МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Тольяттинский государственный университет»

Институт математики, физики и информационных технологий
(наименование института полностью)
Кафедра «Алгебра и геометрия»
(наименование кафедры)
44.04.01 «Педагогическое образование»
(код и наименование направления подготовки, специальности)
«Математическое образование»
(направленность (профиль)/специальность)

М А Г И С Т Е Р С К А Я Д И С С Е Р Т А Ц И Я

на тему **«МЕТОДИЧЕСКИЕ АСПЕКТЫ ДИФФЕРЕНЦИАЦИИ ПРИ ОБУЧЕНИИ РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ В УГЛУБЛЕННОМ КУРСЕ ГЕОМЕТРИИ СТАРШЕЙ ШКОЛЫ»**

Студент В. П. Воронина ____________________

Научный к.ф.-м.н., профессор
Руководитель Е.В. Потоскуев ____________________

Руководитель программы д.п.н., профессор Р.А. Утеева ______________

«_____»_______ 2017 г.

Допустить к защите

Заведующий кафедрой д.п.н., профессор Р.А. Утеева ______________

«_____»___________2017 г.

Тольятти 2017

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Актуальность исследования. Одним из важных вопросов методики обучения геометрии является вопрос формирования у обучающихся умений и навыков решения задач.

В процессе обучения геометрии, задачи выполняют разнообразные функции: они являются эффективным и необходимым способом овладения обучающимися понятий и методов курса школьной геометрии. Велика роль задач в развитии логического мышления, геометрического образования обучающихся, формировании у них умений и навыков практического применения геометрии.

Решение геометрических задач способствует достижению целей, которые ставятся перед математическим образованием обучающихся, развитием их математической (геометрической) культуры. Важную роль в формировании высокого уровня геометрической культуры обучающихся, их умений и навыков правильно, рационально рассуждать, аргументированно обосновывать шаги логических рассуждений, играет верный способ обучения решению геометрических задач.

Значительная часть школьного курса стереометрии, по объему и времени изучаемые в 10 классе, представляют собой разделы «Взаимное расположение двух прямых в пространстве» и «Взаимное расположение прямой и плоскости в пространстве». Начальный этап изучения стереометрии, основывается на необходимом сознательном изучения многогранников, векторно-координатных методов, что является последовательным, логически выстроенным изложением взаимосвязанных вопросов геометрии плоскостей и прямых в пространстве.

Методически обоснованная, проверенная практикой, система подбора материала как в задачнике, так и в учебнике, в значительной степени упрощает прочность его овладения.

Материал о взаимном расположении прямых и плоскостей в пространстве, в учебнике [32] Потоскуева Е.В., Л.И. Звавича, изложен в следующем порядке: 1) взаимное расположение двух прямых в пространстве; 2) взаимное расположение прямой и плоскости в пространстве; 3) взаимное расположение двух плоскостей в пространстве. При этом изложение теоретического материала сопровождается решением большого количества задач на доказательство, построение и вычисление.

Таким образом, **актуальность** темы исследования обусловлена:

1) необходимостью организации сознательного усвоения обучающимися начал стереометрии;

2) необходимостью построения логически верной методики обучения началам стереометрии для осознанного изучения ими последующих и завершающих разделов школьной стереометрии – геометрии многогранников и фигур вращения.

В этой связи возникает проблема **диссертационного исследования**: выявление методических основ дифференциации изучения основополагающих разделов курса стереометрии при углубленном изучении в старших классах – вопросов взаимного расположения прямых и плоскостей в трехмерном евклидовом пространстве.

Объект исследования: процесс обучения геометрии в углубленном курсе старших классов общеобразовательной школы.

Предмет исследования: методические аспекты дифференциации при обучении решению задач в углубленном курсе геометрии старшей школы на примере изучения тем «Взаимное расположение двух прямых в пространстве» и «Взаимное расположение прямой и плоскости в пространстве» по УМК авторов Е.В. Потоскуева и Л.И. Звавича.

Цель исследования состоит в раскрытии методических основ дифференциации изучения основополагающих разделов курса стереометрии при углубленном изучении в старших классах.

В соответствии с целью исследования были поставлены следующие **задачи:**

1. Проанализировать научную и учебно-методическую литературу по теме исследования.

2. Разработать методические рекомендации по дифференциации обучения решению задач в углубленном курсе геометрии старшей школы на примере тем «Взаимное расположение двух прямых в пространстве» и «Взаимное расположение прямой и плоскости в пространстве».

3. Описать проведение педагогического эксперимента.

Для решения поставленных задач применялись следующие **методы исследования**: анализ психолого-педагогической, научной и учебно-методической литературы; изучение, наблюдение и обобщение школьной практики и беседы с учителями; анализ собственного опыта работы в школе; педагогический эксперимент и обработка его результатов.

Теоретико-методическую основу исследования составили научно-методические работы Л.И. Звавича и Е.В. Потоскуева [37,40,42].

Основные этапы исследования:

1 семестр (2015/16 уч.г.): анализ ранее выполненных исследований по теме диссертации, анализ школьных учебников геометрии, нормативных документов (стандартов, программ), анализ опыта работы школы по данной теме.

2 семестр (2015/16 уч.г.): Определение теоретических и методических основ исследования по теме диссертации.

3 семестр (2016/17 уч.г.): Подборка системы задач по темам «Взаимное расположение двух прямых в пространстве», «Взаимное расположение прямой и плоскости в пространстве», «Взаимное расположение двух прямых в пространстве в векторно-координатном изложении», «Взаимное расположение прямой и плоскости в пространстве в векторно-координатном изложении» для учащихся профильных классов; Разработка программы элективного курса по теме «Позиционные задачи на полных изображениях».

4 семестр (2016/17 уч.г.): Оформление диссертации, корректировка ранее представленного материала, уточнение аппарата исследования, описание результатов экспериментальной работы, формулирование выводов.

Новизна исследования заключается в разработке методических рекомендаций для реализации принципа дифференцированного обучения геометрии в углубленном курсе старшей школы на основе УМК Е.В. Потоскуева и Л.И. Звавича.

Практическая значимость исследования заключается в том, что в нем:

- предложены методические рекомендации по применению принципа «от простого к сложному» к изучению отдельных тем курса стереометрии в углубленном курсе старшей школы;

- подобрана система геометрических задач по темам «Взаимное расположение двух прямых в пространстве» и «Взаимное расположение прямой и плоскости в пространстве», «Взаимное расположение двух прямых в пространстве в векторно-координатном изложении», «Взаимное расположение прямой и плоскости в пространстве в векторно-координатном изложении» для обучающихся профильных классов.

На защиту выносятся методические рекомендации дифференциации при изучении тем «Взаимное расположение двух прямых в пространстве» и «Взаимное расположение прямой и плоскости в пространстве» в углубленном курсе геометрии старшей школы по УМК Е.В. Потоскуева и Л.И. Звавича.

Апробация результатов исследования осуществлена путем выступлений на: научно-методических семинарах преподавателей, аспирантов и студентов кафедры алгебры и геометрии ТГУ (декабрь 2015, июнь 2016, декабрь 2016, май 2017); научной студенческой конференции «Дни науки» Тольяттинского государственного университета (2016, 2017 диплом за 3 место на первом этапе).

Экспериментальная проверка предлагаемых методических рекомендаций осуществлена в период производственной, педагогической и преддипломной практик на базе кафедры алгебры и геометрии ТГУ, а также в период работы учителем математики на базе МБУ «Школа № 16».

Магистерская диссертация состоит из введения, двух глав и заключения.

Первая глава состоит из трёх параграфов. Она посвящена теоретическим основам дифференциации содержательно-методической линии задачного материала углубленного курса геометрии общеобразовательной школы. Проведён анализ школьных учебников геометрии. Кроме того, приведены типы учебных заданий, представленные в учебниках и рассмотрены приемы дифференцирования учебных заданий при обучении решению задач в углубленном курсе геометрии старшей школы.

Вторая глава состоит из трех параграфов, в которых представлено:

1) Методические рекомендации дифференциации стереометрических задач при углубленном изучении определенных тем в 10-11 классах.

2) Приведено описание педагогического эксперимента.

В заключении сделаны выводы по теме исследования.

Список литературы состоит из 65 наименований.

Глава I. ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ДИФФЕРЕНЦИАЦИИ ОБУЧЕНИЯ РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ В УГЛУБЛЕННОМ КУРСЕ ГЕОМЕТРИИ СТАРШЕЙ ШКОЛЫ

§ 1. Основные цели и задачи дифференциации обучения решению задач в углубленном курсе геометрии старшей школы

Геометрия является уникальным школьным предметом, в котором должны развиваться способности учащегося к логическому мышлению и точной коммуникации при поддержке визуальной средой [2]. Геометрическое содержание должно проектироваться с учетом:

– развития визуального мышления, пространственного воображения;

– формирования математического словаря, относящегося к общекультурному багажу;

– уникального двухтысячелетнего источника и последующей интеллектуальной традиции, драмы идей, в которую имеет возможность погрузиться учащийся;

– обеспечения каждого учащегося максимальным опытом решения геометрических задач на построение, доказательство, вычисление;

– применения геометрических понятий и фактов в повседневной и профессиональной деятельности;

– полезности решения геометрических задач для развития навыков формульных вычислений, в частности, с повышенными (за счет геометрической интерпретации) возможностями контроля правильности результата.

Основной целью изучения в школе геометрического материала является формирование умений учащегося самостоятельно:

– выдвигать гипотезы о свойствах геометрических конфигураций, в частности, опираясь на чертеж, вводя дополнительные элементы конфигурации;

– доказывать выдвинутые гипотезы, исходя из заданных и уже установленных свойств конфигураций, пользуясь корректными теоремами геометрии;

– находить формульные и числовые значения величин в конфигурации, вводя необходимые переменные, используя алгебраические методы, тригонометрические функции;

– создавать алгоритм построения нужной конфигурации циркулем и линейкой и доказывать его правильность[6].

Основная проблема преподавания геометрии в массовой школе сегодня состоит в том, что в полной мере соответствие перечисленной системе целей не достигается. Фактически, происходит несбалансированное сокращение учебного времени, при котором сохраняется близкий к традиционному объем геометрических понятий и фактов, но резко сокращенным (иногда до нуля) оказывается объем и сложность выполняемых учащимся заданий по доказыванию и тем более – решению задач на построение, не происходит развитие содержательных геометрических представлений, пространственного мышления, геометрической интуиции. Ощущается необходимость в более сбалансированном подходе, при котором, в частности, будут сокращены некоторые содержательные (хотя традиционно и считающиеся важными) геометрические линии с учетом перечисленных выше общих целей [26].

Углубленное изучение геометрии. Нормативная база современной школы (в частности, ФГОС, БУП) не регламентирует углубленного изучения геометрии, как и других дисциплин в основной школе. При этом очевидной реальностью российской школы, начиная с середины 1960-ых гг.**,** является существование школ и классов с углубленным изучением геометрии [3].Углубление (предпрофильная подготовка) достигается за счет:

– отбора более подготовленных, и, главное – более мотивированных учащихся;

– более высокого уровня преподавания, в частности, более высокой квалификации учителя математики;

– снижения доли чисто тренировочных, рутинных заданий, повышения доли более творческих, постоянно включающих элементов новизны;

– увеличения урочных часов в учебном плане;

– увеличения общей нагрузки учащихся, относящейся к геометрии, в том числе приходящейся на самостоятельную работу.

Результатом углубленного изучения геометрии в основной школе должно быть [8]:

– сохранение и усиление мотивации к дальнейшему математическому образованию и сферам труда, предполагающим профессиональное применение геометрии и математической деятельности;

– развитие геометрических способностей, прежде всего, умения решать новые, необычные задачи, в частности, олимпиадные.

Дополнительно к указанным выше результатам добавляется:

– более успешное участие в олимпиадах;

– более надежное, быстрое решение задач повышенного уровня сложности;

– положительная итоговая аттестация.

Дополнительные же разделы геометрии могут быть весьма разнообразными, существенно не их содержание, а вышеуказанные результаты.

Рассмотрим определение понятия «дифференциация». Это слово означает*, разделение чего- либо на группы.* В процессе обучения выделяют (разделяют) отдельные группы учащихся, у которых обучение строится по-разному [16].

Развитие у обучающегося волевой, эмоционально-ценностной, интеллектуальной сфер, является немаловажной задачей в процессе обучения. При дифференцированном изучении *геометрии*, усиливаются развивающие функции процесса обучения [15]. Так, в естественно-математических классах большее внимание направлено на:

1) развитие мыслительных операций ученика, таких как: *логическое мышление, пространственное воображение* и т.п.;

2) развитие элементов творческой деятельности, таких как: видение и формулирование проблемы, выдвижение гипотез, их проверка и т.д. [3].

В классах с гуманитарным направлением больше внимания будет уделяться выразительности речевых средств, развитию образного мышления, и т.п.

В классе коррекционно-развивающего обучения на первый план выступят задачи развития тех функций, которые не достаточно развиты у ученика.

Можно сделать вывод о там, что *целью дифференциации процесса обучения является обеспечение каждому обучающемуся, в процессе усвоения им содержания общего образования, условий для максимального развития его способностей и удовлетворения познавательных потребностей и интересов* [52].

В углубленном изучении геометрии выделяются два временных этапа, отвечающие возрастным возможностям школьников и соответственно различающимся по целям [43].

В 7-9 классах углубленное изучение геометрии является в значительной мере ориентационным. На этом этапе ученику требуется помощь для осознания степени своего интереса к предмету и оценки возможности овладения им, для того, чтобы в конце 9 класса он смог сделать сознательный выбор в пользу обычного, либо дальнейшего углубленного изучения геометрии. *Интерес и склонность учащегося к геометрии должны всемерно подкрепляться и развиваться.* В случае же потери интереса, изменения его в другом направлении ученику должна быть обеспечена возможность перейти от углубленного изучения к обычному [6].

Углубленное изучение геометрии в 10-11 классах, предполагает наличие у старшеклассников более или менее устойчивого интереса к геометрии. На этом этапе обучение должно быть направлено на подготовку к поступлению в ВУЗ, а также к профессиональной деятельности, требующей довольно высокой математической культуры.

На всех этапах углубленного изучения геометрии большое внимание уделяется внутрипредметным и межпредметным связям. Кроме работы на уроке, учащиеся посещают занятия спецсеминаров по геометрии, что также способствует повышению их теоретического уровня математической деятельности.

Принципы углубленного обучения. Образовательные принципы, на которых выстраивается углубленное обучение, постулированы идеями концепции профильного обучения [13].

Под ***индивидуализацией обучения*** *понимают организацию учебного процесса с учетом индивидуальных особенностей обучающихся*, позволяющую создавать оптимальные условия для каждого старшеклассника в реализации своих потенциальных возможностей, что соотносится с основной идеей обновления старшей школы, состоящей в выборе каждым школьником индивидуальной образовательной программы, реализации и конструированию индивидуализированных форм и методов учебной деятельности. Самопознание старшеклассников, выявление их истинных мотивов выбора профиля обучения, действительных образовательных потребностей и реализацию образовательной программы обучения геометрии в соответствии с возможностями, интересами, и способностями – всё это является направлением индивидуализации профильного обучения геометрии.

Рассмотрим, в чем состоит сущность профильной дифференциации при углубленном изучении геометрии [25].

Достоинства профильной дифференциации при углубленном изучении геометрии заключаются в *повышении заинтересованности оптимизации всего учебного процесса среди учителей и администрации, а так же старшеклассников и родителей;* в *развитии демократичного подхода к комплектации классов, при котором учитываются интересы и пожелания обучающихся;* в *создании предпосылок для профессионального самоопределения учащихся;* в *росте показателей качества процесса обучения геометрии* [43].

Особенностью программы обучения геометрии является заложенная в нее идея опережающего обучения, позволяющая на самых ранних этапах создать предпосылки для углубленного изучения геометрии, а также наличие «сквозного» повторения узловых вопросов школьного курса на различных этапах обучения геометрии, причем каждое повторение проводится на более высоком как количественном, так и качественном уровнях.

Основными задачами системы профильного обучения геометрии в средней школе являются:

1) углубление знаний по геометрии;

2) выработка у учащихся навыков самостоятельной познавательной деятельности;

3) знакомство с кругом проблем, связанных с той или иной сферой деятельности;

4) развитие мотивации к научно-исследовательской деятельности [3].

§ 2. Типы учебных заданий при обучении геометрии старшей школы

В современной научно-методической литературе принята следующая классификация задач при изучении стереометрии [14].

1. По характеру требования:

– задачи на доказательство;

Задача 1. ([32], 2.012) Даны два параллелограмма *ABCD* и *ABPK*. Докажите, что треугольники *AKD* и *BCP* равны.

– задачи на построение;

Задача 2. ([32], 3.004) Через данную прямую *a* проведите плоскость, параллельную данной прямой *b*. (Рассмотрите возможные случаи взаимного расположения прямых *a* и *b*.)

– задачи на вычисление.

Задача 3. ([32], 2.024) В треугольнике *ABC* точка *K* – середина *AC*, *M* – центроид треугольника. Через точки *A*, *B*, *C*, *M* и *K* проведены параллельные прямые, пересекающие плоскость γ в точках A_1, B_1, C_1, M_1 и K_1 соответственно; $AA_1 = 8$, $BB_1 = 11$, $KK_1 = 5$. Найдите MM_1 и CC_1, если плоскость γ не пересекает треугольник.

Ответ: 7; 2.

2. По функциональному назначению:

– задачи с дидактическими функциями;

Задача 4. ([32], 1.047) Основание четырехугольной пирамиды *PABCD* – четырехугольник *ABCD*, не являющийся трапецией. 1) Постройте прямую, по которой пересекаются плоскости: а) *PAC* и *PBD*; б) *PBM* и *PCH* (где *M* и *H* – середины ребер соответственно *PC* и *PH*). 2) Постройте сечение пирамиды плоскостью, проходящую через ребро *AB* и точку *K* – середину ребра *PD*.

– задачи с познавательными функциями;

Задача 5. ([32], 3. 040) Прямая *AK* перпендикулярна плоскости параллелограмма *ABCD* . Оказалось, что прямая *KC* перпендикулярна прямой *BD*. Докажите, что четырехугольник *ABCD* – ромб.

– задачи с развивающими функциями.

Задача 6. ([32], 3.118) Точка *M* равноудалена от двух вершин квадрата *ABCD*. Докажите ее равноудаленность от двух других вершин этого квадрата. Будет ли это верно, если вместо квадрата взять: а) прямоугольник; б) ромб?

Ответ: а)не верно; б)верно.

3. По величине проблемности:

1) стандартные (все компоненты - известные величины);

Задача 7. ([32], 1.024) Прямые a и b не лежат в одной плоскости. Прямые m и n пересекают каждую из прямых a и b в попарно различных точках. Верно ли, что прямые m и n не пересекаются?

Ответ: верно.

– обучающие (неизвестен один из четырех компонентов задачи);

Задача 8. ([32, 4.018) Прямая *DF* пересекает параллельные плоскости α, β и γ соответственно в точках *D*, *E* и *F*, при этом *DF* = 3, *EF* = 9. Прямая *EG* пересекает плоскости α и γ соответственно в точках *G* и *H*, при этом *EG* = 12. Найдите длину *GH*.

Ответ: 6.

– поисковые (неизвестны два из четырех компонентов задачи);

Задача 9. ([32], 3.142) В правильном тетраэдре *PABC* с ребром 2 точка *M* – середина ребра *PC*. а) Через центроид грани *ABP* проведите прямую, перпендикулярную плоскости *ABM*. б) Найдите длину отрезка этой прямой внутри тетраэдра. в) Найдите отношение, в котором плоскость *ABM* делит данный отрезок.

Ответ: б) 2/3; в) 1:1.

– проблемные (неизвестны три из четырех компонентов задачи).

Задача 10. ([32], 4.040) Точка A лежит внутри двугранного угла. Точки A_1 и A_2 – проекции точки A на грани двугранного угла, а точка K – проекция точки A на ребро двугранного угла. Докажите, что около четырехугольника AA_1KA_2 можно описать окружность, диаметр которой равен AK.

4. По методам решения:

– задачи с геометрическими преобразованиями;

Задача № 11. ([32], 1.050) Постройте сечение куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ плоскостью, проходящей через точки P, M и K, если: а) точки P и M лежат внутри квадрата $ABCD$, точка K – середина ребра AA_1; б) точки P, M и K – середины ребер соответственно A_1B_1, B_1C_1 и CC_1.

– задачи на векторы.

Задача № 12. ([32], 6.039) $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – параллелепипед; O – центр основания $ABCD$. Обозначим $\overrightarrow{A_1A} = \vec{a}$, $\overrightarrow{A_1B} = \vec{b}$, $\overrightarrow{A_1D} = \vec{c}$. Разложите в базисе ($\vec{a}$; $\vec{b}$; $\vec{c}$) следующие векторы: а) $\overrightarrow{A_1O}$; б) $\overrightarrow{AO}$; в) $\overrightarrow{CA_1}$; г) $\overrightarrow{AC_1}$ д) $\overrightarrow{D_1B}$; е) $\overrightarrow{C_1B}$.

Ответ: а) $0\cdot\vec{a} + 0{,}5\vec{b} + 0{,}5\vec{c}$; д) $\vec{a} + \vec{b} - \vec{c}$; е) $2\vec{a} + 0\cdot\vec{b} - \vec{c}$.

5. По количеству компонентов в условии задания и связей между ними:

– простые;

Задача № 13. ([32], 3.001) Через точку A, не принадлежащую данной плоскости α, проведите прямую, параллельную α.

– сложные.

Задача № 14. ([32], 3.135) Точка E – середина ребра CC_1 куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Постройте и найдите угол между прямыми A_1B и B_1E, если ребро куба a.

Ответ: $\arccos\frac{\sqrt{2}}{4}$.

Так же, задачи разделяют на устные и письменные; теоретические и практические; стандартные и нестандартные; и др.

Виды задач и их функции. Задачи, как средство обучения, по своему функциональному назначению подразделяются на обучающие и контролирующие. Первые направлены на формирование знаний, умений и навыков обучающихся, вторые - на осуществление контроля над уровнем сформированности знаний, умений и навыков со стороны учителя [4].

Основными компонентами задачи являются: начальное состояние - условие$\Rightarrow$ теоретическое аргументирование решения - «базис решения» $\Rightarrow$ изменение условия задачи для нахождения неизвестного – «решение» $\Rightarrow$ конечное состояние - «заключение» [59].

Задачи считаются математическими, если, переход от начального состояния (условие) к конечному (заключение), осуществляется через математический характер компонентов: обоснование и решение. Геометрическими задачами будут являться задачи, связанные с расположением точек, прямых и фигур на плоскости и в пространстве.

Чисто математической называется задача, у которой все компоненты – математические объекты. Прикладной математической является задача, где математические только такие компоненты как решение и базис решения.

Для того, чтобы определить проблемный характер задачной системы, необходимо осознать какие из основных компонентов задач неизвестны [65].

Задача называется *стандартной*, если в ней определено условие, известны способ решения и его обоснование, и вместе с тем имеются упражнения на воспроизведение известного. *Обучающей* является задача, в которой один из основных компонентов или неизвестен или плохо определен. В поисковой задаче неизвестны два компонента, в *проблемной* задаче - три.

Рассмотрим классификацию задач, учитывающую характер связей между элементами задачи, соотношение между воспроизводящей и творческой деятельностью обучающихся. Таковыми задачами являются *алгорит-*

мические; полуалгоритмические; эвристические [10]. Рассмотрим каждую из выше представленных классификаций.

Задача, решение которой производится с помощью непосредственного применения определений, теорем, то есть, для решения которой имеется алгоритм, называются *алгоритмическими*. В качестве примера можно рассмотреть задачу на применение теоремы Пифагора для нахождения гипотенузы в прямоугольном треугольнике по известным катетам. К нужному результату быстро приводит применение алгоритма [9].

Задача, решение которой имеет обобщенный характер и не может быть полностью сведено к объединению элементарных актов, получила название *полуалгоритмические*. Обучающимися легко обнаруживаются связи между элементами таких задач. В данном случае, алгоритмические задачи содержаться в качестве подзадач. Рассмотрим пример, когда известны высота, опущенная на основание и стороны в треугольнике. Нужно вычислить периметр треугольника. Применив дважды теорему Пифагора, находят третью сторону, а затем и периметр треугольника.

Задачи, для решения которых нужно найти способ решения, причем этот способ не является очевидной конкретизацией некоторого обобщенного правила известного ученику, или определить некоторые связи между требованием и элементами условия, или сделать и то и другое называются ***эвристическими задачами***.

Приведем пример такой задачи.

Задача 15. ([32], 2.042) Пусть точка D не принадлежит плоскости треугольника ABC. а) Докажите, что прямые AD и BC скрещиваются. б) Докажите, что прямые DM_1 и AM_2 пересекаются (M_1 и M_2 – точки пересечения медиан треугольников ABC и DBC). в) В каком отношении (считая от точки D) прямая AM_2 делит отрезок DM_1? г) Определите взаимное расположение прямых AD и M_1M_2. Ответ обоснуйте.

Ответ: в) 3:1

Для решения эвристических задач обучающемуся важно использовать эвристические методы и приемы.

Выделим несколько этапов решения эвристических задач.

Первым является «*ознакомление с содержанием задачи». На этом этапе важно* осмысление требования и условия задачи, разработка и овладение элементов условия (или «элементов цели»); поиск нужной информации в сложной системе памяти; сопоставление условия и заключения задачи с имеющимися опытом и знаниями т.п..

Второй этап подразумевает *поиск решения – выдвижение плана решения задачи. Это выражается в* целенаправленных пробах всевозможных сочетаний из искомых и данных; в попытках привести задачу к известному типу; в выборе такого метода решения, который наиболее приемлем в данных условиях; в выборе стратегии решения, поиске плана решения и его корректировке, на основе предшествующей апробации, сопоставление с условием задачи и интуитивным соображениям, фиксирование определенного плана решения задачи и т.д..

На третьем этапе происходит *«реализация плана решения».* Здесь практическая реализация плана решения проводится во всех его деталях с параллельной корректировкой через соотнесение с условием и выбранным базисом, выбором способа оформления решения, и записи результата и т.д.

Четвертый этап решения эвристических задач подразумевает *проверку решения задачи, а именно:* установление окончательного результата решения; критическая оценка результата; поиск способов совершенствования решения; выявление существенного, то есть потенциально полезного; исследование частных и особых случаев; систематизация опыта и новых знаний и т.д.[63].

На уроках геометрии в основном решаются задачи *фронтальным образом*, то есть всеми обучающимися класса решается одна и та же задача.

Фронтальная организация решения геометрических задач может осуществляться различными способами:

1) Устные решения геометрических задач распространены в общеобразовательной школе в старших классах. Задачи и упражнения, связанные с расположением точек, прямых и фигур на плоскости и в пространстве, для решения которых достаточно знать основные аксиомы и теоремы, изученные ранее. Решение таких задач может проходить в форме «пятиминутки» с использованием таблиц, интерактивных досок, плакатов с чертежами и макетов геометрических фигур [17].

В качестве примера рассмотрим подборку устных упражнений школьного курса геометрии для 10 класса:

1. ([32], 3.029) Докажите, что отрезок, соединяющий центры двух противоположных граней куба, перпендикулярен этим граням.

2. ([32], 3.030) Через центр O окружности, описанной около треугольника ABC, проведена прямая перпендикулярно плоскости этого треугольника. Докажите, что каждая точка этой прямой равноудалена от вершин треугольника.

3. ([32], 3.032) Из точки M вне плоскости α проведены к ней три равные наклонные MA, MB и MC. Докажите, что основание H перпендикуляра, опущенного из точки M на плоскость α, является центром окружности, описанной около треугольника ABC.

4. ([32], 3.083) Под каким углом к плоскости α следует провести отрезок AB, чтобы он был вдвое больше своей проекции на эту плоскость?

5. ([32], 4.010) По какой прямой пересекаются плоскости сечений A_1BCD_1 и BDD_1B_1 параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$?

2) Письменные самостоятельные решения задач рассматриваются как наиболее эффективная форма организации решения математических задач, в процессе которой старшеклассники обучаются думать творчески, разбираться самостоятельно в различных вопросах теории и приложений геометрии [5]. Самостоятельное письменное решение задач в значительной мере усиливает у обучающихся учебную активность, стимулирует творческие способности, а так же повышает интерес обучающихся к решению задач, что очень важно. Одной из форм организации самостоятельного решения задач может стать комментирование решения[30]. Это происходит в том случае, если все обучающиеся выполняют решение одной и той же задачи самостоятельно, а один из них пошагово комментирует решение. При этом каждый шаг логического рассуждения, графического изображения и арифметического вычисления должен быть аргументирован.

3) Способом решения геометрических задач является ***индивидуальное решение***, при котором учитель выясняет подготовку, возможности и способности к изучению геометрии каждого обучающегося, в соответствии, с чем организовывает решение математических задач [5].

Самостоятельные работы учащихся по устранению пробелов имеют исключительное значение в умениях логически рассуждать при доказательстве теорем и при решении стереометрических задач на доказательство, вычисление и построение.

Примером послужит следующая задача с различными вариантами заданий.

Задача 16. 1) Площадь поверхности куба равна 1568. Найдите его диагональ; 2) Объем куба равен 125. Найдите площадь его поверхности. 3) Диагональ куба равна $\sqrt{12}$. Найдите его объем. 4) Во сколько раз увеличится объем куба, если его ребра увеличить в десять раз? 5) Во сколько раз увеличится площадь поверхности куба, если его ребро увеличить в 25 раз?

Ответ: 1) 20,13; 2) 150; 3) 8; 4) 1000; 5) 625.

В качестве домашней работы для обучающихся подбираются задачи и упражнения, содержание которых подготавливается проделанной работой на уроке. Повторение, а так же и дальнейшее повышение математических знаний, навыков и умений, всё это является смыслом домашнего задания. Домашнее задание целесообразно индивидуализировать, учитывая различие индивидуальных особенностей старшеклассников. Выявить склонности отдельных обучающихся к геометрии и развивать их возможно параллельно с работой на уроке, при помощи индивидуального домашнего задания [50].

В качестве индивидуального домашнего задания часто могут выступать рефераты, сообщения, проектная деятельность, анализ публикаций и статей математического характера и т.п.

Задача 17. На рисунке ниже изображена развертка шестиугольной призмы. Перерисуйте ее на плотный лист бумаги в большем масштабе, вырежьте развертку и склейте из нее призму.

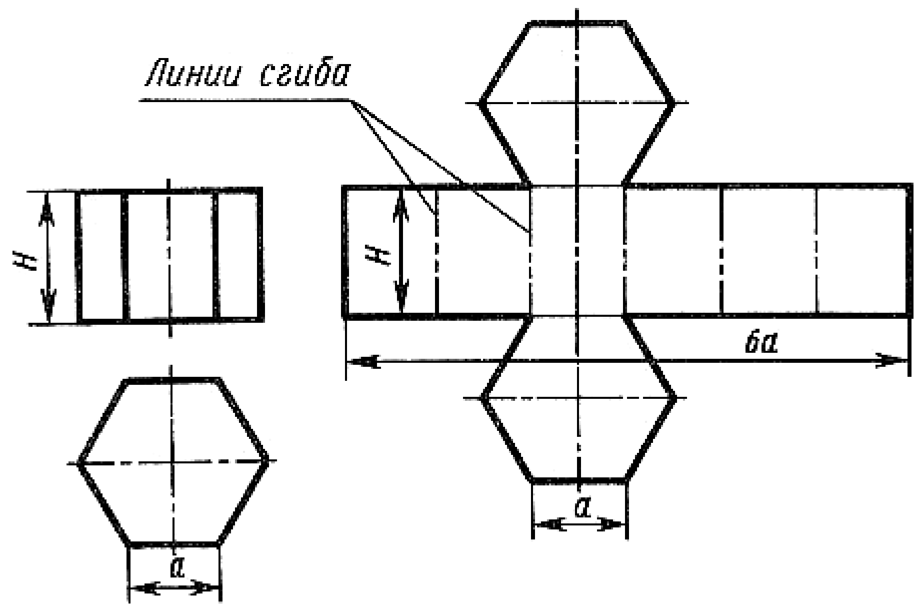

Рис. 1

§ 3. Приемы дифференциации учебных заданий при обучении решению задач в углубленном курсе геометрии старшей школы

Основным методическим принципом, положенным в основу дифференциации систем упражнений, а так же при изложении теоретического материала, является то, что школьник не должен преодолевать больше одного затруднения. В связи с этим, отрабатывается всякое приобретенное умение, формируется всякое новое понятие, сначала каждое отдельно, а потом совмещаются трудности [49].

В основе систематизации упражнений по геометрии на дидактическом уровне лежит соответствие заданий дидактическим целям. При этом выделяются такие умения:

1) актуализация опорных знаний;

2) усвоение знаний;

3) первичное применение знаний;

4) овладение навыками в стандартных условиях;

5) творческий перенос знаний и навыков и умений [27].

В соответствии с указанной последовательностью этапов формирования умений выделены следующие виды задач:

1) *подготовительные задачи;*

Задача 18. ([32], 1.001) Укажите среди перечисленных фигур плоские и неплоские фигуры: а) треугольник; б) ромб; в) окружность; г) параллелепипед; д) куб; е) пирамида; ж) сфера; з) ломаная $ABCEH$, вершины A и H которой не лежат в плоскости BCE; и) фигура, состоящая из ребер PA, PB и PC треугольной пирамиды $PABC$.

Ответ: а) плоская ; б) плоская ; в) плоская ; г) неплоская ; д)неплоская ; е) неплоская; ж) неплоская ; з) плоская ; и) неплоская .

2) *вводные задачи;*

Задача 19. ([32], 1.005) Запишите символически и сделайте рисунки:

а) плоскость α проходит через точки A и C;

б) плоскость α проходит через прямую p;

в) прямая $p = AB$ пересекает плоскость α в точке M;

г) плоскости α и β пересекаются по прямой c.

3) *пробные задачи;*

Задача 20. ([32], 2.002) Нарисуйте куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. 1. Выделите в нем ребро BB_1 и назовите все ребра куба: а) параллельные ему; б) пересекающие его; в) скрещивающиеся с ним. 2. Выделите диагональ AD_1 грани ADD_1A_1 куба и назовите диагонали других граней: а) параллельные AD_1; б) пересекающие ее; в) скрещивающиеся с ней. Ответ обоснуйте.

4) *тренировочные задачи:*

Задача 21. ([1], 2.036) Пусть E и F – середины ребер AB и AD куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Опустите перпендикуляры из вершины A_1 на следующие прямые: а) AD_1; б) D_1E; в) BD; г) EF; д) C_1D.

5) *творческие задачи;*

Задача 22. ([32], 3.102) Даны три точки. Как они должны быть расположены в пространстве, чтобы их проекциями были: а) одна точка; б) две точки; в) три точки, лежащие на одной прямой; г) три точки, не лежащие на одной прямой? Выполните рисунки. Выполните рисунки.

6) *контрольные задачи:*

Задача 23. ([32], 3.123) Докажите, что диагональ AC_1 куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ перпендикулярна плоскости CB_1D_1.

Для овладения учащимися способами выполнения упражнений и заданий необходимым является создание многих условий: высокий уровень мотивации деятельности; соответствующая теоретическая подготовка; учет индивидуальных способностей учащихся; подбор задач, обеспечивающих динамику усложнения деятельности и т.д. [29].

Одним из путей создания перечисленных условий является использование в обучении многоуровневых упражнений и заданий. В многоуровневых упражнениях и заданиях описывается конкретная ситуация и сформулированы несколько требований в определенном порядке [13].

Приведём основные особенности некоторых учебников по геометрии.

Рассмотрим учебник по геометрии для 10-11 классов авторов И.М. Смирнова, В.А. Смирнов [47].

Данный учебник по геометрии предназначен для естественно-научного профиля, полностью соответствует новым требованиям и стандартам. Теоретический и практический материал разбит на базовый уровень – основной, и профильный уровень - дополнительный, отмеченный звездочкой. Вышеперечисленное разделение позволяет пользоваться учебником на базовом и профильном уровнях.

В рассматриваемом учебнике расширен материал о многогранниках, которые предлагаются к изучению с самого начала знакомства со стереометрией, что предоставляет возможность проиллюстрировать теоремы и свойства стереометрии, а так же с первых уроков начать решение задач на нахождение элементов многогранников, и делает курс геометрии более наглядным.

Большое внимание уделено изображению пространственных фигур, как в ортогональной, так и в центральной проекциях.

Задачный материал авторы учебника классифицируют по уровню сложности и по форме деятельности учащихся, в виде устных, основных, нестандартных и исследовательских упражнений.

В учебнике освещаются вопросы, затрагивающие некоторые современные направления развития геометрии. К таковым можно отнести определение понятия выпуклости, свойств выпуклых многогранников, теорему Л. Эйлера и ее приложения, вписанные и описанные многогранники и т.п..

Далее целесообразно рассмотреть Учебник для 10 – 11 классов гуманитарного профиля автора И.М. Смирнова. Предложенный учебник для классов гуманитарного профиля соответствует полностью новым стандартам базового уровня обучения по геометрии.

Задача автора учебника И.М. Смирновой заключалась в следующем: «опираясь на достигнутый общеобразовательной школой уровень геометрического образования, представить курс геометрии 10 – 11 классов как интересный и современный, учитывающий способности и склонности старшеклассников, направленный на формирование математической культуры, на интеллектуальное развитие личности каждого обучающегося, творческих способностей , формирование представлений старшеклассников о геометрии, ее роли и месте в современном мире».

В рассматриваемом учебнике, в отличие от традиционных учебников, сокращен материал теоретический, большое внимания уделяется мировоззренческим, философским и историческим аспектам геометрии. Автор показывает проявления геометрии в живописи, природе, скульптуре, архитектуре, к решению практических задач как приложения геометрии.

Учебник по геометрии для 10-11 классов И.Ф. Шарыгина [60] предусмотрен для базового уровня. Основное отличие учебника состоит в том, что построение курса не является аксиоматическим. Не смотря на это систематический курс изложен дедуктивно, все математические факты приведены с доказательствами, научно и доступно для обучающихся. В учебном пособии предлагаются отдельные темы и параграфы для организации дифференцированного подхода в обучении, которые помечены звездочкой, это дает возможность использовать учебник, и на базовом, и на профильном уровнях.

Предложенная в учебнике система задач, позволяет обеспечить высокий уровень сложности, в том числе профильный. Еще одним достоинством учебника является наличие параграфов, которые раскрывают методику решения некоторых задач.

Учебник геометрии для общеобразовательных учреждений А.Д. Александрова и др.[1] рассчитан для базового и профильного уровней. В учебнике содержится материал, который предусмотрен базовым уровнем образовательного стандарта, и стереометрический материал, который в свою очередь ,предусмотрен профильным уровнем образовательного стандарта среднего (полного) общего образования по геометрии. Возможность использования данного учебника на профильном уровне создается за счет дифференцированного подхода при изложении теоретической части курса.

В практической части учебника более трудные задачи, в отличие от основных выделены. В целом, для процесса обучения на профильном и базовом уровнях, представленную систему задач возможно считать достаточной.

Безусловно, успех в обучении старшеклассников во многом зависит от структуры и содержания учебника, по которому они занимаются. С одними учебниками обучающиеся работают с удовольствием, активно выполняя предложенные задания. В других, теоретический материал воспринимается по-другому; создается видимость, что некоторые школьники с неохотой открывают геометрическое учебное пособие, и без всякого энтузиазма начинают работу с ним.

В современной общеобразовательной школе учебники следующих авторов получили наибольшее распространение: Погорелов А.В., Александров А.Д. и др., Атанасян Л.С. и др., причем замечено неоднозначное отношение к данным учебникам у учителей.

Анализируя методическую литературу можно сделать вывод о том , что имеются как положительные так и отрицательные отзывы о вышесказанных учебниках геометрии. Автор статьи [29] считает, что учебники А.В.Погорелова не подходят для современной школы, а так же, наоборот, восхищается тем или иным подходом автора А.Д. Александрова к изложению школьного курса геометрии [9]. Привлекает аксиоматический строгий подход, больше возможности для организации мыслительной деятельности обучающихся.

Для сравнения содержания различных учебных пособий по геометрии важно обратить внимание на цели обучения геометрии, которые были выбраны, в последнее время, в качестве ведущих. Обучение геометрии сегодня нацелено не только на развитие логического мышления обучающихся [3]. Цели обучения геометрии классифицируют на: общекультурные, научные (собственно геометрические) и прикладные [11]. Принято считать о том, что при обучении геометрии необходимо стремиться к развитию у школьников интуиции, логического и образного (пространственного) мышления, к формированию у них конструктивных навыков и умений [11].

Безусловно, достижение цели обучения геометрии в школе связана непосредственно со структурой курса геометрии. На сегодняшний день, авторы и методисты учебников делят изучение школьного курса геометрии на несколько этапов. А.Д. Александров и А.Л. Вернер делят обучение геометрии в общеобразовательной школе на три ступени:

1) С 1 по 6 классы геометрия является частью общего курса математики;
2) С 7 по 9 классы осуществляется изложение систематического курса планиметрии, содержащего элементы стереометрии;
3) В 10 –11 классах курс стереометрии ориентируется на классы с различной специализацией (физико-математические, гуманитарные и др.)

Т. Ходот предлагает «двукратное изучение курса геометрии: один раз на интуитивном уровне и второй раз на строгом логическом»[25]. Изучение геометрии на интуитивном, наглядном уровне, зарождается еще в начальной школе, при сюжетно-дидактических играх. В 5-6 классах школьники интересуются конструированием и рисованием известных геометрических фигур. Изучение в 7 – 9 классах планиметрии, продолжается на стереометрическом материале, совместно с соответствующим материалом планиметрическим. В 10, 11 классах старшеклассники изучают стереометрию, представленную аксиоматическим методом и содержащую разнообразные задачи, как планиметрические, так и стереометрические.

Несомненно, каждая ступень обучения геометрии в общеобразовательной школе играет важную роль в достижении намеченных целей обучения благодаря используемым учебникам. В связи с этим, можно сделать вывод о том, что необходима хорошая учебная литература – учебник, содержащий необходимый материал и минимум для продвинутого обучения [4]. Причем «внешняя оболочка» содержащегося в учебнике теоретического и практического материала имеет большое значение. При работе с учебной литературой рассматриваются разные способы управления познавательными действиями старшеклассников. Особое внимание следует обратить на знаковую, вспомогательную систему учебников, то есть на значки, облегчающие работу старшеклассника при решении задач. Наличие дифференцированных задач в учебниках, варьирующихся по уровню сложности, а так же и творческих активизирует стремление старшеклассника к знаниям и дает ему свободу выбора . Рассмотрим в качестве примера учебники геометрии А.В. Погорелова, А.Д. Александрова и др. и Л.С. Атанасян и др.

В учебнике А.Д. Александрова и др.[1] прослеживается градация задач. Сначала предложены основные задачи, а затем более простые и сложные задачи. Это деление отражается в использовании специальных значков для обозначения. Об уровне сложности задач в учебнике Л.С. Атанасяна и др.[3] можно судить так же по обозначениям. В учебном пособии А.В. Погорелова [30]подобная ситуация, но здесь к некоторым задачам либо подписана задача, сходная с ней и имеющая подробное решение в учебнике, либо пункт параграфа, в котором она содержится. Большое внимание уделяется авторами учебников примерам решения опорных задач, демонстрирующих прием или метод, либо сообщающих важный результат.

В числе основных положительных характеристик любого старшеклассника выделяется степень доступности и понимания текста учебника. Бытует мнение о том, что это значительно облегчает усвоение материала [8]. При рассмотрении учебника А.Д. Александрова и др., следует отметить, что к некоторым параграфам идут дополнения, позволяющие полнее раскрыть тему. Такое разграничение материала дает возможность школьникам, изучив параграф, уяснить основные понятия, а так же, ознакомиться с дополнительной информацией по изученной теме. Подобное углубление знаний необходимо так как учебник предназначен для обучающихся классов с физико-математическим профилем [1]. Учебники А.В. Погорелова и Л.С. Атанасяна и др., предназначены для общеобразовательной школы. Теоретический и практический материал предлагается краткой форме, учитывая, принцип доступности, для старшеклассников с разным уровнем подготовленности и восприятия информации по геометрии.

Во многом эффективность обучения геометрии определяется таким образом, как преподносится информация, используются ли при этом схемы, рисунки. Связано это с тем, что наглядно представлено решение задачи или логическое доказательство; целесообразнее, когда из наглядной видно решение или доказательство [4]. В последнее время все чаще говорят о том, что в процессе формирования знаний у обучающихся необходима визуализация геометрических связей и использование при обучении геометрии принципа наглядности. А.Д. Александров представляет задачу преподавания в общеобразовательной школе в живом восприятии реального мира и единстве строгой логики. В своем учебном пособии он предоставляет старшеклассникам возможность самостоятельной обработки текстовой информации, переводя ее на язык схем, чертежей, рисунков. А.Д. Александров считает, что во всяком геометрическом предложении взаимосвязано присутствуют два элемента: строгая формулировка и наглядная картинка, строгий логический вывод [1]. На количество рисунков в обсуждаемом учебнике приходится около 20% от общего объема информации.

А.В.Погорелов отдает приоритет развитию логического мышления старшеклассников [7]. От общего объема информации на количество рисунков в обсуждаемом учебнике приходится около 24%.

Авторский коллектив профессора Л.С. Атанасяна и др. – заостряет свое внимание на развитии навыков и умений обучающихся, на доступности изложения, считая, что всякая составляющая курса геометрии должна опираться на преимущественно более ясное и простое наглядное представление [3]. Л.С. Атанасян в учебник включает большое количество чертежей и рисунков.

Особенностью развития системы школьного математического образования в Российской Федерации является ориентация на профильную дифференциацию обучения геометрии.

В 2003-2004 гг. вышел в свет новый учебно-методический комплект по стереометрии для классов с профильным и углубленным изучением математики:

- Потоскуев Е.В., Звавич Л.И. Математика: алгебра и начало математического анализа, геометрия. Геометрия 10 класс. Углубленный уровень. Учебник. Задачник. (комплект из 2-х книг). М., изд. «Дрофа», 2016 – 480 с.

- Потоскуев Е.В., Звавич Л.И. Математика: алгебра и начало математического анализа, геометрия. Геометрия 11 класс. Углубленный уровень. Учебник. Задачник (комплект из 2-х книг). М., изд. «Дрофа», 2016 – 724 с.

Представленный учебно-методический комплект для классов профильного и углубленного изучения математики, включен в Федеральный список учебников.[56]

Данные комплекты учебно-методических пособий для углубленного изучения геометрии полностью соответствуют концепции модернизации российского образования и современным тенденциям развития школьного курса геометрии.

Формирование и развитие конструктивно-пространственного воображения в связи с особым подходом к обучению построения тел вращения и сечений многогранников – всё это реализовано в рассматриваемом УМК. Развитие у старшеклассников гибкости и независимости логического мышления, способности к усвоению новой информации, интеллектуальной восприимчивости – всё это реализуется через комплексный подход к обучению стереометрии.

Содержание учебных комплектов соответствует обязательному минимуму общеобразовательной школы по геометрии. Отличительной особенностью данного учебно-методический комплект является возможный выбор учителем подходящего его классу уровня углубления:

1) в общем виде, с решением ряда простых задач;

2) подробно, с решением задач, по принципу «от простого – к сложному» большинство которых соответствует уровню вступительных экзаменов в вузы.

Значительную роль играет в работе наличие в учебно-методическом комплекте дополнительного учебного материала, реализующего оптимальное сопоставление дополнительного и обязательного компонентов содержания. К таковым относятся материалы: для углубления и повторения планиметрии; методы построения сечений многогранников; о использовании определенного интеграла при вычислении объемов тел вращения, векторного произведения двух векторов; поверхностей второго порядка; о симметрии многогранников (правильных), о различных ветвях геометрии, и что не мало важно, аксиоматического построения геометрии.

Предоставление материала при дополнительном освоения геометрии старшеклассниками профильного уровня изучения геометрии, разработка по геометрии элективного курса, обеспечение работы с обучающимися, имеющими высокий уровень знаний, написание докладов для научно-практических конференций - всё это оправдывает значительное превышение минимума содержания [4].

Данный УМК в полном объеме соответствует требованиям к уровню подготовки старшеклассников к вступительным экзаменам в вузы и их уровню подготовки к ЕГЭ по геометрии.

Примечательно и то, что данный учебно-методический комплект является оптимальным по объему содержания с учетом профильного обучения и вариативного углубления, обеспечивающий возможность дифференциации обучения за счет дополнительного учебного материала и разноуровневых задач, обеспечивающий преемственность по отношению к курсу основной общеобразовательной школы.

В УМК Е.В. Потоскуева, логично, наглядно, последовательно и в связи с этим доступно раскрыты основные темы курса, такие как построение сечений многогранников; расстояние в пространстве; векторный и координатный методы в пространстве; преобразование пространства; многогранники; фигуры вращения.

Одним из очень важных преимуществ, среди учебников геометрии, является прекрасный иллюстративный материал. Важным является психологическая и эстетическая значимость блоков рисунков при построении сечений многогранников, помогающие старшеклассникам освоить способы построения сечений, в отличие от других школьных учебников.

Рассматриваемый учебно-методический комплект Е.В.Потоскуева обеспечивает возможность старшеклассникам в формировании умения применяя знаний в повседневной жизни и проявления творчества, в выполнении экспериментальных, исследовательских, конструкторских работ, в проведении критического анализа информации, в работе с дополнительными источниками информации, в понимании и объяснении принципов действия устройств.

Сбалансированный вид упражнений и задач, распределенных в учебнике по уровням: 1) репродуктивный, стандартный, типовой, качественный, проблемный, творческий исследовательский и экспериментальный.

В роли «хорошего помощника» выступают и дидактические материалы УМК, обеспечивающие возможность обобщения и систематизации знаний по прохождении определенного раздела. Материалы с историко-научным характером вызывают у обучающихся особый интерес.

Для учебно-методического комплекта Е.В. Потоскуева первоочередной является «организация познавательной деятельности школьников». Работая по данному УМК, учителю действительно на деле виден процесс формирования у обучающихся интерес к изучению предмета, а так же видно возрастание уровня подготовки старшеклассников по геометрии.

Уместно отметить, что авторы данного учебно-методического комплекта соблюдают общепринятую терминологию и символику, а так же научную корректность содержания.

Говоря о педагогической оценке учебника нельзя ни сказать о стиле и доступности изложения материала, соответствующего степени подготовленности класса. УМК построен таким образом, что практический и теоретический материал, представленный авторами, действительно способствует стремлению самостоятельно приобрести знания и росту познавательной активности обучающихся, сохранению у старшеклассников устойчивого внимания, а так же формированию ситуативных навыков и умений.

В рассматриваемом учебном пособии полностью реализованы «основные принципы дидактики»: наглядность, системность, последовательность изложения учебного материала, логичность.

С точки зрения методической науки, в учебно-методическим комплекте Е.В. Потоскуева целесообразно представлены и система развития научных понятий, теорий, и основных положений, и структура содержания учебного материала, система упражнений, практических работ и задач [40].

Данный учебно-методический комплект обеспечивает возможность реализации новых технологий и педагогических идей. Система предложенных задач соответствует требованиям уровня подготовки учащихся с учетом реализации принципа вариативности. Предусматривается в процессе обучения «уровневая дифференциация». В верном соотношении подобран практический и теоретический материал учебника.

В целом всё содержание учебного материала авторы Е.В. Потоскуев и Л.И. Звавич направили на развитие творческих способностей старшеклассников, совершенствование умения самообразования, применению знаний на практике, а так же повышение интереса к предмету у школьников [41].

Учебно-методический комплект отличается, можно сказать, во всем своей новизной – по содержанию, структуре, методическому аппарату. В процессе обучения геометрии по рассматриваемому УМК обучающиеся в целом ощущают себя комфортно и являются равноправными его участниками.

Выводы по I главе

Эффективность дифференцированного обучения решению задач в углубленном курсе геометрии старшей школы достигается за счет следующих факторов [27]:

1) отбор более подготовленных, и, главное – более мотивированных учащихся;

2) сохранение и усиление мотивации к дальнейшему математическому образованию и сферам труда, предполагающим профессиональное применение геометрии и математической деятельности;

3) развитие математических способностей, прежде всего, умения решать новые, необычные задачи, в частности, олимпиадные;

4) обучение по программам, которые содержат дифференцированные задания.

Что касается комплектов «Потоскуев Е.В., Звавич Л.И. Геометрия 10 класс. Углубленный уровень. Учебник. Задачник. (комплект из 2-х книг). М., изд. «Дрофа», 2016 – 480 с» и «Потоскуев Е.В., Звавич Л.И. Геометрия 11 класс. Углубленный уровень. Учебник. Задачник (комплект из 2-х книг). М., изд. «Дрофа», 2016 – 724 с», можно сделать следующие выводы:

1. Теоретический материал дает возможность сформировать у учащихся различные подходы в решении геометрических задач;

2.Подборка задач разного уровня сложности, которые решаются различными способами, позволяет продумывать и проводить интересные уроки в нестандартной форме;

3. Данный учебный комплект содержит замечательные подборки задач, дополнительных теорем и справочный материал.

ГЛАВА II. МЕТОДИКА РЕАЛИЗАЦИИ ДИФФЕРЕНЦИАЦИИ ПРИ ОБУЧЕНИИ РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ В УГЛУБЛЕННОМ КУРСЕ ГЕОМЕТРИИ СТАРШЕЙ ШКОЛЫ ПО УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОМУ КОМПЛЕКСУ АВТОРОВ Е.В. ПОТОСКУЕВА И Л.И. ЗВАВИЧА

§4. Методические рекомендации дифференциации обучения решению стереометрических задач при углубленном изучении темы «Взаимное расположение двух прямых в пространстве» в 10-11 классах

4.1. Взаимное расположение прямых в пространстве в синтетическом изложении

Целесообразно начинать изучение материала о взаимном расположении прямых в пространстве с повторения схожего материала о взаимном расположении двух прямых на плоскости [37].

Известно из планиметрии, что на плоскости две прямые могут либо пересекаться, либо быть параллельными (не пересекаться). В школьном курсе геометрии совпадающие прямые рассматриваются в исключительных случаях. Для лучшего усвоения и понимания материала рассмотрим ряд задач на взаимное расположение прямых в пространстве.

Выполняя решение стереометрических задач старшеклассникам *важно знать*, что:

1) через точку пространства, не лежащую на данной прямой, можно провести прямую, параллельную данной, и притом только одну;

2) из двух пересекающихся прямых только одна может быть параллельна некоторой данной прямой;

3) если две прямые параллельны третьей прямой, то они параллельны;

4) если четыре точки A, B, C и E не лежат в одной плоскости, то прямые AB и CE, AC и BE, AE и BC попарно скрещиваются [41].

Обучающимся необходимо пояснить, что две скрещивающиеся прямые на плоском чертеже изображаются либо параллельными прямыми, либо пересекающимися, либо прямой и точкой, не принадлежащей этой прямой.

При изучении данного материала учащиеся должны достичь следующих предметных результатов:

– понимать и объяснять, что две прямые параллельны третьей прямой, в том только том случае, если они параллельны;

– строить на изображениях тетраэдра, куба и других многогранников перпендикуляр из данной точки на данную прямую и находить его длину, аргументировано обосновывая каждый шаг построения и вычисления;

– решать задачи о взаимном расположении прямых в пространстве на доказательство, построение и вычисление, используя изображения и модели куба, правильного тетраэдра, призмы, пирамиды;

– изображать на построенных изображениях куба, правильного тетраэдра, правильной пирамиды и призмы, прямоугольного параллелепипеда различные случаи взаимного расположения в пространстве двух прямых[40].

4.1.1. Параллельные прямые

Параллельные прямые в пространстве обладают рядом свойств, напоминающих свойства параллельных прямых на плоскости.

Известно из планиметрии, что *если одна из двух параллельных прямых пересекает прямую с, то и вторая прямая пересекает прямую с*.

Если одна из двух параллельных прямых лежит в данной плоскости, то другая, параллельная ей прямая, не может эту плоскость пересекать.[34]

После выработки этих знаний целесообразно предложить учащимся для решения ряд следующих задач.

Задача 1. Три различные прямые p, c и m расположены в пространстве так, что прямая p параллельна прямой c, прямая c параллельна прямой m. Какие из следующих утверждений являются верными?

(1) Прямые p, c и m лежат в одной плоскости.

(2) Прямые p и m лежат в одной плоскости.

(3) Прямые p и m параллельны.

(4) Прямая p пересекает плоскость, в которой лежат прямые c и m.

Решение. Имеем: $p \parallel c$ $\Rightarrow$ существует единственная плоскость, проходящая через прямые p и c (по теореме о единственности плоскости, проходящей через две параллельные прямые). Обозначим эту плоскость через α. Прямая m, будучи параллельной прямым p и c, может не лежать в плоскости α.

Из $p \parallel c$, $c \parallel m$, следует $p \parallel m$ (по признаку параллельности прямых), значит, существует плоскость, проходящая через прямые $p \parallel m$ (по теореме о единственности плоскости, проходящей через две параллельные прямые).

Прямая p не может пересекать плоскость β, в которой лежат прямые c и m. Действительно, если прямая p пересекает плоскость β в некоторой точке К, то точка К не может принадлежать ни прямой c, ни прямой m, так как $p \parallel c$, $p \parallel m$. Тогда по признаку скрещивающихся прямых прямая p должна скрещиваться с каждой из прямых c и m, что противоречит $p \parallel c$, $c \parallel m$.

Таким образом, верными являются утверждения: прямые p и m лежат в одной плоскости; прямые p и m параллельны.

Ответ: 2; 3.

Задача 2. ([32], 2.011). Прямые a и b параллельны. Докажите, что все прямые пространства, пересекающие обе прямые a и b, лежат в одной плоскости.

Доказательство. Так как $a \| b$,то они лежат в одной плоскости и не пересекаются, т.е. через них можно провести плоскость. Обозначим ее α.

Прямая с, пересекающая данные параллельные прямые имеет с плоскостью α две общие точки – точки пересечения с данными прямыми. По аксиоме (прямой и плоскости) эта прямая лежит в плоскости α.

Итак, все прямые, пересекающие две данные параллельные прямые, лежат в одной плоскости – плоскости α.

Что и требовалось доказать.

В качестве упражнения для самостоятельной работы учащимся можно предложить следующую задачу.

***Задача* 3.** ([32], 2.032) Верно ли утверждение: если две прямые в пространстве перпендикулярны третьей прямой, то эти прямые параллельны? Является ли это утверждение верным, если: а) все три прямые лежат в одной плоскости; б) все три прямые параллельны одной плоскости; в) каждые две из них скрещиваются?

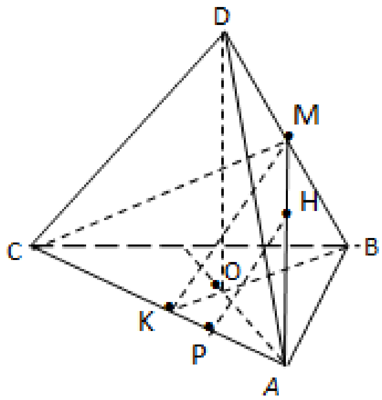

Рис. 3

***Задача* 4.** [36] ABCD – правильный тетраэдр с длиной ребра 9. Точки M и K – середины ребер BD и AC соответственно. Точка P делит ребро AC в отношении 7:3, считая от точки C. Найдите длину заключенного внутри тетраэдра отрезка прямой, проходящей через точку P параллельно прямой KM.

Решение.

1) Отрезок KM лежит в плоскости ACM (рис. 3), где M-середина BD. Так как точка P принадлежит плоскости ACM, а прямая, на которой лежит искомый отрезок, параллельна KM, то искомый отрезок расположен в плоскости ACM. Прямая, проведенная в плоскости ACM параллельно KM, пересекает отрезок AM в некоторой точке H. Значит, PH – искомый отрезок.

2) Имеем: PH||KM $\Rightarrow$ ΔAPH~ΔAKM $\Rightarrow$ $\frac{AP}{AK}=\frac{PH}{KM}$. Из условия следует:

$\frac{AP}{AC} = \frac{3}{10}$. Так как точка К – середина АС, то АС = 2 АК, поэтому

$\frac{AC}{2AK} = \frac{3}{10} \Rightarrow \frac{AP}{AK} = \frac{3}{5}$. Значит, $\frac{AP}{AK} = \frac{PH}{KM} = \frac{3}{5} \Rightarrow$ PH = $\frac{3}{5}$КМ.

Так как АМ = СМ = $\frac{9\sqrt{3}}{2}$ (как медианы равных правильных треугольников ABD и CBD). Значит, ΔАСМ – равнобедренный.

ΔАКМ – прямоугольный, по теореме Пифагора найдем КМ = $\sqrt{AM^2 - AK^2} = \sqrt{\left(\frac{9\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \left(\frac{9}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{81\cdot 3 - 81}{4}} = \frac{9\sqrt{2}}{2}$. Тогда PH = $\frac{3}{5}$ · КМ =

$= \frac{3}{5} \cdot \frac{9\sqrt{2}}{2} = \frac{27\sqrt{2}}{10}$.

Ответ: $\frac{27\sqrt{2}}{10}$.

4.1.2. Пересекающиеся прямые. Угол между лучами. Угол между прямыми.

Для решения содержательных стереометрических задач необходимы умения верно и наглядно изображать фигуры, заданные условиями данных задач. Эти умения вырабатываются при решении опорных, базовых задач и достаточно большого числа задач различного уровня сложности с аргументированными обоснованиями конструктивного, логического и вычислительного характера [39].

Ниже иллюстрируются решения некоторых из опорных задач стереометрии.

Задача 5. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найдите угол между прямыми AD_1 и A_1B (рис.4).

Решение. Имеем: $AB \parallel D_1C_1$ и $AB = D_1C_1$ (как противоположные ребра данного куба) $\Rightarrow ABC_1D_1$ – параллелограмм $\Rightarrow$ $AD_1 \parallel BC_1$, поэтому $\angle(AD_1, A_1B) = \angle(BC_1, A_1B) = \angle(BC_1, BA_1) = \angle A_1BC_1$.

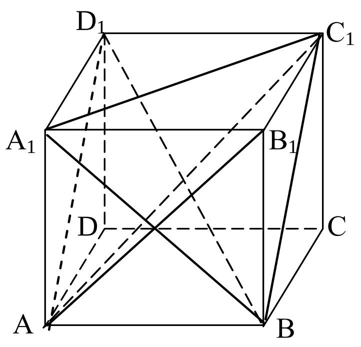

Рис.4

Так как все грани куба – равные квадраты, то $BC_1 = BA_1 = A_1C_1$ (как диагонали равных квадратов) $\Rightarrow \Delta\ BA_1C_1$ – правильный $\Rightarrow \angle A_1BC_1 = 60°$ $\Rightarrow$ $\Rightarrow \angle(AD_1, A_1B) = 60°$.

Ответ: 60°.

Для успешного решения задачи требуется построить верное и наглядное изображение не только того, что задано в условии задачи. Возникает необходимость осуществить дополнительные построения, без которых решение задачи затрудняется и которые также должны быть верными, наглядными и простыми [37].

Рассмотрим, например, решение такой задачи.

Задача 6. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найдите угол между прямыми BD_1 и AC (рис.5).

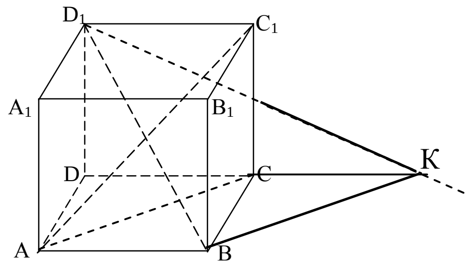

Рис.5

Решение. На луче DC отложим отрезок CK = DC, тогда четырёхугольник ACKB - параллелограмм, в котором AC =BK и AC$\parallel$BK (почему?). Значит,$\angle$(BD$_1$,AC)=

= $\angle$(BD$_1$,BK)= $\angle$KBD$_1$ =φ.

Пусть ребро куба равно 1. Тогда:

BK = AC = $\sqrt{2}$; BD$_1$ =$\sqrt{3}$. В прямоугольном треугольнике KDD$_1$ имеем:

D$_1$K = $\sqrt{D_1D^2 + BK^2}$ = $\sqrt{1^2 + 2^2}$ = $\sqrt{5}$.

Используя теорему косинусов в Δ KBD$_1$, находим:

$\cos\varphi$ = $\dfrac{BK^2 + BD_1^2 - KD_1^2}{2BK \cdot BD_1}$ = $\dfrac{(\sqrt{2})^2 + (\sqrt{3})^2 - (\sqrt{5})^2}{2 \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{3}}$ = 0 $\Rightarrow \varphi$ = 90°. Таким образом,

$\angle$(BD$_1$,AC)= 90°. *Ответ*: 90°.

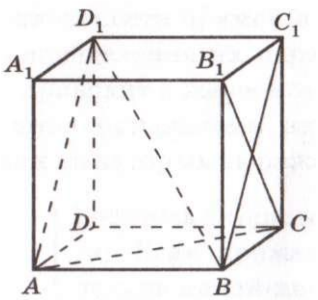

Рис.6

Задача 7 . В кубе ABCDA$_1$B$_1$C$_1$D$_1$ (рис.6) найдите угол между прямыми BC$_1$ и DD$_1$.

Ответ: 45°.

Задача 8. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис.6) найдите угол между прямыми BD_1 и AC.

Ответ: 90°.

Задача 9. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис.6) найдите угол между прямыми BC_1 и AC.

Ответ: 60°.

Задача 10. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис.6) найдите угол между прямыми BD_1 и B_1C.

Ответ: 90°.

4.1.3. Скрещивающиеся прямые

Для закрепления теоретического материала о скрещивающихся прямых необходимо, используя модели и изображения многогранников, рассмотреть решение задач, подобранных по принципу «от простого - к сложному», в которых вырабатываются и закрепляются навыки и умения логического, графического и вычислительного характера.

Рассмотрим, например, следующую задачу:

Задача 11. Прямые AB и KM скрещиваются. Как могут располагаться прямые AK и BM?

а) Только быть параллельными; б) Скрещиваться или быть параллельными; в) Пересекаться или быть параллельными; г) Только скрещиваться.

Решение. Предположим, что прямые AK и BM пересекаются. Тогда через них можно провести некоторую единственную плоскость (обозначим её α), в которой расположены данные четыре точки A, B, K и M. По аксиоме прямой и плоскости, прямые AB и KM, проходящие соответственно через пары точек A и B, K и M, лежащие в плоскости α, оказываются расположенными в плоскости α, что противоречит определению скрещивающихся прямых. Это противоречие свидетельствует, что наше допущение о пересечении прямых АК и ВМ ошибочно, то есть эти прямые пересекаться не могут.

Аналогично можно доказать, что прямые АК и ВМ не могут параллельными.

Таким образом, варианты а), б) и в) взаимного расположения прямых невозможны, а возможен единственный вариант г).

В самом деле, так как прямые АВ и КМ скрещиваются, то точки А, В и К не лежат на одной прямой. Пусть β - плоскость, проходящая через эти точки. Тогда имеем: прямая АК лежит в плоскости β, а прямая ВМ пересекает эту плоскость в точке В, не принадлежащей прямой АК. По признаку скрещивающихся прямых прямые АК и ВМ скрещиваются.

Ответ: Прямые АК и ВМ могут только скрещиваться.

Задача 12 ([32], 2.027). Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Точки E_1, E_2, E_3, E_4, E_5, E_6, E_7 - середины ребер соответственно A_1B_1, B_1C_1, BB_1, CC_1, DD_1, AB и AD (рис. 7). Как расположены прямые: а) E_1E_2 и E_3E_4; б) E_2E_3 и E_5E_7; в) E_1E_3 и E_6E_7; г) E_1E_2 и E_4E_5.

Решение. а) Прямая E_3E_4 лежит в плоскости BB_1C. Прямая E_1E_2 пересекает эту плоскость в точке E_2, не принадлежащей прямой E_3E_4, поэтому прямые E_1E_2 и E_3E_4 скрещиваются (по признаку скрещивающихся прямых) (рис. 7).

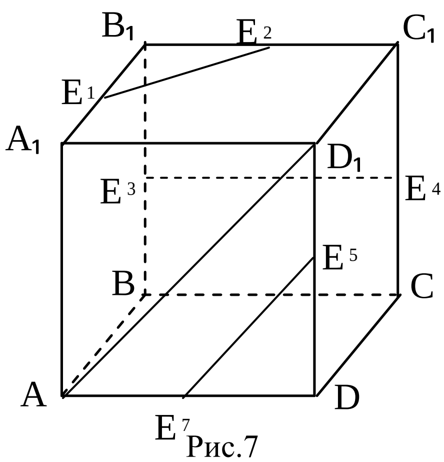

Рис.7

б) Имеем: $E_2E_3 \parallel BC_1$ (как средняя линия треугольника BB_1C_1 (рис.8); $E_5E_7 \parallel AD_1$ (как $BC_1 \parallel AD_1$, то $E_2E_3 \parallel E_5E_7$.

в) Прямая E_1E_3 лежит в плоскости ABB_1, прямая E_6E_7 пересекает эту плоскость в точке E_6, не принадлежащей прямой E_1E_3 (рис. 8). Это означает, что прямые E_1E_3 и E_6E_7 скрещивающиеся (по признаку скрещивающихся прямых).

г) E_1E_2 и E_4E_5 - скрещивающиеся прямые.

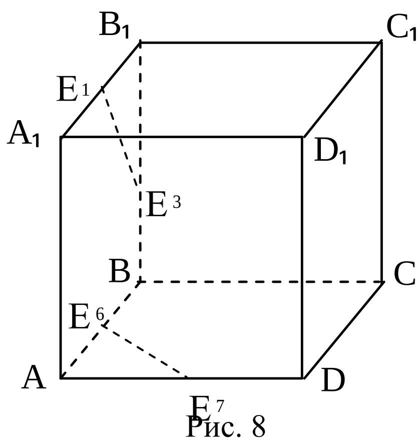

Рис. 8

Вопрос о вычислении расстояния между скрещивающимися прямыми является одним из наиболее трудных в школьной программе геометрии. Покажем некоторые способы решения подобных задач.

В учебном пособии Е.В. Потоскуева говорится о том, что *расстояние между скрещивающимися прямыми есть длина отрезка с концами на этих прямых, перпендикулярного обеим прямым. Искомый отрезок является общим перпендикуляром к скрещивающимся прямым* [32].

Воспользовавшись одним из нижеприведенных способов можно вычислить расстояние между скрещивающимися прямыми:

1. Построить общий перпендикуляр двух скрещивающихся прямых (отрезок с концами на этих прямых и перпендикулярный обеим) и найти его длину.

2. Построить плоскость, содержащую одну из прямых и параллельную второй. Тогда искомое расстояние будет равно расстоянию от какой-нибудь точки второй прямой до построения плоскости.

3. Провести параллельные плоскости через данные скрещивающиеся прямые. Тогда расстояние между этими плоскостями равно расстоянию между данными скрещивающимися прямыми (метод параллельных плоскостей).

Задача 13. Построить плоскость, перпендикулярную одной из прямых, и построить на этой плоскости ортогональную проекцию этой прямой (метод проектирования).

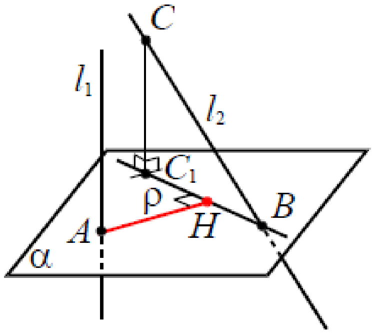

Рис. 9

$\rho(l_1,l_2)=\rho(A,BC_1)=AH$, где $A=l_1\cap\alpha$, $\alpha\perp l_1$, BC_1 – ортогональная проекция l_2 на плоскость α, H – основание перпендикуляра, опущенного из A на BC_1 (рис. 9).

Можно находить расстояние между двумя скрещивающимися прямыми, пользуясь «методом параллельных плоскостей», в основании которого лежит утверждение: расстояние между двумя скрещивающимися прямыми равно расстоянию между параллельными плоскостями, проходящими через эти прямые.

Рассмотрим решение такой задачи.

Задача 14 [35]. Найдите расстояние между скрещивающимися диагоналями AB_1 и BC_1 смежных граней ABB_1A_1 и BCC_1B_1 куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис. 10) с ребром 18.

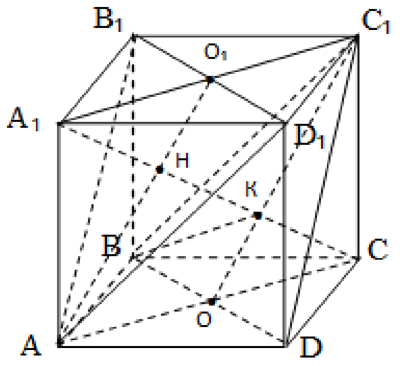

Рис. 10

Решение. Прямые AB_1 и BC_1 лежат в плоскостях соответственно AB_1D_1 и BC_1D, которые параллельны. Кроме того, $A_1C \perp (BC_1D)$, причем $A_1C \cap (AB_1D_1) = H$, $A_1C \cap (BC_1D) = K$, $KH = \frac{1}{3} \cdot A_1C = = \frac{1}{3} \cdot 18\sqrt{3} = 6\sqrt{3}$.

Это означает, что $\rho(AB_1; BC_1) = \rho((AB_1D_1); (BC_1D)) = KH = 6\sqrt{3}$.

Ответ: $6\sqrt{3}$.

Целесообразно предложить старшеклассникам следующую задачу в качестве упражнения для самостоятельной работы.

Задача 15. ([32], 2.002). Нарисуйте куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. 1. Выделите в нем ребро BB_1 и назовите все ребра куба: а) параллельные ему; б) пересекающие его; в) скрещивающиеся с ним. 2. Выделите диагональ AD_1 грани ADD_1A_1 куба и назовите диагонали других граней: а) параллельные AD_1; б) пересекающие ее; в) скрещивающиеся с ней. Ответ обоснуйте.

Ответ: 1. а)AA_1, CC_1, DD_1; б)AB,A_1B_1,BC,B_1C_1; в)AD,A_1D_1,DC,D_1C_1; 2. а)BC_1; б)AB_1,AC,D_1C; в)A_1C_1,DB,B_1C,DC_1.

Старшеклассникам следует пояснить, что угол между скрещивающимися прямыми называется величина угла между параллельными им пересекающимися прямыми.

Величина угла между скрещивающимися прямыми a и b определяется следующим образом. Необходимо провести прямые a_1 a и b_1 b через произвольную точку M пространства и найти величину угла между пересекающимися прямыми a_1 и b_1 (рис. 11). Полученная величина является градусной мерой угла между скрещивающимися прямыми a и b. При этом значение угла между скрещивающимися прямыми от выбора точки M не зависит.

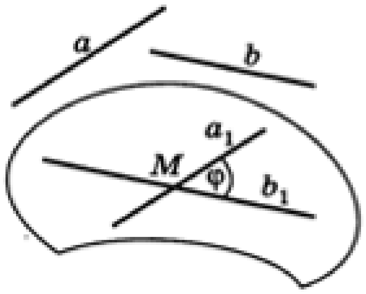

Рис. 11

Точку М можно взять на одной из прямых a и b, например, на прямой a, и в плоскости, определяемой прямой b и точкой M, провести через M прямую b_1 b (рис. 12). Углом между пересекающимися прямыми a и b_1 является угол между скрещивающимися прямыми a и b. При этом выбирать следует ту из двух данных прямых и такую точку на другой из них, чтобы полученное изображение угла было наглядным, а его построение наиболее простым; величина искомого угла не зависит от выбора точки M. Величина угла φ между прямыми в пространстве, как и на плоскости, принадлежит промежутку $[0^o; 90^o]$, при этом если $\varphi = 90^o$, то прямые перпендикулярны. Если параллельные прямые рассматриваются в комбинации с перпендикулярными им прямыми, то справедливо следующее утверждение: если одна из двух параллельных прямых перпендикулярна некоторой прямой, то и вторая прямая перпендикулярна этой прямой [39].

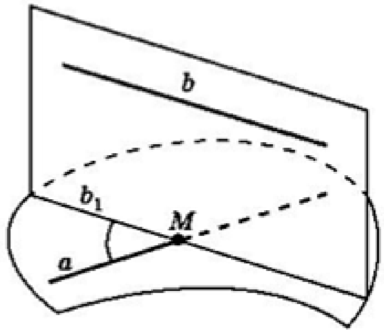

Рис. 12

Старшеклассникам необходимо научиться «видеть» и правильно изображать (строить), и что не мало важно, вычислять углы между прямыми. Следует уделить особое внимание выработке умений у обучающихся на данном изображении многогранника, многоугольника верно изображать на рисунке прямую, перпендикулярную данной прямой или данной плоскости.

Дело в том, что величина угла при параллельном проектировании не сохраняется, поэтому изображение перпендикулярных прямых на плоском чертеже, вообще говоря, не является перпендикулярными прямыми, а изображение прямого угла – вообще говоря, не является прямым, а острым или тупым углом.

Можно для решения предлагать задачи, которые содержат большое количество «подзадач» различного уровня сложности, связанных друг с другом, ряд из которых «организованы в таблицы». Такой методический прием качественно ускоряет работу класса и увеличивает объем рассматриваемого задачного материала на уроке [35].

Задача 16. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найдите угол между прямыми AD_1 и CC_1.

Решение. $CC_1 \subset (CDD_1)$, $AD_1 \cap (CDD_1) = D_1 \notin CC_1 \Rightarrow$ прямые AD_1 и CC_1 скрещиваются (по признаку скрещивающихся прямых).

Имеем: $AB \parallel D_1C_1$ и $AB = D_1C_1$ (как противоположные ребра данного куба) $\Rightarrow$ $\Rightarrow ABC_1D_1$ – параллелограмм $\Rightarrow$ $AD_1 \parallel BC_1$ (почему?), поэтому $\angle(AD_1, CC_1) =$

$= \angle(BC_1, CC_1) = \angle BC_1C = 45°$ (ΔBC_1C- равнобедренный прямоугольный).

Ответ: 45°.

4.1.4. Перпендикулярные прямые

Задача 17. Прямые a, b, m и n расположены в пространстве так, что никакие три из них не лежат в одной плоскости, при этом: $a \parallel b$, $\mathrm{m} \parallel \mathrm{n}$ и $a \perp \mathrm{m}$. Чему равен угол между прямыми b и n?

Решение. Имеем: $a \perp \mathrm{m} \Rightarrow \mathrm{m} \perp a$. Тогда: $\mathrm{m} \parallel \mathrm{n}$, и $\mathrm{m} \perp a \Rightarrow \mathrm{n} \perp a$ (по свойству параллельных прямых, одна из которых перпендикулярна данной прямой). Далее получаем: $\mathrm{n} \perp a$, $a \parallel b \Rightarrow \mathrm{n} \perp b$ (по свойству прямой, перпендикулярной одной из двух параллельных прямых) $\Rightarrow \angle(\mathrm{n}, b) = 90°$.

Ответ: 90°.

Задача 18 ([32], 2.039). Точка K – середина ребра PB правильного тетраэдра PABC. Опустите перпендикуляры из точки K на прямые: а) AP; AB: б) AC. Найдите длину каждого перпендикуляра, если ребро тетраэдра равно a.

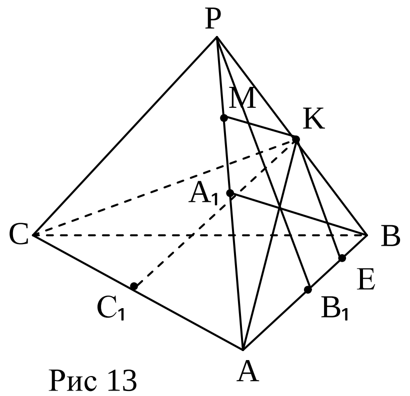

Рис 13

Решение. а) Пусть точки A_1, B_1,C_1 - середины ребер соответственно AP, AB и AC, тетраэдра PABC (рис.13). Треугольник ABP – правильный, поэтому его медиана A_1B перпендикулярна AP. Значит, отрезок KM, проведенный параллельно A_1B, перпендикулярен AP и является искомым перпендикуляром из точки K на прямую AP.

Аналогично, проводим EK||PB$_1$ и Отрезки MK и KT – искомые перпендикуляры из точки K на прямые AP и AB соответственно.

Так как MK проходит через середину K ребра PB параллельно медиане A$_1$B ΔABP, то MK – средняя линия этого треугольника. Значит, MK= $\frac{1}{2}$ BA$_1$ $=\frac{1}{2}\cdot\frac{a\cdot\sqrt{3}}{2}=\frac{a\sqrt{3}}{4}$. Аналогично, EK = $\frac{1}{2}$PB$_1$ $=\frac{a\sqrt{3}}{4}$.

б) Правильные треугольники PCB и PAB равны, значит, равны и их медианы CK и AK. Поэтому треугольник ACK – равнобедренный с основанием AC (CK =AK). Так как точка C$_1$ – середина этого основания, то проводим медиану C$_1$K этого треугольника, которая является искомым перпендикуляром из точки K на прямую AC. Найдем длину перпендикуляра C$_1$K:

В правильном ΔCBP: CK $=\frac{BC\sqrt{3}}{2} = \frac{a\cdot\sqrt{3}}{2}$;

в прямоугольном ΔCC$_1$K: CC$_1$ = $\frac{1}{2}$ AC = $\frac{1}{2}\cdot a=\frac{a}{2}$, тогда

по теореме Пифагора получаем:

$$C_1K=\sqrt{CK^2-C_1K^2}=\sqrt{\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2-\left(\frac{a}{2}\right)^2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}.$$

Ответ: а) $\frac{a\sqrt{3}}{4}$; $\frac{a\sqrt{3}}{4}$; б) $\frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Задача 19 [35]. В кубе ABCDA$_1$B$_1$C$_1$D$_1$ с ребром 18 требуется найти расстояние между прямыми A$_1$C и C$_1$B.

Решение. а) Имеем (рис.14): AC⊥BD (свойство диагоналей квадрата); AC- проекция A$_1$C на (ABC); Аналогично, A$_1$C ⊥ C$_1$D, а C$_1$D ∩BD. Значит, A$_1$C ⊥ (BC$_1$D) по признаку перпендикулярности прямой к плоскости; DK ⊂ (BC$_1$D), тогда A$_1$C ⊥ KD (по определению прямой, перпендикулярной плоскости); DK ⊥ BC$_1$ (ΔBDC$_1$- правильный).

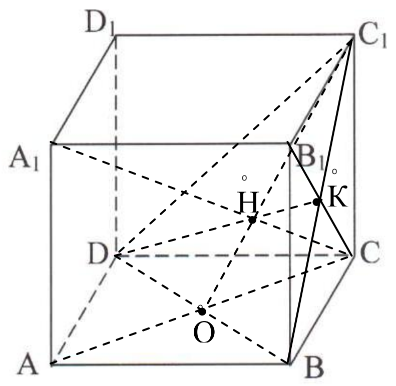

Рис. 14

Получили: $A_1C \perp KD$; $DK \perp BC_1$ расстояние между прямыми $\rho(BC_1; A_1C)$ = = HK, где $H = DK \cap C_1O$.

По свойству диагоналей квадрата имеем: $C_1D = DB = C_1B = 18\sqrt{2}$

=> $DK = BC_1 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 18\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 9\sqrt{6}$. Найдем $HK = \frac{1}{3}$ $DK = \frac{1}{3} \cdot 9\sqrt{6} = 3\sqrt{6}$.

Ответ: $3\sqrt{6}$.

Задача 20 [35]. Точка M – середина ребра AC правильного тетраэдра PABC; CO - его высота, $O \in (PAB)$ (рис.15). Опустите из точки O перпендикуляр на прямую AC и найдите его длину, если ребро тетраэдра равно 3 .

Решение. Имеем (рис.15): $MB \perp AC$ (как медиана правильного ΔABC);

$PM \perp AC$ (как медиана правильного ΔAPC); причем, $PM \cap MB = M$. Поэтому $AC \perp (BPM)$ (по признаку перпендикулярности прямой и плоскости).

Если точка H – середина стороны BP, то $MH \subset (MBP)$ (рис.13), и, учитывая $AC \perp (BPM)$, получаем: $AC \perp MH$ (по определению прямой, перпендикулярной плоскости).

Точка O – центроид ΔABP, поэтому AO:OH = 2:1.

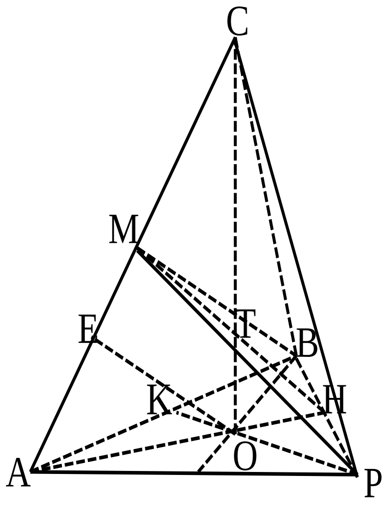

Рис 15

Расстояние ρ (O;AC) от точки O до прямой AC равно длине перпендикуляра, проведенного из точки O на прямую AC. Так как $O \in (AMH)$ и $MH \perp AC$, то проводим отрезок $OE \| MH$, $E \in AC$. Тогда $OE \perp AC$ (по теореме о перпендикулярности прямой и плоскости), значит, OE =ρ (O;AC). Теперь находим длину отрезка OE.

Имеем: $MH \perp AC$, $OE \perp AC \Rightarrow OE \| MH$; AO:AH = 2:3$\Rightarrow$ AE:AM= 2:3 (по теореме Фалеса), значит, AE = $\frac{2}{3}$AM $=\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{2}=1$. Тогда в прямоугольном ΔAOE с катетом AE=1 и гипотенузой OA = $\frac{2}{3}$AH = $\frac{2}{3} \cdot \frac{3\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$ находим по теореме Пифагора: OE = $\sqrt{AO^2 - AE^2} = \sqrt{(\sqrt{3})^2 - 1^2} = \sqrt{3-1} = \sqrt{2}$.

Ответ: $\sqrt{2}$.

§5. Методические рекомендации дифференциации стереометрических задач при углубленном изучении темы «Взаимное расположение прямой и плоскости в пространстве» в 10-11 классах

5.1. Взаимное расположение прямой и плоскости в пространстве в синтетическом изложении

Изучение темы: «Взаимное расположение прямой и плоскости в пространстве» во многих учебниках переносится на более поздний срок. Отметим, что такой «запоздалый перенос» данной темы препятствует динамике, темпам развития навыков обучающихся в решении содержательных задач стереометрии, что, в свою очередь, не благоприятно влияет на изучение дальнейшего теоретического материала стереометрии. Вопросы взаимного расположения прямой и плоскости в пространстве авторы Е.В. Потоскуев и Л.И. Звавич учебника [32] предлагают изучать так:

- прямая и плоскость в пространстве могут быть:

1) параллельными (рис. 16);

2) пересекающимися (рис. 17);

3) инцидентными (рис. 18).

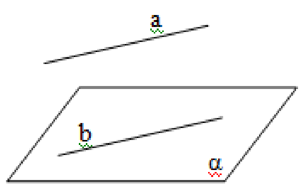

Рис. 16

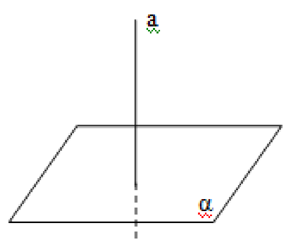

Рис. 17

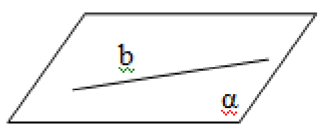

Рис. 18

Эти случаи характеризуются следующими параметрами:

1) расстоянием h между плоскостью и прямой (то есть между прямой и ее ортогональной проекцией на эту плоскость);

2) углом между плоскостью и прямой.

Целесообразно подобрать задачи для данного раздела таким образом, чтобы соблюдался один из принципов дидактики – принцип «от простого – к сложному»: сначала представлены несложные задачи на обоснование взаимного расположения прямой и плоскости в пространстве (Являются ли параллельными ? Каково взаимное расположение…? Справедливо ли утверждение…? и т.п..). Далее уместно предложить для решения задачи на построение, в том числе**,** на построение сечений правильного тетраэдра, правильной четырехугольной пирамиды, куба и т.п. [36].

5.1.1. Параллельная прямая и плоскость

Основанием для изучения темы «Параллельная прямая и плоскость» является развитие кругозора старшеклассников и абстрактного мышления. Поиск решения для задач данного параграфа будет способствовать выработке у школьников навыков осуществления необходимых в будущем построений на изображениях многогранников.

Е.В. Потоскуев говорит о том, что *параллельными прямая и плоскость, называются тогда, когда они не имеют общих точек* [34]. Если прямая a и плоскость α параллельны, то записывают $a \parallel \alpha$ или $\alpha \parallel a$. В связи с этим говорят, что плоскость α параллельна прямой a или прямая a параллельна плоскости α.

При решении стереометрических задач обоснование параллельности плоскости и прямой при помощи только одного определения вызывает трудности и к нужному результату не приводит. В подобных случаях используют признаки параллельности прямой и плоскости. Перечислим их:

– *Если прямая, не лежащая в плоскости, параллельна какой-либо прямой, лежащей в этой плоскости, то эти прямая и плоскость параллельны* (рис. 19).

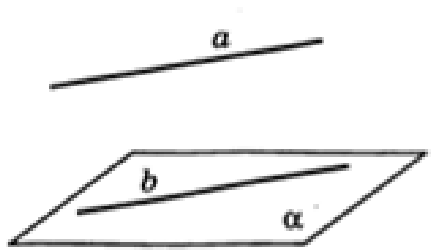

Рис. 19

– Плоскость и не лежащая в ней прямая, параллельные некоторой плоскости, параллельны.

– Плоскость и не лежащая в ней прямая, параллельные некоторой прямой, параллельны.[34]

При решении задач кроме признаков параллельности прямой и плоскости, используют свойства прямой и параллельной ей плоскости, выраженные в теоремах:

– Если плоскость проходит через прямую, параллельную другой плоскости, и пересекает эту плоскость, то прямая пересечения этих плоскостей параллельна данной прямой.[34]

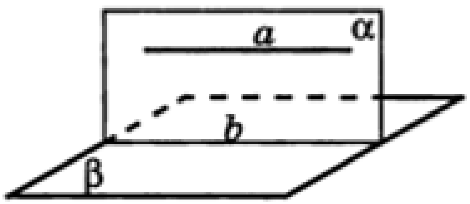

Рис. 20

На рис. 20 имеем: $a \parallel \beta$; a включено в α; α пересекает $\beta = b$. Следовательно, $b \parallel a$.

Из этой теоремы следует, что если прямая а параллельна плоскости, то в плоскости существуют прямые, параллельные прямой а.

– Если через каждую из двух параллельных прямых проведена плоскость, причем эти плоскости пересекаются, то прямая их пересечения параллельна каждой из данных прямых (рис. 21).

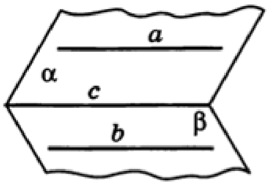

Рис. 21

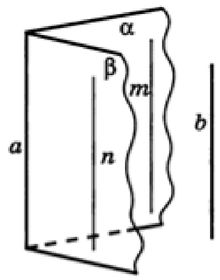

Рис. 22

– Если прямая параллельна каждой из двух пересекающихся плоскостей, то она параллельна их линии пересечения (рис. 22).

Вышеприведенные *признаки* применяются при решении различных стереометрических задач по уровню сложности, в том числе, и в таких случаях, когда для нахождения решения задачи требуется произвести некоторые дополнительные построения.

Со старшеклассниками полезно решать следующие задачи или аналогичные им.

Задача 21 ([32], 3.002). Верно ли утверждение: если прямая параллельна плоскости, то она не пересекает ни одной прямой: а) лежащей в этой плоскости; б) параллельной этой плоскости? Ответ обоснуйте.

Ответ: а) верно; б) не верно; в) верно.

Задача 22. Выберите верные утверждения.

а) Если прямая пересекает одну из пересекающихся плоскостей, то она пересекает и другую из этих плоскостей.

б) Если прямая параллельна прямой пересечения двух плоскостей, то она параллельна хотя бы одной из этих плоскостей.

в) Если прямая параллельна каждой из двух пересекающихся плоскостей, то она параллельна и линии пересечения этих плоскостей.

г) Если прямая параллельна одной из пересекающихся плоскостей, то она параллельна и второй плоскости.

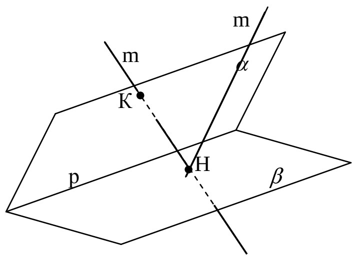

Рис. 23

Решение. а) Пусть плоскости α и β пересекаются по прямой p, прямая m пересекает плоскость β в некоторой точке Н$\notin p$. Возможны два случая: 1) прямая m не параллельна плоскости α , тогда они пересекаются в некоторой точке К $\neq$ Н (рис.23); 2) прямая m параллельна плоскости α (рис.23), тогда они не пересекаются. Таким образом, утверждение а) неверно.

б) В плоскости β проведем прямую m, параллельную прямой p = $\alpha \cap \beta$ (рис.24). Имеем: $m \parallel p$, р$\subset \alpha \Rightarrow \ \Rightarrow m \parallel \alpha$ (по признаку параллельности прямой и плоскости). Таким образом, прямая m, параллельная линии пересечения двух плоскостей и расположенная в одной из них, параллельна одной из этих пересекающихся плоскостей. Значит, утверждение б) верно.

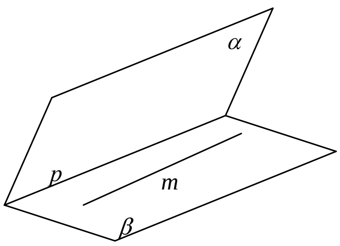

Рис. 24

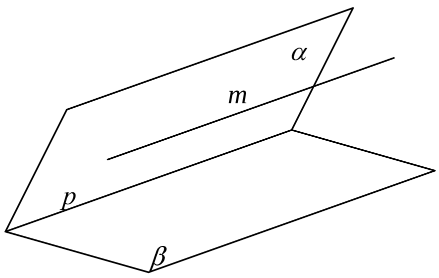

Рис. 25

в) Пусть $p = \alpha \cap \beta$, $m \| \alpha$, $m \| \beta$ (рис.25). Допустим, что прямая m пересекает прямую p в некоторой точке Н. Так как точка Н принадлежит прямой $p = \alpha \cap \beta$, которая лежит в плоскости β, то прямая m пересекает плоскость β в точке К, что противоречит условию: $m \| \beta$. Это противоречие свидетельствует о том, что прямая m не может пересекать прямую пересечения двух параллельных ей плоскостей. Значит, утверждение в) верно.

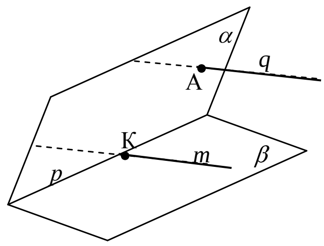

Рис. 26

г) Пусть $\alpha \cap \beta = p$. Проведем в плоскости β произвольную прямую m, пересекающую прямую p в некоторой точке К, значит, пересекающую в этой точке плоскость α. Теперь проведем прямую q, параллельную прямой m и не лежащую в плоскости β (рис.26). Прямая q параллельна плоскости β (по признаку параллельности прямой и плоскости), но пересекает плоскость β (по теореме о двух параллельных прямых, одна из которых пересекает данную плоскость). Значит, утверждение г) неверно.

Ответ: б); в).

Задача 23. PABC - тетраэдр. Через середины ребер AB и BC проведена плоскость, делящая ребро PC в отношении 3:7, считая от вершины C. Сторона сечения тетраэдра этой плоскостью, лежащая на грани PAC, равна 14см. Найдите длину стороны сечения, лежащей на грани ABC.

Решение. Пусть точки К и Т – середины рёбер соответственно ВС и АВ тетраэдра РАВС (рис.27); М -точка, делящая ребро РС в отношении СМ:МР = 3:7.

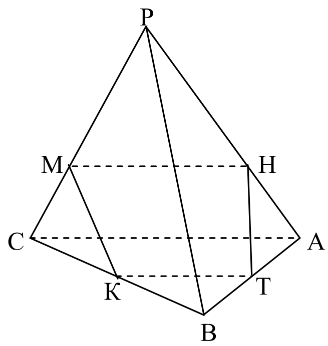

Рис.27

Так как точки К и Т – середины сторон ВС и АВ треугольника АВС, то отрезок КТ – средняя линия этого треугольника, поэтому КТ$\parallel$АС, КТ = 0,5АС (по свойству средней линии треугольника). Тогда КТ$\parallel$(РАС) (по признаку параллельности прямой и плоскости).

Плоскость МТК проходит через прямую КТ и точку М$\in$(АРС), поэтому пересечением этих плоскостей служит прямая МН, параллельная КТ (по теореме о пересечении двух плоскостей, одна из которых проходит через прямую, параллельную другой). Получаем:

МН$\parallel$КТ, КТ$\parallel$АС$\Rightarrow$ МН$\parallel$АС (по свойству параллельных прямых). Таким образом, в сечении получаем трапецию МНТК, основания КТ и МН которой параллельны ребру АС данного тетраэдра, при этом МН = 14 (по условию задачи).

Так как СМ:МР = 3:7, то РС:РМ =10:7. Имеем: МН$\parallel$АС, РС:РМ =10:7$\Rightarrow$ $\Rightarrow \frac{AC}{MH} = \frac{10}{7}$(из подобия треугольников РНМ и РАС) $\Rightarrow$ АС = $\frac{10MH}{7} = \frac{10 \cdot 14}{7}$ = 20. Тогда: КТ = 0,5АС = 0,5·20 = 10 (см).

Ответ: 10 см.

Задачи для самостоятельного решения

Задача 24. Выберите верные утверждения.

а) Если плоскость пересекает одну из параллельных прямых, то она пересекает и вторую прямую.

б) Если плоскость пересекает две прямые, то эти прямые параллельны.

в) Если плоскость не имеет общих точек с одной из параллельных прямых, то она не имеет общих точек и со второй прямой.

г) Если одна из параллельных прямых принадлежит плоскости, то и вторая принадлежит этой плоскости.

Ответ: Если плоскость пересекает одну из параллельных прямых, то она пересекает и вторую прямую.

Задача 25. Выберите верные утверждения.

а) Если прямая параллельна некоторой прямой, лежащей в плоскости, то она параллельна и самой плоскости.

б) Если прямая, не лежащая в плоскости, параллельна некоторой прямой, лежащей в этой плоскости, то она параллельна и этой плоскости.

в) Если прямая, не лежащая в данной плоскости, параллельна некоторой прямой, также не лежащей в этой плоскости, но ей параллельной, то данная прямая параллельна данной плоскости.

г) Если прямая параллельна некоторой прямой, не лежащей в плоскости, то она параллельна и самой плоскости.

Ответ: Если прямая, не лежащая в плоскости, параллельна некоторой прямой, лежащей в этой плоскости, то она параллельна и этой плоскости.

Если прямая, не лежащая в данной плоскости, параллельна некоторой прямой, также не лежащей в этой плоскости, но ей параллельной, то данная прямая параллельна данной плоскости.

Задача 26. В правильном тетраэдре DABC, все ребра которого равны 8, точка К лежит на ребре BD так, что DK = 2; точка М лежит на ребре BC так, что BM = 6, точка Р – середина AB (рис. 28).

а) Докажите, что KM параллельна плоскости ADC.

б) Докажите, что PM не параллельна плоскости ADC.

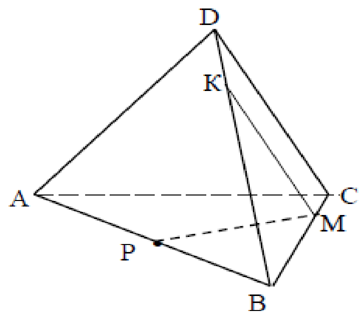

Рис. 28

Решение. Рассмотрим правильный тетраэдр DABC. По условию имеем: DK = 2, BM = 6.

Находим: CM = BC – BM = 8 – 6 = 2, BK = BD – DK = 8 – 2 = 6, AP = PB = 4 (так как P – середина AB).

Для решения задачи воспользуемся теоремой о пропорциональных отрезках, которые отсекаются параллельными прямыми на сторонах данного угла. а) В грани BCD, по теореме о пропорциональных отрезках, имеем: $\frac{BK}{BD}=\frac{BM}{BC}=\frac{6}{8}=\frac{3}{4}\Rightarrow$ KM || CD ⇒ KM || (ADC) (по признаку параллельности прямой и плоскости).

б) По теореме о пропорциональных отрезках имеем:

$$\frac{BP}{AB}=\frac{4}{8}=\frac{1}{2},\ \frac{BM}{BC}=\frac{6}{8}=\frac{3}{4}\ \Rightarrow\ \frac{BP}{AB}\neq\frac{BM}{BC}$$

Значит, прямая PM не параллельна прямой AC ⇒ прямая PM не параллельна (ADC). Что и требовалось доказать.

Задача 27. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Сопоставьте в таблице величины углов, которые образует с плоскостью B_1BD прямая:

A_1B	A_1C	AD	CC_1	AC

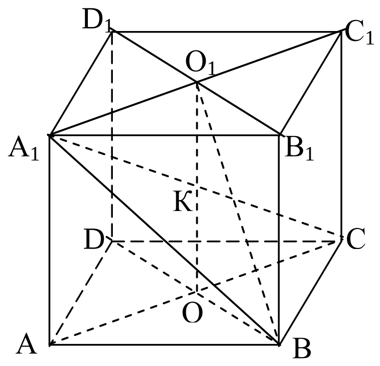

Рис. 29

Решение. Пусть ребро данного куба равно *a*. Обозначим: $(A_1AC)\cap(B_1BD) = O_1O$ (рис.29). Так как $AC\perp BD$ (как диагонали квадрата ABCD) и $A_1A\perp BD$ ($A_1A\perp(ABC)$), то $BD\perp(A_1AC)$ (почему?), поэтому $(A_1AC)\perp(B_1BD)$ (по признаку перпендикулярности двух плоскостей).Тогда точка O_1 - -ортогональная проекция точки A_1 на (B_1BD), а прямая O_1B - ортогональная проекция прямой A_1B на эту плоскость. Значит, $\angle A_1BO_1 = \angle(A_1B;(B_1BD))$. Найдем этот угол.

Имеем: $A_1O_1\perp(B_1BD)$, $O_1B\subset(B_1BD)\Rightarrow \angle A_1O_1B = 90^o$ (по определению прямой, перпендикулярной плоскости) $\Rightarrow\Delta A_1O_1B$ – прямоугольный, в котором: $A_1O_1 = \frac{a\sqrt{2}}{2}$, $A_1B = =a\sqrt{2}$, то есть $A_1O_1 = \frac{1}{2}A_1B$, откуда $\angle A_1BO_1 = \angle(A_1B;(B_1BD)) = 30^o$.

Далее, обозначим: $K = A_1C\cap O_1O = A_1C\cap(B_1BD)$. Так как $(A_1AC)\perp(B_1BD)$, $A_1K\subset(A_1AC)$, $(A_1AC)\cap(B_1BD) = O_1O$, то O_1O – ортогональная проекция прямой A_1C на (B_1BD), значит, $\angle A_1KO_1 = \angle(A_1K;(B_1BD))$. При этом, $A_1O_1\perp O_1O$, откуда ΔA_1O_1K – прямоугольный, в котором: $A_1O_1 = \frac{a\sqrt{2}}{2}$,

$O_1K = \frac{1}{2}O_1O = \frac{a}{2}$.

Обозначим: $\angle A_1KO_1 = \varphi$, тогда $\mathrm{tg}\,\varphi = \frac{A_1O_1}{O_1K} = \frac{a\sqrt{2}}{2} : \frac{a}{2} = \sqrt{2}$, откуда $\varphi = arctg\sqrt{2}$.

Таким образом, $\angle(A_1C;(B_1BD)) = arctg\sqrt{2}$.

Так как плоскость B_1BD проходит через прямую B_1B, перпендикулярную (ABC), то ортогональной проекцией прямой AD на (B_1BD) является прямая BD, образующая с прямой AD угол в 45º. Это значит, $\angle(AD;(B_1BD)) = 45^\circ$.

Имеем: $C_1C \parallel B_1B, B_1B \subset (B_1BD) \Rightarrow C_1C \parallel (B_1BD)$

му?) $\Rightarrow \angle(C_1C;(B_1BD)) = 0^\circ$.

Так как $AC \perp BD$ (почему?), $AC \perp B_1B$ (почему?), то $AC \perp (B_1BD)$ (по признаку перпендикулярности прямой и плоскости) $\Rightarrow \angle(AC;(B_1BD)) = 90^\circ$.

Ответ: $\angle(A_1B;(B_1BD)) = 30^\circ$; $\angle(A_1C;(B_1BD)) = arctg\sqrt{2}$; $\angle(AD;(B_1BD)) = 45^\circ$; $\angle(C_1C;(B_1BD)) = 0^\circ$; $\angle(AC;(B_1BD)) = 90^\circ$.

5.1.2. Пересекающиеся прямая и плоскость

Весьма полезны на начальной стадии изучения стереометрии так называемые таблицы – задания, которые в свою очередь являются своеобразной формой исследования свойств пространственных фигур. В качестве примера, при изучении вопроса о взаимном расположении прямой и плоскости рекомендуются следующие задания [36].

Задача 28 ([32], 3.006). В тетраэдре ABCD точки K, F, N и M – середины ребер соответственно AD, BD, BC и AC (рис. 30). Заполните таблицу, выбрав определенное вами расположение указанных прямой и плоскости: А – пересекаются, Б – параллельны, В – прямая лежит в плоскости, Г – невозможно определить [18]:

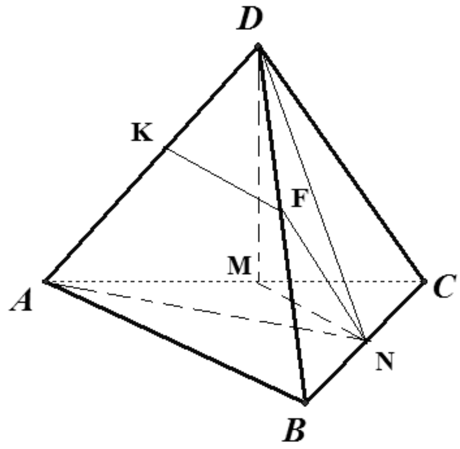

Рис. 30

	Прямая и плоскость	**Взаимное расположение**
1	DB и AMN	А
2	MN и ABC	В
3	KC и DMN	А
4	KF и DMN	Б
5	KF и ABD	В
6	MN и ABD	Б

5.1.3. Перпендикулярная прямая и плоскость

Перпендикулярность прямых и плоскостей – важный раздел стереометрии. Приведем следующее определение прямой, перпендикулярной данной плоскости, которое предлагают авторы учебника [34]: « Прямая называется перпендикулярной плоскости, если она перпендикулярна любой прямой, лежащей в этой плоскости» (рис. 31).

Важно четко осознать различие между смыслом слов: любой прямой плоскости и какой-либо прямой плоскости, здесь у обучающихся не редко возникает путаница.

Если прямая *a* перпендикулярна плоскости *α*, то записывают $a \perp \alpha$ или $\alpha \perp a$ и также говорят, что плоскость *α* перпендикулярна прямой *a* или прямая *a* и плоскость α перпендикулярны.

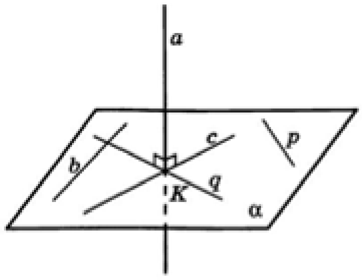

Рис. 31

В процессе решении задач обоснование перпендикулярности прямой и плоскости осуществляют, используя признак перпендикулярности прямой и плоскости, а никак не с помощью определения перпендикулярности прямой и плоскости.

Необходимо пояснить обучающимся, что при решении стереометрических задач затруднительно обосновывать перпендикулярность прямой и плоскости при помощи только одного определения, и помощником в таком обосновании становится признак перпендикулярности прямой и плоскости.

Целесообразно обращать внимание учащихся на определённую аналогию утверждений о перпендикуляре, наклонной и её проекции на плоскость с соответствующими утверждениями в планиметрии относительно перпендикуляра, наклонной и её проекции на прямую.

Необходимо сказать об особой роли теоремы о трёх перпендикулярах (*«Если прямая перпендикулярна каждой из двух пересекающихся прямых, лежащих в плоскости, то она перпендикулярна этой плоскости»*[36]) при решении системы задач, в которой определяются перпендикулярности прямых и плоскостей, в том числе и находятся расстояния в пространстве.

Для выработки у обучающихся прочных геометрических умений и знаний важно сформировать у них не только интерес к изучаемому геометрическому материалу, но и методически верно установить содержательность упражнений и их количество по изучаемой теме, а так же учесть индивидуальные особенности старшеклассников. В связи с этим, при подборе задачного материала важно соблюдение одного из дидактических принципов «от простого – к сложному»[35].

Теперь рассмотрим решение некоторых задач по данному материалу.

Задача 29. Дана трапеция ABCD с основаниями AB и CD. Из точки К проведены к плоскости трапеции перпендикуляр КВ =15 и наклонная КС =17 (рис.32). Найдите длину высоты трапеции, если прямые КС и АВ перпендикулярны.

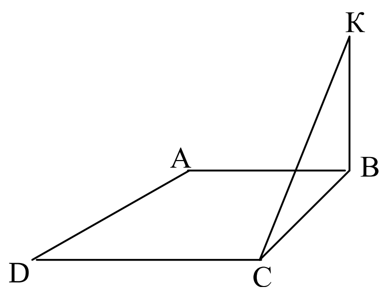

Рис. 32

Решение. Так как КВ$\perp$(АВС), то КВ$\perp$ВС (по определению прямой, перпендикулярной плоскости), при этом отрезок ВС является ортогональной проекцией наклонной КС на (АВС). Это означает, что ΔСВК – прямоугольный.

Так как наклонная КС к плоскости АВС перпендикулярна прямой АВ, лежащей в этой плоскости, то прямая ВС – проекция наклонной СК на эту плоскость – перпендикулярна прямой АВ (по теореме о трёх перпендикулярах). А так как АВ$\|$CD, то отрезок ВС – высота данной трапеции. Найдём длину этого отрезка.

В прямоугольном ΔСВК по теореме по теореме Пифагора находим: ВС=$\sqrt{CK^2 - BK^2}$ = =$\sqrt{17^2 - 15^2}$ =8.

Ответ: 8.

Задача 30 [35]. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребром, равным 1. Найдите синус угла между прямой A_1B и (BC_1D).

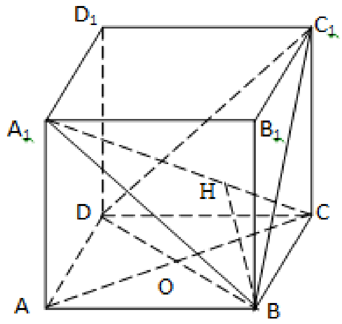

Рис.33

Решение. Обозначим: $A_1C \cap (BC_1D) = H = A_1C \cap C_1O$ (рис. 33).

Докажем, что $A_1C \perp (BC_1D)$. Действительно, ортогональной проекцией диагонали A_1C данного куба на плоскость грани BB_1C_1C является ее диагональ B_1C. Вследствие $B_1C \perp BC_1$ (как диагонали квадрата BB_1C_1C), получаем: $A_1C \perp BC_1$ (по теореме о трех перпендикулярах). Аналогично, $A_1C \perp BD$.

Имеем: $A_1C \perp BC_1$, $A_1C \perp BD \Rightarrow A_1C \perp (BC_1D)$ (по признаку перпендикулярности прямой и плоскости) $\Rightarrow (A_1BC) \perp (BC_1D)$ (по признаку перпендикулярности двух плоскостей). А так как $BH = (A_1BC) \cap (BC_1D)$, $A_1B \subset (A_1BC)$, то прямая BH является ортогональной проекцией прямой A_1B на (BC_1D). Поэтому $\angle(A_1B; (BC_1D)) = \angle(A_1B; BH) = \angle A_1BH = \varphi$. Найдем $\sin\varphi$.

Известно, что диагональ куба с ребром *b* равна $b\sqrt{3}$. Поэтому, $A_1C = \sqrt{3}$, значит, $A_1H = \frac{2}{3}A_1C = \frac{2\sqrt{3}}{3}$. Тогда в прямоугольном ΔA_1HB: $\sin\varphi = \frac{A_1H}{A_1B} =$

$$= \frac{2\sqrt{3}}{3} : \sqrt{2} = \frac{\sqrt{6}}{3}.$$

Ответ: $\frac{\sqrt{6}}{3}$.

Задача 31. ([32], 4.046) В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$, все ребра которой равны 1, найдите синус угла между прямой BE_1 и (BC_1C).

Указание. Для решения метрических задач применительно к правильной шестиугольной призме полезно на отдельном рисунке изобразить одно из оснований – правильный шестиугольник ABCDEF (рис. 35), сторона которого равна1. Взаимное расположение диагоналей и сторон этого шестиугольника, их длины и величины углов между ними известны из планиметрии.[53]

Решение. Обозначим: $\angle(BE_1, ((BC_1C)) = \beta$ (рис. 35).

Имеем (рис.35): $C_1C \perp (A_1B_1C_1)$, $E_1C_1 \subset (A_1B_1C_1) \Rightarrow C_1C \perp E_1C_1$ (по определению прямой, перпендикулярной плоскости).

Получаем: $E_1C_1 \perp B_1C_1$, $E_1C_1 \perp C_1C \Rightarrow E_1C_1 \perp (BC_1C)$ (по признаку перпендикулярности прямой и плоскости) $\Rightarrow E_1C_1 \perp BC_1$ (по определению прямой, перпендикулярной плоскости). Это означает, что BC_1 – ортогональная проекция прямой BE_1 на (BC_1C), при этом

$\angle E_1BC_1 = \angle(BE_1, ((BC_1C)) = \beta$, $\angle BC_1E_1 = 90^{\circ}$.

Тогда в прямоугольном ΔBC_1E_1 с катетами $E_1C_1 = \sqrt{3}$ и $BC_1 =$ $\sqrt{2}$ $\sqrt{2}$, находим: $\sin\beta = \dfrac{E_1C_1}{BE_1} = \dfrac{E_1C_1}{\sqrt{E_1C_1^2 + BC_1^2}} = \dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{(\sqrt{3})^2 + (\sqrt{2})^2}} = 0{,}2\sqrt{15}$

Ответ: $0{,}2\sqrt{15}$.

Задача 32. В правильной шестиугольной призме AF_1 (рис.34), все ребра которой равны 1, найдите расстояние от точки E до плоскости E_1FD.

Решение. Имеем: $FD \perp BE$ (по свойству диагоналей правильного шестиугольника ABCDEF); $EE_1 \perp (ABC)$ (призма прямая), $FD \subset (ABC)$, $\Rightarrow EE_1 \perp FD$ (по определению прямой, перпендикулярной плоскости).

Получили: $FD \perp BE$, $FD \perp EE_1$, $FD \cap EE_1 = К \Rightarrow FD \perp (BEE_1)$ (по признаку перпендикулярности прямой и плоскости) $\Rightarrow (D_1EF) \perp (BEE_1)$ (по теореме о перпендикулярности плоскостей), при этом $(D_1EF) \cap (BEE_1) = E_1К$.

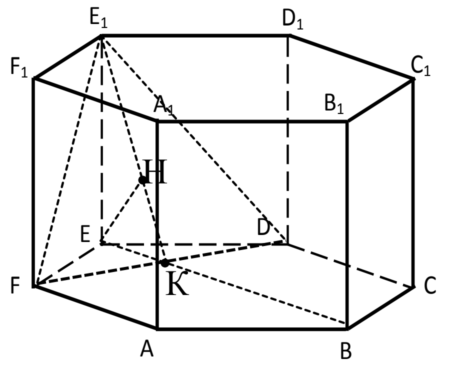

Рис. 34

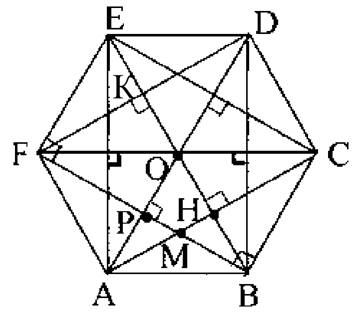

Рис. 35

Поэтому перпендикуляр EH ($H \in E_1K$), проведенный из точки E к (D_1EF) расположен в (E_1EK). Значит, $EH = \rho(E; (D_1EF))$ – искомое расстояние от точки E до плоскости E_1FD.

Найдем длину отрезка EH.

Так как $EK = 0{,}5OE = 0{,}5 \cdot 1 = 0{,}5$ (рис.35), то в прямоугольном ΔEE_1K (рис.34) находим: $EH = \dfrac{E_1E \cdot EK}{\sqrt{E_1E^2 + EK^2}} = \dfrac{1 \cdot 0{,}5}{\sqrt{1^2 + 0{,}5^2}} = \dfrac{0{,}5}{\sqrt{1{,}25^2}} = \dfrac{1}{2} : \sqrt{\dfrac{5}{4}} = \dfrac{1}{2} : \dfrac{\sqrt{5}}{2} = \dfrac{1}{\sqrt{5}} = \dfrac{\sqrt{5}}{5}$.

Ответ: $\dfrac{\sqrt{5}}{5}$.

5.2. Взаимное расположение двух прямых в пространстве в векторно-координатном изложении

При решении задачи на вычисление угла между прямыми имеет смысл выполнять решение векторным методом. Нахождение решений многих стереометрических задач, используя данный метод, часто значительно упрощает решение геометрической задачи, и помогает обучающимся развивать стремление в поиске более рационального пути решения предложенной задачи. В процессе обучения старшеклассников решению геометрических задач векторным методом важно, прежде всего, научить школьников переводить условие задачи на «векторный язык», применять алгебраические операции над векторами, переводить обратно полученный в векторном виде результат на геометрический язык [35].

Если найти требуется в задаче величину угла или длину отрезка AB, то в качестве базисных выбирают векторы, углы между которыми и длины которых уже известны. Длину отрезка AB находят как длину вектора $\overrightarrow{AB}$.

Для этого вектор $\overrightarrow{AB}$ разлагают по базисным векторам, затем находят его скалярный квадрат и получают длину отрезка AB по формуле: $|AB| = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{\overrightarrow{AB}^2}$.

При нахождении величины угла φ выбирают векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ на сторонах этого угла с началом в его вершине и разлагают их по базису, а затем находят cos φ по формуле: $\cos\varphi = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}$. При этом пользуются алгебраическими и геометрическими свойствами скалярного произведения векторов.

Обратим внимание на то, что координатно-векторный метод является эффективным способом решения многих стереометрических задач. Представленный способ значительно облегчает их решение. В этом случае можно обойтись без дополнительных построений, которые, в свою очередь становятся необходимыми при иных методах решения и загромождают рисунок.

Задача 33. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Найдите угол между векторами прямыми AC и C_1D.

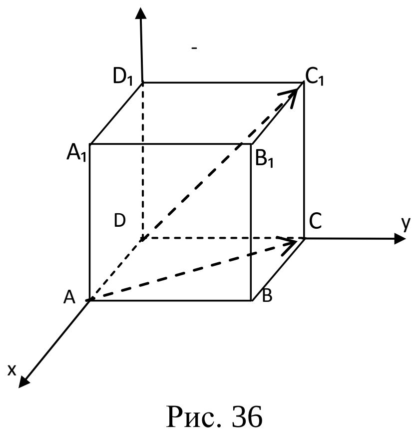

Рис. 36

Решение. Пусть $\angle(AC; DC_1) = \varphi$. На рисунке 36 изображен куб в системе координат Oxyz: точка D(0; 0; 0) – начало координат A(1;0;0), C(0;1;0), D_1 (0;0;1) лежат на осях координат соответственно Ox, Oy, Oz (рис. 36). Далее: A_1(1; 0; 1), B(1; 1; 0), B_1(1; 1; 1), D_1(0; 0; 1).

Направляющими векторами прямых AC и C_1D являются соответственно векторы $\overrightarrow{AC}$ (-1;1;0), $\overrightarrow{DC_1}$ (0;1;1).

Тогда:

$$Cos\ \varphi = \frac{\left|\overrightarrow{DC_1} \cdot \overrightarrow{AC}\right|}{\left|\overrightarrow{DC}\right| \cdot \left|\overrightarrow{AC}\right|} = \frac{\left|(-1)\cdot 0 + 1\cdot 1 + 0\cdot 1\right|}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}} = \frac{1}{2} \quad => \varphi = 60°.$$

Ответ : 60°.

Задача 34 [35]. В системе координат *Oxyz* расположен куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ так, что B_1(1;0;0), D_1(1;1;1), C(0;1;0), B(0;0;0). Постройте этот куб. Векторно-координатным методом найдите расстояние между прямыми A_1C_1 и AB_1.

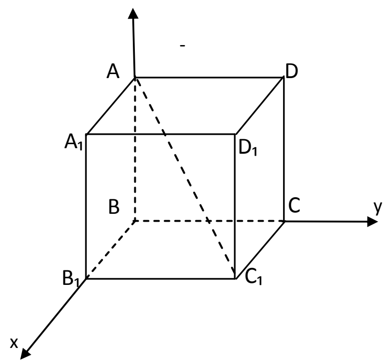

Рис. 37

Решение. Из условия следует, что точка B(0;0;0) – начало координат, точки B_1(1;0;0) и C(0;1;0) – единичные на осях Ox и Oy соответственно. Тогда: A(0;0;1), D(0;1;1), A_1(1;0;1), C_1(1;1;0). На рисунке 37 изображено расположение данного куба относительно системы координат Oxyz. Теперь рассмотрим решение задач отдельных пунктов.

Найдем расстояние $\rho(A_1C_1; AB_1)$ (рис.38).

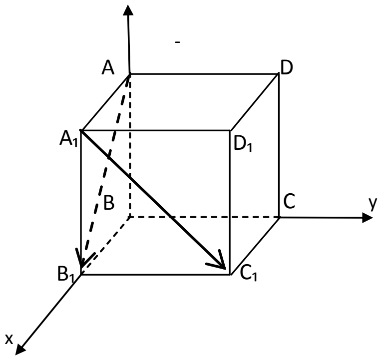

Рис.38

Векторы $\overrightarrow{A_1C_1}$ (0; 1; -1) и $\overrightarrow{AB_1}$ (1; 0 ; -1) принимаем в качестве направляющих для прямых соответственно A_1C_1 и AB_1.

α : $\overrightarrow{A_1C_1} \subset \alpha$, $\alpha \parallel AB1$

В качестве вектора нормали плоскости α примем вектор $\vec{n}$, перпендикулярный векторам $\overrightarrow{A_1C_1}$ (0; 1; -1), $\overrightarrow{AB_1}$ (1; 0 ;-1). Найдем координаты этого вектора.

Имеем:

$$\begin{cases} \vec{n} \perp \overrightarrow{A_1C_1} \\ \vec{n} \perp \overrightarrow{AB_1} \end{cases} => \begin{cases} \vec{n} \cdot \overrightarrow{A_1C_1} = 0 \\ \vec{n} \cdot \overrightarrow{AB_1} = 0 \end{cases} => \begin{cases} a\cdot 0 + b\cdot 1 + c\cdot(-1) = 0 \\ a\cdot 1 + b\cdot 0 + c\cdot(-1) = 0 \end{cases} => \begin{cases} b - c = 0 \\ a - c = 0 \end{cases} => \begin{cases} b = c \\ a = c \end{cases}$$

Пусть, не нарушая общности, c =1, тогда a =b =c =1. Имеем: $\vec{n}$ (1; 1; 1). Получаем уравнение плоскости α (A_1 ; $\vec{n}$) в виде:

$1(x - 1) + 1(y - 0) + 1(z - 1) = 0 \Leftrightarrow x + y + z – 2 =0.$

Теперь находим:

$$\rho(A_1C_1 ; AB_1) = \rho(\alpha, A) = \frac{|0+0+1-2|}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Ответ:1.а) $\frac{\sqrt{6}}{3}$ *;б)* $\frac{\sqrt{6}}{3}$ *;в)* $\frac{\sqrt{6}}{3}$ *;2.* $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Задача 35 ([32], 6.067) В тетраэдре PABC ребра AP и BC, а также AB и CP взаимно перпендикулярны. Доказать перпендикулярность ребер AC и BP, используя векторы.

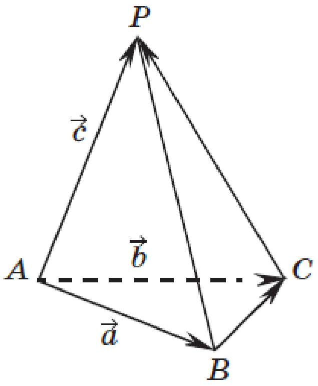

Рис. 39

Решение. Пусть $\overline{AB} = \vec{a}$, $\overline{AC} = \vec{b}$, $\overline{AP} = \vec{c}$ (рис. 39). Исходя из условия задачи, получаем:

$$AP \perp BC \Rightarrow \overline{AP} \perp \overline{BC} \Rightarrow \overline{AP} \cdot \overline{BC} = 0 \Rightarrow \vec{c} \cdot (\vec{b} - \vec{a}) = 0 \Rightarrow \vec{c} \cdot \vec{b} - \vec{c} \cdot \vec{a} = 0 \Rightarrow \vec{a} \cdot \vec{c}$$

$$AB \perp CP \Rightarrow \overline{AB} \perp \overline{CP} \Rightarrow \overline{AB} \cdot \overline{CP} = 0 \Rightarrow \vec{a} \cdot (\vec{c} - \vec{b}) = 0 \Rightarrow \vec{a} \cdot \vec{c} - \vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \vec{a} \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{b}$$

Таким образом:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{c} \Rightarrow \vec{b} \cdot (\vec{c} - \vec{a}) = 0 \Rightarrow \overline{AC} \cdot \overline{BP} = 0 \Rightarrow \overline{AC} \perp \overline{BP} \Rightarrow AC \perp BP$$

Что и требовалось доказать.

5.3. Взаимное расположение прямой и плоскости в векторно-координатном изложении

Приведем пример следующей задачи.

Задача 36. ([32], 6.047) В тетраэдре PABC точки K и M – середины ребер соответственно PA и BC. Доказать, что прямые AB, KM и PC параллельны некоторой (одной) плоскости.

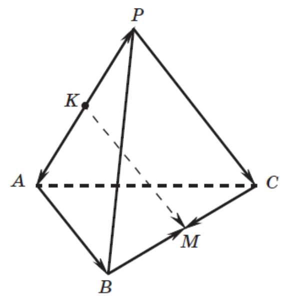

Рис. 40

Решение. С одной стороны, $\overrightarrow{KM} = \overrightarrow{KP} + \overrightarrow{PC} + \overrightarrow{CM}$ (рис. 40), с другой стороны, $\overrightarrow{KM} = \overrightarrow{KA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BM}$. Тогда $2\overrightarrow{KM} = (\overrightarrow{KA} + \overrightarrow{KP}) + (\overrightarrow{BM} + \overrightarrow{CM}) + \overrightarrow{PC} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{PC} + \overrightarrow{AB}$, откуда $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{PC} + 2\overrightarrow{KM}$, значит, векторы $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{PC}$ и $\overrightarrow{MK}$ компланарны. Поэтому прямые AB, PC и MK параллельны некоторой плоскости.

Задача 37[53]. В системе координат *Oxyz* расположен куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ так, что A(1;0;0), D_1(1;1;1), B_1(0;1;0), B(0;0;0). Постройте этот куб. Векторно-координатным методом найдите: Синус угла между прямой и плоскостью: а) BC и (AB_1D_1); б) A_1B и (AB_1C).

Решение. Из условия следует, что точка B(0;0;0) – начало координат, точки A(1;0;0) и B_1(0;1;0) – единичные на осях *Ox* и *Oy* соответственно. Тогда: A_1(1;1;0), C (0;0;1), C_1(0;1;1), D(1;0;1). На рис. 41 изображено расположение данного куба относительно системы координат *Oxyz*. Теперь рассмотрим решение задач отдельных пунктов.

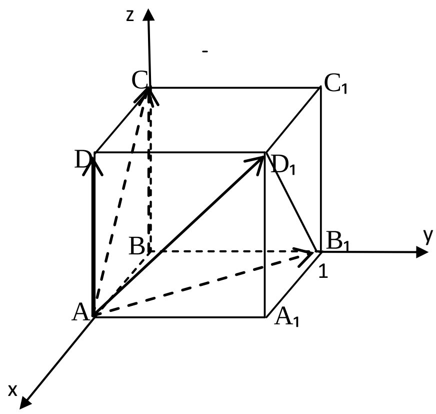

Рис. 41

а) Векторы $\overrightarrow{BC}(0;0;1)$, $\overrightarrow{AB_1}(-1;1;0)$, $\overrightarrow{AD_1}(0;1;1)$ принимаем в качестве направляющих для прямых соответственно BC, AB_1, AD_1.

В качестве вектора нормали (AB_1D_1) примем вектор $\vec{n}(a;b;c)$, перпендикулярный векторам $\overrightarrow{AB_1}$ (-1;1;0) и $\overrightarrow{AD}$ (0;1;1).

Найдем координаты этого вектора.

Имеем:

$$\begin{cases} \vec{n} \perp \overrightarrow{AB_1} \\ \vec{n} \perp \overrightarrow{AD_1} \end{cases} => \begin{cases} \vec{n} \cdot \overrightarrow{AB_1} = 0 \\ \vec{n} \cdot \overrightarrow{AD_1} = 0 \end{cases} => \begin{cases} -1 \cdot a + 1 \cdot b + 0 \cdot c = 0 \\ 0 \cdot a + 1 \cdot b + 1 \cdot c = 0 \end{cases} => \begin{cases} b = a \\ b = -c \end{cases} => a = b = 1,$$

c = -1. Имеем: $\vec{n}(1;1;-1)$, A(1;0;0). Получаем уравнение плоскости (AB_1D_1) в виде:

$1 \cdot (x - 1) + 1 \cdot (y - 0) - 1 \cdot (z - 0) = 0 \Leftrightarrow x + y - z - 1 = 0.$

Теперь находим:

$$\sin\angle(BC; (AB_1D_1)) = \frac{|\overrightarrow{BC} \cdot \vec{n}|}{|\overrightarrow{BC}| \cdot |\vec{n}|} = \frac{|0 \cdot 1 + 0 \cdot 1 + 1 \cdot (-1)|}{\sqrt{0^2 + 0^2 + 1^2} \cdot \sqrt{1^2 + 1^2 + (-1)^2}} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

б) Векторы $\overrightarrow{A_1B}(-1;-1;0)$, $\overrightarrow{AB_1}(-1;1;0)$, $\overrightarrow{AC}(-1;0;1)$ принимаем в качестве направляющих для прямых соответственно A_1B, AB_1 и AC. В качестве вектора нормали плоскости (AB_1C) примем вектор $\vec{n}(a;b;c)$, перпендикулярный векторам $\overrightarrow{AB_1}(-1;1;0)$, $\overrightarrow{AC}(-1;0;1)$.

Найдем координаты этого вектора.

Имеем:

$$\begin{cases} \vec{n} \perp \overrightarrow{AB_1} \\ \vec{n} \perp \overrightarrow{AC} \end{cases} => \begin{cases} \vec{n} \cdot \overrightarrow{AB_1} = 0 \\ \vec{n} \cdot \overrightarrow{AC} = 0 \end{cases} => \begin{cases} -1 \cdot a + 1 \cdot b + 0 \cdot c = 0 \\ -1 \cdot a + 0 \cdot b + 1 \cdot c = 0 \end{cases} => \begin{cases} b = a \\ a = c \end{cases}.$$

Пусть не нарушая общности c = 1, тогда a = b = 1. Имеем: $\vec{n}(1;1;1)$. Теперь находим: $\sin(A_1B; (AB_1C)) = \sin(\vec{n}; \overrightarrow{AB_1}) \dfrac{|\overrightarrow{A_1B} \cdot \vec{n}|}{|\overrightarrow{A_1B}| \cdot |\vec{n}|} = \dfrac{|-1 + 1 \cdot (-1) + 0 \cdot 1|}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{2}} = \dfrac{2}{\sqrt{6}} = \dfrac{\sqrt{6}}{3}.$

Ответ: а) $\frac{\sqrt{3}}{3}$; б) $\frac{\sqrt{6}}{3}$.

Приведем пример следующей задачи.

Задача 38. [53] Правильная шестиугольная призма $ACDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$, все ребра которой равны 1, расположена в системе координат *Oxyz* так, что центр ее основания совпадает с началом координат, а вершины A, F , F_1, B_1 имеют координаты: $A(\frac{\sqrt{3}}{2};-\frac{1}{2};0)$, $F(0;-1;0)$, $F_1(0;-1;1)$, $B_1(\frac{\sqrt{3}}{2};\frac{1}{2};1)$. Постройте эту призму и координатным методом найдите синус угла между прямой A_1B и плоскостью BB_1C.

Решение. На рис. 42 изображено расположение данной призмы относительно системы координат *Oxyz*. В ней: $A_1(\frac{\sqrt{3}}{2};-\frac{1}{2};\ 1)$, $B(\frac{\sqrt{3}}{2};\frac{1}{2};0)$, $C(0;1;0)$, $D(-\frac{\sqrt{3}}{2};\frac{1}{2};0)$, $D_1(-\frac{\sqrt{3}}{2};\frac{1}{2};1)$, $E(-\frac{\sqrt{3}}{2};-\frac{1}{2};0)$, $E_1(-\frac{\sqrt{3}}{2};-\frac{1}{2};1)$, $C_1(0;1;1)$.

Векторы $\overrightarrow{A_1B}(0;1;-1)$, $\overrightarrow{BB_1}(0;0;1)$, $\overrightarrow{BC}(-\frac{\sqrt{3}}{2};\ \frac{1}{2};0)$ принимаем в качестве направляющих для прямых соответственно A_1B, BB_1 и BC. В качестве вектора нормали плоскости (BB_1C) примем вектор $\vec{n}(a;b;c)$, перпендикулярный векторам $\overrightarrow{BB_1}(0;0;1)$, $\overrightarrow{BC}(-\frac{\sqrt{3}}{2};\ \frac{1}{2};0)$.

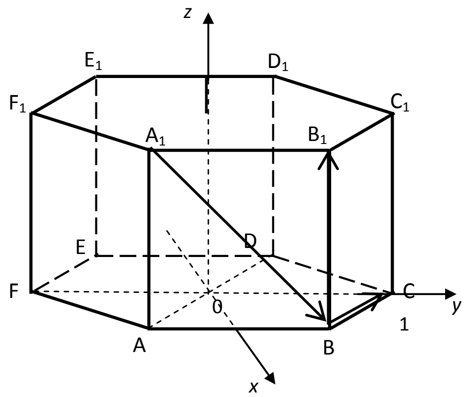

Рис. 42

Найдем координаты этого вектора.

Имеем:

$$\begin{cases} \vec{n} \perp \overrightarrow{BB_1} \\ \vec{n} \perp \overrightarrow{BC} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \vec{n} \cdot \overrightarrow{BB_1} = 0 \\ \vec{n} \cdot \overrightarrow{BC} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 \cdot a + 0 \cdot b + 1 \cdot c = 0 \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot a + \frac{1}{2} \cdot b + 0 \cdot c = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c = 0 \\ b = a\sqrt{3} \end{cases}.$$

Пусть не нарушая общности a = 1, тогда b = $\sqrt{3}$, c = 0. Таким образом, $\vec{n}$ имеет координаты (1; $\sqrt{3}$;0). Теперь находим:

$$\sin\angle(\overrightarrow{A_1B};(BB_1C)) = \sin\angle(\overrightarrow{A_1B};\vec{n}) = \frac{\left|\overrightarrow{A_1B} \cdot \vec{n}\right|}{\left|\overrightarrow{A_1B}\right| \cdot \left|\vec{n}\right|} = \frac{\left|0 + 1 \cdot \sqrt{3} + (-1) \cdot 0\right|}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2 + 0^2}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2} \cdot 2} = \frac{\sqrt{6}}{4}.$$

Ответ: $\frac{\sqrt{6}}{4}$.

§ 6. Эксперимент и его результаты

Экспериментальная работа по исследуемой нами проблеме осуществлялась в МБУ «Школа №16».

Цель констатирующего этапа эксперимента состояла в анализе школьной практики обучения математике в профильных классов старшей школы.

Во время эксперимента применялись следующие *методы исследования*: анализ опыта учителей, беседа с учителями и учениками, анкетирование.

Анкетирование учителей математики МБУ «Школа №16» (6 человек) было проведено с целью выявления организационно-методических особенностей обучения геометрии в углубленном курсе геометрии старшей школы, в том числе, и в использовании принципа «от простого к сложному».

Анализ анкетных данных и опыта учителей показал, что они не всегда следуют принципу «от простого к сложному» при обучении решению геометрических задач.

Ответы на вопрос «Придерживаетесь ли Вы принципа «от простого к сложному» при обучении решению геометрических задач?» были получены следующие ответы: «во время урока» – 83% (5 чел.), «в домашнем задании» – 83% (5 чел.), «в проверочных работах» - 83% (5 чел.).

Ответы на вопрос «Проводите ли вы уроки обобщения и систематизации учебного материала?» были получены следующие ответы: «при завершении изучения определенных разделов», «при подготовке к контрольным работам», «для выявления основных понятий, теорем изучаемого раздела».

Ответами на вопрос «Оцените, насколько задачный материл в учебнике геометрии подобран, учитывая принцип «от простого к сложному?» были получены следующие ответы: больше 50% опрошенных ответили «задачный материал структурирован по принципу «от простого – к сложному» (по программе учебника Е.В. Потоскуева, Л.И. Звавича).

На вопрос «Как Вы реализуете принцип «от простого к сложному» при решении геометрических задач?» большинство учителей ответили следующим образом: «структурированность задачного материала по мере возрастания трудности».

На вопрос «Используете ли Вы в своей работе метод ключевых задач?» были получены следующие ответы: «данный метод является основным при конструировании системы задач», «в основном, использую метод аналогии».

На *поисковом этапе* эксперимента в 2016-2017 учебном году с учащимися 10 классов в МБУ «Школа №16» г.о. Тольятти была осуществлена апробация системы заданий, представленных в диссертации.

Экспериментальная работа будет продолжена в дальнейшем, в процессе непосредственной педагогической работы с учащимися 10-11 классов.

Выводы по II главе

В результате проведенного исследования были сделаны следующие выводы:

1. Применение принципа дифференциации при обучении решению задач по геометрии позволяет каждому ученику:

а) овладеть минимумом знаний общеобразовательной программы;

б) систематизировать эти знания.

2. Представлена подборка задач по темам: «Взаимное расположение двух прямых в пространстве» и «Взаимное расположение прямой и плоскости в пространстве» с учетом требований, предъявляемых к разработке систем задач при обучении решению задач в углубленном курсе геометрии старшей школы.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В результате выполненной магистерской диссертации были раскрыты методические аспекты дифференциации при обучении решению задач в углубленном курсе геометрии старшей школы и получены следующие результаты:

1. Проанализированы различные подходы к построению систем геометрических задач. В связи с этим можно сказать, что методически верно подобранная система задач, в процессе обучения, способствует выработке у школьников прочных умений и знаний, а так же более осознанного восприятия материала по изучаемой теме.

2. Принцип дифференциации предполагает усвоение знаний в определенной последовательности. Придерживаясь принципа «от простого к сложному» можно выдвинуть ряд требований к построению урока по геометрии:

а) каждый новый урок является логическим продолжением предыдущего;

б) изложение материала целесообразно начинать от простого, постепенно усложняя его;

в) при планировании изложения темы необходимо выделить главные понятия и правильно организовать урок;

г) методически правильный подбор количества задачного материала и упражнений повторения материала.

3. Представлена подборка задач из учебно-методического комплекта авторов Потоскуева Е.В. и Звавича Л.И. по темам «Взаимное расположение двух прямых в пространстве» и «Взаимное расположение прямой и плоскости в пространстве» с учетом принципа дифференциации в углубленном курсе обучения геометрии в старших классах.

4. Развитие интереса к предмету, проявление интеллектуальной активности, выработка умения решать геометрические задачи различного

уровня сложности (используя разнообразные формы и методы научиться лучше решать задачи по курсу геометрии, уметь видеть наиболее рациональный способ решения задачи) – всё это позволяет старшеклассникам применение принципа дифференциации в углубленном курсе обучения геометрии в старших классах, заключающегося в логическом построении теоретического и практического материала.

5. Был проведен констатирующий эксперимент по исследуемой проблеме, который осуществлялся в МБУ «Школа № 16» с учителями математики и учащимися 10 классов.

Предложенные методические рекомендации по дифференциации обучения решению задач в 10-11 классах в углубленном курсе геометрии старшей школы могут быть с успехом использованы при обучении стереометрии старшеклассников как профильных, так и общеобразовательных классов.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Александров А.Д., Вернер А.Л., Рыжик В.И.. Геометрия: Учеб. для 10–11 кл. общеобразовательных учреждений. – М.: Просвещение, 2002,- 319с.

2. Алёшина Н.П. Развитие эвристического и логического мышления старшеклассников в процессе обучения математике: на примере элективного курса по решению задач с помощью законов логики союзов: дисс. …канд. пед. наук. /Н.П.Алёшина – Рязань, 2008. – 189 с.

3. Атанасян Л.С., Бутусов В.Ф., Кадомцев С.Б. и др. Геометрия, 10-11кл: учеб. Для общеобразовательных учреждений: базовый и профил. уровни .- М.: Просвещение, 2007, - 255с.

4. Башмаков, М.И. Уровень и профиль школьного математического образования / М. И. Башмаков // Математика в школе. – 1993. – № 2 – С.8.

5. Бескин Н.М. Роль задач в преподавании математики// Математика в школе. – 1992. № 4-5. – с. 3-4.

6. Бикмурзина, Р.Р. Дифференцированный подход к формированию познавательной самостоятельности студентов младших курсов вузов в процессе обучения математике: Дисс. . канд. пед. наук / Р.Р. Бикмурзина. -Саранск, 1996. – 195 с.

7. Бударный, А.А. Индивидуальный подход в обучении / А.А. Бударный // Советская педагогика. – 1965,- № 7 С. 18-20.

8. Бурда, М.И. Формирование умений осуществлять поиски геометрических доказательств. Преподавание алгебры и геометрии в школе: Пособие для учителей Сост. О.А.Боконев. – М.: Просвещение, 1982. – С. 99-105.

9. Воробьева, Н.Г. Творческий подход к решению геометрических задач/ Методики и технологии математического образования: Сборник трудов по материалам II международной научной конференции «Математика. Образование. Культура»/ Под общ. ред.Р.А. Утеевой В 3-х ч. Ч.3. Тольятти: ТГУ, 2005. – С.46-48

10. Воронина В.П. , Потоскуев Е.В. О взаимном расположении двух прямых в пространстве впрофильной школе. // Наука Вчера, Сегодня, Завтра: сборник статей студентов, аспирантов, молодых ученых и преподавателей – Уфа: РИО МЦИИ «ОМЕГА САЙНС, 2015.в 3 ч. Ч.3/– с.7-12.

11. Гончаров, Н.К. Ещё раз о дифференцированном обучении в старших классах / Н.К. Гончаров // Советская педагогика, – 1963. – № 2. – С. 59-63.

12. Готман Э.Г. Стереометрические задачи и методы их решения/Э.Г. Готман. – М.: МЦНМО, 2006. – 160 с.: ил.

13. Гусев, В.А. Методические основы дифференцированного обучения математике в средней школе: дисс. докт. пед. наук / В.А. Гусев. Москва, 1990. – 398 с.

14. Дорофеев, Г.В., Кузнецова Л.В., Суворова С.Б., Фирсов В.В. Дифференциация в обучении математике / Г. В. Дорофеев // Математика в школе. – 1990. – № 4 – С. 15.

15. Загвязинский, В. А. О дифференцированном подходе / В. А. Загвязинский // Народное образование. – 1968. № 10, – С. 51-55.

16. Злоцкий, Г.В. Широкий спектр средств дифференциации / Г.В. Злоцкий // Математика в школе. – 1991. – № 5. – С.61-64.

17. Иванова, Т.А. Теоретические основы обучения математике в средней школе / Т.А. Иванова. Н.Новгород, 2003. – 318 с.

18. Калинин,Л.Ю. Геометрия. 10-11 классы/Л.Ю.Калинин, Д.А. Терёшин – Новое изд., испр. и доп. – М.: МЦНМО, 2011. – 640 с., ил.

19. Кильдяева, Л.Г. Применение электронных тестов для осуществления уровневой дифференциации / Л.Г. Кильдяева // Фестиваль педагогических идей «Открытый урок 2004-2005» . www.1september.ru.

20. Крутецкий. В.А. Психология математических способностей школьников. – М.: Просвещение, 1968. – 427с.

21. Кузнецова Е.А. Как формировать и развивать мышление учащихся в средней школе средствами математики/ Е.А. Кузнецова//Вестник Помор-

ского университета. Сер. Гуманитарные и социальные науки. – 2011. – № 5. – С. 136-140.

22. Куприянович, В.В. Изучение способностей направленной дифференциации / В.В. Куприянович // Математика в школе. 1991. – № 5. – С. 62-67.

23. Лернер, И.Я. Проблемное обучение / И.Я. Лернер. М., 1974, – 351 с.1. KJ.

25. Лийметс, Х.И. Групповая работа на уроке / Х.И. Лийметс- М., Знание, 1975.- С.34-39.

26. Математика. Подготовка к ЕГЭ – 2016: учебно-методическое пособие/под редакцией Ф.Ф. Лысенко, С.Ю.Кулабухова. – Ростов-на-Дону: Легион, 2013. – 416 с. – (Готовимся к ЕГЭ).

27. Морозова, Л.В. Из опыта дифференцированного обучения / Л.В. Морозова // Математика в школе. 1998. – № 6. – С. 37.

28. Наумова, Л.М. Теоретические основы отбора варьируемого компонента содержания математического образования в профессиональных училищах: Автореф. дисс. .канд. пед. наук / J1.М. Наумова. Саранск, 1995. – 14 с.

29. Петрова, Е.С. Планирование индивидуальной работы с учащимися / Е.С. Петрова // Математика (приложение к газете «первое сентября»). – 1998. – № 31. – С.27-31.

30.Погорелов А.В. Геометрия: Учеб. для 7-11 кл. сред. шк. - М.: Просвещение, 1990. -286 с.

31. Потоскуев Е.В. Геометрический компонент профессиональной подготовки учителя математики в педагогическом вузе: учебно-методическое пособие/ Е.В. Потоскуев. – Тольятти: ТГУ, 2009. – 400 с.

32. Потоскуев Е.В., Звавич Л.И. Геометрия. 10 кл.: Задачник для общеобразовательных учреждений с углубленным и профильным изучением математики/ Е.В. Потоскуев, Л. И. Звавич - М.: Дрофа, 2004, – 256с.

33. Потоскуев Е.В., Звавич Л.И., Шляпочник Л.Я..Геометрия. 10 кл.: Методическое пособие к учебнику Е.В. Потоскуева., Л.И. Звавича «Геометрия». – М.: Дрофа, 2003-2008. – 224с.

34. Потоскуев Е.В.., Звавич Л.И.. Геометрия. 10 кл.: Учебник для общеобразовательных учреждений с углубленным и профильным изучением математики/ Е.В. Потоскуев, Л. И. Звавич – М.: Дрофа, 2010. – 223, [1] с.

35. Потоскуев Е.В. Опорные задачи по геометрии. Планиметрия. Стереометрия. ФГОС/ Е.В. Потоскуев. – М.: Изд «Экзамен», 2016. – 223,[1] с.

36. Потоскуев Е.В. Геометрическая поэма: хрестоматия / Е.В. Потоскуев. – Тольятти: Изд-во ТГУ, 2014. – 383 с. :обл.

37. Потоскуев Е.В. Рекомендации по изучению стереометрии. Введение в стереометрию // Учебно-методическая газета «Математика». № 1 – 2008.

38. Потоскуев Е.В. Рекомендации по изучению стереометрии. Комбинации тел вращения // Учебно-методическая газета «Математика». № 10 – 2009.

39. Потоскуев Е.В. Серия статей в журнале «МАТЕМАТИКА-ПЕРВОЕ СЕНТЯБРЯ» №17 2006; № 1-7,2008; № 6, 10, 2009; № 22, 23, 2010; № 6, 2012; № 5,№ 10,2013; № 9,10, 2014; № 4, 2015.

40. Потоскуев Е.В. Серия статей в журнале «Математика в школе»: № 9, 2005; № 5,2007; № 6,2009; № 4,2010; № 8; № 5, 2011; № 1, 2, 2012.

41. Потоскуев Е.В. Серия статей в журнале «Математика для школьников»: № 2, 2007; № 3, 2009; № 1, 2009; № 2, 2013.

42. Потоскуев Е.В. Серия статей в журнале «МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОБРАЗОВАНИЕ»: № 2 (50), 2009; № 4 (52), 2009; № 3-4 (59-60), 2011; № 1 (61), 2012, Москва.

43. Рыбников, К.А. К вопросу о дифференциации обучения / К.А. Рыбников // Математика в школе. 1988. – № 5. – С. 12-17.

44. Рыжик, В.И. Геометрия: контрол. измерит. материалы профил. уровня для 10-11 кл. общеоразоват. учреждений: кн. Для учителя/В.И. Рыжик. – М.: Просвещение, 2007. – 96 с.

45. Саранцев, Г.И. Методика обучения математике в средней школе: Учебн. Пособие для студентов мат. спец. пед. вузов и ун-тов / Г.И.Саранцев. – М.: Просвещение, 2002. – 224 с.

46. Саранцев, Г.И. Упражнения в обучении математике / Г.И. Саранцев. – М.: Просвещение, 1995. – 240 с.

47. Смирнова, И.М. Научно-методические основы преподавания геометрии в условиях профильной дифференциации обучения: Дисс. .докт.пед.наук / И.М. Смирнова, – М., 1994. –404 с.

47. Смирнова И.М., Смирнов В.А..Геометрия: Учеб. пособие для 10-11 классов гуманитарного профиля. - М.: Просвещение, 1997, - 259с.

48. Талызина, Н.Ф. Формирование познавательной деятельности учащихся / Н.Ф. Талызина. – М.: Просвещение, 1988. – 323 с.

49. Тимощук, М.Е. пишет «О дифференцированной помощи учащимся при решении задач» / М.Е. Тимощук // Математика в школе. 1993. – № 2. – С. 59-63.

50. Тихомиров, В.М. Геометрия в современной математике и математическое образование / В.М. Тихомиров // Математика в школе. – 1993. – № 4. – С. 12-18.

51. Токарева, Л.И. К вопросу о выполнении методического анализа школьных математических задач / Л.И. Токарева // Математика в школе. – 1991. – № 3. – С. 35-41.

52. Унт, Н.Э. Индивидуализация и дифференциация обучения / И.Э. Унт. М.: Педагогика, 1990. – 190 с.

53. Утеева, Р.А. Дифференцированные формы учебной деятельности учащихся / Р.А. Утеева // Математика в школе. 1995. – № 5. – С. 20-25.

54. Утеева, Р.А. Теоретические основы организации учебной деятельности учащихся при дифференцированном обучении математике в средней школе: Дисс. докт.пед.наук / Р.А. Утеева. – МПГУ, М, 1998. – 400 с.

55. Утеева, Р.А. Уровневая дифференциация / Р.А. Утеева // Математика. 2001. – № 34. – С. 11-15.

56. Федеральный государственный образовательный стандарт основного общего образования [Электронный ресурс]: // Министерство образования и науки Российской Федерации. URL: http://минобрнауки.рф/документы/543

57. Федеральный государственный образовательный стандарт среднего (полного) общего образования. Приказ Мин. образования и науки РФ от 17.05.2012 г. №413. [Электронный ресурс] URL: http:// минобрнауки.рф/документы/2365

58. Чичаева, И.В. Один из приёмов обучения решению задач / И.В. Чичаева // Математика в школе. 1988. – № 2. – С. 57-61.

59. Шахмаев, Н.Н. Учителю о дифференцированном обучении: Методические рекомендации / Н.Н. Шахмаев. М.: АПН СССР НИИ общей педагогики, 1989. – 64 с.

60. Шарыгин И.Ф.Геометрия 10-11 кл.: Учебник для общеобразовательных учреждений. – М.:Дрофа, 2007 г,- 208с.

60. Юркина, С.Н. О дифференцированном обучении математике / С.Н. Юркина // Математика в школе. 1990. – № 3, – С. 15-21.

61. Instrumental Development of Teachers' Reasoning in Dynamic Geometry, Muteb M. [Электронный ресурс] Alqahtani Rutgers University, Newark-NJ, USA Arthur B. Powell Rutgers University, Newark-NJ, USA, http://www.reveduc.ufscar.br/index.php/reveduc/article/viewFile/1322/391

62. The Effect of Teaching Geometry Which is Differentiated Based on the Parallel Curriculum for Gifted/Talented Students on Spatial Ability, [Электронный ресурс] Başak KOK,Dr., İstanbul Science& Art Center, Istanbul,Turkey. E-mail:kokbasak@yahoo.com Umit DAVASLIGIL,Prof. Dr., Maltepe University, 2014 http://jeysg.org/admin/b_bilgi_dosya/dosya/28062014025550_2014-2-1-5.pdf

63. Meeting the Needs of All Students through Differentiated Instruction: Helping Every Child Reach and Exceed Standards, [Электронный ресурс] Holli m. Levy, Clearing House 81 no4 Mr/Ap 2008 [Электронный ресурс] http://www.wou.edu/~tbolsta/ web/texbook/24_Meeting_the_Needs.pdf

64. Three colour problem and its usage in work with pupils and students. [Электронный ресурс] Andrejs Cibulis, Riga, University of Latvia, 2009 http://www.tlu.ee/bcmath 2009/Tallinn%202009 proceedings.pdf

65. A use of ict in mathematics teaching. Aija Cunska, Smiltene gymnasium, [Электронный ресурс] Latvia http://nms.lu.lv/wp-content/uploads/2014/09/rakstu_krajums_konf_07.pdf