиксируя лишь характерные размеры, например, расстояние между центрами шарниров и другие размеры, определяющие относительное движение звеньев, то при расчете на прочность необходимо иметь представление о звене в трехмерном пространстве. Силы, действующие на элементы кинематических пар и появляющиеся в результате технологических и механических сопротивлений, определяют напряжения в звеньях, если размеры последних выбраны, или же определяют размеры звеньев, если заданы напряжения материала звеньев.

Таким образом, расчету механизмов на прочность должно предшествовать определение сил, поэтому одной из основных задач кинестатики является определение тех сил, которые действуют на элементы кинематических пар и вызывают деформации звеньев в процессе работы.

Методы расчета сил, действующих на звенья механизма без учета сил инерции, объединены под названием статики механизмов, а методы расчета сил с учетом сил инерции звеньев, определенных приближенно, — кинестатики механизмов. Практически методы статического и кинестатического расчетов механизмов ничем не отличаются, если считать силы инерции заданными внешними силами.

Кинестатика объединяет методы расчета сил, действующих на звенья механизма, с учетом сил инерции.

3.2. Силы, действующие на механизм

3.2.1. Классификация сил

В процессе работы машины к звеньям ее приложены заданные внешние силы, к которым относятся: движущая сила, сила технологического сопротивления, силы тяжести звеньев, механические или добавочные сопротивления и силы инерции, появляющиеся в результате движения звена. Неизвестными силами будут реакции связей, действующие на элементы кинематических пар.

Силы, действующие на звенья, условно разделяют на две группы: движущие силы $P_{дв}$ и силы сопротивления P_c .

Движущими силами называют силы, производящие положительную работу, т. е. направления движущей силы и скорости точки её приложения либо совпадают, либо образуют острый угол.

Однако в некоторых случаях сила, приложенная к ведущему звену, может обратиться в силу сопротивления и, следовательно, будет производить отрицательную работу. В качестве примера можно указать тепловые двигатели, в которых сила, действующая на поршень, при сжатии газовой смеси производит отрицательную работу.

В двигателе внутреннего сгорания, например, движущей силой будет равнодействующая от сил давления при воспламенении горючей смеси.

Силами сопротивления называют силы, препятствующие движению звеньев механизма. Работа этих сил всегда отрицательна, т. е. направление силы и скорости точки её приложения либо противоположны, либо образуют тупой угол. Различают силы полезного сопротивления и вредного сопротивления. В рабочих машинах силой полезного сопротивления является, например, сопротивление резанию металла, сопротивление при сжатии газов. Силами вредного сопротивления являются силы трения, силы сопротивления среды.

Кроме этих сил необходимо учитывать силы тяжести (силы веса) звеньев G , которые приложены в их центрах тяжести, силы инерции звеньев и силы реакций связи.

Силы инерции $P_{и}$ появляются при неравномерном движении звена. Силы инерции так же, как и силы веса, могут совершать как положительную, так и отрицательную работу.

Силы реакции связи R , действующие в кинематических парах, вводим при рассмотрении какого-либо звена, изолированного от механизма. При рассмотрении всего механизма в целом реакции связей следует считать внутренними силами, т. е. попарно уравновешивающимися.

Механические или добавочные сопротивления F в машинах встречаются главным образом в виде сил сопротивления, появляющихся при относительном движении элементов кинематических пар, или, иначе говоря, сил трения, в виде сопротивления среды, например аэродинамических сопротивлений, силы сопротивления, обусловленной жесткостью гибких звеньев, например канатов, цепей, ремней и т. д. Силы трения появляются под действием нормальных реакций, действующих в кинематических парах, и являются известными силами. Силы трения, как правило, производят отрицательную работу, потому что они всегда направлены в сторону, обратную скорости относительного движения элементов кинематических пар. Этот вид добавочного сопротивления, сопровождающего работу машин, наиболее важен, потому что во многих случаях почти вся энергия, затрачиваемая на приведение в движение машины, расходуется на преодоление сил трения. Ввиду этого силы трения будут рассмотрены особо.

3.2.2. Внешние силы и механические характеристики машин

Внешние силы могут быть постоянными, как, например, силы тяжести, сопротивления резанию металла при постоянном сечении стружки и др., или зависящими только от положения звена, на которое они действуют (силы давления газов, действующих на поршень двигателя внутреннего сгорания или компрессора, сопротивление, встречаемое пуансоном прессы при прошивании отверстий и др.), от скорости звена (момент электродвигателя, силы трения смазанных тел и др.), от времени. Кроме того, в машине могут действовать силы, зависящие от ряда перечисленных выше независимых переменных. Определение конкретной величины внешней силы возможно только в том случае, если задана ее характеристика.

Так, для основного механизма четырехтактного двигателя внутреннего сгорания закон изменения давления P газа в цилиндре задается индикаторной диаграммой – зависимостью $P = f(H)$ (рис. 3.1) [2].

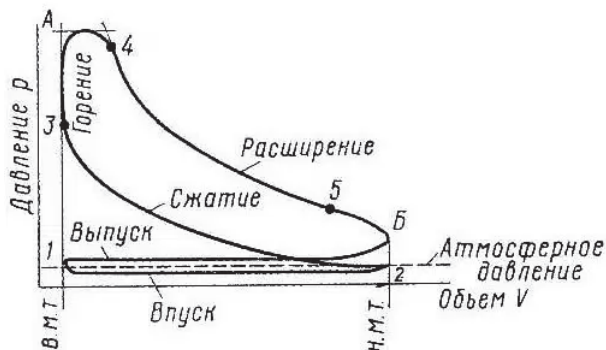


Рис. 3.1

Полный цикл работы двигателя заканчивается в течение двух оборотов кривошипа. За первую половину оборота происходит всасывание горючей смеси 1–2, за вторую половину оборота сжатие этой смеси 2–3, по кривой 3–4 – воспламенение смеси, по кривой 4–5 – расширение воспламененной смеси (рабочий ход), по кривой 5–1 – выхлоп.

Откладывая по оси H перемещение x , взятое с плана механизма, нетрудно найти соответствующую ординату на индикаторной диаграмме.

Избыточное давление $P_{из}$ на поршень – это разность давления газа в цилиндре и атмосферного давления, оно пропорционально ординате, отсчитываемой от линии атмосферного давления.

Силу, действующую на поршень, определяют из формулы

$$P = P_{из} \frac{\pi d^2}{4},$$

где d – диаметр поршня.

Для компрессора простого действия закон изменения давления газа в цилиндре дается также индикаторной диаграммой (рис. 3.2).

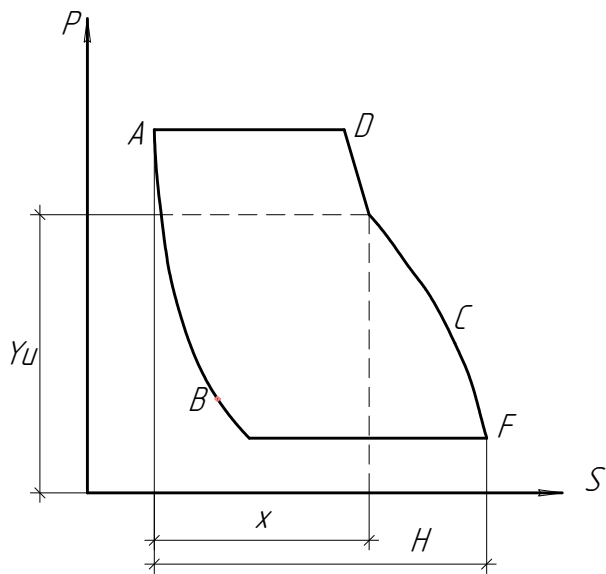


Рис. 3.2

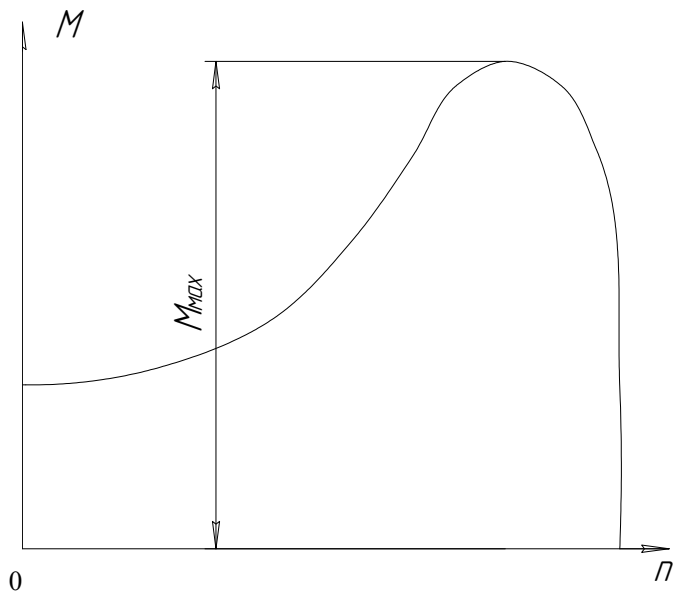


Рис. 3.3

Кривая FCD – сжатие газа, DA – выхлоп, AB – расширение газа, оставшегося в мертвом объеме, BF – всасывание новой порции газа, μ_p – масштабный коэффициент силы

$$P_{из} = \mu_p Y_u \frac{\pi d^2}{4},$$

где Y_u – ордината, соответствующая переменной x .

Диаграмма изменения мощности на валу двигателя или среднего момента $M_{ср}$ в зависимости от числа оборотов называется механической характеристикой двигателя (рис. 3.3).

3.2.3. Определение сил инерции

При работе механизма возникают силы инерции. Они вызывают добавочное давление в кинематических парах. Особенно большой величины эти силы достигают в быстроходных машинах.

Силы инерции определяются по заданному весу звеньев и их ускорениям. Метод определения зависит от вида движения звена.

Первый случай: звено совершает плоскопараллельное движение (шатун). Известно, что элементарные силы инерции в этом случае приводятся к равнодействующей силе $P_{и}$ и к моменту сил инерции $M_{и}$.

Сила инерции $P_{и}$ приложена в центре тяжести звена и равна:

$$P_{и} = -ma_s, \quad (3.1)$$

где m – масса звена; a_s – линейное ускорение центра тяжести звена.

Момент сил инерции

$$M_{и} = -J_s \varepsilon, \quad (3.2)$$

где J_s – момент инерции звена относительно центра тяжести; ε – угловое ускорение звена.

Знак минус указывает на то, что сила инерции $P_{и}$ направлена в сторону, обратную ускорению a_s , а момент $M_{и}$ – в сторону, обратную угловому ускорению ε .

Величина и направление ускорений определяются из кинематического расчета, а значения m и J_s должны быть заданы.

Сила $P_{и}$ и момент $M_{и}$ могут быть заменены одной результирующей силой $P_{и}$, приложенной в точке качания (рис. 3.4).

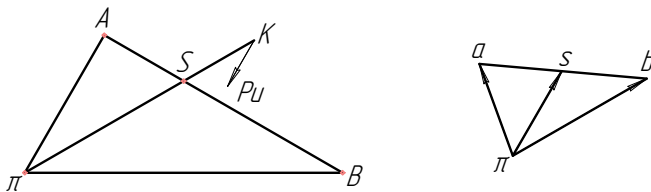


Рис. 3.4

Для этого силу инерции $P_{и}$ нужно перенести на расстояние, равное

$$\overline{SK} = \frac{M_{и}}{P_{и}}. \quad (3.3)$$

Величина этого плеча находится следующим способом: с плана ускорения (рис. 3.4) на звено AB переносится треугольник $\pi AB \sim \pi ab$:

$$SK = \frac{J_s}{m\pi S} = \frac{J_s}{m\pi S\mu_1}. \quad (3.4)$$

Отрезок $\overline{SK} = \frac{SK}{\mu_1}$ откладываем с учетом масштаба. Найдя точку K (точку качания), прикладываем в ней вектор силы инерции $P_{и}$, направленный в сторону, противоположную вектору ускорения центра тяжести.

Второй случай: звено совершает вращательное движение (рис. 3.5).

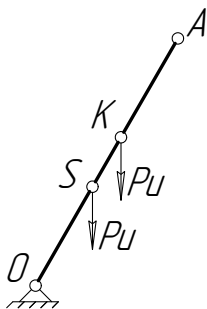


Рис. 3.5

При неравномерном вращении и при несовпадении центра тяжести с осью вращения имеют место сила инерции $P_{и}$ и момент сил инерции $M_{и} = -J_s \varepsilon$. При приведении силы и момента плечо SK определяется по формуле (3.4):

$$SK = \frac{J_s}{m\pi S},$$

где SK – расстояние от центра тяжести до точки качания; $\pi S = OS$.

При равномерном движении $P_{и}$ положена в центре тяжести: $M_{и} = 0$, так как $\varepsilon = 0$.

Центр тяжести совпадает с осью вращения $\varepsilon = 0$, то $P_{и} = 0$; $M_{и} = 0$.

Третий случай: звено совершает поступательное движение (ползун) (рис. 3.6).

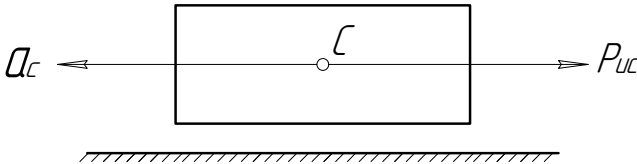


Рис. 3.6

Здесь $\varepsilon = 0$, $M_{и} = 0$. Если движение звена неравномерное, то возникает сила инерции

$$P_{и} = -m \cdot a_s.$$

Если момент инерции звена не задан, его можно приближенно определить по формуле

$$I_s = \frac{m\ell^2}{K}, \quad (3.6)$$

где m – масса звена; ℓ – длина звена; K – коэффициент $8 \div 10$.

Одной из задач динамики механизмов является определение сил, действующих на элементы кинематических пар, и так называемых уравновешивающих сил. Знание этих сил необходимо для расчета механизмов на прочность, определения мощности двигателя, износа трущихся поверхностей, установления типа подшипников и их смазки и т. д., то есть силовой расчет механизма является одной из существенных стадий проектирования машин.

Под уравновешивающими силами принято понимать силы, уравновешивающие заданные внешние силы и силы инерции звеньев механизма, определенные из условия равномерного вращения кривошипа. Число уравновешивающих сил, которые нужно прило-

жить к механизму, равно количеству начальных звеньев, или иначе, числу степеней свободы механизма. Так, если механизм обладает двумя степенями свободы, то в механизме должны быть приложены две уравновешивающие силы.

3.3. Силовой анализ механизмов. Определение реакций в кинематических парах

Силовой анализ механизмов основывается на решении прямой (или первой) задачи динамики — по заданному движению определить действующие силы. Поэтому законы движения начальных звеньев при силовом анализе считаются заданными. Внешние силы, приложенные к звеньям механизма, обычно тоже считаются заданными, следовательно, подлежат определению только реакции в кинематических парах. Но иногда внешние силы, приложенные к начальным звеньям, считают неизвестными. Тогда в силовой анализ входит определение сил, при которых выполняются принятые законы движения начальных звеньев. При решении обеих задач используется принцип Д'Аламбера, согласно которому звено механизма может рассматриваться как находящееся в равновесии, если ко всем внешним силам, действующим на него, добавить силы инерции. Уравнения равновесия в этом случае называют уравнениями кинетостатики, чтобы отличить их от обычных уравнений статики, т. е. уравнений равновесия без учета сил инерции. Обычно звенья плоских механизмов имеют плоскость симметрии, параллельную плоскости движения. Тогда главный вектор сил инерции звена P_n и главный момент сил инерции звена \overline{M}_n определяются по формулам

$$P_n = -ma_s; \quad \overline{M}_n = -J_s \varepsilon,$$

где m — масса звена; a_s — вектор ускорения центра масс.

При кинетостатическом расчете механизма необходимо определить реакции в кинематических парах и либо уравновешивающую силу, либо уравновешивающий момент пары сил.

Силовой расчет механизмов будем вести в предположении, что трение в кинематических парах отсутствует и все силы, действующие на механизм, расположены в одной плоскости.

Одним из известных методов силового расчета является метод рассмотрения каждого звена механизма в равновесии. При этом методе механизм расчленяется на отдельные звенья.

Вначале рассматривается равновесие крайнего звена, считая от главного (ведущего), затем равновесие звена, соединенного с крайним, и т. д. Равновесие главного звена рассматривается в последнюю очередь.

Рассматривая отдельно взятое звено в равновесии, необходимо приложить к нему все внешние силы ($P_{дв}$, $P_{пс}$, $P_{и}$, G) включая реакции связей, с которыми отсоединенные звенья действуют на взятое звено.

Изложим методику расчета на примере четырехзвенного механизма. Вначале рассмотрим в равновесии звено 3 (коромысло), приложив к нему все действующие силы, включая реакции связей (рис. 3.7).

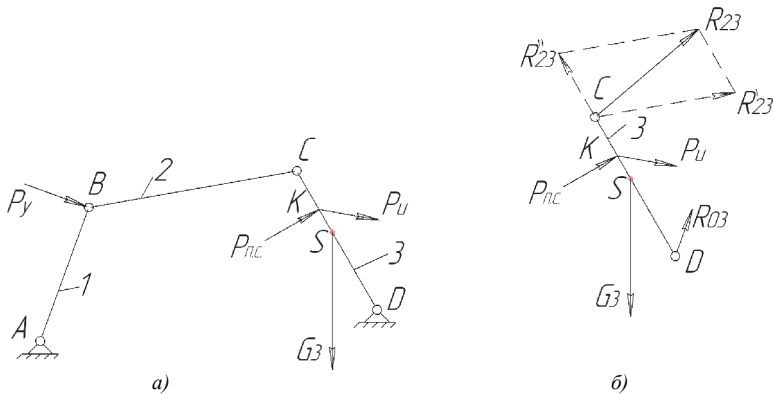


Рис. 3.7

Реакция во вращательной паре C неизвестна ни по величине, ни по направлению.

Для определения этой реакции заменяем её двумя составляющими (рис. 3.7, б), одну из которых — R'_{23} направляем по шатуну 2, вторую составляющую $R_{23} - R''_{23}$ — по коромыслу 3:

$$\overline{R_{23}} = \overline{R'_{23}} + \overline{R''_{23}}.$$

Величина R'_{23} может быть найдена из условия равновесия рассматриваемого звена.

Звено 3 находится в равновесии под действием следующих сил:
 $P_{п.с}; P_u; G_3; R_{03}; R'_{23}; R''_{23}$.

Составляем уравнение моментов всех сил относительно точки D :

$$\Sigma M_D(P_i) = 0;$$

$$-P_{п.с} \cdot h_{п.с.} - P_u \cdot h_{p_u} + G_3 \cdot h_G - R'_{23} \cdot h_{R'_{23}} = 0.$$

Откуда

$$R'_{23} = \frac{G_3 \cdot h_G - P_{п.с} \cdot h_{п.с.} - P_{u3} \cdot h_{p_u}}{h_{R'_{23}}}.$$

Если после определения этой величины она окажется отрицательной, то её направление будет противоположно выбранному.

Составляющую R''_{23} можно найти, рассмотрев в равновесии отдельно взятое звено 2 (рис. 3.8, а).

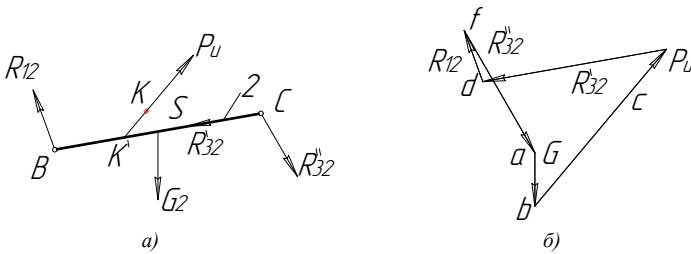


Рис. 3.8

Из условия равновесия звена 2 можно написать:

$$\Sigma M_B(P_i) = 0,$$

то есть $P_{u2} \cdot h_{p_u} - G_2 \cdot h_{G_2} - R'_{23} \cdot h_{R'_{23}} = 0,$

причем $R''_{32} = -R''_{23}$:

$$R''_{32} = \frac{P_{u2} \cdot h_{p_u} - G_2 \cdot h_{G_2}}{h_{R''_{32}}}.$$

Оставшуюся неизвестную реакцию R_{12} можно найти графическим методом, построив план сил этого звена (рис. 3.8, б).

Уравнение равновесия звена 2 имеет следующий вид:

$$\overline{R_{12}} + \overline{G_2} + \overline{P_{u2}} + \overline{R'_{32}} + \overline{R''_{32}} = 0.$$

Из произвольно выбранного полюса f откладываем в масштабе μ_p силу R''_{32} в виде вектора \overline{fd} , к нему геометрически прибавляем вектор \overline{db} , изображающий в том же масштабе μ_p силу G , и т. д.

Вектор \overline{df} дает нам величину реакции R_{12} в масштабе μ_p .

Далее приступаем к нахождению силы, уравнивающей механизм.

Для этого рассматриваем в равновесии кривошип AB (рис. 3.9).

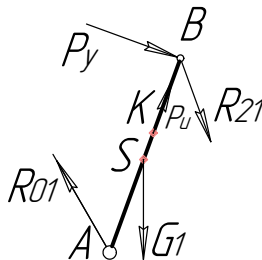


Рис. 3.9

Кривошип находится под действием силы веса G_1 , реакции шатуна 2 на кривошип R_{21} , силы инерции $P_{и1}$.

Под действием этих сил кривошип в общем случае не будет находиться в равновесии. Для равновесия необходимо приложить уравнивающую силу P_y или уравнивающий момент M_y .

Этими уравнивающими силой и моментом являются реактивные силы или момент от двигателя.

Пусть уравнивающая сила будет направлена по нормали к кривошипу и приложена в точке B . Из условия равновесия звена AB можно составить уравнение суммы моментов всех сил относительно точки A :

$$\Sigma M_A(P_i) = 0,$$

то есть

$$-R_{21} \cdot h_{R_{21}} - G \cdot h_{G1} - P_y \cdot h_{P_y} = 0,$$

откуда

$$P_y = \frac{-R_{21} \cdot h_{R_{21}} - G \cdot h_{G1}}{h_{P_y}}.$$

Уравновешивающую силу можно найти также методом, при котором в равновесии рассматривается весь механизм.

Условие равновесия механизма можно выразить следующим уравнением:

$$\Sigma N(P_i) = 0. \quad (3.7)$$

Сумма мощностей всех сил, приложенных к механизму, с учетом сил инерции и уравновешивающих сил равна нулю.

Мгновенная мощность силы, приложенной в i -й точке, пропорциональна моменту этой силы относительно конца вектора повернутой скорости данной точки (рис. 3.10):

$$N_i = \mu_p \cdot \mu_v \cdot \overline{P_i} \cdot h_i. \quad (3.8)$$

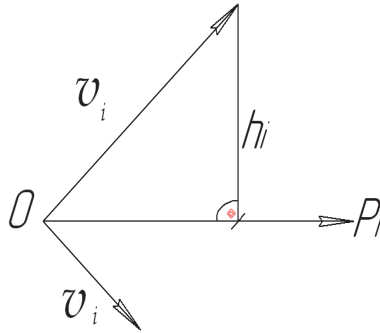


Рис. 3.10

Из уравнения равновесия можно найти уравновешивающую силу. Часто удобно находить P_y с помощью вспомогательного рычага Жуковского, когда для механизма построен полярный план скоростей, повернутый на 90° . В последнем случае к концам найденных векторов скоростей следует приложить действующие внешние силы.

После этого, рассматривая повернутый план скоростей как жесткий рычаг, вращающийся вокруг полюса P , можно написать уравнение равновесия рычага в виде суммы моментов сил относительно полюса:

$$\Sigma M_p(P_i) = 0.$$

Уравнение равновесия плана скоростей, рассматриваемого как жесткий рычаг, тождественно уравнению мощностей.

Если к звеньям механизма кроме сил приложен еще и момент M (рис. 3.11), то его можно рассматривать как пару сил, каждая составляющая которой равна

$$P = \frac{M}{l_{AB}}. \quad (3.11)$$

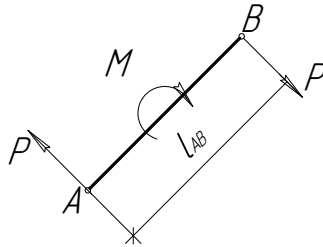


Рис. 3.11

Найденные силы P прикладываются в соответствующих изображающих точках плана скоростей.

3.4. Трение в кинематических парах

3.4.1. Трение скольжения

Под потерями на трение в механизме имеют в виду потери на трение в его кинематических парах. Различают трение двух основных видов: трение скольжения и трение качения. В низших кинематических парах возникает трение скольжения, в высших — только трение качения или трение качения совместно с трением скольжения.

Если поверхности движущихся тел A и B (рис. 3.12) соприкасаются, то трение, возникающее при этом, называют сухим. Если поверхности не соприкасаются (рис. 3.13) и между ними имеется слой смазки, то такое трение называют жидкостным. Встречаются также случаи, когда имеется полусухое (преобладает сухое), или полужидкостное, трение.

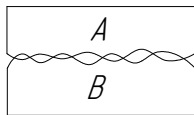


Рис. 3.12

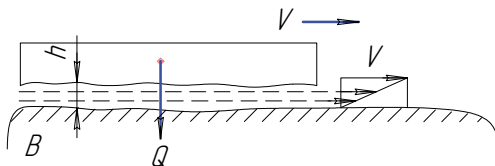


Рис. 3.13

3.4.2. Сухое трение

Основные законы

1. В определенном диапазоне скоростей и нагрузок коэффициент трения скольжения можно считать постоянным, а силу трения F – пропорциональной нормальному давлению:

$$F = fN,$$

где f – коэффициент трения скольжения; N – нормальное давление.

2. Коэффициент трения скольжения зависит от материала и состояния трущихся поверхностей.

3. Силы трения всегда направлены в сторону, противоположную относительным скоростям.

4. Коэффициент трения покоя несколько больше коэффициента трения при движении.

5. С увеличением скорости движения сила трения в большинстве случаев уменьшается, приближаясь к некоторому постоянному значению; при малых скоростях коэффициент трения почти не зависит от скорости.

6. С возрастанием удельного давления коэффициент трения в большинстве случаев увеличивается. При малых удельных давлениях коэффициент трения почти не зависит от величины удельного давления и площади соприкосновения.

7. С увеличением времени предварительного контакта сила трения возрастает.

3.4.3. Жидкостное трение

При сухом трении происходит большая затрата работы, превращающейся в теплоту, и износ трущихся поверхностей. Для устранения этих явлений между трущимися поверхностями вводится

слой смазки. В этом случае при соблюдении определенных условий слой смазки может полностью разделять трущиеся поверхности (рис. 3.13).

3.4.4. Трение при скольжении ползуна по горизонтальной плоскости

Поступательная кинематическая пара, состоящая из горизонтальной направляющей 2 и ползуна 1, показана на рис. 3.14. Пусть на ползун 1 действуют следующие силы: P_d – движущая, G – вес груза или нагрузка, действующая на ползун, N – нормальная реакция, F_0 – сила трения (касательная реакция) при покое. При движущемся ползуне вместо силы трения F_0 действует сила трения F при движении, причем $\vec{N} = -\vec{G}$, и полная реакция $\vec{R} = \vec{F} + \vec{N}$.

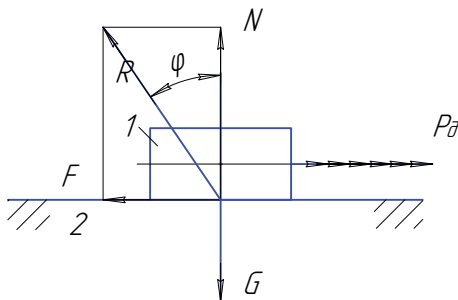


Рис. 3.14

Угол φ отклонения полной реакции от нормали в сторону, противоположную движению ползуна, называют углом трения.

Учитывая, что

$$F = N \cdot \operatorname{tg}\varphi = G \cdot \operatorname{tg}\varphi; \quad F = fG,$$

имеем $f = \operatorname{tg}\varphi$.

Следовательно, коэффициент трения равен тангенсу угла трения.

3.4.5. Трение в кинематической паре шип – подшипник

При наличии зазора цапфа под действием M_d из своего нижнего положения перекачивается в новое положение, которое характеризуется наступившим равновесием между движущими силами и силами сопротивления. На рис. 3.15 приняты следующие обозначения: r – радиус шипа, Q – внешняя на грузка, R – реакция подшипника, действующая на шип, φ – угол трения, ρ – радиус круга трения.

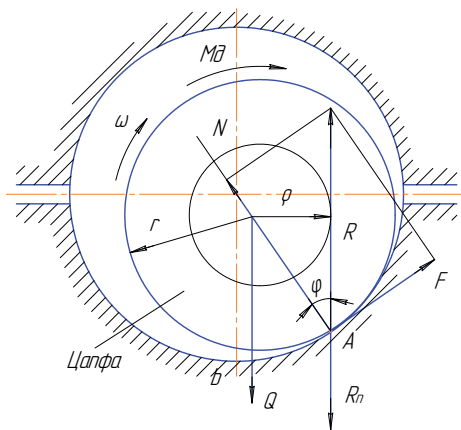


Рис. 3.15

Силы Q и R образуют пару сил, момент которой представляет собой момент сопротивления $M_{\text{сопр}}$; в каждый данный момент он уравновешивает момент движущих сил M_d , т. е. $M_{\text{сопр}} = M_d$.

Момент сил сопротивления $M_{\text{сопр}} = R\rho = N \frac{\rho}{\cos \varphi}$, где $R = \frac{N}{\cos \varphi}$.

Момент сил трения $M_F = M_{\text{сопр}} = Fr$, где $F = f \cdot N$; r – радиус шипа;

$$M_F = fNr = N \frac{\rho}{\cos \varphi}.$$

Вследствие малости угла φ величина $\cos \varphi \approx 0$. Следовательно, радиус круга трения $\rho = fr$ равен смещению полной реакции R от внешней нагрузки Q .

Итак, момент сил трения $M_F = fQr$.

3.5. Коэффициент полезного действия механизма

Механическим КПД машины называют отношение абсолютного значения работы полезных сопротивлений $A_{\text{п.с}}$ к работе движущих сил $A_{\text{д}}$ за период установившегося движения:

$$\eta = \frac{\dot{A}_{\text{п.с}}}{\dot{A}_{\text{д}}}. \quad (3.12)$$

Из уравнения движения машины при установившемся движении $A_{\text{п.с}} + A_{\text{в.с}} = A_{\text{д}}$ находим $A_{\text{п.с}} = A_{\text{д}} - A_{\text{в.с}}$.

После подстановки $A_{\text{п.с}}$ в выражение (3.12) получим следующее выражение для КПД:

$$\eta = \frac{\dot{A}_{\text{д}} - \dot{A}_{\text{в.с}}}{\dot{A}_{\text{д}}} = 1 - \frac{\dot{A}_{\text{в.с}}}{\dot{A}_{\text{д}}} = 1 - \psi,$$

где $\psi = \frac{\dot{A}_{\text{в.с}}}{\dot{A}_{\text{д}}}$ – коэффициент потерь.

КПД тем больше, чем меньше работа вредных сопротивлений. Определив, например, мгновенные КПД в двенадцати положениях рычажного механизма за один оборот установившегося движения, можно построить график функции $\eta = \eta(\varphi)$. На практике обычно пользуются средним арифметическим значением КПД за период установившегося движения:

$$\eta = \frac{\eta_1 + \eta_2 + \dots + \eta_{12}}{12}.$$

Машина может иметь очень низкий мгновенный КПД в отдельных положениях механизма. Мгновенный КПД рычажного механизма можно выразить как отношение мощностей:

$$\eta = \frac{N_{\text{п.с}}}{N_{\text{д}}},$$

где $N_{\text{п.с}}$ – мгновенная мощность сил полезного сопротивления для каждого положения механизма; $N_{\text{д}}$ – мгновенная мощность движущих сил для соответствующего положения механизма.

КПД группы последовательно соединенных механизмов или машин

Ряд машин или механизмов, входящих в агрегат, может быть соединен последовательно (рис. 3.16, а) или параллельно (рис. 3.16, б).

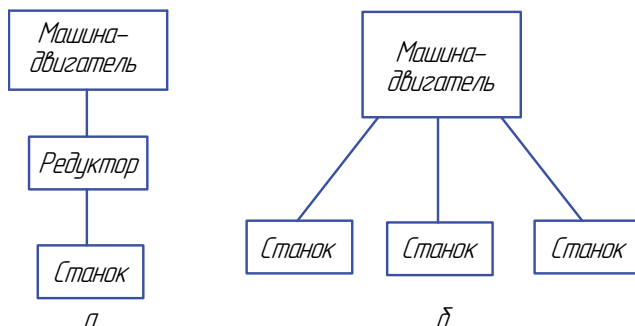


Рис. 3.16

Общий КПД машины при последовательном соединении механизмов равен произведению их КПД.

В общем случае

$$\eta = \eta_1 \cdot \eta_2 \cdot \eta_3 \cdot \dots \cdot \eta_n.$$

КПД группы параллельно соединенных механизмов или машин

Это соединение характеризуется разветвлением общего потока энергии.

Общий КПД равен

$$\eta = \frac{\eta' A'_д + \eta'' A''_д}{A'_д + A''_д}.$$

3.6. Определение реакций в кинематических парах с учетом трения

Выполненный в первой части расчет без учета трения дает значения реакций в кинематических парах механизма в первом приближении. Определение же сил с учетом трения является дальнейшим уточнением и проводится обычно (и в нашем случае) методом последовательного приближения. Для выполнения второго приближения задаются значения коэффициентов трения скольжения во всех парах и диаметры цапф вращательных пар. Методика расчета механизма с учетом и без учета трения одна и та же. Разница только в том, что силы реакций в поступательных парах отклоняются от своих прежних нормалей на угол трения и направлены против вектора скорости поступательной пары. Во вращательных

парах линия их действия пройдет касательно к кругам трения, эти реакции можно заменить реакцией, приложенной в центре шарнира, при этом нужно приложить к данному шарниру момент трения, определяемый по формуле

$$M_T = R \cdot r, \quad (3.13)$$

где r – радиус трения, определяемый по формуле

$$r = \frac{D_y}{2} \sin \rho, \quad (3.14)$$

где D_y – диаметр цапф; ρ – угол трения.

R в формуле (3.13) – это реакция в данном шарнире, полученная в первой части, без учета сил трения. Направление момента противоположно угловой скорости звена относительно данного шарнира.

3.6.1. Силовой анализ зубчатых механизмов

Для подавляющего большинства зубчатых передач основным является установившийся режим работы. Поэтому в передачах этого типа моменты от сил инерции будут равны нулю (без учета колебаний, вызываемых переменной жесткостью и ошибками шага).

Давление между эвольвентными профилями передается по линии зацепления, которая совпадает с их общей нормалью.

Если к ведомому колесу (рис. 3.17) приложен момент сопротивления M_C , то сила сопротивления

$$P_C = \frac{M_C}{r_{O_2}} = \frac{M}{r}.$$

Сила P_C приложена к ведущему колесу 1; к ведомому колесу 2 приложена движущая сила $\bar{Q} = -\bar{P}_C$. Из формулы следует, что если $M_C = \text{const}$, то сила P_C давления между зубьями постоянна как по величине, так и по направлению; она увеличивается с увеличением угла зацепления.

В центре ведущего колеса 1 приложим две равные и противоположно направленные силы P_C . Силы R^* – давление в опорах колеса; две другие силы R образуют пару сил, момент которой равен моменту M_D . Подставляя значение P_C из формулы, получаем

$$M_D = \frac{M_c}{r_{O_2}} r_{O_1} = M_c \frac{r_1}{r_2} = \frac{M_c}{u_{12}}.$$

Пара Qr_{O_2} , приложенная к колесу 2, преодолевает приложенный к этому колесу момент сопротивления M_C .

Равные и обратно направленные силы R^* и Q^* образуют пару с моментом

$$M_p = R(r_{O_1} + r_{O_2}) = R \frac{A}{\cos \alpha}.$$

Эта пара стремится повернуть стойку (раму) передачи (в нашем случае по часовой стрелке). Для того чтобы этого не произошло, стойка должна быть закреплена. Момент, создаваемый рассматриваемой парой, получил название реактивного момента.

Очевидно, что и при переменном M_C направления сил давления между зубьями и в опорах валов будут постоянны. Это является одним из преимуществ эвольвентного зацепления, так как обеспечивает спокойную работу передачи.

Так как профили зубьев в процессе их зацепления имеют относительное скольжение, то между ними возникают силы трения, равнодействующая F которых направлена против скорости скольжения $v_{ск}$.

Величина этой силы

$$F = fR = f \frac{M_C}{r_{O_2}} = f \frac{M_C}{r_2 \cos \alpha},$$

где f – коэффициент трения скольжения профилей.

Мощность сил трения в наружном зацеплении

$$N_{тр} = Fv_{ск} = fR(\omega_1 + \omega_2)P_O M = f \frac{M_C}{r_2 \cos \alpha} (\omega_1 + \omega_2)P_O M.$$

Следовательно, мощность сил трения в зацеплении переменна и увеличивается по мере того, как точка M касания профилей удаляется от полюса зацепления.

В опорах валов также возникают силы трения, пропорциональные давлениям R и Q в этих опорах. Величины этих сил трения зависят от ряда факторов (от условий смазки соприкасающихся поверхностей, от их упругих свойств, определяющих закон распределения удельных давлений, от скорости скольжения опорных поверхностей и т. д.). Равнодействующая этих сил $F_1 = f_{n1} R$, где f_{n1} – коэффициент трения, учитывающий условия работы вала в под-

шипниках. Приложена эта сила в одной из точек опорной поверхности вала на расстоянии r_B от его оси.

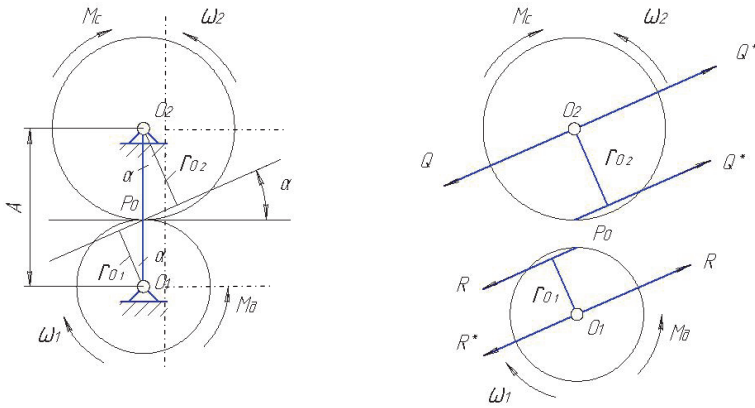


Рис. 3.17

Мощность сил трения в опорах

$$N_{\text{тр}1} = M_{\text{тр}1} \omega_1 = F_1 r_{B1} \omega_1 = f_{n1} R r_{B1} \omega_1 = f_{n1} \frac{M_C}{r_2 \cos \alpha} r_{B1} \omega_1;$$

$$N_{\text{тр}2} = f_{n2} \frac{M_C}{r_2 \cos \alpha} r_{B2} \omega_2.$$

Из формул видно, что если $M_C = \text{const}$, то и мощность сил трения в опорах постоянна.

Пользуясь этой формулой, можно определить момент M_D и мощность N_D двигателя, который должен быть соединен с ведущим валом передачи, если заданы M_C и i_{12} .

Величины коэффициентов f и f_n зависят от большого числа различных факторов и могут колебаться в очень широких пределах. Например, коэффициенты трения профилей зависят не только от трения профилей, но и от смазки; кроме трения скольжения между профилями имеет место трение качения; если передача работает в масляной ванне, то затрачивается работа на перемешивание масла и т. д.

3.6.2. Определение моментов в планетарном механизме без учета трения

Рассмотрим вопрос определения моментов в планетарном механизме, звенья которого вращаются равномерно. В планетарном механизме, изображенном на рис. 3.18, солнечное колесо 1, водило 2 и коронное колесо 4 вращаются вокруг центральной оси C . Тангенциальная составляющая P_{31} реакции на сателлит 3 со стороны солнечного колеса 1 без учета силы трения приложена в полюсе зацепления A . В обратную сторону направлена сила P_{13} . В точке B действуют составляющие реакции P_{34} и P_{43} , а в центре сателлита — P_{23} и P_{32} .

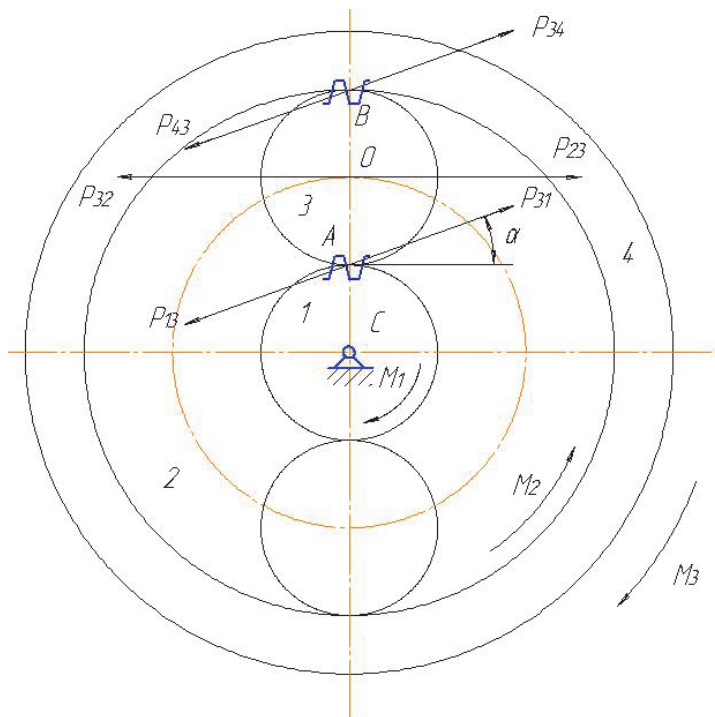


Рис. 3.18

Будем рассматривать такие планетарные механизмы, в которых сателлит не является выходным звеном, т. е. $M_3 = 0$. Тогда $\bar{P}_{31} = \bar{P}_{34}$, и поэтому

$$\bar{P}_{32} = \bar{P}_{34} + \bar{P}_{31} = 2\bar{P}_{31}. \quad (3.15)$$

Рассматривая равновесие звена 1 получим:

$$kP_{13} \cdot r_1 - M_1 = 0,$$

откуда

$$P_{13} = \frac{M_1}{kr_1}, \quad (3.16)$$

где k – количество сателлитов механизма.

Из равновесия звена 2 имеем: $-kP_{23} \cdot r_2 + M_2 = 0$, откуда

$$M_2 = kP_{13} \cdot r_2. \quad (3.17)$$

Учитывая (3.15) и (3.16), перепишем (3.17):

$$M_2 = -2kP_{13} \cdot r_2.$$

Из (3.17) и (3.16) получим:

$$\frac{M_2}{M_1} = -2 \frac{r_2}{r_1}. \quad (3.18)$$

Запишем условие равновесия звена 4:

$$-M_4 + kP_{43}r_4 = 0,$$

откуда

$$M_4 = kP_{43}r_4. \quad (3.19)$$

Поэтому, учитывая условие $P_{43} = -P_{13}$, из (3.19) имеем:

$$\frac{M_4}{M_1} = \frac{r_4}{r_1}.$$

Следовательно, если один из моментов, действующих в планетарном механизме, известен, то, зная радиусы начальных окружностей, по формулам (3.18) и (3.19) можно определить неизвестные моменты.

Задачу определения моментов можно решить и с помощью общего плана угловых скоростей. Рассмотрим методику определения моментов.

Пусть для планетарного редуктора с корригированными зубчатыми колесами построен общий план угловых скоростей (рис. 3.19):

$M_1\omega_1$ – мощность, подводимая к звену 1;

$M_2\omega_2$ – мощность, снимаемая с водила.

Так как потери не учитываются, то:

$$M_1 \omega_1 = M_2 \omega_2,$$

но

$$\frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{\overline{P_2}}{\overline{P_1}} = \frac{42}{41},$$

Поэтому

$$\frac{M_4}{M_1} = \frac{\overline{12}}{24}. \quad (3.20)$$

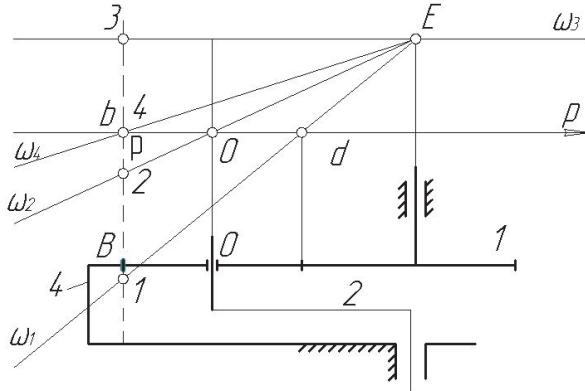


Рис. 3.19

Так как под действием моментов планетарный механизм в установившемся равновесном режиме находится в равновесии, то имеет место равенство

$$M_1 + M_2 + M_4 = 0, \quad (3.21)$$

где M_4 при $\omega_4 = 0$ следует понимать как момент, который необходимо приложить к звену 4, чтобы удержать его от вращения.

Из (3.21) получим

$$\frac{M_4}{M_1} = -\frac{M_2}{M_1} - 1. \quad (3.22)$$

Учитывая (3.21), перепишем (3.22) так:

$$\frac{M_4}{M_1} = \frac{\overline{41}}{42} - 1,$$

или после упрощения:

$$\frac{M_4}{M_1} = \frac{\overline{41} - \overline{42}}{42} = \frac{\overline{21}}{42}.$$

Окончательно получим:

$$\frac{M_4}{M_1} = \frac{\overline{12}}{24}.$$

Из (3.21) и (3.22) следует правило для определения моментов.

3.6.3. Определение коэффициента полезного действия планетарного механизма

КПД механической передачи зависит от многих факторов, из которых наибольшее значение имеют потери мощности в зацеплении пар зубчатых колес. Определим КПД планетарного редуктора при передаче моментов от звена 1 к звену 2 по формуле

$$\eta_{12} = -\frac{N_2}{N_1} = -\frac{M_2 \cdot \omega_2}{M_1 \cdot \omega_1}, \quad (3.23)$$

где $U_{12} = \frac{M_2}{M_1}$ называется силовым передаточным отношением.

Здесь M_2 и M_1 – моменты, действующие на звенья 2 и 1 с учетом трения в зацеплении; $U_{12} = \frac{\omega_1}{\omega_2}$ – кинематическое передаточное отношение.

3.6.4. Силовой расчет кулачковых механизмов. Схема действия сил

Так как ведомое звено (штанга-толкатель) движется с переменной скоростью, то схемы действия сил, приложенных к кулачковому механизму на разных участках интервала его перемещения, различны (рис. 3.20).

В интервале рабочего перемещения к ведомому звену приложена сила полезного сопротивления R , направленная против скорости звена. Сила R , как правило, всегда задана; она может быть постоянной или переменной.

Если в механизме осуществлено силовое замыкание высшей пары, то на ведомое звено в том же направлении действует упругая сила $P_{\text{п}}$ пружины, которая в это время сжимается.

Из-за неравномерного движения штанги возникает сила инерции:

$$P_{\text{и}} = -m_{\text{ш}} a_{\text{ш}},$$

где $m_{ш}$ – масса штанги; $\bar{a}_{ш}$ – ее ускорение; сила $\bar{P}_{и}$ направлена противоположно ускорению штанги. Так как масса штанги постоянная $m_{ш} = \frac{G_{ш}}{g}$, то закон (график) изменения силы $\bar{P}_{и}$ совпадает с законом (графиком) изменения ускорения штанги.

Равнодействующая Q всех сил, приложенных к штанге, равна:

$$\bar{Q} = \bar{R} + \bar{P}_{п} \pm \bar{P}_{и}.$$

Если пренебречь трением в паре кулачок – штанга, то направление силы P давления кулачка на штангу совпадает с нормалью к профилю кулачка. Если не учитывать трение в направляющей C , то, для того чтобы штанга двигалась по заданному закону, надо, чтобы в каждом положении механизма сила P давления кулачка на штангу равнялась бы

$$P = \frac{Q}{\cos \gamma},$$

где γ – угол между силой P и направлением движения штанги (угол передачи движения).

Если не учитывать трение в подшипниках вала кулачка, то движущий момент на валу кулачка

$$M_{д} = Ph = \frac{Q}{\cos \gamma} r \sin = Qr \cdot \operatorname{tg} \gamma,$$

где r – радиус-вектор профиля кулачка.

Самоторможение. Учитывая силы трения при силовом расчете механизма, можно выявить такие соотношения между параметрами механизма, при которых вследствие трения движение звена в требуемом направлении не может начаться независимо от величины движущей силы.

В большинстве механизмов самоторможение недопустимо, но в некоторых случаях оно используется для предотвращения самопроизвольного движения в обратном направлении (домкрат, некоторые типы подъемных механизмов и др.).

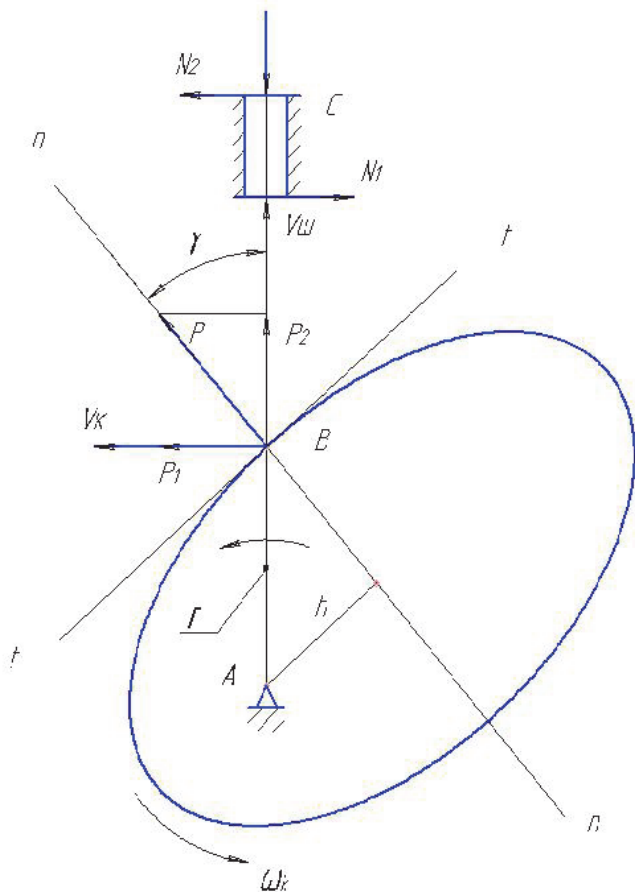


Рис. 3.20

Угол давления. Углом давления на звено i со стороны звена j называется угол между направлением силы давления (нормальной реакции) на звено i со стороны звена j и скоростью точки приложения этой силы. Угол давления на звено i со стороны звена обозначается через ϑ_{ij} . Часто однако рассматривается лишь один угол давления. Тогда индексы в обозначениях опускаются.

Вопросы для самопроверки

1. Какие силы, действующие на механизм, вы знаете?
2. Определение значений и направлений внешних сил и реакций связей.
3. Запишите уравнения кинетостатики для одного из звеньев механизма.
4. В какой последовательности необходимо выполнять силовой расчет четырехзвенного механизма?
5. Назовите виды трения, встречающиеся в кинематических парах.
6. Что называется механическим коэффициентом полезного действия? Как определяется КПД последовательно и параллельно соединенных механизмов?
7. Особенности силового расчета зубчатых механизмов.
8. Как определяется движущий момент на валу кулачка?

Раздел 4. АНАЛИЗ ДВИЖЕНИЯ МЕХАНИЗМА ПОД ДЕЙСТВИЕМ СИЛ

4.1. Уравновешивание механизмов

4.1.1. Общие сведения

Динамические давления — это дополнительные усилия, которые возникают в кинематических парах при движении механизма. Эти давления являются причиной вибраций некоторых звеньев механизма, они переменны по величине и направлению. Станина данного механизма тоже испытывает динамические давления, которые оказывают вредное воздействие на его крепления, нарушая тем самым связь станины с фундаментом. Также динамические давления увеличивают силы трения в точках опоры вращающихся валов, увеличивают износ подшипников. Поэтому при проектировании механизмов стараются достичь полного или частичного погашения динамических давлений (задача об уравновешивании сил инерции механизмов).

Звено механизма будет считаться уравновешенным, если его главный вектор и главный момент сил инерции материальных точек будут равны нулю. Неуравновешенным может быть каждое звено механизма в отдельности, но механизм при этом в целом может быть уравновешен полностью или частично. Проблему уравновешивания сил инерции в механизмах можно разделить на две задачи: 1) об уравновешивании давлений в кинематических парах механизма; 2) об уравновешивании давлений механизма в целом на фундамент.

Огромное значение имеет уравновешивание вращающихся звеньев. Незначительный дисбаланс быстро вращающихся роторов и электродвигателей вызывает большие динамические давления на подшипники.

4.1.2. Уравновешивание вращающихся тел

Задача об уравновешивании вращающихся тел состоит в таком выборе их масс, при котором произойдёт полное или частичное погашение добавочных инерционных давлений на опоры.

Результирующая центробежная сила инерции

$$\bar{P}_и = \omega^2 \Sigma m_i \bar{r}_i = \omega^2 m \bar{r}_s,$$

где m – масса всего тела; r_s – расстояние центра S масс тела от оси вращения.

Результирующий момент всех сил инерции тела относительно плоскости, проходящей через центр масс:

$$\bar{M}_и = \omega^2 \Sigma m_i r_i a_i = \omega^2 \bar{J}_{ra},$$

где \bar{J}_{ra} – центробежный момент инерции относительно оси вращения и плоскости, перпендикулярной к оси вращения и проходящей через центр S масс тела.

При вращении тела угол между векторами $\bar{P}_и$ и $\bar{M}_и$ сохраняет всё время одно и то же значение α . Если результирующая сила инерции $\bar{P}_и$ и результирующий момент $\bar{M}_и$ сил инерции равны нулю, тогда тело будет полностью уравновешенным, а значит, вращающееся тело не оказывает никаких динамических давлений на опоры:

$$\bar{m} r_s = \Sigma m_i \bar{r}_i = 0; \quad (4.1)$$

$$J_{ra} = \Sigma m_i r_i \bar{a}_i = 0. \quad (4.2)$$

Эти условия будут выполняться только тогда, когда центр масс тела будет лежать на оси вращения, которая будет являться одной из его главных осей инерции. Если одновременно выполняются равенства (4.1) и (4.2), то центробежный момент инерции \bar{J}_{ra} будет равен нулю. Если выполняется (4.1) условие, то тело считается уравновешенным статически, если выполняется (4.2) условие, то тело считается уравновешенным динамически.

Статический дисбаланс Δ_C измеряется статическим моментом

$$\Delta_C = G R_s \text{ (Н} \cdot \text{м)}, \quad (4.3)$$

где G – вес вращающегося тела, Н.

Динамический дисбаланс Δ_D вращающегося тела измеряется величиной

$$\Delta_D = \sum G_i r_i a_i \left(\frac{\text{Нм} \cdot \text{м}}{\text{с}^2} \right). \quad (4.4)$$

На практике неуравновешенное тело уравнивают при помощи противовесов. Вращающиеся тела, у которых общая длина a значительно меньше их диаметра, имеют незначительные центробежные моменты инерции J_{ra} , поэтому такие тела достаточно уравновесить только статически.

Предположим, что тело A статически неуравновешено. В простейшем случае противовес помещают на линии, проходящей через центр тяжести S , по другую сторону от оси вращения на расстоянии $r_{\text{пр}}$ от неё (рис. 4.1).

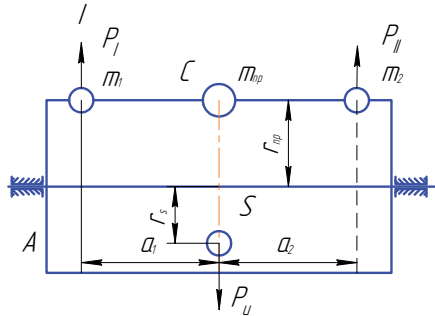


Рис. 4.1

Массу $m_{\text{пр}}$ противовеса находим из уравнения

$$m_{\text{пр}} = m \frac{r_s}{r_{\text{пр}}}. \quad (4.5)$$

Вместо установки противовеса можно удалить часть массы. Величина удаляемой массы определяется по формуле (4.5). Иногда плоскость крепления противовеса не может быть выбрана конструктивно в той плоскости вращения, в которой расположены неуравновешенные массы. В этом случае можно установить два противовеса в двух перпендикулярных к оси вращения плоскостях, обычно называемых плоскостями исправления, но при этом необходимо исключить возможность появления давления на опоры не только от результирующей силы инерции, но и от моментов сил инерции. Массы m_1 и m_2 противовесов определяем в соответствии с формулами (4.1) и (4.2) из уравнений

$$mr_s = m_1 r_{\text{пр}} + m_2 r_{\text{пр}} \quad \text{и} \quad m_1 r_{\text{пр}} a_1 - m_2 r_{\text{пр}} a_2 = 0,$$

откуда

$$m_1 = m \frac{r_s a_2}{r_{\text{пр}} (a_1 + a_2)} \quad \text{и} \quad m_2 = m \frac{r_s a_1}{r_{\text{пр}} (a_1 + a_2)}. \quad (4.6)$$

Сложив массы этих противовесов, получим

$$m_1 + m_2 = m \frac{r_s}{r_{\text{пр}}} = m_{\text{пр}},$$

а из их отношения найдём

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{a_2}{a_1}.$$

Полное уравнивание вращающегося тела может быть достигнуто также при помощи двух противовесов, расположенных в произвольно выбранных плоскостях 1 и 2 и на произвольных расстояниях от оси вращения.

Вращающиеся тела обычно выполняют так, чтобы они были уравновешены сами по себе. Чаще всего вращающиеся тела выполняют в форме одного или нескольких цилиндров, имеющих общую ось, совпадающую с осью вращения тела. Однако во многих случаях такая форма не может быть выполнена, и вращающееся тело без противовесов является неуравновешенным. Для определения величины и положения противовесов необходимо по чертежу выделить уравновешенную часть тела и определить для оставшихся частей — колен, кулачков и т. д. — центры тяжести их, считая, что в них сосредоточены массы этих частей.

Предположим, что для какого-либо тела все его неуравновешенные массы свелись к трём неуравновешенным массам (рис. 4.2).

Пользуясь методом приведения вектора к заданному центру, можно любое число вращающихся в различных плоскостях масс уравновесить двумя противовесами. Пусть центры тяжести масс m_1 , m_2 и m_3 расположены в трёх плоскостях, перпендикулярных к оси вращения. Условия отсутствия давления на подшипники от главного вектора и главного момента относительно центра приведения O_1 центробежных сил инерции выражаются уравнениями

$$\sum_1^n \overline{m_i r_i} = 0; \quad \sum_1^n \overline{a_i \cdot m_i r_i} = 0.$$

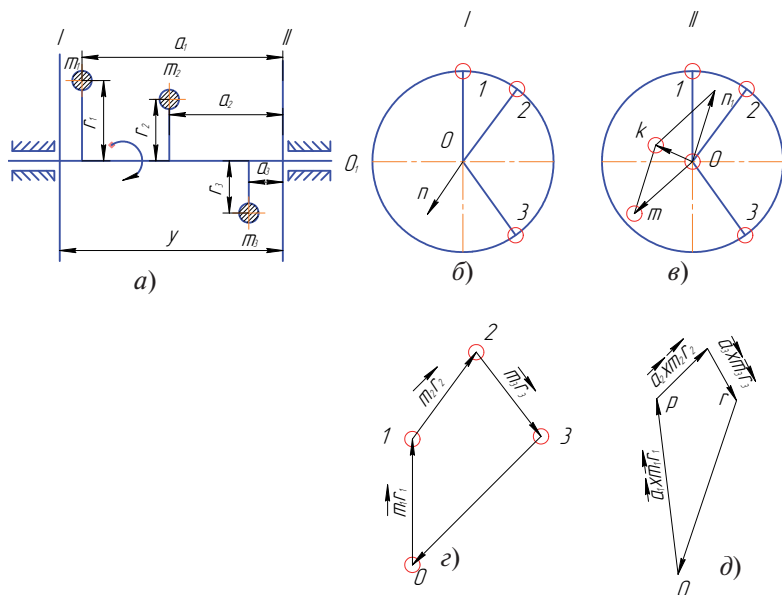


Рис. 4.2

Строим многоугольники векторов сил и векторов моментов (рис. 4.2, *з*, *д*). Уравновешивающим в первом случае является вектор $\overline{3O}$, изображённый в плоскости 2 вектором \overline{Om} (рис. 4.2, *в*), а во втором – вектор \overline{rO} (рис. 4.2, *д*), изображающий повернутый момент пары векторов: \overline{On} , расположенного в плоскости 1, и $\overline{Om_1}$, расположенного в плоскости 2. Каждый из них равен по величине $\frac{r\overline{O}}{a}$. Таким образом, заданные массы m_1 , m_2 и m_3 будут полностью уравновешены двумя массами, расположенными вдоль \overline{On} в плоскости 1 и вдоль равнодействующей \overline{Ok} в плоскости 2.

Из изложенного следует, что:

1) любое количество вращающихся масс, расположенных в одной плоскости вращения, уравновешивается одним противовесом, находящимся в той же плоскости, при соблюдении условия равновесия:

$$\sum_1^n \overline{m_i r_i} = 0; \quad (4.7)$$

2) любое количество масс, лежащих в разных плоскостях вращения, уравновешивается двумя противовесами, установленными

в двух произвольных плоскостях, перпендикулярных к оси вращения, при соблюдении двух условий равновесия:

$$\sum_1^n \overline{m_i r_i} = 0; \quad \sum_1^m \overline{a_i} \cdot \overline{m_i r_i} = 0. \quad (4.8)$$

4.1.3. Уравновешивание механизмов на фундаменте

Для уравновешивания плоского механизма на фундаменте необходимо и достаточно так подобрать массы звеньев этого механизма, чтобы общий центр масс движущихся звеньев его оставался неподвижным:

$$x_s = \text{const}; \quad y_s = \text{const} \quad (4.9)$$

и центробежные моменты инерции масс звеньев относительно осей x и z , y и z были постоянными:

$$J_{xz} = \text{const}; \quad J_{yz} = \text{const}. \quad (4.10)$$

При соблюдении этих условий будут уравновешены главный вектор сил инерции и главные моменты сил инерции относительно осей x и y . Главный момент сил инерции относительно оси z , перпендикулярной к плоскости движения механизма, уравновешивается моментом движущих сил и сил сопротивлений на главном валу машины.

На практике при уравновешивании механизмов указанные условия (4.9) и (4.10) выполняются частично.

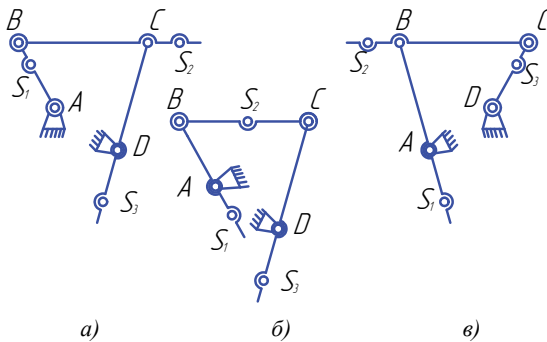


Рис. 4.3

Пусть, например, дан механизм шарнирного четырёхзвенника $ABCD$ (рис. 4.3). Требуется уравновесить только главный вектор сил инерции. Обозначим массы звеньев AB , BC и CD соответственно через m_1 , m_2 и m_3 ; длины звеньев — через l_1 , l_2 и l_3 , а расстояние центров тяжести S_1 , S_2 и S_3 этих звеньев от точек A , B и C — через s_1 , s_2 и s_3 . Для удовлетворения условия (4.9) необходимо, чтобы общий центр S масс механизма находился на прямой AD , либо между точками A и D , либо за ними. В этом случае центр S масс механизма при его движении будет оставаться неподвижным, следовательно, главный вектор сил инерции механизма будет уравновешен.

Массы звеньев и положения центров тяжести их должны быть подобраны так, чтобы

$$m_1 S_1 = -\frac{m_2 \ell_1}{\ell_2} (\ell_2 - S_2); \quad (4.11)$$

$$m_2 S_2 = -\frac{m_3 \ell_2}{\ell_3} (\ell_3 - S_3). \quad (4.12)$$

Если механизм состоит из n подвижных звеньев, то при решении задач о подборе масс механизма, удовлетворяющих условию уравновешенности главного вектора сил инерции механизма, имеем $2n$ неизвестных величин; уравнений же, связывающих эти величины, можно составить $(n - 1)$. После произвольного выбора $(n+1)$ величин остальные величины получают определённые значения. В исследуемом механизме количество подвижных звеньев $n = 3$, количество подбираемых величин $2n = 6$, число же независимых уравнений $n - 1 = 2$. Таким образом, задаваясь, например, значениями m_3 и s_3 , из уравнения (4.12) получаем значение $m_2 s_2$, в котором можно задаваться одним из неизвестных и получать другое. Подставляя полученные значения в уравнение (4.11), определяем значение $m_1 s_1$, в котором также можно задаться одной величиной. Из уравнений (4.11) и (4.12) при различных исходных заданиях можно получить три варианта схем уравновешенного четырёхзвенного механизма (рис. 4.3, a , b , $в$). Следовательно, если считать, что расположение центра тяжести звена за его шарнирами как бы соответствует установке противовеса, то можно сказать, что задачу уравновешивания главного вектора сил инерции механизма шарнирного четырёхзвенника можно решить путём установки противовесов на двух его звеньях.

Аналогичным образом можно решить задачу подбора масс отдельных звеньев для уравнивания шарнирного шестизвенника и любого механизма, образованного путём наложения двухповодковых групп.

На рис. 4.4 показаны схемы симметричных кривошипно-ползунного и шарнирного четырёхзвенного механизмов. В тех случаях, когда размещение звеньев в симметричных механизмах очень громоздко или подбор масс конструктивно нецелесообразен, применяется метод установки противовесов.

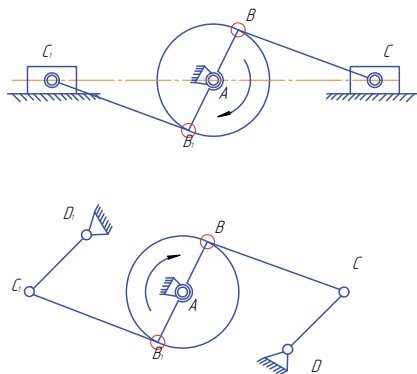


Рис. 4.4

Пусть, например, требуется уравновесить только главный вектор сил инерции кривошипно-ползунного механизма, схема которого изображена на рис. 4.5. Обозначим массы кривошипа 1, шатуна 2 и ползуна 3 через m_1 , m_2 , m_3 и будем считать их сосредоточенными соответственно в центрах тяжести S_1 , S_2 и B звеньев. Устанавливаем на линии AB в точке D противовес и определяем его массу $m_{пр}$ из условия, чтобы центр тяжести масс $m_{пр}$, m_2 и m_3 совпал с точкой A . Из уравнения статических моментов относительно точки A имеем

$$m_3L + m_2a = m_{пр2}c,$$

откуда

$$m_{пр2} = \frac{1}{c}(m_3L + m_2a).$$

Массу $m_{пр1}$ противовеса, установленного в точке C кривошипа, определяем из условия, чтобы центр тяжести масс $m_{пр1}$, m_1

и $m_A = m_{np2} + m_2 + m_3$ совпадал с точкой O . Из уравнения статических моментов относим: $m_{np1} = \frac{1}{s} (m_A R + m_1 l)$. ЭДИМ

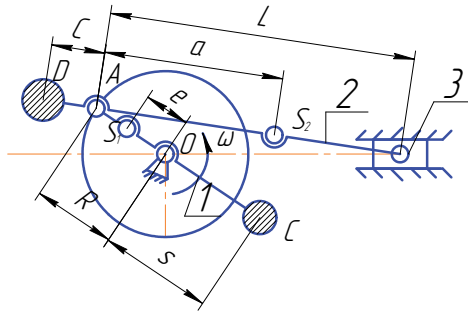


Рис. 4.5

Радиусы s и c противовесов выбираются произвольно. После установки противовесов центр масс механизма во всех его положениях будет совпадать с точкой O , следовательно, будет во всё время работы оставаться неподвижным. Таким образом, два противовеса m_{np1} и m_{np2} полностью уравнивают все силы инерции рассматриваемого механизма. Однако подобное полное уравнивание сил инерции кривошипно-ползунных механизмов на практике применяют редко, так как при малом значении радиуса c масса m_{np2} получается весьма большой, что ведёт к появлению добавочных нагрузок в кинематических парах и звеньях механизма. При большом значении радиуса c сильно увеличиваются габаритные размеры всего механизма. Поэтому часто ограничиваются лишь приближённым уравниванием сил инерции. Так, в кривошипно-ползунных механизмах метод установки противовеса на кривошипе является наиболее распространённым методом приближённого уравнивания сил инерции. В этих механизмах на практике часто применяют уравнивание только массы кривошипа и части массы шатуна.

4.2. Анализ движения механизма под действием сил

4.2.1. Основные режимы движения механизма

При решении некоторых вопросов динамики механизма с одной степенью свободы можно применить закон изменения кинетической энергии, который формулируется так: приращение кинетической энергии механизма на конечном его перемещении равно алгебраической сумме работ всех задаваемых сил:

$$T - T_0 = \sum A,$$

где $T = \sum \frac{mv^2}{2}$ – кинетическая энергия механизма в произвольном положении; $T_0 = \sum \frac{mv_0^2}{2}$ – кинетическая энергия механизма в начальном положении; $\sum A$ – алгебраическая сумма работ всех сил и моментов, приложенных к механизму.

Для плоскопараллельного движения

$$T = \frac{J_S \omega^2}{2} + \frac{mv_S^2}{2},$$

где J_S – момент инерции звена относительно оси, проходящей через центр масс S .

По характеру изменения кинетической энергии полный цикл работы машинного агрегата в общем случае складывается из трех частей: разгона (пуска), установившегося движения и выбега (остановки) (рис. 4.6). Время t_p характеризуется увеличением скорости ведущего звена, а это возможно, когда $A_0 > A_c$, а за время выбега $A_0 < A_c$, т. е. кривая зависимости кинетической энергии в первом случае монотонно возрастает, во втором случае – монотонно убывает.

Установившееся движение является более продолжительным. В течение этого этапа выполняется полезная работа, для совершения которой предназначен механизм. Поэтому полное время установившегося движения может состоять из любого числа циклов движения, соответствующих одному или нескольким оборотам кривошипа.

Имеем два варианта установившегося движения.

Первый вариант: кинетическая энергия T механизма в течение всего режима движения постоянна. Пример: система зубчатых ко-

лес, вращающихся с постоянными угловыми скоростями, обладает постоянной кинетической энергией.

Второй вариант: характеризуется периодичностью движения ведущего вала механизма с небольшими колебаниями T внутри периода. Периодичность может включить один или два оборота кривошипа, например, для двигателя периодичность изменения T – два оборота кривошипа.

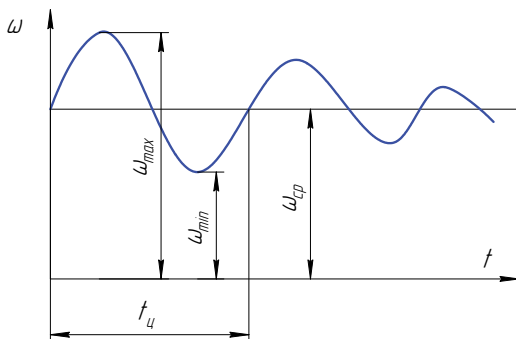


Рис. 4.6

Весь поток энергии, подводимой к машине, а также кинетическая энергия самой машины в процессе ее работы может быть сбалансирована так:

$$A_d - A_{nc} - A_{тр} \pm A_T \pm A_{и} = 0,$$

где A_d – работа сил движущая; A_{nc} – работа сил полезного сопротивления; $A_{тр}$ – работа сил трения; A_T – работа сил тяжести; $A_{и}$ – работа сил инерции.

Для времени установившегося движения, когда в конце цикла и в начале следующего цикла величина скорости одинакова, т. е. работы $A_{и}$ и A_T равны нулю, имеем:

$$A_d = A_{nc} + A_{тр}.$$

Пренебрегая силой трения, имеем $A_d = A_{nc}$.

Это уравнение является основным энергетическим уравнением установившегося периодического движения механизма.

Угловая скорость ведущего звена в пределах цикла установившегося движения в общем случае является величиной переменной.

Изменения угловой скорости звена приведения вызывают в кинематических парах дополнительные (динамические) давления, которые снижают общий КПД машины, надежность ее работы и долговечность. Кроме того, колебания скоростей ухудшают рабочий процесс машины.

Колебание скорости является следствием двух факторов – периодического изменения приведенного момента инерции механизма и периодического характера действия сил и моментов.

Кроме периодических колебаний скоростей в механизме могут происходить колебания и непериодические, т. е. неповторяющиеся, вызываемые различными причинами, например, внезапное изменение нагрузки.

Первый тип колебаний регулируется в пределах допустимой неравномерности движения насаживанием на вал дополнительной массы (маховика).

Во втором случае задачу регулирования решают, устанавливая специальный механизм, называющийся регулятором.

Пределы допускаемого изменения угловой скорости устанавливают опытным путем. Неравномерность движения машины характеризуется отношением абсолютной неравномерности $\omega_{\max} - \omega_{\min}$ к ее средней скорости:

$$\delta = \frac{\omega_{\max} + \omega_{\min}}{\omega_{\text{cp}}} . \quad (4.13)$$

Обычно задают δ и ω_{cp} , где $\omega_{\text{cp}} = \frac{\pi n}{30}$.

Имея следующие соотношения:

$$\begin{cases} \omega_{\text{cp}} = \frac{\omega_{\max} + \omega_{\min}}{2} \\ \delta = \frac{\omega_{\max} - \omega_{\min}}{\omega_{\text{cp}}} \end{cases} , \quad (4.14)$$

решаем совместно два уравнения (4.14) и находим

$$\omega_{\max} = \omega_{\text{cp}} \left(1 + \frac{\delta}{2}\right); \quad \omega_{\min} = \omega_{\text{cp}} \left(1 - \frac{\delta}{2}\right).$$

Периодическая неравномерность хода машины, как правило, представляет вредное явление и может быть допущена для большинства машин лишь в определенных пределах. Эти вредные яв-

ления в машинах выражаются, например, в следующем: рывки при движении транспортных машин, обрыв нити в текстильных машинах, перегревание обмоток электродвигателей, мигание света из-за неравномерности вращения якоря генератора электрического тока, недостаточная чистота и точность обработки поверхностей деталей на металлорежущих станках, неоднородность и неодинаковая толщина сварных швов при сварке с помощью сварочных автоматов, разрыв листа во время вытяжки изделий на прессах и т. п.

Допускаемая неравномерность хода машины задается коэффициентом δ и зависит от назначения машины. Эти величины установлены многолетним опытом эксплуатации машины.

Примеры значений δ

Металлорежущие станки	$\delta = 1/25 \dots 1/50$
Электродвигатели переменного тока	$\delta = 1/200 \dots 1/300$
Сельскохозяйственные машины	$\delta = 1/5 \dots 1/50$
Судовые двигатели	$\delta = 1/20 \dots 1/150$
Авиационные двигатели	$\delta = 1/300$ и менее
Асинхронные двигатели	$\delta = 1/20 \dots 1/30$

Таким образом, ω_{\max} и ω_{\min} отличаются от заданной средней угловой скорости ω_{cp} на $\frac{\delta}{2} \omega_{\text{cp}}$, что при $\delta = 1/25$ составляет всего 2 %, а при $\delta = 1/50$ наибольшее отклонение составит всего 1 % от ω_{cp} . Отсюда видно, что даже при сравнительно больших δ движение ведущего звена машины достаточно равномерно.

Движение ведущего звена тем ближе к равномерному, чем больше приведенный момент инерции или приведенная масса механизма. Увеличение приведенных масс и момента инерции производится практически посадкой на вал машины маховика с определенной массой и моментом инерции.

4.2.2. Приведение масс, сил и моментов

При анализе работы машины и определении закона движения начального звена механизма с одной степенью свободы удобно оперировать не действительными массами, которые движутся с переменными скоростями, а эквивалентными, условно перенесенными на какое-либо звено механизма.

Точно так же силы или моменты, приложенные к отдельным звеньям, могут быть условно заменены силой или моментом, приложенным к какому-либо звену механизма.

Приведенной силой называется такая сила, мощность которой равна сумме мощностей всех сил, приложенных к звеньям.

Звено, к которому приложена приведенная сила, называется звеном приведения.

Пусть на кривошипно-ползунный механизм действуют силы G_2 и P_{nc} (рис. 4.7).

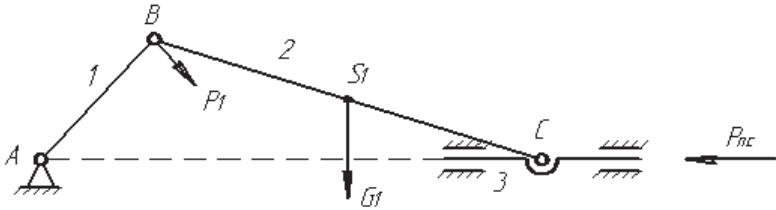


Рис. 4.7

Условно заменим эти две силы приведенной силой $P_{п}$, приложенной в точке B , мощность которой

$$N = P_{п} \cdot v_B, \quad (4.15)$$

где

$$N = \sum N_{pi} = G_1 v_{s1} \cdot \cos \alpha + P_{nc} \cdot v_C, \quad (4.16)$$

то есть сумме мощностей всех сил.

Мощность любой силы, приложенной в i -й точке, исходя из предыдущего раздела может быть определена как момент этой силы относительно конца вектора скорости M_{pi} .

Поэтому

$$P_{п} = \frac{\sum N_{pi}}{v_B} = \frac{\sum M_{pi}}{\omega} = \sum P_i \cdot v_i \cdot \cos \alpha + M_i \cdot \omega_i. \quad (4.17)$$

Мощность можно записать через приведенный момент сил

$$N = M_{п} \omega, \quad (4.18)$$

откуда приведенный момент

$$M_{пp} = \frac{\sum N_{pi}}{\omega} = \frac{\sum P_i \cdot v_i \cdot \cos \alpha}{\omega} + \sum \frac{M_i \cdot \omega_i}{\omega}. \quad (4.19)$$

Приведенная масса есть такая фиктивная масса, сосредоточенная в точке звена приведения, кинетическая энергия которой равна кинетической энергии всего механизма:

$$\frac{m_n \cdot V_B^2}{2} = \Sigma E_i = \Sigma \frac{J_{pi} \cdot \omega_i^2}{2},$$

откуда

$$m_n = \Sigma \frac{J_{pi} \cdot \omega_i^2}{V_B^2},$$

где J_{pi} — приведенный момент инерции звена; ω_i — угловая скорость звена приведения; V_B — скорость точки B звена приведения.

Приведенным к главному валу (звену приведения) **моментом инерции** I_n называется такой условный момент инерции, обладая которым главный вал имеет в данном положении машины кинетическую энергию, равную кинетической энергии всего механизма.

Кинетическая энергия звена приведения равна

$$E_n = \frac{J_n \cdot \omega_n^2}{2} \Sigma E_k = \Sigma \frac{J_i \cdot \omega_i^2}{2} + \Sigma \frac{m_i \cdot v_{si}^2}{2}, \quad (4.20)$$

где I_{pi} — момент инерции i -го звена; ω_i — угловая скорость i -го звена.

Расчетная формула приведенного момента инерции в общем виде

$$J_n = \Sigma \left[J_{si} \left(\frac{\omega_i}{\omega_n} \right)^2 + m_i \left(\frac{v_{si}}{\omega_n} \right)^2 \right]. \quad (4.21)$$

4.2.3. Уравнение движения механизма

Большинство машин работает, как правило, в установившемся режиме, который характеризуется тем, что машина получает от двигателя за один цикл столько энергии, сколько она расходует её за то же время на производство работы, для которой она предназначена.

Циклом называют промежуток времени, по истечении которого все параметры, характеризующие работу машины, повторяются (периодическое повторение скоростей, ускорений, нагрузки и т. п.). Движение звеньев машины, таким образом, носит периодический характер. Понятие об установившемся движении вовсе не означает, что ведущее звено машины движется равномерно.

Рассмотрим уравнение движения звена приведения:

$$M_d^n - M_c^n = J_n \varepsilon + \frac{\omega^2}{2} \cdot \frac{dJ_n}{d\varphi},$$

откуда

$$\varepsilon = \frac{M_d^n - M_c^n - \frac{\omega^2}{2} \cdot \frac{dJ_n}{d\varphi}}{J_n}.$$

Из этого уравнения следует, что для равномерного движения (т. е. когда $\varepsilon = 0$) в любой момент цикла должны соблюдаться условия:

$$J_n = \text{const} \quad \text{и} \quad M_d^n = M_c^n$$

или

$$M_d^n - M_c^n = \frac{\omega^2}{2} \cdot \frac{dJ_n}{d\varphi},$$

т. е. изменения момента должны следовать закону изменения произведения $\frac{\omega^2}{2} \cdot \frac{dJ_n}{d\varphi}$, что на практике не может быть получено простыми средствами.

Таким образом, даже при $M_d^n = M_c^n$, но $J_n = \text{var}$, $\varepsilon \neq 0$, так как в таком случае

$$J_n \varepsilon = -\frac{\omega^2}{2} \cdot \frac{dJ_n}{d\varphi}.$$

Так, кривошип строгального станка, в состав которого входит кулисный механизм, или кривошипного прессы, в состав которого входит кривошипно-ползунный механизм, даже без нагрузки ($M_a^i = \dot{I}_{\dot{n}}^i = 0$) не будут двигаться равномерно.

Равенство моментов на практике соблюдается чрезвычайно редко. Вследствие этих причин установившееся движение машин происходит с периодическим изменением скорости, которая внутри цикла изменяется в пределах $\omega_{\max} \geq \omega \geq \omega_{\min}$ (см. рис. 4.6).

Большинство машин работает, как правило, в установившемся режиме, который характеризуется тем, что машина за один цикл затрачивает такую работу, которую она получает за цикл от двигателя.

4.2.4. Определение момента инерции махового колеса

Физическая роль маховика в машине

Физическую роль маховика в машине можно представить себе следующим образом. Если в пределах некоторого угла поворота начального звена механизма работа движущих сил больше работы сил сопротивления, то начальное звено вращается ускоренно и кинетическая энергия механизма увеличивается.

При отсутствии маховика весь прирост кинетической энергии распределяется между массами звеньев механизма. Маховик увеличивает общую массу механизма, и поэтому при том же увеличении кинетической энергии прирост угловой скорости без маховика будет больше, чем при наличии маховика.

Итак, маховик является аккумулятором кинетической энергии, расходуя ее, когда работа сил сопротивления больше работы движущих сил.

Маховик выполняют в форме сплошного диска или шкива со спицами и массивным ободом и укрепляют на валу машины. Особенно большое значение имеет установка маховика для машин, работающих с резко возрастающей нагрузкой (прессы, дробилки, прокатные станы). В данных машинах накопленная маховиком энергия используется для преодоления повышенных полезных нагрузок без увеличения мощности двигателя.

Определение момента инерции маховика при $J_n = \text{const}$

Задача об удержании скорости ведущего звена в заранее заданных пределах $\omega_{\max} \geq \omega \geq \omega_{\min}$ может быть решена с помощью постановки на одно из звеньев машины, совершающих вращательное движение, диска с необходимым (расчетным) моментом инерции.

Пусть задано δ , $\omega_{\text{ср}}$, $M_c^n(\varphi)$, (φ) и $J_n = \text{const}$.

Последнее означает, что движение всех звеньев связано с движением ведущего звена механизма постоянным передаточным отношением.

Требуется определить такой момент инерции маховика J_M , чтобы скорости ведущего звена не выходили за пределы ω_{\max} и ω_{\min} , которые определяются по формуле

$$\omega_{\min}^{\max} = \omega_{\text{cp}} \left(1 \pm \frac{\delta}{2} \right).$$

В случае $J_n = \text{const}$ эти значения угловой скорости будут соответствовать положениям звена приведения, когда кинетическая энергия механизма будет принимать экстремальные значения, что в общем случае не имеет места при $J_n = \text{const}$.

Отметим, что случай $J_n = \text{const}$ в известном смысле распространяется и на случай, если $J_n = \text{var}$. Дело в том, что в методах Мерцалова и Гутьера, прежде чем рассчитать момент инерции маховика, его кинетическая энергия выделяется из кинетической энергии машины, и таким образом задача сводится к определению момента инерции маховика для системы с $J_n = \text{const}$.

Получим уравнение, с помощью которого можно определить J_n механизма, удовлетворяющий постоянному условию.

В случае $J_n = \text{const}$, $dJ_n/d\varphi = 0$ и дифференциальное уравнение движения машины принимает вид

$$M_d^n - M_c^n = J_n \varepsilon.$$

Так как

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d\omega}{d\varphi} = \omega \frac{d\omega}{d\varphi},$$

то, обозначив

$$M_n^n - M_c^n = M_n,$$

будем иметь

$$M_n = J_n \omega \frac{d\omega}{d\varphi}.$$

Интегрируя это уравнение на участке углов поворота звена приведения от φ_i до φ_k , будем иметь

$$\int_{\varphi_i}^{\varphi_k} M_n d\varphi = J_n \int_{\varphi_i}^{\varphi_k} \omega d\omega \quad \text{или} \quad \Delta T_{\varphi_i \sim \varphi_k} = J_n \frac{\omega_k^2 - \omega_i^2}{2}. \quad (4.22)$$

Так как полученное равенство справедливо для любых значений угла поворота главного вала, то выберем углы поворота φ_i и φ_k так, чтобы они соответствовали экстремальным значениям угловых скоростей звена приведения. Пусть φ_i соответствует ω_{\min} , а φ_k — ω_{\max} . Тогда $\Delta T_{\varphi_i \sim \varphi_k} = T_{\max} - T_{\min} = \Delta T_{\text{наиб}}$ представит наиболь-

ший перепад кинетической энергии машины за цикл, и уравнение (4.22) запишется так:

$$\Delta T_{\text{наиб}} = J_n \frac{\omega_{\text{max}}^2 - \omega_{\text{min}}^2}{2} = J_n \frac{(\omega_{\text{max}} - \omega_{\text{min}})(\omega_{\text{max}} + \omega_{\text{min}})\omega_{\text{cp}}}{2\omega_{\text{cp}}} = J_n \omega_{\text{cp}} \delta,$$

откуда

$$J_n = \frac{\Delta T_{\text{наиб}}}{\omega_{\text{cp}}^2 \delta}. \quad (4.23)$$

По этой формуле может быть определен приведенный момент инерции механизма при заданной нагрузке, ω_{cp} и δ . Как видим, для совершенно равномерного движения звена приведения ($\delta = 0$) $J_n = \infty$.

Заметим, что вид этой формулы сохраняется и в том случае, если $J_n = \text{var}$, так как из кинетической энергии механизма выделяется кинетическая энергия маховика, у которого $J_n = \text{const}$, и тогда $\Delta T_{\text{наиб}}$ будет отнесено к маховику. Можно так же показать, что при одной и той же нагрузке потеря скорости звена приведения будет тем меньше, чем больше момент инерции звена приведения:

$$\Delta T_{\text{наиб}} = J_n \frac{\omega_{\text{max}}^2 - \omega_{\text{min}}^2}{2} = J_n \frac{\omega_{\text{max}} + \omega_{\text{min}}}{2} (\omega_{\text{max}} - \omega_{\text{min}}) = J_n \omega_{\text{cp}} \Delta \omega_{\text{наиб}},$$

откуда

$$\Delta \omega_{\text{наиб}} = \frac{\Delta T_{\text{наиб}}}{J_n \omega_{\text{cp}}}.$$

Эта зависимость оправдывает наше утверждение, т. е., чем больше инерционность механизма, тем меньше потери скорости. Заданного значения δ добиваются путем постановки на одно из вращающихся звеньев механизма маховика с требуемым приведенным к звену приведения моментом инерции, который вычисляется из условия

$$J_M = J_n - \sum_1^n J_{ni}^{\text{зв}},$$

где J_M – приведенный к звену приведения момент инерции маховика; $\sum_1^n J_{ni}^{\text{зв}}$ – сумма приведенных к звену приведения моментов инерции всех звеньев механизма (без маховика); J_n – расчетный приведенный момент инерции звена приведения, вычисленный по формуле (4.23).

Обычно нагрузка на машину задается в виде графика приведенных моментов сил сопротивления, и по этой нагрузке подбирается соответствующий двигатель, момент которого задается в виде графика приведенных к звену привода движущих сил. Интегрируя эти графики на протяжении одного цикла, получают работу сил движущих и сил сопротивления за цикл (рис. 4.8). Для установившегося движения A_d цикла равна A_c цикла – это является основным условием установившегося движения и служит основанием для определения мощности двигателя.

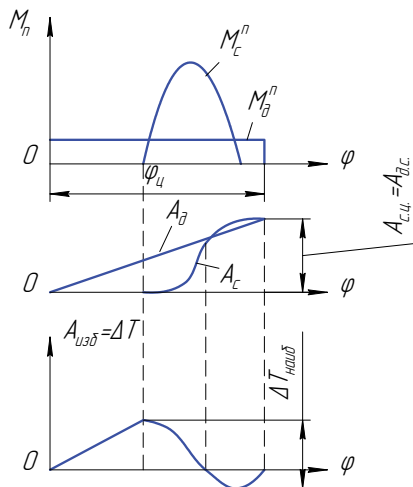


Рис. 4.8

Затем, вычитая из ординат графика $A_d(\varphi)$ ординаты графика $A_c(\varphi)$, получают график избыточных работ или, что одно и то же, график приращений кинетической энергии машины; по нему определяют $\Delta T_{\text{наиб}}$, которое подставляют в формулу (4.23).

Отметим, что операцию вычитания можно произвести сразу на графике моментов и, минуса при этом график работ, получить график $\Delta T(\varphi)$. Это следует из того, что интеграл суммы равен сумме интегралов.

Как видим, M_d^n и M_c^n имеют неодинаковые значения в различных положениях механизма. Маховик накапливает кинетическую энергию на участках цикла, где $M_d^n > M_c^n$, и поэтому скорость звена

приведения возрастает. На участках же, где $M_0^n < M_c^n$, маховик и другие звенья механизма отдают кинетическую энергию, снижая скорость, и дополняют момент движущих сил до равенства с моментом сил сопротивления за счет инерционного момента сил тормозящихся масс. Таким образом, маховик выполняет роль аккумулятора кинетической энергии, который накапливает и отдает ее в соответствующих положениях механизма, снижая потерю скорости звена приведения.

Отметим следующее.

1. Для определения $\Delta T_{\text{наиб}}$ нет необходимости иметь график полной кинетической энергии машины. Достаточно иметь график ее приращений.

2. Нет необходимости вычислять предельные скорости ω_{max} и ω_{min} , кроме отдельных специальных случаев, когда по ним определяется δ (например, определение δ , если машина приводится от асинхронного двигателя).

3. При постоянном приведенном моменте инерции механизма и постоянной нагрузке $\Delta T = 0$ при любом φ , в этом случае маховик не нужен.

4. После того как найден $J_n = \frac{\Delta T_{\text{наиб}}}{\omega_{\text{cp}}^2 \delta}$, можно построить график полной кинетической энергии машины $T(\varphi)$ (рис. 4.9), следовательно, могут быть определены действительные угловые скорости звена приведения в любом положении механизма. Положение оси абсцисс графика полной кинетической энергии машины определяется из тех соображений, что известны значения полной кинетической энергии при экстремальных значениях угловых скоростей звена приведения:

$$T_{\text{max}} = \frac{J_n \omega_{\text{max}}^2}{2}; \quad T = (OA)\mu_T,$$

откуда

$$(OA) = \frac{T_{\text{max}}}{\mu_T} = \frac{J_n \omega_{\text{max}}^2}{2\mu_T}.$$

5. Форма кривой графика $T(\varphi)$ определяется внешними силами, действующими на механизм, и при отсутствии последних будет представлена прямой, параллельной оси абсцисс, для любого механизма независимо от его структуры как при $J_n = \text{const}$, так и при $J_n = \text{var}$.

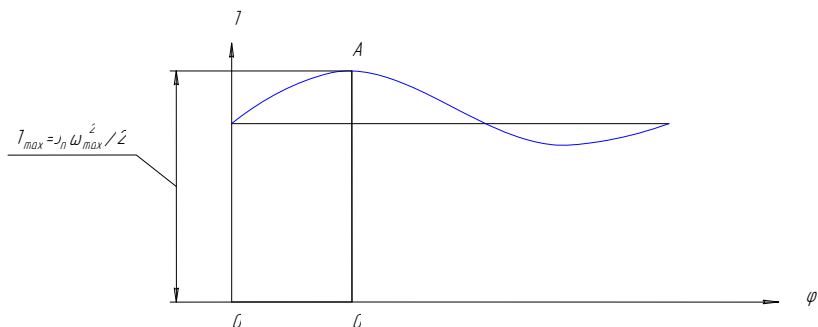


Рис. 4.9

Как отмечалось выше, задача об удержании скорости ведущего звена машины в заранее заданных пределах $\omega_{\max} \geq \omega \geq \omega_{\min}$ может быть решена с помощью постановки на одно из звеньев, совершающих вращательное движение, маховика с необходимым моментом инерции.

Покажем, как рассчитать δ для асинхронного двигателя.

Из технического задания на проектирование машины обычно бывают известными производительность машины, механическая характеристика силы сопротивления и тип двигателя.

В подавляющем большинстве случаев в качестве двигателя принимается асинхронный электродвигатель как наиболее простой и дешевый.

По заданной производительности машины рассчитывается средняя угловая скорость $\omega_{\text{ср}}$ главного вала машины, а затем определяется работа силы сопротивления за цикл и мощность двигателя:

$$N_{\text{ср}} = \frac{A_{\text{с.ц}}}{t_{\text{ц}}} = \frac{A_{\text{с.ц}} \omega_{\text{ср}}}{\Phi_{\text{ц}}}.$$

После того как проведен энергетический расчет машины и определена мощность электродвигателя, производится расчет момента инерции маховика. Для привода проектируемой машины по каталогу можно выбрать электродвигатели различных типов с одной и той же мощностью. Например, для привода машин с неравномерной и пиковой нагрузками применяются электродвигатели типов АО и АОС. Покажем, как выбор того или иного типа электродвига-

теля влияет на величину коэффициента неравномерности движения машины, а следовательно, на размеры ее маховика.

Исходя из данных механической характеристики асинхронного электродвигателя (рис. 4.10) можно установить математическую связь между номинальным скольжением ротора электродвигателя и коэффициентом неравномерности движения машины.

С достаточной для практики точностью можно принять, что устойчивая часть механической характеристики асинхронных двигателей прямолинейна, тогда из подобия треугольников имеем:

$$\frac{M_{кр}}{M_n} = \frac{\omega_c - \omega_{кр}}{\omega_c - \omega_n} = \frac{\frac{\omega_c - \omega_{кр}}{\omega_c}}{\frac{\omega_c - \omega_n}{\omega_c}} = \frac{S_{кр}}{S_n} = \lambda,$$

где $M_{кр}$ — критический момент, при котором двигатель переходит на неустойчивую часть механической характеристики; M_n — номинальный момент на валу электродвигателя; ω_c — синхронная угловая скорость ротора электродвигателя; ω_n — номинальная угловая скорость электродвигателя; $\omega_{кр}$ — критическая угловая скорость ротора электродвигателя; $S_{кр}$ — критическое скольжение ротора электродвигателя, определяемое равенством $S_{кр} = \frac{\omega_c - \omega_{кр}}{\omega_c}$; S_n — номинальное скольжение ротора электродвигателя, определяемое равенством $S_n = \frac{\omega_c - \omega_n}{\omega_c}$; λ — коэффициент опрокидывания.

Из таблицы технических данных асинхронных электродвигателей с короткозамкнутым ротором общего назначения следует, что для двигателей типа АО (электродвигатели в закрытом обдуваемом исполнении) с синхронным числом оборотов ротора, равным 1000 об./мин, коэффициент опрокидывания колеблется в пределах $\lambda = 1,8...2,2$, а для двигателей АОС (электродвигатели с повышенным скольжением в закрытом обдуваемом исполнении) при том же значении синхронных чисел оборотов коэффициент опрокидывания лежит в пределах $\lambda = 2,2...2,6$.

В соответствии с этим рассмотрим два случая, предварительно заметив, что в качестве средней угловой скорости принята номи-

нальная угловая скорость ротора электродвигателя, и поэтому предельные значения угловых скоростей ротора ω_{\max} и ω_{\min} должны симметрично располагаться по отношению к его номинальной угловой скорости $\omega_{\text{н}} = \omega_{\text{ср}}$.

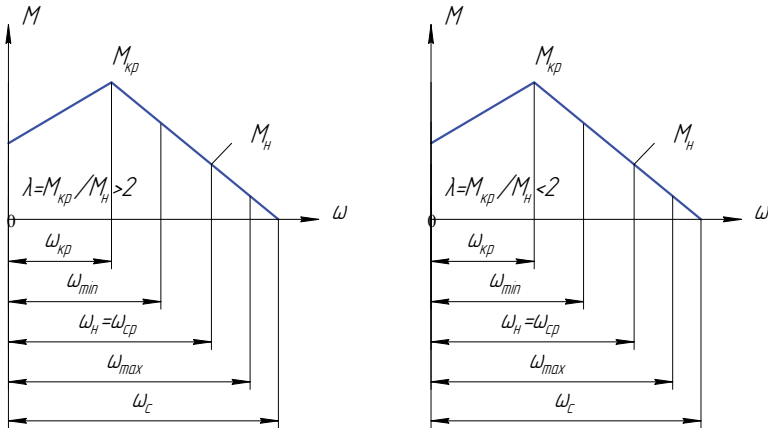


Рис. 4.10

Случай 1. Этот случай соответствует коэффициенту опрокидывания $\lambda \geq 2$, тогда $\omega_{\min} > \omega_{\text{кр}}$, а максимальное значение угловой скорости принимаем равным синхронной угловой скорости. Исходя из этих соображений, находим предельные угловые скорости ротора:

$$\omega_{\max} < \omega_{\text{с}};$$

$$\omega_{\min} = \omega_{\text{н}} - (\omega_{\text{с}} - \omega_{\text{н}}) = 2\omega_{\text{н}} - \omega_{\text{с}}.$$

Далее определяем коэффициент неравномерности движения машины:

$$\delta = \frac{\omega_{\max} - \omega_{\min}}{\omega_{\text{ср}}} = \frac{\omega_{\text{с}} - (2\omega_{\text{н}} - \omega_{\text{с}})}{\omega_{\text{н}}} = \frac{2\omega_{\text{с}} - 2\omega_{\text{н}}}{\omega_{\text{н}}} = \frac{2(\omega_{\text{с}} - \omega_{\text{н}})}{\omega_{\text{с}}} = 2 \frac{S_{\text{н}}\omega_{\text{с}}}{\omega_{\text{с}}}$$

Так как $\omega_{\text{н}} = \omega_{\text{с}} - S_{\text{н}}\omega_{\text{с}} = \omega_{\text{с}}(1 - S_{\text{н}})$, то

$$\delta = \frac{S_{\text{н}}}{1 - S_{\text{н}}}.$$

Случай 2. Этот случай соответствует коэффициенту опрокидывания $\omega < 2$, тогда $\omega_{\max} < \omega_c$, а минимальное значение угловой скорости принимаем равной критической угловой скорости ротора. Как и прежде, находим предельные значения угловых скоростей ротора:

$$\begin{aligned}\omega_{\min} &= \omega_{\text{кр}}; \\ \omega_{\max} &= \omega_{\text{н}} + (\omega_{\text{н}} - \omega_{\text{кр}}) = 2\omega_{\text{н}} - \omega_{\text{кр}}.\end{aligned}$$

Далее определяем коэффициент неравномерности движения машины:

$$\begin{aligned}\delta &= \frac{\omega_{\max} - \omega_{\min}}{\omega_{\text{ср}}} = 2 \frac{\omega_{\text{н}} - \omega_{\text{кр}} - \omega_{\text{кр}}}{\omega_{\text{н}}} = 2 \frac{\omega_{\text{н}} - \omega_{\text{кр}}}{\omega_{\text{н}}} = \\ &= 2 \left(1 - \frac{\omega_{\text{кр}}}{\omega_{\text{н}}} \right) = 2 \left(1 - \frac{\omega_c (1 - S_{\text{кр}})}{\omega_c - (1 - S_{\text{н}})} \right) = 2 \left(1 - \frac{1 - S_{\text{кр}}}{1 - S_{\text{н}}} \right) = 2 \frac{S_{\text{кр}} - S_{\text{н}}}{1 - S_{\text{н}}}.\end{aligned}$$

Итак,

$$\delta = 2 \frac{S_{\text{кр}} - S_{\text{н}}}{1 - S_{\text{н}}}. \quad (4.24)$$

Полученные в обоих случаях δ являются одновременно и критическими значениями.

В качестве примера возьмем два электродвигателя одинаковой мощности и с одинаковыми синхронными числами оборотов ротора, но разных типов: двигатель типа АО мощностью 40 кВт и синхронным числом оборотов ротора, равным 1000 об./мин, и двигатель типа АОС с теми же показателями. Для обоих двигателей коэффициент опрокидывания $\lambda > 2$, поэтому коэффициент неравномерности движения вычисляем по формуле (4.24). Для двигателя типа АО получим $\delta = 0,0204$, а для типа двигателя АОС $\delta = 0,087$.

Рассматривая эти результаты видим, что при всех прочих равных условиях момент инерции маховика, работающего с двигателем типа АО, должен быть в 4,3 раза больше момента инерции маховика, работающего с двигателем типа АОС.

Надо иметь в виду, что двигатель никогда не доведет угловую скорость маховика до значения, соответствующего синхронной скорости ротора, так как в машине всегда присутствуют вредные сопротивления (трение, гидравлические сопротивления смазки, сопротивление воздуха и т. п.). В силу этих причин $\omega_{\max} > \omega_c$, и при определении δ следует всегда вводить на это некоторую поправку.

Кроме того, нельзя доводить значение ω_{\min} до критической скорости, и поэтому должно иметь место следующее соотношение: $\omega_{\text{кр}} < \omega_{\min}$.

**Технические данные асинхронных электродвигателей
с короткозамкнутым ротором общего назначения
(синхронное число оборотов ротора 1500 об./мин)**

Номинальная мощность кВт	Тип АО – электродвигатели в закрытом обдуваемом исполнении			Тип АОС - электродвигатели с повышенным скольжением в закрытом обдуваемом исполнении		
	Номинальное число оборотов ротора об/мин	Коэффициент опрокидывания	Номинальное скольжение	Номинальное число оборотов ротора об/мин	Коэффициент опрокидывания	Номинальное скольжение
1,0	1410	2,0	0,060	1300	2,3	0,133
1,7	1420	2,0	0,053	1300	2,3	0,133
2,8	1420	2,0	0,053	1300	2,3	0,133
4,5	1440	2,0	0,040	1335	2,3	0,110
7,0	1440	2,0	0,040	1335	2,3	0,110
10	1460	2,3	0,027	1350	2,5	0,100
14	1460	2,3	0,027	1350	2,5	0,100
20	1460	2,3	0,027	1350	2,5	0,100
28	1460	2,3	0,027	1365	2,6	0,090
40	1470	2,3	0,020	1380	2,6	0,080
55	1470	2,3	0,020	1395	2,6	0,070
75	1470	2,3	0,020	1395	2,6	0,070
100	1470	2,3	0,020	1395	2,6	0,070

**Определение угловой скорости главного звена
при заданном приведенном моменте**

Пусть для машины задан закон изменения приведенного момента:

$$M_d = f(\varphi) \text{ и } M_c = f(\varphi) = \text{const.}$$

Согласно закону сил изменение кинетической энергии механизма равно работе внешних сил:

$$E_1 - E_0 = A(\varphi) = \int_0^{\varphi} (M_d + M_c) d\varphi, \quad (4.25)$$

где E_0 – кинетическая энергия механизма в начальный момент; $A(\varphi)$ – работа внешних сил, произведенная внешними силами движущими и силами сопротивления за время поворота начального звена на угол φ .

После построения диаграммы избыточного момента нетрудно построить диаграмму изменения кинетической энергии

$$E_1 - E_0 = A(\varphi) = \int_0^{\varphi} M(d\varphi).$$

Интегральную кривую можно построить методом графического интегрирования (рис. 4.11):

$$A_d = \int_0^{\varphi} M_d(d\varphi) \text{ и } A_c = \int_0^{\varphi} M_c(d\varphi).$$

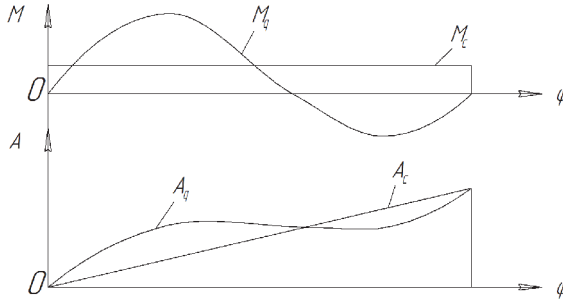


Рис. 4.11

Работа A_d есть площадь между кривой M_d и осью φ .

Работа A_c есть площадь между кривой M_c и осью φ .

$$E_2 - E_1 = A_d - A_c.$$

Для нахождения реальной угловой скорости главного звена используем уравнение (4.20):

$$E = \frac{I_n \omega^2}{2},$$

откуда

$$\omega^2 = \frac{2E}{J_n}. \quad (4.26)$$

Строим в масштабе μ_p диаграмму приведенного момента инерции $J_n(\varphi)$ (рис. 4.12).

Построением добиваемся исключения параметра φ . Получаем замкнутую кривую $\Delta E = f(I_n)$.

Отметим произвольную точку K и соединим ее с началом координат:

$$\operatorname{tg} \Psi = \frac{\overline{E_k}}{J_{nk}} = \frac{E_k \cdot \mu_I}{J_{nk} \cdot \mu_E}. \quad (4.27)$$

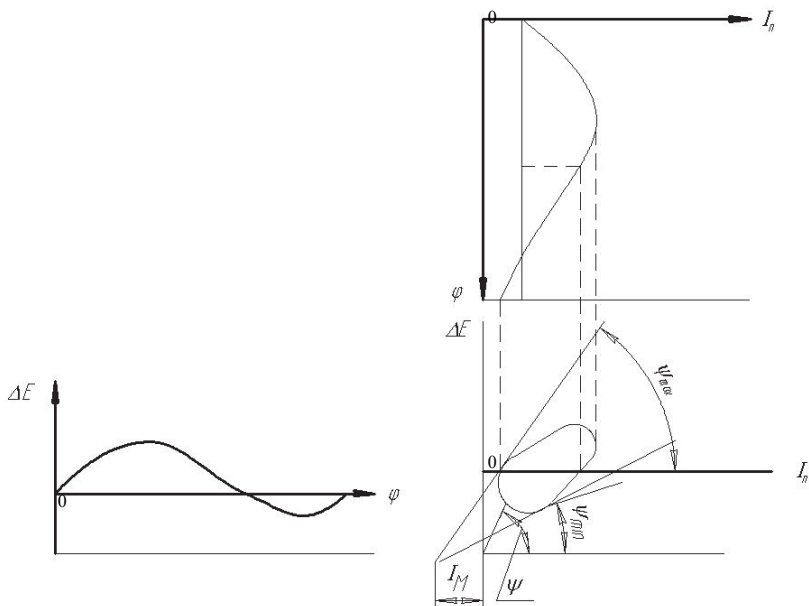


Рис. 4.12

Из уравнений (4.26) и (4.27)

$$\omega^2 = 2 \operatorname{tg} \Psi \frac{\mu_E}{\mu_I}.$$

Подсчитав для каждого положения ω , можно построить график $\omega = f(\varphi)$ (рис. 4.13).

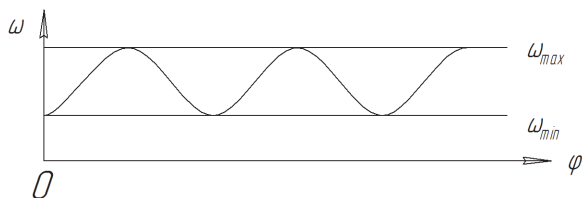


Рис. 4.13

$$\omega_{\max} = \sqrt{\frac{2\mu_E}{\mu_I} \cdot \operatorname{tg} \Psi_{\max}}; \quad (4.28)$$

$$\omega_{\min} = \sqrt{\frac{2\mu_E}{\mu_I} \cdot \operatorname{tg} \Psi_{\min}}; \quad (4.29)$$

$$\delta = \frac{\omega_{\max} - \omega_{\min}}{\omega_{\text{cp}}}. \quad (4.30)$$

Отсюда

$$\omega_{\max} = \omega_{\text{cp}} \cdot \left(1 + \frac{\delta}{2}\right) \quad \text{и} \quad \omega_{\max}^2 \cong \omega_{\text{cp}}^2 (1 + \delta).$$

$$\omega_{\min} = \omega_{\text{cp}} \cdot \left(1 - \frac{\delta}{2}\right) \quad \text{и} \quad \omega_{\min}^2 \cong \omega_{\text{cp}}^2 (1 - \delta).$$

Такое допущение можно сделать, так как δ — очень мало.

Тогда

$$\text{tg}\Psi_{\max} = \frac{\omega_{\text{cp}}^2 \cdot (1 + \delta) \cdot \mu_I}{2\mu_E}; \quad (4.31)$$

$$\text{tg}\Psi_{\min} = \frac{\omega_{\text{cp}}^2 \cdot (1 - \delta) \cdot \mu_I}{2\mu_E}. \quad (4.32)$$

При заданных ω_{cp} и δ можно определить Ψ_{\max} и Ψ_{\min} .

Если при этом уже построены диаграммы $E = f(J_n)$, то можно определить дополнительный момент инерции, который необходимо добавить к механизму с целью получения механизма с лучшим коэффициентом неравномерности.

Под углами Ψ_{\max} и Ψ_{\min} проводим лучи касательно к кривой $E = f(J_n)$. В точке пересечения этих лучей получим новую систему координат с новым значением J_n и E .

Определение момента инерции маховика в случае, когда $J_n = \text{var}$

Трудность решения задачи о маховике в этом случае заключается в том, что положения механизма с экстремальными значениями кинетической энергии и угловых скоростей в общем случае не совпадают и, следовательно, нет основания полагать, что наибольшему перепаду энергии $\Delta T_{\text{наиб}}$ соответствуют положения звена приведения, где имеют место ω_{\max} и ω_{\min} , тогда $\Delta T_{\text{наиб}} \neq J_n \omega_{\text{cp}}^2 \delta$, как это было при $J_n = \text{const}$.

Тогда, представляя приведенный момент инерции состоящим из постоянной и переменной частей, запишем:

$$J_n = J_M + J_{\text{зв}},$$

где J_n — приведенный момент инерции механизма; J_M — приведенный момент инерции маховика; $J_{\text{зв}}$ — приведенный момент инерции звеньев, движение которых связано с движением звена приведения

переменным передаточным отношением (т. е. звеньев, направления движений которых изменяются).

Заметим, что кинетическая энергия маховика будет иметь экстремальные значения в тех же положениях звена приведения, где будут иметь место экстремальные значения его угловой скорости:

$$\Delta T_{\text{наиб}} = T_{M \text{ max}} - T_{M \text{ min}} = J_n \frac{\omega_{\text{max}}^2 - \omega_{\text{min}}^2}{2},$$

где индекс M означает принадлежность к маховику.

Поэтому если из кинетической энергии машины выделить кинетическую энергию маховика T_M , то можно определить наибольший перепад его энергии, а затем определить и его необходимый момент инерции тем же методом, как это делалось для машин с $J_n = \text{const}$.

Интегральные методы расчета маховика, основанные на решении уравнения движения машины, представленного в виде закона изменения кинетической энергии, отличаются друг от друга способами определения наибольшего перепада энергии маховика $\Delta T_{\text{наиб}}$.

Здесь существуют принципиально точные методы расчета без использования каких-либо упрощенных предположений и приближенные методы, использующие эти предположения.

Метод Н.И. Мерцалова (приближенный метод)

Предложен в 1914 году. Основан на выделении из кинетической энергии машины кинетической энергии маховика, имеющего постоянный приведенный момент инерции $J_M = \text{const}$.

Пусть задана нагрузка на машину в виде зависимостей $M_c^n(\varphi)$ и $M_o^n(\varphi)$. Тогда, интегрируя уравнение движения, получим:

$$T = T_0 + \Delta T. \quad (4.33)$$

Представляя T состоящей из энергии T_M и $T_{\text{зв}}$ звеньев, будем иметь:

$$T_M + T_{\text{зв}} = T_0 + T.$$

Выделяя из кинетической энергии механизма энергию T_M , получим:

$$T_M = T_0 + T - T_{\text{зв}}.$$

Представим теперь T_M таким образом: $T_M = T_0 + T_M$ (за T_0 можно принять любое значение кинетической энергии и вести от него отсчет приращений ΔT_M).

Для удобства примем T_0 равным его значению в выражении (4.33), т. е. отсчет значений ΔT_M будем производить от той же оси абсцисс, что и отсчет приращений кинетической энергии машины. Тогда:

$$T_0 + T_M = T_0 + \Delta T - T_{зв}, \text{ или } \Delta T_M = \Delta T - T_{зв}.$$

Таким образом, чтобы построить график $\Delta T_M(\varphi)$, надо иметь график $\Delta T(\varphi)$ и кинетическую энергию звеньев $T_{зв}(\varphi)$

$$T_{зв} = \frac{J_{зв} \omega^2}{2}.$$

График $\Delta T(\varphi)$ получим, интегрируя диаграмму моментов.

Точки B и D (рис. 4.14) приближенно соответствуют максимальному и минимальному значениям кинетической энергии маховика T_{Mmax} и T_{Mmin} соответственно.

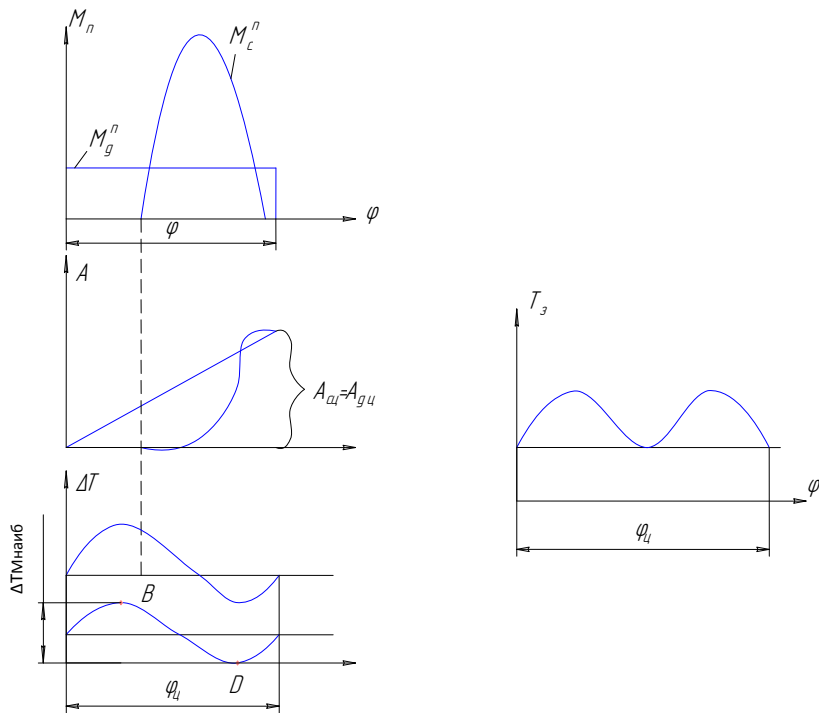


Рис. 4.14

Далее надо построить график $T_{зв}(\varphi) = \frac{J_{зв}\omega_{ср}^2}{2}$, однако мы не предполагаем истинными значениями угловых скоростей и поэтому не можем построить этот график точно. Но, принимая во внимание, что при задаваемых значениях коэффициента неравномерности хода машины δ истинные скорости машины будут очень мало отличаться от средней $\omega_{ср}$, можно построить этот график приближенно по зависимости

$$J_{зв}(\varphi) = \frac{J_{зв}\omega_{ср}^2}{2}.$$

Тогда, вычитая из ординат графика $\Delta T(\varphi)$ ординаты графика $T_{зв}(\varphi)$, получим график $\Delta T_M(\varphi)$, по которому графически легко найти приближенное значение наибольшего перепада кинетической энергии маховика $\Delta T_{Mнаиб}$, а затем и его момент инерции:

$$J_M = \frac{\Delta T_{Mнаиб}}{\omega_{ср}^2 \delta}.$$

Метод Б.М. Гутьяра (точный метод)

Этот метод был предложен в 1939 году. Ход рассуждений, встречающийся у Мерцалова, применим и в методе Гутьяра, однако из графика $\Delta T(\varphi)$ будем вычитать энергию звеньев, вычисленную по формуле

$$T_{зв}(\varphi) = \frac{J_{зв}\omega_{max}^2}{2},$$

тогда

$$\Delta T_M = \Delta T - \frac{J_{зв}\omega_{max}^2}{2}.$$

Очевидно, что в этом случае мы вычитаем завышенные по абсолютной величине значения ординат графика $T_{зв}(\varphi)$, так как из $\Delta T(\varphi)$ мы вычитаем величины большие, чем следует по отношению к истинному значению ординат, которые получились бы, если бы мы вычитали:

$$T_{зв} = \frac{J_{зв}\omega^2}{2},$$

где ω – истинное значение угловой скорости звена приведения.

Определим, на сколько завышены по абсолютной величине ординаты графика $\Delta T_M(\varphi)$.

Нам следовало вычитать

$$T_{зв} = \frac{J_{зв} \omega^2}{2},$$

а мы вычитаем

$$T_{зв} = \frac{T_{зв} \omega_{\max}^2}{2}.$$

Следовательно, в каждое положение нами внесена ошибка:

$$\Delta = \frac{J_{зв} \omega_{\max}^2}{2} - \frac{J_{зв} \omega^2}{2} = \frac{J_{зв}}{2} (\omega_{\max}^2 - \omega^2).$$

$J_{зв}$ выносится за скобки, так как это приведенный момент инерции звеньев в одном и том же положении.

Однако в положении звена приведения, где $\omega = \omega_{\max}$, ошибка $\Delta = 0$. Значит, в этом положении мы имеем истинное значение ΔT_M . Этому положению соответствует

$$T_{M \min} = \frac{J_M \omega_{\min}^2}{2}.$$

В результате построения кривых 1 и 2 (рис. 4.15) получим точки A и B , соответствующие максимуму и минимуму кинетической энергии маховика $T_{M \max}$ и $T_{M \min}$.

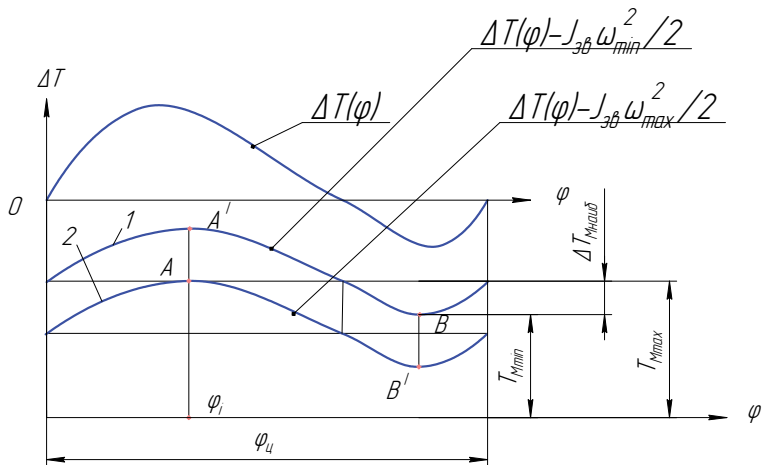


Рис. 4.15

Имея эти точки A и B на графике, находим точное значение наибольшего перепада кинетической энергии маховика $\Delta T_{\text{Мнаиб}}$ и вычисляем момент инерции маховика:

$$J_M = \frac{\Delta T_{\text{Мнаиб}}}{\omega_{\text{ср}}^2 \delta}.$$

Примечание 1. Все ординаты графиков в одном и том же положении механизма

$$T_{\text{зв(max)}} = \frac{J_{\text{зв}} \omega_{\text{max}}^2}{2} \quad \text{и} \quad T_{\text{зв(min)}} = \frac{J_{\text{зв}} \omega_{\text{min}}^2}{2}$$

связаны зависимостью:

$$\frac{T_{\text{зв(max)}}}{T_{\text{зв(min)}}} = \frac{\omega_{\text{max}}^2}{\omega_{\text{min}}^2} = c = \text{const}.$$

Примечание 2. Учитывая пункт 1 примечания, можно строить только одну кривую, например $T_{\text{зв(min)}}(\varphi)$ и вносить соответствующую поправку в точке A' , так как экстремальные значения для обеих кривых будут лежать на одной и той же ординате, т. е. точка A' должна быть перенесена в точку A , соответствующую истинному минимуму энергии маховика.

Таким образом, вместо построения кривой $\Delta T(\varphi) - \frac{J_{\text{зв}} \omega_{\text{max}}^2}{2}$ на всём интервале, равном циклу, следует определить точку A по выражению:

$$\Delta T(\varphi_i) - \frac{J_{\text{зв}}(\varphi_i) \omega_{\text{max}}}{2},$$

где φ_i — угол, определяющий положение звена приведения, в котором кинетическая энергия будет максимальной.

4.2.5. Методика определения момента инерции махового колеса

Рассмотрим типичный случай задания сил.

Заданы движущие силы и силы тяжести звеньев. Приведенный момент всех сил сопротивления — величина постоянная.

Последовательность выполнения работы

Используя планы аналогов скоростей, определим приведенные моменты M_d и M_c для вычерченных положений механизма (отдельно от каждой силы).

Выбрав масштабы μ_φ и μ_M , строим диаграммы $M_\partial = M(\varphi)$ и $M_{G_i} = M(\varphi)$ (рис. 4.16, а).

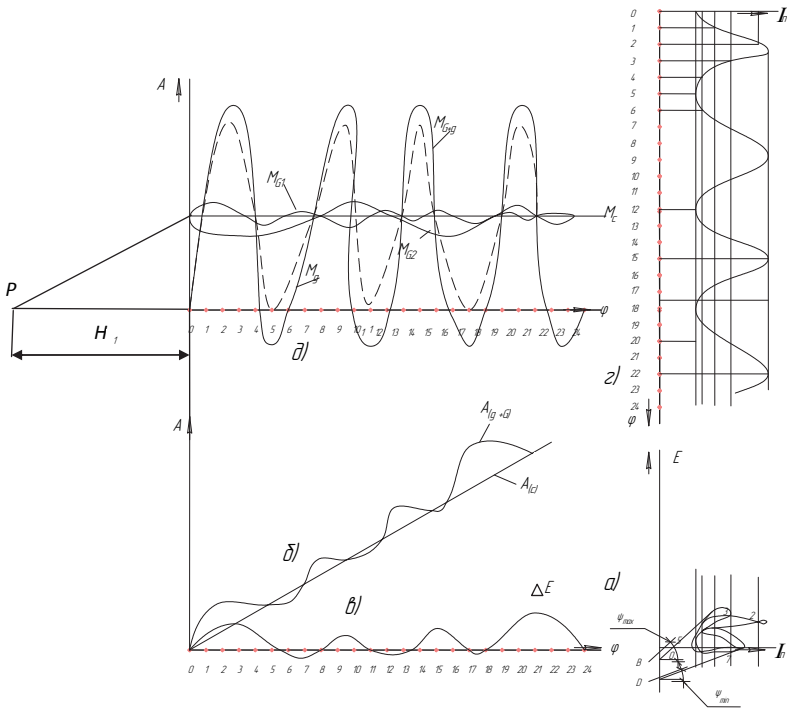


Рис. 4.16

Строим суммарный график $(M_\partial + M_{G_i}) = M(\varphi)$.

Графическим интегрированием (при полюсном расстоянии H_1) переходим от диаграммы $(M_\partial + M_C)$ к диаграмме $(A_\partial \pm A_C)$ с масштабом $\mu_A = \mu_\varphi \cdot \mu_M \cdot H_1$ (рис. 4.16, б).

Так как приведенный момент M_{np} постоянен, то его работа пропорциональна углу поворота φ . С другой стороны, его работа за период установившегося движения должна равняться сумме работ $A_\partial \pm A_C$, изображенной на рис. 4.16, б. Соединив точки O и C прямой, получим диаграмму $A_C - \varphi$.

Графическим дифференцированием переходим от диаграммы $A_C - \varphi$ к $M_C - \varphi$ при том же полюсном расстоянии H_1 . Получаем прямую горизонтальную линию $M_C - \varphi$ (рис. 4.16, д).

Откладываем разность ординат диаграмм $(A_o \pm A_C) - \varphi$ и $A_C - \varphi$ вверх или вниз от оси абсцисс в зависимости от ее знака и строим диаграмму $\Delta E - \varphi$ (рис. 4.16, е), причем $\mu_E = \mu_A$.

Используя данные величин моментов инерции звеньев, масс звеньев, строим диаграмму $J_n - \varphi$ в масштабе μ_n (рис. 4.16, з)

Графически исключая угол φ , строим диаграмму $\Delta E = J_n$ (рис. 4.16, а). Эта диаграмма имеет вид замкнутой кривой, которая может иметь петлю, если графики $\Delta E - \varphi$ и $J_n - \varphi$ несимметричны.

По формулам (4.31) и (4.32) определяем Ψ_{\max} и Ψ_{\min} . Коэффициент неравномерности должен быть задан либо его определяют по данным учебника Артоболевского в зависимости от типа машины.

Проводим касательные к кривой $\Delta E - J_n$ под углом Ψ_{\max} и Ψ_{\min} к оси I_n и отсекаем ими на оси ординат отрезок BD .

Определяем момент инерции маховика:

$$J_M = \frac{\overline{BD}}{\omega_{\text{ср}}^2 \cdot \delta} \cdot \mu_E, \quad (4.34)$$

где $\mu_E = \mu_A = \mu_M \cdot \mu_\varphi \cdot H_1$.

Определяем маховой момент. Маховым моментом называют произведение GD^2 , где G – вес обода маховика; D – средний диаметр маховика, м:

$$J_M = \frac{GD^2}{4g}, \quad (4.35)$$

где g – ускорение силы тяжести, м/с².

Отсюда $GD^2 = J_M \cdot 4g$.

Зная маховой момент, можно задаться диаметром D из конструктивных соображений, затем определить вес маховика, или наоборот.

Соображения экономического характера:

- 1) излишнее уменьшение δ ведет к неоправданному увеличению J_M ;
- 2) перевод маховика на быстроходный вал ведет к уменьшению J_M , но к увеличению сил, передаваемых звеньями, расположенными за маховиком (например, увеличиваются размеры зубчатых колес, изготавливаемых из дорогостоящей стали).

Вопросы для самопроверки

1. В чем состоит задача уравнивания вращающихся тел?
2. Особенности уравнивания механизмов на фундаменте.
3. Назовите основные режимы движения машины.
4. Что такое неравномерность хода машины?
5. Что такое звено приведения? Для чего вводится это понятие?
6. Какие условия должны соблюдаться для установившегося движения?
7. Какую роль играет маховик в машине?

Библиографический список

1. Артоболевский, И.И. Теория механизмов и машин / И.И. Артоболевский. – М. : Наука, 1988. – 640 с.
2. Кожевников, С.Н. Теория механизмов и машин / С.Н. Кожевников. – М. : Машиностроение, 1973. – 592 с.
3. Зиновьев, В.А. Курс теории механизмов и машин / В.А. Зиновьев. – М. : Наука, 1979. – 384 с.
4. Теория механизмов и механика машин / под ред. К.В. Фролова. – М. : Высш. шк., 1987. – 496 с.
5. Левитский, Н.И. Теория механизмов и машин / Н.И. Левитский. – М. : Наука, 1990. – 592 с.
6. Артоболевский, И.И. Механизмы в современной технике : в 7 т. / И.И. Артоболевский. – М. : Наука, 1979. – 2976 с.
7. Юдин, В.А. Теория механизмов и машин / В.А. Юдин, Л.В. Петрокас. – М. : Высш. шк., 1967. – 528 с.
8. Попов, С.А. Курсовое проектирование по теории механизмов и механике машин : учеб. пособие для студентов вузов / С.А. Попов, Г.А. Тимофеев ; под ред. К.В. Фролова. – М. : Высш. шк., 1998. – 351 с.
9. Андрющенко, В.М. Математические таблицы для расчета зубчатых передач / В.М. Андрющенко. – М. : Машиностроение, 1974. – 438 с.
10. Коренько, А.С. Курсовое проектирование по теории механизмов машин / А.С. Коренько, Л.И. Кременштейн, С.Д. Петровский. – Киев : Вища школа, 1970. – 332 с.
11. Справочник по геометрическому расчету эвольвентных зубчатых и червячных передач / Т.П. Болотовская [и др.]. – М. : Машгиз, 1963. – 472 с.
12. Планетарные передачи : справочник / под ред. В.Н. Кудрявцева, Ю.Н. Кирдяшева. – Л. : Машиностроение, 1977. – 536 с.