МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Тольяттинский государственный университет»

Институт математики, физики и информационных технологий

Кафедра «Алгебра и геометрия»

Направление подготовки 44.03.05 «Педагогическое образование»

Направленность (профиль) «Математика и информатика»

БАКАЛАВРСКАЯ РАБОТА

на тему **«МЕТОДИКА ОБУЧЕНИЯ ФУНКЦИЯМ В КУРСЕ АЛГЕБРЫ ОСНОВНОЙ ШКОЛЫ»**

Студент С.Ю. Холодулина ____________________

Руководитель к.п.н., доцент И.В. Антонова ____________________

Консультант к.п.н., А.В. Кириллова ____________________

Допустить к защите

Заведующий кафедрой д.п.н., профессор Р.А. Утеева ______________

«____»__________2017 г.

Тольятти 2017

АННОТАЦИЯ

Целью бакалаврской работы является выявление методических особенностей обучения учащихся теме «Функции» в курсе алгебры основной школы и разработка систем упражнений по теме исследования.

Функциональная линия представляет собой один из важнейших разделов школьного курса математики. Функциональная линия позволяет осуществлять как внутрипредметные, так и межпредметные связи в обучении. Она дает возможность реализовывать прикладную направленность школьной математики и раскрывает ее общенаучную роль.

Бакалаврская работа состоит из введения, двух глав, заключения, списка литературы и приложений.

Глава I посвящена теоретическим основам обучения учащихся функциям в курсе алгебры основной школы. Изучены исторические аспекты возникновения и развития понятия функции в математике. Выявлены основные цели и задачи обучения функциональной линии в курсе математики основной школы. Выполнен анализ содержания функциональной линии в учебниках алгебры разных авторов. Охарактеризованы различные подходы к определению понятия «функция» в школьном курсе математики и раскрыта методика введения данного понятия. Выявлены методические особенности обучения учащихся понятиям линейной и квадратичной функций.

В Главе II представлены методические аспекты обучения учащихся функциям в курсе алгебры основной школы. Сформулированы методические рекомендации по обучению функциям в курсе алгебры основной школы. Рассмотрены задачи ОГЭ по теме исследования. Разработаны системы задач по обучению учащихся теме «Функции» в курсе алгебры основной школы.

Список литературы содержит 59 наименований.

ABSTRACT

The title of the bachelor's thesis is "Functions teaching methods in the algebra course in secondary school".

The aim of the work is to give some information about methodical specifics of functions teaching in the algebra course in secondary school. The object of the bachelor's thesis is the process of algebra teaching in a secondary school. The subject of the bachelor's thesis is Functions section teaching methods at the lessons of algebra course in secondary school.

The bachelor's thesis describes in details the historical aspects of the origin and development of a function concept in mathematics. Special emphasis is laid on goals of functional line teaching in the course of algebra in secondary school. We analyse the content of the functional line in the algebra coursebooks of different authors. Next we explain different approaches to defining the concept of a function in the algebra course in secondary school. We outline the methods of the function concept introduction, methodical specifics of linear and quadratic functions teaching to students.

The special part of the work gives details about methodical recommendations of functions teaching in the algebra course in secondary school. Particular attention is paid to the analysis of basic state examination aims on the research topic. Finally, we present systems of exercises on Functions section teaching to students in the algebra course of secondary school.

The systems of exercises and methodical recommendations can be used by teachers of mathematics and students during the period of pedagogical practice in the general education school.

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Актуальность исследования. Одним из основных направлений школьного курса математики является исследование ситуаций реального мира с использованием математических моделей, основной математической моделью является функция. Функциональная линия - один из четырех основных разделов содержательных линий школьного курса алгебры (учение о функции, учение о числе, уравнения и неравенства, тождественные преобразования). Она пронизывает целый курс математики. В 5 – 6-х классах осуществляется функциональная пропедевтика, в 7-9 классах происходит систематическое изучение функционального материала. Затем тема «Функции» продолжает изучаться в старших классах [42, С. 12].

Ю.М. Колягин в учебном пособии [20] утверждает, что понятие функции – одно из фундаментальных математических понятий, непосредственно связанных с реальной действительностью. В нем ярко воплощены изменчивость и динамичность реального мира, взаимная обусловленность реальных объектов и явлений. Функции, их свойства и графики образуют основу школьного курса математики. Вокруг функциональной линии группируется вся современная школьная алгебра, начала математического анализа и в некоторой степени геометрия. Специфичность данной линии заключается в ее возможности устанавливать в обучении внутрипредметные и межпредметные связи.

В ходе длительного времени силы ученых математиков и методистов были ориентированы на введение функционального материала в школьный курс математики. Существенное влияние на этот шаг в совершенствовании математического образования оказали идеи известного педагога-математика Ф. Клейна (1849 – 1925). Он был убежден в ведущей роли понятия функции и в математике-науке, и в обучении математике. Ф. Клейн в книге «Элементарная математика с точки зрения высшей» писал: «Какое же понятие в современной математике доминирует? Это есть понятие о функции. Понятие о функции должно играть основную, так сказать, руководящую роль в курсе средней школы. Понятие это должно быть выяснено учащимися очень рано и должно пронизывать все преподавание алгебры и геометрии» [20, С. 112].

В резолюциях Всероссийских съездов преподавателей математики (1911 – 1914 гг.) была подчеркнута потребность проведения идеи функциональной зависимости через весь курс предмета средней школы. Данная мысль обсуждалась и позднее. Деятельность в области совершенствования содержания и методики обучения функциональному материалу, активно начатая в 60-е гг. XX в., происходит волнообразно с некоторыми перерывами вплоть до данного времени.

Ю.М. Колягин отмечает, что основой школьной программы по математике 70-х гг. являлась теоретико-множественная концепция, позволяющая широко трактовать все основные математические понятия, в том числе и понятие функции. Сегодня существуют различные подходы к определению данного понятия.

Действующая примерная программа содержит существенно увеличенное количество сведений функционального содержания после проведенной в 70-е гг. XX в. реформы математического образования. Расширение понятийного аппарата вплоть до включения начал математического анализа подняло функциональные представления учащихся на новый качественный уровень. Значительное влияние на данный шаг оказали такие педагоги-математики, как, А.Н. Колмогоров, А.И. Маркушевич, А.Г. Мордкович и другие. Они были уверенны в ведущей роли понятия функции в математике, напрямую связанного с реальностью. Функция как математическая модель позволяет описывать и исследовать разнообразные зависимости между реальными величинами, познавать окружающий нас мир [42, С. 5 - 7].

Согласно федеральному государственному образовательному стандарту основного общего образования [50] результаты изучения предметной области «Математика» должны отражать: 1) формирование представлений о математике как о методе познания действительности, позволяющем описывать и изучать реальные процессы и явления; 2) овладение системой функциональных понятий, развитие умения использовать функционально-графические представления для решения различных математических задач, для описания и анализа реальных зависимостей.

Задачи по теме «Функции» включены в основной государственный экзамен: в первой части они встречаются в заданиях №5, 15, во второй части – в задании №23.

Проблема исследования состоит в выявлении методических особенностей обучения учащихся теме «Функции» в курсе алгебры основной школы.

Объект исследования: процесс обучения алгебре в основной школе.

Предмет исследования: методика обучения учащихся теме «Функции» на уроках алгебры основной школы.

Цель исследования: выявить методические особенности обучения учащихся теме «Функции» в курсе алгебры основной школы и разработать системы упражнений по теме исследования.

Задачи исследования:

1. Изучить исторические аспекты возникновения и развития понятия функции.

2. Выявить основные цели и задачи обучения функциональной линии в курсе математики основной школы.

3. Выполнить анализ содержания функциональной линии в учебниках алгебры основной школы.

4. Охарактеризовать различные подходы к определению понятия «функция» в школьном курсе математики и раскрыть методику введения данного понятия.

5. Выявить методические особенности обучения учащихся понятию линейной функции.

6. Раскрыть методические особенности обучения учащихся понятию квадратичной функции.

7. Представить методические рекомендации по обучению функциям в курсе алгебры основной школы.

8. Рассмотреть задачи ОГЭ по теме исследования.

9. Разработать системы задач по теме исследования для учащихся 7-9-х классов.

Для решения задач были использованы следующие **методы исследования:** анализ методической литературы; анализ школьных программ и учебников; изучение опыта работы учителей математики.

Теоретическая значимость исследования состоит в том, что в нем выявлены методические особенности обучения учащихся теме «Функции» в курсе алгебры основной школы.

Практическая значимость работы заключается в том, что в ней представлены системы задач по обучению учащихся функциям в курсе алгебры основной школы и методические рекомендации, которые могут быть использованы учителями математики и студентами в период педагогической практики в общеобразовательной школе.

Апробация результатов исследования. Теоретические выводы и практические результаты исследования были апробированы на научной студенческой конференции «Дни науки» института математики, физики и информационных технологий ТГУ (г. Тольятти, апрель 2017 г., диплом за 1 место на I этапе, диплом за 2 место на II этапе); VIII Международной научной конференции «Математика. Образование. Культура» (ТГУ, апрель 2017 г., диплом за 1 место).

По теме исследования опубликована статья [52].

На защиту выносятся:

1. Методические рекомендации по обучению учащихся функциям в курсе алгебры основной школы.

2. Системы задач по теме «Функции» в курсе алгебры основной школы.

Бакалаврская работа состоит из введения, двух глав, заключения, списка литературы и Приложений.

Во введении сформулированы основные характеристики исследования: актуальность, проблема, объект, предмет, цель, задачи и методы исследования.

Глава I бакалаврской работы посвящена теоретическим основам обучения учащихся функциям в курсе алгебры основной школы. Изучены исторические аспекты возникновения и развития понятия функции в математике. Выявлены основные цели и задачи обучения функциональной линии в курсе математики основной школы. Выполнен анализ содержания функциональной линии в учебниках алгебры разных авторов. Охарактеризованы различные подходы к определению понятия «функция» в школьном курсе математики и раскрыта методика введения данного понятия. Выявлены методические особенности обучения учащихся понятиям линейной и квадратичной функций.

В Главе II представлены методические аспекты обучения учащихся функциям в курсе алгебры основной школы. Сформулированы методические рекомендации по обучению функциям в курсе алгебры основной школы. Рассмотрены задачи ОГЭ по теме исследования. Разработаны системы задач по обучению учащихся теме «Функции» в курсе алгебры основной школы.

В заключении сформулированы основные результаты и выводы проведенного исследования.

Список литературы содержит 59 наименований.

В Приложении представлены ответы и указания к решению задач из п. 3.2. «Анализ задачного материала», типы задач по теме «Функции» в учебниках алгебры разных авторов, ответы и указания к решению систем задач.

ГЛАВА I. ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ОБУЧЕНИЯ УЧАЩИХСЯ ФУНКЦИЯМ В КУРСЕ АЛГЕБРЫ ОСНОВНОЙ ШКОЛЫ

§ 1. Из истории развития понятия функции в математике

Автор статьи «Как возникло и развивалось понятие функции» [4] Н.Я. Виленкин утверждает, что *идея функциональной зависимости* восходит к давним временам, когда человечество стало осознавать взаимосвязь окружающих явлений. Люди не обладали вычислительными навыками, однако видели, что степень сытости племени зависит от количества собранных ягод. Со временем число известных людям связей между величинами увеличивалось. Большинство из этих зависимостей стали выражаться с помощью чисел. Если за одну овцу предоставляли 5 корзин ягод, то за двух – 10, а за трех – 15. Так возникло представление о *пропорциональности величин*.

Позднее людям доводилось встречаться с более сложными зависимостями. Появилась необходимость в понимании *зависимостей объемов геометрических фигур* от их размеров. В Античном Вавилоне для облегчения расчетов, люди составили таблицы, которые представляли собой нечто иное как *табличное задание* функций: $y = \frac{1}{x}$, $y = x^2, y = x^3, y = x^2 + x^3$.

От создания таблиц до формирования общего понятия функциональной зависимости прошло много времени, но начало было положено. Исследование общих зависимостей между величинами начал в 14 столетии французский ученый Николай Оресм. В его рукописях содержатся рисунки, напоминающие современные *графики функций*. Он даже пытался классифицировать эти графики. Однако его идеи опережали уровень науки того времени. Для их развития необходимо было уметь выражать зависимости между величинами с помощью формул. Но буквенной алгебры тогда еще не существовало. И только в 16 столетии, в связи с проникновением *идеи переменных*, появилась возможность дальнейшего развития понятия функции.

Понятие *переменной величины* ввел в науку французский математик Рене Декарт (1596 – 1650). Зависимости между величинами стали изображаться числами. Это была неявно выраженная идея *числовой функции числового аргумента*. Записывая зависимости, Р. Декарт стал употреблять буквы. Отношения между известными и неизвестными величинами Р. Декарт выражал в виде уравнений. В целях наглядности изображения уравнения, он заменял все величины длинами отрезков. Это можно считать моментом зарождения метода координат. В одно и то же время с Р. Декартом к идее соответствия между линиями и уравнениями пришел французский математик Пьер Ферма (1601 – 1665).

К началу 17 столетия математики были знакомы с эллипсом, гиперболой, параболой и прочими кривыми. Но тогда еще отсутствовал единый метод исследования линий. Открытия Р. Декарта и П. Ферма позволили получать и исследовать новые кривые по их уравнениям [5, С. 10 – 12].

После создания *идеи переменных* и *буквенной алгебры* силы ученых были направлены на изучение соответствий между величинами. С помощью координат данные соответствия изображались графически.

Первоначально понятие функции находилось в непосредственной связи с *геометрическими*, а также *механическими представлениями*. У И. Ньютона понимание о переменной величине появилось с рассмотрением вопросов механики. Под функцией он понимал величину, изменяющуюся с течением времени. Р. Декарт и П. Ферма (1601 – 1665) связывали представление о переменной величине с исследованием вопросов геометрии [9, С. 99].

Р. Декарт в своем труде «Геометрия» писал: «*Придавая линии y последовательно бесконечное множество различных значений, мы найдем также бесконечное количество значений x и, тем самым, получим бесконечное количество различных точек…; они опишут требуемую линию*». Здесь явно выражена идея геометрического выражения зависимости величин y и x, то есть *графика функции*.

Термин *«функция»* (от латинского function – совершение, выполнение) в первый раз употребил в 1673 г. немецкий математик Г. Лейбниц. Сначала это понятие употребляли в узком смысле данного слова, связывая только с геометрическими представлениями. Речь шла об отрезках касательных к кривым, их проекциях на оси координат и о «другого рода линиях, выполняющих для данной фигуры некоторую функцию». То есть понятие функции до сих пор не освободилось от *геометрической трактовки* [5, С. 16 – 17].

В начале 18 столетия, с развитием математического анализа, произошел переход от *интуитивно-геометрического представления* о функции к *аналитическому* определению ее. Этому переходу способствовал швейцарский математик Иоганн Бернулли (1667 – 1748). Он определил функцию переменной величины *как количество, образованное каким угодно способом из этой переменной и постоянных* (1718 г) [9, С. 99].

В 1748 г. ученик Иоганна Бернулли, Леонард Эйлер определил функцию переменной величины как *аналитическое выражение*, составленное каким-либо способом из этой переменной величины и из чисел, либо постоянных величин. Л. Эйлеру принадлежит современное обозначение функции $y = f(x)$ [58, С. 3].

Н.Я. Виленкин, анализируя данное выше определение И. Бернулли, замечает, что в его определении не сказано, каким образом должно быть образовано «количество». Для полноценности данного определения требовалось решить вопрос о *допустимых способах задания функций*.

К середине 18 столетия было решено множество задач механики, которые были связаны с движением отдельных точек. В центре внимания математиков оказались проблемы механики сплошных тел. Одной из таких проблем была проблема исследования колебаний струны. В решении этой проблемы приняли участие виднейшие ученые 18 века – Эйлер, Даламбер, Д. Бернулли и др. Решая данную проблему, Эйлер и Даламбер независимо друг от друга пришли к решению, в котором первоначально отклонение струны могло *на различных участках задаваться различными выражениями*. Эйлер считал найденное решение законным, Даламбер настаивал на том, что начальное условие должно задаваться лишь одним выражением для всех значений x [4, С. 43].

В данный спор вмешался Даниил Бернулли. Он предложил формулу, выражавшую решение в виде суммы бесконечного ряда, составленного из тригонометрических функций. Он был уверен, что его решение представляет собой самый общий случай. Эйлер и Даламбер были не согласны с этим, так как это противоречило общему мнению математиков того времени, которые были убеждены, что два различных выражения не могут задавать одну и ту же функцию [58, С. 6]. Возникший спор привёл к тому, что в конце 18 столетия математики, определяя функцию, избегали говорить о том, как она задана. Так, французский математик Лакруа писал: «*Всякое количество, значение которого зависит от одного или многих количеств, называется функцией этих последних, независимо от того, известно или нет, какие операции нужно применить, чтобы перейти от них к первому*». Из этого определения видно, что Лакруа уже не отождествлял понятие функции и ее аналитическое выражение [5, С. 20].

Окончательный разрыв между понятием функции и ее аналитическим выражением произошел в начале 19 столетия. Французский математик Фурье показал, что функции, заданные на разных участках по разному, можно представить во всей области задания в виде суммы одного и того же бесконечного ряда. Таким образом, несущественно, одним или многими выражениями задана функция: суть лишь в том, какие значения принимает одна величина при заданных значениях другой величины.

В связи с этой идеей в 19 столетии происходит переход к более *обобщенному определению функции*, данному впервые немецким математиком Л. Дирихле в 1837 г.: «*y есть функция переменной x (на отрезке $a \leq x \leq b$), если каждому значению x (на этом отрезке) соответствует совершенно* *определенное значение y, причем безразлично, каким образом установлено это соответствие - аналитической формулой, графиком, таблицей либо даже просто словами*». К аналогичному определению независимо от Л. Дирихле пришел и русский математик Н.И. Лобачевский (1834 г.) [10, С. 24].

Итак, в середине 19 века понятие функции было освобождено от единовластия математической формулы. Новое общее определение понятия функции стало опираться *на идею соответствия*.

Во второй половине 19 века, когда была создана теория множеств, идея соответствия была дополнена *идеей множества*, которая позволяла рассматривать функцию не только для числовых множеств, но и на объектах произвольной природы. Понятие функции стало отождествляться с *понятием отображения* [42, С. 8].

Именно создатели теории множеств Г. Кантор и Р. Дедекинд дали *общее определение отображения*: пусть X и $Y-$ два множества. Говорят, что задано *отображение* $f\colon X \to Y$, если для любого элемента $x \in X$ указан соответствующий ему элемент $y \in Y$. Введение в математику общего понятия отображения дало возможность уточнить *понятие обратной функции*, *сложной функции* и исследовать ряд других проблем.

С начала 20 века вокруг определения Дирихле стали вестись споры. В 1930 г. после выхода книги «Основы квантовой механики» Поля Дирака остро возник вопрос о необходимости дальнейшего расширения понятия функции. Он ввел *дельта-функцию,* выходившую за рамки классического определения. По этой причине советский математик Н.М. Гюнтер и другие ученые опубликовали работы, где неизвестными являются *«функции области»*, а не функции точки, что ближе физической сущности явлений.

В общем виде понятие обобщенной функции было введено французом Лораном Шварцем. Первым рассмотрел случай обобщенной функции, который включал и дельта-функцию, 28-летний советский математик и механик С.Л. Соболев в 1936 году. Свою теорию он применил к решению ряда задач математической физики. Ценный вклад в развитие теории обобщенной функции внесли ученики и последователи Л. Шварца – И.М. Гельфант, Г.Е. Шилов и др. [9, С. 25 – 26].

Таким образом, понятие функции в своем историческом развитии прошло через несколько этапов:

1. Пропедевтический – с древнейших времен до 17 века.

2. Введение понятия функции через механические и геометрические представления – 17 век.

3. Аналитическое определение функции – 17 век - начало 19 столетия.

4. Функция как отображение – 19 век.

5. Дальнейшее развитие понятия функции – с 20 века.

История развития понятия функции показывает широту, сложность и многогранность данного понятия. Над ним трудились десятки ведущих ученых. Структура изучения функциональной линии в школьном курсе математики строится с учетом исторических аспектов развития понятия функции. Исторический подход к понятию функции в школьном курсе предполагает повторение в обучении основных этапов, через которые это понятие прошло в науке [47, С. 259].

§2. Основные цели и задачи обучения функциям в курсе алгебры основной школы

Функциональная линия – одна из ключевых содержательных линий математики. Функциональная линия реализуется как в исследовании вопросов, которые напрямую относятся к понятию функции, так и в придании многим понятиям математики функциональной направленности.

В *федеральном государственном образовательном стандарте основного общего образования* [50] утверждается, что результаты изучения предметной области «Математика» *должны отражать*:

1) формирование представлений о математике как о методе познания действительности, позволяющем описывать и изучать реальные процессы и явления;

2) развитие умений работать с учебным математическим текстом, точно и грамотно выражать свои мысли с применением математической терминологии и символики, проводить классификации, логические обоснования, доказательства математических утверждений;

3) овладение символьным языком алгебры, приёмами выполнения тождественных преобразований выражений, решения уравнений, систем уравнений, неравенств и систем неравенств; умения моделировать реальные ситуации на языке алгебры, исследовать построенные модели с использованием аппарата алгебры, интерпретировать полученный результат;

4) овладение системой функциональных понятий, развитие умения использовать функционально-графические представления для решения различных математических задач, для описания и анализа реальных зависимостей;

5) овладение простейшими способами представления и анализа статистических данных; формирование представлений о статистических закономерностях в реальном мире и о различных способах их изучений, о простейших вероятностных моделях; развитие умений извлекать информацию, представленную в таблицах, на диаграммах, графиках, описывать и анализировать массивы числовых данных с помощью подходящих статистических характеристик, использовать понимание вероятностных свойств окружающих явлений при принятии решений;

6) развитие умений применять изученные понятия, результаты, методы для решения задач практического характера и задач из смежных дисциплин с использованием при необходимости справочных материалов, компьютера, пользоваться оценкой и прикидкой при практических расчётах.

В сборнике рабочих программ по алгебре Т.А. Бурмистровой [3, С. 5] содержится указание на то, что в курсе математики содержание функциональной линии направлено на получение обучающимися определенных знаний о функции *как фундаментальной математической модели*, позволяющей исследовать и анализировать окружающие нас явления и процессы. Овладение функциональным материалом содействует формированию у обучающихся умения использовать словесный, графический и символьный языки математики. Помимо этого, материал функциональной линии позволяет продемонстрировать роль математической науки в развитии других наук.

В результате изучения темы «Функции» в школьном курсе математики основной школы учащиеся должны:

- **знать**:

1. Систему функциональных понятий.

2. Функциональный язык и символику.

3. Элементарные функциональные зависимости.

- **уметь**:

1. Применять систему функциональных понятий, функциональный язык и символику.

2. Строить графики элементарных функций.

3. Анализировать график функции с целью указания ее основных свойств.

4. Применять функционально-графические представления для описания и анализа зависимостей окружающего нас мира и математических задач.

5. Применять графические представления для решения и исследования уравнений, неравенств, систем [3, С. 5 – 9].

В примерной программе основного общего образования от 8 апреля 2015 года [43, С. 86 – 87] указывается, что в ходе изучения функциональной линии в 7 – 9 классах для применения в обыденной жизни, при изучении других предметов и обеспечения возможности благополучного продолжения образования на *базовом уровне* учащиеся должны научиться:

1. По заданному значению аргумента находить значение функции, а также выполнять обратную задачу.

2. Находить координаты точки согласно ее расположению в плоскости координат, определять положение точки согласно ее координатам.

3. Анализировать график функции с целью указания ее основных свойств (область определения, область значений, точки, в которых функция обращается в нуль, интервалы знакопостоянства, монотонности, максимальное и минимальное значение функции).

4. Строить график линейной функции.

5. Определять по графику вид заданной функции (линейная, квадратичная, обратная пропорциональность).

6. Находить приближенные значения координат точки пересечения графиков функций.

7. Использовать на базовом уровне понятия: последовательность, арифметическая и геометрическая прогрессии.

8. Решать задачи на прогрессии, в которых ответ может быть получен непосредственным подсчётом без применения формул.

9. Анализировать графики реальных процессов и зависимостей.

10. Применять свойства и график линейной функции к решению задач из различных учебных дисциплин.

Учащийся получает возможность научиться в 7-9 классах для обеспечения возможности благополучного продолжения образования на *базовом и углубленном уровнях:*

1. Владеть основной функциональной терминологией.

2. Представлять в графическом виде линейную, квадратичную функции, обратную пропорциональность, функции вида: $y = a + \frac{k}{x+b}$, $y = \sqrt{x}$, $y = \sqrt[3]{x}$, $y = |x|$.

3. На примере квадратичной функции применять преобразования графиков функций (сдвиги вдоль осей координат, сжатие, растяжение).

4. Составлять уравнение прямой по двум точкам, а также уравнение прямой, проходящей через заданную точку и параллельной заданной прямой.

5. Определять свойства функции по ее графическому представлению.

6. Определять область значений, точки, в которых функция обращается в нуль, интервалы знакопостоянства, монотонности квадратичной функции.

7. Владеть понятиями: последовательность, арифметическая и геометрическая прогрессии.

8. Решать задачи на арифметическую и геометрическую прогрессии.

9. Представлять в графическом виде реальную зависимость или процесс по их характеристикам.

10. Применять график и свойства квадратичной функции к решению различных задач других учебных дисциплин.

Учащийся получает возможность научиться в 7-9 классах для благополучного продолжения образования на *углубленном уровне*, а также для применения в житейских ситуациях и решения проблем различных предметных областей:

1. Владеть на свободном уровне основными функциональными понятиями (четность/нечетность функции, асимптоты, периодичность и другие).

2. Представлять в графическом виде следующие функции: линейная, квадратичная, дробно-линейная, степенная, $y = |x|$.

3. Применять преобразования графиков функций (сдвиги вдоль осей координат, сжатие, растяжение).

4. Исследовать свойства функций и вид графика в зависимости от параметров.

5. Владеть такими понятиями как предел последовательности, арифметическая и геометрическая прогрессии и др.

6. Решать различные задачи на арифметическую и геометрическую прогрессии.

7. Применять метод математической индукции к решению задач на делимость, для вывода формул, доказательства равенств и неравенств.

8. Исследовать рекуррентно заданные последовательности.

9. Конструировать и исследовать функции, соответствующие явлениям и процессам окружающей действительности, интерпретировать полученные выводы с учетом особенностей исследуемого явления или процесса.

10. Исследовать процессы и явления окружающего нас мира с использованием графиков зависимостей.

11. Решать задачи других предметных областей при помощи конструирования и исследования функций.

В статье Т.А. Пескова «Об изучении функций в средней школе» [41] подчеркивается, что образовательное, практическое и воспитательное значение изучения функций состоит в том, что оно позволяет устанавливать законы изменения различных величин окружающей нас действительности в зависимости от других величин.

Н.Л. Стефанова, Н.С. Подходова и др. в пособии «Методика и технология обучения математике» [47, С. 257 – 258], говоря о *целях изучения функций*, отмечают, что:

1. Применение свойств функций лежит в основе метода решения математических задач (например, при решении уравнений и неравенств).

2. Функция имеет общекультурное, мировоззренческое значение. Изучая функции, учащиеся знакомятся с идеей всеобщей связи, непрерывности, бесконечности. Так как функция является моделью многих реальных процессов, изучение ее свойств дает возможность познавать эти процессы.

3. Функциональные зависимости широко применяются в различных научных областях и учебных дисциплинах. Изучение функции в школе позволяет показать учащимся значимость и распространенность этого понятия.

4. Изучение функций содействует формированию и развитию функционального мышления, ответственного за видение связей между изменениями

различных объектов. Кроме того, функциональное мышление способствует развитию умений работать с абстрактным материалом, анализировать.

Л.А. Горина в статье [11] указывает, что систематическое использование функционального материала открывает учащимся возможность видеть *внутренние связи* между понятием функции и другими понятиями курса школьной математики, содействовать овладению алгебраическими знаниями. Автор подчеркивает взаимосвязь функциональной линии с линиями уравнений и неравенств, тождественных преобразований и арифметических вычислений. Активное использование графиков при обучении функциям обеспечивает *развитие гармоничного математического мышления*.

Д. Денбэл в статье [55] отмечает, что функции являются неотъемлемой частью математики. Учащиеся сталкиваются с функциями не только на уроках алгебры и геометрии, а также в других науках. Например, геометрические преобразования плоскости можно воспринимать и исследовать как функции. Функции, по мнению автора, предоставляют возможность моделировать явления и ситуации, находящиеся за пределами математики.

Таким образом, подводя итог всему вышесказанному, можно сформулировать следующие основные *цели обучения функциональной линии* в основной школе:

1. Формирование у учащихся целостного представления об окружающем мире и взаимосвязи его компонентов на основании исследования реальных зависимостей при помощи функций.

2. Формирование навыков использования функций в повседневной жизни.

3. Формирование у учащихся знаний, умений и навыков использования понятийного аппарата, связанного с функциональной линией, в математике и других науках.

4. Формирование у учащихся навыков перевода информации из одного вида в другой: из графической в текстовую, табличную, на язык формул.

§3. Анализ содержания функциональной линии в учебниках алгебры разных авторов

3.1 Анализ теоретического материала

В учебниках алгебры разных авторов место изучения функционального материала, как и его содержание различно. Имеет отличия и порядок изучения основной функциональной терминологии.

Базовые знания (известные из школьного курса математики 5-6 классов):

- числовые и буквенные выражения;
- понятия формулы и уравнения;
- понятия прямой и обратной пропорциональных зависимостей;
- координатная прямая, координатная плоскость, координаты.

Вводимые (новые) знания:

- понятия функции, графика функции и её области определения;
- запись $y = f(x)$;
- основные свойства функций;
- основные элементарные функции, их графики и свойства;
- кусочные функции;
- преобразования графиков функций;
- применение графиков функций к решению уравнений, неравенств и систем;
- понятия арифметической и геометрической прогрессий;
- тригонометрические функции, их графики и свойства.

В Таблице 1 представлен анализ содержания теоретического материала функциональной линии в различных *учебниках алгебры 7 класса*.

В учебнике Г.В. Дорофеева в 7 классе понятие функции не вводится, зато рассматриваются графики простейших зависимостей, а также графики реальных зависимостей (кривые спроса, графики температуры).

Понятие функции и запись $y = f(x)$ вводятся в 7 классе в учебниках Ю.Н. Макарычева (углубленный уровень), Г.К. Муравина и О.В. Муравиной. В учебнике Ю.Н. Макарычева (базовый уровень) запись $y = f(x)$ вводится в 8 классе, а в 7 – вводится понятие функции. У Ю.Н. Макарычева в учебнике базового уровня функция трактуется *как зависимость*, а в учебнике для углубленного изучения функция определяется через *соответствие двух множеств*. Г.К. Муравин и О.В. Муравина определяют *функцию как переменную величину*.

Таблица 1

Анализ содержания теоретического материала функциональной линии в различных учебниках алгебры 7 класса

Авторы учебников	**Содержание учебного материала**
Г.В. Дорофеев, С.Б. Суворова и др. [13]	Графики зависимостей $y = x$, $y = -x$, $y = \|x\|$, $y = x^2$, $y = x^3$. Графики реальных зависимостей.
Ю.Н. Макарычев, Н.Г. Миндюк, К.И. Нешков, С.Б. Суворова [23]	Понятие функции. Область определения. Область значений. График функции. Способы задания функции. Функции $y = kx$, $y = kx + b$, $y = x^2$, $y = x^3$. График линейного уравнения с двумя переменными. Графический метод решения линейных уравнений, неравенств с двумя переменными и их систем. Задание функции несколькими формулами.
Г.К. Муравин, К.С. Муравин, О.В. Муравина [38]	Понятие функции. Запись $y = f(x)$. Множество допустимых значений аргумента функции. Способы задания функции. Функции $y = kx$, $y = kx + l$. График линейного уравнения с двумя переменным. Графический способ решения системы двух линейных уравнений с двумя переменными.
А. Г. Мордкович [30]	Функции $y = kx + m$, $y = kx$, $y = x^2$. График линейного уравнения с двумя переменными. Свойства функций: область определения, $y_{наиб}$ и $y_{наим}$, промежутки возрастания и убывания функции, непрерывность. Запись $y = f(x)$. Кусочные функции.
Ю.Н. Макарычев, Н.Г. Миндюк, К.И. Нешков, И. Е. Феоктистов (углубленный) [26]	Понятие функции. График функции. Область определения и область значений. Запись $y = f(x)$. Графическое представление статистических данных. Функции $y = kx + m$, $y = kx$, $y = x^2$, $y = x^3$. График линейного уравнения с двумя переменными. Графический метод решения линейных уравнений с двумя неизвестными и их систем.

В комплекте учебников А.Г. Мордковича авторы отказываются от формулировки определения функции при первом появлении этого понятия. Автор считает, что вводить понятие функции следует после того, как ученики накопили достаточно опыта в оперировании этим понятием. Однако запись $y = f(x)$ А.Г. Мордкович вводит в 7 классе [36, С. 13].

Основной изучаемой функцией в курсе алгебры 7 класса является *линейная функция.* В учебнике Ю.Н. Макарычева (базовый уровень) на изучение линейной функции отводится 5 часов, а в учебнике для углубленного изучения – 6 часов. Г.К. Муравин и А.Г. Мордкович изучению линейной функции посвящают по 10 часов. Такое количество часов объясняется тем, что в рамках данной темы авторы также рассматривают линейное уравнение с двумя переменными и его график.

В учебниках Ю.Н. Макарычева (базовый и углубленный уровни), А.Г. Мордковича в 7 классе помимо линейной функции рассматривается функция $y = x^2$. У Ю.Н. Макарычева также в 7 классе происходит ознакомление учащихся с функцией $y = x^3$.

А.Г. Мордкович в 7 классе на наглядно-интуитивном уровне знакомит учащихся с понятиями: наибольшее и наименьшее значения функции на заданном промежутке, возрастание («поднимаемся в горку») и убывание («спускаемся с горки»), монотонность, непрерывность, область значений.

В Таблице 2 представлен анализ содержания теоретического материала функциональной линии в разных *учебниках алгебры 8 класса*.

В курсе алгебры 8-го класса основной изучаемой функцией является *функция обратной пропорциональности.* В учебниках Ю.Н. Макарычева (базовый и углубленный уровни), А.Г. Мордковича на изучение данной функции отводится по 2 часа, а у Г.К. Муравина – 3 часа.

В учебнике Г.В. Дорофеева в 8 классе вводится понятие функции и запись $y = f(x)$. Г.В. Дорофеев определяет функцию *как переменную величину*, *как зависимость* и *как правило соответствия*. По мнению Г.В. Дорофеева, в 8 классе учащимся будет проще усвоить понятие функции, так как они смогут опираться на полученные ранее знания о зависимостях между величинами, а также на имеющиеся к этому времени достаточно обширные графические представления. Кроме того, в 8 классе автор рассматривает линейную функцию и функцию обратной пропорциональности. На изучение данных видов функций автор отводит в сумме 5 часов. Также в 8 классе Г.В. Дорофеев знакомит учащихся со следующим свойствами функций: $y_{\text{наиб}}$ и $y_{\text{наим}}$, точки, в которых функция обращается в нуль, промежутки знакопостоянства и промежутки возрастания и убывания функции. При этом изложение всего материала базируется на геометрических образах. Исследование функций происходит графическим методом [48, С. 12].

Таблица 2

Анализ содержания теоретического материала функциональной линии в различных учебниках алгебры 8 класса

Авторы учебников	**Содержание учебного материала**
Г.В. Дорофеев, С.Б. Суворова и др. [14]	График зависимости $y = \sqrt{x}$. График линейного уравнения с двумя переменными. Графический метод решения системы линейных уравнений с двумя переменными. Уравнение прямой $y = kx + l$. Понятие функции. Запись $y = f(x)$. Область определения. Функции $y = kx$, $y = kx + l$, $y = \frac{k}{x}$. Свойства функций: $y_{\text{наиб}}$ и $y_{\text{наим}}$, нули функции, промежутки, где $y > 0$, $y < 0$, промежутки убывания и возрастания функции. В дополнительном пункте: функции $y = [x]$ и $y = \{x\}$.
Ю.Н. Макарычев, Н.Г. Миндюк, К.И. Нешков, С.Б. Суворова [24]	Функции $y = \frac{k}{x}$, $y = \sqrt{x}$, $y = x^{-1}$, $y = x^{-2}$, их графики и свойства.
Г.К. Муравин, К.С. Муравин, О.В. Муравина [39]	Аргумент. График функции. Область определения функции. Функции $y = \frac{k}{x}$, $y = x^2$. Свойства функции: область определения, область значений, возрастание, убывание.
А. Г. Мордкович [32]	Функции $y = \sqrt{x}$, $y = \lvert x \rvert$, $y = \frac{k}{x}$, $y = kx^2$. На наглядно интуитивном уровне вводятся понятия выпуклости и ограниченности функции. Асимптоты. Построение графиков функции $y = f(x + l)$, $y = f(x) + m$, $y = f(x + l) + m$ и $y = -f(x)$ по известному графику функции $y = f(x)$. Функция $y = ax^2 + bx + c$. Графическое решение квадратных уравнений и неравенств.
Ю.Н. Макарычев, Н.Г. Миндюк, К.И. Нешков, И. Е. Феоктистов (углубленный) [27]	Функция $y = \sqrt{x}$ и её график. Нули функции. Промежутки знакопостоянства. Преобразования графиков функций: растяжение и сжатие графиков функций к оси абсцисс, параллельный перенос графиков функций. Функции $y = x^{-1}$ и $y = x^{-2}$ и их графики. Асимптота. Функция $y = \frac{k}{x}$ и её график. Дробно-линейная функция и её график.

В учебниках Ю.Н. Макарычева и А.Г. Мордковича помимо функции обратной пропорциональности в 8 классе рассматривают функцию $y = \sqrt{x}$. Кроме того, А.Г. Мордкович знакомит учащихся с функцией $y = x$.

Особое внимание в 8 классе в учебнике А.Г. Мордковича уделяется простейшим преобразованиям графиков функций (сдвиги вдоль осей координат), а также квадратичной функции. На изучение преобразований графиков функций автор отводит 6 часов, а на изучение квадратичной функции – 7 часов. Кроме того, автор на наглядно-интуитивном уровне вводит понятия выпуклости и ограниченности функции, дает формальное определение монотонности функции. Также рассматривает построение и чтение графиков кусочных функций.

В учебнике для углубленного изучения Ю.Н. Макарычева в 8 классе также изучаются преобразования графиков функций. Но стоит отметить, что помимо параллельного переноса графиков функций приводится растяжение и сжатие графиков функций к оси абсцисс. На изучение данной темы отводится 3 часа. Также автор знакомит учащихся с дробно-линейной функцией и функциями $y = x^{-1}$ и $y = x^{-2}$.

В Таблице 3 представлен анализ содержания теоретического материала функциональной линии в разных *учебниках алгебры 9 класса*.

Основной изучаемой функцией в курсе алгебры 9-го класса является *квадратичная функция*. В учебнике Г.К. Муравина и О.В. Муравиной на изучение квадратичной функции отводится 10 часов, а в учебниках Ю.Н. Макарычева (базовый и углубленный уровни) – 8 часов и 4 часа соответственно. Особое внимание уделяется *преобразованиям графиков функций*.

У Г.В. Дорофеева изучению квадратичной функции и преобразованиям графиков функции (сдвиги вдоль осей координат на примере функции $y = ax^2$) посвящается 17 часов. Кроме того, в учебниках Ю.Н. Макарычева, Г.К. Муравина и О.В. Муравиной, А.Г. Мордковича рассматриваются степенная функция с натуральным показателем, а также функция $y = \sqrt[n]{x}, n \in \mathbb{N}$.

Таблица 3

Анализ содержания теоретического материала функциональной линии в различных учебниках алгебры 9 класса

Авторы учебников	**Содержание учебного материала**
Г.В. Дорофеев, С.Б. Суворова и др. [15]	Функция $y = ax^2$. Сдвиги графика функции $y = ax^2$ вдоль осей координат. Функция $y = ax^2 + bx + c$. Графический метод решения уравнений, неравенств и их систем. Графики уравнений, содержащих модули. Дробно-линейная функция.
Ю.Н. Макарычев, Н.Г. Миндюк, К.И. Нешков, С.Б. Суворова [25]	Запись $y = f(x)$. Нули функции, промежутки знакопостоянства, возрастающая и убывающая функции. Функция $y = \sqrt{x}$. Графики и свойства функций: $y = ax^2$, $y = ax^2 + n$, $y = a(x-m)^2$, $y = ax^2 + bx + c$, $y = x^n (n \in \mathbb{N})$. Дробно-линейная функция. Асимптота. Графический способ решения уравнений, неравенств, систем.
Г.К. Муравин, К.С. Муравин, О.В. Муравина [40]	Функции $y = ax^2$, $y = a(x+p)^2$, $y = ax^2 + q$, $y = ax^2 + bx + c$. Применение функций к решению неравенств и уравнений. Функции $y = x^n$ $(n \in \mathbb{N})$, $y = \sqrt[n]{x}$ $(x \geq 0, n \in \mathbb{N})$.
А. Г. Мордкович [34]	Понятие функции. Область определения. Область значения. Способы задания функций. Даются формальные определения всем свойствам, с которыми учащиеся были ознакомлены в 7 – 8 классах (кроме понятий непрерывности и выпуклости). Вводится понятие четной и нечетной функции. Исследуются функции: $y = C$, $y = kx + m$, $y = kx^2$, $y = \frac{k}{x}$, $y = \sqrt{x}$, $y = \lvert x \rvert$, $y = ax^2 + bx + c$. Функции: $y = x^n$, $y = x^{-n}$ $(n \in \mathbb{N})$, $y = \sqrt[n]{x}$ $(x \geq 0, n \in \mathbb{N})$.
Ю.Н. Макарычев, Н.Г. Миндюк, К.И. Нешков, И. Е. Феоктистов (углубленный) [28]	Свойства функций: возрастание и убывание, четные и нечетные функции, ограниченные и неограниченные функции. Функции $y = ax^2$, $y = ax^2 + n$, $y = a(x-m)^2$. График и свойства квадратичной функции. Преобразования графиков функций: растяжение и сжатие графиков функций к оси ординат. Графики функций $y = \lvert f(x) \rvert$ и $y = f(\lvert x \rvert)$. Взаимно-обратные функции. Функция, обратная данной функции. Функция $y = \sqrt[n]{x}$. Тригонометрические функции и их свойства: графики и основные свойства синуса, косинуса, тангенса, котангенса. Периодическая функция.

В 9 классе в учебнике Ю.Н. Макарычева (базовый уровень) автор вводит запись $y = f(x)$ и знакомит учащихся со следующими свойствами функций: нули функции, промежутки знакопостоянства, промежутки возрастания и убывания. Вводит понятие монотонной функции. Кроме того, в пункте для дополнительного изучения рассматривается дробно-линейная функция.

А.Г. Мордкович в 9 классе вводит определение понятия функции. До 9-го класса в учебниках автора это понятие ограничивалось только описанием. Функцию автор определяет *через соответствие двух множеств*. Также автор вводит обозначения $D(f)$ – область определения функции и $E\ f\ -$ область значений функции. В этой же главе рассматриваются способы задания функции: аналитический, графический, табличный, словесный. Вводятся термины «монотонная функция», «четная функция» и «нечетная функция».

При чтении графика функции автор приходит к следующему *порядку перечисления* ее свойств [37, С. 15]: 1) область определения; 2) четность; 3) монотонность; 4) ограниченность снизу, сверху; 5) $y_{\text{наим}}$, $y_{\text{наиб}}$; 6) непрерывность; 7) область значений; 8) выпуклость.

В Таблице 4 представлена «стратегия и тактика изучения свойств функций» в учебниках А.Г. Мордковича.

Таблица 4

Стратегия изучения свойств функций в учебниках А.Г. Мордковича

Свойство	**Класс**		
	7-й	**8-й**	**9-й**
Область определения	**Н**	**Р**	**Ф**
Наибольшее и наименьшее значения функции на промежутке	**Н**	**Р**	**Ф**
Монотонность	**Н**	**Р, Ф**	**Ф**
Непрерывность	**Н**	**Н**	**Н**
Ограниченность	**–**	**Н, Р**	**Ф**
Выпуклость	**–**	**Н**	**Н**
Область значений	**Н**	**Р**	**Ф**
Четность	**–**	**–**	**Ф**

Стратегия, как пишет автор в методическом пособии [36, С. 15] определяет время введения понятия (класс), а тактика – формирование уровней строгости предъявления понятия. В данной таблице приняты условные обозначения: Н – соответствующее свойство вводится на наглядно-интуитивном уровне; Р – свойство функции изучается на рабочем уровне, «на уровне словесного описания, не загнанного в жесткую формальную конструкцию»; Ф – формальное определение свойств.

Итак, по Таблице 4 видно, что А.Г. Мордкович к концу 9 класса формулирует для большинства свойств функции формальное определение. Но перед этим, автор знакомит учащихся с данными функциями сначала на наглядно-интуитивном уровне (7 класс), а затем на рабочем (8 класс). Это объясняется тем, что учащиеся 7-8 классов более восприимчивы к новым математическим понятиям, чем учащиеся старших классов.

В учебнике Ю.Н. Макарычева *для углубленного изучения* в 9 классе также даются формальные определения свойствам функций (возрастание и убывание, четность, нечетность и т.д.). Помимо этого, автор знакомит учащихся с графиком и свойствами квадратичной функции, понятием взаимно обратной функции. Кроме того, изучаются растяжение и сжатие графиков функций к оси ординат, а также графики функций, содержащих модули.

Основное отличие содержания функциональной линии учебника Ю.Н. Макарычева для углубленного изучения от всех остальных указанных учебников заключается в том, что на углубленном уровне в 9 классе автор впервые знакомит учащихся с *тригонометрическими функциями* и их свойствами. Рассматриваются графики и основные свойства синуса, косинуса, тангенса и котангенса.

Во всех приведенных комплектах учебников по мере изучения конкретных видов функций изучается применение графиков данных функций к решению уравнений, неравенств и их систем.

Также во всех учебниках 9 класса содержится тема «Арифметическая и геометрическая прогрессии». В.П. Покровский, как и А.Г. Мордкович, в своем методическом пособии [42, С. 12] подчеркивает, что тему «Прогрессии» следует отнести к функциональной линии, рассматривая последовательность как функцию натурального аргумента.

Покажем, как определяются последовательности в учебниках рассматриваемых нами авторов. В учебнике А.Г. Мордковича [34] числовые последовательности определяются *как функции натурального аргумента*. В учебнике Г.В. Дорофеева [15] формальное определение числовой последовательности как функции натурального аргумента, как и в учебнике Г.К. Муравина [40], отсутствует, так как, по мнению автора, оно не является дидактически значимым и не отвечает возрастным возможностям учащихся [48, С. 13]. В учебнике Ю. Н. Макарычева базового уровня [25] также не предусмотрено такое формальное определение, однако, автор считает, что учитель может, если сочтет возможным, дать учащимся данное определение. На углубленном уровне Ю.Н. Макарычев [28] определяет *последовательность как функцию, областью которой является множество натуральных чисел*.

Итак, в учебниках алгебры разных авторов место изучения функционального материала, как и его содержание различно. Также анализ содержания теоретического материала функциональной линии в учебниках разных авторов показал, что существует несколько подходов к определению понятия функции. Данные подходы рассмотрены нами в следующем параграфе.

Заметим, что в комплекте учебников А.Г. Мордковича функциональная линия выбрана в качестве приоритетной. Это выражается, прежде всего, в том, что какой бы класс функций, уравнений, выражений не изучался, построение материала практически всегда осуществляется по схеме [36, С. 12]:

функция – уравнения – преобразования.

В комплектах учебников Ю.Н. Макарычева, Г.В. Дорофеева, Г.К. Муравина и О.В. Муравиной тема «Функции» обычно изучается после темы «Уравнения».

Отметим, что, не смотря на некоторые различия в содержании и распределении функционального материала по классам, в большинстве рассматриваемых учебников в 7 классе основной изучаемой функцией является *линейная функция*. В 8 классе особое внимание уделяется функции *обратной пропорциональности*. В 9 классе центральное место занимают *квадратичная функция* и *преобразования графиков функций.*

3.2. Анализ задачного материала

В методическом пособии для учителя А.Г. Мордковича [36, С. 12] указано, что из основных содержательно-методических линии школьного курса алгебры в качестве приоритетной в комплекте учебников [30 - 35] выбрана функционально-графическая линия.

А.Г. Мордкович утверждает, что для понимания учащимися курса алгебры в целом, прежде всего, важно, чтобы они полноценно усвоили первичные модели – функции. Автор считает, что организовать деятельность по изучению той или иной функции следует так, чтобы рассмотреть новый объект (конкретную математическую модель – функцию) системно, с различных сторон, в разных ситуациях. В то же время не должно складываться ощущение набора случайных сюжетов, различных для разных классов функций. Это создаст ситуацию дискомфорта в обучении. Возникает методическая проблема выделения в системе упражнений по изучению того или иного класса функций «*инвариантного ядра, универсального для любого класса функций*».

«Инвариантное ядро» в задачниках А.Г. Мордковича состоит из шести направлений: 1) графическое решение уравнений (неравенств); 2) отыскание наибольшего и наименьшего значений функции на заданном промежутке; 3) преобразование графиков; 4) функциональная символика; 5) кусочные функции; 6) чтение графика.

Автор подчеркивает, что учащиеся постепенно привыкают к тому, что, какой бы новый класс функций они ни изучали, в системе упражнений обязательно будут упражнения, рассредоточенные по указанным шести блокам. Создается эффект предсказуемости деятельности, что делает совместную работу учителя и ученика на уроке комфортной [36, С. 16].

Приведем примеры упражнений из задачников 7-9 классов А.Г. Мордковича по каждому из шести указанных выше направлений. Ответы и указания к решению задач представлены в Приложении 1.

I. Графическое решение уравнений (неравенств).

Задача 1 [31, С. 170]. Решите графическим методом уравнение: а) $x^2 + x + 2 = 0$; б) $x^2 - x + 4 = 0$.

Задача 2 [33, С. 111]. Решите графически систему уравнений:

а) $\begin{matrix} y = -\frac{4}{x}, \\ y = 0{,}5x^2; \end{matrix}$ б) $\begin{matrix} y = -\frac{1}{x}, \\ y = -\sqrt{x}; \end{matrix}$ в) $\begin{matrix} y = \frac{8}{x}, \\ y = x^2; \end{matrix}$ г) $\begin{matrix} y = \frac{2}{x}, \\ y = 2\sqrt{x}. \end{matrix}$

Задача 3 [35, С. 87]. Решите графическим методом неравенство: а) $x^{-2} > 2x - 1$; б) $x^{-8} \leq \sqrt{x}$.

II. Отыскание наибольшего и наименьшего значений функции на заданном промежутке.

Задача 4 [31, С. 168]. Пусть $C -$ наибольшее значение функции $y = x^2$ на отрезке $[1; 2]$, $D -$ наименьшее значение функции $y = 2x + 3$ на отрезке $-1; 1$. Что больше: C или D? Сделайте графическую иллюстрацию.

Задача 5 [33, С. 129]. Найдите наименьшее и наибольшее значения функции $y = \ x \ - 4$: а) на отрезке $2; 6$; б) на луче $[-1; +\infty)$; в) на луче $(-\infty; 0]$; г) на отрезке $-4; 5$.

Задача 6 [35, С. 80]. Не выполняя построения графика, найдите наименьшее и наибольшее значения функции: а) $y = x^3 - 3,\ x \in \ -1; 2$; б) $y = -(x + 4)^3$, $x \in \ -4; 10$.

III. Преобразование графиков.

Задача 7 [33, С. 135]. Постройте график функции: $y = \sqrt{x - 1} - 1$.

Задача 8 [33, С. 138]. Постройте график функции, преобразовав ее методом выделения полного квадрата к виду $y = a\ x + l\ ^2 + m$:

а) $y = x^2 + 2x + 3$; в) $y = x^2 + 6x + 10$;

б) $y = x^2 - 4x + 1$; г) $y = x^2 - 14x + 51$.

Задача 9 [35, С. 80]. Постройте график функции: а) $y = (x + 2)^4$; б) $y = (x - 1)^5$.

IV. Функциональная символика.

Задача 10 [31, С. 172]. Дана функция $y = f(x)$, где $f\ x\ = x^2$. Найдите: 1) $f(-5), f\ 7\ + 1, f\ 5\ - 4, f\ 7\ - f(5)$; 2) $f(x^2), f(x^2 - 2), f\ x^2\ - 2$.

Задача 11 [33, С. 142]. Зная, что $f(x) = -x^2 + 2x - 4$, найдите $f(-x-1)$.

Задача 12 [35, С. 82]. Дана функция $y = f(x)$, где $f(x) = x^7$. Докажите, что $f(2x) \cdot f\left(\frac{x}{2}\right) = \left(f(x)\right)^2$.

V. Кусочные функции.

Задача 13 [31, С. 173]. Дана функция $y = f(x)$, где

$$f(x) = \begin{cases} x^2, \text{если } x < -4{,}5; \\ -4x + 7, \text{если } x \geq -4{,}5. \end{cases}$$

Вычислите: а) $f(-5)$; б) $f(-4)$; в) $f(3)$; г) $f(-4{,}5)$.

Задача 14 [33, С. 106]. Постройте график функции $y = f(x)$, где:

$$f(x) = \begin{cases} -0{,}5x^2, \text{если } -4 \leq x \leq 0; \\ -\sqrt{x}, \text{если } 0 < x \leq 4. \end{cases}$$

С помощью графика функции найдите: а) $f(-1)$, $f(0)$, $f(2)$; б) значения x, при которых $f(x) = -2$, $f(x) = 0$, $f(x) = -8$.

Задача 15 [35, С. 83]. Постройте график функции:

$$y = \begin{cases} |x|, \text{если } x \leq 0; \\ x^7, \text{если } 0 < x \leq 1; \\ \dfrac{1}{x}, \text{если } x > 1. \end{cases}$$

VI. Чтение графика.

Задача 16 [31, С. 174]. Постройте график функции

$$y = \begin{cases} x + 3, \text{если } -3 \leq x \leq -1; \\ x^2, \text{если } -1 < x \leq 2. \end{cases}$$

Используя построенный график функции, найдите: а) область определения функции; б) наименьшее и наибольшее значения функции; в) промежутки убывания и возрастания функции; г) точки разрыва.

Задача 17 [33, С. 73]. Постройте и прочитайте график функции:

$$y = \begin{cases} 2, \text{если } -3 \leq x \leq 1; \\ \sqrt{x}, \text{если } 1 < x \leq 4; \\ (x-5)^2 + 1, \text{если } 4 < x \leq 6. \end{cases}$$

Всё многообразие задач по теме «Функции» в учебниках 7-9 классов Ю.Н. Макарычева [23 - 28], Г.К. Муравина и О.В. Муравиной [38 - 40], Г.В. Дорофеева [13 - 15] условно можно разделить на следующие *типы задач* (Приложения 2 - 4):

I. Задачи на понимание и использование функциональных понятий, терминов, функциональной символики.

II. Задачи на построение графиков элементарных функций.

III. Задачи на описание свойств функций на основе изучения поведения их графиков.

IV. Задачи, направленные на понимание функции как важнейшей математической модели для описания процессов и явлений окружающего мира, применение языка функций для описания и исследования зависимостей между физическими величинами.

V. Задачи на построение более сложных функций (кусочно-заданные, при помощи преобразований графиков функций) на основе графиков изученных функций.

VI. Задачи на использование функциональных представлений и свойств функций для решения уравнений, неравенств, систем.

Заметим, что в учебниках Г.В. Дорофеева систематическое изучение функционального материала начинается в 8 классе. В 7 классе автор рассматривает графики реальных зависимостей, что является своего рода подготовкой учащихся к изучению темы «Функции» в последующих классах.

В учебниках Ю.Н. Макарычева *для углубленного изучения алгебры* в 7-8 классах содержится больше всего задач по функциональной линии, чем в учебниках других авторов. Кроме того, в данных учебниках содержатся задания на описание свойств функций на основе изучения поведения их графиков. Г.В. Дорофеев рассматривает данный тип задач в курсе алгебры 8 класса.

Кроме того, в 7-8 классах в учебниках Ю.Н. Макарычева *для углубленного изучения* содержатся задания на построение более сложных графиков функций (кусочных, с помощью преобразований графиков функций). В учебниках Ю.Н. Макарычева *базового уровня* подобные задания присутствуют только в пунктах для дополнительного изучения. В учебнике Г.В. Дорофеева задания на построения кусочных функций присутствуют в 8 классе.

Отметим, что в курсе алгебры 7 класса у всех рассматриваемых нами авторов значительная часть задач по функциональной линии посвящена исследованию реальных зависимостей (*IV тип задач*).

В курсе алгебры 9 класса задания, направленные на понимание функции как важнейшей математической модели для описания процессов и явлений окружающего мира (*IV тип задач*) представлены в минимальном количестве. Задачный материал по теме «Функции» в курсе алгебры 9 класса в основном направлен на формирование у учащихся навыков и умений построения кусочных функций, применения преобразования графиков функций, а также на применение функций к решению уравнений, неравенств и систем. Таким образом, в курсе алгебры 9 класса преобладают *задачи V* и *VI типов*. Задачи *I типа* присутствуют во всех учебниках рассматриваемых нами авторов на протяжении всего курса алгебры 7 – 9 классов.

Приведем примеры упражнений по каждому из указанных выше типов задач. Ответы и указания к решению задач представлены в Приложении 1.

I. Задачи на понимание и использование функциональных понятий, терминов, функциональной символики.

Задача 18 [23, С. 61]. Найдите область определения функции, заданной формулой: а) $y = x^2 + 8$; б) $y = \frac{1}{x-7}$; в) $y = \frac{2}{3+x}$; г) $y = \frac{4x-1}{5}$.

Задача 19 [27, С. 307]. Зная, что $g\ x\ = x^2 - 6x + 8$, найдите: $g(1)$, $g(2)$, $g(3)$, $g(-2)$, $g(0)$, $g(-5)$.

Задача 20 [40, С. 98]. Найдите координаты вершины параболы: 1) $y = x^2 - 4x + 1$; 2) $y = -x^2 - 6x + 5$.

II. Задачи на построение графиков элементарных функций.

Задача 21 [38, С. 193]. Постройте график функции: $y = \frac{1}{3}x - 4$.

Задача 22 [14, С. 269]. Функция задана формулой $f(x) = -\frac{6}{x}$. Заполните таблицу (Табл. 5), постройте график функции и определите промежуток, где $f(x) > 0$; $f(x) < 0$.

Таблица 5

Табличное задание функции $f(x) = -\frac{6}{x}$

x	1	2	3	4	6	-1	-2	-3	-4	-6
$f(x)$										

Задача 23 [28, С. 33]. Постройте в одной системе координат графики функций $y = \frac{1}{4}x^2$ и $y = -\frac{1}{4}x^2$. Найдите промежутки возрастания и убывания для каждой функции.

III. Задачи на описание свойств функций на основе изучения поведения их графиков.

Задача 24 [26, С. 210]. Графиком функции $y = f(x)$, где $-3 \leq x \leq 5$, служит кривая (Рис. 1). Найдите по графику: а) значение функции y, если $x = -1; -2; 5$; б) область значений функции; в) наибольшее значение функции; г) наименьшее значение функции

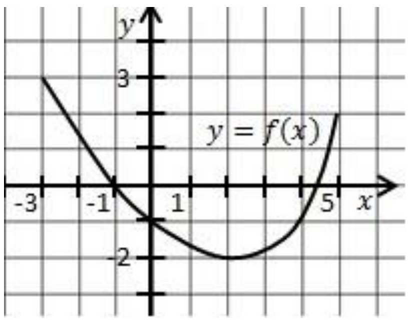


Рис. 1

Задача 25 [40, С. 97]. По графику функции (Рис. 2) найдите:

1) точки пересечения графика с осями Ox и Oy;

2) наибольшее/наименьшее значение функции;

3) значения x, при которых $y > 0$;

4) промежутки возрастания/убывания функции.

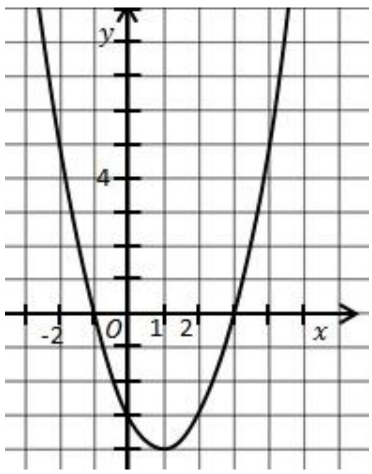


Рис. 2

IV. Задачи, направленные на понимание функции как важнейшей математической модели для описания процессов и явлений окружающего мира, применение языка функций для описания и исследования зависимостей между физическими величинами.

Задача 26 [23, С. 74]. На Рис. 3 построены графики движения пешехода (отрезок OB) и велосипедиста (отрезок OA). Определите:

а) какое время был в пути пешеход и какое время – велосипедист;

б) какой путь проделал пешеход и какой путь проехал велосипедист;

в) с какой скоростью двигался пешеход и с какой – велосипедист;

г) во сколько раз путь, который проехал за 2 ч велосипедист, больше пути, пройденного за то же время пешеходом?

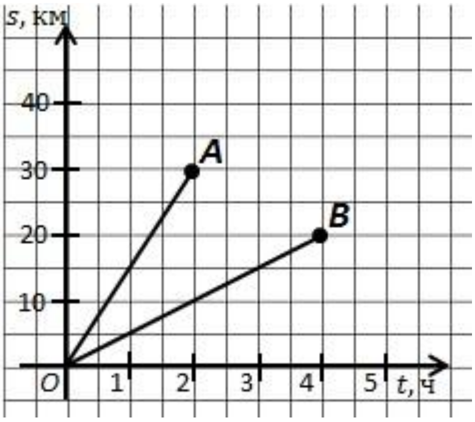


Рис. 3

Задача 27 [14, С. 232]. На Рис. 4 изображен график температуры воздуха в городе Весеннем 25 февраля 2012 г. Определите: а) какая температура была в 6 ч; в 11 ч; в 18 ч; б) в какое время суток температура была выше 0 °C; в) в какое время суток температура повышалась; понижалась; оставалась постоянной; г) в какое время суток температура была максимальной; минимальной; д) какова была максимальная температура за сутки; минимальная.

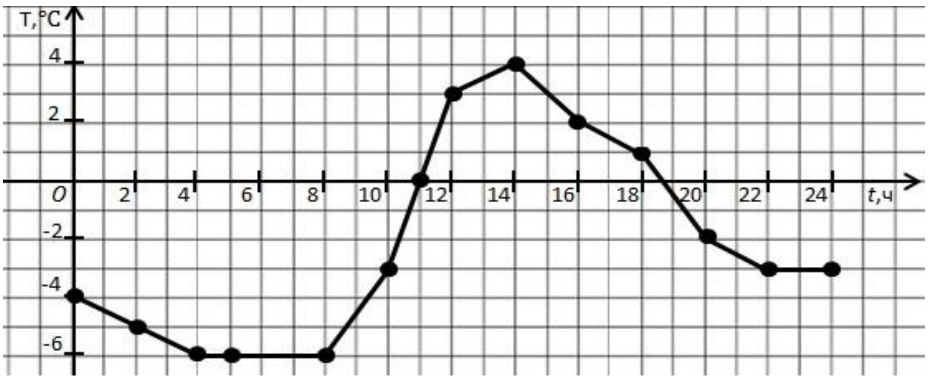


Рис. 4

V. Задачи на построение более сложных функций (кусочно-заданные, при помощи преобразований графиков функций) на основе графиков изученных функций.

Задача 28 [26, С. 236]. Постройте график функции:

$$y = \begin{matrix} -x, \text{если } x < -2; \\ 1, \text{если } -2 \le x \le 2; \\ x, \text{если } x > 2. \end{matrix}$$

Задача 29 [24, С. 245]. Постройте график функции

$$y = \begin{cases} x, \text{если } x \leq 0, \\ x^{-1}, \text{если } x > 0. \end{cases}$$

Задача 30 [15, С. 96]. Постройте график функции: $y = (x+3)^2 - 4$.

VI. Задачи на использование функциональных представлений и свойств функций для решения уравнений, неравенств, систем.

Задача 31 [38, С. 194]. Решите графически систему уравнений:

$$1)\ \begin{cases} 2x - y = 5, \\ x + 2y = 20; \end{cases} \qquad 2)\ \begin{cases} -x + 3y = 2, \\ 2x + y = 10. \end{cases}$$

Задача 32 [15, С. 111]. Решите неравенство: $-x^2 + 6x + 7 > 0$.

Таким образом, анализ теоретического материала показал, что, не смотря на некоторые различия в содержании и распределении функционального материала по классам, в большинстве рассматриваемых учебников в 7 классе основной изучаемой функцией является *линейная функция*. В 8 классе особое внимание уделяется функции *обратной пропорциональности*, а в 9 классе - *квадратичной функции* и *преобразованиям графиков функций.*

Анализ задачного материала показал, что в комплекте учебников А.Г. Мордковича в системе упражнений по изучению того или иного класса функций существует *«инвариантное ядро»*. Оно состоит из шести направлений, описанных выше. Задачники автора содержат достаточное количество задач по теме «Функции» различных уровней сложности.

В учебниках Г.В. Дорофеева, Ю.Н. Макарычева, Г.К. Муравина и О.В. Муравиной задачный материал по теме «Функции» условно разбивается на 6 *типов задач*, описанных выше. Также анализ показал, что в комплекте учебников данных авторов недостаточно задач по теме «Функции». В частности, недостаточно задач на построение графиков элементарных функций, на описание свойств функции по ее графику и задач на построение более сложных функций на основе графиков изученных функций. В связи с недостатком количества задач данных типов учителю можно воспользоваться *дополнительной литературой*.

Так, например, в статье «Изучение функций в VII классе с помощью средств образного характера» [53, С. 25 – 27] А.Я. Цукарь приводит подборку задач, направленных на описание свойств функции по графику, на соотнесение графика функции и ее аналитического задания. Задачи на построение графиков функций в достаточном количестве содержатся в книге «Элементарные функции и графики» И.Х. Сивашинского [46, С. 90 – 92]. Автор приводит задачи на построение графиков линейной, квадратичной и дробно-рациональной функций. При этом заметим, что большинство предлагаемых задач являются задачами повышенной трудности. Кроме того, учителю можно воспользоваться задачами из учебников алгебры других авторов.

§ 4. Методика введения понятия функции в школьном курсе математики

В школьных учебниках существуют *различные подходы к определению* и *введению понятия функции*, а также дальнейшему его формированию у учащихся. Это связано с рассмотренными ранее историческими аспектами возникновения и развития данного понятия. А.Я. Блох, В.А. Гусев, Г.В. Дорофеев и др. в учебном пособии «Методика преподавания математики в средней школе: Частная методика» [2] приводят две методические трактовки понятия функции: *генетическую* и *логическую.*

Генетическая трактовка понятия функции основывается на методическом освоении ключевых черт, которые вошли в данное понятие до середины 19 столетия. При этой трактовке система функциональных представлений включает в себя следующие наиболее существенные понятия: переменная величина, функциональная зависимость переменных величин, формула, декартова система координат на плоскости.

Основа *логической трактовки понятия функции* - построение обучения функциональным представлениям на основе методического анализа данного понятия в рамках определения алгебраической системы. Функция при таком подходе выступает в виде отношения специального вида между двумя множествами, удовлетворяющего условию функциональности. Начальным этапом изучения понятия функции становится вывод его из понятия отношения.

У каждого из данных направлений есть свои преимущества и недостатки. Так, авторы отмечают, что *в генетической трактовке* с легкостью выявляется модельный аспект понятия функции относительно изучения явлений окружающего нас мира. Данная трактовка естественно увязывается с остальным содержанием курса алгебры, так как большинство функций, используемых в нем, выражаются алгебраически или таблично. Однако авторы указывают на то, что при таком подходе переменная всегда неявно (или даже явно) предполагается пробегающей непрерывный ряд числовых значений. В связи с этим понятие связывается в основном только с числовыми функциями одного числового аргумента (определенными на числовом промежутке). В обучении приходится, используя и развивая функциональным представления, постоянно выходить за пределы его первоначального описания.

При использовании *логического подхода* необходимо иллюстрировать понятие функции при помощи различных средств, что обогащает язык школьной математики. Помимо формул и таблиц здесь применимо задание функции стрелками, перечислением пар. Обобщенность возникающего понятия и вытекающие отсюда возможности установления разнообразных связей в обучении математике – основные достоинства такой трактовки. Однако, как замечают авторы, выработанное на этом пути общее понятие оказывается в дальнейшем связанным в основном с числовыми функциями одного числового аргумента, то есть с той областью, где оно гораздо проще формируется на генетической основе [2, С. 154 - 155].

В современном школьном курсе математики в итоге длительных методических поисков в качестве ведущего был принят *генетический подход*.

Н.Л. Стефанова, Н.С. Подходова и др. разделяют различные трактовки понятия «функции» на два блока. Первый блок объединяет определения, которые можно отнести к *классическим (традиционным)*, опирающимся на понятие переменной величины. Второй блок включает в себя определения, которые относятся к *современным* и имеют *теоретико-множественную основу* [47, С. 258].

Аналогичные трактовки понятия функции рассматривает В.П. Покровский. При этом он отмечает, что вопрос об оптимальном для общеобразовательной школы определении функции по-прежнему остается актуальным. О сложности проблемы, на взгляд автора, говорит уже то обстоятельство, что в действующих учебниках даются различные по формулировке определения функции, отражающие один из подходов и методические соображения авторов [42, С. 16].

В Таблице 6 представлены *подходы к определению понятия функции* в учебниках алгебры 7-9 классов рассматриваемых нами авторов.

Таблица 6

Различные подходы к определению понятия функции

в учебниках алгебры 7-9 классов

Авторы учебников		**Определение понятия функции**
7 кл.	Ю.Н. Макарычев и др. [23]	Трактуется как зависимость
	Г.К. Муравин, О.В. Муравина и др. [38]	Определяется как переменная величина
	А.Г. Мордкович и др. [30]	Понятие ограничивается описанием, определения нет
	Ю.Н. Макарычев и др. (углубленный уровень) [26]	Определяется через соответствие двух множеств
8 кл.	Г.В. Дорофеев и др. [14]	Трактуется как переменная величина; как зависимая переменная; как правило соответствия
9 кл.	А.Г. Мордкович и др. [34]	Определяется через соответствие двух множеств
	Н.Я. Виленкин и др. (углубленный уровень) [6]	Трактуется как правило соответствия

Рассмотрим методику введения понятия функции по учебнику алгебры 7 класса *Ю.Н. Макарычева* [23], в котором функция трактуется как *особого рода зависимость одной переменной от другой*.

Введению понятия «функция» предшествует рассмотрение *примеров зависимостей между переменными.* В них учащиеся встречаются со случаями, когда такая зависимость задана *формулой*, *графиком* или *таблицей*. На данных примерах раскрывается содержание таких понятий, как *«зависимые переменные»* и *«независимые переменные»*. Тем самым создается база для осознанного восприятия учащимися понятия «функция».

Ю.Н. Макарычев приводит следующий пример: *площадь квадрата* зависит от *длины его стороны*. Пусть каждая сторона квадрата равна a см, а его площадь равна S см^2. Для каждого значения переменной a можно найти соответствующее ему значение переменной S. Так, если $a = 3$, то $S = 9$; если $a = 15$, то $S = 225$.

Автор указывает, что зависимость переменной S от переменной a выражается формулой $S = a^2$. При этом, Ю.Н. Макарычев отмечает, что по смыслу задачи $a > 0$. Переменную a, значение которой выбирается произвольно, называют *независимой переменной*, а переменную S − *зависимой переменной* [23, С. 55].

После данного примера рассматривается пример *зависимости пути*, пройденного автомобилем со скоростью 50 км/ч, *от времени движения* $(s = 50t)$. Также приводится *график изменения температуры* воздуха в течение суток и *таблицу зависимости стоимости проезда* на железнодорожном транспорте *от номера зоны проезда*.

После чего, автор делает вывод о том, что в рассмотренных примерах каждому значению независимой переменной соответствует единственное значение зависимой переменной. Такую зависимость одной переменной от другой называют *функциональной зависимостью* или *функцией*.

Ю.Н. Макарычев отмечает, что независимую переменную иначе называют *аргументом*, а о зависимой переменной говорят, что она является *функцией от этого аргумента*. Значения зависимой переменной называют *значениями функции*. Далее, автор вводит понятие области определения функции:

все значения, которые принимает независимая переменная, образуют *область определения функции*.

Вводимые функциональные понятия отрабатываются при выполнении упражнений № 258 – 264. Задачи № 258 - 260 направлены на формирование навыков учащихся задавать зависимость формулой и находить значение функции по заданному значению аргумента.

Задача № 258 [23, С. 57]. Площадь прямоугольника со сторонами 9 см и x см равна S см^2. Выразите формулой зависимость S от x. Для значения аргумента $x = 4$; 6,5; 15 найдите соответствующее значение функции S.

Особое внимание, по мнению Ю.Н. Макарычева, следует уделить упражнениям № 261, 262, которые ориентированы на формирование навыков чтения графиков реальных зависимостей. Задача № 263 направлена на понимание понятий «аргумент», «область определения функции», «значения функции», а № 264 – на чтение данных по таблице.

Задача № 263 [23, С. 59]. Каждому натуральному числу n ставится в соответствие остаток r от деления этого числа на 4. Найдите r, если n равно 13, 34, 43, 100. В рассматриваемой функциональной зависимости укажите аргумента. Какова область определения этой функции? Какие числа служат значениями функции?

Далее изучаются темы «Вычисление значений функции по формуле», «График функции», «Линейная функция». В 8 классе изучаются конкретные виды функций ($y = \frac{k}{x}$, $y = \sqrt{x}$), а в 9 классе Ю.Н. Макарычев вводит запись $y = f(x)$ и дает следующее определение понятия функции:

Определение 1. Функцией называют такую зависимость переменной y от переменной x, при которой каждому значению переменной x соответствует единственное значение переменной y [25, С. 3].

Аналогичный подход раннего введения понятия функции принят в учебнике алгебры 7-го класса *Г.К. Муравина* и *О.В. Муравиной*. Введение понятия функции начинается с рассмотрения примеров.

Задача 33 [38, С. 52]. Площадь прямоугольника равна 60 см^2. А одна из его измерений a см. Каково второе измерение прямоугольника?

После этого авторы замечают, что в приведенных примерах с изменением значения одной переменной изменяется и значение другой, причем каждому значению первой переменной соответствует единственное значение второй. Далее дается определение понятия функции.

Определение 2. Переменную y называют функцией переменной x, если каждому допустимому значению x соответствует единственное значение y. Переменную x называют аргументом функции y [38, С. 53].

Г.К. Муравин и О.В. Муравина вводят запись $y = f\ \ x$ и замечают, что значения аргумента функции, при которых записанное в правой части формулы выражение имеет смысл, считают *допустимыми значениями аргумента функции*.

В качестве упражнений после данного пункта «Понятие функции» рассматривается задача № 122 – на составление функции $y = f(x)$ по условию задачи, на усвоение понятия «допустимые значения переменной x», а также на нахождение переменной y по заданному значению x.

Задача № 122 [38, С. 55]. По условию задачи составьте функцию $y = f\ \ x$. В книге 280 страниц. Девочка ежедневно читает по 20 страниц. Сколько страниц (y) ей останется прочитать через x дней? ($x_1 = 7, x_2 = 14$). Каковы допустимые значения переменной x? Найдите значения переменной y, соответствующие значениям x_1 и x_2.

Далее следуют задачи на понимание функциональной символики и нахождение множества допустимых значений аргумента (№ 123 – 128), а также № 129 – на запись зависимости формулой и определение множества допустимых значений аргумента полученной функции.

После введения понятия функции изучаются темы «Таблица значений и график функции», «Функция $y = kx$», «Линейная функция», а в 8 и 9 классах изучаются конкретные виды функций ($y = \frac{k}{x}$, $y = x^2$, $y = x^n$, $y = \sqrt[n]{x}$).

В комплектах учебников Г.В. Дорофеева, А.Г. Мордковича определение функции дается позднее (8-й и 9-й класс соответственно). В 7 классе Г.В. Дорофеев понятие функции не вводит, употребляется понятие *«зависимость»*. В 8 классе в пункте «Чтение графиков» Г.В. Дорофеев напоминает учащимся, что им уже приходилось работать с графиками различных зависимостей между величинами. В этом же пункте автор разбирает несколько примеров *чтения графиков реальных зависимостей*.

Пункт «Что такое функция» начинается с того, что Г.В. Дорофеев отмечает то, что рассматривая графики реальных зависимостей, в каждом примере всегда имели дело с двумя взаимосвязанными величинами. С изменением значений первой величины менялись и значения второй. В таких ситуациях, пишет автор, одну величину называют *независимой*, а другую – *зависимой*. Приводятся примеры чтения графиков некоторых реальных ситуаций. Рассматривается задание этих зависимостей не только *формулой*, но и *таблицей*, а также *графиком*. Далее автор дает определение понятия функции.

Определение 3. Переменную y называют функцией переменной x, если каждому значению x из некоторого числового множества соответствует одно определенное значение переменной y. Для независимой переменной тоже есть специальной название: ее называют аргументом [14, С. 238].

Здесь же автор отмечает, что в математике термин «функция» употребляется и в более широком смысле. Функцией, как пишет автор, часто называют не только одну из двух переменных, но и саму зависимость между ними, а также *правило*, по которому устанавливается соответствие между значениями аргумента и значениями функции. Это правило, как замечает Г.В. Дорофеев, может быть представлено разными способами – формулой, таблицей, графиком и т.д. Вводится запись $y = f(x)$ и термин *«область определения функции»*: все значения, которые может принимать аргумент, образуют область определения функции [14, С. 239].

В качестве упражнений предлагаются задачи на задание зависимости формулой, нахождение значения функции по заданному значению аргумента и наоборот, определение области определения функции (№ 737 – 740), на работу с функциональной символикой (№ 742 – 744, № 750, 751, 754, 755).

Далее следуют темы «График функции», «Свойства функции», «Линейная функция», «Функция $y = \frac{k}{x}$ и ее график», а в 9 классе центральное место занимает изучение квадратичной функции.

В комплектах учебников *А.Г. Мордковича* в 7 классе в параграфе «Координатная плоскость» автор вводит следующие термины: *прямоугольная система координат*, *координатная плоскость*, *начало координат*, *координатные углы*, *абсцисса* и *ордината*. Далее изучается тема «Линейное уравнение с двумя переменными и его график». После чего автор знакомит учащихся с линейной функцией и ее графиком. При этом отметим, что само понятие функции в 7 классе А.Г. Мордкович не вводит. Впервые употребляется данный термин при знакомстве учащихся с линейной функцией. Автор указывает, что уравнение $y = kx + m$, где k, m – числа будем называть *линейной функцией*.

После этого замечается, что в данном уравнении переменные x и y не равноправны: конкретные значения мы придаем одной из них – переменной x, тогда как значение переменной y зависит от выбранного значения переменной x. В связи с этим указывается, что $x -$ *независимая переменная* (или аргумент), $y -$ *зависимая переменная*.

В параграфе «Функция $y = x^2$ и ее график» А.Г. Мордкович отмечает, что ранее был введен термин «линейная функция». Напоминается, что под этим термином понималось линейное уравнение вида $y = kx + m$ с двумя переменными x, y. Затем перед учащимися ставится следующий вопрос: не встречаются ли математические модели такого же плана, но такие, у которых y выражается через x не по формуле $y = kx + m$, а каким-то иным способом? В качестве ответа на данный вопрос автор приводит уравнения вида $y = x^2$

($x -$ сторона квадрата, $y -$ его площадь), $y = x^3$ ($x -$ сторона куба, $y -$ его объем). Для таких моделей, как пишет А.Г. Мордкович, сохраняют термин «функция», опуская прилагательное «линейная» [30, С. 156].

В главе «Функция $y = x^2$» вводится запись $y = f(x)$, а также термин *«область определения функции»*. В 8 классе изучаются конкретные виды функций. В 9 классе изучению функциональной линии в комплектах учебников А.Г. Мордковича посвящается глава «Числовые функции». Параграф «Определение числовой функции. Область определения, область значений функции» начинается с напоминания автора о том, что когда вводили термин «функция» и начинали им пользоваться, точного определения не формулировали, ограничиваясь приблизительным истолкованием термина [34, С. 83].

Обобщая опыт работы учащихся с данным понятием в 7 и 8 классах, автор выделяет *два существенных момента*:

1. Запись $y = f(x)$ указывает на *правило*, с помощью которого, зная конкретное значение независимой переменной x, можно найти соответствующее значение переменной y.

2. Указывается *числовое множество* X, откуда берутся значения независимой переменной x.

После чего формулируется определение понятия функции.

Определение 4. Если даны числовое множество X и правило f, позволяющее поставить в соответствие каждому элементу x из множества X определенное число y, то говорят, что задана функция $y = f(x)$ с областью определения X; пишут $y = f(x), x \in X$. При этом переменную x называют независимой переменной или аргументом, а переменную y – зависимой переменной [34, С. 86].

Затем, А.Г. Мордкович вводит обозначения для области определения $D(f)$ и области значений функции $E(f)$. Далее рассматриваются темы «Способы задания функции» и «Свойства функции».

В задачном материале большинство задач (№ 8.1 – 8.17, 8.25 – 8.32) направлены на формирование навыков и умений учащихся нахождения области определения функции по её аналитическому заданию. Также присутствуют задачи (№ 8.22, 8.23, 8.34 – 8.36) на построение графиков функции, нахождения области определения и области значений функции, вычисление значения функции по заданному значению аргумента и наоборот.

В комплекте учебников *Ю.Н. Макарычева* (углубленный уровень) введение понятия функции так же начинается с приведения *примера*: рассмотрим два множества: множество X двузначных чисел и множество Y натуральных чисел, которые меньше 10 000. Каждому элементу множества X поставим в соответствие тот элемент множества Y, который является квадратом этого двузначного числа [26, С. 198].

Автор замечает, что при этом любому элементу множества X соответствует единственный элемент множества Y. Ю.Н. Макарычев дает следующее определение понятия функции.

Определение 5. Функцией называется соответствие между двумя множествами, при котором каждому элементу одного множества соответствует единственный элемент другого множества [26, С. 198].

После введения понятия функции вводятся следующие термины: *независимая переменная, аргумент, область определения функции, зависимая переменная, область значений функции*. Здесь же автор вводит *функциональную символику* и рассматривает различные *способы задания функции*.

В задачном материале содержатся задачи на усвоение понятия функции (№ 979, 980), на формирование навыков учащихся переходить от одного способа задания функции к другому (№ 981 – 984, 996 - 998), на нахождение значения функции по заданному значению аргумента и наоборот, а также на усвоение функциональной символики (№ 985 – 990). Особое внимание автор рекомендует уделить задачам на нахождение области определения и области значений функции (№ 991 – 994).

Задача № 980 [26, С. 202]. Даны соответствия между элементами некоторых множеств: а) каждому ученику школы поставлено в соответствие четырехзначное число, соответствующее году его рождения; б) каждому дню в году поставлен в соответствие ученик школы, родившийся в этот день. Какие из этих соответствий являются функциями? Почему?

Задача № 994 [26, С. 204]. Докажите, что областью значений функции являются только положительные числа, если:

$$\text{а) } y = \frac{2x^2 - 6x + 5}{x^2 + \ x \ + 1}; \text{ б) } y = \frac{-x^2 + 5x - 7}{- \ x \ - 1}.$$

Задача № 998 [26, С. 205]. Задайте таблицей функцию:

$$y = \begin{cases} 2x, \text{если } x \in \{-3, -2, -1, 0\}; \\ 2x - 1, \text{если } x \in \{1, 2, 3\}. \end{cases}$$

Н.Я. Виленкин в 9 классе [6, С. 6] дает следующее определение понятия функции: «*Функцией f называют правило, которое каждому элементу $x \in X$ ставит в соответствие единственный элемент $y \in Y$*».

А.Н. Колмогоров в статье «Что такое функция» [19] вводит понятие функции при рассмотрении следующего примера.

Пример 1. Петя, Коля, Саша и Володя живут в комнате общежития. На февраль (Табл. 7) они установили такой график дежурства:

Таблица 7

График дежурства

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	…	28
Петя	+				+				+				…	
Коля		+				+				+			…	
Саша			+				+				+		…	
Володя				+				+				+	…	+

Автор замечает, что в данном примере на каждый из 28 дней февраля назначен определенный дежурный, то есть множество дней февраля отображено на множество мальчиков, распределивших между собой дежурства. Если за x обозначить любой день февраля, а за $y -$ дежурного в день x, то отображение: «день $x \to y =$ дежурный на день x» называется *функцией* и записывается это отображение так: $y = f(x)$.

В.П. Покровский отмечает, что родовое понятие и соответствующая терминология, которая используется в определении функции, должны быть понятны ученикам и не требовали предварительно громоздких рассмотрений на данном этапе изучения. Информация, содержащаяся в определении, должны быть не только научной, но и отвечать возрастным особенностям учащихся. Последнее, по мнению автора, нарушается при теоретико-множественной трактовке понятия функции уже в 7-м классе в учебнике Ю.Н. Макарычева (углубленный уровень). Автор считает, что учителю следует обращать внимание на житейский смысл математических терминов, происхождение и перевод с латинского или греческого языка [42, С. 20].

Отметим, что при введении функции нет возможности сопоставить данное понятие с другими понятиями, которые бы напоминали функцию, но были отличны от нее. Поэтому важно использовать специальные упражнения, требующие выяснения является ли данная зависимость функцией. Такие упражнения, используемые знания учащихся по материалу различных школьных предметов и из повседневной жизни приведены в книге по методике обучения математике Н.Л. Стефановой [47, С.265 - 266].

Пример 2. 1) человек $(x) \to$ группа крови (y) – является функцией; 2) группа крови $(x) \to$ человек (y) – не является функцией.

Необходимое условие сознательного усвоения понятия функции учащимися – приведение собственных примеров зависимостей, являющихся и не являющихся функциями.

Е.И. Лященко в пособии «Изучение функций в курсе математики восьмилетней школы» [22] утверждает, что введение понятия функции следует начинать с рассмотрения *примеров зависимостей*, заданных различными видами. Автор определяет функцию через *правило соответствия между двумя* *множествами*. При этом он замечает, что это правило может быть записано в виде *формулы*, в виде *графика*, в виде *таблицы*.

Е.И. Лященко считает, что в процессе формирования определения функции необходимо систематически обращать внимание на различие и общность понятий функция и ее числовое значение. Рассматривая группу примеров, на основании которых вводится определение функции, по мнению автора, следует обратить внимание учащихся на два существенных момента: сущность самого правила и область определения функции.

Первый момент (сущность самого правила) учащимся фактически известен, так как на протяжении всего курса математики они занимались установлением соответствия между элементами множеств: решая задачи с помощью плана или числовой формулы, устанавливали соответствие между данными и неизвестными величинами. При построении графика с помощью проектирования устанавливали соответствие между значениями двух переменных. Составляя таблицы эмпирическим путем, получали соответствие между значениями двух переменных [22, С. 50 – 51].

При введении определения функции эти вопросы приобретают большую определенность и конкретность. По мнению Е.И. Лященко, важно, чтобы учащиеся понимали, что все это не разные задачи, а разные формы выражения *соответствия между элементами множеств*. После этого, учитель должен обратить внимание учащихся на *область определения функции*, которая устанавливается с учетом специфики правила (формула, график, таблица). Это, по мнению автора, учащиеся должны различать. Е.И. Лященко замечает, что в процессе обучения вызывают затруднения случаи установления области определения значений функции, заданной аналитически, поэтому им автор рекомендуем уделять больше внимания. При этом необходимо рассматривать и примеры установления области определения значений функции, заданных графиком или таблицей [22, С. 54].

Таким образом, существует две различные методические трактовки понятия функции: *генетическая* и *логическая*. В современном школьном курсе математики в итоге длительных методических поисков в качестве ведущего был принят генетический подход к понятию функции. В школьных учебниках алгебры 7-9 классов функция трактуется как *зависимость*, как *переменная величина* или определяется через *соответствие двух множеств*. Вводить понятие функции целесообразно с рассмотрения известных учащимся *зависимостей окружающего нас мира*. При этом следует сразу заметить, что функция может быть задана различными способами: *формулой*, *описанием*, *таблицей* или *графиком*. Формировать понятие функции у учащихся необходимо вместе с ее *областью определения*. При этом важно учить учащихся находить область определения функции не только по ее аналитической записи, но и в тех случаях, когда функция задана графиком или таблицей.

§ 5. Методика обучения линейной функции

После получения учащимися общего представления о числовых функциях, они переходят к изучению конкретных функций. В качестве первой из них рассматривается *линейная функция* как самая простая математическая модель описания реальных процессов. Учащиеся впервые приступают к изучению графика определенного вида функций, поэтому, как считает В.П. Покровский, необходимо показать им важность изучаемого материала с использованием практических примеров линейных зависимостей величин, известных им из математики, других предметов и практической жизни [42, С. 45].

Ю.М. Колягин считает, что изучение конкретных функций, в том числе и линейной, полезно проводить по следующей *методической схеме*:

1. Рассмотреть конкретные ситуации (или задачи), приводящие к данной функции. На этом этапе учащиеся должны убедиться в целесообразности изучения данной функции, исходя из соображений практики или необходимости дальнейшего развития теории.

2. Сформулировать определение данной функции, дать запись функции формулой, провести исследование входящих в эту формулу параметров. На данном этапе учащиеся получат четкое представление о данной функции, о ее характеристических свойствах, выделяющих данную функцию из множества других.

3. Ознакомить учащихся с графиком данной функции. На этом этапе учащиеся учатся изображать изучаемую функцию графически, отличать по графику данную функцию от других, заданных графиком функций, устанавливать влияние параметров на характер графического изображения функции.

4. Исследовать функцию на основные свойства: область определения и значений, возрастание и убывание, промежутки знакопостоянства, нули, экстремумы, четность или нечетность (или отсутствие этих свойств), периодичность, ограниченность, непрерывность. Изначально *свойства функций* устанавливаются по ее графику, то есть на основе наглядных соображений и лишь немногие обосновываются аналитически. Перечень свойств, подлежащих рассмотрению, увеличивается постепенно, по мере овладения соответствующим теоретическим материалом.

5. Использовать изученные свойства функций при решении различных задач, в частности уравнений и неравенств. Данный этап является этапом закрепления основных понятий и теоретических положения, связанных с изучаемой функцией, а также этапом формирования соответствующих умений и навыков [20, С. 129].

Отметим, что изложение темы «Линейная функция» в учебниках алгебры в целом отвечает данной схеме. Заметим, что изложение темы «Линейная функция» в учебниках Ю.Н. Макарычева базового и углубленного уровней не имеет особых отличий, кроме того, что на углубленном уровне на изучение данной темы отводится 8 часов, а на базовом – 5 часов.

Анализ учебников по изучению данной темы, представленный в Таблице 8, показал, что в современных учебниках алгебры имеются разночтения во времени начала изучения линейной функции – 7-й или 8-й класс, последовательности изучения ее с частным случаем – прямой пропорциональностью (дедуктивный или индуктивный подход), в сообщении большего или меньшего числа свойств при первоначальном ознакомлении, во взаимосвязи линейного уравнения с двумя переменными и линейной функции, их графиков. На изучение линейной функции отводится от 5 до 13 часов [42, С. 45].

Таблица 8

Анализ учебников алгебры по изучению темы «Линейная функция»

Г.В. Дорофеев и др.[14]	*Ю.Н. Макарычев и др. [23]*	*Г.К. Муравин и др.[38]*	*А.Г. Мордкович [30]*
Количество часов, класс, тема «Линейная функция»			
5 часов, 8 класс	5 часов, 7 класс	10 часов, 7 класс	13 часов, 7 класс
Последовательность вводимых понятий			
- линейная функция; - график линейной функции; - возрастание и убывание линейной функции; - прямая пропорциональность и ее график; - постоянная функция или константа $y = l$; - аппроксимирующие прямые.	- прямая пропорциональность и ее график; - зависимость расположения графика функции $y = kx$ в координатной плоскости от значения k; - линейная функция и ее график; - угловой коэффициент прямой; - зависимость расположения графика функции $y = kx + b$ в координатной плоскости от значений коэффициентов k и b; - взаимное расположение графиков линейных функций.	- линейная функция; - график линейной функции; - угловой коэффициент; - зависимость расположения графика функции $y = kx + b$ на координатной плоскости от значений коэффициентов k и b; - линейное уравнение с двумя переменными и его график.	- линейное уравнение с двумя переменными и его график; - линейная функция и ее график; - наибольшее и наименьшее значения линейной функции; - возрастание и убывание линейной функции; - линейная функция $y = kx$; - угловой коэффициент; - взаимное расположение графиков линейных функций.
Знать/понимать:			
определения прямой пропорциональности, линейной функции, углового коэффициента, аппроксимирующих прямых.		определения линейного уравнения с двумя переменными, линейной функции, углового коэффициента.	
Уметь:			
- находить значение линейной функции по заданному значению аргумента и наоборот, составлять таблицы значений функции;			
- строить графики функций $y = kx$, $y = kx + b$, описывать их свойства;			
- показывать схематическое положение на координатной плоскости графиков функций вида $y = kx$, $y = kx + b$ в зависимости от значений k и b;			

<table>
<tr><td colspan="2">- определять взаимное расположение графиков двух функций вида $y = kx + b$ в зависимости от значений k и b;</td></tr>
<tr><td>- интерпретировать графики реальных зависимостей, описываемых формулами вида $y = kx, y = kx + b$.</td><td>- строить графики линейных уравнений с двумя переменными.</td></tr>
</table>

Остановимся на *методике обучения линейной функции, представленной в учебнике Ю.Н. Макарычева* [23]. Изучение темы «Линейная функция» в данном учебнике начинается с *прямой пропорциональности* и ее графика. Заметим, что с понятием прямой пропорциональной зависимости двух величин учащиеся уже знакомы. Изучение прямой пропорциональности автор начинает с рассмотрения следующего *примера*: пусть $V -$ объем железного бруска в см^3, $m -$ его масса, в граммах. Так как плотность железа равна 7,8 г/см^3, то $m = 7{,}8V$ [23, С. 69].

Автор замечает, что зависимость массы железного бруска от его объема является примером функции, задающейся формулой $y = kx$, где $x -$ независимая переменная, $k \neq 0$. Такую функцию, пишет Ю.Н. Макарычев, называют *прямой пропорциональностью*, а число $k -$ *коэффициентом пропорциональности*.

С рассмотрения примеров изучение прямой пропорциональности начинается и в учебниках Г.В. Дорофеева, Г.К. Муравина и О.В. Муравиной.

В.П. Покровский предлагает начинать изучение прямой пропорциональности с рассмотрения следующих *подводящих задач*.

Задача 34 [42, С. 46]. Мотоциклист двигался со скоростью 16 м/с в течение t секунд. Сколько метров (s) проехал он за это время?

Задача 35 [42, С. 46]. Ученик купил n карандашей по 5 р. Сколько рублей (c) он заплатил за покупку?

По мнению автора, учащиеся легко решат предложенные задачи, запишут формулы: $s = 16t$ $(t > 0)$, $\text{с} = 5n$ $(n \in N)$ и выяснят, что в каждом случае мы имеем дело с *прямой пропорциональной зависимостью*. Также В.П. Покровский рекомендует предложить ученикам самим привести подобные задачи, решение которых приводит к формулам вида $y = kx$.

После формулирования определения прямой пропорциональности Ю.Н. Макарычев напоминает учащимся *свойство пропорциональных переменных* x и y и записывает его с помощью пропорций:

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2},$$

где x_1 и x_2 – значения аргумента, y_1 и y_2 – соответствующие им значения функции (исключаем значения, равные нулю).

Далее автор приводит конкретные *примеры функциональных зависимостей*, которые представляют собой прямую пропорциональность [29, С. 27]:

- зависимость пройденного пути s от времени движения t при равномерном движении задается формулой $s = vt$, где $v -$ постоянная величина, равная скорости движения;

- зависимость стоимости m покупки от количества n купленных изделий задается формулой $m = pn$, где $p -$ стоимость одного изделия;

- зависимость длины окружности C от ее диаметра d задается формулой $C = \pi d$, где $\pi -$ число, приближенно равное 3,14.

После ознакомления учащихся с понятием прямой пропорциональности Ю.Н. Макарычев переходит к рассмотрению *графика* данной функции. Автор предлагает учащимся построить график функции $y = 0{,}5x$. Для этого составляется *таблица соответственных значений* переменных x и y для некоторых значений аргумента x. Далее данные точки отмечаются в *координатной плоскости*. Замечается, что все отмеченные точки принадлежат некоторой прямой, проходящей через начало координат. Рассуждая аналогично, автор предлагает учащимся построить график функции $y = -1{,}5x$. Далее, автор замечает, что график функции $y = -1{,}5x$ так же как и график функции $y = 0{,}5x$, является прямой, проходящей через начало координат.

В результате этого приходят к выводу, что *график прямой пропорциональности представляет собой прямую, проходящую через начало координат*. Чтобы построить график функции $y = kx$, достаточно найти координаты какой-нибудь точки графика этой функции, отличной от начала координат, отметить эту точку и через нее и точку $(0; 0)$ провести прямую.

Аналогичную схему ознакомления учащихся с графиком функции $y = kx$ предлагают Г.В. Дорофеев, А.Г. Мордкович, Г.К. Муравин и О.В. Муравина, В.П. Покровский. Стоит отметить, что В.П. Покровский рекомендует первоначально в целях контроля за вычислениями и построением строить график прямой пропорциональности не по двум точкам, а находить дополнительно координаты третьей точки.

После ознакомления учащихся с графиком функции $y = kx$ Ю.Н. Макарычев переходит к исследованию *расположения графика в координатной плоскости в зависимости от коэффициента*. Из формулы $y = kx$ находим, что если $x = 1$, то $y = k$. Значит, график функции $y = kx$ проходит через точку $(1; k)$. И при $k > 0$ эта точка расположена в I координатной четверти, а при $k < 0$ – в IV. Отсюда автор приходит к *следующим выводам*:

- при $k > 0$ график функции вида $y = kx$ расположен в I и III координатных четвертях;

- при $k < 0$ график функции вида $y = kx$ расположен во II и IV координатных четвертях.

В.П. Покровский рекомендует *исследование расположение графика в координатной плоскости в зависимости от коэффициента* начать с предложения учащимся в качестве самостоятельной работы на координатной плоскости построить графики конкретных функций при различных $k > 0$ и $k < 0$. Затем, учащиеся должны ответить на вопрос: от чего зависит расположение графиков в каждом случае? Рассматривая графики, учащиеся наглядно установят роль коэффициента.

Итогом проделанной работы будет *общий вывод, касающийся графика функции* $y = kx$ [42, С. 47]:

1) графиком является прямая;

2) прямая проходит через начало координат;

3) прямая строится по двум точкам;

4) прямая располагается при $k > 0$ в I и III координатных четвертях, а при $k < 0$ – во II и IV;

5) прямая не совпадает с осями координат;

6) точка принадлежит прямой, если ее координаты – соответствующие друг другу значения аргумента и функции.

При этом В.П. Покровский замечает, что все теоретические положения должны сопровождаться *конкретными примерами*, *контрпримерами*, *графическими иллюстрациями*. Также ученикам полезно сказать, что первый факт требует доказательства и оно будет приведено в курсе геометрии 8-го класса.

Усвоению понятия прямой пропорциональности в учебнике Ю.Н. Макарычева способствуют задачи № 297-299.

Задача № 297 [23, С. 72]. Велосипедист движется равномерно со скоростью 12 км/ч. Напишите формулу, выражающую зависимость пройденного пути s (в километрах) от времени движения t (в часах). Является ли эта зависимость прямой пропорциональностью?

Помимо этого в учебнике присутствуют задачи на *построение графика прямой пропорциональности* (№ 300, 301), на *нахождение значения функции по заданному значению аргумента* и наоборот (№ 299, 302), на формирование умений учащихся *определять, принадлежит ли графику функции заданная точка плоскости* (№ 303, 304). Особое внимание следует уделить упражнениям, способствующим формированию у учащихся навыков и умений *переходить от одного способа задания функции к другому* (№ 306, 307).

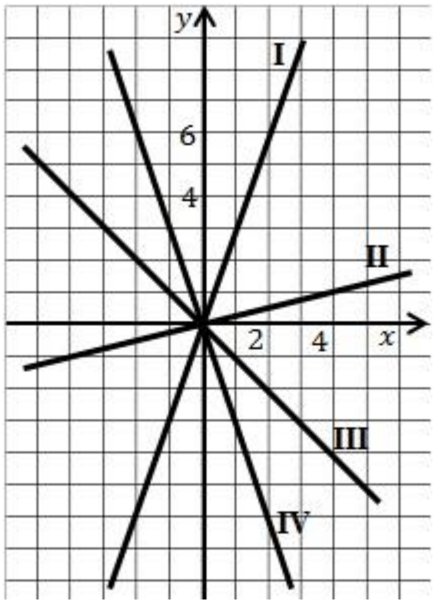


Рис. 5

Задача № 306 [23, С. 73]. Для каждого графика прямой пропорциональности, изображенного на Рис. 5, напишите соответствующую формулу.

При рассмотрении различных заданий на построение, чтение графиков функции $y = kx$ Ю.Н. Макарычев рекомендует остановиться на заданиях 308, 309, где используется *зависимость между реальными величинами*.

После изучения прямой пропорциональности, которая является *частным случаем линейной функции*, учащиеся переходят к изучению свойств *линейной функции* общего вида. Такая структура параграфа, по мнению Ю.Н. Макарычева, соответствует принятому в математике подходу, когда от более простых случаев переходят к более сложным [29, С. 28].

Введению понятия линейной функции предшествует рассмотрение нескольких *примеров функциональных зависимостей* [23, С. 75].

Пример 3. На шоссе расположены пункты A и B, удаленные друг от друга на 20 км. Мотоциклист выехал из пункта B в направлении, противоположном A, со скоростью 20 км/ч. За t ч мотоциклист проедет $50t$ км и будет находиться от A на расстоянии $50t + 20$ км. Если обозначить буквой s расстояние (в км) мотоциклиста до пункта A, то зависимость этого расстояния от времени движения можно выразить формулой $s = 50t + 20,\ t \geq 0$.

Пример 4. Ученик купил тетради по 3 р. За штуку и ручку за 5 р. Обозначим число купленных тетрадей буквой x, а стоимость покупки (в рублях) буквой y. Получим $y = 3x + 5$, где $x -$ натуральное число.

Автор обращает внимание учащихся на то, что каждая из этих формул имеет вид $y = kx + b$, где $x -$ независимая переменная, $y -$ зависимая переменная, k, b – некоторые числа. Далее дается *определение линейной функции*.

Определение 6. Линейной функцией называется функция, которую можно задать формулой вида $y = kx + b$, где $x -$ независимая переменная, k и $b -$ некоторые числа [23, С. 75].

Отметим, что Г.В. Дорофеев, Г.К. Муравин и О.В. Муравина определяют линейную функцию аналогичным образом. А.Г. Мордкович определяет линейную функцию через понятие линейного уравнения с двумя переменными. В учебнике автора указано, что: «*линейное уравнение* $ax + by + c = 0$ *с двумя переменными* x *и* y *в случае, когда* $b \neq 0$, *можно преобразовать к виду* $y = kx + m$, *где* k, m *– числа. Этот частный вид линейного уравнения называют линейной функцией»* [30, С. 48].

Усвоению понятия линейной функции способствуют упражнения №313-318. Автор рекомендует остановиться на упражнениях №313, 314, где в качестве примеров линейных функций рассматриваются *реальные зависимости*. К ним непосредственно примыкают дополнительные упражнения №363, 366, которые целесообразно рассмотреть в классе. Представляют интерес также дополнительные упражнения №361, 362, в которых предлагается *подобрать формулу, задающую линейную функцию*. Эти упражнения Ю.Н. Макарычев рекомендует использовать в качестве индивидуальных заданий для хорошо успевающих учеников [29, С. 28].

Основное внимание в теме уделяется *графику линейной функции*. Построив несколько точек, принадлежащих графику функции $y = 0{,}5x + 2$, учащиеся замечают, что точки располагаются на одной прямой. Утверждение, что *графиком линейной функции является прямая*, принимается без доказательства. Учащиеся должны понимать, что для построения графика линейной функции достаточно отметить в координатной плоскости две его точки и провести через них прямую.

В.П. Покровский считает, что особое внимание следует уделить *способам построения графика линейной функции* общего вида [42, С. 49]:

1) по двум точка с произвольно выбранными значениями абсцисс;

2) по точкам $(0; y_1)$ и $(x_2; 0)$ – точки пересечения прямой с координатными осями;

3) с помощью параллельного переноса (сдвига).

Ю.Н. Макарычев замечает, что определенную трудность для учащихся представляет случай, когда требуется построить график линейной функции, заданной формулой $y = b$, где $b -$ некоторое число, так как в этой формуле в явном виде не содержится переменная x. Ю.Н. Макарычев рекомендует *следующий прием*: записать формулу $y = b$ в виде $y = 0 \cdot x + b$, тогда, как и в общем случае, учащимся нетрудно будет указать некоторые пары соответственных значений переменных x и y. При этом они убедятся, что для любого выбранного значения x соответствующее значение y равно b. Учащиеся должны усвоить, что *графиком функции $y = b$ при $b \neq 0$ служит прямая, параллельная оси x*, а *при $b = 0$ графиком является сама ось x*.

В системе упражнений основное внимание уделяется заданиям на *построение и чтение графиков линейных функций*. Ю.Н. Макарычев считает целесообразным остановиться на случаях, когда графики линейных функций строятся *при разных масштабах на осях* (№ 321, 333).

Изучение сведений о линейной функции завершается рассмотрением вопроса о *взаимном расположении в координатной плоскости графиков линейных функций.* Учащиеся должны знать, что: 1) графики функций $y = k_1x + b_1$ и $y = k_2x + b_2$ *пересекаются*, если $k_1 \neq k_2$; 2) графики функций $y = k_1x + b_1$ и $y = k_2x + b_2$ *параллельны*, если $k_1 = k_2$, $b_1 \neq b_2$.

Из этого учащиеся должны сделать вывод, что график функции $y = kx + b$ получается из графика функции $y = kx$ сдвигом на b единиц вверх, если $b > 0$, или вниз, если $b < 0$.

В учебнике А.Г. Мордковича [30] сведения о *взаимном расположении в координатной плоскости графиков двух линейных функций* представлены в виде Таблицы 9.

Таблица 9

Взаимное расположение графиков линейных функций

Линейные функции	**Алгебраическое условие**	**Геометрический вывод**
$y = k_1x + m_1$ $y = k_2x + m_2$	1) $k_1 = k_2, m_1 \neq m_2$	1) Прямые $y = k_1x + m_1$ и $y = k_2x + m_2$ параллельны
	2) $k_1 = k_2, m_1 = m_2$	2) Прямые $y = k_1x + m_1$ и $y = k_2x + m_2$ совпадают
	3) $k_1 \neq k_2$	3) Прямые $y = k_1x + m_1$ и $y = k_2x + m_2$ пересекаются

В связи с рассмотрение вопроса о взаимном расположении графиков линейных функций вводится понятие *углового коэффициента прямой*. Угловым коэффициентом прямой – графика функции $y = kx + b$ – называют число k. Ю.Н. Макарычев поясняет, что это название определяется тем, что прямые, которые являются графиками линейных функций, заданных формулами $y = kx + b$ с одинаковыми коэффициентами при x и различными значениями b, параллельны и наклонены к оси x под одним и тем же углом. При $k > 0$ этот угол является острым, а при $k < 0$ – тупым. Данное свойство используется при выполнении упражнений № 328, 329.

Задача № 328 [23, С. 80]. На Рис. 6 изображен график одной из линейных функций. Укажите эту функцию:

1) $y = -2x + 6$;   2) $y = x + 7$;   3) $y = x - 7$;   4) $y = -x + 7$.

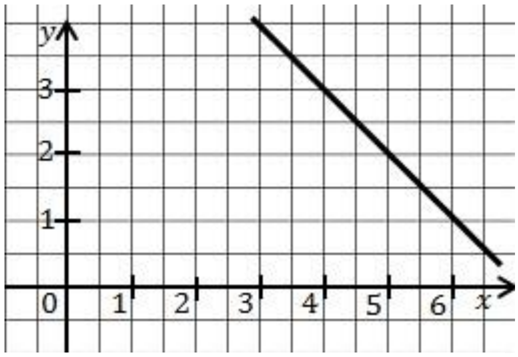


Рис. 6

Е.И. Лященко утверждает, что приступая к изучению *свойств линейной функции*, следует разъяснить учащимся смысл слов «изучение свойств функции». Изучить свойства функции – значит выяснить, как изменяются элементы одного из множеств (множество значений функции) при определенных изменениях элементов другого множества (множество значений аргумента) – возрастают, убывают, постоянны, приобретают наибольшие и наименьшие значения, в каких границах может изменяться каждое из рассматриваемых множеств и так далее.

Систематическое исследование свойств функции, как считает автор, следует начинать в 7 классе с *графического метода*, как более наглядно иллюстрирующего свойства функции, во-первых, и, во-вторых, помогающего формировать графическую культуру учащихся, что очень важно при изучении функциональной линии. Изучение свойств линейной функции Е.И. Лященко предлагает выполнять *по следующей схеме* [22, С. 62]:

1. Вычертить график.

2. Установить область определения значений функции.

3. Установить область изменения значений функции.

4. Установить промежутки возрастания и убывания значений функции.

5. Определить корни функции.

6. Определить четность функции.

7. Определить значения функции, соответствующие аргументу, равному 0.

После ознакомления с общей схемой исследования свойств линейной функции графическим методом следует на нескольких примерах закрепить этот метод исследования. Затем, как считает автор, можно решать *упражнения с практическим содержанием* (на использование свойств графика линейной функции). Приведем несколько примеров таких упражнений.

Задача 36 [22, С. 65]. Два поезда вышли в одно и то же время навстречу друг другу из городов A и B, расстояние между которыми равно 486 км. Встретились они в 9 ч утра, причем первый прошел на 54 км больше, чем второй, затем они продолжали движение с прежней скоростью. Первый пришел в B в 12 ч 36 мин. Когда второй поезд пришел в A? (Решить графически).

Задача 37 [22, С. 65]. Турист заметил, что в 9 ч утра он был в 25 км от намеченного пункта, а в 12 ч 30 мин – в 14 км от него. Установить с помощью графика, в какое время он закончит свой путь, двигаясь равномерно, если по дороге устроит привал на 50 мин.

В.В. Репьев в пособии для учителей [44] рекомендует предлагать учащимся графически решать *системы линейных уравнений с двумя неизвестными*, а также решать с помощью систем уравнений *текстовые задачи*.

Задача 38 [56, С. 206]. Решите систему уравнений: $\begin{matrix} 7x - y = 2, \\ y - 2x = -3 \end{matrix}$.

Задача 39 [44, С. 260]. Горизонтальная балка длиной 5 м свободно лежит своими концами на двух опорах. Определить давление на каждую из опор, если груз в 0,4 т помещен на расстоянии 1 м от одной из опор.

Крайне желательно, по мнению автора, уделить внимание *отысканию уравнений прямых, заданных теми или иными геометрическими свойствами*.

Задача 40 [44, С. 260]. Найти уравнение прямой: а) проходящей через начало координат и имеющей угловым коэффициентом число $0{,}5$; б) отсекающей на осях координат соответственно отрезки в 5 и 4 единицы; в) проходящей через две данные точки $M(1;1)$ и $N(2;3)$; г) имеющей начальную ординату, равную $1{,}5$ и угловой коэффициент, равный 2; д) проходящей через точку $M(5;2)$ параллельно оси абсцисс; е) проходящей через точку $N(-2;5)$ параллельно оси ординат.

Таким образом, изучение конкретных функций, в том числе и линейной, целесообразно проводить по *методической схеме*, описанной выше. В современных учебниках алгебры имеются разночтения во времени начала изучения линейной функции – 7-й или 8-й класс, последовательности ее изучения с частным случаем – *прямой пропорциональностью* (дедуктивный или индуктивный подход), в сообщении большего или меньшего числа свойств при первоначальном ознакомлении, во взаимосвязи линейного уравнения с двумя переменными и линейной функции, их графиков.

Особое внимание при обучении учащихся линейной функции следует уделить *графику* данной функции, *расположению графика линейной функции в координатной плоскости в зависимости от знаков коэффициентов, взаимному расположению в координатной плоскости графиков линейных функций.*

Исследование свойств функции следует начинать в 7 классе с *графического метода*, как более наглядно иллюстрирующего свойства функции. Для закрепления понятия линейной функции и ее свойств рекомендуется решать с учащимися задачи *практического содержания*, задачи на графический способ решения *систем линейных уравнений с двумя неизвестными*, а также *текстовые задачи,* решаемые с помощью систем уравнений. Также необходимо уделить внимание заданиям на *отыскание уравнений прямых, заданных теми или иными геометрическими свойствами*.

§6. Методика обучения квадратичной функции

Практически во всех учебниках рассматриваемых нами авторов (Г.В. Дорофеев, Ю.Н. Макарычев, Г.К. Муравин и О.В. Муравина и др.) изучение данной темы начинается с введения *определения квадратичной функции*.

Определение 7. Квадратичной функцией называется функция, которую можно задать формулой вида $y = ax^2 + bx + c$, где $x -$ независимая переменная, a, b, c – некоторые числа, причем $a \neq 0$ [25, С. 28].

Анализ учебников по изучению данной темы, представленный в Таблице 10, показал, что изучение квадратичной функции в основной школе проводится поэтапно. Так, например, в учебниках Ю.Н. Макарычева последовательность такова: $y = x^2$ (7 класс), $y = ax^2$, $y = ax^2 + n$, $y = a(x-m)^2$, $y = a(x-m)^2 + n$, $y = ax^2 + bx + c$ (9 класс). В учебниках Г.К. Муравина и О.В. Муравиной: $y = x^2$ (8 класс), $y = ax^2$, $y = a(x+p)^2$, $y = ax^2 + q$, $y = a(x+p)^2 + q$, $y = ax^2 + bx + c$ (9 класс). Имеются разночтения во времени начала изучения квадратичной функции – 8-й или 9-й класс. На изучение квадратичной функции отводится от 9 до 19 часов.

Заметим, что изложение темы «Квадратичная функция» в учебниках Ю.Н. Макарычева базового и углубленного уровней не имеет особых отличий, кроме того, что на углубленном уровне на изучение данной темы отводится 5 часов, а на базовом – 9 часов. *Основная цель* - выработать умение строить график квадратичной функции и с помощью графика перечислять свойства этой функции [29, С. 188].

Изучение семейства квадратичной функции начинается с функции $y = x^2$, связанной с действием возведения числа в квадрат. В.П. Покровский отмечает, что мотивировкой изучения данной функции является задача об установлении *зависимости площади квадрата от длины его стороны*. График функции $y = x^2$ строится по большому числу точек, координаты которых занесены в таблицу. Для большей точности построения, как замечает автор, нужно проследить, как график ведет себя вблизи начала координат, для чего полезно дополнительно выбрать еще несколько значений функции на отрезке $-1; 1$. После нанесения точек на координатную плоскость и соединения их учащиеся выявляют некоторую плавную кривую линию - *параболу*. При этом необходимо обратить внимание учащихся на то, что график неограниченно продолжается вверх и справа и слева от оси ординат, а на рисунке изображается только его часть [42, С. 55].

Таблица 10

Анализ учебников по изучению темы «Квадратичная функция»

Г.В. Дорофеев и др.[15]	*Ю.Н. Макарычев и др. [25]*	*Г.К. Муравин и др.[40]*	*А.Г. Мордкович [32]*
Количество часов, класс, тема «Квадратичная функция»			
19 часов, 9 класс	9 часов, 9 класс	10 часов, 9 класс	12 часов, 8 класс
Последовательность вводимых понятий			
- график и свойства функции $y=ax^2$;			
- сдвиги графика функции $y=ax^2$ вдоль осей координат;			- построение графика функции $y=f\ \ x+l\ \ +m$ по известному графику функции $y=f(x)$;
- график и свойства функции $y=ax^2+bx+c$;			
- графическое решение квадратных уравнений, неравенств и их систем.			
Знать/понимать:			
определение квадратичной функции, преобразования графиков функций, положение на координатной плоскости графиков рассматриваемых функций в зависимости от значений коэффициентов, входящих в формулу.			
Уметь:			
- распознавать квадратичную функцию, приводить примеры квадратичных зависимостей;			
- вычислять значения квадратичной функции, заданной формулой, составлять таблицы значений функции;			
- использовать функциональную символику для записи разнообразных фактов, связанных с рассматриваемыми функциями;			
- строить графики функций $y=ax^2$, $y=ax^2+bx+c$, указывать координаты вершины параболы, ее ось симметрии, направление ветвей параболы;			
- описывать свойства рассматриваемых функций на основе графических представлений;			
- показывать схематически положение на координатной плоскости графиков рассматриваемых функций в зависимости от значений коэффициентов, входящих в формулу;			
- использовать функционально-графические представления для решения и исследования уравнений, неравенств и их систем.			

В.В. Репьев отмечает, что функция $y=x^2$ играет особую роль при изучении других функций второй степени: она служит эталоном, с которым сопоставляют другие функции. На примере функции $y=x^2$ автор считает целесообразным ввести понятия о *возрастании* и *убывании* функций, *четной* и *нечетной* функциях [44, С. 261]. Исходя из формулы, таблицы значений и графика, учащиеся вместе с учителем формулируют *свойства функции и графика*, а также дают им обоснование. Результатом может быть Табл. 11.

Таблица 11

Свойства функции $y = x^2$ и ее графика

№	Свойства функции $y = x^2$	Свойства графика (параболы)
1	Если $x = 0$, то $y = 0$	Точка $O(0;0)$ принадлежит графику, ее называют вершиной параболы
2	Если $x \neq 0$, то $y > 0$	Все точки графика, кроме точки $O(0;0)$, расположены выше оси абсцисс
3	Противоположным значениям x соответствует одно и то же значение y	График симметричен относительно оси ординат – оси параболы
4	При $x \geq 0$ функция возрастает, при $x \leq 0$ функция убывает	График поднимается вверх («в горку») при $x \geq 0$, опускается вниз («с горки») при $x \leq 0$
5	При $x = 0$ функция принимает наименьшее значение, равное нулю	Точка $O(0;0)$ является самой «низкой» точкой графика

В 7 классе приводятся первые три свойства в учебнике Ю.Н. Макарычева, а все пять – в учебнике А.Г. Мордковича. Важно сразу же приучать учеников правильно изображать параболу (учащиеся ошибочно рисуют заострением книзу) при вершине и завершении обеих ветвей (учащиеся ошибочно далеко удаляют их от оси OY и с перегибом вправо и влево). Необходимо подчеркнуть, что парабола касается оси абсцисс в начале координат, график практически сливается с осью [42, С. 55-56].

В 8-м или 9-м классе вводится понятие квадратичной функции, рассматриваются ее свойства, особенности графика и приемы построения параболы, приводятся примеры квадратичной зависимости величин.

Остановимся на *методике обучения квадратичной функции,* представленной *в учебнике Ю.Н. Макарычева* [25].

Тема «Квадратичная функция и ее график» состоит из трех связанных между собой пунктов «Функция $y = ax^2$, ее график и свойства», «Графики функций $y = ax^2 + n$ и $y = a(x - m)^2$», «Построение графика квадратичной функции». В данных пунктах на примере функции $y = x^2$ рассматриваются *простейшие преобразования графиков функций*: *растяжение и сжатие* к оси абсцисс, *осевая симметрия* относительно оси абсцисс, *параллельные переносы* вдоль координатных осей. Ю.Н. Макарычев отмечает, что данные преобразования используются в применении к любым функциям $y = f(x)$, поэтому усвоение таких преобразований позволит применять эти знания к другим функциям, изучаемым в курсе алгебры.

В пункте «Функция $y = ax^2$, ее график и свойства» показывается, как с помощью графика функции $y = x^2$ можно построить график функции $y = ax^2$. Формулируются и частично доказываются свойства данной функции при $a > 0$ и при $a < 0$. Ю.Н. Макарычев рекомендует начать изучение материала с повторения свойств функции $y = x^2$ и особенностей ее графика.

Чтобы вызвать познавательный интерес к функции $y = ax^2$ В.В. Репьев, В.П. Покровский и др. считают целесообразным на примере нескольких задач показать потребность в изучении данной функции. Например:

- сопротивление среды движению тела (самолета, подводной лодки) пропорционально квадрату его скорости;

- путь, пройденный телом при равномерно-ускоренном (замедленном) движении, пропорционален квадрату времени;

- площадь круга пропорциональная квадрату радиуса.

Затем следует приступить к построению графиков функций $y = 2x^2$, $y = \frac{1}{2}x^2$ и $y = -\frac{1}{2}x^2$. Для этого учащиеся составляют таблицы значений данных функций, строят полученные точки и соединяют их плавной линией. После чего, учащиеся приходят к следующим выводам: 1) график функции $y = ax^2$ можно получить из параболы $y = x^2$ *растяжением* от оси x в a раз, если $a > 1$, и *сжатием* к оси x в $\frac{1}{a}$ раза, если $0 < a < 1$; 2) графики функций $y = ax^2$ и $y = -ax^2$ (при $a \neq 0$) *симметричны* относительно оси x.

Учащиеся должны усвоить, что от величины коэффициента a зависит *степень крутизны параболы*: большему значению a соответствует более «крутая» парабола, меньшему – более «пологая», а от его знака – *направление ветвей параболы*. Далее формулируются *свойства функции* $y = ax^2$ при $a > 0$ и $a < 0$. Результатом может быть Таблица 12.

Таблица 12

Свойства функции $y = ax^2$

№	Свойства	$\boldsymbol{y = ax^2\ (a > 0)}$	$\boldsymbol{y = ax^2\ (a < 0)}$
1	Область определения функции	$(-\infty; +\infty)$, т.е. вся числовая прямая	
2	Знак функции	$y = 0$ при $x = 0$; $y > 0$ при $x \neq 0$	$y = 0$ при $x = 0$; $y < 0$ при $x \neq 0$
3	Непрерывность	непрерывная функция	
4	Наибольшее и наименьшее значения функции	$y_{\text{наим}} = 0$ (при $x = 0$), $y_{\text{наиб}}$ не существует	$y_{\text{наиб}} = 0$ (при $x = 0$), $y_{\text{наим}}$ не существует
5	Промежутки возрастания и убывания	при $x \geq 0$ возрастает, при $x \leq 0$ убывает	при $x \leq 0$ возрастает, при $x \geq 0$ убывает
6	Ограниченность	ограничена снизу	ограничена сверху
7	Область значений	$[0; +\infty)$	$(-\infty; 0]$
8	Выпуклость	выпукла вниз	выпукла вверх
9	Четность	четная функция	

В учебнике А.Г. Мордковича в 8 классе рассматриваются все вышеперечисленные свойства функции, в учебниках Г.В. Дорофеева, Ю.Н. Макарычева, Г.К. Муравина и О.В. Муравиной в 9 классе не изучаются такие свойства, как *ограниченность*, *выпуклость* и *непрерывность*. В учебнике Ю.Н. Макарычева для углубленного изучения математики в 9 классе приводятся все указанные свойства, кроме выпуклости.

Рассмотрение двух других частных случаев квадратичной функции $y = ax^2 + n$ и $y = a(x - m)^2$, как отмечает В.П. Покровский, происходит по аналогии с первым случаем, но здесь главное внимание обращается на построение графиков, а свойства данных функций остаются в тени. Эталоном для сравнения выступает функция $y = ax^2$. Все рассуждения ведутся на конкретных примерах функций. Для первого случая автор предлагает рассмотреть функции $y = 2x^2$, $y = 2x^2 + 2$, $y = 2x^2 - 2$, для второго - $y = 2x^2$, $y = 2(x - 2)^2$, $y = 2(x + 2)^2$. Сравнивая составленные таблицы значений функций и соответствующие графики, учащиеся приходят к следующим выводам:

- график функции $y = ax^2 + n$ является параболой, которую можно получить из графика функции $y = ax^2$ с помощью *параллельного переноса вдоль оси* y на n единиц вверх, если $n > 0$, на $-n$ единиц вниз, если $n < 0$;

- график функции $y = a(x - m)^2$ является параболой, которую можно получить из графика функции $y = ax^2$ с помощью *параллельного переноса вдоль оси* x на m единиц вправо, при $m > 0$, на $-m$ единиц влево, при $m < 0$.

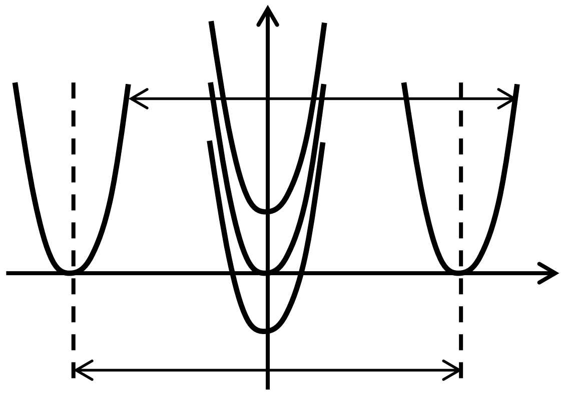


Рис. 7

В.П. Покровский предлагает представить данные выводы в виде *«опорного сигнала»* (Рис. 7): 1) $y = ax^2$ – базовая функция 2) $y = ax^2 + n$, где $n > 0$, 3) $y = ax^2 + n$, где $n < 0$, 4) $y = a(x - m)^2$, где $m > 0$, 5) $y = a(x - m)^2$, где $m < 0$ [42, С. 58].

Ю.Н. Макарычев отмечает, что полученные выводы позволяют понять, что представляет собой график функции $y = a(x - m)^2 + n$. Можно рассмотреть функцию $y = 2(x - 2)^2 + 2$ и сделать соответствующее заключение. Также автор отмечает, что полученные выводы о преобразовании графиков применимы к любым функциям.

После рассмотрения частных случае квадратичной функции изучается *квадратичная функция в общем виде*.

В учебнике Ю.Н. Макарычева [25] в пункте «Построение графика квадратичной функции» показывается, что любую квадратичную функцию $y = ax^2 + bx + c$ можно представить в виде $y = a(x - m)^2 + n$.

Выделим из трехчлена $ax^2 + bx + c$ квадрат двучлена:

$$ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) = a\left(x^2 + 2x \cdot \frac{b}{2a} + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right) =$$

$$= a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a}.$$

Отсюда $y = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2-4ac}{4a}$. Мы получили формулу вида $y = a(x-m)^2 + n$, где $m = -\frac{b}{2a}$, $n = -\frac{b^2-4ac}{4a}$.

Значит, график функции $y = ax^2 + bx + c$ есть *парабола*, которую можно получить из графика функции $y = ax^2$ с помощью двух параллельных переносов – сдвига вдоль оси x и сдвига вдоль оси y. Отсюда следует, что график функции $y = ax^2 + bx + c$ есть парабола, *вершиной* которой является точка $(m; n)$, где $m = -\frac{b}{2a}$, $n = -\frac{b^2-4ac}{4a}$. Также автор отмечает, что *осью симметрии* параболы служит прямая $x = m$, параллельная оси y.

После того как установлено, что графиком функции $y = ax^2 + bx + c$ является парабола, Ю.Н. Макарычев считает целесообразным показать учащимся общие случаи расположение параболы на координатной плоскости в зависимости от знака коэффициента a и знака дискриминанта $D = b^2 - 4ac$. Знак коэффициента a показывает, куда (при $a > 0$ вверх, при $a < 0$ вниз) направлены ветви параболы. Знак дискриминанта показывает, как расположена парабола относительно оси x (выше или ниже оси, касается ее, пересекает ось). Учащиеся должны уметь схематически изображать график функции $y = ax^2 + bx + c$ в случаях: 1) когда $a > 0$ и $D < 0$, $D = 0$, $D > 0$; 2) когда $a < 0$ и $D < 0$, $D = 0$, $D > 0$.

Ю.Н. Макарычев приводит следующий *алгоритм построения графика квадратичной функции* [25, С. 41]: 1) найти координаты вершины параболы и отметить ее в координатной плоскости; 2) построить еще несколько точек, принадлежащих параболе; 3) соединить отмеченные точки плавной линией.

Автор рекомендует сообщить учащимся, что для построения параболы целесообразно абсциссы x выбирать симметрично относительно оси параболы. Полезно также найти *нули функции* и точку пересечения параболы с осью y. Учащимся можно предложить доказать, что если x_1 и x_2 – нули функции $y = ax^2 + bx + c$ и $(m; n)$ – координаты вершины параболы, то верны формулы

$$m = \frac{x_1 + x_2}{2}, x_1 = m - \sqrt{-\frac{n}{a}}, x_2 = m + \sqrt{-\frac{n}{a}}.$$

Учащимся необходимо сообщить, что если парабола задана уравнением вида $y = a(x - x_1)(x - x_2)$, то абсциссу m вершины параболы удобно найти по формуле $m = \frac{x_1+x_2}{2}$. После этого автор приводит примеры построения графиков квадратичных функций.

В задачном материале преобладают задания на построение графиков квадратичных функции и чтение их свойств (№121 – 127). Также присутствует задача на чтение графика реальной зависимости (№120), на установление соответствие между графиком функции и ее аналитическим заданием (№128), задачи с параметром (№129, 130).

А.Г. Мордкович, так же, как и Ю.Н. Макарычев, показывает, что график функции $y = ax^2 + bx + c$ методом выделения полного квадрата можно привести к виду $y = a(x - m)^2 + n$. А.Г. Мордкович рассматривает два *способа построения графика квадратичной функции*: по алгоритму и с помощью преобразований графиков функции.

А.Г. Мордкович предлагает следующий *алгоритм построения параболы* $y = ax^2 + bx + c$ [32, С. 125]:

1) найти координаты вершины параболы, построить на координатной плоскости соответствующую точку, провести ось параболы;

2) отметить на оси x две точки, симметричные относительно оси параболы (чаще всего в качестве одной из таких точек берут точку $x = 0$), найти значения функции в этих точках; построить на координатной плоскости соответствующие точки;

3) через полученные три точки провести параболу (в случае необходимости берут еще пару точек, симметричных относительно оси параболы, и строят параболу по пяти точкам).

В.П. Покровский также рекомендует строить графики квадратичных функций различными способами, однако не увлекаться с помощью преобразований, так как этот способ использовался в большей мере для разъяснения, что график функции $y = ax^2 + bx + x$ есть парабола, равная параболе $y = ax^2$, но смещенная вдоль осей координат.

По мнению автора, важно обратить внимание учеников на следующий момент: при решении квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$ можно изменить знаки у всех членов на противоположные и получить правильный ответ, а в правой части формулы, задающей функцию $y = ax^2 + bx + c$, этого делать нельзя, так как будем иметь уже другую функцию, графиком которой будет парабола, симметричная прежней относительно оси Ox [42, С. 59].

В учебнике Н.Я. Виленкина для углубленного изучения [6] квадратичная функция и преобразования графиков рассматриваются в отдельных параграфах. В целом схема изложения данной темы аналогична схемам изложения других рассматриваемых нами авторов. При этом стоит отметить, что в учебнике Н.Я. Виленкина содержится отдельная тема, посвященная нахождению общих точек параболы и прямой.

С.Б. Суворова и А.Н. Тернопол в статье [49] рекомендуют в системе упражнений по теме «Квадратичная функция» значительное место отвести *задачам прикладного характера*. Авторы рассматривают следующую задачу.

Задача 41 [49, С. 24]. Площадь прямоугольника S с периметром, равным 16 см, является функцией длины его основания x. Задайте эту функцию формулой. Определите, при каком значении x функция принимает наибольшее значение. Дайте геометрическое истолкование вашего ответа.

Решение. Если длина одной стороны прямоугольника равна x см, то длина другой будет равна $(8 - x)$ см, а площадь $S = 8x - x^2$. Вершина параболы: $(4; 16)$. Наибольшее значение функции равно 16 при $x = 4$. Геометрическое истолкование: из всех прямоугольников с периметром 16 см, наибольшую площадь имеет прямоугольник с основанием, равным 4.

Ими предлагается уделить внимание использованию функционально-графических представлений к решению уравнений, неравенств, систем.

Задача 42 [57, С. 119]. Решите уравнение $x^2 - 4x - 32 = 0$.

Таким образом, изучение квадратичной функции в основной школе проводится поэтапно. *Основная цель* – выработать умение строить график квадратичной функции и с помощью графика перечислять свойства данной функции. Чтобы вызвать познавательный интерес к квадратичной функции, учителю рекомендуется на примере нескольких задач показать учащимся потребность в изучении данной функции.

На примере функции $y = x^2$ целесообразно ввести понятия о возрастании и убывании функции, четной и нечетной функциях. Строить график квадратичной функции целесообразно различными способами: с помощью преобразований или по алгоритму. При обучении квадратичной функции полезно показать учащимся общие случаи расположения параболы на координатной плоскости в зависимости от знаков коэффициентов, входящих в формулу, и знака дискриминанта. В системе упражнений особое внимание следует уделить задачам прикладного характера.

Выводы по первой главе

1. Изучены исторические аспекты возникновения и развития понятия функции. Установлено, что понятие функции в своем историческом развитии прошло через несколько этапов (пропедевтический, введение понятия функции через механические и геометрические представления, аналитическое определение функции, функция как отображение, дальнейшее развитие понятия функции с 20 века). Структура изучения функциональной линии в школьном курсе математики строится с учетом исторических аспектов развития понятия функции. В школьном курсе происходит повторение в обучении основных этапов, через которые это понятие прошло в науке.

2. Выявлены основные цели и задачи обучения функциональной линии в курсе математики основной школы. Определено, что при изучении функций у учащихся формируется целостное представление об окружающем мире

и взаимосвязи его компонентов, навыки использования функций в повседневной жизни; знания, умения и навыки использования понятийного аппарата, связанного с функциональной линией, в математике и других науках.

3. Выполнен анализ содержания теоретического и задачного материала функциональной линии в учебниках алгебры основной школы. Определено, что, не смотря на некоторые различия в содержании и распределении функционального материала по классам, в большинстве рассматриваемых учебниках в 7 классе основной изучаемой функцией является линейная функция. В 8 классе особое внимание уделяется функции обратной пропорциональности. В 9 классе центральное место занимают квадратичная функция и преобразования графиков функции. Выделены основные типы задач по теме «Функции», приведены примеры задач каждого типа.

4. Охарактеризованы различные подходы к определению понятия «функция» в школьном курсе математики и раскрыта методика введения данного понятия. Определено, что существуют две различные методические трактовки понятия функции: генетическая и логическая. В современном школьном курсе математики в итоге длительных методических поисков в качестве ведущего был принят генетический подход к понятию функции. В школьных учебниках алгебры 7-9 классов функция трактуется как зависимость, как переменная величина или определяется через соответствие двух множеств. Вводить понятие функции целесообразно с рассмотрения известных учащимся зависимостей окружающего нас мира. При этом следует сразу заметить, что функция может быть задана различными способами: формулой, описанием, таблицей или графиком. Формировать понятие функции у учащихся необходимо вместе с ее областью определения. При этом важно учить учащихся находить область определения функции не только по ее аналитической записи, но и в тех случаях, когда функция задана графиком, таблицей.

5. Выявлены методические особенности обучения учащихся линейной функции. Установлено, что изучение конкретных функций, в том числе и ли-

нейной, целесообразно проводить по определенной методической схеме. Определено, что особое внимание при обучении учащихся линейной функции следует уделить графику данной функции, расположению графика линейной функции в координатной плоскости в зависимости от знаков коэффициентов, взаимному расположению в координатной плоскости графиков линейных функций. Исследование свойств функции следует начинать в 7 классе с графического метода, как более наглядно иллюстрирующего свойства функции. Для закрепления понятия линейной функции и ее свойств рекомендуется решать с учащимися задачи практического содержания, задачи на графический способ решения систем линейных уравнений с двумя неизвестными, а также текстовые задачи, решаемые с помощью систем уравнений. Также необходимо уделить внимание заданиям на отыскание уравнений прямых, заданных теми или иными геометрическими свойствами.

6. Раскрыты методические особенности обучения учащихся квадратичной функции. Установлено, что изучение квадратичной функции в основной школе проводится поэтапно. Основная цель – выработать умение строить график квадратичной функции и с помощью графика перечислять свойства данной функции. Чтобы вызвать познавательный интерес к квадратичной функции, учителю рекомендуется на примере нескольких задач показать учащимся потребность в изучении данной функции. Определено, что на примере функции $y = x^2$ целесообразно ввести понятия о возрастании и убывании функции, четной и нечетной функциях. Строить график квадратичной функции целесообразно различными способами: с помощью преобразования или по алгоритму. При обучении квадратичной функции полезно показать учащимся общие случаи расположения параболы на координатной плоскости в зависимости от знаков коэффициентов, входящих в формулу, и знака дискриминанта. В системе упражнений особое внимание следует уделить задачам прикладного характера.

ГЛАВА II. МЕТОДИЧЕСКИЕ АСПЕКТЫ ОБУЧЕНИЯ УЧАЩИХСЯ ФУНКЦИЯМ В КУРСЕ АЛГЕБРЫ ОСНОВНОЙ ШКОЛЫ

§7. Методические рекомендации по обучению функциям в курсе алгебры основной школы

Н.М. Епифанова и О.П. Шарова в учебном пособии «Методика обучения алгебре основной школы» [17] рассматривают *основные проблемы, возникающие при изучении функциональной линии,* и пути их преодоления.

1. Определение функциональной зависимости. Авторы считают необходимым акцентировать внимание учащихся на роли букв y, x, f, то есть на том, что буква f в отличие от букв y и x обозначает не переменную величину, а то правило (закон), по которому устанавливается соответствие между y и x. Если функция задана формулой $y = x^2 - 3x$, то роль f играет следующее утверждение: «чтобы получить значение y, зная значение x, нужно из квадрата числа x вычесть утроенное это число».

2. Способы задания функции. Н.М. Епифанова и О.П. Шарова замечают, что зачастую функция отождествляется учащимися с формулой, которая описывает ее. Поэтому следует отметить, что: 1) не всякая формула задает функцию; 2) некоторые функции невозможно задать формулой (например, функцию Дирихле); 3) функция может быть задана сразу несколькими формулами. Учащиеся, по мнению авторов, должны усвоить, что формула – это не сама функция, а лишь один из способов ее задания.

3. Область определения и область значений функции. Отмечается, что необходимо обратить внимание учащихся на различие *области определения абстрактной функции* и *функции, полученной из конкретной задачи* (например, $y = x^3$, $x \in \mathbb{R}$ - абстрактная функция, $y = a^3$, $a > 0$ – функция из задачи про объем куба). Для этого рекомендуется предлагать учащимся *задания на построение графиков на заданной области определения*. Полезно не ограничиваться одним типом упражнений «*найти область определения функции*», а предложить учащимся выполнить творческие задания: «*построить функцию по заданной области определения*».

Задача 43 [17, С. 72]. Построить функцию с областью определения X:

а) $X = (-\infty; 1) \cup (1; +\infty)$; б) $X = (-\infty; 0)$; в) $X = (-\infty; 0]$.

(Ответ: а) $y = \frac{1}{x-1}$; б) $y = \frac{1}{\sqrt{-x}}$; в) $y = \sqrt{-x}$.)

Помимо этого, Н.М. Епифанова и О.П. Шарова подчеркивают, что учащиеся сталкиваются со значительными сложностями при нахождении области значений функции. В связи с этим учителю рекомендуется акцентировать внимание учащихся на упражнениях не только на нахождение области определения функции, но и на нахождение *области значений функции*.

Е.В. Власова в статье [8] обращает внимание на то, что зачастую учащиеся «не видят» функцию, если она задана *неявно* (например, $xy = 10$, $5x + y - 1 = 0$). Для решения данной проблемы автор рекомендует давать учащимся *упражнения* следующего типа: придумайте функцию, заданную неявно, и попробуйте задать каждую из них в явном виде.

После введения понятия функции, рассмотрения вопроса о нахождении значения функции при заданном значении аргумента Е.В. Власова рекомендует давать учащимся задания на понимание и использование *функциональной символики.* Ниже приведены примеры таких заданий.

Задача 44 [8, С. 54]. Найдите функцию $f(x)$, если известно, что $f\left(\frac{1}{x}\right) - 2f(x) = 4x$.

Задача 45 [8, С. 54]. Найдите $f(2)$, если для любого $x \neq 0$ выполнено равенство: $2f(x) - 3f\left(\frac{1}{x}\right) = x^2$.

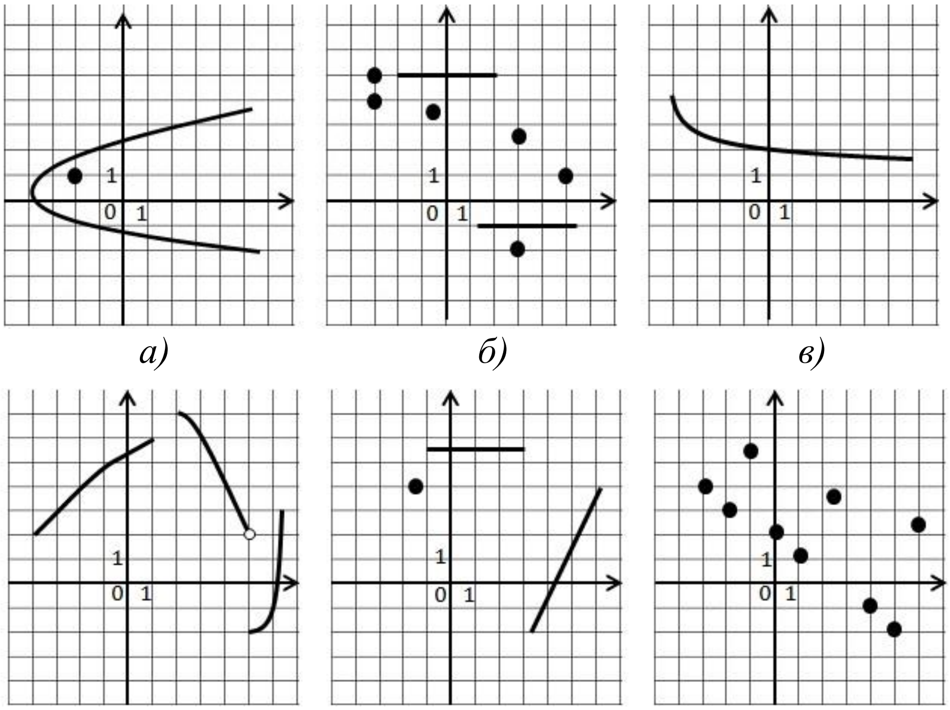
А. Серпинская в статье [59] указывает, что в обучении функциям очень важно мотивировать учащихся. Они должны быть заинтересованы в объяснении и выявлении зависимостей. Учащимся должна быть предоставлена возможность использовать знания о функциях в объяснении феноменов их повседневной жизни, а также в других науках. Внимание акцентируется на том, что функции в аналитической форме должны сначала появляться как инструменты при моделировании определенных ситуаций, будь то в реальной жизни или науке. Однако представление реальной ситуации не должно быть идеализировано до такой степени, чтобы превратить построение модели в простое упражнение с уникальным ответом. Выбор модели, по мнению автора, должен быть предметом обсуждения в классе. Также автор считает необходимым предоставить учащимся широкий спектр способов задания функции. Учащимся должна быть предоставлена возможность приобрести определенную гибкость в использовании этих способов.

А.Я. Цукарь в статье [53] отмечает, что в школе в больше мере осуществляется аналитический и формальный подход к изучению функций. Графикам уделяется недостаточное внимание. Разработано недостаточно упражнений графического характера на освоение понятий и утверждений. В качестве упражнений на закрепление приводятся в основном функции, заданные аналитически, вследствие чего ученики запоминают определения понятий, формулировки свойств формально, без подкрепления графическими примерами.

Автор замечает, что использование наглядно-образного материала, раскрывающего общее в изучаемом материале, активизирующего познавательную деятельность учащихся, повышает их интерес и качество знаний. Игнорирование образного мышления приводит к тому, что некоторые из учащихся, не воспринимая формального, бессодержательного характера изучения понятий, теряют интерес к учебе. Поэтому *использование образного мышления* является актуальной задачей.

А.Я. Цукарь подчеркивает, что традиционно понятие функции вводится с использованием таких бытовых ситуаций, которые создают неадекватное ожидание. Оно формирует неверное направление мысли ученика и такой образ функции, которые затем приводят к многочисленным ошибкам. Обычно этими примерами являются изменение температуры воздуха и некоторые другие, описывающие *непрерывные* процессы. В действительности же, отмечает автор, чаще приходится иметь дело с «*разрывными»* функциями. Для создания адекватного ожидания предлагается следующий *прием*.

«Представьте, говорим ученикам, что по канату – оси Ox в системе координат xOy – идет человек и несет в вертикальном положении шест в виде идеального (математического) отрезка. Один конец шеста касается каната, а другой оставляет точки в плоскости, в которой передвигается шест. Волшебник, наблюдающий за передвижением шеста, произвольным образом меняет длину шеста, делает ее нулевой, изменяет направление шеста или убирает его вовсе. Представьте мысленно, каким может оказаться множество оставленных шестом точек. Укажите такие множества среди предложенных вариантов (Рис. 8). Приведите с помощью рисунка свои примеры» [53, С. 20].



а) *б)* *в)*

г) *д)* *е)*

Рис. 8

Далее, рисунки анализируются с учениками. Так, на Рис. 8, *а* показана ситуация, когда волшебник убрал шест сразу после прохождения им абсциссы 1 и вернул его в момент прохождения абсциссы 2. В момент, соответствующий абсциссе 5, волшебник мгновенно изменил направление шеста. На

Рис. 8, *в* описана ситуация, когда волшебник возвращал шест на мгновение и только при прохождении отдельных точек. Определяем, что множество точек на Рис. 8, *г, д* шест оставить не мог.

Далее А.Я. Цукарь рекомендует провести анализ ситуации с шестом, ввести в рассмотрение его «длину» (положительная, нулевая, отрицательная), понятия *независимой, зависимой переменных*, *определение функции* и привести *конкретные примеры функций*. Такое *образное представление функции с ее графиком* с «привязкой» к понятному способу его получения облегчает восприятие и создает ожидания учащихся о возможных конкретных функциях, среди которых могут появиться как *непрерывные*, так и «*разрывные*».

Помимо этого отмечается, что основополагающим при обучении рассматриваемой темы является дидактическое требование связывать изучаемые понятия с *реальной действительностью*, помогающей осознать многообразие ее проявлений и специфику описания математическими моделями, понятиями. Автор считает, что для учеников нужно придумать такие *реальные ситуации*, которые были бы им понятны и интересны. Описание их с помощью графика должно быть достаточно простым. При этом А.Я. Цукарь не рекомендует приводить только те явления, которые описываются непрерывными графиками. В связи с этим в 7 классе на втором уроке, посвященном понятию функции, рекомендуется дать учащимся *следующее упражнение*.

Задача 46 [53]. Каждой из перечисленных ниже реальных ситуаций (1 - 3) соотнесите график функции (Рис. 9, *а* - *в*), который описывает ее.

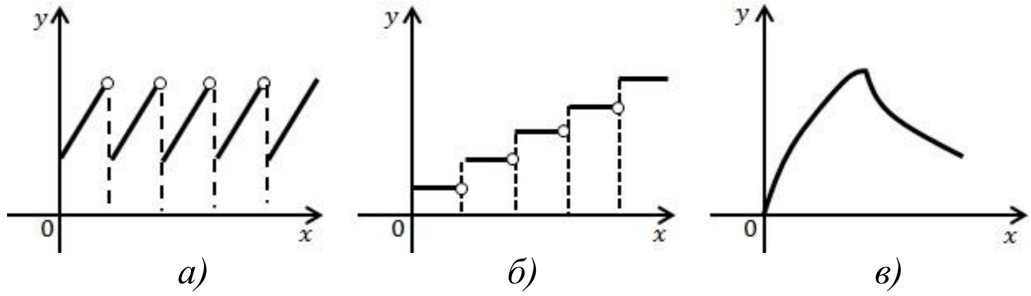


Рис. 9

1. На голове человека растут волосы, он их регулярно стрижет (x – время, прошедшее от одной из стрижек, y – длина определенного волоса).

2. Груша растет, затем ее срывают и сушат (x - время, y - масса груши).

3. Через каждый час рабочего времени на склад сдают изготовленные детали ($x -$ время работы, $y -$ количество деталей на складе).

Известно, что понятие лучше усваивается, если оно рассматривается с разных сторон, включается во взаимно-обратные действия. Поэтому при обучении учащихся понятию «функции» А.Я. Цукарь рекомендует давать им задания, в некотором смысле обратные предыдущему.

Задач 47 [53]. Пофантазируйте! Какие реальные ситуации могут описывать функции, графики которых изображены на Рис. 10? Укажите для каждой функции, что соответствует независимой переменной x, а что соответствует зависимой переменной y.

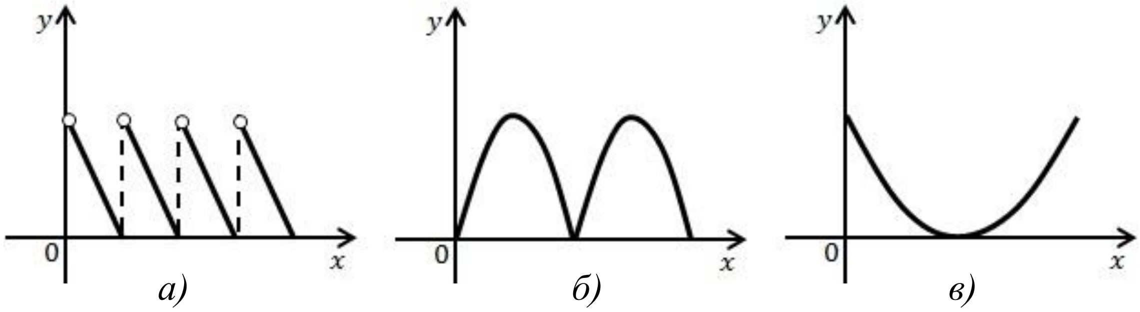


Рис. 10

В дополнение к приведенным выше заданиям учащиеся придумывают дома реальные ситуации и описывают их функциями, строят графики. Такая система работы, по мнению автора, когда основное внимание обращается на *образное представление функциональных зависимостей*, на *активную познавательную деятельность* учеников, на *связь математики с действительностью*, имеет свои плоды.

Аналогичной точки зрения придерживаются Н.Л. Стефанова, Н.С. Подходова и др. Считается, что подходить к обучению функциям нужно менее формально, максимально используя *графическое представление функции*. Все определения понятий, формулировки свойств необходимо подкреплять графическими примерами. Графики функций помогают разобраться, какой процесс описывает данная функция – непрерывный или дискретный; понять многие свойства функций (монотонность, нули функции и другие).

Обучение функциям, по мнению авторов, позволяет одну и ту же информацию представлять в различной форме, соответствующей разным познавательным стилям. Так, одни и те же задания можно выполнять двумя способами: *графически* и *аналитически* [47, С.261].

Е.В. Громова и И.С. Сафуанов в статье «Применение компьютерной математической программы Geogebra в обучении понятию функции» [12] рассматривают *использование компьютерных технологий* при обучении функциям на уроках математики учащихся основной школы.

Использование компьютерных технологий при введении и усвоении понятия функции обуславливается ими тем, что понятие функции является абстрактным и довольно сложным для восприятия учащимися. Учащимся, по мнению авторов, функция видится просто некоторой формулой, они не могут до конца увидеть и прочувствовать суть функций. Компьютерная графика усиливает наглядность изучаемых объектов и понятий, особенно абстрактных, и предоставляет учащимся возможность увидеть их не только статично, но и в динамике. Кроме того, компьютерные технологии позволяют изучать, исследовать функции и их свойства при помощи интерактивных моделей. В статье приводится разработанный ими *цикл упражнений* на базе системы компьютерной алгебры Geogebra.

Покажем, как Е.В. Громова и И.С. Сафуанов применяют данную систему компьютерной алгебры при изучении темы «Преобразование графиков функций».

Согласно учебнику А.Г. Мордковича [32] данная тема изучается в курсе алгебры 8-го класса. Для изучения параграфа «Как построить график функции $y = af\ \ x + l\ \ + m$, если известен график функции $y = f(x)$» авторы статьи рекомендуют предлагать учащимся преобразовывать графики функции, зависящие от трех параметров a, l и m. Благодаря системе Geogebra у учащихся есть возможность, поставив галочку напротив интересующей их функции, рассмотреть каждую из них в отдельности и, меняя значения параметров, пронаблюдать, какие преобразования происходят при этом с графиком. При этом отмечается, что при преобразовании графика на координатной плоскости остается образ изначальной функции, чтобы учащимся было легче обнаружить зависимость между параметрами и изменениями графиков.

После этого учащимся рекомендуется заполнить таблицу (Табл. 13) на основе своих наблюдений.

Таблица 13

Таблица наблюдений за преобразованиями графиков функций

№	Функция (название, уравнение)	График функции (название, схематическое изображение)	Влияние коэффициента a	Влияние коэффициента l	Влияние коэффициента m
1.					
2.					
3.					

Для закрепления полученных навыков учащимся письменно предлагается ответить на следующие вопросы:

1. Для данных функций, опишите преобразования, которые произойдут с графиком функции $f(x)$: а) $f(x)=x^2$, $h(x)=3(x-4)^2+2$; б) $f(x)=|x|$, $g(x)=-|x-1|-3$; в) $f(x)=\sqrt{x}$, $t(x)=2{,}5\sqrt{x+5}-5$.

2. Для данных преобразований запишите уравнения функций: а) график квадратичной функции $f(x)=x^2$ отображен относительно оси x, перемещен вверх на две единицы и влево на четыре; б) график функции $f(x)=\sqrt{x}$ смещен вправо на три единицы, вверх на пять единиц.

В заключение учащимся предоставляется возможность самостоятельно сформулировать *алгоритм построения графика функции $y=af(x+l)+m$.*

И.В. Дундукова в статье «Возможности использования программы УМК «Живая математика» при изучении функциональной линии в курсе алгебры 7-9 классов» [16] также отмечает целесообразность использования компьютерных технологий при обучении функциональной линии в курсе алгебры основной школы.

Автор рассматривает возможности использования программы «Живая математика» - виртуальной лаборатории для учебных исследований при изучении курсов алгебры, геометрии, тригонометрии, математического анализа. Данный учебно-методический комплект можно использовать при любых видах учебной деятельности, а также выполнении домашних заданий, исследовательских и творческих проектов. Он является одним из инструментов, позволяющим осуществлять *деятельностный подход* в обучении математике.

И.В. Дундукова замечает, что чаще всего при обучении функциональной линии используются либо готовые чертежи (в учебниках, раздаточном материале), либо чертежи, выполненные вручную на доске или в тетради. Но эти средства наглядности имеют ряд недостатков: затрачивается много времени на построение графика вручную; не все построенные графики можно сохранить на доске из-за нехватки места; чертеж не является динамическим; изготовление раздаточного материала учителем – трудоемкий процесс, занимающий много времени. *Использование компьютерных технологий* в процессе обучения призвано решить данную проблему.

Автор приводит возможности программы «Живая математика», которые можно использовать при обучении функциям на уроках различных типов:

I. *При объяснении нового материала*. Использование программы способствует формированию наглядных образов при введении новых классов функций. Например, на первом уроке «График зависимости $y = x^2$» учитель может продемонстрировать изображение, выполненное в данной программе. Яркое и точное изображение графика поможет учащимся запомнить его и предотвратит такие типичные ошибки, как изображение параболы с заостренной вершиной или с параллельно идущими ветвями.

II. *При проведении лабораторно-графических работ.* В статье приводится один из вариантов лабораторно-графической работы при изучении темы «Взаимное расположение графиков зависимостей $y = kx + b$».

III. *В исследовательской деятельности.* Например, при построении графиков функций, содержащих переменную под знаком модуля, или при выполнении заданий, содержащих параметр, И.В. Дундуковой предлагается провести с учащимися следующие исследовательские работы:

1. *С помощью программы постройте графики следующих функций: а)* $y = x^2 - 4x + 5$*; б)* $y = |x^2 - 4x + 5|$*; в)* $y = x^2 - 4\ x\ \ + 5$. *Сделайте вывод о способах построения графиков. Придумайте и постройте свои графики.*

2. *С помощью программы постройте график функции* $y = \frac{x^4 - 13x^2 + 36}{(x-3)(x+2)}$. *Постройте в этой же координатной плоскости прямые* $y = -6{,}25$*;* $y = -4$*;* $y = 0$*;*$y = -6$*;* $y = -7$. *При каких значениях* m *прямая* $y = m$ *имеет с графиком только одну общую точку?*

IV. *При подготовке учителя к уроку.*

О.А. Иванова в статье [18] считает целесообразным на уроках алгебры *устанавливать связь функции и реальных процессов*. По мнению автора, это способствует естественному пути математических знаний у учащихся.

При обучении учащихся функциональной линии на уроках алгебры рекомендуется:

- устанавливать связь с жизненными представлениями учащихся, так как в субъектном опыте учащихся накоплен довольно большой запас зависимостей, в том числе и функциональных;

- устанавливать связь с содержанием других учебных предметов.

Реализовывать такую связь можно с *помощью метаметодического подхода* к образовательному процессу. В идеале для реализации метаметодического подхода, как пишет автор, требуется создание временно научно-исследовательских коллективов из учителей-предметников разных дисциплин. Но зачастую создание данных коллективов невозможно, с целью решения этой проблемы О.А. Иванова формулирует следующие *основные положения реализации метаметодического подхода к обучению функциональной линии на уроках алгебры:*

1) понятие «функция» вводится на основе этапов формирования межпредметных и подчиненных им понятий;

2) частные виды функциональных зависимостей вводятся на основе выделенных требований к введению частных видов функций.

Остановимся на сформулированных О.А. Ивановой *требованиях к введению частных функций* и раскроем их реализацию на примере введения функции $y = kx$.

Требование 1. *Изучение частных видов функций начинается с рассмотрения ситуаций, связанных с субъектным опытом ребенка.*

При изучении функции вида $y = kx$ можно предложить учащимся ситуации из школьной жизни. Так, стоимость нескольких одинаковых пряников в буфете прямо пропорциональна количеству купленных пряников.

Требование 2. *При рассмотрении реальной ситуации на ее основе формулируется задача.*

Для того чтобы каждый учащийся мог понять специфику реальной ситуации лишь обозначить такую ситуацию недостаточно. Необходимо создать условия, чтобы каждый учащийся мог решить задачу, сформулированную на основе данной ситуации. Например: *Один пряник в буфете стоит 9 рублей. Сколько стоят 5 пряников? 6 пряников? Ты купил в 2 раза больше пряников, чем твой друг. Во сколько раз больше тебе надо будет заплатить?*

Требование 3. *Задачи рассматриваются в определенном порядке.*

Реализация метаметодического подхода предполагает интеграцию содержания различных учебных предметов. В учебниках рассматриваются различные зависимости. Для более эффективного усвоения знаний, на взгляд автора, задачи, сформулированные на основе этих процессов целесообразно предлагать учащимся в следующей последовательности:

1. «Детские» задачи: задачи, сформулированные на основе процессов, которые, возможно, не существуют в природе в силу некоторых условий, но тесно связаны с субъектным опытом учащихся. Решая такие задачи, учащие-

ся интуитивно выделяют похожие задачи, то есть задачи, сформулированные на основе реальных процессов, описываемые одной и той же функцией.

2. Задачи, придуманные учащимися самостоятельно.

3. «Реальные» задачи: задачи, сформулированные на основе реальных процессов, по возможности с достоверными данными.

Требование 4. *После решения «детских задач» и задач, придуманных детьми, формулируется особенность процессов, описываемых с помощью изучаемой функции.*

Особенности процессов позволяют установить связь между математической функцией и реальными процессами. Особенность процессов, описывающихся функцией вида $y = kx$, формулируется следующим образом: *при увеличении (уменьшении) одной величины в какое-то число раз, другая величина увеличивается (уменьшается) в то же число раз.* Данная особенность верна только для положительных значений x и y. В дальнейшем, когда будет осуществлен переход на математическую формулировку, учителю следует обратить внимание учащихся на данный факт.

Требование 5. *На основе выделенной особенности процессов записывается характеристическое свойство функции.*

Учащимся предлагается набор заданий, в результате выполнения которых они смогут заменить особенность процессов на *характеристическое свойство*: $\frac{y_2}{y_1} = \frac{x_2}{x_1}$.

Требование 6. *Из характеристического свойства функции выводится формула.*

Пользуясь *свойствами пропорции* характеристическое свойство можно записать так: $\frac{y_2}{y_1} = \frac{x_2}{x_1} = k$. Из этого равенства выводится формула $y = kx$.

Требование 7. *На заключительном этапе введения частных видов функций выполняются упражнения на распознавание введенной функции среди зависимостей, рассматриваемых на разных учебных предметах.*

О.А. Иванова отмечает, что описанные выше требования необходимо соблюдать при введении каждого частного вида функции, изучаемого на уроках алгебры. Такой подход *обеспечивает целостность образовательного процесса*, *интеграцию различных учебных предметов* и способствует *реализации требований федерального государственного образовательного стандарта*.

Таким образом, подходить к обучению функциям нужно менее формально, максимально используя *графическое представление функции*. При обучении функциям в курсе алгебры основной школы рекомендуется подкреплять графическими примерами все определения понятий, формулировки свойств. Необходимо использовать *наглядно-образный материал*, активизирующий познавательную деятельность учащихся, повышающую их интерес и качество знаний; устанавливать связь *с жизненными представлениями учащихся*, так как в субъектном опыте учащихся накоплен довольно большой запас зависимостей, в том числе и функциональных; учитывать *связь с содержанием других учебных предметов*, которая реализуется с помощью *метаметодического подхода* к образовательному процессу. Данный подход обеспечивает *целостность образовательного процесса*, *интеграцию различных учебных предметов* и способствует *реализации требований федерального государственного образовательного стандарта*.

При обучении функциям целесообразно использовать компьютерные технологии, что позволяет активизировать устойчивый интерес к математике, получить всесторонние представления об изучаемом математическом объекте, дает возможность рационально расходовать время на уроке. Данные технологии можно использовать при объяснении нового материала, при проведении лабораторно-графических работ, в исследовательской деятельности, а также при подготовке учителя к уроку.

§8. Анализ задач ОГЭ по теме исследования

Нами были выделены основные типа задач, которые встречаются в **части 1** основного государственного экзамена по данной теме исследования:

1) задачи на установление соответствия между аналитическим заданием функции и ее графиком:

Задача 1 [51]. Установите соответствие между графиками функций, изображенных на Рис. 11, и формулами, которые их задают.

ГРАФИКИ:

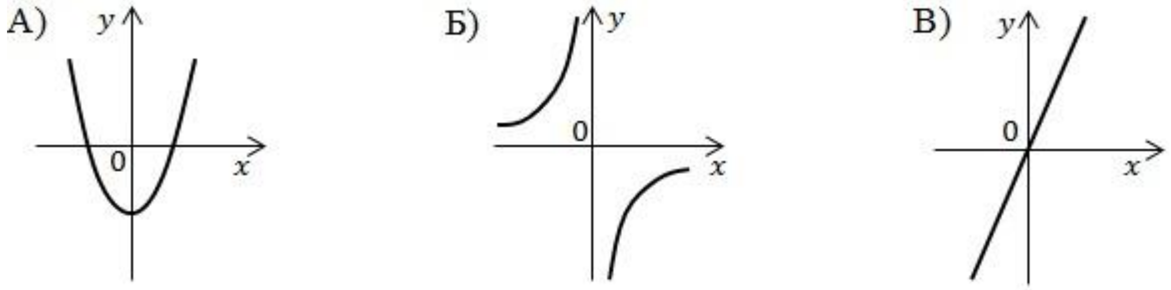


Рис. 11

ФОРМУЛЫ: 1) $y = x^2 - 2$; 2) $y = 2x$; 3) $y = -\frac{2}{x}$.

Решение: 1) на Рис. 11, А изображена парабола, то есть А) – 1;

2) на Рис. 11, Б представлена гипербола, следовательно, Б) – 3;

3) на Рис. 11, В - график прямой пропорциональности, то есть В) – 2.

Ответ: А) – 1, Б) – 3, В) – 2.

Задача 2 [51]. Установите соответствие между графиками функций, изображенных на Рис. 12, и формулами, которые их задают.

ГРАФИКИ:

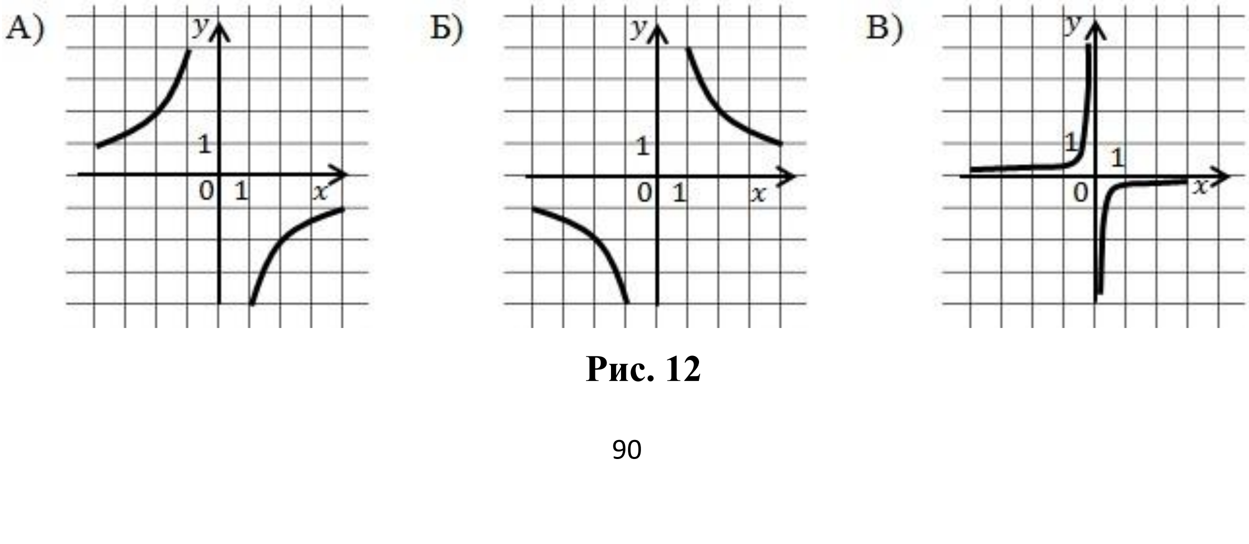


Рис. 12

ФОРМУЛЫ:

1) $y = -\frac{1}{4x}$; 2) $y = \frac{4}{x}$; 3) $y = -\frac{4}{x}$.

Решение: 1) график, изображенный на Рис. 12, А, проходит через точку $(-2; 2)$. Данная точка удовлетворяет уравнению 3, то есть А) – 3;

2) график, изображенный на Рис. 12, Б, проходит через точку $(2; 2)$. Данная точка удовлетворяет уравнению 2, то есть Б) – 2;

3) аналогично рассуждая, получаем: В) – 1.

Ответ: А) – 3, Б) – 2, В) – 1.

2) задачи на установление соответствия между графиком функции вида $y = kx + b$ и знаками коэффициентов k и b:

Задача 3 [54, С. 8]. На Рис. 13 изображены графики функций вида $y = kx + b$. Установите соответствие между графиками функций и знаками коэффициентов k и b.

ГРАФИКИ:

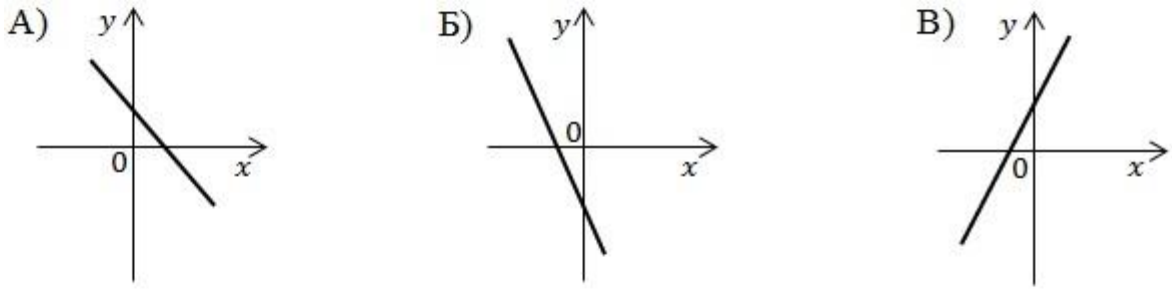


Рис. 13

КОЭФФИЦИЕНТЫ:

1) $k < 0, b < 0$; 2) $k > 0, b > 0$; 3) $k < 0, b > 0$.

Решение: 1) на Рис. 13, В угол между положительным направлением оси Ox и прямой острой, следовательно, $k > 0$. По графику находим, что при $x = 0$: $y > 0$, то есть $y = k \cdot 0 + b > 0 \Rightarrow y = b > 0$. Итак, В) – 2;

2) на Рис. 13, А угол между положительным направлением оси Ox и прямой тупой, следовательно, $k < 0$. По графику находим, что при $x = 0$: $y > 0$, то есть $y = k \cdot 0 + b > 0 \Rightarrow y = b > 0$. Итак, А) – 3;

3) на Рис. 13, Б угол между положительным направлением оси Ox и прямой тупой, следовательно, $k < 0$. По графику находим, что при $x = 0$: $y < 0$, то есть $y = k \cdot 0 + b < 0 \Rightarrow y = b < 0$. Итак, Б) – 1.

Ответ: А) – 3, Б) – 1, В) – 2.

3) задачи на установление соответствия между графиком функции вида $y = ax^2 + bx + c$ и знаками коэффициентов a, c и дискриминанта:

Задача 4 [54, С. 65]. На Рис. 14 изображены графики функций вида $y = ax^2 + bx + c$. Установите соответствие между графиками функций и знаками коэффициентов a и c.

ГРАФИКИ:

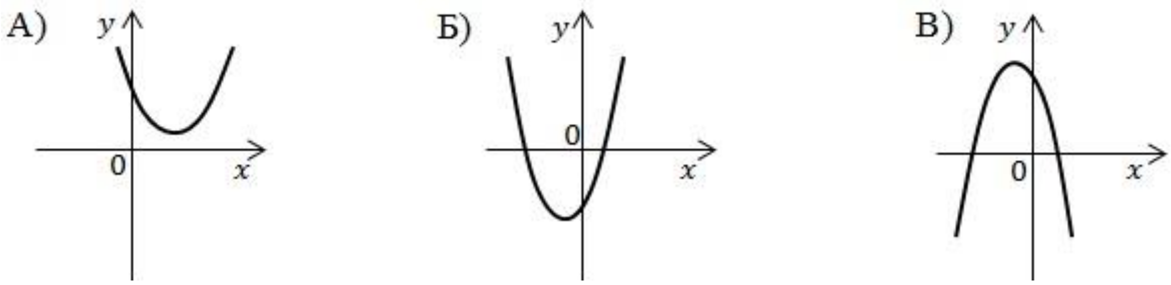


Рис. 14

КОЭФФИЦИЕНТЫ:

1) $a > 0, c < 0$; 2) $a < 0, c > 0$; 3) $a > 0, c > 0$.

Решение: 1) на Рис. 14, В ветви параболы направлены вниз, следовательно, $a < 0$. По графику находим, что при $x = 0$: $y > 0$, то есть $y = a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c = c > 0$. Итак, В) – 2;

2) на Рис. 14, А ветви параболы направлены вверх $\Rightarrow a > 0$. По графику находим, что при $x = 0$: $y > 0$, то есть $y = a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c = c > 0$. Итак, А) – 3;

3) аналогично получаем, что Б) – 1.

Ответ: А) – 3, Б) – 1, В) – 2.

Задача 5 [51]. На Рис. 15 изображены графики функций вида $y = ax^2 + bx + c$. Для каждого графика укажите соответствующие ему значения коэффициента a и дискриминанта D.

ГРАФИКИ:

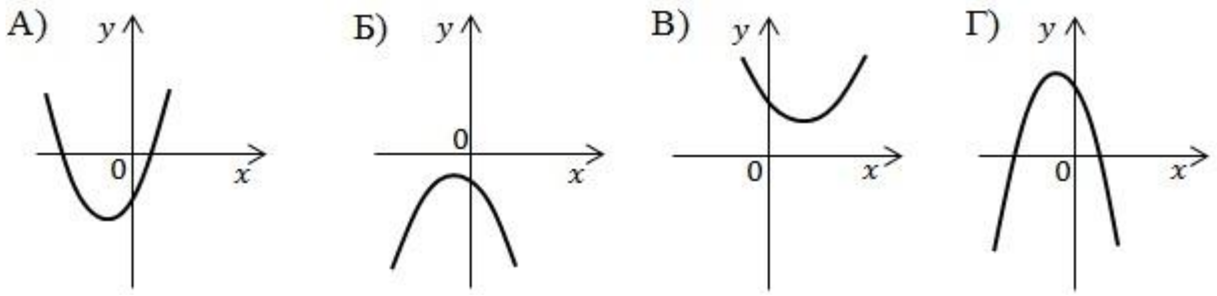


Рис. 15

ЗНАЧЕНИЯ:

1) $a > 0, D > 0$; 2) $a > 0, D < 0$; 3) $a < 0, D > 0$; 4) $a < 0, D < 0$.

Решение: 1) на Рис. 15, А ветви параболы направлены вверх, следовательно, $a > 0$. Кроме того, парабола пересекает ось абсцисс в двух точках, поэтому $D > 0$. Итак, А) – 1;

2) на Рис. 15, Б ветви параболы направлены вниз, поэтому $a < 0$. Парабола не имеет точек пересечения с осью $Ox \Longrightarrow D < 0$. Итак, Б) – 4;

3) рассмотрим Рис. 15, В. Ветви параболы направлены вверх, следовательно, $a > 0$. Парабола не имеет точек пересечения с осью абсцисс, поэтому $D < 0$. Итак, В) – 2;

4) аналогичными рассуждениями получаем: Г) – 3.

Ответ: А) – 1, Б) – 4, В) – 2, Г) – 3.

4) задачи на чтение графика квадратичной функции:

Задача 6 [51]. На Рис. 16 изображен график квадратичной функции $y = f(x)$. Какие из следующих утверждений о данной функции **неверны**? Запишите их номера.

1) функция возрастает на промежутке $(-\infty; -1]$;

2) наибольшее значение функции равно 8;

3) $f\ \ -4\ \ \neq f\ \ 2$.

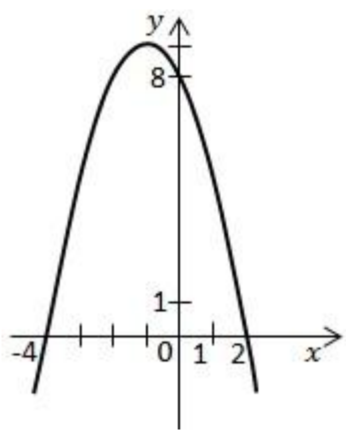


Рис. 16

Решение. Функция $y = f(x)$ (Рис. 16) действительно возрастает на промежутке $(-\infty; -1]$, но наибольшее значение функции равно не 8, а 9. Кроме того, $f(-4) = f(2) = 0$. Итак, утверждения 2 и 3 являются неверными.

Ответ: 2, 3.

5) задачи на интерпретацию графиков реальных зависимостей:

Задача 7 [54, С. 26]. На Рис. 17 жирными точками показано суточное количество осадков, выпадавших в Петрозаводске с 6 по 18 января 2015 года. По горизонтали указываются числа месяца, по вертикали – количество осадков, выпавших в соответствующий день, в миллиметрах. Для наглядности жирные точки на рисунке соединены линией. Определите по рисунку, сколько дней из данного периода в Петрозаводске выпадало более 3 миллиметров осадков.

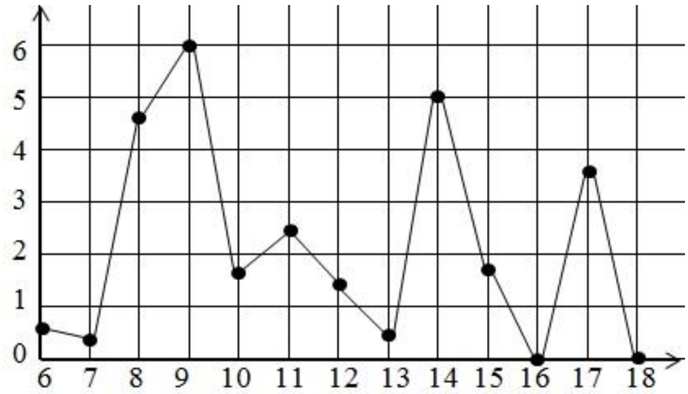


Рис. 17

Решение. Требуется определить количество дней (по горизонтали), когда количество осадков (по вертикали) было более 3 миллиметров. Проводим прямую $y = 3$ и считаем количество точек, расположенных выше данной прямой. В итоге получаем, что в Петрозаводске в течение 4 дней выпадало более 3 миллиметров осадков.

Ответ: 4.

6) задачи на нахождение координат точек пересечения функций:

Задача 8 [51]. Две прямые пересекаются в точке C (Рис. 18). Найдите абсциссу точки C.

Решение. Чтобы найти абсциссу точки пересечения двух данных прямых, составим систему уравнений: $\begin{cases} 2x - y = -1, \\ x + 2y = 12. \end{cases}$

Выразим из второго равенства переменную x: $x = 12 - 2y$. Подставим полученное выражение в первое уравнение: $2\;\ 12 - 2y\;\ - y = -1 \;\;\Rightarrow\;\; 24 - 5y = -1$, $25 = 5y \Rightarrow y = 5$ – это ордината точки C. Тогда ее абсцисса равна: $x = 12 - 10 = 2$.

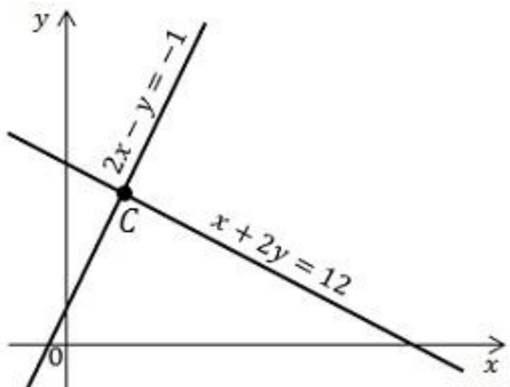


Рис. 18

Ответ: 2.

Для решения задач данных типов учащимся необходимо знать основные элементарные функции ($y = kx + b, y = \frac{k}{x}$, $y = ax^2 + bx + c$) и их графики, а также расположение графиков данных функций относительно оси координат в зависимости от знаков коэффициентов. Помимо этого учащиеся должны уметь определять свойства функции по ее графику (промежутки возрастания, убывания, наибольшее и наименьшее значения и другие), находить точки пересечения графиков функций, а также интерпретировать графики реальных зависимостей.

Выделим основные типы задач **части 2:**

1) задачи на построение графика кусочной функции и определение, при каких значениях m прямая $y = m$ (при каких значениях k прямая $y = kx$) имеет с графиком ровно две общие точки/ одну точку/ три/ не имеет общих точек:

Задача 9 [54, С. 43]. Постройте график функции

$$y = \begin{matrix} -x^2 - 2x + 3 \text{ при } x \geq -2, \\ -x + 1 \qquad\quad \text{ при } x < -2. \end{matrix}$$

Определите, при каких значениях m прямая $y = m$ имеет с графиком ровно две общие точки.

Решение: 1. Построим сначала пунктирной линией график функции $y = -x^2 - 2x + 3$:

1) графиком данной функции является парабола, ветви которой направлены вниз, так как $a = -1 < 0$. Найдем координаты вершины параболы.

$$a = -1, b = -2, x_0 = -\frac{b}{2a} = -\frac{-2}{2 \cdot \ -1} = -1, y_0 = -1 + 2 + 3 = 4,$$

следовательно, $\ -1; 4\ -$ вершина параболы, прямая $x = -1 -$ ось параболы;

2) возьмем на оси x две точки, симметричные относительно оси параболы, например точки $x = 0$ и $x = -2$. Имеем $f\ 0\ = f\ -2\ = 3$; отметим на координатной плоскости точки $(0; 3)$ и $\ -2; 3\ $;

3) найдем точки пересечения графика функции с осью абсцисс. Для этого решим квадратное уравнение $-x^2 - 2x + 3 = 0$.

$$-x^2 - 2x + 3 = 0,$$

$$D = b^2 - 4ac = \ -2\ ^2 - 4 \cdot \ -1\ \cdot 3 = 4 + 12 = 16 = 4^2,$$

$$x_1 = \frac{-2+4}{2} = 1, \quad x_2 = \frac{-2-4}{2} = -3.$$

Следовательно, получили точки $(1; 0)$ и $(-3; 0)$. Через все найденные точки проводим пунктирной линией параболу. Затем, выделяем ту часть параболы, где $x \geq -2$ (Рис. 19).

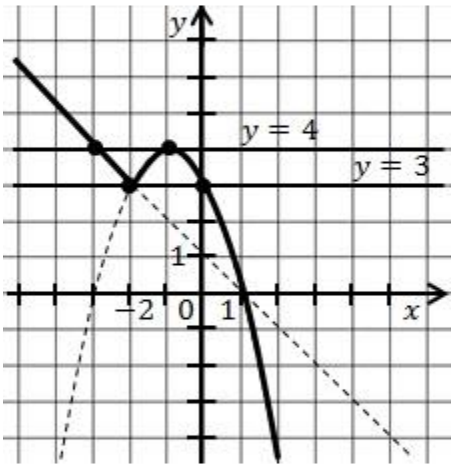


Рис. 19

2. Теперь построим прямую $y = -x + 1$. Для этого возьмем две точки $(-2; 3)$ и $(1; 0)$ и проведем через них прямую пунктирной линией. Далее, выделим ту часть прямой, где $x < -2$. Итак, получили график заданной кусочной функции (Рис. 19).

3. Определим по полученному графику, при каких значениях m прямая $y = m$ имеет с графиком ровно две общие точки. Прямая $y = m$ параллельна оси Ox. Только прямые $y = 3$ и $y = 4$ пересекают график данной функции ровно в двух точках (Рис. 19), следовательно, $m = 3$ и $m = 4$.

Ответ: 3; 4.

Замечание. График функции $y = -x^2 - 2x + 3$ можно было построить, предварительно выделив полный квадрат:

$$y = -x^2 - 2x + 3 = -\ x^2 + 2x + 1 - 4\ = -\ x + 1\ ^2 + 4.$$

График данной функции получается из функции $y = -x^2$ сдвигом на 1 единицу вдоль оси Ox влево и на 4 единицы вдоль оси Oy вверх (Рис. 19).

Задача 10 [54, С. 23]. Постройте график функции

$$y = \frac{2,5\ x\ \ -1}{x\ \ -2,5x^2}$$

и определите, при каких значениях k прямая $y = kx$ не имеет с графиком общих точек.

Решение: 1) область определения данной функции: $x\ \ -2,5x^2 \neq 0$; Следовательно, раскрыв знак модуля, получаем:

$$\begin{array}{c} x - 2,5x^2 \neq 0, \\ -x - 2,5x^2 \neq 0. \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{c} x(1 - 2,5x) \neq 0, \\ -x(1 + 2,5x) \neq 0. \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{c} x \neq 0, \\ x \neq \pm 0,4. \end{array}$$

2) раскроем модули и учитывая область определения заданной функции, упростим полученные выражения:

$$x > 0: y = \frac{2,5x - 1}{x - 2,5x^2} = \frac{2,5x - 1}{-x(2,5x - 1)} = -\frac{1}{x},$$

$$x < 0: y = \frac{-2,5x - 1}{-x - 2,5x^2} = \frac{-2,5x - 1}{x(-2,5x - 1)} = \frac{1}{x}.$$

Итак, получили:

$$y = \begin{array}{l} -\frac{1}{x} \text{ при } x > 0, \\ \frac{1}{x} \text{ при } x < 0; \end{array}$$

3) построим график данной функции, учитывая найденную область определения: $x \neq 0, x \neq \pm 0,4$. Графиком данной функции (Рис. 20) являются ветвь гиперболы $y = -\frac{1}{x}$ в IV четверти (так как $x > 0$) с выколотой точкой $(0,4; -2,5)$ и ветвь гиперболы $y = \frac{1}{x}$ в III четверти (так как $x < 0$) с выколотой точкой $(-0,4; -2,5)$;

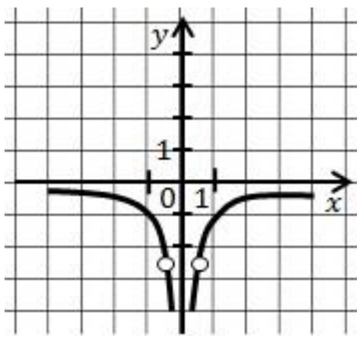


Рис. 20

4) определим, при каких значениях k прямая $y = kx$ не имеет с графиком общих точек. Известно, что прямая $y = kx$ проходит через начало координат. По построенному графику (Рис. 20) видим, что прямая $y = kx$ не будет иметь с графиком общих точек, если она пройдет через точку $(0{,}4; -2{,}5)$ или $(-0{,}4; -2{,}5)$ – выколотые точки. Подставим по очереди данные точки в уравнение $y = kx$ и отсюда найдем искомые значения k:

$$-2{,}5 = 0{,}4k \ \Rightarrow k = -2{,}5 : 0{,}4 = -6{,}25,$$

$$-2{,}5 = -0{,}4k \ \Rightarrow k = -2{,}5 : (-0{,}4) = 6{,}25.$$

Кроме того, прямая $y = kx$ не будет иметь с графиком общих точек при $k = 0$. При всех остальных значениях k прямая будет пересекаться с графиком заданной функции. Итак, $k = 0, \pm 6{,}25$.

Ответ: $k = 0, \pm 6{,}25$.

2) задачи на построение графика функции, содержащей знак модуля, и определение наибольшего количества общих точек графика данной функции с прямой, параллельной оси абсцисс:

Задача 11 [54, С. 33]. Постройте график функции $y = |x^2 + 2x - 3|$. Какое наибольшее число общих точек график данной функции может иметь с прямой, параллельной оси абсцисс?

Решение: 1) построим сначала график функции $y = x^2 + 2x - 3$. Для этого выделим полный квадрат:

$$y = x^2 + 2x - 3 = (x^2 + 2x + 1) - 4 = (x + 1)^2 - 4.$$

Итак, $y = (x + 1)^2 - 4$. График данной функции получим из графика функции $y = x^2$ параллельным переносом вдоль оси абсцисс на 1 единицу влево и вдоль оси ординат на 4 единицы вниз. На Рис. 21 шаги построения графика функции $y = (x + 1)^2 - 4$ показаны пунктиром;

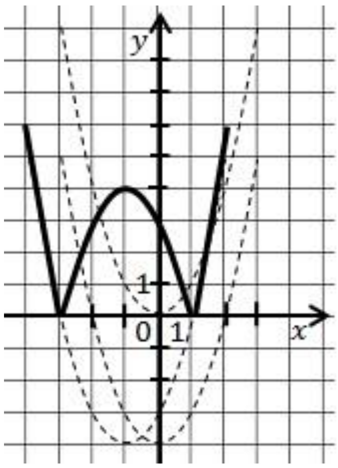


Рис. 21

2) в задаче требуется построить график функции $y = |x^2 + 2x - 3|$. Для этого симметрично отобразим

ту часть графика функции $y = x^2 + 2x - 3$, где $y < 0$ относительно оси абсцисс. В итоге получаем искомый график. На Рис. 21 график функции $y = x^2 + 2x - 3$ показан сплошной линией;

3) определим, какое наибольшее число общих точек график данной функции может иметь с прямой, параллельной оси абсцисс. По построенному графику видим, что прямая, параллельная оси абсцисс может пересекать график ровно в двух точках, трех, четырех или не иметь общих точек совсем. Итак, наибольшее число общих точек равно четырем.

Ответ: 4 точки.

3) задачи на построение графика дробно-рациональной функции и определение, при каких значениях k прямая $y = kx$ (при каких значениях m прямая $y = m$) имеет с графиком ровно две общие точки/ одну точку/ три/ не имеет общих точек:

Задача 12 [51]. Постройте график функции

$$y = \frac{7x - 10}{7x^2 - 10x}$$

и определите, при каких значениях k прямая $y = kx$ имеет с графиком ровно одну общую точку.

Решение: 1) найдем область определения функции:

$$7x^2 - 10x \neq 0 \Rightarrow x(7x - 10) \neq 0 \Rightarrow \begin{matrix} x \neq 0, \\ 7x - 10 \neq 0. \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} x \neq 0, \\ x \neq \frac{10}{7} = 1\frac{3}{7}; \end{matrix}$$

2) вынесем в знаменателе x как общий множитель и с учетом найденной области определения, сократим полученное выражение на $(7x - 10)$:

$$y = \frac{7x - 10}{7x^2 - 10x} = \frac{7x - 10}{x(7x - 10)} = \frac{1}{x};$$

3) строим график функции $y = \frac{1}{x}$ и выкалываем на данном графике (Рис. 22) точку $(1\frac{3}{7}; \frac{7}{10})$, так как данная точка не входит в область допустимых значений;

4) определим, при каких значениях k прямая $y = kx$ имеет с графиком ровно одну общую точку. Прямая $y = kx$ проходит через начало координат. Данная прямая пересечет график функции ровно в одной точке только в случае, когда она пройдет через выколотую точку – точку $(1\frac{3}{7}; \frac{7}{10})$. Подставим координаты данной точки в уравнение $y = kx$ и найдем k:

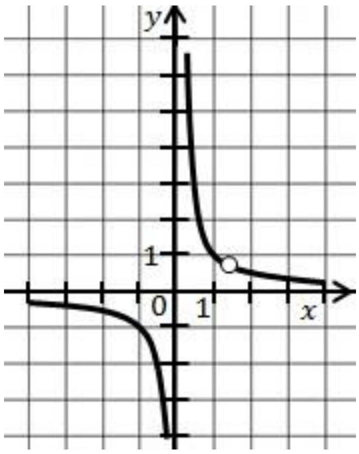


Рис. 22

$$\frac{7}{10} = \frac{10}{7}k \ \Rightarrow k = \frac{7}{10} \cdot \frac{7}{10} = \frac{49}{100} = 0{,}49.$$

Ответ: $k = 0{,}49$.

Задача 13 [51]. Постройте график функции

$$y = \frac{(x-1)(x^2+3x+2)}{x+2}$$

и определите, при каких значениях m прямая $y = m$ имеет с графиком ровно одну общую точку.

Решение: 1) найдем область определения данной функции: $x \neq -2$;

2) разложим на множители многочлен $x^2 + 3x + 2$:

$$x^2 + 3x + 2 = 0,$$

$$D = 9 - 8 = 1,$$

$$x_1 = \frac{-3+1}{2} = -1, x_2 = \frac{-3-1}{2} = -2,$$

следовательно, $x^2 + 3x + 2 = \ \ x+1 \ \ \ x+2 \ $. Таким образом,

$$y = \frac{(x-1)(x^2+3x+2)}{x+2} = \frac{(x-1)(x+1)(x+2)}{x+2}.$$

Учитывая, что $x \neq -2$, сократим данное выражение на $\ x+2\ $ и применим справа налево формулу разности квадратов $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$:

$$y = \ \ x-1 \ \ \ x+1 \ \ = x^2 - 1;$$

3) таким образом, в ходе тождественных преобразований мы получили, что $y = x^2 - 1$, при этом $x \neq -2$. Строим график данной функции, который может быть получен из графика функции $y = x^2$ параллельным переносом вдоль оси Oy на одну единицу вниз. При этом не забываем выколоть точку с абсциссой -2, то есть точку $-2; 3$ (Рис. 23);

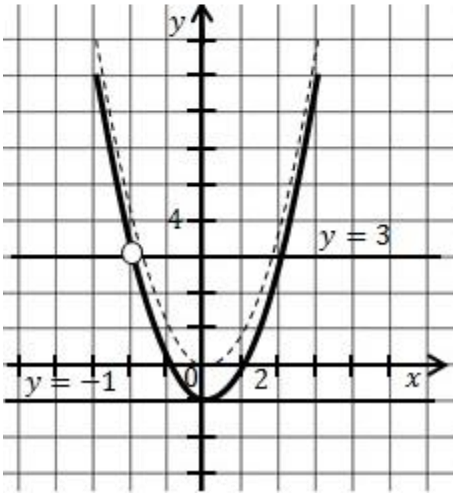


Рис. 23

4) определим по построенному графику (Рис 23), при каких значениях m прямая $y = m$ имеет с графиком ровно одну общую точку. Прямая $y = m$ параллельна оси Ox. Только прямые $y = -1$ и $y = 3$ пересекают график данной функции ровно в одной точке. Итак, $m = -1$ и $m = 3$.

Ответ: -1; 3.

4) задачи с параметром:

Задача 14 [51]. Найдите p и постройте график функции $y = x^2 + p$, если известно, что прямая $y = -2x$ имеет с графиком ровно одну общую точку.

Решение. Приравняем правые части двух равенств: $x^2 + p = -2x$. Получаем квадратное уравнение: $x^2 + 2x - p = 0$. Так как по условию задачи прямая $y = -2x$ с графиком функции $y = x^2 + p$ имеют ровно одну общую точку, то данное квадратное уравнение должно иметь два совпадающих корня $\Longrightarrow D = 0$. Получаем следующее уравнение относительно p: $4 - 4p = 0 \Longrightarrow p = 1$. Далее строим график функции $y = x^2 + 1$, который может быть получен из графика функции $y = x^2$ параллельным переносом вдоль оси Oy на одну единицу вверх (Рис. 24).

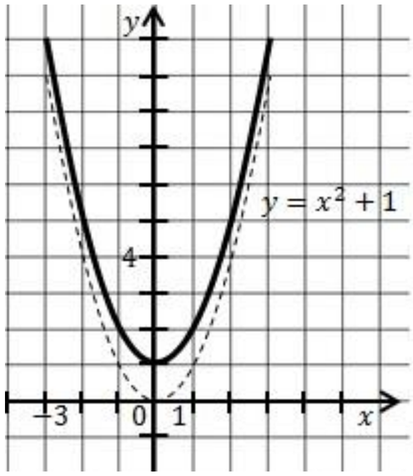


Рис. 24

Ответ: $p = 1$.

Итак, *в первой части* основного государственного экзамена содержатся задачи на: установление соответствия между аналитическим заданием функции и ее графиком; определение расположения графиков основных элементарных функций относительно оси координат в зависимости от знаков коэффициентов; определение свойств функции по ее графику; нахождение точек пересечения графиков функций; интерпретацию графиков реальных зависимостей. *Во второй части* основного государственного экзамена встречаются задачи на: построение графиков кусочных функций; построение дробно-рациональных функций; задачи с параметром.

Таким образом, в основном государственном экзамене по математике в той или иной степени представлены все типы задач (на понимание и использование функциональных понятий; на описание свойств функций по графику; на построение графиков функций и другие) по теме «Функции», которые были выделены нами ранее.

§9. Системы задач по теме «Функции» в курсе алгебры основной школы

К системам задач существуют различные требования [7; 21; 45 и др.].

В учебном пособии Е.И. Лященко [21] выделены требования к системам задач на усвоение понятия и его определения, на усвоение теоремы и ее доказательства, на усвоение правил. Автор выделяет следующие *особенности системы задач на усвоение понятия и его определения*:

1. Наличие задач, связанных с показом практической значимости нового понятия или с его значимостью для дальнейшего продвижения в изучении математики.

2. Наличие задач на актуализацию знаний и умений, необходимых при формировании данного понятия.

3. Наличие задач на выделение существенных признаков понятия.

4. Наличие задач на распознавание формируемого понятия.

5. Наличие задач на усвоение текста определения понятия

6. Наличие задач на использование символики, связанной с понятием.

7. Наличие задач на установление свойств понятия.

8. Наличие задач на применение понятия.

Г.И. Саранцев приводит в [45] требования к системам задач на формирование понятий, на усвоение теоремы и ее доказательства.

Л.В. Виноградова в учебном пособии [7] выделяет следующие *принципы отбора и составления систем упражнений*:

1. *Принцип систематичности.* В системе задач должны присутствовать упражнения на изучение отдельных фактов изолированно от ранее изученного, упражнения, связывающие новый факт с ранее изученным материалом, и упражнения на систематизацию изученного материала.

2. *Принцип последовательности.* Упражнения располагаются в порядке возрастания сложности: от менее сложного к более сложному.

3. *Принцип прочности.* Данный принцип проявляется в наличии однотипных упражнений.

С учетом рассмотренных различных требований к системам упражнений, нами были составлены системы задач, удовлетворяющие требованиям Е.И. Лященко, на следующие темы: «Функции и способы их задания», «Линейная функция и ее график», «Квадратичная функция и ее график». Ответы и указания к решению систем задач представлены в Приложении 5.

Система задач на тему «Функции и способы их задания»

Задача 1 [14, С. 241]. Автомобиль должен проехать 600 км. Двигаясь со скоростью v км/ч, он затратит на этот путь t ч. Задайте формулой время движения t как функцию скорости v. Найдите время движения, если скорость движения равна 40 км/ч; 60 км/ч; 80 км/ч. Найдите скорость движения, если время движения равно 5 ч; 6 ч; 8 ч.

Задача 2 [38, С. 55]. 1. Запишите формулу для вычисления: а) средней скорости v км/ч пешехода, прошедшего расстояние 15 км за t ч; б) объема прямоугольного параллелепипеда V м^3, длина которого равна 5 м, ширина 3 м, а высота h м; в) натурального числа n, зная, что при делении на 7 в частном получается 3, а остаток равен r. 2. Укажите множество допустимых значений аргумента полученной функции.

Задача 3 [1]. Задает ли данная таблица (Табл. 14) функциональную зависимость переменной y от переменной x?

Таблица 14

Зависимость переменной y от переменной x

x	- 1	0	1	2
y	0	1	2	3

Задача 4 [35, С. 62]. Является ли графическим заданием какой-либо функции фигура, изображенная: а) на Рис. 25; б) на Рис. 26; в) на Рис. 27?

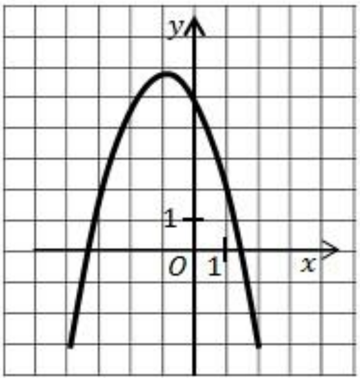


Рис. 25

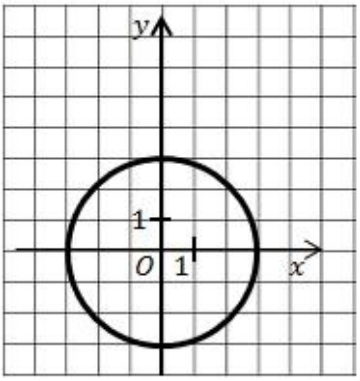


Рис. 26

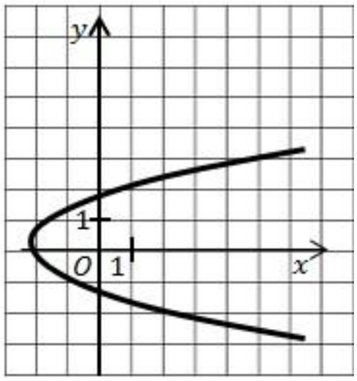


Рис. 27

Задача 5. Заполните пропуски. Функцией называется такая ________ переменной y от переменной x, при которой каждому значению переменной x соответствует __________ значение переменной y.

Задача 6 [26, С. 203]. Функция задана формулой $y = 2x - 3$. а) найдите значения функции для значений аргумента, равных $-1{,}5; 0; 2; 3{,}5$. б) при каком значении аргумента значение функции равно $5; 1; 0; -7$?

Задача 7 [23, С. 65]. Функция задана формулой $y = x(x - 3)$, где $-2 \leq x \leq 2$. Составьте таблицу значений функции с шагом 0,5 и постройте график этой функции.

Задача 8. Найдите область определения функции: а) $y = x^2 + 8$; б) $y = 3x + 6$; в) $y = \frac{24}{x}$; г) $y = \frac{6}{4x+1}$; д) $y = \frac{5}{x(x-3)}$.

Задача 9 [31, С. 172]. Дана функция $y = f(x)$, где $f(x) = x^2$. Найдите а) $f(-5)$, $f(7)+1$, $f(5)-4$, $f(7)-f(5)$; б) $f(2x+5)$, $f(2x)+5$, $2f(x+5)$; в) $f(x^2)$, $f(x^2-2)$, $f(x^2)-2$, $f((x-2)^2)$.

Задача 10 [14, С. 249]. Какие из точек $A(0;-5)$, B(-1;3), $C(-3;23)$, $D(2;-3)$ принадлежат графику функции $y = 2x^2 + 1$? Запишите координаты еще двух каких-либо точек, одна из которых принадлежит этому графику, а другая нет.

Задача 11 [26, С. 203]. Функция задана Таблицей 15. Подберите формулу, которой можно задать эту функцию.

Таблица 15

Табличное задание функции

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9
y	15	25	35	45	55	65	75	85	95

Задача 12 [31, С. 175]. Можно ли считать, что $y = f(x)$ – функция, где: а) $f(x) = \begin{cases} x^2, \text{если } -4 \le x \le 0; \\ 2x, \text{если } x \ge 1; \end{cases}$ б) $f(x) = \begin{cases} x+2, \text{если } x < 0; \\ x^2, \text{если } x \ge -1. \end{cases}$

Задача 13 [31, С. 176]. Постройте график функции:

$$y = \begin{cases} x+2, \text{если } -4 \le x \le -2; \\ 0, \text{если } -2 < x \le 0; \\ x^2, \text{если } 0 < x \le 3. \end{cases}$$

Используя заданный график функции, установите: 1) какова область определения функции $y = f(x)$; 2) чему равны наименьшее и наибольшее значения функции; 3) при каких значениях аргумента значение функции равно нулю, больше нуля, меньше нуля; 4) где функция возрастает, где убывает.

Отметим, что нами представлены такие типы задач по теме «Функции и способы их задания», как №1, 2, 11 – на задание функции формулой, №3-5, 12 – на понимание понятия функции, №8 – на нахождение области определения функции, №6, 10 – на нахождении значения функции по заданному значению аргумента и наоборот, №7, 13 – на построение графика функции, №9 – на понимание функциональной символики.

Система задач на тему «Линейная функция и ее график»

Задача 1 [38, С. 76]. В баке, емкость которого 8 м^3, находится 2 м^3 воды. Каждую минуту в бак поступает по $0,15$ м^3 воды. Сколько кубометров (V) воды будет в баке через t мин? Задайте функцию V формулой. Сколько воды будет в баке через 20 мин; 24 мин; 30 мин; 35 мин? Через сколько минут в баке будет 3,5 м^3; 6,2 м^3 воды?

Задача 2. Найдите значение выражения $(b-5)^2-b^2+3b-14$ при $b=4$.

Задача 3 [1]. Напишите общую формулу для функций: $y=\frac{x}{125}$, $y=2x+5$, $y=\frac{1}{9}x$, $y=1-\frac{x}{2}$, $y=5^2x-7$, $y=x$, $y=-3^3$.

Задача 4 [1]. Является ли линейной функция, заданная формулой: а) $y=x-3$; б) $y=7-x$; в) $y=\frac{x}{2}+1$; г) $y=\frac{2}{x}+1$; д) $y=x^2-3$; е) $y=\frac{10x-7}{5}$; ж) $y=x^3-7$.

Задача 5. Заполните пропуски.1.Линейной функцией называется функция, которую можно задать формулой вида ___________ , где x − независимая переменная, k и b − некоторые числа. 2. __________ функцией называется функция, которую можно задать формулой вида $y=kx+b$, где x − независимая переменная, k и b − некоторые числа.

Задача 6 [14, С. 261]. Дана линейная функция $f(x)=100x-2$. а) Найдите $f(0)$, $f(1)$, $f(-1)$, $f(0{,}3)$, $f(-2{,}4)$. б) Найдите значение x, при котором $f(x)=100$, $f(x)=-1$, $f(x)=0$, $f(x)=-5$.

Задача 7. Постройте график функции, заданной формулой: $y=3x$; $y=-2x+6$; $y=\frac{x}{2}$; $y=5$; $y=4x-5$; $y=-\frac{3}{2}x$; $y=-8$; $y=-x-2$.

Задача 8 [45, С. 131]. Среди указанных функций выделите такие, графиками которых является прямая: $y=-3x+2$; $y=2x^2-3$; $y=7x^3-4$; $y=2\frac{1}{2}$; $y=2x$; $y=\frac{2}{3x}+1$.

Задача 9 [31, С. 49]. Найдите наименьшее и наибольшее значения линейной функции на заданном промежутке: а) $y = 4x - 1$, $[-1; 2]$; б) $y = -2x + 5$, $[0; 4]$; в) $y = 3x - 2$, $[-1; 1]$; г) $y = -5x + 7$, $[0; 2]$.

Задача 10 [38, С. 81]. Постройте график функции $y = -\frac{6}{7}x + 3$. Найдите по графику: а) координаты точек его пересечения с осями координат; б) значение функции при x, равном: $-3{,}5$; $10{,}5$; в) значение аргумента, которому соответствует значение функции, равное: 1; 12.

Задача 11 [31, С. 57]. Не выполняя построения, установите взаимное расположение графиков линейных функций: а) $y = 2x$ и $y = 2x - 4$; б) $y = x + 3$ и $y = 2x - 1$; в) $y = 4x + 6$ и $4x + 6$; г) $y = 12x - 4$ и $y = -x + 1$.

Задача 12 [45, С. 131]. Среди функций укажите такие, графики которых: а) проходят через начало координат; б) пересекают ось координат в точке с положительной (отрицательной) ординатой; в) параллельны оси абсцисс: $y = 3x$; $y = \frac{1}{3}x$; $y = 2$; $y = x + 12$; $y = \frac{3}{4}x$; $y = -5$; $y = 12x$; $y = -2x - 5$. Среди этих функций выделите такие, графики которые составляют с осью абсцисс: г) острый угол; д) тупой угол.

Задача 13 [31, С. 52]. Определите знаки коэффициентов k и m, если известно, что график линейной функции $y = kx + m$ проходит: а) через первый, второй и третий координатные углы плоскости xOy; б) через первый, второй и четвертый координатные углы плоскости xOy; в) через первый, третий и четвертый координатные углы плоскости xOy; г) через второй, третий и четвертый координатные углы плоскости xOy.

Задача 14 [23, С. 80]. Не выполняя построения графика функции $y = 1{,}2x - 7$, выясните, проходит ли этот график через точку: $A(100; 113)$, $B(-15; -25)$, $C(-10; 5)$, $D\ \ 300; 353$.

Задача 15 [45, С. 132]. Постройте график функции, если известно, что она задана формулой $y = kx - 4$ и ее графику принадлежит точка $A\ \ 5; 6$.

Задача 16 [38, С. 82]. Найдите k и b, если известно, что прямая $y = kx + b$: параллельна прямой $y = 0{,}75x + 11$ и проходит через точку: а) $K(8; 1)$; б) $M(4; 9)$.

Задача 17 [45, С. 132]. Найдите параметр b, если известно, что графики функций $y = 2x - b$ и $y = -x + \frac{2}{3}$ проходят через одну и ту же точку оси ординат.

Задача 18 [45, С. 132]. Задайте формулой линейную функцию, если известно, что ее график проходит через точку $A(1; 2)$ и параллелен: а) графику функции $y = 2x - 11$; б) оси абсцисс; в) биссектрисе первого и третьего координатных углов.

Задача 19. Не выполняя построения графиков, найдите координаты точки пересечения прямых: а) $y = x + 5$ и $y = 1{,}5x + 4$; б) $y = 75x - 1$ и $y = 78x$; в) $y = -2x + 8$ и $y = x - 7$; г) $y = -49x$ и $y = -42x + 3$.

Задача 20 [31, С. 52]. Решите графически неравенство: а) $2x + 4 > 0$; б) $2x + 4 < 4$; в) $2x + 4 < 0$; г) $2x + 4 > 2$.

Задача 21 [31, С. 64]. Решите графически систему уравнений:

а) $\begin{cases} y = x, \\ y = 3x - 4; \end{cases}$ б) $\begin{cases} y = -3x, \\ y = 3 - 4x; \end{cases}$ в) $\begin{cases} y = 5x, \\ y = -2x + 7; \end{cases}$ г) $\begin{cases} y = -\frac{1}{4}x, \\ y = x - 5. \end{cases}$

Отметим, что нами представлены такие типы задач по теме «Линейная функция и ее график», как №1, 18 – на задание функции формулой, №3-6, 8, 14 – на понимание и использование функциональных понятий, терминов, функциональной символики, №7, 10, 15 – на построение и чтение графика функции, № 9 – на отыскание наибольшего и наименьшего значений функции на заданном промежутке, № 11 – на определение взаимного расположение графиков функций, № 12, 13 – на определение расположения графика линейной функции в координатной плоскости в зависимости от знаков коэффициентов, № 16, 17 – задачи с параметром, № 19 – на нахождение точек пересечения графиков функций, № 20, 21 - на применение графиков функций к решению уравнений, неравенств и их систем.

Система задач на тему «Квадратичная функция и ее график»

Задача 1 [25, С. 34]. Площадь поверхности куба y (см^2) зависит от ребра куба x (см). Задайте эту зависимость формулой. Постройте ее график и найдите по графику: а) поверхность куба, если его ребра равно 0,9 см; 1,5 см; 1,8 см; б) длину ребра, если поверхность куба равна 7 см^2; 10 см^2; 14 см^2.

Задача 2 [15, С. 72]. Какие из следующих функций являются квадратичными: 1) $y = 2x^2 - 5x + 1$; 2) $y = (x-4)^2$; 3) $y = -2x + 3$; 4) $y = \frac{x^2}{10}$; 5) $y = 1 - 2x + x^2$; 6) $y = \frac{10}{x^2}$; 7) $y = x^3 + 3x^2 + x$; 8) $y = \quad \overline{x^2}$; 9) $y = -0{,}5x^2$?

Задача 3. Заполните пропуски.1.Квадратичной функцией называется функция, которую можно задать формулой вида ___________ , где $x -$ независимая переменная, $a, b, c -$ некоторые числа, причем $a \neq 0$.

Задача 4 [33, С. 143]. Дана функция $y = f(x)$, $f\ \ x\ \ = -2x^2 + x - 4$. Найдите: а) $f(-x)$; б) $f(x+5)$; в) $f(-x^2)$; г) $3f(2x)$.

Задача 5 [40, С. 89]. Постройте график функции $f\ \ x\ \ = -1{,}5x^2$. Найдите по графику: 1) значение функции в точке: $f(-2{,}5)$; $f(1{,}6)$; 2) значения аргумента, при которых: $f\ \ x\ \ = -5$; $f\ \ x\ \ = -8$; 3) все значения аргумента, при которых: $f\ \ x\ \ \leq -2$; $f\ \ x\ \ > -5$; 4) наибольшее и наименьшее значения, которые принимает функция при: $-2 \leq x \leq 1$; $1 \leq x \leq 2$; 5) все значения аргумента, при которых: $-5 < f\ \ x\ \ < -2$; $-3 < f\ \ x\ \ < -1$; 6) ось симметрии графика; 7) промежутки возрастания и убывания функции.

Задача 6 [25, С. 39]. Используя шаблон параболы $y = x^2$, постройте график функции: а) $y = x^2 + 2$; б) $y = -x^2 - 1$; в) $y = \ \ x + 4\ \ ^2$; г) $y = -(x-3)^2$.

Задача 7 [25, С. 39]. Изобразите схематически график функции: а) $y = \frac{1}{2}(x-2)^2 + 1$; б) $y = \frac{1}{2}(x+3)^2 - 1$; в) $y = -4\ \ x - 3\ \ ^2 + 5$; г) $y = -4\ \ x + 2\ \ ^2 - 2$.

Задача 8 [15, С. 97]. Запишите уравнение параболы в виде $y = a(x+p)^2 + q$ и постройте график данной функции, если известно, что она получена: а) из параболы $y = x^2$ сдвигом вдоль оси x на 5 единиц влево и вдоль оси y на 3 единицы вниз; б) из параболы $y = 2x^2$ сдвигом вдоль оси y на 6 единиц вверх и вдоль оси x на 1 единицу вправо; в) из параболы $y = -5x^2$ сдвигом вдоль оси x на 4 единицы влево и вдоль оси y на 4 единицы вверх.

Задача 9 [33, С. 140]. Выделив предварительно полный квадрат, постройте график функции: а) $y = x^2 + 4x + 5$; б) $y = -x^2 + 2x - 3$; в) $y = -x^2 + 2x + 2$; г) $y = x^2 - 4x + 1$.

Задача 10 [40, С. 98]. Найдите координаты вершины параболы: 1) $y = x^2 - 4x + 1$; 2) $y = -x^2 - 6x + 5$; 3) $y = 2x^2 - 10x$; 4) $y = \frac{3}{4}x^2 - 2$.

Задача 11 [25, С. 45]. Постройте график функции и опишите ее свойства: а) $y = \frac{1}{3}x^2 - 4x + 4$; б) $y = -\frac{1}{4}x^2 + x - 1$; в) $y = x^2 + 3x$.

Задача 12 [33, С. 140]. Найдите наименьшее и наибольшее значения функции $y = -x^2 + 2x + 3$: а) на отрезке $[0; 2]$; б) на луче $(-\infty; 1]$; в) на отрезке $[1; 2]$; г) на луче $[2; +\infty)$.

Задача 13 [25, С. 45]. При каком значении n графики функций $y = 2x^2 - 5x + 6$ и $y = x^2 - 7x + n$ имеют только одну общую точку? Найдите координаты этой точки.

Задача 14 [33, С. 141]. Определите число корней уравнения: а) $-x^2 + 4x + 5 = 0$; б) $-2x^2 - 4x + 1 = -\frac{2}{x}$; в) $2x^2 - 6x + 1 = x - 2$; г) $-x^2 + 2x + 1 = \frac{1}{x}$.

Задача 15 [40, С. 113]. Решите графически систему уравнений:

$$1)\ \begin{matrix} y = x^2 - 6x + 4, \\ xy = 12; \end{matrix} \qquad 2)\ \begin{matrix} y = x^2 + 4x - 5, \\ xy = -6. \end{matrix}$$

Задача 16 [15, С. 111]. Графическим методом решите неравенство: а) $4 - x^2 > 0$; б) $-x^2 - 7x - 10 < 0$; в) $-x^2 + 6x + 7 > 0$; г) $1 - x^2 < 0$.

Отметим, что нами представлены такие типы задач по теме «Квадратичная функция и ее график», как №1-4,10 – на понимание и использование функциональных понятий, терминов, функциональной символики, №5-8, 9, 11 – на построение и чтение графика функции, №12 – на отыскание наибольшего и наименьшего значений функции на заданном промежутке. Кроме того, представлены задача с параметром (№13) и задачи на применение графиков функций к решению уравнений, неравенств, систем (№14-16).

Выводы по второй главе

1. Представлены методические рекомендации по обучению теме «Функции». Установлено, что подходить к обучению функциям нужно менее формально, максимально используя графическое представление функции. При обучении функциям в курсе алгебры основной школы рекомендуется подкреплять графическими примерами все определения понятий, формулировки свойств. Необходимо использовать наглядно-образный материал, активизирующий познавательную деятельность учащихся, повышающий их интерес и качество знаний.

Определено, что при обучении функциональной линии на уроках алгебры необходимо устанавливать связь с жизненными представлениями учащихся, учитывать *связь с содержанием других учебных предметов*, которая реализуется с помощью *метаметодического подхода* к образовательному процессу. Такой подход обеспечивает целостность образовательного процесса, интеграцию различных учебных предметов и способствует реализации требований федерального государственного образовательного стандарта. При обучении функциям целесообразно использовать компьютерные технологии, что позволяет активизировать устойчивый интерес к математике, получить всесторонние представления об изучаемом математическом объекте, дает возможность рационально расходовать время на уроке.

2. Выделены основные типы задач в итоговой аттестации учащихся в курсе алгебры основной школы по теме «Функции». Определено, что *в первой части* основного государственного экзамена содержатся задачи на: уста-

новление соответствия между аналитическим заданием функции и ее графиком; определение расположения графиков основных элементарных функций относительно оси координат в зависимости от знаков коэффициентов; определение свойств функции по ее графику; нахождение точек пересечения графиков функций; интерпретацию графиков реальных зависимостей. *Во второй части* основного государственного экзамена встречаются задачи на: построение графиков кусочных функций; построение дробно-рациональных функций; задачи с параметром.

3. Разработаны системы задач по теме «Функции» в куре алгебры основной школы, удовлетворяющие требованиям Е.И. Лященко. Системы задач представлены на следующие темы: «Функции и способы их задания», «Линейная функция и ее график», «Квадратичная функция и ее график». Каждая система задач подобрана в соответствии с основными знаниями и требованиями, предъявляемыми к ученику после окончания изучения темы.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Сформулируем основные выводы и полученные результаты проведенного исследования.

1. Изучены исторические аспекты возникновения и развития понятия функции. Установлено, что понятие функции в своем историческом развитии прошло через несколько этапов (пропедевтический, введение понятия функции через механические и геометрические представления, аналитическое определение функции, функция как отображение, дальнейшее развитие понятия функции с 20 века). Структура изучения функциональной линии в школьном курсе математики строится с учетом исторических аспектов развития понятия функции. В школьном курсе происходит повторение в обучении основных этапов, через которые это понятие прошло в науке.

2. Выявлены основные цели и задачи обучения функциональной линии в курсе математики основной школы. Определено, что при изучении функций у учащихся формируется целостное представление об окружающем мире и взаимосвязи его компонентов, навыки использования функций в повседневной жизни; знания, умения и навыки использования понятийного аппарата, связанного с функциональной линией, в математике и других науках.

3. Выполнен анализ содержания теоретического и задачного материала функциональной линии в учебниках алгебры основной школы. Определено, что в большинстве рассматриваемых учебниках в 7 классе основной изучаемой функцией является линейная функция. В 8 классе особое внимание уделяется функции обратной пропорциональности, а в 9 классе - квадратичной функции и преобразованиям графиков функции. Выделены основные типы задач по теме «Функции», приведены примеры задач каждого типа.

4. Охарактеризованы различные подходы к определению понятия «функция» в школьном курсе математики и раскрыта методика введения данного понятия. Определено, что существуют две различные методические трактовки понятия функции: генетическая и логическая. В современном

школьном курсе математики в качестве ведущего принят генетический подход к понятию функции. В школьных учебниках алгебры 7-9 классов функция трактуется как зависимость, как переменная величина или определяется через соответствие двух множеств. Вводить понятие функции целесообразно с рассмотрения зависимостей окружающего нас мира.

5. Выявлены методические особенности обучения учащихся линейной функции. Установлено, что изучение конкретных функций целесообразно проводить по определенной методической схеме. Особое внимание при обучении учащихся линейной функции следует уделить графику данной функции, расположению графика функции в координатной плоскости в зависимости от знаков коэффициентов. Определено, что для закрепления понятия линейной функции и ее свойств рекомендуется решать с учащимися задачи практического содержания, а также задачи на нахождение уравнений прямых, заданных теми или иными геометрическими свойствами.

6. Раскрыты методические особенности обучения учащихся квадратичной функции. Установлено, что изучение квадратичной функции в основной школе проводится поэтапно. Основная цель – выработать умение строить график квадратичной функции и с помощью графика перечислять свойства данной функции. Чтобы вызвать познавательный интерес к квадратичной функции, учителю рекомендуется на примере нескольких задач показать учащимся потребность в изучении данной функции. Строить график квадратичной функции рекомендуется различными способами: с помощью преобразования или по алгоритму. При обучении квадратичной функции целесообразно показать учащимся общие случаи расположения параболы на координатной плоскости в зависимости от знаков коэффициентов, входящих в формулу, и знака дискриминанта.

7. Представлены методические рекомендации по обучению теме «Функции». Установлено, что при обучении функциям в курсе алгебры основной школы рекомендуется подкреплять графическими примерами все

определения понятий, формулировки свойств. Необходимо использовать наглядно-образный материал.

Определено, что при обучении функциональной линии на уроках алгебры необходимо устанавливать связь с жизненными представлениями учащихся, учитывать *связь с содержанием других учебных предметов*, которая реализуется с помощью *метаметодического подхода* к образовательному процессу. При обучении функциям целесообразно использовать компьютерные технологии, что позволяет активизировать устойчивый интерес к математике, получить всесторонние представления об изучаемом математическом объекте.

8. Выделены основные типы задач в итоговой аттестации учащихся в курсе алгебры основной школы по теме «Функции». Определено, что *в первой части* основного государственного экзамена содержатся задачи на: установление соответствия между аналитическим заданием функции и ее графиком; определение расположения графиков основных элементарных функций относительно оси координат в зависимости от знаков коэффициентов; определение свойств функции по ее графику; нахождение точек пересечения графиков функций; интерпретацию графиков реальных зависимостей. *Во второй части* основного государственного экзамена встречаются задачи на: построение графиков кусочных функций; построение дробно-рациональных функций; задачи с параметром.

9. Разработаны системы задач по теме «Функции» в куре алгебры основной школы, удовлетворяющие требованиям Е.И. Лященко. Системы задач представлены на следующие темы: «Функции и способы их задания», «Линейная функция и ее график», «Квадратичная функция и ее график». Каждая система задач подобрана в соответствии с основными знаниями и требованиями, предъявляемыми к ученику после окончания изучения темы.

Все это дает основание считать, что задачи, поставленные в исследовании, полностью решены.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Антонова, И.В. Дифференцированная работа учителя математики при формировании понятия функции в курсе алгебры основной школы [Текст]: дис. канд. пед. наук./ И.В. Антонова. – Тольятти, 2003. – 185 с.

2. Блох, А.Я. Методика преподавания математики в средней школе: Частная методика [Текст]: учебное пособие для студентов пед. ин-тов по физ.-мат.спец. / А.Я. Блох, В.А. Гусев, Г.В. Дорофеев и др.; Сост. В.И. Мишин. – М.: Просвещение, 1987. – 416 с.

3. Бурмистрова, Т.А. Алгебра. Сборник рабочих программ. 7 – 9 классы [Текст]: пособие для учителей общеобразовательных организация/ Т.А. Бурмистрова. – 2-е изд., доп. – М.: Просвещение, 2014. – 96 с.

4. Виленкин, Н.Я. Как возникло и развивалось понятие функции/ Н.Я. Виленкин // Квант, 1977. - № 7. – С. 41 – 45.

5. Виленкин, Н.Я. Функции в природе и технике [Текст]: книга для внеклас. чтения IX – X кл./ Н.Я. Виленкин. – 2-е изд., испр. – М.: ПРосвещение, 1985. – 192 с.

6. Виленкин, Н.Я. Алгебра [Текст]: учебник для учащихся 9 класса с углубленным изучением математики / Н.Я. Виленкин, Г.С. Сурвилло, А.С. Симонов, А.И. Кудрявцев. – 7-е изд. – М.: Просвещение, 2006. – 368 с.

7. Виноградова, Л.В. Методика преподавания математики в средней школе [Текст]: учеб. пособие / Л.В. Виноградова. – Ростов н/Д.: Феникс, 2005. – 252 с.

8. Власова, Е.В. Еще раз об изучении функции в средней школе / Е.В. Власова // Математика в школе, 2002. - № 6. – С. 53 – 57.

9. Глейзер, Г.И. История математики в школе IV – VI кл. [Текст]: пособие для учителей/ Г.И. Глейзер. – М.: Просвещение, 1981. – 239 с.

10. Глейзер, Г.И. История математики в школе IX – X кл. [Текст]: пособие для учителей/ Г.И. Глейзер. – М.: Просвещение, 1983. – 351 с.

11. Горина, Л.А. О развивающем потенциале функционально-графической линии в курсе алгебры основной школы/ Л.А. Горина // Математика в школе. – 2011. - № 2. – С. 69 – 73.

12. Громова, Е.В. Обучение понятию функции в основной школе с помощью компьютерных технологий/ Е.В. Громова, И.С. Сафуанов // Вестник МГПУ. Серия «Информатика и информатизация образования». – 2013. – № 1(25). - С. 91-99.

13. Дорофеев, Г.В. Алгебра. 7 класс [Текст]: учебник для общеобразовательных организаций/ Г.В. Дорофеев, С.Б. Суворова, Е.А. Бунимович. – 2-е изд. – М.: Просвещение, 2014. – 287 с.

14. Дорофеев, Г.В. Алгебра. 8 класс [Текст]: учебник для общеобразовательных организаций/Г.В. Дорофеев, С.Б. Суворова, Е.А. Бунимович. – 3-е изд. – М.: Просвещение, 2016. – 320 с.

15. Дорофеев, Г.В. Алгебра. 9 класс [Текст]: учебник для общеобразовательных организаций/Г.В. Дорофеев, С.Б. Суворова, Е.А. Бунимович. – 5-е изд. – М.: Просвещение, 2010. – 304 с.

16. Дундукова, И.В. Возможности использования программы УМК «Живая математика» при изучении функциональной линии в курсе алгебры 7-9 класса [Электронный ресурс]/ И.В. Дундукова, Е.Н. Балибардина, Г.П. Бердникова// Актуальные проблемы непрерывного педагогического образования в условиях реализации федеральных государственных и профессиональных стандартов: сборник трудов по итогам IV Всероссийской заочной научно-практической конференции, г. Михайловка, 20 ноября 2015 г. – М: Планета. – 2015. – С. 78-83. – Режим доступа: http://elibrary.ru/download/elibrary_25559955_51157205.pdf. – Последнее обновление 11.05.2017.

17. Епифанова, Н.М. Методика обучения алгебре основной школы [Текст]: учебно-методическое пособие/ Н.М. Епифанова, О.П. Шарова. – Ярославль: изд-во ЯГПУ имени К.Д. Ушинского, 2006. – 83 с.

18. Иванова, О.А. Изучение функциональной линии в курсе алгебры средней школы на основе метаметодического подхода (на примере функции вида $y = kx$)/ О.А. Иванова// Ежемесячный научный журнал «Молодой ученый». – 2013. – №7 (54). – С. 384 – 387.

19. Колмогоров, А.Н. Что такое функция / А.Н. Колмогоров // Квант, 1970. - № 1. – С. 27 – 36.

20. Колягин, Ю.М. Методика преподавания математики в средней школы: Частные методики [Текст]: учеб. пособие для студентов физ.-мат. факультетов пед. ин-тов/ Ю.М. Колягин, Г.Л. Луканин, Е.Л. Мокрушин, В. А. Оганесян и др. – М.: Просвещение, 1977. – 480 с.

21. Лященко, Е.И. Лабораторные и практические работы по методике преподавания математики [Текст]: учебное пособие для студентов физ.-мат. спец. пед. ин-тов/ Е.И. Лященко, К.В. Зобкова, Т.Ф. Кириченко и др.; под ред. Е.И. Лященко. – М.: Просвещение, 1988. – 223 с.

22. Лященко, Е.И. Изучение функций в курсе математики восьмилетней школы/ Е.И. Лященко. – Минск: Научно-исследовательский институт педагогики министерства просвещения БССР, 1970. – 176 с.

23. Макарычев, Ю.Н. Алгебра. 7 класс [Текст]: учеб. для общеобразоват. учреждений/ Ю.Н. Макарычев, Н.Г. Миндюк, К.И. Нешков, С.Б. Суворова; под ред. С.А. Теляковского. – М.: Просвещение, 2013. – 256 с.

24. Макарычев, Ю.Н. Алгебра. 8 класс [Текст]: учеб. для общеобразоват. учреждений/ Ю.Н. Макарычев, Н.Г. Миндюк, К.И. Нешков, С.Б. Суворова; под ред. С.А. Теляковского. – М.: Просвещение, 2013. – 287 с.

25. Макарычев, Ю.Н. Алгебра. 9 класс [Текст]: учеб. для общеобразоват. учреждений/ Ю.Н. Макарычев, Н.Г. Миндюк, К.И. Нешков, С.Б. Суворова; под ред. С.А. Теляковского. – 18-е изд. - М.: Просвещение, 2011. – 271 с.

26. Макарычев, Ю.Н. Алгебра 7 класс [Текст]: учеб. для учащихся общеобразоват. учреждений / Ю.Н. Макарычев, Н.Г. Миндюк, К.И. Нешков, И.Е. Феоктистов. – 13-е изд., стер. – М.: Мнемозина, 2013. – 336 с.

27. Макарычев, Ю.Н. Алгебра 8 класс [Текст]: учеб. для учащихся общеобразоват. учреждений / Ю.Н. Макарычев, Н.Г. Миндюк, К.И. Нешков, И.Е. Феоктистов. – 10-е изд., испр. – М.: Мнемозина, 2010. – 384 с.

28. Макарычев, Ю.Н. Алгебра 9 класс [Текст]: учеб. для учащихся общеобразоват. учреждений / Ю.Н. Макарычев, Н.Г. Миндюк, К.И. Нешков, И.Е. Феоктистов. – 7-е изд., испр. и доп. – М.: Мнемозина, 2008. – 447 с.

29. Макарычев, Ю.Н. Изучение алгебры в 7 – 9 классах [Текст]: пособие для учителей / Ю.Н. Макарычев, Н.Г. Миндюк, С.Б. Суворова, И.С. Шлыкова. – 4-е изд. – М.: Просвещение, 2011. – 304 с.

30. Мордкович, А.Г. Алгебра. 7 класс. В 2 ч. Ч. 1 [Текст]: учебник для учащихся общеобразовательных учреждений / А.Г. Мордкович. – 17-е изд., доп. – М.: Мнемозина, 2013. – 175 с.

31. Мордкович, А.Г. Алгебра. 7 класс. В 2 ч. Ч. 2 [Текст]: задачник для учащихся общеобразовательных учреждений / А.Г. Мордкович, Л.А. Александрова, Т.Н. Мишустина, Е.Е. Тульчинская. – 17-е изд., стер. – М.: Мнемозина, 2013. – 271 с.

32. Мордкович, А.Г. Алгебра. 8 класс. В 2 ч. Ч. 1 [Текст]: учебник для учащихся общеобразовательных учреждений / А.Г. Мордкович. – 12-е изд., доп. – М.: Мнемозина, 2010. – 215 с.

33. Мордкович, А.Г. Алгебра. 8 класс. В 2 ч. Ч. 2 [Текст]: задачник для учащихся общеобразовательных учреждений / А.Г. Мордкович, Л.А. Александрова, Т.Н. Мишустина, Е.Е. Тульчинская. – 12-е изд., испр. и доп. – М.: Мнемозина, 2010. – 271 с.

34. Мордкович, А.Г. Алгебра. 9 класс. В 2 ч. Ч. 1 [Текст]: учебник для учащихся общеобразовательных учреждений / А.Г. Мордкович, П.В. Семенов. – 12-е изд., стер. – М.: Мнемозина, 2010. – 224 с.

35. Мордкович, А.Г. Алгебра. 9 класс. В 2 ч. Ч. 2 [Текст]: задачник для учащихся общеобразовательных учреждений / А.Г. Мордкович, Л.А. Алек-

сандрова, Т.Н. Мишустина, Е.Е. Тульчинская, П.В. Семенов. – 12-е изд., испр. – М.: Мнемозина, 2010. – 223 с.

36. Мордкович, А.Г. Алгебра. 8 класс [Текст]: методическое пособие для учителя / А.Г. Мордкович. – М.: Мнемозина, 2010. – 77 с.

37. Мордкович, А.Г. Алгебра. 9 класс [Текст]: методическое пособие для учителя / А.Г. Мордкович, П.В. Семенов. – М.: Мнемозина, 2010. – 72 с.

38. Муравин, Г.К. Алгебра. 7 класс [Текст]: учеб. для общеобразоват. учреждений / Г.К. Муравин, К.С. Муравин, О.В. Муравина. – 9-е изд., стереотип. – М.: Дрофа, 2013. – 285 с.

39. Муравин, Г.К. Алгебра. 8 класс [Текст]: учеб. для общеобразоват. учреждений / Г.К. Муравин, К.С. Муравин, О.В. Муравина. – 15-е изд., стереотип. – М.: Дрофа, 2013. – 254 с.

40. Муравин, Г.К. Алгебра. 9 класс [Текст]: учеб. для общеобразоват. учреждений / Г.К. Муравин, К.С. Муравин, О.В. Муравина. – 14-е изд., стереотип. – М.: Дрофа, 2014. – 315 с.

41. Песков, Т.А. Об изучении функций в средней школе/ Т.А. Песков // Математика в школе, 1951. – № 5. – С. 52 – 56.

42. Покровский, В.П. Методика обучения математике: функциональная содержательно-методическая линия [Текст]: учеб.-метод. Пособие/ В.П. Покровский – Владимир: Изд-во ВлГУ, 2014. – 143 с.

43. Примерные программы основного общего образования. Математика. – М: Просвещение, 2009 – 96 с. – (Стандарты второго поколения).

44. Репьев, В. В. Методика преподавания алгебры в восьмилетней школе [Текст]:пособие для учителей/В.В. Репьев - М.: Просвещение, 1967. - 276 с.

45. Саранцев, Г.И. Общая методика преподавания математики [Текст]: учебное пособие для студентов математических спец. педагогических вузов и университетов / Г.И. Саранцев. – Саранск: Тип. «Красный Октябрь», 1999. – 208 с.

46. Сивашинский, И.Х. Элементарные функции и графики. Теория и задачи с решениями/ И.Х. Сивашинский. – М.: Наука, 1965. – 243 с.

47. Стефанова, Н.Л. Методика и технология обучения математики. Курс лекций [Текст]: пособие для вузов/ Н.Л. Стефанова, Н.С. Подходова, В.В. Орлов и др. – М.: Дрофа, 2005. – 416 с.

48. Суворова, С.Б. Алгебра. Методические рекомендации 8 класс [Текст]: учебное пособие для общеобразовательных организаций/ С.Б. Суворова, Е.А. Бунимович, Л.В. Кузнецова. – М.: Просвещение, 2015. - 244 с.

49. Суворова, С.Б. Методические указания к теме «Квадратичная функция»/ С.Б. Суворова, А.Н. Тернопол // Математика в школе. – 2002. - № 9. – С. 12-28.

50. Федеральный государственный образовательный стандарт основного общего образования: Приказ Мин. образования и науки РФ от 17.12.2010 г. №1897. [Электронный ресурс]. – Режим доступа: http://минобрнауки.рф/документы/938. – Последнее обновление 07.02.2017.

51. Федеральный институт педагогических измерений. [Электронный ресурс]. – Режим доступа: http://fipi.ru/. – Последнее обновление 12. 03. 2017.

52. Холодулина, С.Ю. Система задач на формирование понятия линейной функции в школьном курсе математики/ С.Ю. Холодулина// Математика и математическое образование: сборник трудов VIII Международной научной конференции «Математика. Образование. Культура», 26-29 апреля 2017 года, Россия, г. Тольятти/ под общ. ред. Р.А. Утеевой – Тольятти: Изд-во ТГУ, 2017. – с. 457 – 460.

53. Цукарь, А.Я. Изучение функций в VII классе с помощью средств образного характера / А.Я. Цукарь // Математика в школе, 2000. - № 14. – С. 20-27.

54. Ященко, И.В. ОГЭ 2017. Математика 9 класс. 3 модуля. Основной государственный экзамен. 30 вариантов типовых тестовых заданий /

И.Р. Высоцкий, Л.О. Рослова, Л.В. Кузнецова и др.; под ред. И.В. Ященко. – М.: Издательство «Экзамен», МЦНМО, 2017. – 167 с.

55. Denbel, D.G. Functions in the Secondary School Mathematics Curriculum/ D.G. Denbel // Journal of Education and Practice, 2015. - № 1. – P. 77 – 81.

56. Hawkes, H.E. First course in algebra/ H.E. Hawkes, W.A. Luby, F.C. Touton. - Boston: Ginn and company, 1910. – 334 p.

57. Hawkes, H.E. Second course in algebra/ H.E. Hawkes, W.A. Luby, F.C. Touton. - Boston: Ginn and company, 1911. – 263 p.

58. Kleiner, I. Evolution of the Function Concept: A Brief Survey/ I. Kleiner// The College Mathematics Journal, 1989. - № 4. – P. 282 – 300.

59. Sierpinska, A. On understanding the notion function/ A. Sierpinska// The concept of function: Aspects of epistemology and pedagogy, 1992. - P. 25 – 58.

Приложение 1

Ответы и указания к решению задач из п. 3.2. «Анализ задачного материала»

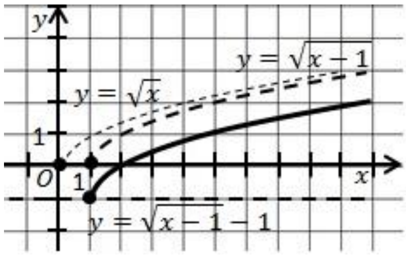


Рис. 1

1. Ответ: а), б) нет корней.

2. Ответ: а) $-2; 2$; б) $1; -1$; в) $2; 4$; г) $1; 2$.

3. Ответ: а) $x < 0, 0 < x < 1$; б) $x \geq 1$.

4. Ответ: $C > D$.

5. Ответ: а) -2 и 2; б), в) -4, $y_{\text{наиб}}$ не существует; г) -4 и 1.

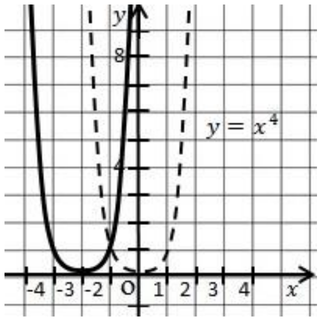


Рис. 2

6. Ответ: а) -4 и 5; б) -2744 и 0.

7. График функции представлен на Рис. 1.

8. Указание: воспользоваться методом выделения полного квадрата.

9. Графики изображены на Рис. 2 и Рис. 3.

10. Ответ: 1) 25; 50; 21; 24; 2) x^4; $(x^2-2)^2$; $x^4 - 2$.

11. Ответ: $f\ -x-1\ = -x^2 - 4x - 7$.

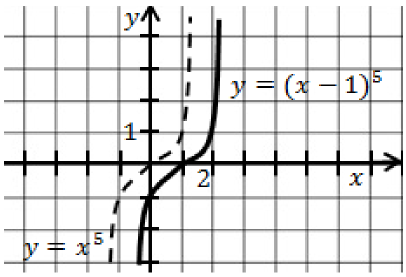


Рис. 3

12. Указание: воспользоваться свойствами степеней с натуральным показателем.

13. Ответ: а) 25; б) 23; в) -5; г) 25.

14. Ответ: а) $-0{,}5$; 0; $-\sqrt{2}$; б) 4; 0; -4.

15. График функции представлен на Рис. 4.

16. Ответ: а) $[-3; 2]$; б) $y_{\text{наим}} = 0$, $y_{\text{наиб}} = 4$; в) функция возрастает на $-3; -1\ \cup [0; 2]$, убывает на $(-1; 0]$; г) точка разрыва $x = -1$.

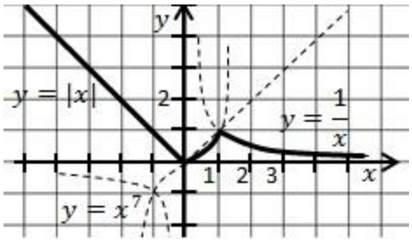


Рис. 4

17. График функции представлен на Рис. 5.

18. Ответ: а) x —любое; б) $x \neq 7$; в) $x \neq -3$; г) x —любое.

19. Ответ: 3; 0; -1; 24; 63.

20. Ответ: 1) $4; 1$; 2) $-3; 14$.

21. Указание: построить график функции по двум точкам.

22. Ответ: $f\ \ x\ \ > 0$ при $x < 0$; $f\ \ x\ \ < 0$ при $x > 0$.

23. Указание: для построения графика функции $y = -\frac{1}{4}x^2$ нужно симметрично относительно оси Ox отобразить график функции $y = \frac{1}{4}x^2$.

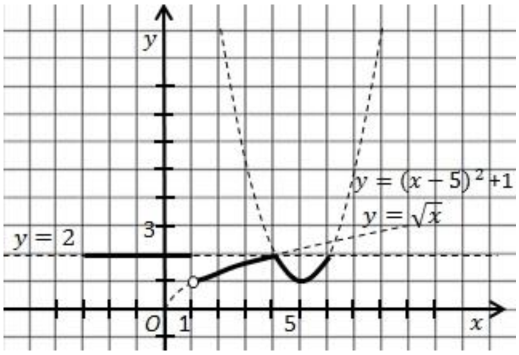


Рис. 5

24. Ответ: а) $0; -2; 2$; б) $[-2; 3]$; в) 3; г) -2.

25. Ответ: 1) $\ -1; 0\ \ ,\ \ 3; 0\ \ ,\ \ 0; -3\ \ $; 2) $y_{\text{наиб}}$ нет, $y_{\text{наим}} = -4$; 3) $x < -1$ и $x > 3$; 4) убывает: $(-\infty; 1]$, возрастает: $[1; +\infty)$.

26. Ответ: а) 4 ч пешеход и 2 ч велосипедист; б) пешеход: 20 км, велосипедист: 30 км; в) пешеход: 5 км/ч, велосипедист: 15 км/ч; г) в 3 раза.

27. Ответ: а) -6 °C, 0 °C, 1 °C.

28. График функции представлен на Рис. 6.

29. График функции представлен на Рис. 7.

30. График функции представлен на Рис. 8.

31. Ответ: 1) $(6; 7)$; 2) $(4; 2)$.

32. Ответ: $-1 < x < 7$.

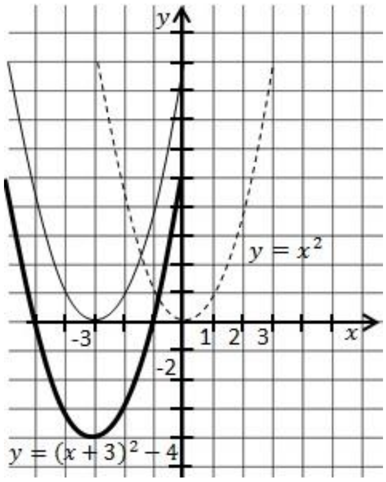


Рис. 8

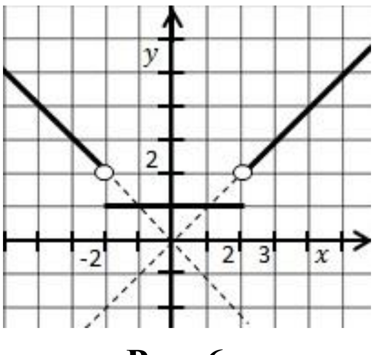


Рис. 6

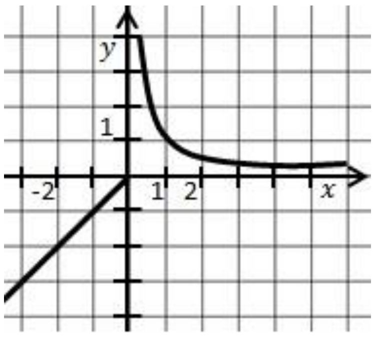


Рис. 7

Приложение 2

Типы задач по теме «Функции» в учебниках алгебры 7 класса Ю.Н. Макарычева, Г.К. Муравина и О.В. Муравиной

Таблица 1

Типы задач, 7 класс

Авторы / Типы задач	Ю.Н. Макарычев и др. (базовый уровень) [23]	Г.К. Муравин, О.В. Муравина и др. [38]	Ю.Н. Макарычев и др. (углубленный уровень) [26]
На понимание и использование функциональных понятий, терминов, функциональной символики	№258-260, 263, 267-275, 284-288, 298-299, 301, 303-306, 316-318, 320-324, 327-329, 348, 349, 351, 359, 360-362, 364, 369-372, 484, 485-490, 492	№123-128, 131, 132, 139, 140, 143, 147, 152-156, 159, 160, 163-165, 167, 171, 172, 174-176, 181, 182, 183, 524-530	№979-998, 1001-1003, 1019, 1020, 1025, 1026, 1036, 1039, 1041, 1044-1047, 1049, 1050, 1059, 1063, 1064, 1068-1072, 1082, 1083-1094, 1101, 1107, 1110, 1111, 1112, 1113, 1116, 1117, 1123, 1127, 1134-1139, 1143, 1147, 1149, 1152, 1154-1157
На построение графиков элементарных функций	№283, 300, 302, 319, 321, 325, 326, 357, 365, 368, 491	№137, 148-151, 158, 168, 169, 170, 173, 531, 532	№1011, 1012, 1015-1017, 1042, 1043, 1051, 1052, 1055, 1056, 1061, 1065-1067, 1073, 1075, 1081, 1144, 1148, 1158
На описание свойств функций на основе изучения поведения их графиков	-	-	№1013, 1014, 1060
На понимание функции как важнейшей математической модели для описания процессов окружающего мира	№261, 264, 276-279, 289-293, 297, 307-309, 313-315, 330-335, 350, 352, 355, 356, 358, 363, 366	№122, 129, 130, 133-136, 138, 141, 156, 161, 162, 166, 177-180, 513-523	№999, 1000, 1018, 1021-1024, 1040, 1053, 1054, 1057, 1058, 1076, 1102, 1118, 1146, 1150, 1151
На построение более сложных функций на основе графиков изученных функций	№341, 342 – в пункте для дополнительного изучения	-	№1048, 1074, 1100, 1142, 1153, 1160, 1161, 1177, 1399
На использование функциональных представлений и свойств функций для решения уравнений, неравенств и т.д.	№493-496, 566, 652, 1060-1064, 1128-1136, 1162	№195-199, 534, 535	№1106, 1108, 1109, 1121, 1122, 1125, 1126, 1178-1184, 1235, 1236

Приложение 3

Типы задач по теме «Функции» в учебниках алгебры 8 класса Г.В. Дорофеева, Ю.Н. Макарычева, Г.К. Муравина и О.В. Муравиной

Таблица 2

Типы задач, 8 класс

Авторы / Типы заданий	Г.В. Дорофеев и др. [14]	Ю.Н. Макарычев и др. (базовый уровень) [24]	Г. К. Муравин и др. [39]	Ю.Н. Макарычев (углубленный уровень) [27]
На понимание и использование функциональных понятий, терминов, функциональной символики	№740-755, 757, 758, 764-770, 774, 775, 779-781, 785-788, 790, 792, 793, 796, 816, 818, 820, 822, 823-825, 842-847, 851, 852	№179-184, 190, 192, 13, 253-256, 258, 260-262, 355, 356-361, 1062-1064	№142, 145, 146, 213-215, 217, 219, 224, 225, 131-133	№487-495, 497, 1184-1186, 1188, 1189, 1191, 1193, 1206, 1207, 1217, 1229, 1234, 1236, 1247, 1249, 1260-1262, 1264, 1268, 1269
На построение графиков элементарных функций	№762, 763, 771, 772, 782, 794, 795, 797, 812-815, 817, 819, 848, 849, 853	№257, 259, 335, 485, 1067, 1068, 1069	№144, 149, 150	№496, 764, 1192, 1230
На описание свойств функций на основе изучения поведения их графиков	№776-778, 783, 784, 808	-	-	№1212, 1214, 1216, 1244-1246
На понимание функции как важнейшей математической модели для описания процессов окружающего мира	№726-736, 737-739, 759-761, 791, 798-802, 804-806, 810, 811, 821, 836-840, 841, 850	№189, 191, 308, 352-354	№148	№1253
На построение более сложных функций на основе графиков изученных функций	№789, 803, 807, 809, 827	№1065, 1070, 1071 – для дополнительного изучения		№1197-1200, 1208-1216, 1232, 1233, 1239, 1254, 1259, 1263
На использование функциональных представлений и свойств функций для решения уравнений, неравенств и т.д.	№643, 648, 655, 826	№186-188, 362, 363, 475	№216, 220, 221-223	№446, 447, 1009, 1201, 1218, 1219, 1220, 1228, 1235, 1237, 1238, 1266

Приложение 4

Типы задач по теме «Функции» в учебниках алгебры 9 класса Г.В. Дорофеева, Ю.Н. Макарычева, Г.К. Муравина и О.В. Муравиной

Таблица 3

Типы задач, 9 класс

Авторы / Типы заданий	Г.В. Дорофеев и др. [15]	Ю.Н. Макарычев и др. (базовый уровень) [25]	Г.К. Муравин и др. [40]	Ю.Н. Макарычев и др. (углубленный уровень) [28]
На понимание и использование функциональных понятий, терминов, функциональной символики	№195-198, 202-208, 219, 221, 224, 234, 235, 240, 242, 244, 245, 247, 249, 252, 254-257, 263, 264, 268-270, 280-284, 333,	№1-11, 14, 18, 20, 22-24, 38-45, 48, 51, 96, 97, 100, 116, 121, 136-139, 142-144, 146, 148, 151-153, 180, 182, 185, 1018, 1023-1026	№179-187, 192, 193, 196-204, 215--217, 261-264, 269--276, 280-283, 301, 303, 542-544, 549, 550, 552, 559-561	№1-3, 5-10, 17-27, 34-50, 55, 57, 58, 59-67, 71, 73, 76, 77, 79, 80, 84, 88, 91-94, 96-99, 113, 114, 119-128, 137-139, 149-156, 160-163, 166, 263, 833-841, 843-845, 850-855, 860, 861, 1085-1088, 1093, 1096
На построение графиков элементарных функций	№199, 200, 209, 210, 211, 212, 214-218, 220, 222, 230, 232, 265, 327-329, 376, 377	№17, 25, 46, 47, 50, 98, 123, 125-127, 145, 181, 183, 1021, 1027, 1028	№260, 268, 304, 546, 551	№69, 70, 74, 78, 89-90, 95, 842, 856, 859, 862, 1111
На описание свойств функций на основе изучения поведения их графиков	№238, 250, 266, 267, 271, 274	№15, 19, 32, 35-37, 49, 122-124, 184, 1019, 1020, 1022	№176, 177, 191, 195	№11, 56, 755, 136
На понимание функции как важнейшей математической модели для описания процессов окружающего мира	№201, 213, 227, 276-279, 285-287	№12, 13, 16, 21, 26, 33, 101, 102, 120, 154	№188-190	№72, 100
На построение более сложных функций на основе графиков изученных функций	№223, 228, 229, 233, 236, 237, 239, 243, 246, 248, 250, 253, 258-261, 275, 330-333	№27, 28, 90-95, 106, 107, 108-113, 1035	№178, 181, 194, 209, 283, 284, 546, 548, 558	№4, 12, 13, 82, 83, 107-112, 115, 116-118, 134, 135, 140, 141, 143, 164, 172, 175, 1095
На использование функциональных представлений и свойств функций для решения уравнений и т.д.	№241, 289-301, 306, 307, 316, 393, 442-444, 453-456, 489-498	№140, 141, 147, 149, 150, 155, 188, 189, 304-313, 315-320, 415-423, 483-489	№211, 214, 238, 239, 241, 265, 266, 277, 278, 285, 305-309	№28, 29, 68, 101, 102, 157-159, 232, 298, 439, 531, 553-563, 857-858, 937, 1102, 1089

Приложение 5

Ответы и указания к решению систем задач по теме «Функции» в курсе алгебры основной школы

Функции и способы их задания

1. Ответ: $t = 600/v$; 15 ч; 10 ч; 7,5 ч; 120 км/ч; 100 км/ч; 75 км/ч.

2. Ответ: 1. а) $v = 15/t$; б) $V = 15h$; в) $n = 21 + r$; 2. а) $t > 0$; б) $h > 0$; в) $0 \leq r \leq 7$.

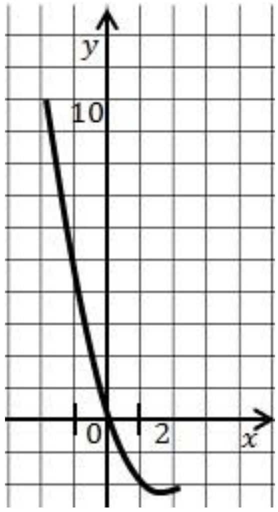


Рис. 9

3. Ответ: а) да; б) нет.

4. Ответ: а) да; б), в) нет.

5. Ответ: зависимость; единственное.

6. Ответ: а) -6; -3; 1; 4; б) 4; 2; 1,5; -2.

7. График функции представлен на Рис. 9.

8. Ответ: а), б) $x \in (-\infty; +\infty)$; в) $x \neq 0$; г) $x \neq \frac{1}{4}$; д) $x \neq 0$ и $x \neq 3$.

9. Ответ: а) 25; 50; 21; 24; б) $4x^2 + 20x + 25$; $4x^2 + 5$; $2x^2 + 20x + 50$; в) x^4; $x^4 - 2x^2 + 4$; $x^4 - 2$; $(x-2)^4$.

10. Ответ: точка $B\ \ -1; 3$ принадлежит, остальные – нет; точка $E(0; 1)$ принадлежит, а точка $F(1; 5)$ не принадлежит.

11. Ответ: $y = 10x + 5$.

12. Ответ: а) да; б) нет.

13. График функции представлен на Рис. 10.

Линейная функция и ее график

1. Ответ: $V = 0{,}15t + 2$; 5м^3; $5{,}6\text{м}^3$; $6{,}5\text{м}^3$; $7{,}25\text{м}^3$; 10 мин; 28 мин.

2. Указание: сначала нужно упростить выражение. Ответ: -17.

3. Ответ: $y = kx + b, k$ и b – действительные числа.

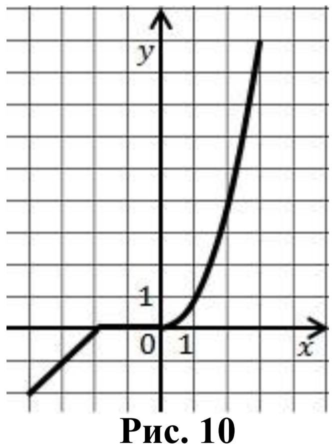


Рис. 10

4. Ответ: а – в), е) – линейные функции.

5. Ответ: 1. $y = kx + b$; 2. Линейной.

6. Ответ: а) -2; 98; -102; 28;-242; б) $1{,}02$; $0{,}01$; $0{,}02$; $-0{,}03$.

7. Указание: графиками данных функций являются прямые.

8. Ответ: $y = -3x + 2$; $y = 2\frac{1}{2}$; $y = 2x$.

9. Ответ: а) -5 и 7; б) -3 и 5; в)-5 и 1; г) -3 и 7.

10. Ответ: а) $(0; 3)$, $(3{,}5; 0)$; б) 6; -6; в) $2{,}3$; $-10{,}5$.

11. Ответ: а) параллельны; б), г) пересекаются; в) совпадают.

12. Ответ: а) $y = 3x$, $y = \frac{1}{3}x$, $y = \frac{3}{4}x$, $y = 12x$; б) пересекает ось координат в точке с положительной ординатой: $y = x + 12$; пересекает ось координат в точке с отрицательной ординатой: $y = -2x - 5$; в) $y = 2$, $y = -5$; г) $y = 3x$, $y = \frac{1}{3}x$, $y = \frac{3}{4}x$, $y = 12x$, $y = x + 12$; д) $y = -2x - 5$.

13. Ответ: а) $k > 0, m > 0$; б) $k < 0, m > 0$; в) $k > 0, m < 0$; г) $k < 0, m < 0$.

14. Ответ: график функции проходит через точки $A(100; 113)$, $B(-15; -25)$, $D(300; 353)$.

15. Указание: построить график функции по точкам $A(5; 6)$ и $B(0; -4)$.

16. Ответ: а) $k = 0{,}75$; $b = -5$; б) $k = 0{,}75$; $b = 6$.

17. Ответ: $b = -2/3$.

18. Ответ: а) $y = 2x$; б) $y = 2$; в) $y = x + 1$.

19. Ответ: а) $(2; 7)$; б) $(-\frac{1}{3}; -26)$; в) $(5; -2)$; г) $(-\frac{3}{7}; 21)$.

20. Ответ: а) $x > -2$; б) $x < 0$; в) $x < -2$; г) $x > -1$.

21. Ответ: а) $(2; 2)$; б) $(3; -9)$; в) $(1; 5)$; г) $(4; -1)$.

Квадратичная функция и ее график

1. Ответ: $y = 6x^2$; а) 4,86 см^2; 13,5; 19,44; б) $\overline{\frac{71}{6}}$; $\overline{\frac{5}{3}}$; $\overline{\frac{7}{3}}$.

2. Ответ: квадратичные функции под номерами: 1, 2, 4, 5, 9.

3. Ответ: $y = ax^2 + bx + c$.

4. Ответ: а) $-2x^2 - x - 4$; б) $-2x^2 - 19x - 49$; в) $-2x^4 - x^2 - 4$; г) $-24x^2 + 6x - 12$.

5. График функции представлен на Рис. 11.

6. Указание: воспользоваться преобразованиями графиков функций.

7. Указание: применить преобразования графиков функций.

8. Ответ: а) $y = (x+5)^2$ - 3; б) $y = 2(x-1)^2 + 6$; в) $y = -5(x+4)^2 + 4$.

9. Указание: выделить полный квадрат, а затем воспользоваться преобразованиями графиков функций.

10. Ответ: 1) $(2; -3)$; 2) $(-3; 14)$; 3) $(2{,}5; -12{,}5)$; 4) $(0; -2)$.

11. Указание: для построения графиков функций следует сначала найти координаты вершины параболы, ось симметрии, а затем, отметить еще пару симметричных точек, принадлежащих параболе.

12. Ответ: а) 3; б) 4, $y_{\text{наим}}$ не существует; в) 3 и 4; г) 3, $y_{\text{наим}}$ не существует.

13. Указание: приравнять заданные функции, получится квадратное уравнение. Так как графики данных функций имеют только одну общую точку ⇒ дискриминант $D = 0$. Ответ: $-1; 13$.

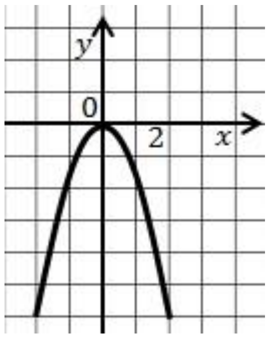


Рис. 11

14. Ответ: а), в) два; б), г) три.

15. Ответ: а) $x \approx 5{,}7$; $y \approx 2{,}1$; б) $x \approx -5{,}2$; $y \approx 1{,}2$.

16. Ответ: а) $x \in (-2; 2)$; б) $x \in (-\infty; -5) \cup (-2; +\infty)$; в) $x \in (-1; 7)$; г) $x \in (-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$.