МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Тольяттинский государственный университет»

Институт математики, физики и информационных технологий
(наименование института полностью)

Кафедра «Алгебра и геометрия»
(наименование кафедры)

44.03.05 «Педагогическое образование»
(код и наименование направления подготовки, специальности)

«Математика и информатика»
(направленность (профиль)/специализация)

БАКАЛАВРСКАЯ РАБОТА

на тему **«МЕТОДИКА ОБУЧЕНИЯ ДВИЖЕНИЯМ В КУРСЕ ГЕОМЕТРИИ ОСНОВНОЙ ШКОЛЫ»**

Студент С.Т. Гелашвили ______________

Руководитель д.п.н., профессор С.Н. Дорофеев ______________

Консультант к.п.н., А.В. Кириллова ______________

Допустить к защите

Заведующий кафедрой д.п.н., профессор Р.А. Утеева ______________

«____»__________2017 г.

Тольятти 2017

АННОТАЦИЯ

Цель бакалаврской работы состоит в том, чтобы выявить методические особенности обучения учащихся теме «Движения» в курсе геометрии основной школы и показать применение движений плоскости к решению планиметрических задач.

Понятие движения является важным, так как, опираясь на него, можно ввести общее понятие равенства геометрических фигур. Это, в свою очередь необходимо для обоснования правил построения фигур с заданными свойствами, а точнее, для этапа «исследование» в задачах на построение.

Бакалаврская работа состоит из введения, двух глав, заключения, списка литературы и приложений.

Глава I посвящена теоретическим основам обучения движениям в курсе геометрии основной школы. Вводятся понятия «параллельный перенос», «осевая симметрия», «центральная симметрия» и «поворот». Рассмотрены и доказаны их свойства. Представлены аналитические задания различных движений плоскости. Выявляются различные подходы к определению основных понятий движения в школьном курсе геометрии.

В *Главе II* составлены методические рекомендации по изучению тем «Параллельный перенос», «Центральная симметрия», «Осевая симметрия», «Поворот» в курсе геометрии основной школы, показано применение движений плоскости к решению планиметрических задач.

Список литературы содержит 34 наименования.

ABSTRACT

The title of the bachelor's thesis is «Methods of movements teaching in the course of geometry of the secondary school».

The author scrutinises about the movements of the subspace. In particular axial symmetry, central symmetry, parallel shift and rabattement are considered.

The aim of the work is to elucidate methodical specifics of teaching students to the subject "Movements" in the course of geometry of the secondary school and to show the use of movements of the subspace when solving planimetric problems.

The object of the bachelor's thesis is the process of geometry teaching in the course of the secondary school.

The subject of the bachelor's thesis is the methods of teaching students the "Movements" subject in the course of geometry in secondary school.

The bachelor's thesis contains two chapters.

In the first chapter the theory is considered. It shows how each of the movements is defined. We also examine and prove the characteristics of each of the movements.

The second chapter is methodological. In this chapter we give full coverage to methods of axial symmetry teaching, central symmetry teaching, parallel shift teaching and rabattement teaching. We show how to introduce each movement. Illustrates how to enter each movement. The problems and tasks which should be acquired by students at the initial stage of learning are given.

It can be concluded that the concept of motion is important, since, having it as an essential component, we can introduce the general concept of equality of geometric figures. This, in turn, it is necessary to justify the rules for constructing figures with given characteristics, or more precisely, for the «research» stage in construction problems.

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Актуальность исследования. Для каждого учащегося очень важно знать строение различных движений и уметь строить фигуры, симметричные данным фигурам относительно оси или точки; распознавать движения объектов в окружающем мире; распознавать симметричные фигуры в окружающем мире. Понятие движения важно,так как ,опираясь на него, можно ввести общее понятие равенства геометрических фигур. Это, в свою очередь необходимо для обоснования правил построения фигур с заданными свойствами, а точнее, для этапа «исследование» в задачах на построение.

Древнегреческий математик Фалес Милетский (625-547 г. до н.э.) первым начал аргументировать геометрические теории, связанные с движением. Именно из-за него геометрия стала преобразовываться в настоящую науку. Уже тогда он использовал движения, чтобы осуществлять свои доказательства [7, С. 154].

При доказательстве равенства углов при основании равнобедренного треугольника, Фалес решил воспользоваться осевой симметрией. Так же он применял ещё одно движение – параллельный перенос, при котором все точки фигуры смещаются на одно и то же расстояние в определённом направлении. С его помощью он доказал теорему, которая сейчас носит его имя.

В XYII веке профессор математики Бонавентура Кавальери (1598-1647) издаёт работу «Геометрия, изложенная новым способом при помощи неделимых непрерывного», где объясняет, что каждую фигуру можно представить в виде следов, которые линия оставляет при движении параллельно самой себе. Также даёт представление о телах, которые образуются при движении плоскостей [7, С. 155].

Мишель Шаль (1793-1880) математик, в 1837 г. выпустил труд «Исторический обзор происхождения и развития геометрических методов». В процессе его геометрических исследований ,он доказывает важнейшую теорему, в которой поворот и параллельный перенос, являются движениями, которые сохраняют свою ориентацию, а скользящая симметрия и осевая симметрия являются движениями, которые меняют ориентацию.

В XIX веке создана концепция геометрических преобразований, в частности, математическая теория движений (перемещений). Феликс Клейн (1849-1925) немецкий математик, дал классификацию всех существующих геометрических систем.

Фридрих Шур (1856-1932) немецкий математик, в 1909 г. следовал идеям Фалеса и Клейна, и разработал новую систему аксиом геометрии – основанную на рассмотрении движений. В его системе предлагается группа из трёх аксиом движения [7, С. 155].

Проблема исследования состоит в выявлении методических особенностей обучения учащихся теме «Движения» в курсе геометрии основной школы.

Объект исследования : процесс обучения геометрии в курсе основной школы.

Предмет исследования: методика обучения учащихся теме «Движения» в курсе геометрии основной школы.

Цель бакалаврской работы: выявить методические особенности обучения учащихся теме «Движения» в курсе геометрии основной школы и показать применение движений плоскости к решению планиметрических задач.

Основные задачи исследования:

1. Рассмотреть исторические аспекты развития понятия движение.

2. Ввести понятие параллельного переноса плоскости. Сформулировать и доказать основные свойства параллельного переноса.

3. Ввести понятие осевой симметрии. Сформулировать и доказать основные свойства осевой симметрии.

4. Ввести понятие центральной симметрии. Сформулировать и доказать основные свойства центральной симметрии.

5. Ввести понятие поворота плоскости. Сформулировать и доказать основные свойства поворота.

6. Рассмотреть методические основы обучения движений плоскости.

7. Выявить методические особенности применения параллельного переноса к решению планиметрических задач.

8. Выявить методические особенности применения осевой симметрии к решению планиметрических задач.

9. Выявить методические особенности применения центральной симметрии к решению планиметрических задач.

10. Выявить методические особенности применения поворота к решению планиметрических задач.

Для решения поставленных задач были использованы следующие методы исследования: наблюдение, сравнение, метод от противного, доказательства теорем и решения задач, анализ и синтез, аналогия, обобщения.

Практическая значимость результатов исследования составляют методические рекомендации обучения теме «Движения» учащихся 8-9-х классов и соответствующие применения движений плоскости к решению планиметрических задач, которые могут быть использованы учителями математики основной школы и студентами педагогических направлений подготовки в ходе педагогической практики.

На защиту выносятся:

1. Методические особенности по обучению учащихся теме «Движения» в курсе геометрии основной школы.

2. Применение движений плоскости к решению планиметрических задач в курсе геометрии основной школы.

Бакалаврская работа состоит из введения, двух глав, заключения, списка литературы

Список литературы содержит 34 наименования.

ГЛАВА I. ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ОБУЧЕНИЯ ДВИЖЕНИЯМ В КУРСЕ ГЕОМЕТРИИ ОСНОВНОЙ ШКОЛЫ

§1. Понятие движения плоскости

Идея движения, которая на рубеже XVI и XVIII вв. проникла в математику, в одной ее ветви вызвала к жизни понятие функциональной зависимости и понятие функции, в другой же ветви - в геометрической - привела к созданию понятия геометрического преобразования, играющего ту же роль в геометрии, что и понятие функции в анализе [26, С. 37].

Термин «движение» ассоциируется с определенным физическим действием: изменением положения тела без деформации. Именно с этим связано появление этого термина в математике. Однако в геометрии предметом исследования является не процесс, происходящий во времени, а лишь свойства фигуры и ее образа [14, С. 152].

В геометрии понятие движения имеет следующий смысл: во-первых, движение в геометрии всегда рассматривается без учета времени, во-вторых, учитывается только исходное и конечное положение фигуры.

Принято считать, что движение в геометрии есть преобразование данной фигуры в другую фигуру, равную данной, в силу чего между точками обеих фигур устанавливается взаимно однозначное соответствие [32, С. 278].

Представим себе, что каждой точке плоскости сопоставляется (ставится в соответствие) какая-то точка этой же плоскости, причем любая точка этой же плоскости оказывается сопоставленной некоторой точке, тогда говорят, что дано отображение плоскости на себя. Итак, движение плоскости – это отображение плоскости на себя [33, С. 294].

Наиболее широкое применение в элементарной геометрии имеют следующие виды движений (или перемещений):

1) поступательное перемещение, когда фигура на плоскости скользит по ней; при этом две точки фигуры могут описывать прямые линии, парал-

лельные между собой и направленные в одну сторону (параллельный перенос);

2) отражение от прямой (или зеркальное отражение, а также симметрия относительно прямой – осевая симметрия), когда каждая точка данной фигуры (прообраза) и соответствующая ей точка другой фигуры (образа) лежат на одном перпендикуляре к данной прямой – оси отражения (или оси симметрии) – на равных расстояниях от оси;

3) вращательное перемещение или просто вращение (а также поворот), когда каждая точка перемещаемой фигуры описывает дугу окружности, центр которой называется центром вращения; при этом все дуги имеют одно и то же направление , как и соответствующие им центральные углы, равные между собой; каждый угол характеризует величину вращения и называется углом поворота; таким образом, вращение вполне определяется своим центром, углом поворота и направлением.

В соответствии с указанными видами движений в курсе элементарной геометрии рассматриваются следующие виды геометрический преобразований: параллельный перенос, осевая симметрия (или отражение от прямой), центральная симметрия (или отражение от точки) и поворот [26, С. 36-37].

Осевая симметрия, центральная симметрия, поворот, параллельный перенос «преобразуют» каждую фигуру F в некоторую новую фигуру F', поэтому их называют геометрическими преобразованиями.

Если каждой точке X фигуры F поставлена в соответствие эта же точка X, то такое преобразование фигуры F называют тождественным. При тождественном преобразовании образом фигуры F является сама фигура F. Очевидно, что тождественное преобразование является движением [14, С. 150].

Движение связанно с равенством фигур, на это указывают следующие свойства движения.

Если преобразование является движением, то:

- образом прямой является прямая;
- образом отрезка является отрезок, равный данному;

– образом угла является угол, равный данному;

– образом треугольника является треугольник, равный данному.

Две фигуры называют равными, если существует движение, при котором одна из данных фигур является образом другой.

Запись $F = F_1$ означает, что фигуры F и F_1 равны.

Если существует движение, при котором фигура F_1 является образом фигуры F, то обязательно существует движение, при котором фигура F является образом фигуры F_1. Такие движения называют взаимно обратными [14, С. 152].

При изучении школьного курса геометрии идея движения иногда в явном, а чаще в неявном виде имеет широкое применение, начиная с первых уроков, посвященных этому предмету. Так, например, доказательство равенства простейших геометрических фигур – отрезков, углов, треугольников – проводится при помощи наложения, а этот способ есть не что иное, как движение в плоскости одной из сравниваемых фигур до совмещения ее с другой фигурой. Доказательство равенства симметричных фигур проводится при помощи перегибания чертежа (при осевой симметрии) или вращения в плоскости чертежа (при центральной симметрии), что тоже является видом движения [26, С. 37].

§2. Параллельный перенос, его аналитическое задание и свойства

В учебнике по геометрии Л.С. Атанасяна [2, С. 296] данным образом вводится понятие параллельного переноса.

Пусть дан m. *Параллельным переносом* на вектор m называется отображение плоскости на себя, при котором каждая точка S отображается в такую точку S_1, что вектор SS_1= m (Рис. 1).

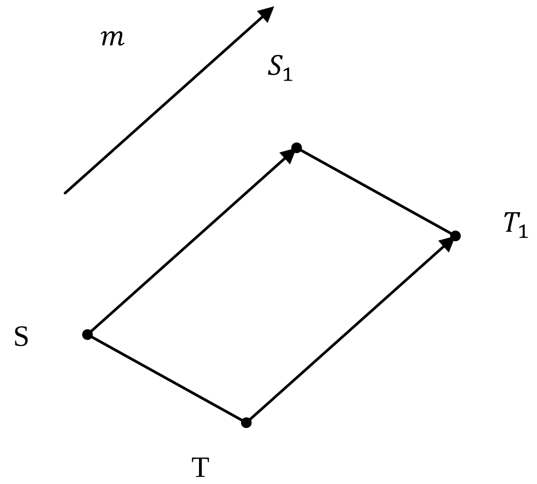

Рис. 1.

Параллельный перенос является движением, то есть отображением плоскости на себя, которое сохраняет расстояние.

Доказательство. Пусть при параллельном переносе на вектор a точки S и N отображаются в точки S_1 *и* T_1 (рис. 1) . Так как SS_1= a, TT_1=m, то SS_1=TT_1. Исходя из этого $SS_1 \parallel TT_1$ и $SS_1 = TT_1$, поэтому четырехугольник $SS_1 -$ *параллелограмм*. Следовательно, ST= S_1T_1, то есть расстояние между точками S и T будет равным расстоянию между точками S_1 *и* T_1 [2, С. 300].

Таким образом, параллельный перенос сохраняет расстояние между точками, из чего можно сделать вывод , что он является движением.

Аналитическое задание

Пусть на плоскости с осями координат Ox и Oy задана прямая JK. Каждая точка прямой параллельным переносом переходит в точки J' и K' на вектор n.

Пусть относительно заданной системы координат n имеет координаты (n_1, n_2). Тогда введем следующее определение: преобразование прямой JK в прямую $J' K'$, в котором каждые точки с координатами $(x_1;\ y_1)$ $и$ $(x_2;\ y_2)$ смещаются в точки с координатами $(x_1{+}n_1\ ;\ y_1{+}n_2)$ $и$ $(x_2{+}n_1;\ y_2{+}n_2)$, где n_1 и n_2 постоянные числа, называется параллельным переносом.

Таким образом, параллельный перенос задается следующими формулами:

$$\begin{matrix} x' = x_1 + n_1 \\ y' = y_1 + n_2 \end{matrix} \quad \text{и} \quad \begin{matrix} x' = x_2 + n_1 \\ y' = y_2 + n_2 \end{matrix} \ (1)$$

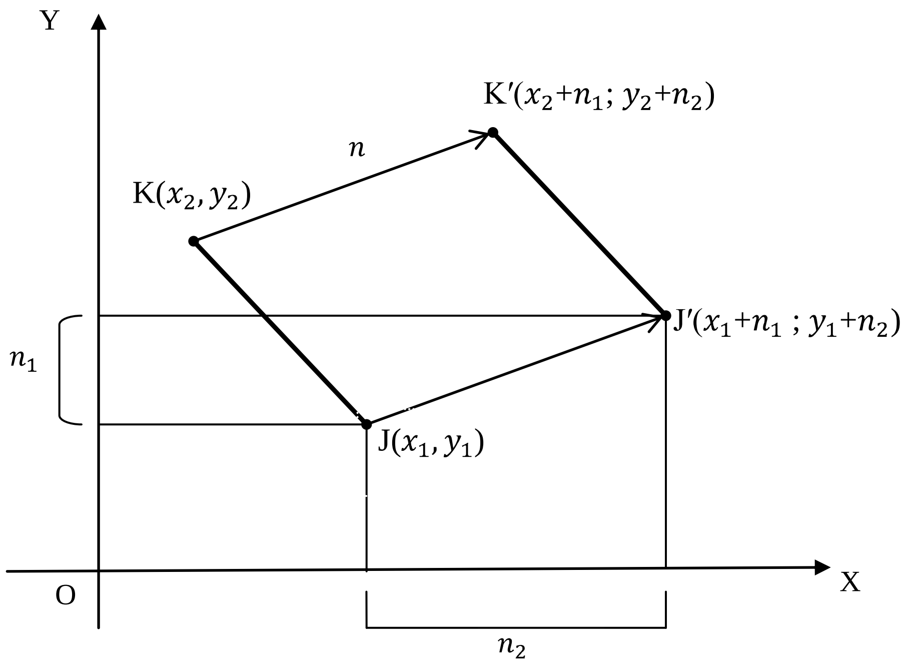

Рис. 2.

Параллельный перенос есть движение, т.к. все точки смещаются на одно и тоже расстояние (Рис. 2). Следовательно:

$JK^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$

$J'K'^2 = (x_2 - x_1 1)^2 + (y_2 - y_1)^2$

Следовательно, $JK = J'K'$[11, С. 98].

Свойства параллельного переноса

В учебнике А. В. Погорелова старый рассматривается и доказывается данное свойство параллельного переноса.

1. Каковы бы ни были две точки А и А′, существует и притом единственный параллельный перенос, при котором точка А переходит в точку А′.

Доказательство:

Начнем с доказательства единственности. Пусть X - произвольная точка фигуры и X′ − точка, в которую она переходит при параллельном переносе. Как мы знаем, отрезки X′A и A′X имеют общую середину O. Задание точки X однозначно определяет точку O - середину отрезка A′X, а точки A и O однозначно определяют точку X′, так как O является серединой отрезка A′X. Однозначность в определении точки X′ и означает единственность параллельного переноса.

Докажем существование параллельного переноса , переводящего точку A в A′. Введем декартовы координаты на плоскости. Пусть a_1, a_2 −координаты точки A и $a_1{}', a_2{}'$-координаты точки A′. Параллельный перенос, заданный формулами: $x' = x + a_1{}' - a_1$, $y' = y + a_2{}' - a_2$, переводит точку A в A'. Действительно, при $x = a_1$ и $y = a_2$, получаем: $x' = a_1', y' = a_2'$ [18, С.130].

В учебнике А. В. Погорелова рассматривается и доказывается данное свойство параллельного переноса [18, С. 101].

2. Параллельный перенос переводит отрезок в равный ему отрезок.

Доказательство:

Пусть концам отрезка AB параллельный перенос T сопоставляет точки A′ и B′. Возьмем любую точку X отрезка AB, тогда можно установить, что ее образ- точка X $= f(X)$ лежит между точками A′ и B′, т.е. на отрезке A′B′. Далее, каждая точка Y' отрезка A′B′ является образом некоторой точки Y отрезка AB, а именно той точки Y, которая удалена от точки A на расстояние A′Y'.

Следовательно, отрезок AB при параллельном переносе переводится в отрезок A′B′.

В учебнике по геометрии Л. С. Атанасяна рассматривается и доказывается данное свойство параллельного переноса [2, С. 299].

3. При параллельном переносе угол переходит в равный ему угол.

Доказательство:

Пусть при параллельном переносе $\angle MON$ отображается на $\angle M_1O_1N_1$, при этом точка M отображается в точку M_1, точка О отображается в точку O_1, точка N отображается в точку N_1. Параллельный перенос является движением, а ,значит, при ней сохраняется расстояние. Следовательно, $OM = O_1M_1$, ON=O_1N_1. Если ∠MON является неразвернутым, то ΔMON и $\Delta M_1O_1N_1$ равны по трем сторонам, а это означает, что $\angle MON$ =$\angle M_1O_1N_1$. Если же ∠MON развернутый, то будет и развернутым $\angle M_1O_1N_1$. Следовательно, эти углы равны [2, С. 299].

4. При параллельном переносе S на m плоскости всякая плоскость параллельная вектору m остается на месте.

В учебном пособии В. Г. Болтянского рассматривается и доказывается следующее свойство параллельного переноса [5, С. 29].

5. Фигура F', получающаяся из фигуры F параллельным переносом, равна фигуре F.

Доказательство:

В самом деле, пусть фигура F' получается из фигуры F параллельным переносом на вектор $a = MN$. В таком случае при перемещении фигуры F как твердое тело целого в направлении а на расстояние, равное длине вектора a, эта фигура совместится с F'. Так как фигуры F и F' могут быть совмещены друг с другом, то они равны.

6. Фигура F', получающаяся из данной окружности F с помощью параллельного переноса, представляет собой окружность, равную окружности F. Центр окружности F' получается из центра окружности F с помощью того же параллельного переноса.

Доказательство:

В самом деле, параллельный перенос переводит окружность F в окружность F' (свойство 2), а центр О окружности F, т.е. точку, удаленную от всех точек окружности F на расстояние r, - в точку O', удаленную на расстояние r от всех точек окружности F' (см. свойство 5) [5, С. 30].

Пример 1 (№1458 из учебника И.Ф. Шарыгина [27, С. 438])

В результате параллельного переноса точка A переходит в точку A', а прямая l – в прямую l', если: $A(-2;5)$, $A'(3;-4)$; уравнение прямой l есть $2x-3y=1$

Решение:

Поскольку при параллельном переносе все точки прямой $2x-3y=1$ переместятся в одном направлении и на одно расстояние, то новая прямая будет параллельна исходной, т. е. $2x-3y=b$. Вектор переноса AA' имеет координаты $(5;-9)$. Точка на прямой $2x-3y=1$ имеет координаты $(x;y)$, а на прямой $2x-3y=b$- координаты $(x+5;y-9)$. Отсюда $2(x+5)-3(y-9)=b$, $b=38$. Значит, $2x-3y=38$.

Пример 2 (№ 1163 из учебника Л. С. Атанасяна [2, С. 303]).

Начертите ΔABC , вектор KK_1, который не параллелен ни одной из сторон треугольника, и вектор $v \parallel AC$. Постройте $\Delta A_1B_1C_1$, который получится из ΔABC параллельным переносом: а) на вектор KK_1 ; б) на вектор v.

Решение:

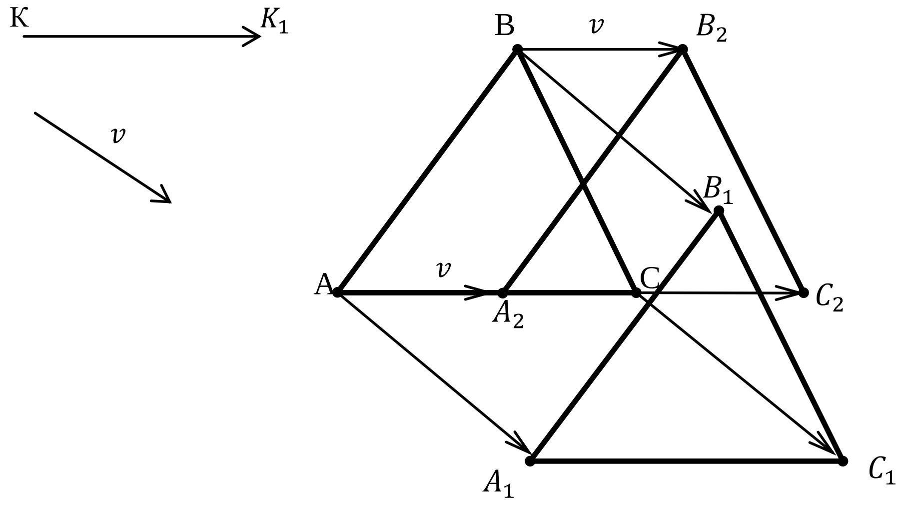

Рис. 3.

а) От вершин $\Delta\, ABC$ отложим векторы равные KK_1, которые не параллельны ни одной из сторон треукольника.

Получаем: $A \to A_1, B \to B_1\,, C \to C_1$.

Следовательно, $\Delta A_1B_1C_1$- искомый.

б) От вершин $\Delta\, ABC$ отложим векторы рав-ные v, который параллелен стороне AC;

Получаем; $A \to A_2, B \to B_2\,, C \to C_2$.

Следовательно, $\Delta A_2B_2C_2$ – искомый (Рис. 3).

Пример 3 (№ 1459 из учебника И.Ф. Шарыгина [27, С. 438]).

Найдите вектор параллельного переноса , если прямая , задаваемая уравнением $y = 3x - 2$, переходит в прямую $y = 3x + 4$, а прямая $3x + 2y = 2$ переходит в прямую $6x + 4y = 3$.

Решение:

Пусть вектор переноса $(a; b)$. Точка $(x; y)$ лежит на прямой $y = 3x - 2$, а точка с координатами $(x + a; y + b)$ лежит на прямой $y = 3x + 4$. Отсюда $b = 3a + 6$. Точка $(x_1; y_1)$ лежит на прямой $3x + 2y = 2$, а точка с координатами $(x_1 + a; y_1 + b)$ лежит на прямой $6x + 4y = 3$. Отсюда $6a + 4b + 1 = 0$. Составим систему уравнений и решим ее относительно a и b :

$$b = 3a + 6$$
$$6a + 4b + 1 = 0,$$

$6a + 4(3a + 6) + 1 = 0$

$6a + 12a + 24 + 1 = 0$

$18a + 25 = 0$

$18a = -25$

$a = -\frac{25}{18}.$

Теперь найдем b:

$b = 3 \cdot \;\; -\frac{25}{18} \;\; + 6$

$b = \;\; -\frac{25}{6} \;\; + 6$

$b = \ -\frac{25}{6} \ \ + \frac{36}{6}$

$b = \frac{11}{6}$.

Получим вектор переноса $\left(-\frac{25}{6};\frac{11}{6}\right)$. [27, С. 438]

§2. Осевая симметрия, ее аналитическое задание и свойства

В учебном пособии С. Н. Дорофеева данным образом введено определение осевой симметрии [11, С. 28].

Осевой симметрией с осью t называется преобразование плоскости на себя, которое каждую точку А плоскости переходит в такую точку $А'$, что прямая t служит серединным перпендикуляром к отрезку $АА'$ и делит его пополам. Прямая t называется осью симметрии.

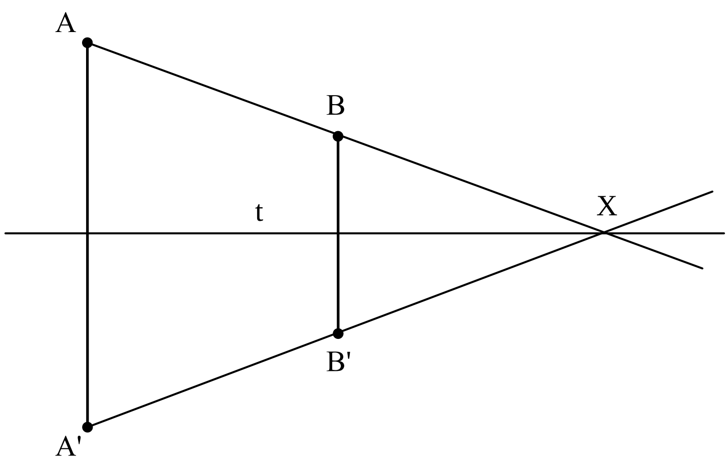

Рис. 4

Для того, чтобы показать, что осевая симметрия сохраняет расстояния между любыми двумя точками, нам нужно рассмотреть осевую симметрию Q с осью t . Возьмем произвольным образом две точки А и В (Рис. 4). Пусть $А'$ и $В'$ – образы этих точек при осевой симметрии Q. Расположения отрезка AB относительно оси t возможны двумя случаями.

Рассмотрим первый случай, когда отрезок АВ || t . Тогда черырехугольник $\mathrm{ABB'A'}$ – прямоугольник. Следовательно, $\mathrm{AB} = \mathrm{A'B'}$. Пусть теперь отрезок АВ не параллелен оси t . Точка X будет пересечением прямой АВ с осью t [11, С. 28].

По определению осевой симметрии получаем, что $t \perp \mathrm{AA'}$ и $t \perp \mathrm{BB'}$, и эта прямая проходит через их середины. Значит, высоты $\Delta X\mathrm{BB'}$ и $\Delta X\mathrm{AA'}$, опущенные из вершины X, лежат на одной прямой, также являются медианами и высотами данных треугольников. Значит, $\Delta\mathrm{XBB'}$ и $\Delta\mathrm{XAA'}$ равнобедренные. Следовательно, $\mathrm{XA} = \mathrm{XA'}, \mathrm{XB} = \mathrm{XB'}$. Откуда, $\mathrm{AB} = \mathrm{A'B'}$.

Таким образом, мы показали, что осевая симметрия сохраняет расстояния между любыми двумя точками, т.е. является движением.

Аналитическое задание

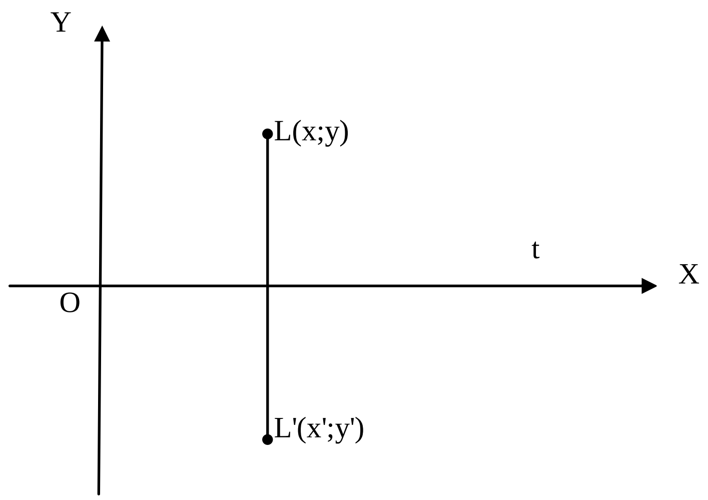

Рис. 5.

Рассмотрим на плоскости осевую симметрию Q с осью t. Зададим систему координат Оху , точка $\mathrm{O} \in t$. За ось Ox примем направленную прямую t. Ось ординат Оу выберем таким образом, чтобы она проходила через точку $\mathrm{O} \perp t$. На плоскости (Рис. 5) произвольно возьмем точку L с координатами (x, y) от-носительно системы координат Оху. С помощью осевой симметрии точка L перейдет в точку L' с координатами (x', y') [11, С. 29].

Найдем формулы,которые будут выражать координаты точки R' через координаты точки L. Отрезок $LL' \parallel Oy$, значит, первые координаты точек L и

L' совпадают. Так как отрезок LL'в точке пересечения с осью абсцисс делится пополам, отсюда следует, что вторые координаты этих точек отличаются только знаком [11, С. 30].

Таким образом, мы показали, что

$$\begin{matrix} x' = x \\ y' = -y \end{matrix} \qquad (2).$$

Свойства осевой симметрии

В учебнике А. В. Погорелова рассмотрено и доказано следующее свойство осевой симметрии [18, С. 117].

1. Точки, которые лежат на прямой, при осевой симметрии переходят в точки, которые лежат на прямой, при это сохраняется порядок их взаимного расположения.

Доказательство:

Возьмем на прямой a три различные точки K, L, P. Пусть для определения точка L лежит между точками K и P . Сначала докажем, что точки K_1, L_1, P_1 не лежат на одной прямой.

В случае если точки K_1, L_1, P_1 не лежат на прямой a, то они будут являться вершинами треугольника, поэтому $K_1P_1 < K_1L_1 + L_1P_1$. Пользуясь, определением движения можно сделать вывод, что $KP < KL + LP$. Однако, по аксиоме измерения отрезков $KP = KL + LP$, что приводит к противоречию. Это означает, что точка $L_1 \in K_1P_1$. Первое утверждение доказано.

Покажем теперь, что точка L_1 лежит между точками K_1и P_1. Предположим, что точка K_1 лежит между точками L_1и P_1, в таком случае $K_1L_1 + K_1P_1 = L_1P_1$, и, поэтому, $KL + KP = LP$, а это противоречит неравенству $KL + LP = KP$. Из этого следует, точка K_1 не может лежать между точками L_1и P_1.

По аналогии доказываем, что точка P_1 не может лежать между точками K_1 и L_1 .Можно сделать вывод, что если из трех точек K_1, L_1, P_1 одна лежит между двумя другими, то этой точкой может быть только L_1. [18, С. 119]

2. При осевой симметрии отрезок переходит в отрезок.

Доказательство следует из того, что, если некоторая точка X принадлежит отрезку AB, то прямая при осевой симметрии переведет точку A в A_1 ,а точку B в точку B_1,а точку X в X_1, которая будет принадлежать отрезку с концами в точках A_1 и B_1 . Следовательно, отрезок AB при осевой симметрии переводится в отрезок A_1B_1.

3. При осевой симметрии луч переходит в луч, полуплоскость – в полуплоскость [18, С. 120].

Доказательство следует из свойства 1.

4. При осевой симметрии параллельные прямые переходят в параллельные прямые.

Доказательство:

Пусть a и b – данные прямые, $a_1 и\ b_1$- прямые, на которые отображаются прямые a и b.По условию имеем $a\ \| b$.При доказательстве воспользуемся методом от противного. Предположим, что прямые $a_1 и\ b_1$ не параллельны. Это означает, что они пересекаются в некоторой точке A_1,но тогда существует точка A, которая при осевой симметрии переходит в точку A_1. Следовательно, точка A принадлежит как прямой a, так и прямой b, что противоречит условию $a\ \| b$. Из этого можно сделать вывод , что при осевой симметрии параллельные прямые переходят в параллельные прямые [15, С. 395].

5. При осевой симметрии угол переходит в равный ему угол.

Доказательство:

Пусть при осевой симметрии $\angle MON$ отображается на $\angle M_1O_1N_1$, при этом точка M отображается в точку M_1, точка O отображается в точку O_1, точка N отображается в точку N_1. Осевая симметрия является движением, а ,значит, при ней сохраняется расстояние. Следовательно, $OM = O_1M_1$, $ON = O_1N_1$. Если ∠MON является неразвернутым, то ΔMON и $\Delta M_1O_1N_1$ равны по трем сторонам, а это означает, что $\angle MON$ =$\angle M_1O_1N_1$. Если же ∠MON развернутый, то будет и развернутым $\angle M_1O_1N_1$ [18, С. 122].

Следовательно, эти углы равны.

В учебном пособии В. Г. Болтянского рассматривается и доказывается следующее свойство параллельного переноса [5, С. 9].

6. Фигуры, симметричные относительно прямой l, равны между собой.

Доказательство:

В самом деле, так как при перегибании листа бумаги по прямой l симметричные относительно l фигуры F и F' совмещаются, то они равны.

7. Фигура, симметричная окружности радиуса r относительно прямой l, представляет собой окружность того же радиуса r. Центром этой окружности служит точка O', симметричная относительно l центру O первоначальной окружности.

Доказательство:

В самом деле, если A – произвольная точка исходной окружности, а A' – симметричная ей относительно l точка, то, в силу свойства 2, $\mathrm{O}'\mathrm{A}' = \mathrm{OA} = r$.

Пример 1 (№ 1 из журнала «Математика в школе» [6, С. 9]).

Дан угол BDE, вершина которого не поместилась на чертеже, и произвольная точка M в пределах чертеже. Проведите через точку M прямую так, чтобы она прошла и через вершину D.

Решение:

Через точку M проведем произвольную прямую a, как показано на (Рис. 6). Симметрично ей отобразим данный угол, его образом будет угол $\mathrm{B}_1D_1E_1$. По свойству движения они равны.

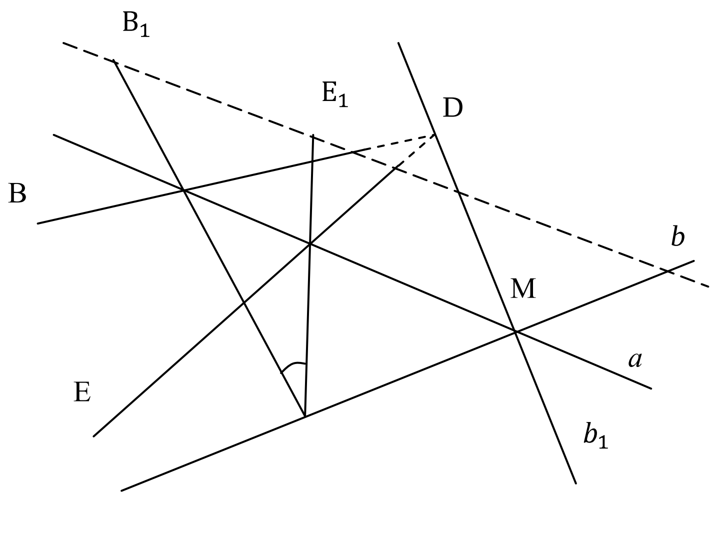

Рис. 6

Проведем прямую b через точки D_1 и M. После чего, отобразим ее относительно прямой a, получив в результате b_1. Покажем, что b_1- искомая прямая.

Действительно, при осевой симметрии пересечение фигур (угла $B_1D_1E_1$ и прямой b) отобразится на пересечение их образов (угол BDE и прямую b_1). Значит, прямая b_1 проходит через точку D. Через точку M она также проходит, поскольку при отображении все точки, лежащие на оси симметрии, переходят в себя.

Пример 2 (№ 5 из журнала «Квант» [23, С. 17]).

Продолжения боковых сторон AD и BC равнобедренной трапеции $ABCD$ пересекаются в точке L. Докажите, что окружности, описанные около треугольников ACL и BDL, пересекаются в центре окружности, описанной около данной трапеции.

Решение:

Треугольник ABL - равнобедренный. Его высота LM является его осью симметрии (Рис. 7). Пунктирная окружность, проходящая через точки A, C, L, есть отображение окружности, проходящей через точки B, D, L при симметрии относительно оси LM.

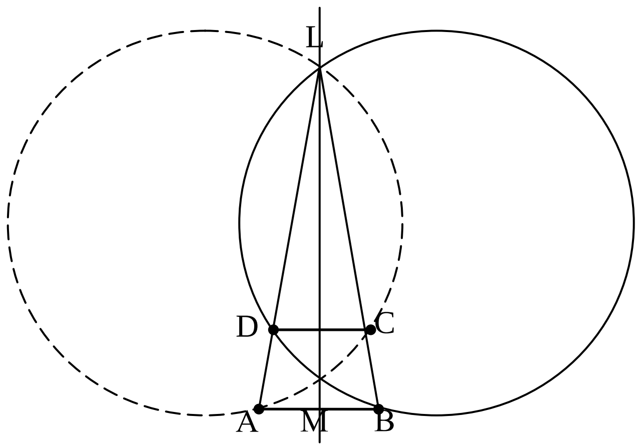

Рис. 7

Треугольник ABL - равнобедренный. Его высота LM является его осью симметрии (Рис. 7). Пунктирная окружность, проходящая через точки A, C, L,

есть отображение окружности, проходящей через точки B, D, L при симметрии относительно оси LM. При этом точка К пересечения окружности с осью симметрии LM отображается на себя – точку пересечения пунктирной окружности с осью симметрии.

Отсюда следует, что при данной симметрии дуга КС симметрична дуге KD, а дуга АК равна дуге КС, откуда следует равенство этих четырех дуг. Поэтому равны и хорды , стягивающие эти дуги, так что точка К является центром окружности, описанной около трапеции $ABCD$ [23, С. 17].

§3. Центральная симметрия, ее аналитическое задание и свойства

Центральной симметрией R с центром в точке O называется такое отображение плоскости на себя, которое каждую точку R переводит в точку R' такую, что отрезок RR' в точке O делится пополам (Рис. 8) [32, С. 336].

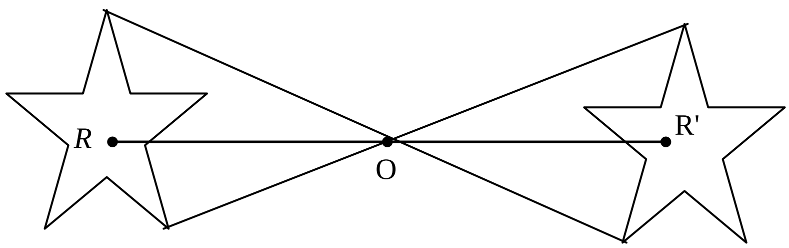

Рис. 8

Докажем ,что центральная симметрия является движением. Введем прямоугольную систему координат $0xy$ с началом в точке 0. Точка 0 - центр симметрии.

Установим связь между координатами двух точек $B\,(x; y)$ и $B_1\ \ x_1; y_1$ (Рис. 9.). Эти точки симметричных относительно точки $B_0\ \ x_0; y_0$. При центральной симметрии точка $B\ (x; y)$ перейдет в точку $B_1\ \ x_1; y_1$. Поскольку B_0B_1= BB_0, то

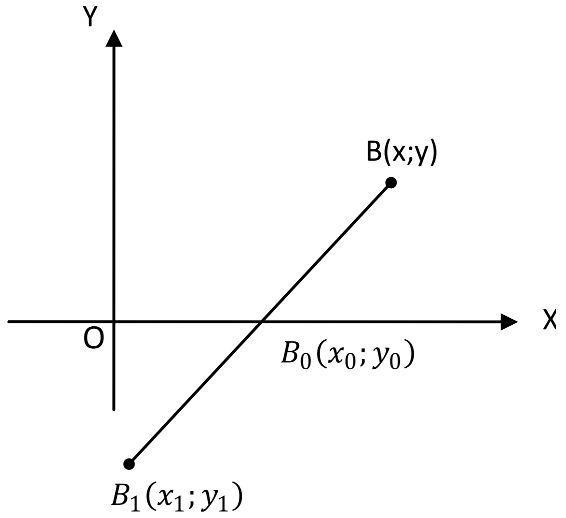

Рис. 9.

$$x_1 = -x + 2x_0,$$
$$y_1 = -y + 2y_0. \quad (3)$$

Из полученных равенств следует, что центральная симметрия сохраняет расстояния, а потому является движением [11, С. 65].

Свойства центральной симметрии

1. При центральной симметрии плоскости прямая, не проходящая через центр симметрии , отображается на параллельную ей прямую.

Пусть точка O −центр симметрии, a − данная прямая, a_1 − прямая, на которую отображается прямая a. При доказательстве воспользуемся методом от противного. Предположим, что прямые a и a_1 не параллельны. Значит, они пересекаются в некоторой точке А. Отсюда возможны два варианта.

Доказательство:

1. При центральной симметрии точка А отображается сама на себя, и тогда она является центром симметрии, что противоречит условию: точка O - центр симметрии.

2. При центральной симметрии точка А отображается в некоторую точку A_1, которая так же, как и точка А, принадлежит как прямой a так и прямой a_1. Следовательно, прямые a и a_1 имеют две общие точки и,

следовательно, совпадают. Это означает,что точка O −центр симметрии, лежит на прямой a, что противоречит условию.

Прямая a, не проходящая через O - центр симметрии, отображается на параллельную ей прямую a_1 [15, С. 95].

2. При центральной симметрии середина отрезка переходит в середину отрезка.

3. При центральной симметрии центр симметрии неподвижен.

Доказательство:

Найдем образ центра симметрии. Для этого воспользуемся формулами (3). Имеем

$$x_1 = -x_0 + 2x_0 = x_0,$$

$$y_1 = -y_0 + 2y_0 = y_0.$$

Откуда получаем, что центр симметрии при центральной симметрии остается на месте [11, С. 67].

4. Центральная симметрия переводит отрезок в отрезок.

Доказательство следует из того, что, если некоторая точка X принадлежит отрезку AB, то прямая при осевой симметрии точка A перейдет в A_1 ,точка B перейдет в точку B_1,а точка X в точку X_1, которая будет принадлежать отрезку с концами в точках A_1 и B_1 . Следовательно, отрезок AB при центральной симметрии переводится в отрезок A_1B_1.

5. При центральной симметрии луч переходит в луч, полуплоскость в полуплоскость [11, С. 68].

6. Центральная симметрия переводит угол в равный ему угол.

Доказательство:

Пусть при центральной симметрии $\angle MON$ отображается на $\angle M_1O_1N_1$, при этом точка M отображается в точку M_1, точка O отображается в точку O_1, точка N отображается в точку N_1. Центральная симметрия является движением, а ,значит, при ней сохраняется расстояние. Следовательно, $OM = O_1M_1$, $ON = O_1N_1$. Если $\angle MON$ является неразвернутым, то ΔMON и $\Delta M_1O_1N_1$ равны по трем сторонам, а это означает, что $\angle MON = \angle M_1O_1N_1$. Если же $\angle MON$

развернутый , то будет и развернутым $\angle M_1O_1N_1$. Следовательно, эти углы равны [5, С. 17].

7. Две фигуры, симметричные друг другу относительно некоторой точки, равны между собой.

В самом деле, так как эти фигуры можно совместить поворотом одной из них на 180°, то они равны [5, С. 18].

Пример 1 (№ 3 из журнала «Математика в школе» [6, С. 9]).

Во внешней области параллелограмма $ABCD$ на сторонах AB и CD построены равносторонние треугольники. Докажите, что вершины треугольников и точка пересечения диагоналей параллелограмма принадлежат одной прямой.

Решение:

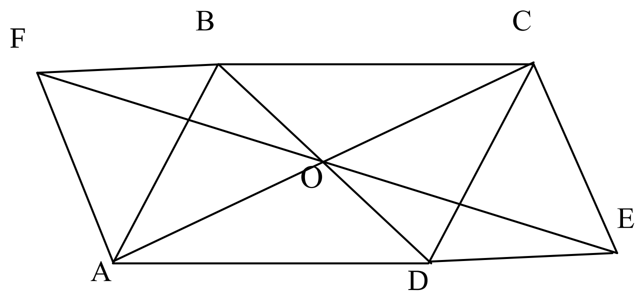

Рис. 10

Построенные треугольники равносторонние, поэтому можно сказать, что углы FAB и ECD, FBA и EDC симметричны относительно точки пересечения диагоналей параллелограмма (Рис. 10).

Применив утверждение (при центральной симметрии пересечение фигур отображается на пересечение образов) к этим углам, получаем, что точки F и E симметричны относительно точки O, а из этого следует их принадлежность одной прямой.

Пример 2 (№ 4 из журнала «Квант» [23, С. 17]).

В окружность вписан четырехугольник $ABCD$. Докажите , что прямые, проведенные через середины его сторон перпендикулярно соответствующим противоположным сторонам, пересекаются в одной точке

Решение:

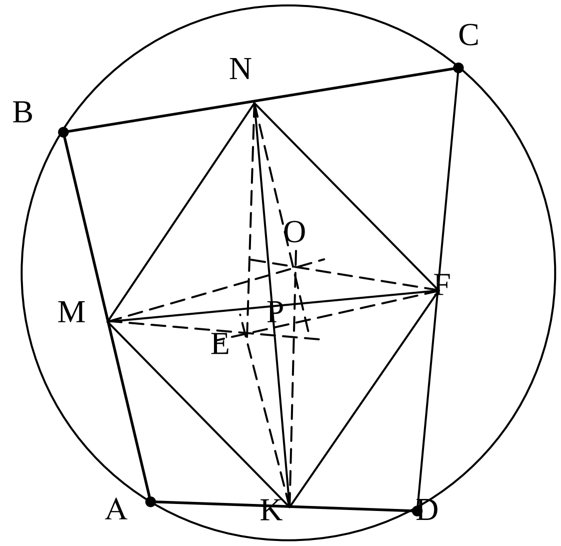

Рис. 11

Пусть точки M, N, F, K- середины сторон AB, BC, CD, AD соответственно (Рис. 11). Прямые, проведенные через точки M, N, F, K перпендикулярно соответственно сторонам AB, BC, CD и AD, пересекаются в центре данной окружности- точке O. Ясно, что четырехугольник $MNFK$ – параллелограмм.

Пусть P- его центр симметрии. При центральной симметрии с центром в точке P точки F, M, K, N симметричны соответственно точкам M, N, F, K. Пусть a, b, c, d-прямые, проходящие через точки M, N, F, K соответственно, перпендикулярные сторонам CD, AD, AB, BC. Очевидно, что при центральной симметрии с центром P прямые a, b, c, d являются образами прямых OF, OK, OM, ON соответственно (при центральной симметрии прямая переходит в параллельную ей прямую).

Отсюда следует утверждение задачи : прямые a, b, c, d пересекаются в одной точке E - образе точки O при центральной симметрии с центром в P.

§4. Поворот, его аналитическое задание и свойства

В учебном пособии С.Н. Дорофеева данным образов введено понятие поворота [11, С. 44].

Поворотом плоскости вокруг точки O на направленный угол α называется такое отображение плоскости на себя, которое каждую точку C плоскости переводит в такую точку C', что $\mathrm{OC} = \mathrm{OC}'$ и направленный угол $\angle\mathrm{COC}'$ равен α.

Точка O называется центром поворота, а направленный угол α – углом поворота. Угол у которого указано, какая из его сторон считается первой ,а какая – второй, называется направленным.

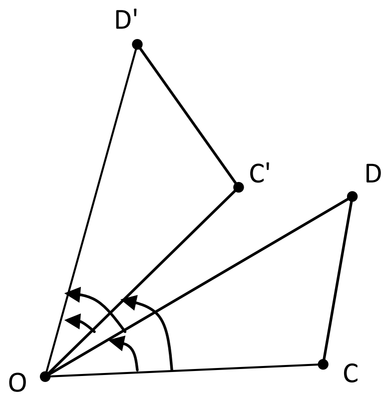

Рис. 12

Докажем, что поворот плоскости сохраняет расстояние между точками. Возьмем на плоскости две различные точки C и $\mathrm{D}\,(\text{Рис}.\,12.)$. Обозначим через C' и D'их образы при повороте вокруг точки O на направленный угол α. Рассмотрим треугольники OCD и $\mathrm{OC'D'}$. В этих треугольниках стороны $\mathrm{OC} = \mathrm{OC}', \mathrm{OD} = \mathrm{OD}'$. Так же равны и углы COD и $\mathrm{C'OD'}$ этих треугольников.

Это означает, что равны и сами треугольники OCD и $\mathrm{OC'}$D'. Так как треугольники равны, следовательно равны отрезки CD и $\mathrm{C'D'}$. Таким образом, поворот плоскости вокруг данной точки на заданный направленный угол является движением [11, С. 45].

Аналитическое задание

Рассмотрим поворот P на плоскости с центром в точке E и углом α. Зададим ПДСК, началом которой служит точка E, а координатные векторы l, k единичны и взаимно перпендикулярны. Возьмем произвольно на плоскости точку H $(x;\ y)$ с координатами x и y относительно ПДСК *Sxy*. Под действием поворота $H\ (x;\ y)\ \rightarrow H'(x';\ y')$. Выразим координаты точки H' через координаты ее прообраза, угол α и координаты центра поворота. В треугольнике $EH'H_1'$ длина катета $EH_1' = |x'|$, а длина катета $H'H_1'$ =|y'|, а в треугольнике EHH_1 – $EH_1 = |x|$, $HH_1 = |y|$. Обозначим через β направленный угол, который образует луч ЕН с положительным направлением оси абсцисс (Рис. 13).

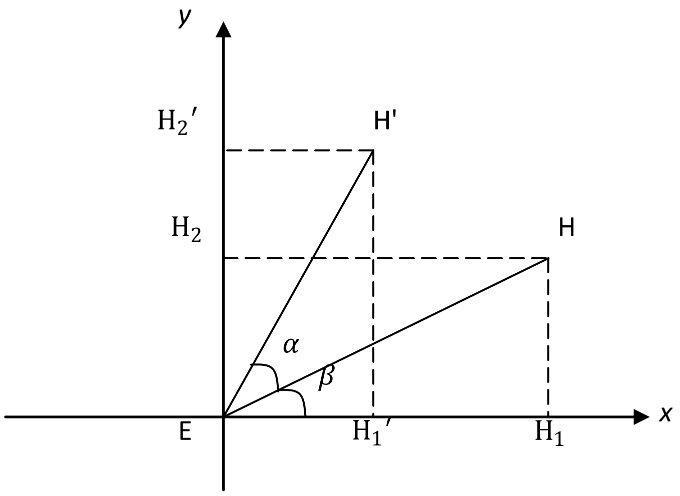

Рис. 13.

Тогда в ориентированном прямоугольном треугольнике $H_1'EH'$ направленный угол $\angle H_1'EH'$ равен сумме направленных углов α и β, а длина гипотенузы EH' равна $\sqrt{x^2+y^2}$. С учетом этих соотношений получаем, что

$$x' = \sqrt{x^2+y^2}cos(\alpha+\beta).$$

$$y' = \sqrt{x^2+y^2}sin(\alpha+\beta).$$

Поскольку $cos\beta = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, sin\beta = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$, то

$$x' = xcos\alpha - ysin\alpha, \quad (4)$$

$$y' = xsin\alpha + ycos\alpha.$$

Эти формулы являются формулами поворота плоскости вокруг начала координат на направленный угол α. Используя эти формулы, можно показать, что поворот плоскости вокруг точки на заданный направленный угол обладает следующими свойствами [11, С. 45].

Свойства поворота

1. Поворот плоскости имеет одну неподвижную точку – центр поворота.

Доказательство:

Данное свойство непосредственно вытекает из определения поворота плоскости.

2. При повороте вокруг данной точки на заданный направленный угол параллельные прямые переходят в параллельные прямые.

Покажем, что при повороте вокруг данной точки на заданный направленный угол параллельные прямые переходят в параллельные прямые. Пусть a и b – данные прямые, $a_1 и\ b_1$ - прямые, на которые отображаются прямые a и b.По условию имеем $a \parallel b$.При доказательстве воспользуемся методом от противного. Предположим, что прямые $a_1 и\ b_1$ не параллельны. Это означает, что они пересекаются в некоторой точке A_1,но тогда существует точка A, которая при повороте вокруг данной точки на заданный направленный угол переходит в точку A_1. Следовательно, точка A принадлежит как прямой a, так и прямой b, что противоречит условию $a \parallel b$. Из этого можно сделать вывод , что при повороте вокруг данной точки на заданный направленный угол параллельные прямые переходят в параллельные прямые.

3. При повороте плоскости вокруг данной точки на заданный направленный угол отрезок переходит в равный ему отрезок [18, С. 101].

Доказательство:

Пусть концам отрезка AB поворот P сопоставляет точки A' и B'. Возьмем любую точку X отрезка AB, тогда можно установить, что ее образ- точка $X = f(X)$ лежит между точками A' и B', т.е. на отрезке $\mathrm{A}'\mathrm{B}'$.

Далее, каждая точка Y' отрезка $\mathrm{A}'\mathrm{B}'$ является образом некоторой точки Y отрезка AB, а именно той точки Y, которая удалена от точки A на расстояние A'Y'.Следовательно, отрезок AB при повороте P переводится в отрезок $\mathrm{A}'\mathrm{B}'$.

4. При повороте плоскости вокруг данной точки на заданный направленный угол луч – в луч, полуплоскость – в полуплоскость.

5. При повороте три точки, лежащие на одной прямой переходят в три точки, лежащие на одной прямой [18, С. 101].

Доказательство:

Пусть поворот переводит соответственно точки $\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C}$ в точки $\mathrm{A}', \mathrm{B}', \mathrm{C}'$, тогда выполняются равенства:

$$\mathrm{A}'\mathrm{B}' = \mathrm{AB}, \mathrm{A}'\mathrm{C}' = \mathrm{AC}, \mathrm{B}'\mathrm{C}' = \mathrm{BC}.$$

Если точки $\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C}$ лежат на одной прямой, то одна из них, например точка B, лежит между двумя другими. В этом случае $\mathrm{AB} + \mathrm{BC} = \mathrm{AC}$, и из полученного равенства следует, что $A'B' + B'C' = A'C'$. Это равенство означает, что точка B' лежит между точками A' и C'. Следовательно, поворот переводит точки A, B, C в точки A', B', C'.

Пример 1 (№ 2 из журнала «Математика в школе» [6, С. 9]).

При повороте около своего центра на угол α равносторонний треугольник ABC отобразился на треугольник $A_1B_1C_1$. Точки пересечения сторон AB и A_1B_1, BC и B_1C_1, AC и A_1C_1 обозначили A_2, B_2, C_2. Докажите, что треугольник $A_2B_2C_2$- равносторонний.

Решение:

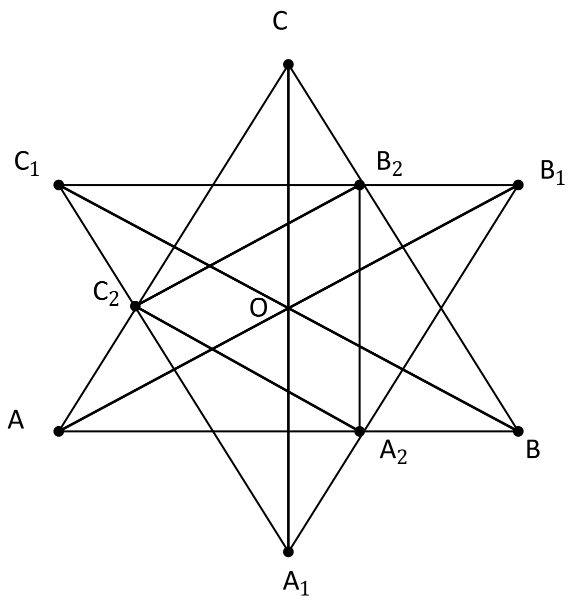

Рис. 14.

Треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ равны, поскольку при движении, а поворот - это один из видов движения, сохраняются расстояния между точками .

Повернем отрезки AB и A_1B_1, пересекающиеся в точке A_2, на 120 °. Они отобразятся на отрезки BC и B_1C_1, а A_2 перейдет в B_2, это видно из (Рис. 14) и утверждения: при повороте пересечение фигур отображается на пересечение их образов. Так как при повороте сохраняются расстояния между точками, то $AA_2 = BB_2$ и $A_2B=B_2C$.

Проведя аналогичные рассуждения для отрезков BC и B_1C_1, AC и A_1C_1, получим, что $BB_2 = CC_2$ и $B_2C = C_2A$.

Теперь легко доказать, что $A_2B_2C_2$ равносторонний треугольник. Это вытекает из равенства трех треугольников A_2BB_2, B_2CC_2 и C_2AA_2, в которых углы при вершине B, C и A равны 60°.

Следовательно, треугольник $A_2B_2C_2$- равносторонний.

Пример 2 (№ 4 из журнала «Математика в школе» [6, С. 9]).

В данный квадрат впишите равносторонний треугольник так, чтобы одна из его вершин совпала с вершиной квадрата, а две другие принадлежали сторонам квадрата.

Решение:

Предположим, что задача решена и AEF равносторонний вписанный в квадрат треугольник, в котором вершина E принадлежит стороне BC, а вершина F- стороне DC.

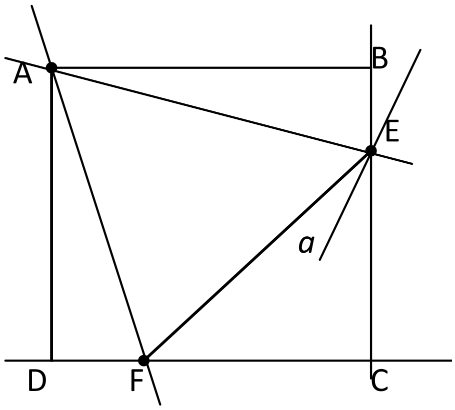

Рис. 15

Или, можно сказать, что E – точка пересечения прямых BC и AE, а точка F – прямых DC и AF (Рис. 15).

При повороте на 60° около точки A пересекающиеся в точке F прямые AF и DC отображаются на прямые AE и a и точку их пересечения E, но E также является точкой пересечения и для прямых AE и BC.

Таким образом, найден способ построения вершины треугольника E. Она является пересечением прямой BC и образа прямой DC при повороте около точки A на 60°. Вершина F может быть получена при помощи поворота на - 60° около точки A точки E.

Пример 3 (№ 5 из журнала «Математика в школе» [6, С. 10]).

В квадрате $ABCD$ точками E, F, К и M отметили середины сторон AB, BC, CD и AD соответственно и построили отрезки AK, BM, CE, DF. Докажите, что получившаяся при пересечении фигура является квадратом.

Решение:

Для доказательства воспользуемся поворотом около центра квадрата на 90°. При этом повороте отрезки AK, BM, CE, DF отображаются на отрезки BM, CE, DF, AK (Рис. 16).

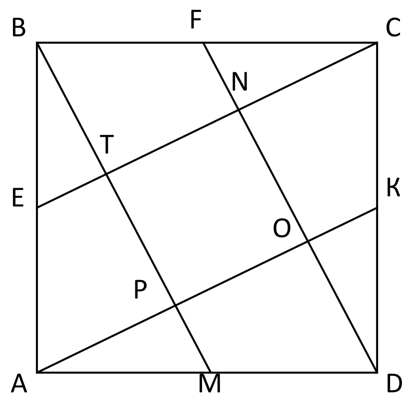

Рис. 16

Если повернуть последовательно четыре раза на 90° отрезки АК и ВМ, пересекающиеся в точке Р, то получим четырехугольник PTNO, в котором все углы равны. Все его стороны также равны, поскольку при повороте расстояния между точками сохраняются [6, С. 11].

ВЫВОДЫ ПО ПЕРВОЙ ГЛАВЕ

В первой главе были получены следующие результаты:

1. Рассмотрены исторические аспекты развития понятия движение. Было выяснено, что идея движения проникла в математику на рубеже XVI и XVIII вв., и, что в одной ее ветви вызвала к жизни понятие функциональной зависимости и понятие функции, в другой же ветви - в геометрической - привела к созданию понятия геометрического преобразования, играющего ту же роль в геометрии, что и понятие функции в анализе.

2. Введено понятие параллельного переноса плоскости . Сформулированы и доказаны основные свойства параллельного переноса. Представлены примеры планиметрических задач, которые были решены с помощью параллельного переноса.

3. Введено понятие осевой симметрии. Сформулированы и доказаны основные свойства осевой симметрии . Представленны примеры планиметрических задач, которые были решены с помощью осевой симметрии.

4. Введено понятие центральной симметрии. Сформулированы и доказаын основные свойства центральной симметрии . Представленны примеры планиметрических задач, которые были решены с центральной симметрии.

5. Введено понятие поворота плоскости. Сформулированы и доказаны основные свойства поворота. Представленны примеры планиметрических задач, которые были решены с помощью поворота плоскости.

ГЛАВА II. МЕТОДИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ОБУЧЕНИЯ ДВИЖЕНИЯМ В КУРСЕ ГЕОМЕТРИИ ОСНОВНОЙ ШКОЛЫ

§6. Методика изучения движений плоскости

Согласно ФГОС основного общего образования [24] предметные результаты изучения области «Математика», в частности, «Геометрия» должны отражать:

1. Овладение геометрическим языком; развитие умения использовать его для описания предметов окружающего мира; развитие пространственных представлений, изобразительных умений, навыков геометрических построений.

2. Формирование систематических знаний о плоских фигурах и их свойствах; развитие умений моделирования реальных ситуаций на языке геометрии, исследования построенной модели с использованием геометрических понятий и теорем, аппарата алгебры, решения геометрических и практических задач.

3. Развитие умений применять изученные понятия, результаты, методы для решения задач практического характера и задач из смежных дисциплин.

Номенклатура содержания, определяемая «Примерными программами основного общего образования» как геометрические преобразования, содержит примеры движений фигур: симметрии фигур (осевая и центральная), параллельный перенос, поворот, а также понятия о гомотетии и подобие фигур. Введение в «Примерные программы основного общего образования» этой темы обосновано не только и не столько необходимостью ознакомить учащихся с реально существующими и часто встречающимися в обыденной жизни отношениями между реальными объектами, сколько потребностями самого предмета геометрии. Понятие движение важно, прежде всего, тем что, опираясь на него, можно ввести общее понятие равенства геометрических фигур. Это, в свою очередь, необходимо для обоснования правил построения фигур с заданными свойствами, а точнее, для этапа «исследование» в задачах на построение.

Изучив примерную образовательную программу основного общего образования [19] по математике, нами было выяснено, что понятие движения плоскости является обязательным для изучения. В зависимости от направления деятельности общеобразовательного учреждения учащиеся имеют возможность изучать математику на базовом, расширенном и углубленном уровнях.

На базовом уровне выпускник в 7-9 классах при изучении темы «Движения» научится:

– строить фигуру, симметричную данной фигуре относительно оси и точки.

В повседневной жизни и при изучении других предметов:

– распознавать движение объектов в окружающем мире;

– распознавать симметричные фигуры в окружающем мире [19].

На углубленном уровне выпускник в 7-9 классах при изучении темы «Движения» научится:

– оперировать понятием движения и преобразования подобия, владеть приёмами построения фигур с использованием движений и преобразований подобия, применять полученные знания и опыт построений в смежных предметах и в реальных ситуациях окружающего мира;

– строить фигуру, подобную данной, пользоваться свойствами подобия для обоснования свойств фигур;

– применять свойства движений для проведения простейших обоснований свойств фигур.

В повседневной жизни и при изучении других предметов, научится:

– применять свойства движений и применять подобие для построений и вычислений.

– распознавать движение объектов в окружающем мире;

– распознавать симметричные фигуры в окружающем мире [19].

«Планируемые результаты обучения основного общего образования» в требованиях к геометрической подготовке учащихся требование к уровню изучения данной темы формулируют следующим образом: «Выпускник получит возможность приобрести опыт применения идей движения при решении задач на вычисления и доказательства». Значит, тема должна быть изложена на уроке, однако, как организовать контроль за усвоением данной темы и в каком объёме требовать от учащихся воспроизвести учебного материала решать учителю. При этом уроки лучше организовать в форме лекций. Основная цель таких уроков - познакомить учащихся с примерами преобразования движения – симметрия относительно точки и прямой, параллельный перенос, поворот – учащиеся должны усвоить на уровне практических применений [19].

Проанализируем содержания темы «Движения» в действующих учебниках геометрии. На эту тему по учебнику Л.С. Атанасяна [7] отводится 12 часов (Табл. 1). Все ее содержание сосредоточено в XIII главе учебника, в которой вводятся понятия отображения плоскости на себя, движения и рассматриваются основные виды движений: осевая и центральная симметрии, параллельный перенос и поворот. Кроме того, исследуется важный вопрос о связи понятий наложения и движения.

Таблица 1

Содержания темы «Движения» по учебнику Л.С. Атанасяна

Авторы учебника	**Название глав и параграфов**	**Кол-во часов**
Л.С. Атанасян	Глава XIII Движения §1. Понятие движения 113. Отображение плоскости на себя 114.Понятие движения 115*. Наложения и движения Задачи §2. Параллельный перенос поворот 116. Параллельный перенос 117. Поворот Задачи Вопросы для повторения к главе XIII Дополнительные задачи	 2 ч. 2 ч. 1 ч. 1 ч. 2 ч. 2 ч. 1 ч.(+1 ч. на контрольную работу)
Всего		12 ч.

Первый параграф начинается с пункта 113, где вводиться понятие отображение плоскости на себя и доказывается, что осевая симметрия представляет собой отображение плоскости на себя.

В пункте 114 ученики понимают, что осевая симметрия – это отображение плоскости на себя, которое сохраняет расстояние между точками. Далее идет доказательство выше сказанного, которое приводит к тому, что движение плоскости – это отображение плоскости на себя, сохраняющее расстояния. Также отмечается, что центральная симметрия плоскости является движением. Дается теорема : при движении отрезок отображается на отрезок. Затем идет доказательство этой теоремы и следствие из нее.

В пункте 115* ученики понимают, что наложение – это отображение плоскости на себя, на основе которого определяется равенство фигур. Понятие наложения в данном курсе относится к числу основных (неопределяемых) понятий. Доказано, что при наложении различные точки отображаются в различные точки и что, любое наложение является движением плоскости. Далее дается теорема: любое движение является наложением. После чего, идет ее доказательство следствие из нее.

Таким образом, доказана эквивалентность понятий наложения и движения.

В конце этого пункта даются задачи на доказательство с применением движений, некоторые из них идут с последующим объяснением решения.

Текущие результаты изучения § 1. Учащиеся должны научиться:

– иллюстрировать и объяснять понятие *отображение плоскости на себя*;

– иллюстрировать и объяснять понятие *движения* и его свойства;

– понимать, что *осевая и центральная симметрии* являются движением;

– понимать, что *при движении любая фигура переводится в равную ей*;

– решать несложные задачи на преобразование плоскости, применяя определения понятий симметрий, поворота, параллельного переноса;

– определять в какие фигуры переводятся *отрезки и треугольники при движении.*

Во втором параграфе «Параллельный перенос и поворот» в пункте 116 вводится понятие параллельного переноса плоскости и доказывается, что параллельный перенос является движением.

В пункте 117 вводится понятие поворота плоскости и доказывается, что поворот является движением. Однако этот пункт сложен для восприятия основной частью учащихся, а поэтому даже по авторскому подходу к данному вопросу он не является обязательным. В конце этого пункта даются задачи на доказательство с применением движений, некоторые из них идут с последующим объяснением решения. Далее представлены вопросы для повторения к главе XIII и дополнительные задачи по теме движения плоскости, некоторые из них идут с последующим объяснением решения.

Понятие отображение плоскости на себя как основы для введения понятия движения рассматривается в данной главе на интуитивном уровне с привлечением уже известных учащимися понятий осевой и центральной симметрий. Мищенко отмечает, что в дальнейшем движения не применяются в качестве аппарата для решения задач и изложения теории, поэтому можно изучать данный материал в ознакомительном порядке, то есть не требовать от учащихся воспроизведения доказательств. Однако основные понятия – симметрия относительно точки и прямой, параллельный перенос и поворот- учащиеся должны усвоить на уровне практических применений, то есть основное внимание следует уделить отработке навыков построения образов точек, отрезков, треугольников при симметриях, параллельном переносе, повороте.

В результате изучения главы XIII учебника учащиеся должны научиться:

– изображать и распознавать на чертежах и рисунках: симметричные фигуры; фигуры, полученные параллельным переносом, и фигуры, полученные поворотом;

– определять вид движения по рисунку;

– иллюстрировать и объяснять понятия: *отображение плоскости на себя, движения и его свойства*;

– понимать, что *осевая и центральная симметрии, параллельный перенос* и *поворот* являются *движением*;

– понимать, что *при движении любая фигура переводится в равную ей*;

– формулировать, иллюстрировать и объяснять формулировки параллельного переноса и поворота;

– решать несложные задачи на преобразование плоскости, применяя определения понятий симметрий, поворота, параллельного переноса.

Тема «Движения» в учебнике А.В. Погорелова [18] определена в §9. На изучение движений выделено 10 часов (Табл. 2).

Таблица 2

Содержания темы «Движения» по учебнику А.В. Погорелова

Авторы учебника	Название глав и параграфов	Кол-во часов
А.В. Погорелов	§9. Движение	
	82. Преобразование фигур	1 ч.
	83. Свойства движения	1 ч.
	84.Симметрия относительно точки	1 ч.
	85. Симметрия относительно прямой	1 ч.
	86.Поворот	1 ч.
	87.Параллельный перенос и его свойства	1 ч.
	88.Существование и единственность параллельного переноса. Сонаправленность полупрямых.	0,5 ч.
	89.Геометрические преобразования на практике.	
	90.Равенство фигур	0,5 ч.
	Контрольные вопросы. Задачи.	1 ч.
		2 ч.
Всего		10 ч.

В пункте 82 вводится понятие движение, которое сопровождается замечанием в нем говориться, что два движения, выполненные последовательно, дают снова движение. Далее поясняется, что преобразование, обратное движению, также является движением.

В пункте 83 ученикам дается теорема: точки, лежащие на прямой, при движении переходят в точки, лежащие на прямой, и сохраняется порядок их взаимного расположения. После теоремы следует ее доказательство и следствие из нее: при движении прямые переходят в прямые, полупрямые- в полупрямые, отрезки- в отрезки. Далее доказывается, что при движении сохраняются углы между полупрямыми.

В пункте 84 вводится понятие симметрии относительно точки и доказывается, что она является движением.

В пункте 85 вводится понятие симметрии относительно прямой и доказывается, что она является движением.

В пункте 86 ученикам дается определения поворота плоскости, угла поворота. Далее предлагается рассмотреть задачу с ее решением.

В пункте 87 определяется параллельный перенос и доказывается, что он является движением. Далее вводится свойство параллельного переноса: при параллельном переносе точки смещаются по параллельным прямым на одно и то же расстояние. Затем следует еще одно свойство: при параллельном переносе прямая переходит в параллельную прямую (или в себя), после чего идет замечание.

Пункт 88 начинается с теоремы: каковы бы ни были две точки А и А', существует один и только один параллельный перенос, при котором точка А переходит в точку А'. Далее следует ее доказательство и задача с решением. После этого доказывается, что параллельный перенос переводит полупрямую в полупрямую. Также ученикам дается определение сонаправленных и противоположно направленных прямых.

В пункте 89 в качестве примера геометрического преобразования на практике дается задача с ее решением.

В пункте 90 вводится определение равных фигур и доказано, что если у двух треугольников соответствующие стороны равны и соответствующие углы равны, то эти треугольники совмещаются движением и обратное.

После всех пунктов идут контрольные вопросы ко всему параграфу. Также в конце параграфа имеются задачи ко всем пунктам.

Особенностью этого учебника является введение понятия преобразования фигур, частным случаем которого является понятие движения фигур. Таким образом, автор учебника не акцентирует внимание на то, что преобразование фигур порождается некоторым преобразованием плоскости. Такой подход к изложению темы позволяет не перегружать учебный материал сложными понятиями и способствует лучшему восприятию его учащимися. Понятие движение важно тем, что опираясь на него, можно ввести общее понятие равенства геометрических фигур. В учебнике А.В. Погорелова по теме «Движение» дается определение равных фигур и доказывается теорема об эквивалентности двух определений равенства треугольников: с одной стороны через равенство элементов треугольников, а с другой общим определением равенства фигур. Таким образом, этим обосновывается существование равных фигур.

В результате изучения §9 учебника учащиеся должны научиться:

– иллюстрировать и объяснять понятия: преобразования, движения и его свойства;

– формулировать, иллюстрировать и объяснять формулировки: центральной симметрии, симметрии относительно прямой, параллельного переноса, поворота;

– изображать, обозначать и распознавать на рисунке точки и простейшие фигуры;

– симметричные данным относительно точки;

– симметричные данным относительно прямой;

– в которые переходят данные фигуры при параллельном переносе;

– в которые переходят данные фигуры при повороте;

– применять при решении простейших задач на доказательство, построения и вычисления идеи движения.

Несколько иначе дается эта тема в учебнике И.Ф. Шарыгина [27]. Тема «Преобразования плоскости» в учебнике И.Ф. Шарыгина определена в главе 13. На изучение данной темы выделено 8 часов (Табл. 3).

Таблица 3

Содержания темы «Движения» по учебнику И.Ф. Шарыгина

Авторы учебника	Название глав и параграфов	Кол-во часов
И.Ф. Шарыгин	13. Преобразования плоскости 13.1. Движение плоскости 13.2. Виды движений плоскости 13.3. Гомотетия	2 ч. 3 ч. 2 ч. (+1ч. на кр/р)
Всего		8 ч.

В §13.1. ученикам объясняется , что такое движение плоскости и дается четкое определение. Также для учащихся отмечается, что осевая симметрия является основным видом движения плоскости и любое движение может быть сведено к нескольким осевым симметриям. Далее ученикам дается теорема (основное свойство движений) : результатом двух последовательных движений плоскости является движение плоскости. После теоремы следует ее доказательство.

Следующая теорема (основной способ задания движения) звучит так: любое движение плоскости полностью задается движением трех точек плоскости, не лежащих на одной прямой. После теоремы следует ее доказательство.

Затем ученики знакомятся с теоремой (о возможности представления любого движения через осевые симметрии), которая указывает учащимся на ведущую роль осевой симметрии среди различных видов движения: любое движение плоскости может быть получено с помощью не более чем трех осевых симметрий. После теоремы следует ее доказательство.

После этого пункта для учеников представлены : задачи, задания, вопросы.

Стоит отметить, что вводимые в параграфе определение движения, а также свойство движения в дальнейшем не применяются в качестве аппарата для решения задач и изложения теории.

В результате изучения § 13.1 учащиеся получат возможность иллюстрировать и объяснять понятие «движения плоскости», объяснять свойство движения: два движения, выполненные последовательно, являются движением , применять при решении простейших задач на доказательство, построения и вычисления идеи движения.

В § 13.2 ученикам вводится понятие параллельного переноса, вектора параллельного переноса и дается теорема (о представлении параллельного переноса в виде двух симметрий). После теоремы следует ее доказательство. Далее учащиеся выясняют, что такое поворот, угол поворота и знакомятся с теоремой (о представлении поворота в виде двух симметрий). После теоремы следует ее доказательство.

Так же в этом пункте представлены подпункты со звездочкой. Они содержат такие темы, как : «Три осевые симметрии» и «Скользящая симметрия».

В подпункте со звездочкой «Три осевые симметрии» ученикам дается ответ на вопрос : какое движение плоскости будет иметь место в результате трех последовательных осевых симметрий? Затем вводится теорема (о движении, задаваемом тремя осевыми симметриями): три последовательные осевые симметрии , оси которых не все параллельны и не проходят через одну точку , можно заменить двумя движениями : симметрией и параллельным переносом. После теоремы следует ее доказательство.

Во второй подпункте со звездочкой «Скользящая симметрия» ученикам вводится понятие скользящей симметрии и дается теорема (о представлении скользящей симметрии через три симметрии). После теоремы следует ее доказательство.

После всего пункта 13.2. учащимся представлены задачи, задания, вопросы к этому пункту.

В пункте 13.3. учениками рассматривается новое преобразование плоскости − гомотетия и ее свойства. Гомотетия является примером такого преобразования плоскости, при котором сохраняются углы, а расстояние между точками изменяются в соответствии с заданным коэффициентом гомотетии.

Далее ученикам дается теорема (основное свойство гомотетии). После теоремы следует ее доказательство.

После всего пункта 13.3. учащимся представлены задачи, задания, вопросы связанные с этим пунктом.

В учебнике предпринята попытка дать более универсальное представление о всех движениях, как сохраняющих, так и меняющих ориентацию, в виде композиций некоторого минимального числа простейших движений, а именно, в виде композиции только осевых симметрий. Такое представление обладает внутренней эстетической красотой , поскольку , несмотря на его малую эффективность, позволяет посмотреть на произвольные движения с единой простой точки зрения. К недостаткам такого представления можно отнести тот факт, что при практическом применении даже простейший параллельный перенос будет строиться как композиция двух осевых симметрий, и тем самым задействовать в рассуждениях и построениях большее число вспомогательных фигур, чем прямое построение параллельного переноса.

В результате изучения главы 13 учащиеся должны достичь следующих результатов:

– формулировать, иллюстрировать и объяснять формулировки: центральной симметрии, симметрии относительной прямой, параллельного переноса, поворота;

– изображать, обозначать и распознавать на рисунке точки и простейшие фигуры, симметричные данным относительно точки; симметричные данным относительно прямой, в которые переходят данные фигуры при параллельном переносе; в которые переходят данные фигуры при повороте.

Учащиеся получат возможность научиться: иллюстрировать и объяснять понятия: движения и его свойства; применять при решении простейших задач на доказательство, построения и вычисления идеи движения.

Таким образом, анализ учебников показал , что теме «Движения» в учебнике Л.С. Атанасяна отводится −12 часов и она изучается в 9 классе, у

А.В. Погорелова на эту тему выделено −10 часов и она изучается в 8 классе, а у И.Ф. Шарыгина - 8 часов и она изучается в 9 классе.

Тема «Движения» изучается в учебнике Л.С. Атанасяна [7] после главы «Длина окружности и площадь круга», у А.В. Погорелова [18] после параграфа «Декартовы координаты на плоскости», а у И.Ф. Шарыгина [27] после главы «Координаты и векторы».

Стоит отметить, что в учебнике Л.С. Атанасяна есть параграф со звездочкой «Наложения и движения», который предназначен для классов с углубленным изучением геометрии. Также два параграфа со звездочкой есть в учебнике И.Ф. Шарыгина: «Три осевые симметрии» и «Скользящая симметрия», которые тоже предназначены для математических классов.

Основное внимание в рассмотренных учебниках геометрии уделяется определению понятия «движение плоскости», центральной симметрии, осевой симметрии, повороту, параллельному переносу и их свойствам.

Далее опишем методические рекомендации к изучению движениям плоскости в школьном курсе геометрии.

При введении понятия отображение плоскости на себя следует заметить, что если, во-первых, указав способ, с помощью которого каждой точке А плоскости ставится в соответствие некоторая точка А′, и, во-вторых, каждая точка плоскости оказывается поставленной в соответствие какой-то точке плоскости, то мы будем говорить, что задано отображение плоскости на себя. Объяснение понятия отображение плоскости на себя проводится на примерах осевой и центральной симметрий, известных учащимся из темы «Четырехугольники» [15, С. 85].

В курсе геометрии ставим вопрос об изучении осевой симметрии для того, чтобы в дальнейшем пользоваться этим понятием и применять его при решении разного рода задач. Учащиеся к этому времени имеют достаточную предварительную подготовку (изучили перпендикулярность и параллельность прямых).

Эту работу можно ввести в порядок решения задач на построение при помощи линейки, треугольника и измерительного циркуля. После решения каждой задачи проводится обзор полученного чертежа, выясняются три основные условия, которым удовлетворяет каждая пара фигур, симметричных относительно прямой линии, и, таким образом, вводится понятие симметричных точек, отрезков и прямых линий относительно данной прямой- оси симметрии. Затем выясняются свойства симметричных точек, отрезков и прямых линий [15, С. 89].

В дальнейшем по мере введения в курс геометрии новых геометрических фигур - равнобедренных треугольников, некоторых видов четырехугольников, окружностей, а потом правильных многоугольников – продолжается, во-первых, изучение осевой симметрии этих фигур, во-вторых, применение ее к решению соответствующих задач и к доказательству некоторых теорем [26, С. 146].

Понятие осевой симметрии вводится следующим образом. Сначала учащиеся изучают свойство осевой симметрии «Осевая симметрия- это отображение плоскости на себя, которое сохраняет расстояния между точками» начинается с его формулировки и выполнения рисунка 17. Определенные трудности у учащихся может вызвать краткая запись условия и заключения теоремы о свойстве осевой симметрии. Проанализируем формулировку свойства осевой симметрии. Пусть M и N – две произвольные точки плоскости, а M_1 и N_1 – симметричные им точки относительно прямой l. Так как в условии дано преобразование симметрии относительно прямой l, значит, $MM_1 \perp l$ и $NN_1 \perp l$, AM_1= AM и BN_1=BN. Выполним краткую запись:

Дано: Прямая l- ось симметрии;

$\mathrm{M} \rightarrow \mathrm{M}_1, N \rightarrow N_1;$

$\mathrm{MM}_1 \perp l, NN_1 \perp l;$

$A\mathrm{M}_1 = AM, BN_1 = BN.$

Доказать: $MN = \mathrm{M}_1 N_1$.

Доказательство:

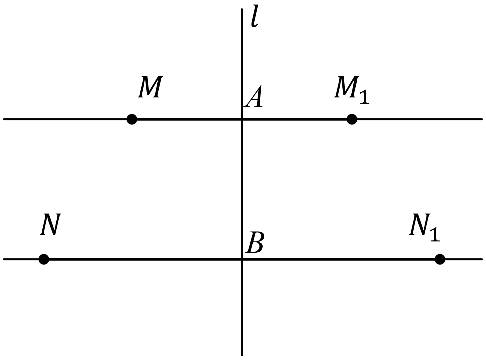

Рис. 17

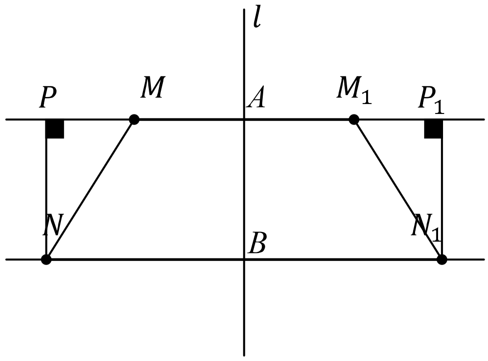

Рис. 18

1. Выполняем дополнительные построения: проводим из точек N и N_1к прямой $ММ_1$ перпендикуляры NP и N_1P_1 (Рис. 18).

2. Треугольники MNP и $M_1N_1P_1$- прямоугольные по построению, так как NP и N_1P_1 перпендикуляры прямой MM_1.

Отрезки NP и N_1P_1 равны как расстояния между параллельными прямыми ($ММ_1 \| NN_1$, так как $ММ_1 \perp l$ и $NN_1 \perp l$).

Четырехугольник NPP_1N_1- прямоугольник по построению, так как NP и N_1P_1 перпендикуляры прямой $ММ_1$. Отрезки PP_1 и NN_1 равны как противоположные стороны прямоугольника.

Отрезки AM_1= AM равны по условию. Следовательно, MP = M_1P_1в силу свойства измерения отрезков.

Отсюда $\Delta MNP = \Delta M_1N_1P_1$ [15, С. 88].

3. Из равенства прямоугольных треугольников MNP и $M_1N_1P_1$ следует равенство их гипотенуз $ММ_1$ и NN_1. Таким образом, доказано, что при осевой симметрии расстояния между точками сохраняются, следовательно, осевая симметрия есть отображение плоскости на себя, которое сохраняет расстоя ния между точками.

После доказательства теоремы о свойстве осевой симметрии можно выделить в ее обосновании четыре этапа.

1. Формулировка условия и заключения теоремы.

2. Дополнительные построения.

3. Доказательство равенства прямоугольных треугольников MNP и $M_1N_1P_1$.

4. Вывод о равенстве отрезков MM_1 и NN_1 в силу свойства измерения отрезков [15, С. 89].

Если перегнуть чертеж по оси симметрии до совпадения обеих областей (преподаватель показывает этот процесс, перегибая большой лист прозрачной бумаги с соответствующим чертежом), то симметричные точки совпадут. Отсюда делается вывод, что две точки, симметричные относительно оси симметрии, при перегибании чертежа по оси симметрии совпадают.

Затем учащиеся получают задание: имеются ось симметрии и две произвольно лежащие точки по одну сторону от нее; построить точки, симметричные данным точкам относительно данной оси. Учащиеся описанным раньше способом строят две симметричные точки и замечают, что при перегибании чертежа по оси симметрии каждая из точек совпадает с точкой, симметричной ей. Преподаватель предлагает соединить отрезком прямой линии пару данных точек и вторую пару симметричных им точек.

Получаются два отрезка, концы этих отрезков соответственно симметричны и при перегибании чертежа они совпадут; а потому и сами отрезки при этом совместятся, значит они равны [15, С. 90].

На одном из отрезков учащиеся отмечают промежуточную точку, строят ей симметричную точку и доказывают, что новая симметричная точка будет лежать на втором отрезке.

Так как промежуточная точка была выбрана произвольно, то делается общий вывод, что каждой точке одного отрезка соответствует симметричная ей точка другого отрезка (включая концы отрезков).

Преподаватель сообщает, что это отрезки тоже называются симметричными относительно оси симметрии. Учащиеся выясняют смысл этого нового понятия: симметричные отрезки расположены по обе стороны оси симметрии, каждой точке одного отрезка соответствуют симметричная ей точка другого отрезка; симметричные отрезки равны [15, С. 91].

Затем преподаватель предлагает учащимся следующие задания: построить отрезок, симметричный данному отрезку относительно данной оси.

Учащиеся легко приходят к заключению, что для этого достаточно построить две точки, симметричные концам данного отрезка относительно данной оси, и полученные точки соединить. Потом они выполняют это построение. Преподаватель же предлагает им продолжить данный и полученный отрезки, взять на одной из прямых произвольную точку, построить ей симметричную и доказать, что эта последняя будет лежать на другой прямой.

Нетрудно сделать заключение, что эти прямые симметричные и при перегибании чертежа совпадут [26, С. 146].

Кроме того, учащиеся замечают, что точка пересечения симметричных прямых лежит на оси симметрии.

Таким образом, при помощи предыдущих задач вводится понятие осевой симметрии точек, отрезков и прямых линий. В порядке закрепления этих знаний учащиеся по заданию преподавателя строят прямую, симметричную данной прямой, которая параллельна оси симметрии, и получают симметричные параллельные прямые; а затем строят и угол, симметричный данному углу относительно данной оси симметрии. Так постепенно расширяется круг симметричных фигур [26, С. 146].

Понятие точки, симметричной данной относительно точки, вводится конструктивно, тем самым задается правило построения точки, симметричной данной относительно фиксированной точки. При объяснении правила построения можно дать рисунок 19, который выполняется по ходу объяснения.

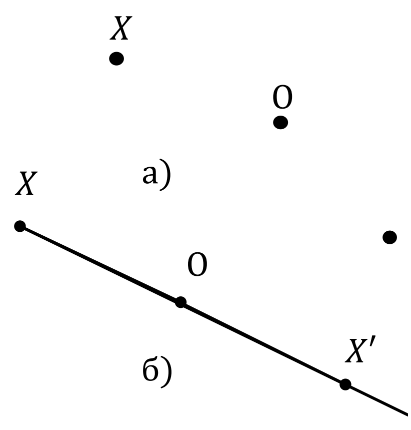

Рис. 19

При введении определения преобразования симметрии относительно точки основное внимание необходимо направлять не на запоминание учащимися формулировки определения, а на его понимание. Другими словами, если в условии сказано: «… точка

X симметрична точке X′ относительно точки O…», то учащиеся должны записать в ходе решения задачи или в краткой записи условия OX = OX′. Если же в условии сказано: фигура F симметричная фигуре F' относительно точки O…», то учащиеся должны понимать, что в этом случае точка X фигуры F переходит в точку X′ фигуры F' и записать в ходе решения задачи или краткой записи условия OX = OX′. [16, С. 140]

При введении определения следует обратить внимание учащихся на те признаки, которые позволяют из всех преобразований выделить конкретное преобразование, а именно симметрию относительно точки. В данном случае это преобразование характеризуется равенством расстояний OX = OX′.

При введении определения параллельный перенос полезно воспользоваться рисунком 20. Понятие параллельный перенос вводится конструктивно, тем самым задается правило построения точки, в которую переходит данная точка при параллельном переносе [15, С. 100].

Для того, чтобы построить точку B, в которую отображается точка A, необходимо провести через точку A прямую, параллельную вектору a, а затем от точки A в направлении, заданном вектором a, отложить отрезок AB, длина которого равна модулю вектора a (Рис. 20).

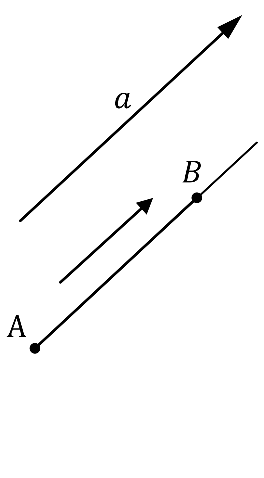

Рис. 20

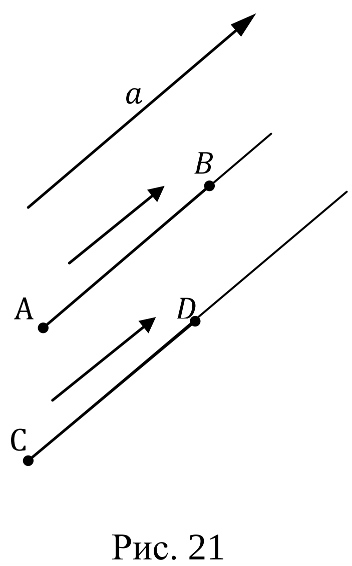

Рис. 21

Таким образом, из определения параллельного переноса можно сделать вывод: «при параллельном переносе точки смещаются по параллельным прямым на одно и то же расстояние».

Доказательство утверждения «Параллельный перенос является движением» должно состоять из двух частей: во-первых, необходимо указать способ, с помощью которого каждой точке А плоскости при параллельном переносе ставится в соответствие некоторая точки A' и при этом каждая точка плоскости оказывается поставленной в соответствие какой-то точке плоскости; и, во-вторых, что при параллельном переносе, если точка А и С ставятся в соответствие точки В и D, то выполняется равенство $CD = \text{AB}$ (Рис. 21) [15, С. 101].

Доказательство первой части утверждения следует из определения параллельного переноса.

Для доказательства второй части утверждения проанализируем формулировку «Параллельный перенос является движением». Пусть А и С- две произвольные точки плоскости, а А и В- точки, в которые они отображаются (Рис. 22). Так как в условии дано преобразование параллельный перенос, по определению параллельного переноса $CD = \text{ AB} = |a|$ и $CD\,||\text{AB}\,||a.$ Выполним краткую запись:

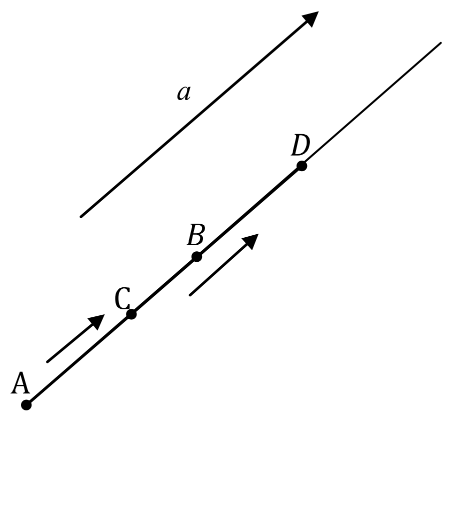

Рис. 22

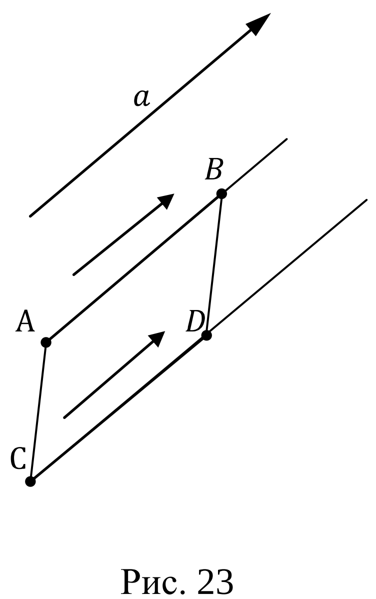

Рис. 23

Дано: a- вектор,

$\text{A} \to \text{C}, \text{B} \to D$;

$CD = AB = |a|$

$\text{C}D \,||AB||\; a$.

Доказать: $CD = AB$.

Доказательство:

Соединим точку А с точкой С и точку В с точкой D. Четырехугольник $ABCD$- параллелограмм. Так как по условию $CD = AB$ и $\text{C}D\,||AB$.

После этого можно воспроизвести доказательство. Предположим, что точка С не лежит на прямой АВ. Если же точка В принадлежит прямой АВ (Рис. 23), то точка А и С также смещаются на одно и то же расстояние ($CD = AB = |a|$) по одной и той же прямой в одном и том же направлении. Докажем это. Так как точка С лежи на прямой АВ, значит, она лежит на прямой, параллельной вектору a. Следовательно, по аксиоме о параллельных прямых точка D лежит на этой же прямой. Равенство отрезков ($CD = \text{AB}$) определяется по формуле длины отрезка [15, С. 101].

При параллельном переносе точки сдвигаются на одно и то же расстояние, поэтому можно представить, что вся плоскость сдвигается на одно и то же расстояние в одном и том же направлении. Это означает, и любая фигура F, заданная на плоскости, будет сдвигаться на одно и то же расстояние в одном и том же направлении. Так как параллельный перенос- движение, и при этом вся плоскость сдвигается на одно и то же расстояние в одном и том же направлении, значит, при параллельном переносе прямая отображается на параллельную ей прямую или сама на себя.

Далее рассматривается еще одно преобразование плоскости: поворот около данной точки О. В определении поворота необходимо выделить два его признака:

1) поворот является движением;

2) каждый луч с началом в данной точке поворачивается на один и тот же угол в одном и том же направлении. Следует также отметить, что точка О переходит сама в себя.

Доказательство утверждения «Поворот является движением» аналогично доказательству утверждения «Параллельный перенос является движением», поэтому этот материал можно предложить учащимся для самостоятельной работы по учебнику, а затем следует его обсудить. Если подготовка класса недостаточна для такой работы, то можно порекомендовать формой работы с классом избрать лекцию [15, С. 101].

§7. Методические особенности применения параллельного переноса к решению планиметрических задач элементарной геометрии

При изучении темы «Параллельный перенос» полезно подчеркнуть , что данное отображение есть отображение плоскости на себя. Оно характеризуется следующими свойствами:

а) Каждой точке плоскости соответствует одна и только одна точка той же плоскости: $X \to X_1$; $Y \to Y_1$; $Z \to Z_1$. Точки X_1, Y_1, Z_1 получены сдвигом плоскости, с помощью которого задается данное соответствие.

б) Лучи XX_1, YY_1, ZZ_1 сонаправлены.

в) Расстояния между точками X и X_1, Y и Y_1, Z и Z_1 равны.

На основании перечисленных выше свойств можно предложить учащимся самостоятельно сформулировать определение параллельного переноса. Полезно проанализировать, с помощью каких понятий было составлено это определение (отображение, направление, расстояние). Предложить учащимся на модели найти образ точки при параллельном переносе.

При решении геометрической задачи на построение часто бывает полезной перенести параллельно отдельные части фигуры и тем самым придать ей более удобный для решения вид [1, С. 27].

В этом случае применяется параллельный перенос.Его применение для геометрических построений называют методом параллельного переноса. Сущность этого метода состоит в том, что наряду с данными и искомыми фигурами рассматриваются некоторые другие фигуры, которые получаются из данных или искомых фигур или их частей путём переноса на некоторый вектор [16, С. 144].

Следующий шаг – выяснение того, какие элементы необходимо задать для определения параллельного переноса. Следует обратить внимание учащихся на то, что параллельный перенос полностью задается двумя соответствующими точками и указанием одной из них в качестве прообраза. (Ввести обозначение для образа точки $\mathrm{T(X)}$ и запись $\mathrm{T(X)} = \mathrm{X}_1$.) Эту же мысль закрепить предложив учащимся самостоятельно решить такую, например, задачу: «Дан Δ ABC и точка M, расположенная во внешней области треугольника. Параллельный перенос задан расстоянием $|\mathrm{AB}|$ и направлением от B к A. Построить образ данного треугольника и точки M в этом отображении».

Развивая логическое мышление учащихся, необходимо подвести их к пониманию того факта, что если вместо признака A (в данном случае – «быть движением») в определении используется признак B (в данном случае «быть отображением»), то признак A становится теоремой (в данном случае «Параллельный перенос является движением»). Таким образом, оказывается, что эта несложная ни по формулировке, ни по доказательству теорема несет весьма серьезную функцию воспитания учащихся.

Следует как можно чаще практиковать применение параллельного переноса при решении задач. Необходимо, чтобы каждое понятие (а тем более это важное понятие) «активно работало» в дальнейшем. Для этого можно предложить учащимся решить следующие задания:

Задание 1. Построить образ $\Delta\mathrm{MPK}$ при параллельном переносе, переводящем M в точку O – середину $|\mathrm{MP}|$.

Задание 2. Существует ли параллельный перенос, переводящий M в C, а N в D, если $|MN| = 2\text{см}$, $\ CD\ = 2\text{м}$?

Задание 3. Какие утверждения можно доказать, имея следующие данные (Рис. 24):

Дано: $\angle BAD \cong \angle DAC$; $|AK| \cong |KM| \cong |MB|$; $|AL| \cong |LN| \cong |NC|$.

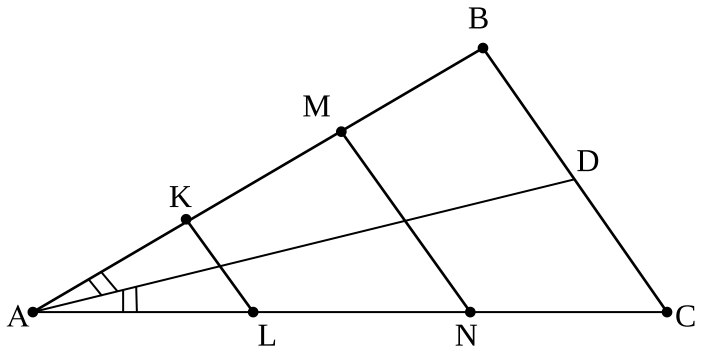

Рис. 24

Доказать: …..

Задания рассчитаны на проверку следующих знаний и умений:

Задание 1. Проверяется умение строить середину отрезка, образ фигуры при параллельном переносе, заданном точкой и ее образом. Одновременно проверяется умение оформить решение задачи на построение.

Задание 2. Проверяется знание того, что параллельный перенос есть движение, усвоение определения движения, умение провести рассуждение от противного, сравнить две величины, измеренные с помощью различных единиц [16, С. 148].

Задание 3. Проверяется умение решать задачи экстраполяционного типа, т.е. умение самостоятельно определять условие задачи, по данному ее за ключению. Это задание имеет ярко выраженный творческий характер.

На формирования умения применять понятия параллельного переноса полезно решить с учащимися следующие задания:

Задание 1 (№ 4 из учебного пособия С. Н. Дорофеева [11, С. 17]).

Вычислить площадь треугольника, если стороны AB $= 12$, BC =14, а медиана BM, проведенная к третьей стороне, равна 8 см.

Решение:

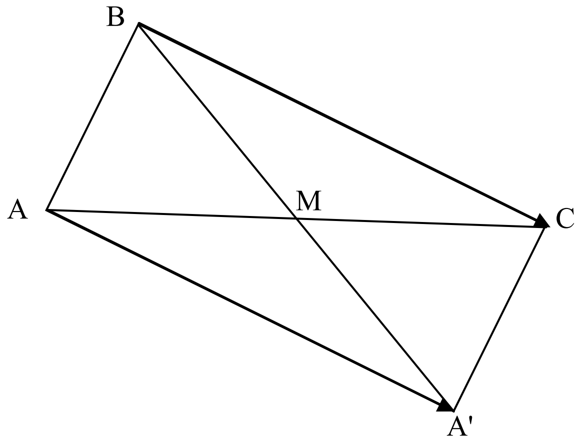

Рис. 25

Применим параллельный перенос на вектор BC. Тогда точка A перейдет в некоторую точку A' (Рис. 25). Отметим, что площадь треугольника ABC равна площади треугольника $A'AB$. Поскольку в треугольнике $A'AB$ известны длины всех сторон: $AB = 12, A'B = 16, AA' = 14$, то, пользуясь формулой Герона находим, что $S_{\Delta AA`B} = \sqrt{21 \cdot 9 \cdot 7 \cdot 5} = 21\sqrt{15}.$ Следовательно, $S_{\Delta AA`B} = 21\sqrt{15}.$

Задание 2 (№ 27 из А. В. Погорелова [18, С. 136]).

Даны точки A, B и C. Постройте точку C', в которую переходит точка C при параллельном переносе, переводящем точку A и B.

Решение:

Задача сводится к построению параллелограмма $ABC'C$ по трем вершинам A, B и C, если точка C не принадлежит отрезку AB (Рис. 26.) Ее можно решить двумя способами.

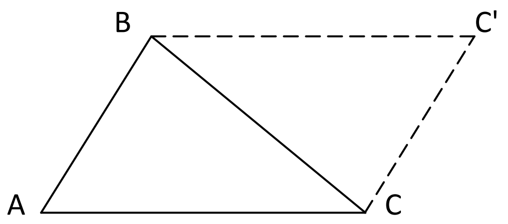

Рис. 26

1-й способ.

Так как «при параллельном переносе точки смещаются по параллельным прямым на одно и то же расстояние», то через точку C проведем прямую, параллельную AB. Далее через точку B проведем прямую, параллельную AC.

Доказательство основывается на свойстве сторон параллелограмма.

Таким образом, точка C' является пересечением этих прямых и будет искомой.

2-й способ. Этот способ основывается на свойстве диагоналей параллелограмма.

Через середину отрезка BC - точку O провести луч AO. От точки O отложить отрезок OC', равный OA. Точка C' будет искомой.

Доказательство: по признаку параллелограмма построенный четырехугольник - параллелограмм. По свойству сторон параллелограмма $CC' \| AB$ и $CC' = AB$.

Таким образом, если точка C принадлежит отрезку AB, то для построения точки C' надо на луче AB от точки C отложить отрезок, равный AB [18, С. 136].

На формирования умения применять свойства параллельного переноса можно предложить учащимся следующую задачу: «Даны точки A, B, C. Постройте точку C', в которую переходит точка C при параллельном переносе, переводящем точку A в B.

Задача сводится к построению параллельграмма $ABC'C$ по трем вершинам A, B и C, если C не принадлежит отрезку AB. Решение основывается на свойстве сторон параллелограмма. Так как «при параллельном переносе точки смещаются по параллельным прямым на одно и тоже расстояние», то через точку C проведем прямую, параллельную AB; а через точку B проведем прямую, параллельную AC. Тогда C' пересечения этих прмяых будет искомой. Доказательство следует из свойств сторон параллельграмма.

§8. Методические особенности применения осевой симметрии к решению планиметрических задач элементарной геометрии

Применение осевой симметрии к решению задач на построение называют методом симметрии. Суть этого метода состоит в том, что наряду с данными и искомыми фигурами рассматриваются также фигуры, симметричные некоторым из них относительно некоторой оси. Если удачно выбрана ось и преобразуемая фигура, то решение задачи может значительно облегчиться, а в некоторых случаях симметрия непосредственно даёт искомые точки.
[5, С. 100]

На прямое применение свойств осевой симметрии можно предложить следующее упражнение:

Задача № 1148 из учебника Л. С. Атанасяна [2, С. 299].

Докажите, что при осевой симметрии плоскости :

а) прямая, параллельная оси симметрии , отображается на прямую, параллельную оси симметрии;

б) прямая, перпендикулярна к оси симметрии, отображается на себя.

Решение:

Внесем обозначения: l - ось симметрии, a - данная прямая. Осевая симметрия – это движение , поэтому образом прямой a является некоторая прямая a'.

а) По условию задачи $a \parallel l$. При доказательстве воспользуемся методом от противного .Предположим, что прямые l и a' не параллельны, значит они пересекаются в некоторой точке, которую обозначим M.

Так как $M \in$ l, то точка M отображается сама на себя, и, следовательно , $M \in$ а. Следовательно, прямые a и l имеют общую точку M, что противоречит условию а $\parallel$ l .

б) Пусть $a \perp l$, M- точка пересечения a и l, а N- точка прямой a, отличная от M.

Так как $a \perp l$, то образ N' точки N лежит на прямой a. Очевидно, образ точки M, т.е. сама точка M, также лежит на прямой a.

Таким образом, прямые a и a' имеют две общие точки :M и N', следовательно они совпадают.

После доказательства свойств осевой симметрии полезно провести исследование других возможных расположений точек M, N, M_1, и N_1 (см. § 5).

1. Пусть точки M и N лежат в разных полуплоскостях относительно оси симметрии.

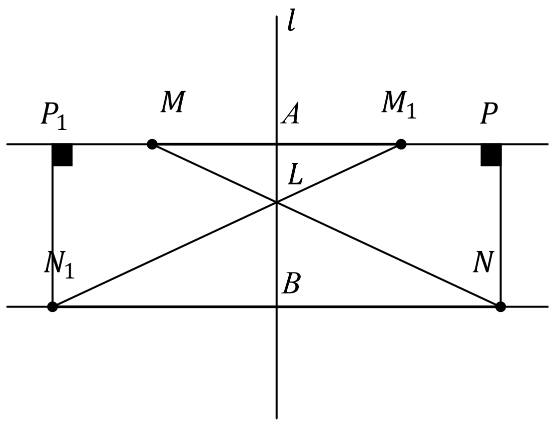

Рис. 27

Выполняем дополнительные построения: проводим из точек N и N_1 к прямой MM_1 перпендикуляры NP и N_1P_1 (Рис. 27).

Доказательство равенства прямоугольных треугольников MNP и $M_1N_1P_1$ проводится аналогично доказательству, приведенному выше (задача № 1148 б)). Из равенства прямоугольных треугольников MNP и $M_1N_1P_1$следует равенство их гипотенуз MN и M_1N_1 [15, С. 101].

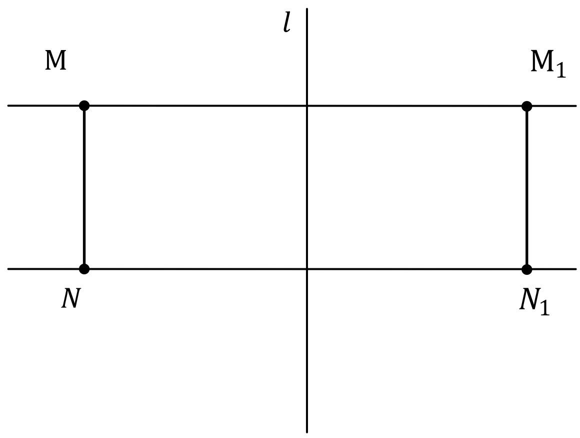

Рис. 28

2. Пусть точки M и N лежат на прямой, параллельной оси симметрии l (Рис. 28). Четырехугольник NMM_1N_1- прямоугольник по построению, так как в условии дано преобразование осевой симметрии относительно прямой l. Отрезки MM_1 и NN_1 равны как противоположные стороны прямоугольника.

При введении определения движения плоскости основное внимание необходимо направить на понимание определения. Другими словами, если в усвоении или заключении сказано: «движение плоскости…», то учащиеся должны понимать, что: во-первых, «движение плоскости- это отображение плоскости на себя…», то есть указан способ, с помощью которого каждой точке A плоскости ставится в соответствие некоторая точка A' и при этом каждая точка плоскости оказывается поставленной в соответствие какой-то точке плоскости; и, во-вторых, это «отображение плоскости на себя сохраняет расстояния между точками…», то есть если точкам A и B ставятся в соответствие точки A_1 и B_1, то выполняется равенство $\mathrm{A}_1\mathrm{B}_1 = \mathrm{AB}$ [15, С. 102].

Для того чтобы проверить правильность усвоения определения, можно предложить учащимся упражнение:

Точки A и B при движении переходят в точки A' и B'. Чему равно расстояние между точками A' и B', если $\mathrm{AB} = 6\text{см}$?

Так как отображение плоскости на себя сохраняет расстояние между точками, поэтому расстояние между A' и B' будет равно 6 см.

Осевая симметрия часто помогает решить задачу, когда фигура или часть ее имеет ось симметрии, например, когда в задачах речь идет о биссектрисе угла.

Полезно также привести контрпримеры, т.е. задать такое преобразование плоскости, которое не является движением. Для этого можно предложить упражнения 1 и 2.

1. Дана некоторая прямая. Поставим каждой точке плоскости в соответствие ее проекцию на эту прямую. Является ли данное преобразование плоскости движением?

2. На плоскости отмечена точка O. Через точку O и каждую точку плоскости X проведем луч OX и отложим на этом луче точку X' так, что $\mathrm{OX}' = 2\mathrm{OX}$. Является ли данное преобразование плоскости движением?

В задаче 1 преобразование плоскости не является отображением плоскости на себя, т.е. не выполняется первое условие.

В задаче 2 преобразование плоскости не сохраняется расстояние между точками, т.е. не выполняется второе условие.

С учащимся полезно решить следующие задачи:

Задача 1 (№ 6 из учебника А. В. Погорелова [18, С. 111]).

Докажите, что прямая, проходящая через центр окружности , является ее осью симметрии.

Решение:

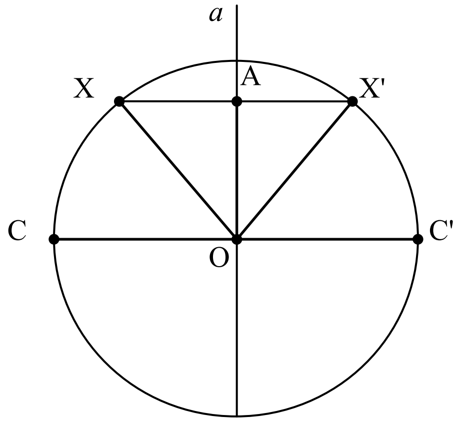

Рис. 29

Пусть O – центр окружности и a – прямая, проходящая через точку O. Очевидно, преобразование симметрии относительно прямой a переводит точку C окружности в точку C', а точку O оставляет на месте.

Возьмем произвольную точку X на окружности и построим точку X′, в которую переходит точка X при симметрии относительно прямой a (Рис. 29).

Треугольники OAX и OAX' равны по первому признаку. У них углы при вершине A прямые, сторона OA общая, а стороны AX и AX′ равны по определению симметрии. Из равенства треугольников следует равенство сторон OX и OX′ ,т.е. точка X′ лежит на окружности. Это означает, что окружность при симметрии относительно прямой a переходит в себя.

Следовательно, прямая a есть ось симметрии окружности.

Задача 2 (№ 16 из учебника А. В. Погорелова [18, С. 136]).

Докажите, что прямая, содержащая биссектрису угла, является его осью симметрии.

Решение:

Пусть AK – прямая , содержащая биссектрису угла MAN (Рис. 30).

Возьмем точку X на стороне AM и построим симметричную ей точку X' относительно прямой AK. Треугольники ABX и ABX' равны по двум катетам (AB- общий, $BX = BX'$ по определению симметрии относительно прямой).

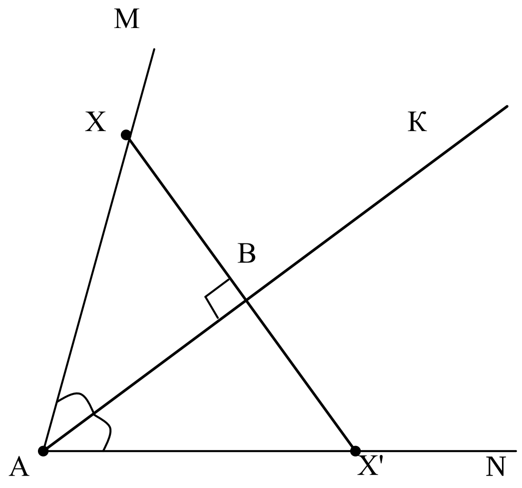

Рис. 30

Из равенства треугольников следует $\angle XAB = \angle X'AB$. Значит, угол $X'AB$ равен углу NAB и по аксиоме откладывания углов (аксиома 6) $A'X$ и AN совпадают, т.е. точка X' лежит на стороне AN угла MAN. Это означает, что угол MAN при симметрии относительно биссектрисы переходит сам в себя.

Следовательно, прямая, содержащая биссектрису угла, является его осью симметрии. Вершина угла A лежит на оси симметрии и переходит сама в себя.

На закрепление понятия движение плоскости с использованием понятия осевой симметрии можно предложить учащимся выполнить следующее задание.

На рисунке 31 даны прямая a и треугольник ABC. Постройте фигуру F, на которую отображается данный треугольник при осевой симметрии с осью a. Что представляет собой фигура F?

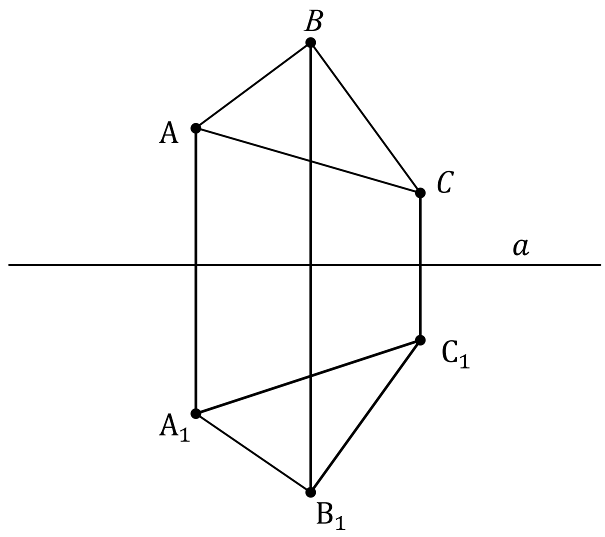

Рис. 31

Решение:

Построим точки A_1, B_1, C_1, симметричные точкам A, B, C относительно прямой a и проведем отрезки A_1B_1, B_1C_1и A_1C_1.

Так как при движении, в частности при осевой симметрии, треугольник отображается на равный ему треугольник, то искомой фигурой является треугольник $A_1B_1C_1$, равный треугольнику ABC.

§9. Методические особенности применения центральной симметрии к решению планиметрических задач элементарной геометрии

Применение центральной симметрии к решению задач на построение называют методом симметрии.

Данный метод применим к тем задачам, в условии которых в той или иной форме указана точка, являющаяся центром симметрии искомой или вспомогательной фигуры.

На формирование умения применять понятия симметрии относительно точки можно предложить учащимся несколько простых заданий и вопросов:

1. Дана точка O. Постройте точку A', симметричную точке A относительно O.

2. Какая точка симметрична точке A' относительно точки O?

3. Отрезки AB и CD пересекаются в точке O, которая является серединой каждого из них. Назовите точку, симметричную точку A (точке B, точке C, точке D) относительно точки O [16, С. 150].

Определенные трудности у учащихся может вызывать построение рисунка и краткая запись условия и заключения теоремы. Изучение этой теоремы начинается с формулировки теоремы и выполнения рисунка 32 по условию теоремы. Проанализируем условие теоремы: «Преобразование симметрии относительно точки является движением». Пусть и X и Y две произвольные точки фигуры F. Данное преобразование симметрии относительно точки O переводит точку X фигуры F в точку X' фигуры F', а точку Y фигуры F в точку Y' фигуры F'. Так как в условии дано преобразование симметрии относительно точки, значит $OX = OX'$ и $OY = OY'$.

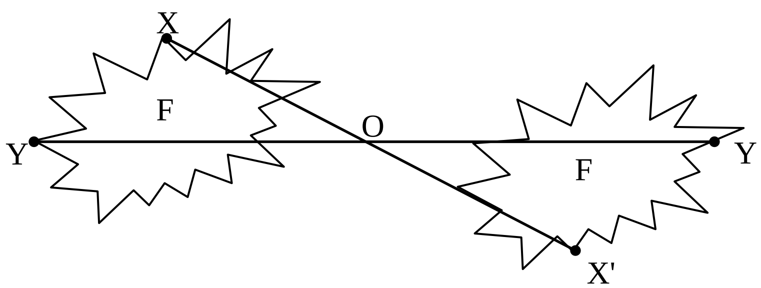

Рис. 32

Конфигурация, получившаяся на рисунке, хорошо знакома учащимся: два отрезка, пересекающиеся в середине. Доказательство равенства, сформулированного в заключении теоремы, со ссылкой на первый признак равенства треугольника учащиеся могут провести самостоятельно.

С учащимся можно решить следующие задачи:

Задача 1 (№ 5 из учебника А. В. Погорелова [18, С. 135]).

Докажите , что центр окружности является ее центром симметрии.

Доказательство:

Пусть точка О-центр окружности.Возьмем произвольную точку А на окруостии тчку A', в которую переходит точка при симметрии относительно точки О.

Так как $\mathrm{OA}' = \mathrm{OA} = R$, т.е. точка A' лежит на данной окружности. Значит, окружность присимметрииотносительно центра О переходит сама в себя.

Таким образом, точка О является центром симметрии окружности.

Задача 2 (№ 9 из учебника А. В. Погорелова [18, С. 135]).

Докажите , что четырехугольник, у которого есть центр симметрии, является параллелограммом.

Доказательство:

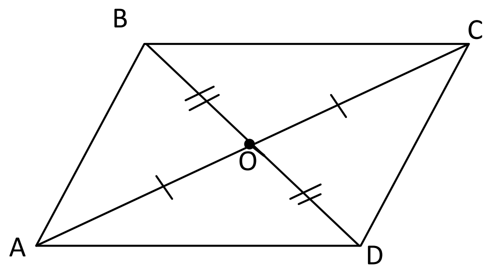

Рис. 33

Вершина четырехугольника (Рис. 33) не может быть его центром симметрии, так как в противном случае три вершины лежали бы на одной прямой. Исходя из этого, в данном четырехугольнике имеются две пары симметричных друг другу вершин. Отрезки, соединяющие симметричных вершины, пересекаясь в центре симметрии, делятся пополам. Это означает, что ни один из этих отрезков не является стороной. Значит, эти отрезки-диагонали.

По признаку параллелограмма данный четырехугольник является параллелограммом.

Задача 3 (№ 10 из учебника А. В. Погорелова [18, С. 135]).

Даны пересекающиеся прямые и точка, не лежащая на этих прямых. Постройте отрезок с концами на данных прямых и серединой в данной точке.

Решение:

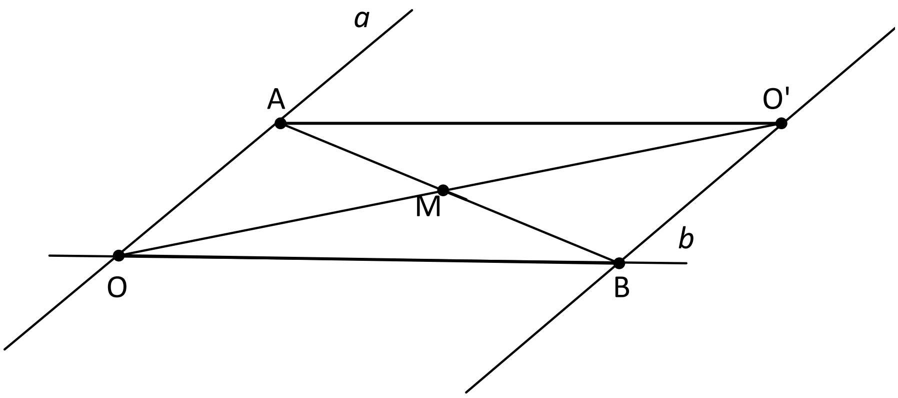

Рис. 34

Пусть две прямые a и b пересекаются в точке O (Рис. 34).

Соединим O и M и на продолжении отрезка OM за точку M отложим отрезок MO', равный OM. Через точки M проведем прямые, параллельные данным прямым, до пересечения с ними.

Полученный четырехугольник $ABCD$- параллелограмм по определению: стороны попарно параллельны. Его диагональ AB и будет искомый отрезок.

Задача 4 (№ 5 из учебника А. Д. Александрова [1, С. 117]).

Построить отрезок, концы которого лежат на данных фигурах F_1 и F_2, а середина находится в данной точке O.

Решение:

Построим фигуру F_2 симметричную фигуре $F_2{}'$, относительно точки O.

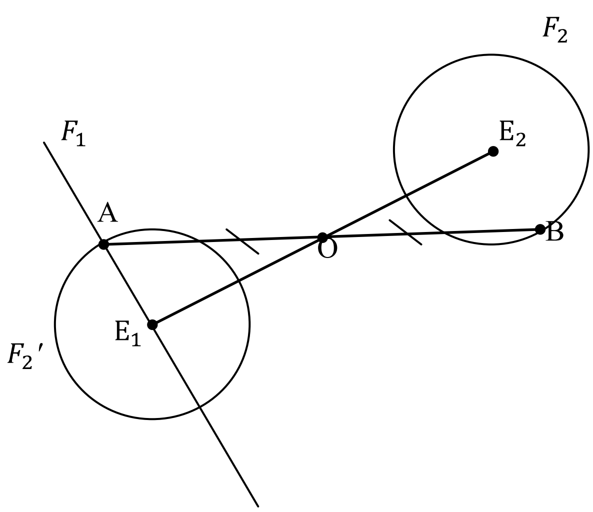

Рис. 35

Пусть А-точка пересечения фигур F_1 и F_2', тогда симметричная ей относительно точки O точка В ϵ F_2. Так как точка O $-$ середина отрезка AB.

Следовательно, отрезок АВ- является решением задачи (Рис. 35).

При решении задач центральная симметрия часто применяется также не ко всему чертежу в целом, а лишь к некоторой его части. При этом мы приходим к новому чертежу, который может оказаться более удобным для решения задач, чем исходный.

На закрепление понятия движения плоскости с использованием цен тральной симметрии можно предложить учащимся выполнить следующие задания.

1. Точка F - середина стороны АС в треугольники АВС. Постройте точку D, симметричную точке В относительно точки F, и докажите, что четырехугольник $ABCD$ – параллелограмм.

2. Нарисуйте равносторонний треугольник АВС. Постройте треугольник $\mathrm{A_1B_1C}$, симметричный данному относительно вершины С. Докажите, что точки $\mathrm{ABA_1B_1}$ являются вершинами прямоугольника.

§10. Методические особенности применения поворота к решению планиметрических задач элементарной геометрии

Поворот используется как метод решения геометрических задач на построение. Идея этого метода состоит в том, чтобы повернуть какую-либо данную или искомую фигуру около целесообразно избранного центра на соответствующий угол так, чтобы облегчить проведение анализа задачи или даже непосредственно прийти к решению [33, С. 107].

Практика показывает, что как само определение поворота, так и построение фигур, в которые переходят данные фигуры, вызывает определенные трудности у учащихся, поэтому необходимо рассмотреть понятие поворота, а потом доказательство теоремы: «Пусть две прямые l_1 и l_2 на плоскости пересекаются в точке O и образуют между собой угол α ($\alpha \leq 90°$). В результате двух последовательных симметрий относительно прямых l_1 и l_2 мы получим поворот на угол 2α вокруг точки O. При этом направление поворота то же, что и у поворота на угол α, переводящего прямую l_1 в прямую l_2. Или используя рисунок 36.

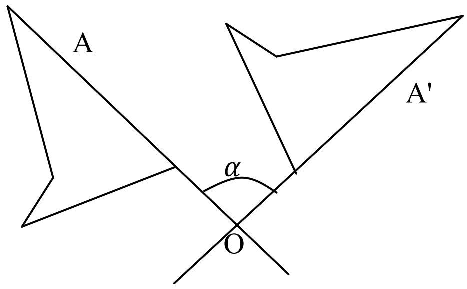

Рис. 36

На умение использовать свойства поворота вокруг точки и умение видеть центр поворота фигуры можно предложить учащимся следующие задачи:

Задача 1 (№ 14 из учебника А. В. Погорелова [18, С. 114]).

Постройте равносторонний треугольник, у которого одна вершина, а две другие вершины лежат на двух прямых.

Решение:

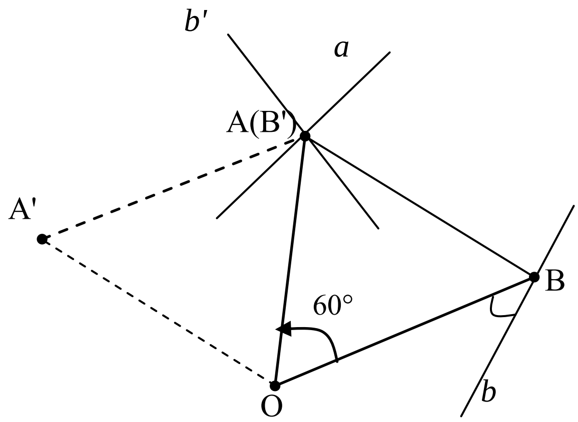

Рис. 37

Пусть OAB - искомый треугольник, у которого вершина O задана, а вершины A и B лежат на данных прямых a и b. Выполним поворот прямой b около точки O на 60°. При этом она перейдет в прямую b', проходящую через точку А. Таким образом, чтобы найти вершину А, достаточно построить прямую b' . Вершина А будет точкой пересечения прямых a и b' (Рис. 37).

Для построения прямой b' достаточно взять любые две точки прямой b и построить точки, в которые они переходят при повороте. Прямая b' будет проходить через эти точки.

Построив вершину А, строим вершину В. Она совпадает с точкой пересечения серединного перпендикуляра к отрезку ОА и прямой b.

Соединив точки $\mathrm{O, A, B}$ отрезками, получаем искомый треугольник.

Задача 2 (№ 3 из учебника А. Д. Александрова [1, С. 116]).

Дан остроугольный Δ АВС. Найдите точку такую, что сумма ее расстояний до вершин треугольника будет наименьшая.

Решение:

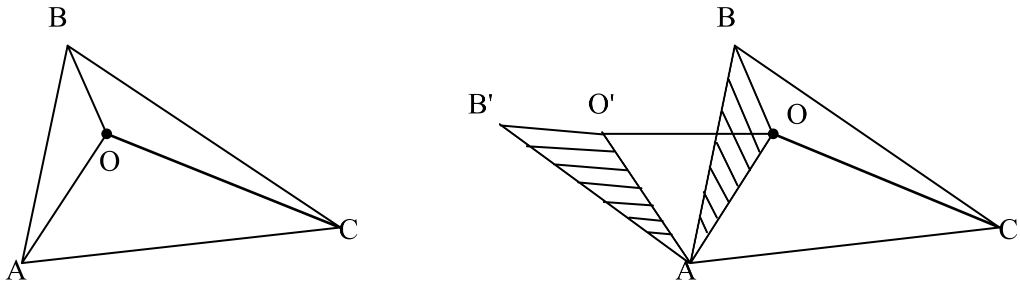

Рис. 38

В треугольнике АВС возьмем любую точку O и будем рассматривать сумму : $S = \mathrm{OA + OB + OC}$. Для того, чтобы определить наименьшее значение этой суммы, нужно построить из отрезков $\mathrm{OA, OB, OC}$ ломанную (Рис. 38).

Для этого нужно повернуть Δ АВС вокруг точки А в сторону от Δ АВС на 60°. Из этого получаем, что $\Delta\,\mathrm{AB'O'} = \Delta\,\mathrm{ABO}$.

Рассмотрим ломанную $\mathrm{B'O'OC}$. В ней $\mathrm{B'O' = BO}$ и $\mathrm{O'O = OC}$ (т.к. $\Delta\,\mathrm{AOO'}$ равносторонний). Отсюда следует, что $\mathrm{B'O' + O'O + OC} = S$. Понятно, что S достигает наименьшего значения, когда точки $\mathrm{O'}$ и O лежат на отрезке $\mathrm{B'C}$ (точка $\mathrm{B'}$- вершина равностороннего $\Delta\,\mathrm{ABC'}$). Углы $\mathrm{AO'B'}$ и AOC- внешние углы равностороннего $\Delta\,\mathrm{AOO'}$. Следовательно, $\angle\mathrm{AOC} = \angle\mathrm{AO'B'} = 120°$. Так как $\angle\mathrm{AOB} = \angle\mathrm{AO'B'}$, то $\angle\mathrm{AOB} = 120°$,тогда $\angle\mathrm{BOC} = 120°$.

Итак, S достигает наименьшего значения для такой точки O, из которой все стороны треугольника видны под равными углами.

Доказательство утверждения «Поворот является движением» аналогично доказательству утверждения «Параллельный перенос является движением», поэтому этот материал можно предложить учащимся для самостоятельной работы по учебнику, а затем следует его обсудить. Если подготовка класса недостаточна для такой работы, то можно порекомендовать формой работы с классом избрать лекцию.

Решения конструктивных задач методом поворота, предполагают умение отыскать на произвольных заданных фигурах соответственные при заданном повороте точки. Использование поворота эффективно при установлении зависимостей в равностороннем треугольнике, квадрате, при доказательстве перпендикулярных прямых.

ВЫВОДЫ ПО ВТОРОЙ ГЛАВЕ

Во второй главе были получены следующие результаты:

1. Выполнен анализ содержания темы «Движения» в учебниках геометрии под редакцией Л.С. Атанасяна, А.В. Погорелова, И.Ф. Шарыгина. Основное внимание в рассмотренных учебниках уделяется определению понятия «движения», видам движения, их свойствам. В учебных пособиях для общеобразовательных классов движения плоскости излагаются в ознакомительном порядке, на практике им отводится мало времени, как правило, данные геометрические преобразования более подробно изучается в математических классах.

2. Рассмотрены государственные стандарты основного общего образования по математике. Проанализированы цели обучения геометрическим преобразованиям в курсе геометрии основной школы.

3. Выделены требования, предъявляемые к знаниям, умениям и навыкам учащихся по теме «Движения плоскости» в зависимости от уровня изучения геометрии: базового, расширенного (базовый + профильный), углуб-

ленного. Согласно Примерной образовательной программе по математике учащиеся должны овладеть геометрическими преобразованиями на профильном уровне изучения геометрии.

4. Рассмотрены методические рекомендации по обучению движениям плоскости учащихся 8-9 классов. Определено, что обучать учащихся геометрическим преобразованиям необходимо на специально подобранных задачах, которые позволяют упростить сложные геометрические понятия, доказательства теорем и избежать некоторых ошибок и трудностей.

5. Рассмотрена методика обучения планиметрических задач с помощью таких движений как: осевая симметрия, центральная симметрия, параллельный перенос и поворот.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Сформулируем основные выводы и полученные результаты проведенного исследования.

При выполнении данной бакалаврской работы были решены поставленные задачи и выполнено следующее:

1. Рассмотрены исторические аспекты развития понятия движение. Было выяснено, что движения играют в геометрии чрезвычайную важную роль. Они не изменяют ни формы, ни размеров фигур, меняя лишь расположение фигуры, но фигуры отличающиеся лишь своим расположением на плоскости. Именно поэтому их и называют в геометрии «равными фигурами».

2. Введено понятие параллельного переноса плоскости . Сформулированыи доказаны основные свойства параллельного переноса.

3. Введено понятие осевой симметрии. Сформулированы и доказаны основные свойства осевой симметрии .

4. Введено понятие центральной симметрии. Сформулированы и доказаны основные свойства центральной симметрии .

5. Введено понятие поворота плоскости. Сформулированы и доказаны основные свойства поворота .

6. Рассмотрены методические основы обучения движений плоскости.

7. Выявлены методические особенности применения параллельного переноса к решению планиметрических задач.

8. Выявлены методические особенности применения осевой симметрии к решению планиметрических задач.

9. Выявлены методические особенности применения центральной симметрии к решению планиметрических задач.

10. Выявлены методические особенности применения поворота к решению планиметрических задач.

Подводя итоги бакалаврской работы, можно сказать, что полученные результаты исследования свидетельствуют о том, что поставленная цель достигнута, задачи решены.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Александров, А.Д. Геометрия [Текст]: учеб. пособие для 9 кл. с углубл. изучением математики / А.Д. Александров, А.Л. Вернер, В.И. Рыжик. – М.: Просвещение, 2004. – 240 с.

2. Атанасян, Л.С. Геометрия. 7-9 классы [Текст]: учеб. для общеобразоват. учреждений / Л. С. Атанасян, В. Ф. Бутузов, С. Б. Кадомцев и др. – 20-е изд. – М.: Просвещение, 2010. – 384 с.

3. Атанасян, Л.С., Бутузов, В.Ф., Кадомцев, С.Б., Юдина И.И Геометрия [Текст]: доп. главы к шк. учеб. 9 кл. : учеб. пособие для учащихся шк. и кл. с углубл. изуч. математики / Л.С. Атанасян, В.Ф. Бутузов, С.Б. Кадомцев, И.И. Юдина. – М.: Просвещение, 1997. – 176 с.

4. Бескин, Н.М. Методика геометрии [Текст]: учебник для педагогических институтов / Н.М. Бескин. – М.: Учпедгиз, 1947. – 276 с.

5. Болтянский, В.Г., Яглом И.М. Геометрия [Текст]: учебное пособие для 9 класса средней школы / В.Г. Болтянский, И.М. Яглом. – М.: Просвещение, 1964. – 128 с.

6. Володин, В. К., Фролова, С.В. Несколько задач на движение плоскости / В. К. Володин, С.В. Фролова. // Математика в школе. – 2000. – №4.

7. Глейзер, Г.И. История математики в школе VII-VIII классы [Текст]: пособие для учителей / Г.И. Глейзер. – М.:Просвещение, 1982. –240с.

8. Готман, Э.Г. Геометрические задачи, решаемые с помощью поворота/ Э.Г. Готман // Математика в школе – 1990. – № 3, —118 с.

9. Готман, Э.Г. Задачи по планиметрии и методы их решения [Текст]: Пособие для учащихся/ Э.Г. Готман. — М.: Просвещение: АО «Учеб. лит.», 1996. — 240 с.

10. Гусев, В.А. Каким должен быть курс школьной геометрии/ В.А. Гусев // Математика в школе –2002. - № 3.

11. Дорофеев, С.Н. Геометрические преобразования в примерах и задачах [Текст]: учебное пособие / С.Н. Дорофеев. – Пенза: Информационно – издательский центр ПГУ, 2002. – 189 с.

12. Колмогоров, А.Н. и др. Геометрия [Текст]: учебное пособие для 6-8 кл. средней школы / А.Н. Колмогоров и др. – М.: Просвещение, 1980. – 382 с.

13. Малова, И.Е. Доказательство равенства фигур с использованием осевой симметрии / И.Е. Малова // Математика в школе –1983 -№ 3, с. 32-34.

14. Мерзляк, А.Г., Полонский, В.Б., Якир М.С. Геометрия [Текст]: 9 класс: учебник для учащихся общеобразовательных организаций/ А.Г. Мерзляк, В.Б. Полонский, М.С. Якир. – М.: Вентана-Граф, 2014.– 240 с.

15. Мищенко, Т.М. Дидактические материалы и методические рекомендации для учителя по геометрии: 9 класс: к учебнику Л.С. Атанасяна и др. «Геометрия. 7-9 классы». ФГОС (к новому учебнику) / Т.М. Мищенко. – М.: Издательство «Экзамен», 2017. –142.

16. Мищенко, Т.М. Дидактические материалы и методические рекомендации для учителя по геометрии: 8 класс: к учебнику А.В. Погорелова «Геометрия. 7-9 классы». ФГОС (к новому учебнику) / Т.М. Мищенко. – М.: Издательство «Экзамен», 2014. –206.

17. Мищенко, Т.М. Методическое пособие к учебнику И.Ф. Шарыгина «Геометрия. 7-9 классы». ФГОС (к новому учебнику) / Т.М. Мищенко. – М.: Дрофа, 2013. – 368 .

18. Погорелов, А.В. Геометрия. 7–9 классы [Текст] : учеб. для общеобразоват. организаций / А.В. Погорелов. – 2-е изд. – М.: Просвещение, 2014. – 240 с.

19. Примерная основная образовательная программа основного общего образования. Одобрена решением федерального учебно-методического объединения по общему образованию / М-во образования и науки РФ. – М.: Просвещение, 2015. – 560 с.

20. Саранцев, Г.И. Методика обучения математике в средней школе [Текст]: учеб. пособие для студентов мат. спец. пед. вузов и ин-тов / Г.И. Саранцев.– М.: Просвещение, 2002.– 224 с

21. Саранцев, Г.И. О методике решения планиметрических задач / Преподавание геометрии в 6-8 классах [Текст]: сб. статей / сост. В.А. Гусев. – М.: Просвещение, 1979. – С.102-116.

22. Саранцев, Г.И. Упражнения в обучении математике [Текст] / Г.И. Саранцев. – М.: Просвещение, 1995. – 240с.

23. Стомахин, В.А. Геометрические преобразования в планиметрических задачах/ В.А. Стомахин // Квант. – 1986 – №12.

24. Федеральный государственный образовательный стандарт общего основного образования / М-во образования и науки РФ. – М.: Просвещение, 2010. - 50 с. – Режим доступа: http://минобрнауки.рф/документы/938 - Последнее обновление 06.06.2017.

25. Федеральный перечень учебников, рекомендованных к использованию при реализации имеющих государственную аккредитацию образовательных программ начального общего, основного общего, среднего общего образования» / Приказ Министерства образования и науки РФ. – М.: Просвещение, 2014. - 164 с.

26. Чичигин, В.Г. Методика преподавания геометрии. Планиметрия [Текст]: пособие для учителей средней школы / В.Г. Чичигин. – М.: Учпедгиз, 1959. – 392 с.

27. Шарыгин, И.Ф. Геометрия. 7-9 кл. [Текст]: учеб. для общеобразоват. учреждений / И.Ф. Шарыгин. – М.: Дрофа, 2012. – 462, [2] с.

28. Яглом, И.М. Геометрические преобразования, I. Движения и преобразования подобия [Текст] / И.М. Яглом. – М.: Гос. изд-во технико-теор. литературы, 1955. – 282 с.

29. Burns, G., Glazer A. M. Space Groups for Scientists and Engineers (2nd ed.) – Boston: Academic Press, 1990. – 408 pp.

30. Bernard, F. Schutz Geometrical methods of mathematical physics / F. Schutz Bernard. – Cambridge university Press, 1999. – 433pp.

31. Dan Pedoe Geometry: a comprehensive course – London: Cambridge university Press, 1988. – 187pp.

32. David, A. Brannan, Matthew, F. Esplen, Jeremy, J. Gray Geometry: second edition / A. Brannan David, F. Esplen Matthew, J. Gray Jeremy. – New York: Cambridge university Press, 2012. – 587pp.

33. Edwin, E. Moise, Floyd, L. Downs Geometry / E. Moise Edwin, L. Downs Floyd. – Pearson Prentice Hall, 1991. – 691 pp.

34. Joe Rosen Symmetry discovered : concepts and applications in nature and science / Rosen Joe. – New York: Dover Publication, 1998. –163pp.