МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Тольяттинский государственный университет»

Институт математики, физики и информационных технологий

Кафедра «Алгебра и геометрия»

Направление подготовки 44.03.05 «Педагогическое образование»

Направленность (профиль) «Математика и информатика»

БАКАЛАВРСКАЯ РАБОТА

на тему **«МЕТОДИКА ОБУЧЕНИЯ ТЕМЕ «НЕРАВЕНСТВА» В КУРСЕ АЛГЕБРЫ ОСНОВНОЙ ШКОЛЫ»**

Студент	А.О. Спиченкова	____________________
Руководитель	к.п.н., доцент Н.А. Демченкова	____________________
Консультант	к.п.н., А.В. Кириллова	____________________

Допустить к защите

Заведующий кафедрой д.п.н., профессор Р.А. Утеева ______________

«____»__________2017 г.

Тольятти 2017

АННОТАЦИЯ

Целью бакалаврской работы является выявления методических особенностей обучения теме «Неравенства» в курсе алгебры основной школы.

Так как неравенства в школьной программе по математике раскрывают многочисленные связи со смежными дисциплинами, то при изучении неравенств есть возможность овладеть широким спектром методов решения математических задач, освоить способы моделирования, выявить проблемы прикладных исследований.

Бакалаврская работа состоит из введения, двух глав, заключения и списка литературы.

Глава I посвящена основам теории обучения теме «Неравенства» в курсе алгебры основной школы. В данной главе представлен логико-математический анализ содержания темы неравенства, рассмотрено методическое планирование по данной теме, анализ учебников разных авторов 8 – 9 классов, а так же описан опыт работы учителей по данной теме.

В *Главе II* рассмотрена методика обучения различным видам неравенств в курсе алгебры основной школы. Рассмотрены методы решения линейных неравенств, квадратных и рациональных неравенств, иррациональных неравенств и неравенств, содержащих переменную под знаком модуля.

Список литературы содержит 40 наименований.

ABSTRACT

The aim of the bachelor's work is to identify the methodological specifics of teaching the topic "Inequalities" in the course of the algebra of the basic general education school.

In works devoted to the problem of the formation of mathematical concepts in school, it is considered primarily one-sided, and therefore additional methodological developments are needed that will take into account the specifics of the mathematical exercises that form the corresponding concepts in the school course of algebra, while maintaining a sufficiently high general level of mathematical education.

Bachelor's work consists of an introduction, two chapters, a conclusion and references.

Chapter I is devoted to the fundamentals of the theory of teaching the subject "Inequalities" in the course of the algebra of the basic school. This chapter presents a logical and mathematical analysis of the content of the topic of inequality, discusses the methodological planning for a given topic, contains an analysis of textbooks by different authors for grades 8-9, and also describes the experience of teachers on this topic.

In the second chapter, the method of teaching various types of inequalities in the course of algebra of the basic school is considered. Methods for solving linear inequalities, square and rational inequalities, irrational inequalities and inequalities containing a variable under the modulus sign are considered.

The references contain 40 items.

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Актуальность исследования. Понятия «больше» и «меньше» как и понятие «равенство» возникли в связи с необходимостью сравнивать различные величины и, конечно, со счётом предметов. Уже древние греки пользовались понятиями неравенства. Границы числа π указал Архимед. Ряд неравенств приводит Евклид в своём знаменитом трактате «Начала». Он доказывает, что среднее геометрическое двух чисел не больше их среднего арифметического. Современные знаки неравенства возникли только в VII-VIII вв. Знаки «<» и «>» ввел английский математик Т. Гарриот, а знаки «$\leq$» и «$\geq$» французский математик П. Буг [13].

Так как неравенства в школьной программе по математике раскрывают многочисленные связи со смежными дисциплинами, то при изучении неравенств есть возможность овладеть широким спектром методов решения математических задач, освоить способы моделирования, выявить проблемы прикладных исследований.

Изучение линии неравенств плотно связано с изучением функциональной линии, так как исследование функции элементарными средствами требует навык решать их. Основываясь на свойства функции имеется возможность решать неравенства графически, исследовать решение в зависимости от параметра и т. д. Метод интервалов представляет собой частный случай графического метода [29, с. 274-275].

В федеральном государственном образовательном стандарте общего образования [31] сказано, что предметные результаты должны отражать овладение приёмами решения неравенств и систем неравенств.

Представим содержание примерной программы основного общего образования по учебным предметам (математика) [26].

Ученик имеет возможность научиться в 7-9 классах, чтобы обеспечить возможность успешно продолжить образование *на базовом уровне:*

- действовать с помощью понятий: числовое неравенство, неравенство, решение неравенства;

- проверять правильность числовых неравенств;

- решать линейные неравенства и простые неравенства, сводящиеся к ним;

- решать системы простых линейных неравенств;

- проверять, является ли конкретное число корнем неравенства;

- представлять решения систем неравенств и самих неравенств на координатной прямой [26].

Выпускник получает возможность научиться в 7-9 классах для благополучного продолжения обучения *на углубленном уровне:*

- применять различные методы решения неравенств и систем неравенств, иметь навык выбирать метод решения и аргументировать свой выбор;

- применять метод интервалов для решения разных видов неравенств, в том числе дробно-рациональных и неравенств, включающих в себя иррациональные выражения;

- находить корни алгебраических неравенств с параметрами и их систем графическим и алгебраическим методами;

- применять разные методы доказательства различных неравенств;

- изображать множества, задаваемые неравенствами и их системами, на плоскости.

В ежедневной жизни и при изучении иных предметов:

- формулировать и решать неравенства, их системы в решении задач других академических дисциплин;

- давать оценку правдивости результатов, которые получили при нахождении корней разных видов неравенств и их систем в решении задач других академических дисциплин;

- составлять и находить корни неравенств, содержащих параметр, при решении задач других предметов;

- составлять неравенство или их систему, описывающие реальную ситуацию или прикладную задачу, интерпретировать полученные результаты.

Объектом исследования является процесс обучение алгебре в курсе основной школы.

Предметом исследования являются неравенства в курсе алгебры основной школы.

Цель исследования – выявление методических особенностей обучения теме «Неравенства»; представление методического материала по теме исследования.

Основные задачи исследования:

1. Сформулировать определение логико-математического анализа темы «Неравенства», провести логико–математический анализ определений, понятий и утверждений, алгоритмов и правил данной темы.

2. Составить методическое планирование по теме «Неравенства».

3. Провести анализ школьных учебников по данной теме.

4. Рассмотреть методику обучения линейным неравенствам в основной школе.

5. Представить методику обучения квадратным и рациональным неравенствам.

6. Описать методику обучения иррациональным неравенствам и неравенствам с модулем в курсе алгебры 9 класса.

7. Проанализировать опыт работы учителей математики по теме исследования.

Для решения поставленных задач были использованы следующие методы исследования: анализ методической, психолого-педагогической литературы по математике, школьных программ, учебников и учебных пособий; изучение опыта работы учителей математики по данной теме исследования.

Теоретическая значимость бакалаврской работы заключается в представлении теоретического материала по теме «Неравенства» в курсе алгебры основной школы.

Практическая значимость результатов бакалаврской работы состоит в раскрытии методических особенностей изучения неравенств в курсе алгебры основной школы и разработке методических материалов для работы учителей математики и студентов педагогических направлений подготовки в процессе педагогической практики.

На защиту выносится:

- методические особенности обучения теме «Неравенства».

- методические материалы по данной теме.

Бакалаврская работа состоит из введения, двух глав, заключения и списка литературы.

Во **введении** сформулированы основные характеристики исследования: актуальность, проблема, объект, предмет, цель, задачи, и методы исследования.

Глава I посвящена основам теории обучения теме «Неравенства» в курсе алгебры основной школы. В данной главе представлен логико-математический анализ содержания темы неравенства, рассмотрено методическое планирование по данной теме, анализ учебников разных авторов 8 – 9 классов, а так же описан опыт работы учителей по данной теме.

В **Главе II** рассмотрена методика обучения различным видам неравенств в курсе алгебры основной школы. Рассмотрены методы решения линейных неравенств, квадратных и рациональных неравенств, иррациональных неравенств и неравенств, содержащих переменную под знаком модуля.

В **заключении** сформулированы основные результаты и выводы проведённого исследования.

Список литературы содержит 40 наименований.

ГЛАВА I. МЕТОДИЧЕСКИЕ ОСОБЕННОСТИ ОБУЧЕНИЯ ТЕМЕ «НЕРАВЕНСТВА» В КУРСЕ АЛГЕБРЫ ОСНОВНОЙ ШКОЛЫ

§ 1. Логико-математический анализ темы «Неравенства»

1.1. Понятие логико-математического анализа содержания темы

В пособии под редакцией В.В. Орлова [25, с. 85-86] говорится, что логико-математический анализ темы предполагает:

- знание целей обучения содержанию темы и основных результатов обучения;

- знание того, каким объектам и понятиям даются определения, знание формулировок определений;

- знание того, какие математические утверждения, несхожие с определениями, есть в теме; установление типа этих предложений – теоремы, законы, формулы и правила; знание того, как они вводятся (раскрываются) в учебнике – на примерах, доказываются логически, иллюстрируются рисунками и т.д.; знание их содержания;

- знание функций геометрического и алгебраического материала в учебном пособии и особенности использования данного материала в этой теме;

- умение решать основные (типовые) задачи темы; знание методов решения, используемых в школе; знание рекомендаций к оформлению решения задач, предъявляемых школьной программой.

Е.И. Лященко [11] утверждает, что каждый раздел и пункт учебника можно рассматривать как новое, уникальное содержание и исследование выяснять, о чем же идёт речь в той или иной порции полученного материала. Такого рода подход вероятен, он существует в практике среднего учебного заведения, но всё же, на его базе сложно сделать обобщение содержания и формирование внутрипредметных связей. Что доводится зачастую видеть в школе [11, с. 34].

Есть смысл выделить два значимых блока в учебном материале: теоретический материал и разные математические задачи. Теоретический материал показан понятиями и определениями этих понятий: утверждениями (теоремами, признаками, свойствами и т.п.), алгоритмами (формулами, правилами и др.), разными согласно степени общности и предметному содержанию математическими способами (аксиоматичным – прямое и косвенное доказательство, векторным методом, координатным, методом неравенств и др.) [11, с. 35].

Также допускается разделить на две группы математические задачи согласно методу их применения в учебном процессе. Это те математические задачи, которые применяют для формирования понятий, непосредственного применения, прямого использования изученных теорем, закрепления алгоритмов (и в данном случае их будем именовать упражнениями), выявления и прямого использования математических методов. Задачи с этими функциями не требуют чаще всего особой активности для поиска их решений, решение, как правило, находится с помощью одного - двух шагов, но он важен для изображения некоторых свойства концепции или особых обстоятельств применения алгоритма, утверждения или метода. Такого типа задачи, как правило, именуют задачами как средством обучения математике. Таких задач в настоящее время очень много в школьных учебниках [11, с. 35].

Эта интерпретация учебного материала позволяет нам различать определения понятий или объектов в любом разделе текста учебника, анализировать логическую структуру этих объектов, а так же генезис образования, устанавливать логические и, в случае если допустимо, математические различия или общности, что способствует развитию эффективного метода обучения, как по времени, так и по содержанию, обучая математике в целом, а также ее отдельных тем.

Логико-математический анализ не подразумевает формулировку целей изучения конкретного компонента контента, поскольку это возможно сделать исключительно после выявления целей темы, которую изучили. Данный анализ не предполагает также уточнения контрольных действий. Конечно, отбирая материал для обучения и структурируя его в определенную конкретную последовательность, авторы учебников, выполнили эту работу с определённой общей социальной и познавательной целью. Чтобы провести логико-математический анализ материала обучения, достаточно знать и понимать эти цели. Логико-математический анализ учебного материала подобен чтению школьного учебника внимательными и компетентными глазами учителя. Так, изучая учебник для конкретного класса, учитель обязан ответить себе на такие вопросы: какие вводятся новые понятия, объекты? Даны ли определения? К какой структуре определений может быть отнесено это определение? Определены ли ранее определения с такой структурой или же мы работаем с новой структурой? Какие познавательные и учебные мероприятия могут быть выполнены, чтобы выявить структуру определения и его применение? Какой обширный материал возможен для раскрытия всех операций и действий [11, с. 36]?

1.2. Логико - математический анализ определений, понятий, объектов

Чтобы понять суть операции определения любых математических объектов, важно понять структуру построенной аксиоматически теории. Если учебный предмет сконструирован аксиоматически (или очень близок к аксиоматическому методу), то выбираются главные объекты и их основные свойства или обнаруживаются связи между ними в системе аксиом.

Затем, исходя из свойств важных объектов любого предмета, охарактеризованных косвенно, определяются следующие объекты предмета.

Процедуры, открывающие процесс определения объекта, будут следующими: выбирается ближний родовой объект, затем на него накладываются ограничения и видовые отличия (характеристики). Основываясь на видовые отличия (характеристики), появляется новый объект, имеющий меньший объем, чем родовой, поскольку он имеет больше свойств. Этому объекту, с большим количеством свойств и меньшим объемом, назначается новое имя (термин) [11, с. 37].

Конъюнкция – это сложное высказывание с соединительным союзом «и» (соединением нескольких элементарных суждений).

Дизъюнкция – это сложное высказывание с разделительным союзом или.

Импликация – это сложное высказывание с относительным союзом «если..., то».

Для примера рассмотрим определения линейного и квадратного неравенств.

Линейное неравенство – неравенство вида $ax+b*0$, где вместо символа «*» ставится один из знаков «>», «<», «$\leq$», «$\geq$»; a,b- любые числа, x-переменная.

Термин - линейное неравенство, родовое понятие - неравенство.

Видовые отличия: неравенство вида $ax+b*0$.

Одно высказывание вытекает из другого, значит имеем импликативное определение.

А.Г. Мордкович дает следующее определение:

Квадратное неравенство – неравенство вида $ax^2+bx+c>0$, где вместо символа «>» может быть один из знаков $<, \leq, \geq$; где $a\neq 0$ [19].

Термин - квадратное неравенство,

Род - неравенство.

Видовые отличия: неравенство вида $ax^2+bx+c>0$, где вместо символа $>$ может быть один из знаков $<, \leq, \geq$; где $a\neq 0$.

Видовые отличия соединены союзом «и», значит имеем конъюнктивное определение.

1.3. Логико - математический анализ математических утверждений

Отталкиваясь в процессе обучения от педагогических целей, мы считаем, что целесообразно принять: то утверждение, истинность которого доказана - это теорема.

Логико-математический анализ структуры любого утверждения подразумевает:

- определение пояснительной части, условий и заключения высказывания;
- установление того факта, простое это утверждение, которое дано, или сложное [11, с. 47].

Для примера рассмотрим теорему из пособия А. Завайра [40, с. 99]:

Если $a < b$, то $a + c < b + c$, для всех $c \in \mathrm{R}$.

Условие: если $a < b$.

Заключение: $a + c < b + c$.

Разъяснительная часть: для всех $c \in \mathrm{R}$.

Теорема сформулирована в импликативной форме. Исходя из того, что в утверждении только одно условие и так же одно заключение, то утверждение является простым.

Рассмотрим ещё одну теорему из учебника Ю.М. Колягина [9]:

Если обе части верного неравенства умножить на одно и то же положительное число, то знак неравенства сохранится. Если обе части верного неравенства умножить на одно и то же отрицательное число, то в этом случае знак данного неравенства изменится на противоположный данному.

Условие: если обе части верного неравенства умножить на одно и то же положительное число.

Заключение: знак неравенства сохранится.

Разъяснительная часть: положительное число.

Теорема сформулирована в импликативной форме. Исходя из того, что в утверждении только одно условие и так же одно заключение, то утверждение является простым.

Условие: если обе части верного неравенства умножить на одно и то же отрицательное число.

Заключение: знак данного неравенства изменится на противоположный.

Разъяснительная часть: отрицательное число.

Теорема сформулирована в импликативной форме. Исходя из того, что в утверждении только одно условие и так же одно заключение, то утверждение является простым.

1.4. Логико - математический анализ алгоритмов и правил школьного курса математики

В учебниках правила выражаются в виде формул и формулировок на обычном языке. Применение правил имеет такую же цель, что и алгоритмов: развитие единых способов решения класса аналогичных задач.

Любой алгоритм можно называть правилом. Однако, далеко не всякое правило мы можем назвать алгоритмом: в формулировке правила зачастую не выделяются четко все этапы — в этом случае оно не обладает свойством детерминированности.

С целью правильной организации работы учащихся по работе с алгоритмами математики школьного курса, учителю очень важно уметь правильно выполнять логико-математический анализ алгоритмов и правил.

Логический анализ алгоритмов и правил предполагает:

- проверку существования характерных свойств алгоритма для этого правила;

- выбор последовательности логических условий и операций в этом правиле;

- определение связи алгоритма (правила) с иными навыками.

Математический анализ алгоритмов (правил) заключается в установлении математической базы этого правила, т. е. тех основных математических предложений, которые разрешают построить такое правило (их, как правило, называют обосновывающими знаниями) [11, с. 59].

Для примера рассмотрим алгоритм решения квадратного неравенства из учебника 8 класса автора Мордковича А.Г. [18, с. 202]:

- найти корни квадратно трехчлена;

- отметить найденные корни на оси x и определить вверх или вниз направлены ветви параболы, служащей графиком функции $y = ax^2 + bx + c$; сделать набросок графика;

- используя полученную геометрическую модель, определим, на каких из полученных промежутков оси x ординаты этого графика положительны или отрицательны, в зависимости от задания; включим найденные промежутки в ответ;

- в словесно сформулированном правиле выделяются дискретные шаги, каждый из которых является операцией, которая ранее была сформирована у учащихся, и элементарной операцией. Поэтому вышеприведенное правило обладает свойствами элементарности шагов и дискретности.

Так же указана последовательность шагов, следовательно правило обладает свойством детерминированности.

Правило можно применять для решения любых квадратных неравенств, поэтому оно обладает свойством массовости. Нужно только учесть, что первый пункт выполняется в том случае, если неравенство еще не приведено к стандартному виду.

Правило обладает свойством результативности, так как выполняя его мы всегда найдем решение квадратного неравенства.

Вывод: правило имеет все характеристические свойства алгоритма, а следовательно его можно считать алгоритмом.

Для решения линейного неравенства будем использовать правила, которые приводятся в учебнике алгебры 8 кл. Макарычева Ю.Н. [14, с. 253-254]:

- из одной части неравенства можно перенести в другую часть слагаемое со знаком, противоположным данному;

- в какой-либо части неравенства или одновременно в обеих его частях можно выполнить тождественные преобразования, не меняющее области определения неравенства.

- обе части верного неравенства можно умножить или разделить на одно и то же положительное число, сохраняя при этом знак неравенства; обе части верного неравенства можно умножить или разделить на одно и то же отрицательное число, изменив знак неравенства на противоположный;

В словесно сформулированном правиле выделяются дискретные шаги, каждый из которых представлен в виде элементарной операции, ранее сформированной. Следовательно, приведенное данное правило обладает свойствами дискретности и элементарности шагов.

Так же указана последовательность шагов, следовательно, правило обладает свойством детерминированности.

Правило можно применять для решения любых неравенств, поэтому оно обладает свойством массовости.

Правило обладает свойством результативности, так как выполняя его мы всегда найдем решение линейного неравенства.

Вывод: данное правило обладает каждым характеристическим свойством алгоритма, поэтому его можно назвать алгоритмом.

Для решения дробно - рациональных неравенств рассмотрим алгоритм в пособии Талочкина П.Б. [30, с. 99-100]:

-перенести правую часть неравенства влево;

-определить ОДЗ;

-привести дроби к общему знаменателю и записать все в одну дробь;

-заменить дробно-рациональное неравенство равносильной ему системой и решить систему методом интервалов.

В словесно сформулированном правиле выделяются дискретные шаги, каждый из которых представлен в виде элементарной операции, ранее сформированной. Следовательно, приведенное данное правило обладает свойствами дискретности и элементарности шагов.

Поэтому приведенное правило обладает свойствами дискретности и элементарности шагов.

Так же указана последовательность шагов, следовательно правило обладает свойством детерминированности.

Правило можно применять для решения любых неравенств, поэтому оно обладает свойством массовости.

Правило обладает свойством результативности, так как выполняя его мы всегда найдем решение дробно-рационального неравенства.

Вывод: правило обладает всеми характеристическими свойствами алгоритма, поэтому его можно назвать алгоритмом.

При проведении логико-математического анализа определяются базовые знания и умения учащихся, необходимые для изучения нового материала. Так же фиксируется центральный теоретический материал темы с установлением взаимосвязей (Схема 1).

Базовые знания: знание правил сравнения натуральных чисел, обыкновенных и десятичных дробей, отрицательных чисел, иррациональных чисел; знание свойств при решении уравнений. Базовые умения: умение сравнивать натуральные числа, обыкновенные и десятичные дроби, отрицательные числа, иррациональные числа; умение применять свойства для решения уравнений.	Вводимые понятия. Понятия, суть которых раскрывается с помощью определения: линейные неравенства, равносильные неравенства, квадратные неравенства, рациональные неравенства, метод интервалов.

Вводимые свойства [23, с. 3-6, 25, с. 6]	Вводимые правила
Если $a<b, b<c$, то $a<c$	Правила сложения соответственных частей неравенств
Свойство умножения обеих частей неравенства на положительное число	Правила умножения соответственных частей неравенств
Свойство умножения обеих частей неравенства на отрицательное число	Правила работы с двойным неравенством
Свойство сложения обеих частей неравенства с одним и тем же числом	Правила сравнения разных чисел
Свойство деления обеих частей неравенства на одно и то же отрицательное число	Правила сравнения с нулем
Свойство возведения в степень обеих частей неравенства	Правила для решения линейных неравенств
	Правила для решения квадратных неравенств
	Правила для решения рациональных неравенств
	Правила для решения неравенств с модулем

Схема 1. Логико-математический анализ темы «Неравенства».

Таким образом, логико-математический анализ – это знание целей обучения содержания темы, основных результатов обучения; знание того, каким объектам и понятиям даются определения, знание формулировок определений; какие математические утверждения есть в теме. А так же определение вида этих утверждений; знание того, как они раскрываются в учебнике; знание функций геометрического и алгебраического материала в учебном пособии и принципов использования данного материала в этой теме.

§ 2. Методическое планирование темы «Неравенства»

Методическое планирование (Табл. 1) по учебнику А.Г. Мордковича 8 класс [18] выполнена на основе методической разработки Е.И. Лященко [11].

Формирование навыков учащихся в построении и реализации новых знаний (концепции, методы действий и т. д.): составление вспомогательного конспекта, создание алгоритма действий, выполнение практических задач, разработка способов выполнения домашних заданий, комментирование оценок.

Формирование устойчивой мотивации к проблемной деятельности.

Коммуникативные: продемонстрировать способность к сопереживанию, желание установить доверительные отношения и взаимопонимание.

Регулятивные: различать и понимать то, что уже было изучено и что еще предстоит изучить, осознавать качество и уровень ассимиляции;

Познавательные: независимо создавать алгоритмы деятельности в решении проблем творческого и поискового характера.

Таблица 1

Методическое планирование темы «Неравенства»

№ урока	**Тема урока**	**Цель урока**	**Распределение задач**		**Самостоятельные работы**	**Повторение**
			в классе	**дома**		
1	Свойства числовых неравенств	Научить использовать свойства неравенств при решении задач	Запись свойств с доказательством с. 196-198	31.12, 31.13, выучить свойства.	Применяют свойства под руководством учителя	№31.14, 31.15, 31.16
2		Рассмотреть примеры с использованием свойств	31.23-31.26	31.21, 31.22, 31.27	Применяют свойства под руководством учителя	31.1-31.5, 31.20
3		Рассмотреть примеры оценивания неравенств с использование	31.32, 31.34, 31.36, 31.37	31.31, 31.35	С-1 с целью контроля умения применять свойства	Устно свойства

		м свойств неравенств				
4		Организовать работу по решению заданий на док-во неравенств	с. 199-200 разобрать примеры 1,2 №31.41, 31.42, 31.44,31.46	31.43, 31.45, 31.47	Применяют свойства под руководством учителя	№31.40
5	Исследование функций на монотонность	Организовать работу для определения монотонности функции. Развитие математической индукции при получении результата	С.204-205, определения возрастания и убывания функции	№32.7, выучить правила	Применяют правила под руководством учителя	С.202, №32.3
6		Обеспечить выполнение учащимися базовых учебных действий	№32.11, 32.13	№32.12	С-2 с целью контроля умения применять свойства	Работа на карточках
7	Решение линейных неравенств	Организовать рефлексию и самооценку учениками собственной деятельности	С. 211-214, записать определения №33.4, 33.5, 33.8, 33.9	33.6, 33.7	Применяют правила под руководством учителя	Свойства числовых неравенств
8		Актуализировать знания, создать условия для	№33.10, 33.12, 33 14, 33.16, 33.18, 33.20	№33.15, 33.17, 33.19	Применяют правила под руководством учителя	Свойства числовых неравенств,

		повторения.				правило для решения линейных неравенств, определения
9		Организовать рефлексию и самооценку учениками собственной деятельности	№33.21, 33.23, 33.24, 33.30	№33.22, 33.29	Работа на карточках	Свойства числовых неравенств, правило для решения линейных неравенств, определения
10		Закрепить навыки решения по изученной теме	Задание на доске	33.31, 33.32	С-3 с целью контроля умения применять правила	33.25
11	Решение квадратных неравенств	Организовать рефлексию и самооценку учениками собственной деятельности	С. 214-215 пример 1, 34.1, 34.2, 34.4	34.3, выучить алгоритм	Применяют правила под руководством учителя	Все свойства, правила и определения ранее изученные
12		Актуализировать знания,	С. 217-218 теоремы 1, 2.	34.13	Применяют правила под	34.5

		создать условия для повторения.	Рассмотреть пример 4. 34.10-34.12		руководством учителя	
13		Организовать рефлексию и самооценку учениками собственной деятельности	34.25-34.27, работа на карточках	34.28	Применяют правила под руководством учителя	34.23, 34.24
14		Закрепить навыки решения по изученной теме	34.36, 34.40	34.37, 34.8	С-4 с целью контроля умения применять алгоритм решения квадратных неравенств	Определе-ния, свойства, правила
15	Контрольная работа	Проконтролировать умения решать квадратные неравенства, квадратные уравнения, линейные неравенства; знание свойств, алгоритмов и правил.	Контрольная работа на карточках			

В программе М.Г. Гиляровой [20] по учебнику Мордковича А.Г. на изучение темы неравенства отводится 15 часов. Здесь рассматриваются такие темы, как: свойства неравенств, линейные неравенства, квадратные неравенства. Проводится 4 самостоятельные работы и 1 контрольная работа.

В итоге ученик знакомится с понятием числового неравенства, осваивает основные свойства числовых неравенств. Узнает, как сформулировать свойства числовых неравенств; проиллюстрировать их на числовой прямой; доказать неравенства алгебраически.

Итак, перед подготовкой к уроку по новой теме учитель должен помнить про планирование системы уроков, то есть методическое планирование. Методическое планирование - это составление планов каждого урока. Оно предназначено для поиска оптимальных путей реализации таких функций, как образовательные, развивающие и воспитательные в системе уроков по разделу учебной программы. Успех методического планирования зависит в основном от того, насколько ясно учитель представляет, чему учащиеся должны научиться.

§ 3. Анализ школьных учебников алгебры по данной теме

Рассмотрим по три учебника 8 и 9 классов разных авторов с целью анализа последовательности рассматриваемого материала, введения понятия «Числовое неравенство» у каждого автора и количества часов, отводимых на изучение данной темы.

Таблица 2

Изучение темы «Неравенства» в учебниках 8 и 9 классов

Алгебра 8 класс. А.Г. Мордкович [17, 18]	**Алгебра. 8 класс. Ю.Н. Макарычев (углубление) [14]**	**Алгебра. 8 класс. Ш.А Алимов [1]**
Количество часов		
15	23	20
Последовательность рассматриваемого материала		
- свойства числовых неравенств; - неравенство с переменной; - решение неравенств с переменной; - линейное неравенство; - равносильные неравенства;	- числовые неравенства и их свойства; - оценка значений выражений; - доказательство числовых и алгебраических неравенств;	- положительные и отрицательные числа; - числовые неравенства; - свойства числовых неравенств; - сложение и умножение неравенств;

- равносильное преобразование неравенства; - квадратное неравенство; - алгоритм решения квадратного неравенства; - возрастающая функция; -убывающая функция; -исследование функций на монотонность (с использованием свойств числовых неравенств); - приближенные значения действительных чисел; - погрешность приближения; - приближение по недостатку и избытку; - стандартный вид числа.	- неравенство с одной переменной; - решение неравенств с одной переменной (линейные неравенства) - решение систем линейных неравенств с одной переменной; - неравенства, содержащие переменную под знаком модуля.	- строгие и нестрогие неравенства; - решение неравенств с одним неизвестным; - решение систем неравенств с одним неизвестным; -числовые промежутки; - модуль числа; - неравенства, содержащие модуль.
Введение понятия числового неравенства		
$a > b$ - это значит, что $a - b$ - положительное число, $a < b$ - это значит, что $a - b$ - отрицательное число. Числовые неравенства обладают рядом свойств, знание которых поможет нам в дальнейшем работать с неравенствами [с. 232].	Число *a* больше числа *b*, если разность $a - b$ - положительное число; число *a* меньше числа *b*, если разность $a - b$ - отрицательное число [с. 183].	Число *a* больше числа *b*, если разность $a - b$ - положительна. Число *a* меньше числа *b*, если разность $a - b$ - отрицательна[с.10].
Алгебра 9 класс. А.Г. Мордкович [21, 22]	**Алгебра. 9 класс. Ю.Н. Макарычев (углубление) [16]**	**Алгебра. 9 класс. Ш.А Алимов, Ю.М. Колягин [2]**
Количество часов		
16	31	-
Последовательность рассматриваемого материала		

-Линейные и квадратные неравенства; -Рациональные неравенства; -Множества и операции над ними; -Системы рациональных неравенств; -Решение текстовых заданий по теме "Рациональные неравенства и их системы".	- рациональные неравенства; - линейное и квадратное неравенство с одной переменной, частное и общее решение; - равносильность; - равносильные преобразования; - рациональные неравенства с одной переменной; - метод интервалов, кривая знаков; - нестрогие и строгие неравенства; - элемент множества, подмножество данного множества, пустое множество; - пересечение и объединение множеств; - системы линейных неравенств, частное и общее решение системы неравенств; - системы неравенств; - совокупности неравенств; - неравенства с модулями; - иррациональные неравенства; - задачи с параметрами.	-

Рассмотрим введение темы «Неравенства» в разных учебных пособиях.

1. Алгебра. 8 класс. В 2 ч. Ч.1. Учебник для учащихся общеобразовательных учреждений / А.Г. Мордкович [18].

Изложение темы начинается с рассмотрения понятия «линейное неравенство», затем вводится три правила для решения линейных неравенств. Рассматриваются такие темы, как: линейные неравенства, квадратные неравенства, приближенные вычисления. Свойства представлены с доказательствами.

Вводятся такие понятия, как:

- числовые неравенства;
- линейное неравенство;
- квадратное неравенство;
- равносильные неравенства;
- возрастающая, убывающая функции, монотонность;
- приближенное значение числа.

2. Алгебра. 8 класс: учеб. для учащихся общеобразоват. учреждений/ Ю.Н. Макарычев, Н.Г. Миндюк, К.И Нешков, И.Е. Феоктистов [14].

Изложение темы начинается с определения понятия «число а больше b», далее рассматриваются 5 теорем и 2 следствия из них. Рассматриваются такие темы, как: линейные неравенства, системы неравенств с одной переменной, неравенства с модулем. Свойства представлены в качестве теорем с доказательствами.

Вводятся такие понятия, как:

- числовые неравенства;
- решение неравенства;
- линейное неравенство;
- равносильные неравенства;

3. Алгебра. 8 класс: учеб. для общеобразоват. организаций / [Ш.А. Алимов, Ю.В. Сидоров и др.] [1].

Глава «Неравенства» начинается с рассмотрения положительных и отрицательных чисел. Вводится определение положительного, отрицательного, рационального числа. Приводится несколько упражнений на решение уравнений разных видов. В заданиях повышенной сложности требуется доказать неравенства опираясь на те знания, которые уже получили учащиеся в курсе алгебры 7 класса. Во втором параграфе приводится определение числового неравенства. Далее основные свойства числовых неравенств, сложение и умножение неравенств, строгие и нестрогие неравенства, неравенства с одним неизвестным, системы неравенств с одним неизвестным, числовые промежутки, модуль числа, уравнения и неравенства, содержащие модуль. Свойства представлены в качестве теорем с доказательствами.

Вводятся такие понятия, как:

- положительное число;
- отрицательное число;
- рациональное число;
- числовые неравенства;
- линейное неравенство;
- квадратное неравенство;
- строгие и нестрогие неравенства;
- числовые промежутки;
- модуль числа.

4. Алгебра. 9 класс. В 2 ч. Ч.1. Учебник для учащихся общеобразовательных учреждений / А.Г. Мордкович [21].

Изложение темы начинается с повторения линейных и квадратных неравенств, повторения правил решения неравенств. Далее рассматриваются линейные неравенства и их системы. А так же множества и операции над ними.

Вводятся такие понятия, как:

- рациональное неравенство;

- множество;

- подмножество;

- пересечение множеств;

- объединение множеств;

- решение системы неравенств;

5. Алгебра. 9 класс: учеб. для учащихся общеобразоват. учреждений/ Ю.Н. Макарычев, Н.Г. Миндюк, К.И Нешков, И.Е. Феоктистов [16].

Во второй главе учебника рассматриваются целые неравенства с одной переменной, дробно-рациональные неравенства с одной переменной, решение неравенств с переменной под знаком модуля.

В третьей главе рассматриваются неравенства с двумя переменными: линейные неравенства, неравенства степени выше первой, система неравенств с двумя переменными, неравенства с двумя переменными, содержащие знак модуля.

В пятой главе рассматриваются иррациональные неравенства.

6. Алгебра. 9 класс: учеб. для учащихся общеобразоват. учреждений/ Ш.А Алимов, Ю.М. Колягин [2].

В этом учебнике тема «Неравенства» не затрагивается в курсе алгебры 9 класса, так как в 8 классе этого же автора рассмотрены все виды неравенства.

Из анализа учебников можно сделать вывод, что тема «Неравенства» рассматривается, как правило, в 8-9 классах. В разных учебниках сильно отличается последовательность вводимого материала. Так, например А.Г. Мордкович в 8 классе рассматривает линейные и квадратные неравенства, а в 9 классе рациональные неравенства, системы неравенств и тему «Стандартный вид числа», когда Ю.Н. Макарычев в 8 классе вводит линейное неравенство, системы линейных неравенств, неравенства с модулем и стандартный вид числа. А Ю.М. Колягин, в свою очередь, все виды неравенств рассматривает в 8 классе, а в 9 классе их уже не затрагивает.

§ 4. Из опыта работы учителей по теме исследования

Тема «Неравенства» - одно из первых мест в серии тем, которые с трудом понимаются учениками. Хотя об этом написаны сотни учебников и методических разработок, результат не улучшается. Школьники рассматривают проблемы с неравенством как специально изобретенный лабиринт, в котором вы никогда не знаете, куда идти, и где невозможно выйти простому человеку, у которого нет определенного дара. Учителя честно следуют указаниям многочисленных методологий, «как дать материал темы», но почему-то ученики не берут этого «давания», и если они берут его, это происходит не из-за методов, а из-за того, что им каким-то образом объяснили это по-другому или дома мама и папа, или какой-то интеллектуальный летний лагерь или математический кружок. Таким образом, можно утверждать, что в методике преподавания темы «Неравенства» есть проблемы, которые еще не были выявлены и не стали предметом специального педагогического рассмотрения. В этой работе мы обсудим эти проблемы и предложим пути их решения.

А. В. Боровских, В. Е. Веревкина в статье «Предметные и метапредметные проблемы школьного курса математики. Тема «Неравенства» [4] выделяют в первую очередь проблему изменения представления о неравенстве, которая никак не отражается в методике, но которая играет очень важную роль во всех случаях с этим объектом. Начав тему в 7-м классе, учитель обычно вообще не думает о том, что стоит в понятиях учеников за термином «неравенство». И за этим стоит конкретная ситуация, которая была прочно освоена в начальной школе - когда нужно было сравнить два числа. Именно там, в начальной школе, переходя от повседневного сравнения объектов по разным основаниям (деды с внуками - по возрасту, автомобили с велосипедами - по стоимости и т. д.), Школьники приводили к абстрактному математическому действию сравнения величин в виде чисел. Сначала целое, потом дробное. Но самое главное, само неравенство фиксировало результат сравнения, это был «ответ на вопрос, что больше». И с этой точки зрения неравенство $2<3$ либо ничего не значит, либо означает, что ученик допустил ошибку. В 7-м классе появляется неравенство вида: $x + 2 > 5$. Что значит эта запись? Учитель явно видит условие на переменную x. И школьники смотрят на это неравенство с позиции, которую они узнали в начальной школе: неравенство является результатом сравнения. Им трудно понять, что значит «решить» результат сравнения.

Есть еще несколько проблем. Первая из них связана с переходом от работы с числом к работе с переменными величинами. В начальной школе также был «x», но это означало определённое конкретное число, которое нужно было найти. Та же буква в теме «Неравенства» означает переменное значение, которое может принимать любое значение. Чтобы овладеть произвольностью объекта, вам нужно создать особую обучающую ситуацию, в которой один человек (ученик или учитель) может сделать с этим объектом то, что он хочет (например, изменить значение x), а другой - выстроить свои действия таким образом, чтобы от этого не зависело (например, преобразовать многочлен в более простую форму). Таким образом, построенные действия будут гарантированно ссылаться на произвольный объект в теоретическом смысле этого слова. Поскольку ученик привык действовать как «произвол» объекта и в роли «преодоления этого произвола», после объединения этих ролей он развивает умение «играть с самим собой»: «а если я начну менять объект, как я хочу, будет ли верно моё доказательство?». В то же время социальные роли покидают сознание, оставив только интеллектуальную схему работы с произвольным объектом, к которому мы привыкли, который можно использовать в дальнейшем обучении, не прибегая к социальным формам этой схемы. Ведь именно в 7-м классе, когда появляются только произвольные объекты, такого рода «социальные» формы умственной деятельности оказываются наиболее эффективными и необходимыми.

Вторая проблема, к которой мы движемся, связана со словом «решить», о котором мы уже говорили. В начальной школе ученики уже сформировали очень определенную идею о том, что значит «решать». Решать - выполнять действия по определённому известному алгоритму. Тупик состоит в том, что алгоритмы решения неравенств становятся более сложными по мере развития математики, и после изучения квадратных уравнений и неравенств они становятся настолько огромными и разнообразными, что их нельзя ни запомнить, ни использовать. «Решить» - это упростить условие, опираясь на определенные правила.

Важным этапом при решении неравенств является правильное определение ОДЗ. Его очень часто забывают, поэтому ответ может быть неверным. В.И. Рыжик в статье «В который раз про ОДЗ и не только…» [28, с. 36-38] рассматривает эту проблему снова: «Уж сколько раз говорено про эту самую ОДЗ!...»

В.И. Рыжик считает, что при объяснении ученикам решение неравенств и систем неравенств, важно отметить, что ответ получается из последней строки, а само неравенство (система неравенств) в первой строке. Здесь нужно математически доказать, что полученной множество действительно является решением данного неравенства. Например, для проверки корней уравнения можно подставить полученные результаты в исходное уравнение. Здесь не требуется поиск ОДЗ. Конечно, корни могут быть громоздкими, тогда это неудобно. А для неравенств такой вариант не работает. Можно аккуратно следить за равносильностью всех преобразований.

В.И. Рыжик считает, что нахождение ОДЗ и ее использование – вещь неформальная. Все зависит от примера и осведомленность решатель в данной теме.

Своей заметкой в журнале «Математика в школе» [28] В.И. Рыжик хочет обратить внимание на многолетние и безуспешные попытки авторов вразумить в столь мало содержательном вопросе. Раньше люди решали разные сложные уравнения и неравенства, при этом не использовали ОДЗ. Во многих учебниках алгебры для школы нет никаких следов ОДЗ. В.И. Рыжик предлагает вернуться к старой школе и равносильным переходам.

В журнале «Математика» [35] учитель математики г. Москва Д.Э. Шноль рассматривает устные упражнения и их понимание школьниками. Очень часто учитель сталкивается с рассеянным вниманием своих учеников. Ошибки по этой причине делают все ученики: как слабые, так и самые сильные. Учителя, как правило, кроме совета «будь внимателен» ничем помочь не могут. Что значит быть внимательным, сосредоточенным, как увидеть свою собственную ошибку при проверке работы, как этому всему научиться? Ответы на эти вопросы остаются в стороне. Но, мало кто знает, что внимательности можно и, самое главное, нужно учиться!

Решение задач в уме от решения задач на бумаге отличается тем, что ученик ни в коем случае не может отвлечься. Иначе решение придется начать снова, ведь все промежуточные результаты утеряны, забыты, когда на листке можно просто просмотреть ход решения и вернуться к тому пункту, где ее обнаружили. Дмитрий Эммануилович считает, что школьники на уроке могут что-то бездумно писать, списывать с доски, делая вид, что решают задачу, при этом параллельно вести переписку с друзьями. При устной работе, учитель может видеть глаза всех учеников и «прочитать» в них, кто, что и насколько понимает. Множество типичных заданий из любого учебника средний ученик может решить устно. Конечно, решать сложные неравенства устно в обычном классе практически невозможно, но решать «обратную задачу» полезно и довольно увлекательно. Например:

1. Задать неравенство, решение которого изображено на рисунке 1.

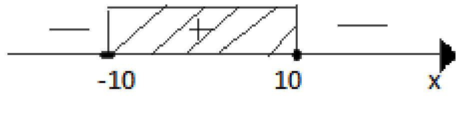


Рис. 1.

Разумеется, здесь возможны разные варианты. Все предложения учеников лучше выписать на доску, а потом начать их разбирать. Как правило, некоторые неравенства могут оказаться неверными. Где-то ученики забудут про закрашенные точки, где-то про систему. Это даже хорошо, так как это поможет разобрать типичные ошибки. По словесным описаниям учеников нужно построить лучи, изображающие решение тех неравенств, которые оказались ошибочными. Далее можно рассмотреть картинки, в которых есть одна, две выколотые точки.

Таким образом, по мнению Д. Шноль, вместо призывов «стать внимательнее» учитель создает на уроке ситуацию, которая позволяет ученику приобрести навык произвольной внимательности. А так же, устные упражнения позволяют собрать класс в начале урока, задать рабочий ритм[35].

В статье «О разумных и неразумных требованиях к выполнению письменной экзаменационной работы» авторы С.В. и И.С. Буфеевы [5] дают ответ на вопрос, какие требования к выполнению работы на экзамене можно считать обоснованными, а какие нельзя. Вообще, здесь речь может идти не только о ЕГЭ или ОГЭ. Во многих школах есть переводные экзамены и, конечно, итоговые контрольные работы, где так же включены письменные задания. В том числе есть задания по решению неравенств. Современное школьное математическое образование сводится к тому, что методисты создают «совершенные» образцы оформления конкретных задач. На самом деле, это нужно для того, чтобы ученик давал более полный и, конечно, развёрнутый ответ. В определённой степени это помощь ученикам усвоить рассуждения, которые являются особо важными при выполнении определённых конкретных заданий. Это вызывает огромные проблемы при проверке работ. Постоянно ведутся споры, что же всё-таки обязательно должно быть в работе ученика, а что является его непосредственным желанием. Зачастую, на определённом этапе работы, учитель ждёт от ученика какого-то особого пояснения, при этом, не понимая, зачем это нужно, если смысл решения от этого не меняется. Но, многие учителя, «на всякий случай» оценивают работу, проверяя не только правильность решения, но и то, соответствует ли структура решения учеником задачи образцу. В этой статье рассмотрены некоторые заблуждения.

С.В. и И.С. Буфеевы в своей статье рассматривают метод интервалов, который применяется для неравенств вида $\frac{(x-a_1)^{k_1}(x-a_2)^{k_2}...(x-a_p)^{k_p}}{(x-b_1)^{n_1}(x-b_2)^{n_2}...(x-b_q)^{n_q}} \vee 0.$

Лишними этапами выполнения решения с математической точки зрения математики являются этапы:

- рассуждения на тему, что обе части неравенства можно умножить на знаменатель при условии, что он больше нуля для любого значения переменной;

- введение функции;

- указание её ОДЗ с дополнением, что делить на нуль нельзя;

- отдельное нахождение самих нулей функции;

- пояснение на словах, что функция сохраняет знак в любом из промежутков, так как она монотонна в любой точке области определения;

- демонстрация выявления знака функции в любой точке каждого промежутка (совсем всё плохо, если показывается на бумаге проверка знака в каждом промежутке. Это говорит о неумении решать неравенства данным методом);

- пояснение того, что знаки находятся «используя метод интервалов», и, что в знаменателе корень во второй степени, а значит знак в этой точке остаётся прежним;

- до написания ответа запись ответа уже присутствует в той же или другой форме.

С.В. и И.С. Буфеевы хотят сказать, что при применении метода интервалов ученик не должен каждый раз обосновывать данный метод, а только пользоваться им при решении конкретного примера. Суть метода – уметь чередовать знаки дробно-рационального неравенства на конкретных промежутках, тут можно использовать исключительно алгебраические соображения. Некоторые эксперты считают, что если нет рассуждений о том, как выполняется метод интервалов, то это грубейшая ошибка, нежели такие математические ошибки, как потеря корней или же приобретение лишних. А ведь именно второй случай требует существенного снижения баллов за решение [5].

Таким образом, при изучении опыта работы учителей по определённой теме можно избежать некоторых ошибок на уроках математики, выделить главное и уделить больше времени отработке определённых этапов. Учителя, опираясь на педагогический опыт своих коллег, изучают условия и средства успешного решения проблем учебно-воспитательного характера. В их опыте можно выделить элементы новизны, творчества, оригинальности.

Выводы по первой главе

Рассмотрим основные выводы и результаты, полученные в первой главе.

1. Сформулировано определение логико-математического анализа. Итак, логико-математический анализ - знание целей обучения содержанию темы и основных результатов обучения; знание того, каким объектам и понятиям даются определения, знание формулировок определений, какие математические утверждения есть в теме; определение вида этих утверждений; знание того, как они раскрываются в учебнике; знание функций геометрического и алгебраического материала в учебном пособии и принципы использования данного материала в этой теме. А так же умение решать типовые задачи темы; знание методов решения, которые используются в школе; знание требований к оформлению задач, представляемых школьной программой.

2. На конкретном примере показан логико-математический анализ определения, утверждения по теме «Неравенства».

3. Выполнено методическое планирование для учителя по данной теме, где рассмотрено, какие задания выполняют ученики в классе, дома, на

самостоятельной работе. Какие задания подходят для изучения новой темы, повторения, для закрепления знаний.

4. Выполнен анализ учебников по теме исследования. Рассмотрены учебники разных авторов 8 - 9 классов. Выявлено, что изучение темы по учебникам А.Г. Мордковича и Ю.Н. Макарычева происходит в 8 – 9 классах, причем первый автор затрагивает квадратные неравенства уже в 8 классе, зато в пособии Ю.Н. Макарычева в этом же классе рассматриваются неравенства с модулем. К 9 классу в обоих учебниках рассмотрены все виды неравенств. В отличии от предыдущих авторов Ю.М. Колягин и Ш.А. Алимов рассмотрели все виды неравенств в 8 классе, с этой темы и начинается учебник. В 9 классе у этих авторов неравенства не присутствуют.

5. Рассмотрен опыт работы учителей по данной теме исследования. Выявлены основные проблемы, которые могут встретиться при изучении темы.

ГЛАВА II . МЕТОДИЧЕСКИЙ МАТЕРИАЛ ПО ТЕМЕ «НЕРАВЕНСТВА» В КУРСЕ АЛГЕБРЫ ОСНОВНОЙ ШКОЛЫ

§ 5. Методика изучения линейных неравенств

Неравенства появляются еще в начальной школе, где неизвестной величиной служит один из компонентов четырёх арифметических действий. Как правило, задание может иметь вид $x>6$, $x+3<7$. Или может быть сформировано в виде вопроса: «Какие натуральные числа меньше 12?». Все такие неравенства в начальной школе решаются методом подбора. Ребята просто перечисляют числа, которые могут являться решением предлагаемых неравенств [29, с. 274-275]. В основной школе понятие «линейные неравенства» вводят в 7-8 классах.

А.Я. Блох [3, с. 132-133] отмечает: как правило, способность решения всех неравенств, кроме квадратных, складываются на более низком уровне, чем уравнения тех же классов. Это свойство носит объективный характер: теория неравенств более сложна, чем теория уравнений. Так же считают и авторы статьи [10] Ладошкин М.В., Фролова И.С.: Изучение линейных неравенств является логическим продолжением изучения линейных уравнений. Можно представить интервал для будущих преобразований, связанных с неравенствами разных типов. Чтобы изучить эту тему, учащиеся должны уметь определять тип линейного уравнения, иметь возможность решать линейное уравнение с одной переменной, знать числовые промежутки (луч, открытый луч, отрезок, интервал, полуинтервал), все свойства числовых неравенств. В первую очередь мы можем вспомнить формулу линейного уравнения, что значит корни линейного уравнения, число корней линейного уравнения, свойства числовых неравенств и уравнений, так как мы применяем это при решении линейных неравенств.

Далее можно дать определение линейного неравенства с одной переменной.

Линейные неравенства- неравенства вида $ax+b>0$ ($ax+b<0$), где a, b- любые числа, $a \neq 0$ [18, с. 198].

В учебнике [18] дается три правила для решения линейных неравенств:

1. Можно каждый член неравенства перенести из одной части неравенства в другую часть через знак неравенства с противоположным знаком, не изменив при этом знак неравенства.
2. Обе части неравенства одновременно можно умножить или разделить на одно и то же положительное число, не меняя при этом знак неравенства.
3. Обе части неравенства можно умножить или разделить на одно и то же отрицательное число, меняя при этом знак неравенства на противоположный данному.

В учебнике Макарычева Ю.Н. [14, с.187] те же правила, но последние два объединены в одно:

если обе части неравенства умножить или разделить на одно и то же положительное число, то получится равносильное ему неравенство; если обе части неравенства умножить или разделить на одно и то же отрицательное число, изменив при этом знак неравенства на противоположный, то получится равносильное ему неравенство.

Решить неравенство - значит найти каждое его решение, или доказать, что решений неравенство не имеет [13, с. 186].

Алгоритм решения линейного неравенства алгебраическим способом (т.е. с помощью правил и свойств):

- упростить обе части неравенства (раскрыть скобки, избавиться от дробей);

- перенести в левую часть слагаемые, содержащие переменные, а в правую остальные;

- привести подобные слагаемые в каждой части;

- разделить обе части неравенства на коэффициент при переменной;

- изобразить графически решение неравенства;

- в ответе указать числовой промежуток, который является решением неравенства.

Для решения этих неравенств достаточно знать элементарные свойства, которые могут быть использованы в определенной части решения данного неравенства. Следующие примеры, хотя и очень простые, являются основой для дальнейшего изучения темы [37].

Рассмотрим примеры из источников 8, 17, 36.

<u>Пример 1.</u>

$$2c-\frac{c+1}{2}\le\frac{c-1}{3}$$

Мы используем правило умножения обеих сторон неравенства на общий знаменатель дробей, получаем: $12c-3(c+1)\le 2(c-1)$

Раскроем скобки, получим: $12c-3c-3\le 2c-2$

Воспользуемся правилом перенесения слагаемых из одной части неравенства в другую, получим: $12c-3c-2c\le -2+3$

Приводим подобные слагаемые: $7c\le 1$

Воспользуемся правилом 2 и разделим обе части неравенства на коэффициент при переменной: $c\le\frac{1}{7}$

Изобразим решение неравенства графически (Рис. 2).

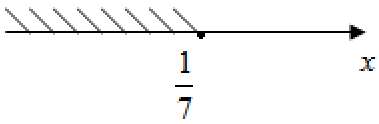


Рис. 2.

Ответ: $x\in(-\infty;\frac{1}{7}]$.

<u>Пример 2.</u>

$$\frac{4-3y}{2}-\frac{8y+1}{6}<15y-6$$

Для начала избавимся от дробей, домножая обе части неравенства на общий знаменатель всех дробей: *3(4-3y) – (8y+1) < 6(15y-6)*

12 - 9y - 8y - 1 < 90y – 36

- 9y - 8y – 90y < - 36 – 12 + 1

- 107y < - 47

Разделим обе части неравенства на отрицательное число -47, при этом изменив знак неравенства на противоположный по правилу (3): $y > \frac{47}{107}$

Изобразим решение неравенства графически (Рис. 3):

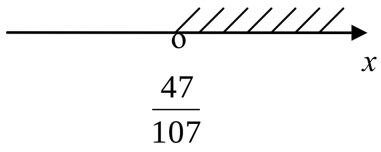


Рис. 3.

Ответ: $x \in (\frac{47}{107};+\infty)$.

Пример 3.

$$\frac{x+4}{5} - \frac{3x-1}{2} \le 2(x-1)$$

$$2(x+4) - 5(3x-1) \le 20(x-1)$$

$$2x + 8 - 15x + 5 \le 20x - 20$$

$$-33x \le -33$$

$x \ge 1$. Изобразим решение неравенства графически (Рис. 4):

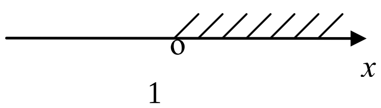


Рис. 4.

Ответ: $x \in [1;+\infty)$.

Линейные неравенства - это основа для многих видов неравенств. При решении неравенств такого вида важно отработать основные правила и методы, чтобы изучение следующих тем было более понятным.

§ 6. Методика изучения квадратных и рациональных неравенств

Тема «Квадратные неравенства» занимает важное место в математике. Этот раздел относится к другим линиям содержания: неравенствам, квадратичной функции, графикам функций, решению неравенств.

Большинство приёмов решения неравенств состоит в переходе от данного неравенства $a>b$ к уравнению $a=b$ и определённому последующему переходу от полученных корней уравнения к множеству решений первоначального неравенства. Оказывается, такого перехода не производится лишь при решении линейных неравенств, это лишний шаг, так как алгоритм решения таких неравенств невероятно прост [3, с. 132-133].

Данная тема изучается в 8 классе: вводится определение квадратного неравенства, а так же рассматриваются различные способы его решения. К тому времени, когда исследуется тема «Квадратные неравенства», учащиеся могут построить график квадратичной функции с нулями функции, отмеченными на нем, если, конечно, они существуют. Следовательно переход к исследованию такого вида неравенств можно произвести как переход от неравенства $ax^2+bx+c>0$ к построению и изучению графика функции $y=ax^2+bx+c$. Это происходит потому, что существуют разные случаи расположения графика функции относительно оси абсцисс, поэто лучше стоит начать с рассмотрения конкретной задачи, для которой соответствующий квадратный трехчлен имеет разные корни. Этот пример устанавливает соответствие между такими задачами, как: «Решить неравенство вида $ax^2+bx+c>0$»; «Найти значения переменной, для каждого из которых значения функции $y=ax^2+bx+c$ будут положительны». С помощью этой связи произведён переход к построению графика конкретной функций. Нули данной функции делят ось абсцисс на три промежутка, в которых он не меняет знак, следовательно ответ записывается именно из чертежа. Другие варианты решения квадратичных неравенств (для квадратного многочлена не более одного корня) определённо требуют дополнительного рассмотрения, но, тем не менее, полагаются на одно и то же соответствие [3, с. 134].

В дальнейшем изучении можно установить, что нет необходимости в верно построенном графике квадратичной функции, достаточно указать только положение корней, если они существуют, и учесть эскиз графика (направление ветвей параболы).

Алгоритм решения квадратных неравенств вида $ax^2+bx+c>0$, $ax^2+bx+c<0$:

- ищем нули функции $ax^2+bx+c=0$;

- на координатной прямой отмечаем нули функции закрашенными или пустыми точками, учитывая знак неравенства;

- через нули неравенства проводим параболу (эскиз), ветви которой будут направлены вверх, либо вниз, в зависимости от коэффициента *a,* заштриховываем ту часть прямой, которая является решением неравенства.

- в ответе указываем промежуток, который является решением неравенства.

Рассмотрим несколько примеров из источников 15, 17, 19, 33.

Пример 1.

$3x^2-7x+4\le 0$

Ищем нули неравенства: $3x^2-7x+4=0$

Решаем квадратное уравнение с помощью дискриминанта. Для начала вспомним формулу дискриминанта для квадратного уравнения вида

$ax^2+bx+c=0$.

$D=b^2-4ac$.

В нашем случае *a=3, b= -7, c=4*.

$D=(-7)^2-4\cdot 3\cdot 4=49-48=1=1^2$

Корни квадратного уравнения находим по формуле $x=\dfrac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}$

В нашем случае $x=\dfrac{-(-7)\pm 1}{2\cdot 3}$, отсюда $x=\dfrac{7}{6}; x=1$.

Теперь на координатной прямой отметим эти точки (Рис. 5), они будут закрашенные, так как неравенство нестрогое.

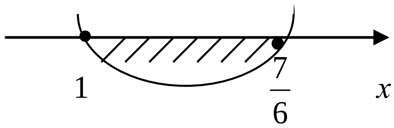


Рис. 5.

Через результирующие точки мы нарисуем эскиз параболы, которая является графиком квадратичной функции. Ее ветви направлены вверх, так как старший коэффициент положителен.

Заштриховываем ту часть, которая является решением неравенства.
В ответе указываем промежуток.

Ответ: $x \in [1; \frac{7}{6}]$.

Пример 2.

(x-2)(x+3)>0

(x-2)(x+3)=0

x=2; x=-3. Изобразим решение неравенства графически (Рис. 6):

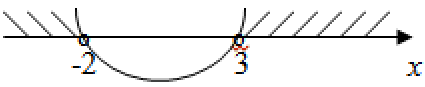


Рис. 6.

Ответ: $x \in (-\infty; -2) \cup (3; +\infty)$.

Пример 3.

$-x^2 + 2x - 1 \geq 0$

$-(x-1)^2 > 0$

$-(x-1)^2 = 0$; *x=1.* Изобразим решение неравенства графически (Рис. 7):

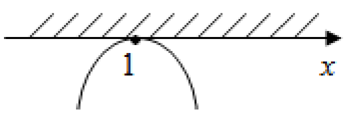


Рис. 7.

Так как нам нужны только те значения *x,* при которых неравенство больше либо рано нуля, а вся парабола находится ниже оси *Ox* за исключением единственной точки, которая лежит на оси абсцисс, значит единственным решением неравенства будет являться 1.

Ответ: 1.

Пример 4.

$3x^2+x+2>0$

$3x^2+x+2=0$

D=1-24=-23; D<0 $\Rightarrow$нулей нет. Изобразим решение неравенства графически (Рис. 8):

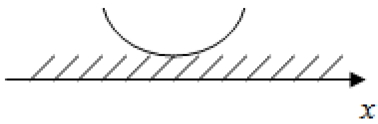


Рис. 8.

Вся парабола расположена выше оси *Ox,* значит x может быть любым числом.

Ответ: $x-\forall$*число.*

Пример 5.

$-5x^2-x-1>0 \,|\, \cdot(-1)$

$5x^2+x+1<0$

$5x^2+x+1=0$

D=1-20=-19, D<0 $\Rightarrow$нулей нет. Изобразим решение неравенства графически (Рис. 9):

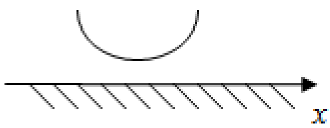


Рис. 9.

Нам нужна та часть параболы, которая находится ниже оси *Ox,* а она там не существует, значит решений нет.

Ответ: $x\in\varnothing$.

Пример 6.

При каких значениях параметра р квадратное уравнение $x^2-5x+p^2=0$;

а) имеет два различных корня; б) имеет один корень; в) не имеет корней?

Решение. Количество корней любого квадратного уравнения зависит от знака его дискриминанта D. В данном случае $D = 25 - 4p^2$

а) Квадратное уравнение имеет два различных корня, если $D\rangle 0$, следовательно, задача приводится к решению неравенства $25 - 4p^2\rangle 0$. Умножим каждую часть этого неравенства на -1 (помним о том, что знак неравенства меняется). В итоге получаем неравенство, равносильное данному $4p^2 - 25\langle 0$. Получаем $4(p-2{,}5)(p+2{,}5)\langle 0$.

Можно сделать вывод, что полученное неравенство $4(p-2{,}5)(p+2{,}5)\langle 0$ существует при любых значениях p из интервала (-2,5;2,5). Именно при полученных значениях параметра p данное квадратное уравнение имеет ровно два различных корня.

б) Уравнение второй степени имеет два повторяющихся корня, если D=0. Как мы установили выше, D=0, при p=2,5 или p=-2,5. Непосредственно при найденных значениях параметра p представленное квадратное уравнение имеет два повторяющихся корня.

в) Квадратное уравнение не имеет корней, только если $D\langle 0$. Решим неравенство $25 - 4p^2\langle 0$

$$4p^2 - 25\rangle 0;$$
$$4(p-2{,}5)(p+2{,}5)\rangle 0,$$

откуда $p\langle -2.5$, $p\rangle 2.5$. Именно при таких значениях параметра p данное уравнение не имеет корней.

Ответ: а) при $-2.5\langle p\langle 2.5$

б) при p=2,5 или p=-2,5

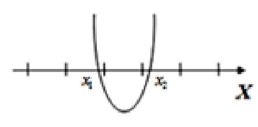
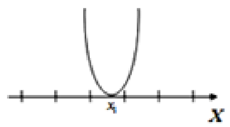
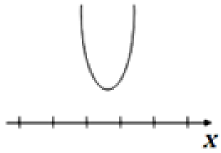
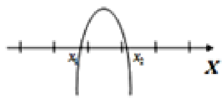
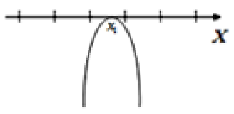
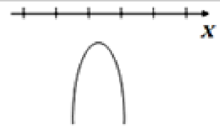
в) при $p\langle -2.5$ или $p\rangle 2.5$

Для неравенства вида $ax^2 + bx + c > 0$ оформим таблицу (Табл. 3).

При решении квадратных неравенств нередко используется метод введения новой переменной. Главная концепция заключается в замене повторного алгебраического выражения в конкретном неравенстве той латинской буквой, которая и будет новой переменной [33, с. 53].

Таблица 3

Решение квадратных неравенств вида $ax^2+bx+c>0$

	$D>0$	$D=0$	$D<0$
$a>0$			
$a<0$			

<u>Пример 7.</u>

Решить неравенство $\left(x^2-9x\right)^2+4x^2<36x+140$.

$\left(x^2-9x\right)^2+4(x^2-9x)-140<0$

Пусть $x^2-9x=t$, тогда $t^2+4t-140<0$

$t^2+4t-140=0$

По теореме Виета *x=-14, x=10.* Изобразим решение неравенства графически (Рис. 10):

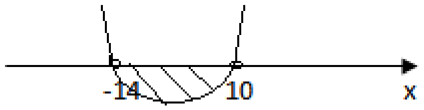


Рис. 10.

Возвращаемся к первоначальному выражению, переходим к системе:

$$\begin{cases} x^2-9x>-14; \\ x^2-9x<10; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2-9x+14>0; \\ x^2-9x-10<0; \end{cases}$$

$x^2-9x+14>0$:

$D=81-56=25=5^2;$

$x=\dfrac{9+5}{2}=7;$ Изобразим решение неравенства графически (Рис. 11):

$x=\dfrac{9-5}{2}=2.$

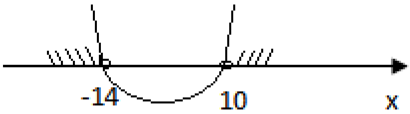


Рис. 11.

Нули неравенства $x^2-9x-10<0$:

$D=81+40=121=11^2$;

$x=\frac{9+11}{2}=10$;   Изобразим решение неравенства графически (Рис. 12):

$x=\frac{9-11}{2}=-1$.

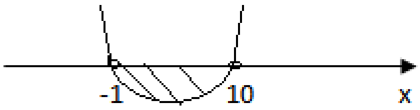


Рис. 12.

Решением системы является пересечение множеств.

Ответ: $(-1;2)\cup(7;10)$.

Выражения, которые помимо операций сложения, вычитания, умножения, включают деление на выражение, содержащее переменную, называют дробными.

Целое и дробное выражения называют рациональными.

Целое выражение всегда имеет смысл при любых значениях входящих в него переменных, так как для поиска значения целого выражения нужно выполнить операции, которые всегда возможны.

Дробное выражение при определенных значениях переменных может не иметь смысла.

Значения переменных, при которых выражение имеет смысл, называется допустимыми значениями переменных [13, с. 5-6].

Рассмотрим упражнения для повторения из [8].

Упражнение 1.

При каких значениях переменной имеет смысл рациональное выражение:

б) $\frac{b+4}{b^2+7}$;   г) $\frac{a+10}{a(a-1)}-1$?

Решение:

б) выражение $\frac{b+4}{b^2+7}$ имеет смысл при $b^2+7\neq 0.$

$b^2 \geq 0 \mid +7$

$b^2+7\geq 7 \Rightarrow$дробь имеет смысл при любых значениях переменной b.

г) выражение $\frac{a+10}{a(a-1)}-1$ имеет смысл при $a(a-1)\neq 0$, то есть при

$a\neq 0; a\neq 1.$

<u>Упражнение 2.</u>

Найдите область определения функции:

б) $y=\frac{2x+3}{x(x+1)}$; г) $y=x+\frac{1}{x+5}$?

Решение:

б) $y=\frac{2x+3}{x(x+1)}$

Дробь имеет смысл при: $x(x+1)\neq 0$

$x\neq 0; x\neq -1 \Rightarrow D(y)=(-\infty;-1)\cup(-1;0)\cup(0;+\infty).$

г) $y=x+\frac{1}{x+5}$

Дробь имеет смысл при:

$x+5\neq 0 \Rightarrow x\neq -5 \Rightarrow D(y)=(-\infty;-5)\cup(-5;+\infty)$

Решение любых рациональных неравенств приводится к двум основным шагам:

- Переносим все в одну сторону, приводим к одному знаменателю. Находим нули неравенства и ОДЗ.

- Метод интервалов. В основе этого метода лежит следующее свойство двучлена *x-a*: точка *a* делит числовую ось на две части – справа от точки *a* двучлен *x-a* положителен, а слева – отрицателен [12, с. 38].

Алгоритм метода интервалов приведен в рубрике «Решаем неравенства» журнала «Математика» от февраля 2015 г. [32]:

- Приводим, используя равносильные преобразования, данное неравенство к виду *f(x)*0*, где знаком «*» обозначен один из знаков неравенств. Такой вид неравенства будем называть стандартным. В случае, если неравенство сразу дано в стандартном виде, этот шаг пропускаем.

- Находим область определения функции *y=f(x),* отмечаем её на числовой оси. Иногда можно сначала найти ОДЗ, а потом приводить неравенство к стандартному виду, так как ОДЗ и область определения являются одним и тем же множеством.

- Находим нули функции *y=f(x)*, то есть корни уравнения *f(x)=0,* и отмечаем их на числовой оси. Если данное неравенство является строгим, то нули выкалываются; если неравенство является нестрогим, то нули надо изобразить закрашенными точками. Нули функции разбивают ее область определения на несколько интервалов. В каждом из этих интервалов функция определена, непрерывна и не обращается в нуль, поэтому поменять знак ни в одной из точек интервала не может и, следовательно, принимает в каждом из полученных интервалов значения одного знака.

- Решаем неравенство методом интервалов, определяя знак функции *y=f(x)* в каждом из полученных интервалов, например, по ее знаку в одной из точек интервала (такие точки иногда называют пробными). Записываем ответ [32].

Рассмотрим примеры из источников [7, 8].

Пример 1. Решить методом интервалов неравенство $\frac{3x-1}{3x+1}+\frac{x-3}{x+3}\geq 2$.

Решение.

3) $\frac{3x-1}{3x+1}+\frac{x-3}{x+3}\geq 2$;

$$\text{ОДЗ: } \begin{cases} 3x+1\neq 0; \\ x+3\neq 0; \end{cases} \begin{cases} 3x\neq -1; \\ x\neq -3; \end{cases} \begin{cases} x\neq -\frac{1}{3}; \\ x\neq -3. \end{cases}$$

$\frac{3x-1}{3x+1}+\frac{x-3}{x+3}-2\geq 0$;

Общий знаменатель $(3x+1)(x+3)$, для этого домножаем первую дробь на *(x+3)*, вторую на *(3x+1)*, а число 2, представив в виде дроби $\frac{2}{1}$ домножаем на *(3x+1)(x+3),* получим:

$$\frac{(3x-1)(x+3)}{(3x+1)(x+3)}+\frac{(x-3)(3x+1)}{(3x+1)(x+3)}-\frac{2(3x+1)(x+3)}{(3x+1)(x+3)}\geq 0;$$

Запишем все в одну дробь:

$$\frac{(3x-1)(x+3)+(x-3)(3x+1)-2(3x+1)(x+3)}{(3x+1)(x+3)}\geq 0;$$

Раскроем скобки в числителе:

$$\frac{3x^2+9x-x-3+3x^2+x-9x-3-6x^2-18x-2x-6}{(3x+1)(x+3)}\geq 0;$$

Приводим подобные слагаемые:

$$\frac{-20x-12}{(3x+1)(x+3)}\geq 0;$$

Ищем нули неравенства: *-20x-12=0;* *-20x=12;* $x=-\frac{12}{20}$;

$x=-0,6$ - удовлетворяет ОДЗ. Изобразим решение неравенства (Рис. 13):

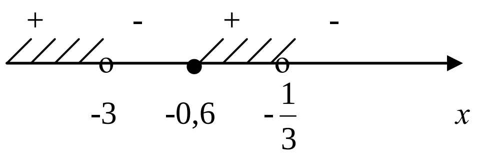


Рис. 13.

У нас получилось 4 промежутка, на каждом из которых нам нужно определить знак выражения $\frac{-20x-12}{(3x+1)(x+3)}$, для этого из каждого промежутка мы подставляем любое число, принадлежащее ему, и проверяем, каким по знаку будет выражение, этот знак пишем над прямой, либо под ней.

Так как у нас неравенство $\frac{-20x-12}{(3x+1)(x+3)}\geq 0$, значит мы выбираем те промежутки, которые являются решением неравенства.

Ответ: $x\in(-\infty;-3)\cup[-0,6;-\frac{1}{3})$.

Пример 2.

Решить неравенство: $\frac{1-3x}{1+3x}+\frac{1+3x}{3x-1}\geq\frac{12}{1-9x^2}$;

ОДЗ: $\begin{cases}1+3x\neq 0;\\ 3x-1\neq 0;\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}3x\neq -1;\\ 3x\neq 1;\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}3x\neq -1;\\ 3x\neq 1;\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\neq -\frac{1}{3};\\ x\neq \frac{1}{3}.\end{cases}$

$$\frac{1-3x}{1+3x}+\frac{1+3x}{3x-1}-\frac{12}{1-9x^2}\geq 0;$$

$$\frac{1-3x}{1+3x}+\frac{1+3x}{3x-1}-\frac{12}{1-9x^2}\geq 0;$$

$$\frac{1-3x}{1+3x}+\frac{1+3x}{3x-1}-\frac{12}{(1-3x)(1+3x)}\geq 0;$$

$$\frac{1-3x}{1+3x}+\frac{1+3x}{3x-1}+\frac{12}{(3x-1)(1+3x)}\geq 0;$$

$$\frac{(1-3x)(3x-1)}{(3x-1)(1+3x)}+\frac{(1+3x)(1+3x)}{(3x-1)(1+3x)}+\frac{12}{(3x-1)(1+3x)}\geq 0;$$

$$\frac{(1-3x)(3x-1)+(1+3x)(1+3x)+12}{(3x-1)(1+3x)}\geq 0;$$

$$\frac{-1+6x-9x^2+1+6x+9x^2+12}{(3x-1)(1+3x)}\geq 0;$$

$\frac{12x+12}{(3x-1)(1+3x)}\geq 0;$ Изобразим решение неравенства графически (Рис. 14).

12x+12=0; 12x=-12;x=-1;

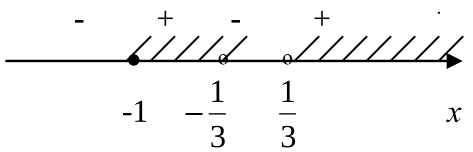


Рис. 14.

Ответ: $x\in[-1;-\frac{1}{3})\cup(\frac{1}{3};+\infty)$.

Для решения квадратных и дробно-рациональных неравенств мы используем метод интервалов. Важно не забыть про область допустимых значений при решении дробно-рациональных неравенств.

§ 7. **Методика изучения иррациональных неравенств и неравенств с модулем**

Неравенство называется иррациональным, если оно содержит неизвестное под знаком корня [3, с. 134].

Здесь применяется характерное преобразование – «освобождение неизвестного из-под знака корня», обычно состоящее в возведении обеих частей в степень [38, с. 61].

Изучение линии неравенств может быть достигнуто на этапе закрепления и применения знаний за счёт включения в систему упражнений заданий с модулем и параметром [29, с. 274-275].

Метод приведения начального неравенства к эквивалентной системе иррациональных неравенств или совокупности таких систем является главным методом решения иррациональных неравенств. Для того, чтобы при решении иррациональных неравенств, избежать ошибок, необходимо учитывать только те значения переменной, для которых определены все функции, входящие в неравенство, т. е. найти ОДЗ этого неравенства, а затем оправданно выполнить равносильный переход на ОДЗ или её частях [24, с. 144].

Рассмотрим примеры из источников 2, 32, 34, 39.

<u>Пример 1.</u>

Решить неравенство $(x-1)\sqrt{x^2-x-2} \geq 0$.

Решение. Область допустимых значений неравенства состоит из всех x, удовлетворяющих условию $x^2-x-2 \geq 0$,

Нули этого неравенства: x=-*1*;x=*2*, Изобразим решение неравенства графически (Рис. 15).

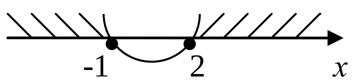


Рис. 15.

ОДЗ:

$x \in (-\infty;-1] \cup [2;+\infty);$

Так как $\sqrt{x^2 - x - 2} \geq 0$, и произведение $(x-1)\sqrt{x^2 - x - 2} \geq 0$, значит и выражение $(x-1) \geq 0$, отсюда $x \geq 1$,

С учетом ОДЗ $x \geq 2$,

Объединяя решения, получим решение неравенства $(x-1)\sqrt{x^2 - x - 2} \geq 0$

$x \in [2;+\infty); x = 1.$

Пример 2.

Решить неравенство $\dfrac{\sqrt{x^2 - 4}}{x-1} \leq \dfrac{\sqrt{x^2 - 4}}{x+1}$.

Решение. Перенесем все алгебраические выражения в левую часть неравенства:

$$\frac{\sqrt{x^2 - 4}}{x-1} - \frac{\sqrt{x^2 - 4}}{x+1} \leq 0.$$

Вынесем общий множитель:

$$\sqrt{x^2 - 4}\left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1}\right) \leq 0.$$

Приводим разность дробей в скобках к общему знаменателю:

$$\sqrt{x^2 - 4}\left(\frac{x+1-(x-1)}{(x-1)(x+1)}\right) \leq 0.$$

Выполним действия в числителе и запишем неравенство в виде:

$$\frac{2\sqrt{x^2 - 4}}{(x-1)(x+1)} \leq 0.$$

Найдем ОДЗ: $\begin{cases} x^2 - 4 \geq 0; \\ x \neq -1; \\ x \neq 1. \end{cases} \Leftrightarrow [-\infty;-2] \cup [2;+\infty].$

Найдём нули функции:

$$\frac{2\sqrt{x^2 - 4}}{(x-1)(x+1)} = 0 \Leftrightarrow 2\sqrt{x^2 - 4} = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x^2 - 4} = 0 \Leftrightarrow x^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 4 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2; \\ x = -2. \end{array}\right.$$

Решением данного неравенства являются нули функции.

Ответ: 2; -2.

Пример 3.

Доказать, что произведение двух любых чисел меньше либо рано полусуммы их квадратов.

Нужно доказать, что для любых значений a и b верно неравенство

$$ab \le \frac{a^2+b^2}{2}$$

$$ab - \frac{a^2+b^2}{2} = \frac{2ab-a^2-b^2}{2} = \frac{-(a^2+b^2-2ab)}{2} = \frac{-(a-b)^2}{2}$$

Для любых значений a и b разность, которую мы рассматриваем, является неположительным числом. Следовательно, неравенство верно при любых значениях a и b $ab \le \frac{a^2+b^2}{2}$.

Заметим, что если в доказанном неравенстве заменить переменные a и b на $\sqrt{x}$ и $\sqrt{y}$, то получим $\sqrt{xy \le \frac{x+y}{2}}$ - неравенство между средним геометрическим и средним арифметическим чисел x и y , доказанное ещё Евклидом в X веке «Начал».

В школьном курсе рассматриваются неравенства с одной переменной, содержащие переменную под знаком модуля. К ним относятся неравенства вида $|ax+b|<c$ и $|ax+b|>c$. Решение таких неравенств связывается с понятием расстояния между точками координатной прямой [12, с. 119].

При решении неравенств, содержащих знак модуля, следует разбить область допустимых значений неравенства на множества, на каждом из них выражения под знаком модуля сохраняют знак. На каждом таком множестве необходимо решить неравенство и объединить решения, которые получили, в множество решений первоначального неравенства [6, с. 128].

Неравенство вида f(|x|)<g(x), где f(x) и g(x)- некоторые функции, равносильно совокупности двух систем:

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases} f(x) < g(x); \\ x \ge 0; \end{cases} \\ \begin{cases} f(-x) < g(x); \\ x < 0. \end{cases}\end{array}\right.$$

Решение неравенств, содержащих знак модуля, является одной из сложных тем школьного курса математики в основной школе. Известно, что основные методы решения неравенств во многом совпадают с путями решения аналогичных уравнений (метод последовательного раскрытия модулей, графический метод), но следует помнить, что они не всегда оптимальны. Поэтому учитель должен познакомить школьников с другими, более рациональными способами, что приведет к быстрому получению окончательного результата.

Пример 4.

Решить неравенство $|x^2 - 4x - 8| \le x - 2$

Решение. Данное неравенство равносильно системе неравенств

$$\begin{cases} x^2 - 4x - 8 \le x - 2 \\ x^2 - 4x - 8 \ge -x + 2 \end{cases} \quad \begin{cases} x^2 - 5x - 6 \le 0 \\ x^2 - 3x - 10 \ge 0 \end{cases}$$

Корнями квадратного трёхчлена $x^2 - 5x - 6$ являются числа -1 и 6,старший коэффициент трёхчлена положителен. Поэтому множеством решений первого неравенства системы является отрезок [-1;6]. Корнями квадратного трёхчлена $x^2 - 3x - 10$ являются числа -2 и 5, старший коэффициент трёхчлена положителен. Поэтому множеством решений второго неравенства системы является объединение $(-\infty;2]\cup[5;+\infty)$.Следовательно, множество решений системы, а значит, и данного неравенства: [5; 6].

Пример 5.

Решить неравенство

$$||x^2 + 3x + 2| - 1| \ge 1$$

Решение 1. Данное неравенство равносильно совокупности неравенств

$$\left[\begin{array}{l} |x^2+3x+2|-1\ge 1 \\ |x^2+3x+2|-1\le -1 \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} |x^2+3x+2|\ge 2 \\ |x^2+3x+2|\le 0 \end{array}\right.$$

2.Неравенство $|x^2+3x+2|\ge 2$ равносильно совокупности:

$$\left[\begin{array}{l} x^2+3x+2\ge 2 \\ x^2+3x+2\le -2 \end{array}\right. \left[\begin{array}{l} x^2+3x\ge 0 \\ x^2+3x+4\le 0 \end{array}\right.$$

Неравенство $x^2+3x\ge 0$ приводится в виду $x(x+3)\ge 0$; множеством его решений является $(-\infty;-3]\cup[0;+\infty)$. Неравенство $x^2+3x+4\le 0$ решений не имеет, поскольку дискриминант квадратного трёхчлена x^2+3x+4 отрицателен, а старший положителен. Следовательно, множеством решений совокупности

$$\left[\begin{array}{l} x^2+3x\ge 0 \\ x^2+3x+4\le 0 \end{array}\right.,$$

а значит, и неравенства $|x^2+3x+2|\ge 2$ является $(-\infty;-3]\cup[0;+\infty)$.

Решим неравенство $|x^2+3x+2|\le 0$. В силу неотрицательности модуля это неравенство выполняется, только если $x^2+3x+2=0$, откуда $x=-2$ или $x=-1$. Таким образом, множество $\{-2;-1\}$ решений неравенства $|x^2+3x+2|\le 0$ состоит из двух чисел.

<u>Пример 6.</u>

Решить неравенство $|x^2-4x-8|\le x-2$

Решение. Данное неравенство равносильно системе неравенств

$$\begin{cases} x^2-4x-8\le x-2 \\ x^2-4x-8\ge -x+2 \end{cases} \quad \begin{cases} x^2-5x-6\le 0 \\ x^2-3x-10\ge 0 \end{cases}$$

Корнями квадратного трёхчлена x^2-5x-6 являются числа -1 и 6,старший коэффициент трёхчлена положителен. Поэтому множеством решений первого неравенства системы является отрезок [-1; 6].

Корнями квадратного трёхчлена $x^2-3x-10$являются числа -2 и 5, старший коэффициент трёхчлена положителен. Поэтому множеством решений второго неравенства системы является объединение

$(-\infty;2\ ]\cup[5;+\infty)$.Следовательно, множество решений системы, а значит, и данного неравенства: [5; 6].

Пример 7.

Решить неравенство $\left||x^2+3x+2|-1\right|\geq 1$

Решение 1. Данное неравенство равносильно совокупности неравенств

$$\left[\begin{array}{l}|x^2+3x+2|-1\geq 1\\ |x^2+3x+2|-1\leq -1\end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l}|x^2+3x+2|\geq 2\\ |x^2+3x+2|\leq 0\end{array}\right.$$

2.Неравенство $|x^2+3x+2|\geq 2$ равносильно совокупности:

$$\left[\begin{array}{l}x^2+3x+2\geq 2\\ x^2+3x+2\leq -2\end{array}\right. \left[\begin{array}{l}x^2+3x\geq 0\\ x^2+3x+4\leq 0\end{array}\right.$$

Неравенство $x^2+3x\geq 0$ приводится в виду $x(x+3)\geq 0$. Изобразим решение неравенства графически (Рис. 16). Нулями этого неравенства являются числа 0 и -3.

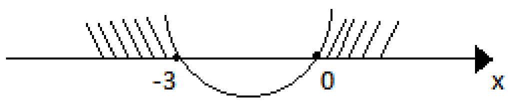


Рис. 16.

множеством его решений является $(-\infty;-3]\cup[0;+\infty)$.

Неравенство $x^2+3x+4\leq 0$решений не имеет, поскольку дискриминант квадратного трёхчлена x^2+3x+4 отрицателен, а старший положителен. Изобразим решение неравенства графически (Рис. 17).

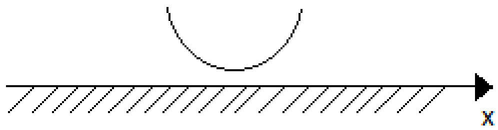


Рис. 17.

Следовательно, множеством решений совокупности

$\left[\begin{array}{l}x^2+3x\geq 0\\ x^2+3x+4\leq 0\end{array}\right.$, а значит, и неравенства $|x^2+3x+2|\geq 2$ является $(-\infty;-3]\cup[0;+\infty)$.

3. Решим неравенство $|x^2+3x+2|\leq 0$. В силу неотрицательности модуля это неравенство выполняется, только если $x^2+3x+2=0$, откуда $x=-2$ или $x=-1$.

Таким образом, множество $\{-2;-1\}$ решений неравенства $|x^2+3x+2|\le 0$ состоит из двух чисел.

Пример 8.

Рассмотрим более сложное неравенство: $\dfrac{(|x-3|-x-13)(\sqrt{x+6}-2x+3)}{x^2-16}\le 0.$

Решение. Неравенство представлено в стандартном виде. Разложим знаменатель на множители:

$$\frac{(|x-3|-x-13)(\sqrt{x+6}-2x+3)}{(x-4)(x+4)}\le 0.$$

ОДЗ зададим системой: $\begin{cases} x\ge 6; \\ x\ne \pm 4. \end{cases}$

Найдём нули функции, для этого решим уравнения

$|x-3|=x+13$ и $\sqrt{x+6}=2x-3$

$$|x-3|=x+13 \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge -13; \\ \left[\begin{array}{l} x-3=x+13; \\ x-3=-x-13; \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge -13; \\ \left[\begin{array}{l} 0=16; \\ 2x=-10; \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow x=-5.$$

$$\sqrt{x+6}=2x-3 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-3\ge 0; \\ x+6=4x^2-12x+9; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x\ge 1{,}5; \\ 4x^2-13x+3=0; \end{cases}$$

$4x^2-13x+3=0$

$D=169-48=121=11^2;$

$x=\dfrac{13-11}{8}=\dfrac{1}{4};$ $x=\dfrac{1}{4}$ не удовлетворяет условию неравенства.

$x=\dfrac{13+11}{8}=3.$

Решим неравенство методом интервалов, Рис. 18:

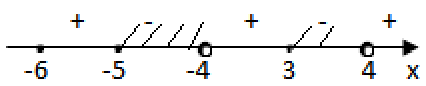


Рис. 18.

Ответ: $[-5;-4)\cup[3;4)$.

С.Н. Олехник [6] рассматривает стандартные и нестандартные способы решений на одном из видов неравенств, содержащих знак модуля:

$|x+2|+|x-5|>|2x-3|$.

Способ 1 (стандартный) – метод последовательного раскрытия модулей.

Найдём нули каждого из выражений, стоящих под знаком модуля: $x+2=0$, $x-5=0$, $2x-3=0$

$x=-2$; $x=5$; $x=1{,}5$

Числа –2, 1,5 и 5 разбивают числовую прямую на 4-е промежутка (Рис. 19):

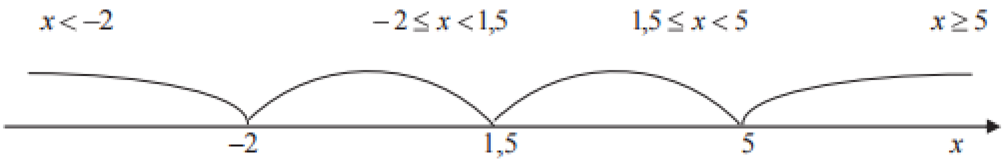


Рис. 19.

Определим знаки каждого из выражений, стоящих под знаком модуля, в каждом из промежутков. Составим таблицу знаков (Табл. 4).

Таблица 4

Таблица знаков

Промежутки / Подмодульные выражения	x < -2	-2≤x < 1,5	1,5 ≤x < 5	x ≥ 5
x + 2	–	+	+	+
x – 5	–	–	–	+
2x – 3	–	–	+	+

1) Если $x<-2$, то имеем систему

$$\begin{cases} x<-2, \\ -(x+2)-(x-5)>-(2x-3); \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x<-2, \\ -2x+3>-2x+3; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x<-2, \\ 0x>0(\textit{неверно}). \end{cases}$$

Система не имеет решений.

2) Если $-2\le x<1{,}5$, то имеем систему

$$\begin{cases} -2\le x<1{,}5, \\ (x+2)-(x-5)>-(2x-3); \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2\le x<1{,}5, \\ 2x>-4; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2\le x<1{,}5, \\ x>-2. \end{cases}$$

Изобразим решение системы неравенств графически (Рис. 20).

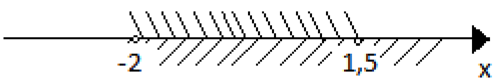


Рис. 20. Решение системы: $x\in(-2;1{,}5)$.

3) Если $1{,}5 \le x < 5$, то имеем систему

$$\begin{cases} 1{,}5 \le x < 5, \\ (x+2)-(x-5) > -(2x-3); \end{cases}$$

Изобразим решение системы неравенств графически (Рис. 21).

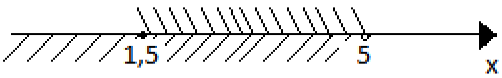


Рис. 21. Решение системы: $x \in [1{,}5;5)$.

4) Если $x \ge 5$, то имеем систему

$$\begin{cases} x \ge 5, \\ (x+2)+(x-5) > (2x-3); \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 5, \\ 2x-3 > 2x-3; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 5, \\ 0x > 0(\textit{неверно}). \end{cases}$$

Система не имеет решений.

Объединяем решения в пунктах 2) и 3). Изобразим решение системы неравенств графически (Рис. 22).

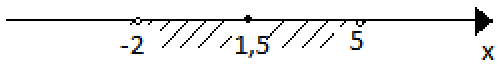


Рис. 22.

Получаем решение исходного неравенства: промежуток (-2; 5). Ответ: (-2; 5).

Метод последовательного раскрытия модулей является одним из самых простых и удобных способов решения неравенств. Школьники, освоив этот метод на практике при решении простых неравенств, как оказывает практика, почти никогда не ошибаются, так как решение сводится к алгоритму действий, при котором сложно допустить ошибку. Недостатками этого метода является громоздкость решения, которая влечет за собой значительную потерю времени, которое в условиях сдачи ОГЭ и ЕГЭ является особо важным фактором.

Способ 2 (стандартный) – графический метод. Графики обеих функций построим в одной системе координат: y=|x+2|+|x-5| и y=|2x-3|.

Чтобы построить ломаную, которая является графиком функции y=|x+2|+|x-5| (сплошная линия), применим одним из самых простых способов.

1) Найдём вершины. Абсциссы вершин – это нули выражений, которые стоят под модулем. Вершина P1: x + 2=0, x1= -2. Значение функции при x1 = -2 и y1=|−2+2|+|−2−5|=|−7|=7. P1(−2;7).

Вершина P2: $x-5=0$, $x2=5$. Значение функции при $x2=5$ и $y2=|5+2|+|5-5|=|7|=7$. P2(5;7).

2) Возьмём по одному значению x – слева от абсциссы вершины P1 и правее абсциссы вершины P2. Получим: Точка P3: $x3=-4$, $y3=|-4+2|+|-4-5|=|-2|+|-9|=2+9=11$. P3(−4;11). Точка P4: $x4=7$, $y4=|7+2|+|7-5|=|9|+|2|=9+2=11$. P4(7;11).

3) Соединим точки ломаной (Рис. 23), которые получили: P3(−4;11), P2(5;7), P4(7;11). В этой же системе координат построим ещё один график функции $y=|2x-3|$ (пунктирная линия), используя правило (алгоритм) построения графиков функций вида $y=|f(x)|$.

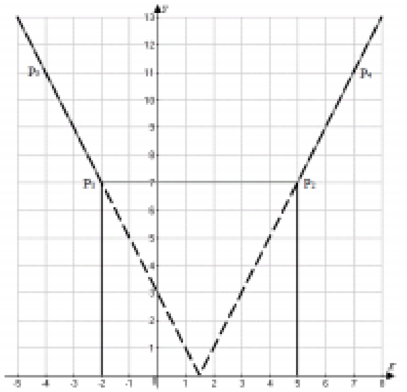


Рис. 23.

На интервале (−2; 5) график функции $y=|x+2|+|x-5|$ расположен над графиком функции $y=|2x-3|$, а это означает, что неравенство $|x+2|+|x-5|>|2x-3|$ для указанных значений x справедливо. Ответ: (−2; 5).

Графический метод - это стандартный способ решения любых неравенств, несмотря на то, что в школьной учебной программе он занимает очень скромное положение или вообще не изучается. Но его по праву можно назвать наиболее эффективным и рациональным в силу его наглядности. Напомним, что способность строить графики как по точкам, так и с помощью геометрических преобразований является обязательным для любого ученика средней школы.

Способ 3 (нестандартный)– способ перехода к равносильной системе и (или) совокупности. При решении неравенства этим способом воспользуемся правилами:

$$\left|f(x)\right| < g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) < g(x), \\ f(x) > -g(x). \end{cases} (1)$$

$$\left|f(x)\right| > g(x) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x) > g(x), \\ f(x) < -g(x). \end{array}\right. (2)$$

Для данного неравенства, перепишем его в удобном виде |2x−3| < |x+2|+|x−5| применим для начала правило (1), а для решения оставшихся неравенств – правило (2). Получим:

$$|2x-3| < |x+2| + |x-5| \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-3 < |x+2| + |x-5|, \\ 2x-3 > -|x+2| - |x-5|; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |x+2| > 2x-3-|x-5|, \\ |x+2| > -2x+3-|x-5|; \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x+2 > 2x-3-|x-5|, \\ x+2 < -2x+3+|x-5|, \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} x+2 > -2x+3-|x-5|, \\ x+2 < 2x-3+|x-5|; \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} |x-5| > x-5, \\ |x-5| > 3x-1, \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} |x-5| > -3x+1, \\ |x-5| > -x+5. \end{array}\right. \end{cases}$$

Учтём, что неравенство |f(x)| > f(x) верно для всех значений x, которые удовлетворяют условию, f(x) < 0 а неравенство |f(x)| > −f(x) – для x удовлетворяющих условию f(x) > 0 в таком случае последняя система совокупностей будет равносильна следующей:

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} x < 5, \\ x < -2, \\ x < 1{,}5, \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} x > 1{,}5, \\ x > -2, \\ x > 5; \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 5, \\ x > -2. \end{cases}$$

Ответ: $(-2;5)$.

Этот способ решения неравенств может изначально не вызывать восхищения у учащихся, потому что, во-первых, решение кажется довольно сложным и запутанным, а во-вторых, школьники всегда испытывают трудности при равносильных переходах от неравенства к системе или к совокупности неравенств. Хотя, если тщательно проанализировать решение, то в его реализации мы не «ничего не обнаружили» и не использовали никаких сложных, трудно запоминающихся свойств. Правила 1 и 2 знакомы школьникам, и они всегда успешно применяются на практике в отдельной форме. Разумеется, применение этого метода к неравенствам этого типа не является оптимальным и рациональным, но для более сложных примеров этот метод будет лучшим и быстро приведет ученика к правильному ответу.

Способ 4 (нестандартный) – применение конкретного определённого правила. Стоит отметить, что данное неравенство имеет вид |a|+|b|>||a+b|, тогда, для решения этого неравенства можно применить правило |a|+|b|>|a+b|⇔a·b < 0. Естественно, большая часть учащихся это правило не помнит или не знает вообще, но, можно применить свойства неравенств: если x и y – неотрицательные числа и x>y, то $x^n > y^n$, где n − любое натуральное число, легко поможет вывести его самостоятельно. Действительно,

$$|a| + |b|>|a + b|\Leftrightarrow(|a| + |b|)^2 >|a + b|^2 \Leftrightarrow a^2 + 2|ab| + b^2 > a^2 + 2ab + b^2 \Leftrightarrow$$

$$\Box\ 2|ab| > 2ab \Leftrightarrow |ab| > ab \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} ab > 0, \\ ab > ab, \end{cases} \\ \begin{cases} ab < 0, \\ -ab > ab, \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow ab < 0.$$

Итак, чтобы таким нестандартным образом решить неравенство, необходимо запомнить классическое правило: «если обе части неравенства неотрицательны, то его обе части можно возвести в квадрат» и иметь возможность реализовать это. Опираясь на вышесказанное, надо решить такое неравенство |x+2|+|x−5| > |2x−3| Решение: |x+2|+|x−5| > |2x−3| ⇔ |x+2|+|x−5| > |(x+2)| + (x−5)| ⇔ (x+2)(x−5) < 0 при решении последнего квадратного неравенства, получим ответ (−2; 5). Как видим: красиво, быстро и просто. Ответ: (−2; 5).

Очевидно, что ученики не будут применять нестандартные методы решения именно для неравенства этого типа, поскольку аналитическое решение (например, методом последовательного раскрытия модулей) или графическими методами у них не вызывает ни сомнений, ни трудностей[7].

Итак, для решения неравенств с модулем и иррациональных неравенств важно сделать равносильные переходы от одного неравенства к другому, от неравенства к системе или совокупности неравенств.

§ 8. Методические рекомендации обучения неравенствам в курсе алгебры основной школы

Чтобы добиться успеха в своей работе учителю необходимо изучить методические рекомендации своих коллег, которые достигли хороших результатов.

Представим методические особенности изучения линейных неравенств:

1. В начальной школе сравнивались объекты по разным основаниям (по возрасту, по стоимости и т.д.), что сформулировало определение неравенства, как результата сравнения. Одна из проблем основной школы связана с переходом от работы с числом к работе с переменными величинами. Ученики не могут понять, что значит «решить» результат сравнения. Прежде чем объяснять материал по теме «Линейные неравенства», необходимо повторить понятие числовые промежутки, используя геометрическую интерпретацию понятий «больше» и «меньше». Повторение может быть выполнено в устных упражнениях с использованием таблицы или при проведении математического диктанта. Можно включить такие упражнения, как чтение промежутков, определение наибольших и наименьших целочисленных значений в данном интервале. Переход от простейших неравенств к их геометрической модели в виде числовых промежутков.

2. Изучение темы «Линейные неравенства» возможно в следующей последовательности:

- ввести определение линейного неравенства с одной переменной;
- определение строгих и нестрогих неравенств;
- что означает решить неравенство;

- понятие равносильных неравенств можно показать на примере.

3. Свойства неравенств с доказательством следует разобрать на доске. Рассмотреть алгоритм решения линейных неравенств, имеющих одну переменную, он аналогичен алгоритму решения линейных уравнений. Например:

Свойство. Если a>b и b>c, то a>c.

Решить неравенства: а) 3x+12≤0; б) $-5x-\frac{15}{22}\le 0$.

4. Одна из трудностей заключается в делении или умножении обеих частей неравенство на одно и то же отрицательным числом. Чтобы школьники поняли, по какой причине знак неравенства при делении на отрицательное число меняется, лучше разобрать несколько примеров:

Известно, что m<n. Заменить знак «∗» знаком «<» или «>» так, чтобы получилось верное неравенство -9,8m∗-9,8n.

Определить, какое из чисел k и n больше, если k−14<n−14.

В данном случае навык формируется методом проб и ошибок.

5. После решения неравенства ответ показывается на числовой прямой, как луч или открытый луч. Но, помимо сказанных промежутков, решением может быть как сама числовая прямая, так и пустое множество.

6. Типичные ошибки при решении линейных неравенств:

- $x<5 \Rightarrow x\in(5;+\infty)$.

- Указать наибольшее целочисленное решение неравенства $x<5$. Ответ: 5.

- $-x<1; x<-1$.

Методические особенности изучения квадратных неравенств:

1. Прежде чем объяснять новый материал, необходимо повторить квадратное уравнение и способы его решения, построение графика квадратичной функции.

2. Изучение нового материала возможно в следующей последовательности:

- ввести определение квадратного неравенства с одной переменной;

- решить неравенство вида $ax^2+bx+c*0$ графическим методом, где «*» - один из знаков «>», «<», «$\le$», «$\ge$» и проследить в каких случаях и на сколько частей парабола делит ось абсцисс;
- заменить построение точного графика эскизом.

3. Трудности заключаются в определении направления ветвей параболы, определении знака на каждом промежутке (Табл. 5).

Таблица 5

Типичные ошибки учащихся при решении квадратных неравенств

Решить неравенство	Неправильно	Правильно
$-x^2+5x-6<0$	$-(x-2)(x-3)<0$, $x\in(2;3)$. Ответ: $(2; 3)$	$x^2-5x+6<0$, Ответ: $(-\infty; 2)\cup(3; +\infty)$
$x^2+6x+9\ge 0$	$(x+3)^2\ge 0$, $x+3\ge 0$, $x\ge -3$. Ответ: $[-3; +\infty)$.	$(x+3)^2\ge 0$ выполняется для всех значений x, значит x – любое число.Ответ: $(-\infty; +\infty)$
$x^2-4x+4>0$	$(x-2)^2>0$ выполняется для всех значений x, значит x – любое число. Ответ: $(-\infty; +\infty)$	При $x=2$ $(x-2)^2=0$, значит, $x\ne 2$. Ответ: $(-\infty; 2)\cup(2; +\infty)$
$x^2+10x+25\le 0$	$(x+5)^2\le 0$ – решений нет. Ответ: Ø	$(x+5)^2\le 0$ выполняется при единственном значении $x=-5$. Ответ: -5
$x^2+x+2>0$	Так как $D=1^2-2\cdot 2=-3<0$, то решений нет. Ответ: Ø	Так как старший коэффициент положительный и $D<0$, то при любом значении x левая часть неравенства положительна. Ответ: $(-\infty; +\infty)$
$x^2-9\le 0$	$x^2\le 9$,$x\le 3$. Ответ: $(-\infty; 3]$	$x^2\le 9$. Ответ: $[-3; 3]$
$x^2-9\ge 0$	$x^2\ge 9$,$x\ge 3$. Ответ: $[3; +\infty)$. Необходимо помнить, что нельзя извлекать корень из обеих частей неравенства.	$x^2\ge 9$. Ответ: $(-\infty; -3]\cup[3; +\infty)$

Чтобы отработать этот момент, на доске можно разобрать несколько небольших примеров.

4. После решения неравенства ответ показывается на числовой прямой, как интервал, отрезок, совокупность двух лучей, или открытых лучей. Так же решением может быть как сама числовая прямая или одна точка, так и пустое множество.

Методические особенности при изучении дробно-рациональных неравенств:

1. Решения неравенств по мере развития математики становятся более сложными. Важным этапом так же является определение ОДЗ, так как ответ получается из последней строки, а само неравенство находится в первой строке.

Перед изучением темы следует вспомнить определение рационального числа, дробно-рационального уравнения и способы его решения. А так же методы разложения многочленов на множители.

2. Далее можно записать под диктовку алгоритм решения дробно-рациональных неравенств. Ввести понятие «метод интервалов».

3. На доске решить дробно-рациональное неравенство, опираясь на алгоритм.

4. Типичные ошибки.

- Решить неравенство: $\frac{3x+5}{x+7} \geq 0$. Решение: $3x+5 \geq 0$.

- $\frac{3x+5}{x+7} \geq 1 \Rightarrow 3x+5 \geq x+7$.

- Неверное расставление знаков при решении неравенств методом интервалов.

- Забывают ОДЗ.

Методические особенности при изучении иррационального неравенства:

1. Перед изучением темы стоит вспомнить, что такое ОДЗ, иррациональное число, способы решения иррациональных уравнений.

2. Решение иррациональных неравенств сводится к преобразованию данного неравенства к рациональному. Тут следует отработать тот факт, что при возведении в нечетную степень обеих частей неравенства всегда получается неравенство, равносильное данному; при возведении в чётную степень получим равносильное неравенство данному только в том случае, если обе части исходного неравенства неотрицательны. Либо можно решать

это неравенство методом интервалов. Для этого найти нули неравенства и ОДЗ.

3. Типичные ошибки при изучении иррациональных неравенств:

- забывают находить ОДЗ или находят её неправильно;

- ошибки при переходе к равносильному неравенству;

- не знают соответствующий материал;

- вычислительные ошибки;

- учащиеся испытывают затруднения при решении неравенства, при виде самого неравенства, их пугает его вид.

Методические особенности изучения неравенств с модулем:

1. Перед изучением темы следует вспомнить определение модуля и геометрический смысл модуля.

2. Далее можно разобрать простые примеры неравенств с модулем и решить их, применяя геометрический смысл модуля. Например: $|x| < 3;$ $|x| > 0;$ $|x| < 0;$ $|x| < -1$.

3. Сделать вывод из предыдущего пункта, когда неравенство, содержащее переменную под знаком модуля, равносильно системе неравенств, а когда совокупности. Уточнить, какие условия нужно соблюдать при решении неравенств с модулем.

4. Типичные ошибки:

- Решить неравенство: $|x| < -1$. Ответ: $x \in (-1;1)$.

- Решить неравенство: $-|x| < 1$. Ответ: $x \in (-\infty;-1) \cup (1;+\infty)$.

- Забывают, чему равносильно неравенство: системе или совокупности.

- Решить неравенство: $|x| \le 0$. Решений нет.

Методические рекомендации рассматривают порядок, определяют акценты и логику изучения определённой темы. Они предполагают раскрытие частных методов, разработанных на основе положительного опыта других учителей.

Выводы по второй главе

Во второй главе рассмотрены методические особенности обучения теме «Неравенства» в основной школе.

1. Рассмотрены методические особенности изучения темы «Линейные неравенства». Решение линейных неравенств очень похоже на решение линейных уравнений. Хоть тема и простая, но ошибки учащиеся допускают довольно часто. Тот факт, что происходит смена знака слагаемого на противоположный при переносе из одной части неравенства в другую уже отработан на решении уравнений. Однако, смена знака неравенства на противоположный при умножении или делении обеих частей неравенства на отрицательное число – правило, на котором постоянно спотыкаются школьники. Для его отработки нужно разбирать как можно больше устных примеров, а так же можно проводить математические диктанты.

2. Приведены методические особенности изучения тем «Квадратные неравенства» и «Дробно-рациональные неравенства». Для изучения этих тем учащиеся должны уметь решать квадратные уравнения, уметь определять направление ветвей параболы и количество точек пересечения параболы с осью абсцисс. При решении дробно-рациональных неравенств применяется метод интервалов. Очень важно учитывать ОДЗ и отмечать его выколотыми точками на оси абсцисс. Основной ошибкой является неумение определить знак функции на каждом промежутке, а так же, незнание тех случаев, когда ответом будет одна точка или множество действительных чисел.

3. Изучены методические особенности решения иррациональных неравенств и неравенств с модулем. Здесь важно учитывать ОДЗ для иррационального выражения, для каждого вида неравенства знать условия, при которых решение возможно, обязательно указывать эти условия. Чётко понимать, чему равносильно данное неравенство.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Содержание линии неравенств раскрывается на продолжении всего школьного курса математики. Принимая во внимание важность и обширность материала этой линии, мы еще раз отмечаем целесообразность на заключительных этапах обучения предлагать достаточно разнообразные и сложные задачи, призванные активировать наиболее важные компоненты этой линии, основные понятия и основные методы решения, исследования и обоснования задач.

Выводы проведённого исследования:

1. Логико-математический анализ - знание целей обучения содержанию темы и основных результатов обучения; знание того, каким объектам и понятиям даются определения, знание формулировок определений, какие математические утверждения есть в теме; определение вида этих утверждений; знание того, как они раскрываются в учебнике; знание функций геометрического и алгебраического материала в учебном пособии и принципы использования данного материала в этой теме. А так же умение решать типовые задачи темы; знание методов решения, которые используются в школе; знание требований к оформлению задач, представляемых школьной программой.

2. Методическое планирование - это составление планов каждого урока. Оно предназначено для поиска оптимальных путей реализации таких функций, как образовательные, развивающие и воспитательные в системе уроков по разделу учебной программы. Успех методического планирования зависит в основном от того, насколько ясно учитель представляет, чему учащиеся должны научиться.

3. Из анализа учебников можно сделать вывод, что тема «Неравенства» рассматривается, как правило, в 8-9 классах. В разных учебниках сильно отличается последовательность вводимого материала. Более подробно материал рассматривается в учебниках углубленного уровня, так как на

изучение данной темы по таким учебникам отводится наибольшее количество времени.

4. Рассмотрен опыт работы учителей математики по теме исследования. Таким образом, можно избежать некоторых ошибок на уроках математики, выделить главное и уделить больше времени отработке определённых этапов. Учителя, опираясь на педагогический опыт своих коллег, изучают условия и средства успешного решения проблем учебно-воспитательного характера. В их опыте можно выделить элементы новизны, творчества, оригинальности.

5. Рассмотрены методические особенности изучения темы «Линейные неравенства». Основной проблемой составляет является смена знака неравенства на противоположный при умножении или делении обеих частей неравенства на отрицательное число. Для его отработки нужно разбирать как можно больше устных примеров, а так же можно проводить математические диктанты.

6. Приведены методические особенности изучения тем «Квадратные неравенства» и «Дробно-рациональные неравенства». При решении дробно-рациональных неравенств применяется метод интервалов. Очень важно учитывать ОДЗ и отмечать его выколотыми точками на оси абсцисс. Основной ошибкой является неумение определить знак функции на каждом промежутке, а так же, незнание тех случаев, когда ответом будет одна точка или множество действительных чисел.

7. Изучены методические особенности решения иррациональных неравенств и неравенств с модулем. Здесь важно учитывать ОДЗ для иррационального выражения, для каждого вида неравенства знать условия, при которых решение возможно, обязательно указывать эти условия. Чётко понимать, чему равносильно данное неравенство.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Алимов, Ш.А. Алгебра. 8 класс [Текст]: учеб. для общеобразоват. организаций / Ш.А. Алимов, Ю.В. Сидоров и др. – 19-е изд. - М.: Просвещение, 2012. – 255 с.
2. Алимов, Ш.А., Алгебра. 9 класс [Текст]: учеб. для общеобразоват. организаций / [Ш.А. Алимов, Ю.М. Колягин, Ю.В. Сидоров и др.].- 17-е изд.- М.: Просвещение, 2012. – 287 с.
3. Блох, А.Ш. Методика преподавания математики в средней школе: Общая методика [Текст]: уч. пос. для студ. пед. инст-в по спец.2104 "Математика" и 2105 "Физика"/ А. Ш. Блох, Е.С. Канин и др. Сост.Е.С. Черкасов, А.А. Столяр. - М.: Просвещение, 1985. -336 с.
4. Боровских, А.В., Веревкина В.Е. Предметные и метапредметные проблемы школьного курса математики. Тема «Неравенства» [Электронный ресурс] / А.В. Боровских, В.Е. Веревкина // Наука и школа. - 2015. - № 5. - С. 77-87.-Режимдоступа: http://elibrary.ru/download/elibrary_24852670_58842141.pdf Последнее обновление 07.05.2015 г.
5. Буфеев, С.В., Буфеев, И.С. О разумных и неразумных требованиях к выполнению письменной экзаменационной работы. / С.В. Буфеев, И.С. Буфеев / Математика в школе. – 2015. - №4. – С. 3- 5.
6. Вавилов, В.В. Задачи по математике. Уравнения и неравенства. Справочное пособие. / Вавилов, В.В., Мельников, И.И., Олехник, С.Н., Пасиченко, П.И. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1987. – 240 с.
7. Далингер, В.А., Пустовит, Е.А. Различные способы решения неравенств вида |f(x)|+|g(x)|>|f(x)+g(x)| [Электронный ресурс] / В.А. Далингер, Е.А. Пустовит // Ученые записки Забайкальского государственного университета. Серия: Профессиональное образование, теория и методика обучения.-2012.-№6.-С.124-128.-Режим доступа:

http://elibrary.ru/download/elibrary_18076619_11997811.pdf Последнее обновление 10.01.2012.

8. Зив, Б.Г., Гольдич, В.А. Дидактические материалы по алгебре для 7 класса / Б.Г. Зив, В.А. Гольдич – 13-е изд.- СПб.: «Петроглиф»: «Виктория плюс», 2013. – 136 с.

9. Колягин, Ю.М. Алгебра. 8 класс: учеб. для общеобразоват. организаций / Ю.М. Колягин, М.В. Ткачёва, Н.Е. Фёдорова, М.И. Шабунин.- М.: Просвещение, 2013. – 336 с.

10. Ладошкин, М.В., Фролова И.С. Изучение линейных неравенств и их систем в школьном курсе математики. / Ладошкин, М.В., Фролова, И.С. // Учебный эксперимент в образовании. - 2016. - № 2 (78). - С. 30-33. – Режим доступа: http://elibrary.ru/download/elibrary_26188515_18357522.pdf Последнее обновление 12.02.2016.

11. Лященко, Е.И. Лабораторные и практические работы по методике преподавания математики [Текст]: Учеб. пособие для студентов физ.-мат. спец. пед. институтов / Е.И. Лященко.- М.: Просвещение, 1988.-223 с.

12. Макарычев, Н.Г. Преподавание алгебры в 6-8 классах / Сост. Ю.Н. Макарычев, Н.Г. Миндюк. – М.: Просвещение, 1980. – 270 с.

13. Макарычев, Ю.Н. Алгебра. 8 класс [Текст]: учеб. для общеобразоват. организаций с прил. на электрон. носителе / Ю.Н. Макарычев, Н.Г. Миндюк, К.И Нешков, С.Б. Суворова; под ред. С.А. Теляковского.- М.: Просвещение, 2013.-287 с.

14. Макарычев, Ю.Н. Алгебра. 8 класс [Текст]: учеб. для учащихся общеобразоват. учреждений/ Ю.Н. Макарычев, Н.Г. Миндюк, К.И Нешков, И.Е. Феоктистов- 10-е изд., испр. - М.: Просвещение, 2010.-384 с.

15. Макарычев, Ю.Н. Алгебра. 9 класс [Текст]: учеб. для учащихся общеобразоват. учреждений/ Ю.Н. Макарычев, Н.Г. Миндюк, К.И Нешков, С.Б. Суворова; под ред. С.А. Теляковского- 16-е изд., испр. - М.: Просвещение, 2009.-271 с.

16. Макарычев, Ю.Н. Алгебра. 9 класс [Текст]: учеб. для учащихся общеобразоват. учреждений/ Ю.Н. Макарычев, Н.Г. Миндюк, К.И Нешков, И.Е. Феоктистов- 7-е изд., испр. и доп.- М.: Просвещение, 2008.-447 с.

17. Мордкович, А.Г. Алгебра. 8 класс. В 2ч. Ч.2. [Текст]: задачник для учащихся общеобразовательных учреждений / А.Г. Мордкович и др.; под ред. А.Г. Мордковича. – 12-е изд., испр. и доп. – М.: Мнемозина, 2010. – 271 с.

18. Мордкович, А.Г. Алгебра. 8 класс. В2 ч. Ч.1. [Текст]: учебник для учащихся общеобразовательных учреждений / А.Г. Мордкович. – 12-е изд., стер. - М.: Мнемозина, 2010. - 215с.

19. Мордкович, А.Г. Алгебра. 8 класс. [Текст]: учебник для классов с повышенным уровнем математической подготовки в общеобразовательных школах / Мордкович А.Г., Николаев Н.П. – 10-е изд.,М.: Мнемозина, 2013. - 256 с.

20. Мордкович, А.Г. Алгебра. 8 класс: технологические карты уроков по учебнику под редакцией А.Г. Мордковича/ авт.-сост. М.Г. Гилярова. – Волгоград: Учитель, 2016.-269 с.

21. Мордкович, А.Г. Алгебра. 9 класс. В 2 ч. Ч. 1. [Текст]: учебник для учащихся общеобразовательных учреждений / А.Г. Мордкович, П.В. Семенов. – 12-е изд.,стер. – М.: Мнемозина, 2010. – 224 с.

22. Мордкович, А.Г. Алгебра. 9 класс. В 2 ч. Ч. 2. [Текст]: задачник для учащихся общеобразовательных учреждений / А.Г. Мордкович и др.; под ред. А.Г. Мордковича. – 12-е изд., испр. и доп. – М.: Мнемозина, 2010. – 223 с.: ил.

23. Невяжский, Г.Л. Неравенства. [Текст]: пособие для учителей / Г.Л. Невяжский. – М.: Просвещение, 1947. – 204 с.

24. Олехник, С.Н., Потапов М.К., Пасиченко П.И. Нестандартные методы решения уравнений и неравенств. - М.: МГУ, 1991 г.

25. Орлов, В.В. Методика и технология обучения математике. Лабораторный практикум [Текст]: учеб. пособие для студентов матем.

факультетов пед. университетов / под науч. ред. В.В. Орлова. – М.: Дрофа, 2007. – 320 с.

26. Примерные программы основного общего образования по учебным предметам. Математика. - М.: Просвещение, 2009 — 96 с. - (Стандарты второго поколения).

27. Рурукин, А.Н. Алгебра. 8 класс. Поурочные планы к учебникам Макарычева, Ю.Н. и Алимова, Ш.А. – М.: Просвещение, 2011. – 395 с.

28. Рыжик, В.И. В который раз про ОДЗ и не только…/ В.И. Рыжик / Математика в школе. - 2006. - №8. – С. 36 – 38.

29. Стефанова, Н.Л. Методика и технология обучения математике. Курс лекций [Текст]: пособие для вузов / под научн. ред. Н.Л. Стефановой, Н.С. Подходовой. – М.: Дрофа, 2005.- 416 с.

30. Талочкин, П.Б. Неравенства и уравнения. Упражнения и методические указания. Из опыта работы учителя / П.Б. Талочкин; под ред. Н.М. Матвеева. – М.: Просвещение, 1970. – 160с.

31. Федеральный государственный образовательный стандарт основного общего образования (5-9 классы) [Электронный ресурс]. – Режим доступа: http://минобр-науки.рф/документы/2365. – Последнее обновление 07.02.2017.

32. Шестаков, С.А. Решаем неравенства / С.А. Шестаков / Математика. – 2015. – февраль. – С. 57.

33. Шестаков, С.А. Решаем неравенства / С.А. Шестаков / Математика. – 2015. – март. – С. 53.

34. Шестаков, С.А. Решаем неравенства / С.А. Шестаков / Математика. – 2015. – ноябрь. – С. 63-65.

35. Шноль, Д.Э. Устные упражнения в старших классах / Д.Э. Шноль / Математика. – 2016. – февраль. – С. 33 – 36.

36. Big Ideas Math: Algebra 1 Student Journal. – 2014. – 227 p.

37. Cvetkovski, Z. Inequalities: Theorems, Techniques and Selected Problems. - Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2012. – 455 p.

38. Herman, J., Kucera, R., Simsa, J., Dilcher. K. Equations and inequalities: elementary problems and theorems in algebra and number theory. – 2000. – 344 p.

39. Riasat, S. Basics of Olympiad Inequalities. – 2008. – 45 p.

40. Zawaira, A., Hitchcock, G. A primer for mathematics competitions. – New York, 2009. – 360 p.