МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Тольяттинский государственный университет»

Институт математики, физики и информационных технологий

Кафедра «Алгебра и геометрия»

Направление подготовки 44.03.05 «Педагогическое образование»

Направленность (профиль) «Математика и информатика»

БАКАЛАВРСКАЯ РАБОТА

на тему **«МЕТОДИКА ОБУЧЕНИЯ ТОЖДЕСТВЕННЫМ ПРЕОБРАЗОВАНИЯМ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ВЫРАЖЕНИЙ В КУРСЕ АЛГЕБРЫ ОСНОВНОЙ ШКОЛЫ»**

Студент Е.В. Анфилова ______________

Руководитель д.п.н., профессор Р.А. Утеева ______________

Консультант к.п.н., А.В. Кириллова ______________

Допустить к защите

Заведующий кафедрой д.п.н., профессор Р.А. Утеева _____________

«____»__________2017 г.

Тольятти 2017

АННОТАЦИЯ

Цель бакалаврской работы – выявить методические особенности обучения теме «Тождественные преобразования тригонометрических выражений» в курсе алгебры основной школы и разработать методические материалы по теме.

В курсе математики основной школы тема тождественных преобразований тригонометрических выражений постепенно исчезает из учебных программ как базового, так и профильного уровня, однако она все еще является одним из важнейших разделов алгебры, поэтому нуждается в дополнительной разработке методических рекомендаций, которые бы учитывали все аспекты обучения теме.

Бакалаврская работа состоит из введения, двух глав, заключения, списка литературы и приложений.

Введение содержит в себе такие основные характеристики исследования как: актуальность, объект, предмет, цель, задачи и методы исследования.

Глава I посвящена теоретическим основам обучения тождественным преобразованиям тригонометрических выражений в курсе алгебры основной школы. В ней рассмотрено понятие логико-математического анализа содержания темы школьного курса математики; представлены цели обучения и основные требования к учащимся по теме «Тождественные преобразования тригонометрических выражений».

В Главе II представлен анализ содержания теоретического и задачного материала темы «Тождественные преобразования тригонометрических выражений» в учебниках разных авторов; разработаны методические рекомендации по обучению тождественным преобразованиям тригонометрических выражений в курсе алгебры основной школы.

В заключении сформулированы основные результаты и выводы проведенного исследования. Список литературы содержит 33 наименования.

ABSTRACT

Traditionally, trigonometry is an important component of algebra and plays a great role in school course of mathematics.

The topic of the given bachelor’s thesis is «Identical transformations of trigonometric expressions teaching method in the course of algebra of the secondary school». The aim of the work is to give some information about methodological peculiarities of the topic «Identical transformations of trigonometric expressions» and to develop methodological recommendations that can be used by teachers or even students.

Bachelor's work consists of an introduction, two chapters, a conclusion, a list of references and appendices.

The first chapter of the bachelor’s thesis includes theoretical aspects of the topic. We analyze the concept of logical and mathematical analysis of the content of the topic. The readers’ attention is also drawn to aims, methods and ways of teaching identical transformations of trigonometric expressions.

In the second chapter we examine methodological basics by analyzing theoretical and practical material from different schoolbooks. As a result we describe methodological recommendations for studying identical transformations of trigonometric expressions in the course of algebra of secondary school.

The list of references includes 33 titles.

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Актуальность исследования. Тригонометрия – существенная и значимая составляющая школьного курса алгебры; данный материал традиционно применяется в математических олимпиадах, играя роль своего рода инструмента отбора. В средней школе продолжительный период существовал отдельный курс тригонометрии, с достаточным количеством учебников и задачников. Однако в современных учебных материалах четко прослеживается тенденция переносить темы тригонометрии и тождественных преобразований тригонометрических выражений в курс старших классов, а, следовательно, можно сказать, что со временем тригонометрический материал «растворился» в направлениях геометрии, алгебры, математического анализа.

Однако, несмотря на все вышесказанное тема «Тождественные преобразования тригонометрических выражений» играет значимую роль. Очень часто для решения тригонометрических уравнений и неравенств, а так же для комбинированных заданий и решения задач на упрощение тригонометрических выражений требуется широкая база знаний о правилах преобразования алгебраических выражений и тригонометрических формул (уметь применять их как по одной, так и в комплексе).

В соответствии с этим, сохраняется необходимость в эффективной организации обучения данному блоку содержания: логико−математический анализ материала темы, подбор форм, методов и средств обучения, разработка методики.

Объект исследования: процесс обучения математике в основной школе.

Предмет исследования: методика обучения тождественным преобразованиям тригонометрических выражений в основной школе.

Цель работы: выявить методические особенности обучения теме «Тождественные преобразования тригонометрических выражений» в курсе алгебры основной школы и разработать методические материалы по теме.

Основные задачи исследования:

– изучить понятие логико–математического анализа содержания темы школьного курса математики;

– определить цели обучения теме «Тождественные преобразования тригонометрических выражений»;

– рассмотреть основные требования к знаниям и умениям учащихся по теме «Тождественные преобразования тригонометрических выражений»;

–провести анализ содержания теоретического материала темы «Тождественные преобразования тригонометрических выражений» в учебниках разных авторов;

–провести анализ задачного материала по теме Тождественные преобразования тригонометрических выражений» в учебниках разных авторов.

Для решения поставленных задач были использованы следующие **методы исследования**: анализ педагогической и методической литературы; изучение опыта учителей математики по данной теме исследования; сравнительный анализ учебников и учебных пособий; систематизация и обобщение материала по теме.

Практическую значимость результатов исследования составляют методические рекомендации по обучению тождественным преобразованиям тригонометрических выражений в курсе алгебры основной школы, которые могут быть использованы учителями математики основной школы и студентами педагогических направлений подготовки в ходе педагогической практики в школе.

На защиту выносятся: методические рекомендации по обучению тождественным преобразованиям тригонометрических выражений в курсе алгебры основной школы.

Бакалаврская работа состоит из введения, двух глав и заключения.

Введение содержит в себе такие основные характеристики исследования как: актуальность, объект, предмет, цель, задачи и методы исследования.

Глава I посвящена теоретическим основам обучения тождественным преобразованиям тригонометрических выражений в курсе алгебры основной школы. В ней рассмотрено понятие логико−математического анализа содержания темы школьного курса математики; представлены цели обучения и основные требования к учащимся по теме «Тождественные преобразования тригонометрических выражений».

В Главе II представлен анализ содержания теоретического и задачного материала темы «Тождественные преобразования тригонометрических выражений» в учебниках разных авторов; разработаны методические рекомендации по обучению тождественным преобразованиям тригонометрических выражений в курсе алгебры основной школы.

В заключении сформулированы основные результаты и выводы проведенного исследования.

Список литературы содержит 33 наименования.

ГЛАВА I. ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ОБУЧЕНИЯ ТОЖДЕСТВЕННЫМ ПРЕОБРАЗОВАНИЯМ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ВЫРАЖЕНИЙ В КУРСЕ АЛГЕБРЫ ОСНОВНОЙ ШКОЛЫ

§1. Понятие логико-математического анализа содержания темы школьного курса математики

Педагогу в ходе его практической деятельности приходится искать решение к различным задачам: математическим, учебно−познавательным, учебно−методическим, методическим. Каждая из выше описанных задач имеет много общих моментов в их постановке, в действиях для их решения и даже в результатах решения. Однако каждая из них также имеет свои специфические особенности. В ходе практической деятельности возникает необходимость учитывать их специфику, рассматривая каждый определенный случай, и там, где возникает потребность, раскрывать общности. Данный подход к применению различных по учебным функциям задач в обучении позволит учителю конкретнее видеть, какого именно результата в том или ином случае он от учеников добивается и чему в тот или иной момент деятельности следует давать оценку.

Только основываясь на профессиональных навыках есть возможность осуществлять профессиональную деятельность, один из главных аспектов которой − процесс подготовки к уроку − включает в себя:

−умения анализировать учебный материал, т.е. исследовать его, планировать изучение;

−обосновывать свой выбор тех или иных средств обучения;

− изготавливать наглядные пособия;

−осуществлять контроль и оценку учебной деятельности учащихся и результатов обучения.

Е. И. Лященко [9, 13] пишет, что *логико-математический анализ содержания* учебного материала по математике составляет основу профессионального умения и, прежде чем раскрывать ее суть, нужно уточнить, что именно понимается под понятием «содержание учебного материала».

Однако под данным понятием в различных литературных источниках понимаются иногда разные объекты. Иногда это идеи, факты, математические задачи. Порой содержание учебного материала рассматривается как конкретные тексты учебных пособий, учебников и математические задачи.

В этом случае с каждым пунктом, параграфом и разделом учебника необходимо работать как с чем-то новым, имеющим оригинальное содержание, и анализ сводить к выяснению, о чем же в той или иной порции материала идет речь. Данный подход возможен, он распространен в практике школы, однако на его основе сложно осуществить обобщение содержания и установить внутрипредметные связи. Это и приходится часто наблюдать в современной школе.

Если проводить анализ знания на основе сущности процесса усвоения, т.е. начинать от знаний−знакомств и далее постепенно продвигаться к фундаментальным знаниям, затем к методологическим знаниям и, в конце концов, к знаниям−умениям, определяющим практическое владение предметом, то в математике часто идет переплетение первых трех видов. В данном случае это связано с некой абстрактностью предмета, когда знания сразу несут в себе и фундаментальную, и методологическую сущность.

Прежде всего, учитывая особенную специфику такого предмета как математика, − а именно, имеется в виду ее логическая доказательность утверждений и абстрактность понятий,− то содержание учебного материала принято разделять на *два крупных блока*:

− теоретический материал;

− математические задачи.

С методологической точки зрения, т.е. с точки зрения форм познаний, блок теоретического материала представляет собой совокупность понятий и их определений, алгоритмов (правил, формул и др.), утверждений (теорем, свойств, признаков и т. п.), которые различаются по степени общности и предметному содержанию математическими методами (методом неравенств и уравнений, координатным, векторным, а также методом равных треугольников, методом подобия и др.).

Если брать какую–либо конкретную тему школьного предмета, то там все эти компоненты взаимосвязаны между собой. Взаимосвязь определяется либо принципами построения дедуктивной теории, адаптированными для каждой школы в отдельности, либо содержательными идеями, интерпретированными для конкретной темы предмета (идея расширения числа, идея расширения возможностей выполнения тождественных преобразований и т. п.).

В содержании учебного материала необходимо уделить существенное внимание математическим задачам, на основе которых и становится возможным организовать математическую деятельность в рамках школьного обучения: постановку задачи и ее принятие, организацию поиска решения (анализ условия задачи; сопоставление условия и известных математических фактов, включая и приемы решения задач; выработку стратегии решения и составление плана решения задачи), реализацию плана, критическое осмысление результатов решения и др.[7, 8].

Такая трактовка учебного материала позволяет в любом разделе текста учебника выделить определения понятий или объектов, проанализировать их логическую структуру и генезис образования, установить логические, а если возможно, и математические общности или различия, что способствует разработке более эффективной как по времени, так и по содержанию методики обучения математике в целом, а также отдельных ее тем.

Согласно лабораторному практикуму по методике и технологии обучения математике под редакцией В. В. Орлова [12] логико-математический анализ учебного материала предполагает:

− знание целей обучения содержанию темы и основных результатов обучения;

− знание того, каким объектом и поднятием даются определения;

− знание содержания математических предложений (утверждений) − теоремы, законы, правила, формулы;

−знание того, как они водятся (раскрываются) в учебнике − на примерах, доказываются логически, иллюстрируется рисунками и т.д.;

− знание функций геометрического и алгебраического материала в учебнике и особенности использования этого материала в данной теме;

− умение решать основные(типовые)задачи темы; знания методов решения, используемых в школе; знания рекомендации к оформлению решения задач, предъявляемых школьной программой.

При проведении логико−математического анализа необходимо, во−первых, определить базовые знания и умения учащихся необходимые для изучения нового материала; во−вторых, следует зафиксировать и проанализировать центральный теоретический материал темы; в−третьих, проанализировать задачный материал по теме.

Таким образом, логико−математический анализ позволяет ответить на целый ряд вопросов. Например, о том, какие новые объекты и понятия вводятся, даются ли им определения, и если да, то какие именно и к какому по структуре виду определений их следует отнести. Встречались ли ранее определения с подобной структурой или нет, какие наиболее оптимальные познавательные и учебные действия необходимо выполнить для раскрытия структуры того или иного определения, какой возможен содержательный материал для раскрытия всех операций и действий?

Ответы на все эти вопросы и позволят сделать вывод о логической структуре определения понятия или объекта.

Во время выполнения логико−математического анализа учебного материала, необходимо выяснить обоснованность математических доказательств. Только выполнив логико−математический анализ основных компонентов учебного материала школьных учебников, можно приступать к разработке методики обучения понятию, разделу учебника, теме и т. п.

§2. Цели обучения теме «Тождественные преобразования тригонометрических выражений» в курсе алгебры основной школы

Роль математики в развитии общества в целом и формировании личности каждого отдельного человека определяет цели и задачи обучения математике в общеобразовательной школе:

− овладение конкретными математическими знаниями, необходимыми для применения в конкретной практической деятельности, для изучения смежных дисциплин, доля продолжения образования;

− интеллектуальное развитие учащихся, формирование качеств мышления, характерных для математической деятельности и необходимых для продуктивной жизни в обществе;

− формирование представлений об идеях и методах математики, о математике как форме описания и методе познания действительности;

− формирование представлений о математике как части общечеловеческой культуры, понимания значимости математики для общечеловеческого прогресса.

Цели обучения теме «Тождественные преобразования тригонометрических выражений»:

− *образовательная*: расширить знания и умения обучающихся, связанные с применением основных формул тригонометрии;

− *развивающие:* содействовать развитию математического мышления и памяти; интеллектуальному и личностному развитию обучающихся; формированию познавательного интереса к математике;

– *воспитательные:* воспитание настойчивости и упорства в достижении цели, показать красоту математики, эстетическое воспитание через формирование умения рационально и аккуратно оформлять задания в тетради и таблицах.

Изучение тождественных преобразований связано с изучением одного тождества, вокруг которого группируются другие тождества, находящиеся с ним в естественной связи. Необходимо добиться, чтобы учащиеся осознавали эту связь, ее смысл и происхождение.

К *задачам обучения* теме «Тождественные преобразования тригонометрических выражений» отнесем следующие:

– сформировать понятие основного тригонометрического тождества и ряд основных формул, вытекающих из него;

–научить использованию формул косинуса и синуса разности и суммы двух углов;

–научить использованию формул приведения; формул суммы и разности синусов и косинусов; формул для двойных и половинных углов; формул для произведения синусов и косинусов;

–сформировать доказательную базу у учащихся;

– научить применять формулы тождественного преобразования тригонометрических тождеств при решении задач.

§3. Основные требования к знаниям и умениям учащихся по теме «Тождественные преобразования тригонометрических выражений» в курсе алгебры основной школы

На основе федерального государственного образовательного стандарта основного общего образования [27] устанавливаются следующие требования к результатам усвоения учащимися образовательной программы основного общего образования.

Требования к *предметным результатам освоения базового курса* математики должны отражать:

− владение методами доказательств и алгоритмов решения; умение их применять, проводить доказательные рассуждения в ходе решения задач;

− владение стандартными приёмами решения тригонометрических уравнений и неравенств, их систем;

− владение методами доказательств и алгоритмов решения; умение их применять, проводить доказательные рассуждения в ходе решения задач;

−сформированность представлений об основных понятиях, идеях и методах математического анализа;

Требования к *предметным результатам освоения углубленного курса* математики должны включать требования к результатам освоения базового курса и дополнительно отражать:

− сформированность представлений о необходимости доказательств при обосновании тригонометрических формул и роли аксиоматики в проведении дедуктивных рассуждений;

− сформированность понятийного аппарата по основным разделам тригонометрических преобразований;

− сформированность знаний основных теорем, формул и умения их применять;

− сформированность умения доказывать теоремы и тождества и находить нестандартные способы решения задач;

Т.А. Бурмистрова в сборнике рабочих программ [1] определяет следующие требования к знаниям и умениям учащихся, которые они должны получить при изучении темы «Тождественные преобразования тригонометрических выражений»:

– владеть понятиями «тождество», «тождественные преобразования», решать задачи, содержащие буквенные данные; работать с формулами;

– выполнять тождественные преобразования рациональных выражений, основываясь на правилах действия над многочленами и алгебраическими дробями;

–выполнять разложение многочленов на множители;

– выполнять преобразование выражений, которые содержат квадратные корни и степени с целыми показателями.

Выпускник получит возможность научиться:

– выполнять многошаговые преобразования рациональных выражений, применяя широкий набор способов и приемов;

– применять тождественные преобразования для решения задач из различных разделов курса (например, для нахождения наибольшего и наименьшего значения выражения) [1, с.14].

Перечень требований к знаниям и умениям к учебнику С.М. Никольского:

– знать табличные значения тригонометрических функций для углов в первой четверти;

– применять свойства тригонометрических функций и основные формулы при решении задач;

– знать формулы косинуса и синуса разности и суммы двух углов;

– формулы суммы и разности синусов и косинусов;

– формулы для дополнительных углов;

– формулы для половинных и двойных углов

– формулы для произведения синусов и косинусов;

– применять эти формулы для решения задач [1, с. 88].

Согласно учебной программе, разработанной В.В. Морушкиной [19] на основе учебника Ш. А. Алимова, на тему «Тригонометрические формулы» выделяется 16 часов. Как результаты обучения выделяются следующие:

1. Знать:

– понятия синуса, косинуса, тангенса, котангенса произвольного угла, радианной меры угла;

– основные тригонометрические тождества, доказательство основных тригонометрических тождеств;

– формулы синуса, косинуса суммы и разности двух углов;

– формулы двойного угла; вывод формул приведения.

2. Уметь:

– выражать радианную меру угла в градусах и наоборот;

– вычислять синус, косинус, тангенс и котангенс угла, используя числовую окружность;

– определять синус, косинус, тангенс, котангенс произвольного угла;

– определять знаки синуса, косинуса, тангенса, котангенса по четвертям;

– выполнять преобразование простых тригонометрических выражений;

– упрощать выражения с применением тригонометрических формул;

– объяснять изученные положения на самостоятельно подобранных конкретных примерах; работать с учебником, отбирать и структурировать материал; пользоваться энциклопедией, справочной литературой; предвидеть возможные последствия своих действий.

§4. Формы, методы и средства обучения тождественным преобразованиям тригонометрических выражений в курсе алгебры основной школы

Прежде чем перейти непосредственно к формам, методам и средствам обучения тождественным преобразованиям тригонометрических выражений необходимо определить, что именно необходимо понимать под этими определениями.

Б.Т. Лихачев[12] рассматривает *формы обучения* как некую систему с определенными целями, четкой организацией, а также содержанием и методикой познавательного и воспитательного взаимодействия, общения и отношений между обучающим и обучаемыми.

К результатам такого грамотно выстроенного взаимоотношения относят:

– становление и развитие психических процессов у студентов и учеников;

– развитие и совершенствование педагога как профессионала;

– усвоение учащимися определенного набора умений, знаний, а также навыков;

– развитие таких качеств у учеников и студентов, как нравственность и мораль.

Форма обучения предполагает собой выбор оптимальной формы организации работы учащихся под управлением педагога, и, согласно Б.Т. Лихачеву [12], может быть:

– групповой;

– коллективной;

– индивидуальной.

При реализации какой-либо из форм обучения также необходимо помнить о принципе целостности целенаправленной организации:

– содержания;

– методов обучения;

– обучающих средств.

Форма организации учебного процесса – это какой-либо определенный вид учебного занятия. Например, это может быть урок, факультатив, лекция, семинар, кружок, экскурсия, и т.д. Если форма обучения несет в себе единичный и изолированный характер (как отдельно взятый урок, лекция, лабораторная работа, семинарское занятие и др.), то чаще всего она имеет частный обучающе-воспитательный смысл, и ее главной целью становится обеспечение усвоения учащимися заранее определенного набора фактов, выводов, положений, а также отработка конкретных навыков и умений.

Система, которая использует различные формы обучения и позволяет раскрыть целостные разделы, темы, теории, концепции, использовать связанные между собой умения и навыки, имеет общее обучающе-воспитательное значение и способствует формированию у обучающихся системных знаний и личностных качеств. Система, состоящая из разнообразных форм обучения, пронизанная и скрепленная основными идеями изучаемого раздела, темы и взаимосвязанными видами деятельности, гарантирует усвоение изучаемого предмета, формирование и развитие учебных умений и навыков, а также влияет на миропонимание окружающего мира.

Существует разнообразный набор систем обучения:

– индивидуальная;

– парная;

– групповая;

– коллективная.

Однако они не взаимно исключают друг друга. Например, обучение, построенное на классно-урочной системе, может включать в себя занятия как индивидуального, так и группового или коллективного характера. Таким образом, получим, что и система форм может включать в себя индивидуальные, коллективные и другого вида занятия. На протяжении столетий в вузах и школах по всему миру практикуют именно лекционно-практическую и классно-урочную системы обучения.

Разнообразие и необходимость системной зависимости форм обучения, прежде всего, обусловлены широким своеобразием содержания образования, а также особенностями индивидуального усвоения и восприятия учебного материала учащимися.

Формы обучения имеют ряд функций:

1. *Образовательная.*

Форма обучения всегда конструируется и используется с целью создания оптимальных условий для передачи ученикам умений, знаний и навыков, а также формирования их отношения к окружающему миру, развития способностей и талантов, инициативности в общественной жизни.

2. *Воспитательная.*

Эта функция обеспечивается через введение обучающихся, используя различные системы обучения, в разнообразные виды деятельности. Как результат в данный процесс начинают активно включаются все интеллектуальные, эмоциональные, волевые, практические силы.

3. *Организационная*.

Суть данной функции состоит в том, что в процессе своей деятельности педагогу необходимо учитывать объем содержания материала, его качество, возрастные особенности учащихся и т. д. Это в свою очередь требует от обучающего четкого конструирования организационно-методической подачи материала и серьезного подхода к отбору средств обучения.

4. *Психологическая*.

Состоит в формировании у обучающихся определенного ритма их деятельности и привычки работать в одно и то же время. Ощущению стабильности, психологической свободы и поддержанию здоровой рабочей обстановки способствуют знакомые условия учебных занятий и четкий график, чередующий время на работу и отдых.

5. Совокупность содержательной формы и методов проведения учебных занятий несет в себе *развивающую функцию*. Ее реализация считается особенно эффективной, когда в процессе изучения темы задействованы различные формы обучения. Благодаря многообразию и разнообразию форм возникает широкий спектр условий для трудовой, умственной, игровой деятельности.

6. Формы организации учебного процесса обеспечивают коллективную и индивидуальную деятельность учащихся, выполняя *интегрирующе−дифференцирующую* функцию. Учебный процесс как таковой, даже при условии реализации в различных формах, −это процесс коллективной познавательной деятельности. Познание происходит сообща, возникает процесс обмена информацией между обучающимися и, как следствие, растет уровень взаимопомощи и взаимопонимание между ними. Одновременно с этим, обучение включает в себя и развитие каждой личности в отдельности, а значит, коллективные занятия должны иметь возможность индивидуализации деятельности обучаемых.

7. *Систематизирующая и структурирующая* функции.

Смысл данных функций состоит в необходимости оптимального разделения всего учебного материала на разделы и темы, его рациональной систематизации как в общем случае (например, в рамках целого учебного года), так и для каждого занятия в частности.

8. *Стимулирующая.*

Это функция, которая проявляется сильнее всего при учете возрастных особенностей учащихся, специфике их психологического и физического развития.

Метод обучения – система последовательно взаимосвязанных действий учителя и учащихся, обеспечивающих усвоение учебного материала. В педагогике пока не существует единственно верного способа выделения методов. Различными авторами выделяются следующие методы обучения:

−рассказ;

− объяснение;

− беседа;

− лекция;

− дискуссия;

− видеометод;

−лабораторный метод, практический метод;

− контрольная работа;

− опрос (устный и письменный, индивидуальный, фронтальный, уплотнённый) и др.

Кроме этого, при практическом применении каждый из методов имеет разновидности и может быть использован для решения различных дидактических задач.

Приёмы обучения обычно определяются как составные части методов. Приём – это элемент метода, однако именно через него идет достижение практической реализации метода.

Так, например, в методе, когда используется работа с книгой, мы можем выделить такие приёмы как: составление логической схемы прочитанного, составление плана текста; чтение вслух; заполнение таблицы по прочитанному материалу; создание конспектов и заметок; выборка цитат. Одной из интересных особенностей является тот факт, что один и тот же метод обучения в зависимости от ситуации может быть реализован через различные приёмы. Таким образом, при работе с книгой можно рассмотреть несколько случаев. В одном варианте это может включать в себя составление плана и чтение вслух, в другом случае – подбор цитат и выделение основных тем, затронутых в тексте, в третьем случае – заполнение таблиц и конспект.

Как видно один и тот же приём обучения может быть включен в различные методы. Так, составление таблицы или наглядной схемы может быть частью объяснительно−иллюстративного метода (например, при объяснении нового материала, учитель чертит какой-либо пояснительный рисунок на доске), а может применяться и в виде элемента исследовательского метода (например, учениками самостоятельно составляется схема, отражающая содержание материала, изучаемого ими в данный момент). Применение методов и приёмов обучения на практике становится возможным только при наличии всех необходимых для этого средств. Так, к примеру, очевидно, что для работы с книгой необходимо само наличие книги, а для работы в лаборатории – соответствующее лабораторное оборудование и т.д.

Средства обучения – это предметная составляющая любого учебного процесса, т.е. некие материальные и материализованные объекты, которые педагог может использовать в качестве инструментов своей деятельности, а также в роли носителей информации в учебном процессе.

К таким средствам обучения относятся, прежде всего, учебники, наглядные пособия (муляжи, коллекции минералов, иллюстрации и др.), какой-либо дидактический материал, технические средства обучения (ТСО) и прочее оборудование, которое применяется в процессе обучения [22]. Материализованные средства включают в себя речь (тон, громкость, четкость), мимику, жесты, а также различную деятельность, например, трудовую, познавательную, коммуникативная и др.

Функции средств обучения обусловлены их дидактическими свойствами и обычно их разделяют на четыре основные:

− *адаптивную* (с помощью средств обучения у учителя появляется возможность наиболее оптимально приспособить содержание учебного материала с учетом возрастных и индивидуальных возможностей детей, создать наиболее благоприятную рабочую обстановку: помогают организовывать самостоятельную работу учеников, дифференцировать учебные задания и т.д.);

− *компенсаторную* (средства обучения значительно облегчают сам процесс обучения, помогая достичь целей с наибольшей экономией сил и времени);

– *интегративную* (при использовании средств обучения возникает возможность рассматривать изучаемые предметы и явления с различных сторон, определять и проводить наблюдения за различными свойствами того или иного изучаемого объекта или явления, глубже проникать в его суть и т. д.);

– *информативную* (средства обучения представляют собой источник информации (тот же учебник, к примеру), или способствуют ее передаче (например: компьютер, лабораторное оборудование, проекционная аппаратура).

Одним из основных положений организации математического образования является принцип *дифференциации* обучения в школе. При этом непременной обязанностью ученика в его учебной работе становится достижение уровня обязательной подготовки. В организации учебно–воспитательного процесса ключевую роль играют упражнения и задачи, которые при обучении математике становятся одновременно и целью, и средством развития математического мышления школьников [24]. При организации решения задач, учитель должен помнить, что осознание и освоение теоретического материала возможно только при условии использования этого теоретического материала на практике. Таким образом, в процессе решения задач и организации их решения, рационально будет использовать дифференцированный подход к учащимся, в основе которого лежит достижение обязательного уровня подготовки. Данный подход стабилизирует нагрузку школьников, обеспечивает их посильной работой и, как следствие, происходит формирование положительного отношения к учебе.

Важным условием грамотной организации учебно–воспитательного процесса является выбор *рациональной системы методов и приемов обучения*. Нужно найти сбалансированное сочетание традиционных и новых методов обучения, оптимизировать использование объяснительно-иллюстративных и эвристических методов и технических средств обучения.

Сам учебный процесс нужно акцентировать на рациональное сочетание как устных, так и письменных видов работы при изучении теории или при решении задач. Внимание должно быть направлено на развитие правильной и грамотной речи учащихся, на формирование у них навыков умственной деятельности, т.е. планирование работы, поиск решения тех или иных задач, способность давать критическую оценку полученных результатов [32, 33].

В современных школах форма обучения имеет преимущественно классно-урочный или лекционно-практический характер. Согласно учебной программе, разработанной В.В. Морушкиной [19] на основе учебника Ш.А. Алимова, при изучении темы «Тригонометрические формулы» целесообразно использовать такие типы уроков как уроки−лекции (ЛК) и уроки−практикумы (ПР). В качестве контроля уровня знаний используются такие методы как фронтальный опрос (ФО) и самостоятельная работа (СР) (Таблица 1).

На каждую из новых тем выделяется один обучающий урок и один или несколько уроков − практикумов.

Первый урок по теме правильно было бы охарактеризовать уроком объяснения нового материала. В средних классах он проводится способом повествования − объяснения, сочетающегося с беседой и демонстрацией учебно−наглядных пособий.

Этот урок обладает собственными характерными чертами. Задача урока − обобщенный анализ темы. В начале педагог весьма коротко знакомит обучающихся с простым планом содержания темы, планом ее изложения, главным комплектом задач, что, безусловно, увеличивает мотивацию обучающихся к её исследованию, педагог дает ученикам советы, как конспектировать, акцентировать суть, закреплять возникающие у них вопросы по мере изложения педагогом темы.

Таблица 1

Типы уроков при изучении темы «Тригонометрические формулы»

Тема урока	**Планируемые результаты**	**Тип и форма урока**	**Вид контроля**
Зависимость между синусом, косинусом и тангенсом одного и того же угла	Знать осн. триг. тождество и зависимость между функциями одного и того же угла	ЛК ПР	ФО
Тригонометрические тождества	Знать определение тождества, уметь применять способы доказательства тождества	ПР	ФО СР
Синус, косинус и тангенс углов α и −α	Знать формулы и уметь применять их	ЛК ПР	
Формулы сложения	Знать формулы и уметь применять их	ЛК ПР	ФО СР
Синус, косинус и тангенс двойного угла	Знать формулы и уметь применять их	ЛК ПР ПР	ФО СР
Синус, косинус и тангенс половинного угла			
Формулы приведения	Знать формулы приведения и уметь применять их	ЛК ПР	ФО СР
Сумма и разность косинусов Сумма и разность синусов	Знать формулы и уметь применять их	ЛК ПР	ФО СР
Обобщение по теме «Тригонометрические формулы»	Обобщить ЗУН по теме «Тригонометрические формулы»	ПР	

Форма проведения уроков в виде *лекции* целесообразна при знакомстве учащихся с новым материалом, который мало связан с уже изученными ранее темами. В этом случае, в плане реализации теории укрупнения дидактических единиц в обучении, информация подается крупными блоками [20].

При данном изложении материала преподаватель использует такие методы обучения как рассказ, объяснение, лекция, дискуссия, работа с учебником. Для актуализации опорных знаний при коллективной форме проведения урока большую роль играет фронтальный опрос.

Например, «дайте определение синуса и косинуса», «как они обозначаются на числовой окружности», «как знак синуса (косинуса) зависит от той четверти, где находится точка» и т.д.

В качестве проверки знания формул могут проводиться «пятиминутки», т.е. письменный опрос вначале урока.

В отличие от уроков-лекций *семинар* позволяет осуществлять активную самостоятельную проработку учебного материала всему коллективу класса. Работа в данном случае осуществляется через непосредственное руководство преподавателя и основывается на тщательно проработанных им программах, содержание которых носит дифференцированный характер.

Организовывать уроки в форме семинаров предпочтительно в таких случаях как: изучение нового материала, при условии, что он доступен для самостоятельной проработки учащимися; при систематизации и обобщении уже имеющихся знаний и умений учеников по изучаемой теме; после проведения вводных уроков-лекций; при проведении уроков, которые посвящены различным способам и методам решения задач, выполнения заданий и упражнений и т.д.

Для проверки усвоения изученного материала в процессе решения задач используются математический диктант, проверочная самостоятельная работа.

На сегодняшний день в практике обучения особенно распространены три подхода к разработке, конструированию и использованию *средств обучения*. Поочередно рассмотрим их.

В *первом* случае, средства определяются как нечто, никак не влияющее на качество усвоения знаний учащимися, а значит и их использование является необязательным, достаточно будет доски, мела, ясного и четкого объяснения учителя. Однако в данном подходе очевидно прослеживается недооценка роли практической деятельности в усвоении знаний, и наоборот, преувеличение значения механического заучивания, т.н. «зазубривания». В основу берется умственная деятельность, а речь учащихся фигурирует лишь в качестве средства выражения мыслей. Такой подход имеет широкое распространения, но его следует считать морально устаревшим и потерявшим свою актуальность.

Второй подход, напротив, возводит в абсолют роль средств обучения. В данном случае они рассматриваются как главенствующие, единственно способные обеспечить достижение цели, в то время как все остальные элементы (методы, организация, формы и т.п.) должны лишь соответствовать средствам обучения и обуславливаться их спецификой. Такое преувеличение роли средств обучения в образовании можно рассматривать как следствие негативной реакции на предыдущий подход. Учителя, следующие данному принципу, обычно проявляют наибольшее внимание к оборудованию учебного кабинета, постоянно находятся в процессе разработки и изготовления новых средств (приборов, наглядных пособий, лабораторных работ, демонстрационных опытов и т.д.) вместе со своими учениками. Они заслуженно считаются мастерами своего дела, образцами для подражания и при этом гарантируют высокое качество знаний учащихся.

Третья позиция состоит в том, что средства обучения в данном случае рассматриваются, прежде всего, в системе взаимодействия между учителем и учащимися. Они выполняют определенные функции и обеспечивают (вместе с другими элементами) качество знаний и развитие умственных способностей учащихся. Конструирование и использование новых средств обучения обязательно влекут за собой изменение состава действий и операций, осознание нового средства и его объективных свойств, что влечет за собой улучшение качества знаний и повышение умственного развития учащихся [20].

Выводы по первой главе

Первая глава посвящена теоретическим основам обучения тождественным преобразованиям тригонометрических выражений в курсе алгебры основной школы. В ней рассмотрено понятие логико-математического анализа содержания темы школьного курса математики; представлены цели обучения и основные требования к учащимся по теме «Тождественные преобразования тригонометрических выражений».

В первой главе были рассмотрены:

1) Определение содержания темы школьного курса математики, особенности и различия конструкций теоретического и практического блогов содержания темы.

2) Основные задачи и актуальность проведения логико-математического анализа содержания темы.

3) Цели обучения теме «Тождественные преобразования тригонометрических выражений».

4) Основные требования к знаниям и умениям учащихся по теме «Тождественные преобразования тригонометрических выражений», различие базового и углубленного уровней изучения.

5) Формы, методы и средства обучения тождественным преобразованиям тригонометрических выражений.

ГЛАВА II. МЕТОДИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ОБУЧЕНИЯ ТОЖДЕСТВЕННЫМ ПРЕОБРАЗОВАНИЯМ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ВЫРАЖЕНИЙ В КУРСЕ АЛГЕБРЫ ОСНОВНОЙ ШКОЛЫ

§5. Анализ содержания теоретического материала темы «Тождественные преобразования тригонометрических выражений» в учебниках разных авторов

Рассмотрим содержание теоретического материала по теме «Тождественные преобразования тригонометрических выражений» в курсе алгебры основной школы в учебниках Ш. А. Алимова и др.[2], Н. Я. Виленкина и др. [4], Ю.Н. Макарычева и др. [14] и С. М. Никольского и др. [20], которые наиболее распространены в современных школах.

Во–первых, обратимся к теоретическому материалу в учебнике Ш.А. Алимова и др.[2].

Все содержание учебника делится на главы, а те, в свою очередь на параграфы. Элементы тригонометрии раскрываются в главе номер 4, которая так и называется «Глава IV. Элементы тригонометрии».

В параграфе21, имеющий название «Зависимость между синусом, косинусом и тангенсом одного и того же угла» впервые представлено основное тригонометрическое тождество $\sin^2\alpha + \cos^2\beta = 1$, а также простейшие равенства, которыми можно выразить *sinα* через *cosα* и *cosα* через *sinα:* $\sin\alpha = \pm\sqrt{1-\cos^2\alpha}$ и $\cos\alpha = \pm\sqrt{1-\sin^2\alpha}$ [2, с. 92]. Аналогично представлены формулы зависимости между тангенсом и котангенсом $tg\alpha = \dfrac{1}{ctg\alpha}$, $ctg\alpha = \dfrac{1}{tg\alpha}$ [1, с. 93].

Далее, в этом же параграфе автор использует основное тригонометрическое тождество и определение тангенса для нахождения зависимости между тангенсом и косинусом: $1+tg^2\alpha=\dfrac{1}{\cos^2\alpha}$ [1, с. 94].

Всего в параграфе представлено 6 примеров – задач, позволяющих закрепить первичные знания.

Параграф 22состоит из 5 задач на доказательства тождеств в качестве примеров. Здесь же автор впервые использует понятие «тождество», описывая его как некое равенство, справедливое для всех допустимых значений аргумента, а задачи на доказательство таких равенств называет задачами на доказательство тождеств. Далее описываются основные способы доказательства тождеств: преобразование правой части к левой; преобразование левой части к правой; установление того, что разность между правой и левой частями равна нулю. Также автор отмечает, что иногда удобно доказательство тождества провести преобразованием левой и правой частей к одному и тому же выражению.

Пример. Доказать тождество $\frac{1-\mathrm{tg}^2\alpha}{1+\mathrm{tg}^2\alpha}=\cos^4\alpha-\sin^4\alpha$[1 , с. 96].

Доказательство:

$$\frac{1-\mathrm{tg}^2\alpha}{1+\mathrm{tg}^2\alpha}=\frac{1-\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}}{1+\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}}=\frac{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha+\sin^2\alpha}=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha\ .$$

$$\cos^4\alpha-\sin^4\alpha=(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha)*(\cos^2\alpha+\sin^2\alpha)=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha\ .$$

Тождество доказано, так как его левая и правая части равны одному и тому же выражению $\cos^2\alpha-\ -\sin^2\alpha$.

Параграф 24 называется «Формулы сложения». В нём поочередно раскрываются формулы косинуса и синуса для суммы и разности аргументов, приводятся их доказательства.

Самой первой рассматривается и доказывается формула сложения для косинусов: $\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$. Заменяя в формуле β на –β и используя свойство четности функции косинуса, аналогично доказывается и формула разности для косинусов: $\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos(-\beta)-\sin\alpha\sin(-\beta)\rightarrow$(т.к. функция косинуса является четной)$|\rightarrow\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$ [2 , с. 101-102].

Через две вышеуказанные формулы, выводятся и формулы сложения для синуса, формулы разности для синуса: $\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$,
$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos(-\beta)+\cos\alpha\sin(-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$ [2 , с. 102-103].

Далее, в параграфе 25,посредством уже известных формул сложения вводятся формулы синуса и косинуса двойного угла: $\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$ и $\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha$ [2 , с. 105-106].

1. $\sin 2\alpha=\sin(\alpha+\alpha)=\sin\alpha\cos\alpha+\cos\alpha\sin\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$;
2. $\cos 2\alpha=\cos(\alpha+\alpha)=\cos\alpha\cos\alpha-\sin\alpha\sin\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha$.

Через один из примеров наглядно вычисляется и формула двойного угла для тангенса: $tg 2\alpha=\dfrac{2tg\alpha}{1-tg^2\alpha}$ [2 , с.106].

В параграфе 26 знакомят учащихся с формулами приведения, с помощью которых можно свести вычисления синуса и косинуса любого угла к их значением для острого угла [2, с. 109]. В качестве доказательства используется как аналитический метод, так и наглядный, то есть с помощью числовой окружности.

Стоит отметить, что почти к каждой нововведенной формуле представляются задачи-примеры, позволяющие первично закрепить материал.

Пример. Вычислить: $\mathrm{tg}\frac{11\pi}{3}$ [2, с.110].

Решение. $\mathrm{tg}\frac{11\pi}{3}=\mathrm{tg}\left(4\pi-\frac{\pi}{3}\right)=\mathrm{tg}\left(-\frac{\pi}{3}\right)=-\mathrm{tg}\frac{\pi}{3}=-\sqrt{3}.$

В конце главы представлен небольшой блок для самопроверки «Проверь себя», состоящий из пяти практических задач, ориентированных на различные темы данной главы.

Теперь рассмотрим теоретический материал, представленный в учебнике Н. Я. Виленкина [4].

Этот учебник содержит гораздо больше текстового, а соответственно и теоретического материала по теме «Элементы тригонометрии», чем ранее рассмотренный учебник Ш.А. Алимова и Ю.М. Колягина.

В пункте 8 параграфа 2, который называется «Формулы приведения» подробно рассматривается принцип работы круговой дуги, выводятся основные формулы приведения, представление в двух небольших таблицах (Табл. 2-3) [4 , с. 291].

Таблица 2

Формулы приведения для углов π *и 2* π

α	$\pi+\alpha$	$\pi-\alpha$	$2\pi+\alpha$	$2\pi-\alpha$
$\sin\alpha$	- sin α	sin α	sin α	- sin α
$\cos\alpha$	- cos α	- cos α	cos α	cos α
$tg\,\alpha$	tg α	-tg α	tg α	-tg α
$ctg\,\alpha$	ctg α	- ctg α	ctg α	- ctg α

Таблица 3

Формулы приведения для углов $\frac{\pi}{2}$ *и* $\frac{3\pi}{2}$.

α	$\pi/2+\alpha$	$\pi/2-\alpha$	$3\pi/2+\alpha$	$3\pi/2-\alpha$
$\sin\alpha$	cos α	cos α	-cos α	- cos α
$\cos\alpha$	- sin α	sin α	sin α	-sin α
$tg\,\alpha$	- ctg α	ctg α	-ctg α	ctg α
$ctg\,\alpha$	- tg α	tg α	- tg α	tg α

Н. М. Кара-Сал в статье [6] пишет: «Таблицы и схемы несут различную смысловую нагрузку, использование которых позволяет организовать самостоятельное изучение некоторых вопросов. Кроме того, они дают возможность систематизировать и обобщать учащихся при повторении и способствуют лучшему усвоению учебного материала».

Параграф номер 3 имеет название «Выражение тригонометрических функций угла через одну из них». В данном параграфе впервые представлено основное тригонометрическое тождество и формульное представление тангенса и котангенса угла через синус и косинус: $\sin^2\alpha + \cos^2\beta = 1$, $tg\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$, $ctg\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$.

Авторы пишут: «Система [этих] трёх уравнений, связывающих четыре тригонометрические функции, позволяет отыскать значение любых трех из этих функций по известным значениям четвертой» [4 , с. 294].

Таким образом, с помощью простых преобразований, автор рассматривает четыре случая: во-первых, когда задано значение sinα и требуется найти значение остальных функций; во-вторых, когда известно значение cosα, но неизвестны значения остальных функций; в-третьих, случай с известным tgα и неизвестными остальными функциями; и, в-четвертых, аналогично с ctgα. Результатом разбора всех этих случаев являются формулы: $\sin\alpha = \pm\sqrt{1-\cos^2\alpha}$ и $\cos\alpha = \pm\sqrt{1-\sin^2\alpha}$, $tg\alpha = \frac{\sin\alpha}{\pm\sqrt{1-\sin^2\alpha}}$, $ctg\alpha = \frac{\cos\alpha}{\pm\sqrt{1-\cos^2\alpha}}$ [5 , с. 294-295].

Выведение формул для тангенса и котангенса поэтапно представлено в учебнике данным образом:

Если поделить обе части равенства $\sin^2\alpha + \cos^2\beta = 1$ на $\cos^2\beta$, то получим:

$$1 + tg^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}.$$

Если же исключить из рассмотрения значения $\alpha=\pi k$, при которых $sin\alpha=0$, то, поделив обе части равенства $\sin^2\alpha+\cos^2\beta=1$ на $\sin^2\beta$, получим:

$$1+ctg^2\alpha=\frac{1}{\sin^2\alpha}.$$

Из данного равенства вытекает полезное тождество

$$tg\alpha * ctg\alpha=1.$$

Отсюда находятся:

$$\cos\alpha=\frac{1}{\pm\sqrt{1+tg^2\alpha}},\ \sin\alpha=\frac{tg\alpha}{\pm\sqrt{1+tg^2\alpha}}$$ [, с. 294-296].

Параграф номер 4 под названием «Формулы сложения тригонометрических функций» имеет два пункта(с 9 по 10) с соответствующими названиями «Формулы сложения для синуса и косинуса» [5 , с. 299] и «Формулы сложения для тангенса и котангенса» [, с. 303]. В данном параграфе снова проводится работа с круговой дугой, доказательство формул $\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$ и $\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$ проводится векторным способом. Формулы для разности углов $(\alpha-\beta)$ выводятся способом, аналогичным тому, что был представлен в учебнике Ш. А. Алимова, т.е. через замену β на (–β)[5 , с. 301] .

Далее через формулы сложения для синуса и косинуса и тождественные преобразования получают формулы сложения и разности углов для тангенса и котангенса соответственно: $tg(\alpha\pm\beta)=\dfrac{tg\alpha\pm tg\beta}{1\mp tg\alpha * tg\beta}$,

$$ctg(\alpha\pm\beta)=\frac{ctg\alpha * ctg\beta\mp1}{ctg\alpha\pm ctg\beta}$$ [4 , с. 304] .

Параграф номер 5 под названием «Следствие формул сложения» также поделен на 2 пункта (с 11 по 12).В пункте 11 автором выводятся формулы двойного угла для синуса, косинуса и тангенса, котангенса [2 , с.305].Помимо основных формул, здесь рассматривают и их другие формы записи, оперируя уже представленными ранее тригонометрическими тождествами. Например, рационально выражая sin2α через tgα, автор получает формулу $\sin 2\alpha = \dfrac{2tg\alpha}{1+tg^2\alpha}$ [4, с. 306] .

Пункт 12 называется «Тригонометрические функции половинного угла», и представленный в нём материал тесно связан с предыдущим пунктом 11. Заменяя в формулах двойных углов α на α/2, Н. Я. Виленкин и его соавторы поэтапно выводят формулы половинного угла сначала для косинуса, синуса, затем для тангенса и котангенса: $\cos\dfrac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\dfrac{1+\cos\alpha}{2}}$, $\sin\dfrac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\dfrac{1-\cos\alpha}{2}}$, $tg\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}$, $ctg\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha}$ [5, с. 309-311].

Заключительные параграф в данной главе называется «Преобразование произведения тригонометрических функций в сумму. Обратное преобразование» и состоит из двух пунктов (с 13 по 14). Текстового материала меньше чем в предыдущих параграфах, формулы выводятся аналитическим путем. В пункте 13 представлены формулы преобразования произведения тригонометрических функций, а также формулы понижения степени: $\cos^2\alpha = \dfrac{1+\cos 2\alpha}{2}$, $\sin^2\alpha = \dfrac{1-\cos 2\alpha}{2}$, $\cos\alpha\sin\alpha = \dfrac{1}{2}\sin 2\alpha$ [5, с. 313].

В пункте 14 же разбирают обратную ситуацию, т.е. преобразовывает сумму (или разность) тригонометрических функций в произведение этих функций, но уже с другими углами. В конце обоих пунктов предлагаются примеры с подробным решением и текстовыми комментариями.

Теоретический материал, представленный в учебнике Н. Я. Виленкина, написан достаточно сложным для самостоятельного изучения языком. Уже с первых параграфов становится очевидным, что данное учебное пособие предназначено именно для углубленного изучения.

Теоретическая часть темы «Тождественные преобразования тригонометрических выражений» раскрыта: приводится схема доказательства и вывода каждой из формул, и в отличие от учебника Ш. А. Алимова представлен более широкий спектр формул.

В учебнике Ю. Н. Макарычева[14] тригонометрические функции изучаются в шестой главе, которая имеет название «Тригонометрические функции и их свойства». Глава состоит из четырех параграфов (с 17 по 20), а также дополнительных упражнений. Каждый параграф имеет еще по 3-4 пункта. Стоит отметить, что данное учебное пособие также ориентировано на углубленное изучение алгебры.

Параграф 19, называющийся «Основные тригонометрические формулы» содержит 4 пункта (с 50 по 53).В пункте 50 автором подробно рассматриваются формулы приведения, наглядно раскрывается на числовой окружности смысл данных формул, а также предлагается сводная таблица[14, с. 327-331].

В пункте 52, отталкиваясь от уравнения окружности с радиусом R, с помощью простого оперирования с уравнением демонстрируется связь между тригонометрическими функциями одного и того же аргумента. Здесь впервые Ю. Н. Макарычев представляет основные тригонометрические тождества [14, с. 342]. Общая структура подачи материала сходна с тем, как Ш. А. Алимов выстроил материал в одном из своих параграфов с аналогичным названием.

В начале пункта 53, который называется «Преобразование тригонометрических выражений», автор пишет: «Преобразование тригонометрических выражений опирается на определение тригонометрических функций, формулы приведения, основные тригонометрические тождества и др. Они применяются при нахождении значений в упрощении выражений, в доказательстве тождеств и в других случаях» [14, с. 346]. Далее приводится три примера на доказательства тождеств и упрощения выражений с их дальнейшим решением. Стоит заметить, что данный пункт также имеет схожее строение с параграфом 22 учебника Ш. А. Алимова.

Параграф 20 носит название «Формулы сложения и их следствия». Данные параграф состоит из 3 пунктов (с 54 по 56): «Синус, косинус и тангенс суммы и разности двух углов», «Формулы двойного и половинного углов», «Формулы суммы и разности тригонометрических функций».

Пункт 54 начинается с выведение формулы косинуса разности двух углов, затем рассматривается формулы косинуса суммы двух углов, формулы синуса суммы двух углов и формула синуса разности двух углов [14, с. 351-352]. Однако стоит заметить, что в отличие от вышерассмотренных учебных пособий, здесь сначала рассматриваются формулы разности косинуса и лишь потом формулы суммы, представляя($\alpha+\beta$) как (α-(-β)). В последнюю очередь выводятся формулы тангенса суммы и тангенса разности двух углов [14, с. 353]. Случаи с котангенсом не рассматриваются.

В пункте 55 автор выражает синус, косинус и тангенс двойного угла α через тригонометрические функции угла α, применяя к ним формулы сложения и, таким образом выводит формулы двойных углов для тригонометрических функций [13, с. 358]. Подобным образом выражаются и формулы тригонометрических функций для половинных углов [14, с. 358].

В пункте 56 представляются формулы суммы и разности тригонометрических функций. Последовательно выводятся формулы суммы и разности для двух синусов различных углов и формулы суммы и разности для двух косинусов различных углов [14, с. 364]. Далее рассматриваются три примера, в одном из которых через упомянутые ранее формулы выводятся новые - произведения косинусов углов, синусов углов и произведение синуса на косинус: $\cos\alpha * \cos\beta = \frac{\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)}{2}$, $\sin\alpha * \sin\beta = \frac{\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)}{2}$, $\sin\alpha * \cos\beta = \frac{\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)}{2}$ [13, с. 365].

Теоретический материал учебника Ю. Н. Макарычева выстроен грамотно, с множеством наглядных примеров. После каждого пункта предлагается ряд упражнений для первичного закрепления материала и еще несколько упражнений для повторения. В конце главы представлен блок «Контрольные вопросы и задания», а также дополнительные упражнения, ориентированные на тему из каждого параграфа главы.

Далее рассмотрим учебник С. М. Никольского [20], который, по словам автора, содержит материал, как для общеобразовательных классов, так и для классов с углубленным изучением математики.

Знакомство с тригонометрии начинается с 4 главы под названием «Тригонометрические формулы». В пункте 8. 4. под названием «Основные формулы для синуса α и косинуса α» нам представляют основное тригонометрическое тождество [20, с.164], а также его доказательство через формулу окружности радиуса один с центром в начале координат.

Остальные тождественные преобразования изучаются в «Дополнение к главе 4».В первом пункте дополнения авторы знакомят учащихся с формулой косинуса разности двух углов [20, с.173]. При доказательстве формул автор использует такое понятие как скалярное произведение двух векторов. Для выведения формулы косинуса суммы двух углов С. М. Никольский также заменяет $(\alpha+\beta)$ на $(\alpha-(-\beta))$, как и Ю. Н. Макарычев в своём учебнике [20, с. 175].

В третьем пункте учащимся представлена формула синуса суммы двух углов, в доказательстве которой используют формулу косинуса разности двух углов и формулы для дополнительных углов. Затем выводится формула синуса разности двух углов[20, с.178].

В следующем пункте рассматриваются формулы суммы и разности синусов и косинусов. В учебнике сначала представляются все формулы поочередно, а затем приводится общее доказательство через замену: $x=\dfrac{\alpha+\beta}{2}$, $y=\dfrac{\alpha-\beta}{2}$ и, следовательно, $\alpha = x + y$, $\beta = x - y$ [20, с.181].

Пункт 5 называется «Формулы для двойных и половинных углов». Сначала, используя формулы синуса суммы двух углов, автор выводит формулу синуса двойного угла. Аналогичное доказательство используется и для формулы косинуса двойного угла. В этом же пункте последовательно рассматриваются формулы квадрата синуса половинного угла и формула квадрата косинуса половинного угла. Отметим, что, в отличие от предыдущих авторов, С. М. Никольский не выделяет корни, оставляя формулы в виде: $\cos^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1+\cos\alpha}{2}$ и $\sin^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1-\cos\alpha}{2}$ [20 , с.184].

В следующем пункте «Произведение синусов и косинусов» материал построен подобным же образом: сначала автором предложены три формулы произведения синусов и косинусов, а затем их общее доказательство через формулы синусов и косинусов суммы и разности двух углов [20 , с.188].

Весь материал учебника С. М. Никольского построен таким образом: теорема (формула), затем ее доказательство и далее примеры, количество которых обычно не больше двух. Учебник хоть и содержит все необходимые формулы тождественных преобразований тригонометрических формул, однако язык изложения материала значительно уступает ранее рассмотренным учебным пособиям других авторов и выглядит слишком сжатым, также не хватает наглядности.

§6. Анализ содержания задачного материала темы «Тождественные преобразования тригонометрических выражений» в учебниках разных авторов

Выполним анализ задачного материала по учебнику алгебры Ш.А. Алимова и др [2].

После каждого параграфа предлагается ряд упражнений, поделенный на обязательные задачи и дополнительные, а также присутствуют задачи повышенной сложности, обозначенные звездочкой. Чаще всего упражнения начинаются с заданий на вычисление значения функции.

Для 21 параграфа типичны задания о нахождении значения функции или выражения с помощью другой функции, значение которой дано в условии задачи. **Примеры**.

Упражнение 272. Найти cosα , если$cos^4\alpha - sin^4\alpha = \frac{1}{8}$.

Упражнение 273. Найти: а) cosα, если$sin\alpha = \frac{2\sqrt{3}}{5}$; б) sinα, если $cos\alpha = = -\frac{1}{\sqrt{5}}$[2 , с.95].

В теме «Тригонометрические тождества» акцент делается на упрощение выражений и доказательства тождеств, также встречаются комбинированные задания по упрощению выражений и последующим нахождением его числового значения.

Пример. Упражнение 283. Упростить выражение и найти его числовое значение: 1) $\frac{(sin\alpha+cos\alpha)^2}{sin^2\alpha} - \quad ctg^2\alpha + 1$ при α = π/3; 2) $tg^2\alpha + 1 \quad - - \frac{(sin\alpha-cos\alpha)^2}{cos^2\alpha} -$при α = π/6 [2 , с.98].

После параграфа 24 «Формулы сложения» представлены упражнения на упрощение и вычисления значения функции, а также, в качестве заданий повышенной сложности, встречаются и упражнение на доказательства тождеств.

Пример. Упражнение 293. С помощью формул сложения вычислить: 1) $\cos 135°$; 2) $\cos 120°$; 3) $\cos 150°$; 4) $\cos 240°$ [2, с.103].

В параграфе 25 содержатся упражнения, нацеленные на использование формул синуса и косинуса двойного угла.

Пример. Упражнение 308. Вычислить: 1) $2\sin 15° \cos 15°$; 2) $\cos^2 15° -$ $-\sin^2 15°$; 3) $(\cos 75° - \sin 75°)^2$; 4) $(\cos 15° + \sin 15°)^2$

Упражнение 316. Доказать тождество: 1) $1+ \cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha$; 2) $1-\cos 2\alpha= 2\sin^2\alpha$ [2 , с.106].

В упражнениях параграфа 26 закрепляется умение пользоваться формулами приведения. В обязательный блок входят только задания на вычисления, в дополнительной части есть также и упражнения на доказательства, связанные напрямую с геометрией.

Пример. Задача 331. Доказать, что синус суммы двух внутренних углов треугольника равен синусу его третьего угла [2 , с.111].

В конце главы представлены упражнения, ориентированные на различные темы главы. Присутствуют задание на вычисление значений, на доказательства тождеств, упрощение выражений и несколько простейших уравнений для решения.

Пример. Упражнение 343. Вычислить: 1) $2\sin 75° \cos 75°$; 2) $\cos^2 75° -$ $- \sin^2 75°$; 3)$\sin 15°$; 4) $\sin 75°$. [2 , с.112].

Упражнение 352. Упростить выражение: 1) $\cos^3\alpha \sin\alpha$ - $\sin^3\alpha \cos\alpha$; 2) $\frac{sin\alpha+sin2\alpha}{1+cos\alpha+cos2\alpha}$ [2 , с.115].

Теперь рассмотрим учебник Н.Я. Виленкина и др. [5].

В конце каждого пункта параграфов содержатся упражнение на закрепление нового материала. В отличие от высшей рассмотренного учебника упражнения не делятся на обязательные и дополнительные, задания повышенной сложности, отмеченные «звездочкой», также отсутствуют.

В пункте 8 представлены задания на использование формул приведения.

Пример. 53. Вычислите: а) ctg135°sin210°cos225° ;б) $\sin^2 225°$ – – ctg330°tg405°; в) $\sin\frac{\pi}{6}\cos\frac{3\pi}{4}$tg240°ctg210° [5 , с. 293].

Также предлагается упражнение на самостоятельное доказательство формул.

Пример. Упражнение 58. Докажите формулу: а) sin(45° + α) = cos(45°— α); б) cos(45° + α) = sin(45°–α); в) tg(45° + α) = ctg(45°–α) [5 , с. 294].

Пункт 9 содержит упражнения, ориентированные на формулы сложения для синуса и косинуса. Задания 66-67 —на вычисление значения функции. Задания 68-69 —на самостоятельное выведение формул приведения с использованием формул сложения для синуса и косинуса. В упражнениях 72-73 предлагается упростить выражения, а в упражнении 75 необходимо выразить одни функции через другие.

Пример. Упражнение 75. Выразите sin(α + β + γ) и cos(α + β + γ) через тригонометрические функции углов α,β, γ[5 , с. 303].

Упражнения созданы так, чтобы не только закрепить новый материал, но и повторить уже пройденный.

Параграф 5 включает в себя упражнения на развитие навыка работы с формулами двойных углов. Помимо прямого вычисления значения функции по формулам есть задание и на использование уже полученных ранее умений, например, работа с основным тригонометрическим тождеством и формулами приведения.

Пример.

Упражнение 86. Пусть cosα = - 0,9, $\pi<\alpha<3\pi/2$. Вычислите sin2α; cos2α; tg2α; ctg2α [5 , с. 307].

Упражнение 93. Вычислите: а) 16cos20°cos40°cos60°cos80°; б) cos15° — cos75°; в) $\cos\frac{\pi}{5}\cos\frac{2\pi}{5}$; г) $\mathrm{tg}^2 36°\mathrm{tg}^2 72°$ [5 , с. 308].

Упражнения 104-110 представлены для закрепления темы преобразований произведения тригонометрических функций в сумму и наоборот.

Задания 104, 108, 109, 111, 112 ориентированы именно на преобразования, 105, 110 – на доказательство тождеств с применением формул преобразований.

Пример. Упражнение 110. $\frac{\sin\ \alpha+\beta\ +\sin(\alpha-\beta)}{\sin\ \alpha+\beta\ -\sin(\alpha-\beta)} =$ tgαctgβ [2 , с. 317].

В конце главы представлены дополнительные упражнения, содержащие задания для конечного закрепления всего ранее изученного материала данной главы. Одно упражнение может требовать наличие знаний и умений сразу по нескольким различным пунктам. Задания 124-127 наглядно демонстрируют межпредметную связь темы тождественных преобразований тригонометрических выражений с геометрией.

Пример. Упражнение 125. Докажите, что если углы α, β и γ треугольника связаны зависимостью cosα + cosβ – cos(α + β) = 3/2, то треугольник правильный [5 , с. 320].

В учебнике Ю. Н. Макарычева и др. [13] практический материал построен следующим образом: после теории следуют упражнения, далее идет блок «Упражнения для повторения», и в конце каждого параграфа представлены контрольные вопросы и задания.

В пункте 52 упражнения связанны с формулами основного тригонометрического тождества. Задание 1146-1152 идут на преобразование и упрощение выражений. Далее упор делается на упражнения по нахождению значение функции.

Пример. Упражнение 1154. Найдите sinα, tgα и ctgα, если π/2<α<π и cosα = 1/3 [13 , с.345].

Задания 1166-1183 включают в себя нахождение значений выражений, упрощение выражений, их преобразование, доказательства тождеств. Данный блок упражнений несет цель закрепления умения оперировать тригонометрическими выражениями в рамках рассмотренных ранее формул.

Задания 1187-1219 ориентированы на формулы сложения. Помимо упрощения выражений и вычислений функции учащимся предлагается доказательство тождеств, которые в дальнейшем могут быть использованы как готовые формулы.

Пример. Упражнение 1197. Докажите тождество: а)$\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta) = 2\cos\alpha * \cos\beta$; б)$\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta) = 2\sin\alpha * \cos\beta$ [3, с. 355].

Формулы половинных углов рассматриваются в упражнениях 1223-1245. Помимо стандартных преобразований и нахождений значений функций, представлено упражнение 1245, где наглядно показывается возможность использования формул половинных углов в решении уравнений.

Пример.Упражнение 1245. Решите уравнение: а) $1 - \cos x = \sin\frac{x}{2}$; б) $1 + \cos x = \cos\frac{x}{2}1 - \sin x = \cos x$[13 ,с. 363].

Далее, в пункте 56, идет комплекс упражнений на использование формул сумм и разности тригонометрических функций. Основная часть заданий сводится к преобразованию или представлению выражения в виде произведения. Стоит отметить, то работа проводится равномерно как с градусными мерами угла, так и с буквенным обозначением аргумента, не позволяя учащимся привыкать только к одному варианту.

Пример. Упражнение 1256. Представьте в виде суммы или разности:
а) $2\sin 27°\cos 9°$; б) $-2\sin 25°\sin 15°$; в) $2\sin\alpha\cos 3\alpha$; г) $2\cos 2\alpha\cos\alpha$;
д) $\cos(x + 1)\cos(x - 1)$; е) $2\sin(a + b)\cos(a - b)$ [13 , с.367].

В конце главы есть дополнительные упражнения, тематически поделенные на группы в соответствии с каждым рассмотренным в главе параграфом. Помимо стандартных упражнений на нахождение значений функции, упрощение и преобразование выражений и доказательств тождеств, есть и задания геометрической направленности.

Пример. Задача 1295.Тангенс угла при одном из оснований равнобокой трапеции равен 0,8.Найдите тангенс, котангенс, синус и косинус угла при другом основании трапеции.

Задача 1296. Котангенс одного из смежных углов равен -3. Найдите синус, косинус, тангенс и котангенс другого угла [13, с. 373].

Далее рассмотрим учебное пособие авторов С. М. Никольского и др. [19].

После каждого пункта, как и в ранее разобранных учебниках, дается ряд упражнений, часть из которых отмечена, как задания повышенной трудности, предназначенные для разбора в классах с углубленным изучением математики. Помимо этого отмечены и наиболее легкие задания для устного решения.

Практический материал выстроен так, что первые номера имеют теоретическую направленность, проверяя усвоение знаний учащихся.

Пример. Упражнение 811. Запишите основное тригонометрическое тождество.

Упражнение 813. Какие основные формулы cos и sin [19 , с. 167]?

Далее обычно следует ряд упражнений на вычисления, состоящий из трех или четырех заданий. Количество задач относительно ранее представленных учебников значительно меньше, что не способствует полному раскрытию, конкретизации и углублению в основной материал темы.

Практический материал качественно структурирован, однако большая часть заданий имеют узкую направленность и относятся чаще всего к какому-то одному определённому пункту главы, и только несколько последних упражнений перемежаются с задачами на повторение прошлого материала.

Например, в пункте «Формулы двойных и половинных углов» встречается упражнение 899. Докажите, что для любого угла α справедливо неравенство $|\sin\alpha + \cos\alpha| \leq \overline{2}$ [19, с.183].

Предпоследний пункт главы содержит в себе больше всего упражнений и имеет наибольшую разнообразность относительно того теоретического «ядра», необходимого для их решения.

§7. Методические рекомендации по обучению тождественным преобразованиям тригонометрических выражений в курсе алгебры основной школы

Автор А.А. Ларин в учебном пособии для студентов [12], рассматривает основной принцип организации любой системы заданий – предъявление и от простого к сложному с учетом необходимости преодоления учениками посильных трудностей и создания проблемных ситуаций. Указанный основной принцип требует конкретизации применительно к особенностям данного учебного материала [12].

Н. М. Кара-Сал в статье [6] «Применение таблиц и схем в процессе изучения тригонометрии» предлагает объединить тригонометрические формулы в группы, а в пределах одной группы - во взаимосвязанные блоки с помощью схем и таблиц для более полного освоения темы учащимися.

При изучении тождественных преобразований тригонометрических выражений формулы можно условно разделить на две группы. Первую составляют так называемые основные соотношения между тригонометрическими функциями одного и того же аргумента, а вторая объединяет все остальные формулы. При этом первую группу формул можно представить в виде Схемы 1.

Данная схема позволяет наглядно представить связи между формулами и определить, какая формула из какой получается.

Совокупность формул, которые относятся ко второй группе, можно представить несколькими блоками. Формулы одного блока дают возможность осуществлять преобразование тригонометрических выражений первого вида.

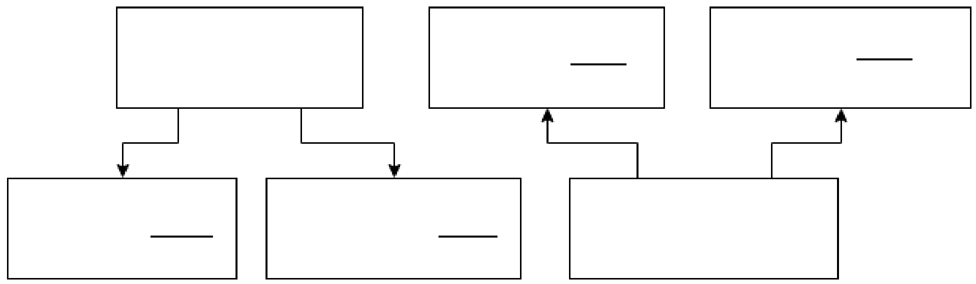

Схема 1. Основные соотношения между тригонометрическими функциями одного и того же аргумента.

Можно выделить эти блоки подобным образом:

Блок первый содержит в себе формулы: приведения; сложения; двойного и половинного аргумента.

Блок второй содержит в себе формулы: преобразования сумм тригонометрических функций в произведение; преобразования произведения тригонометрических функций в сумму.

Так, в процессе работы с формулами сталкиваемся с необходимостью установления связи между блоками, между формулами одного блока. Например, формула $\cos\ \alpha - \beta\ = cos\alpha * cos\beta + sin\alpha * sin\beta$ является «отправной» для получения других формул. Это можно представить в виде Схемы 2.

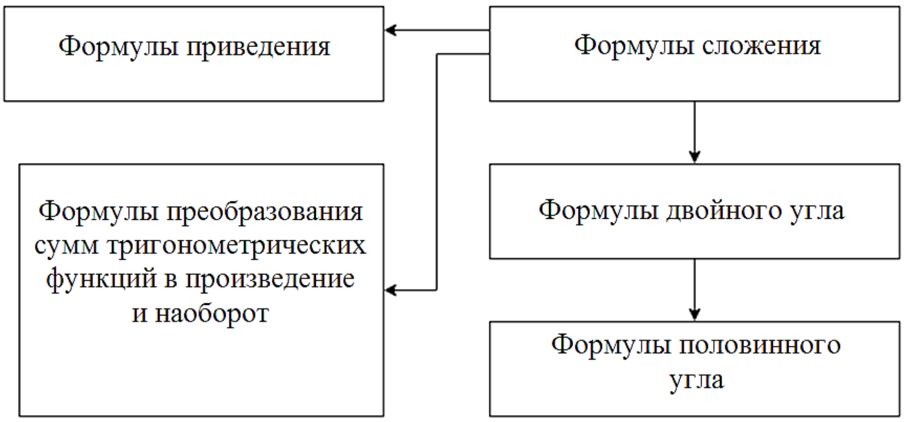

Схема 2. Связи между блоками групп тригонометрических формул

Схема 3, отражающая связи между группами формул сложения, например, выглядит так:

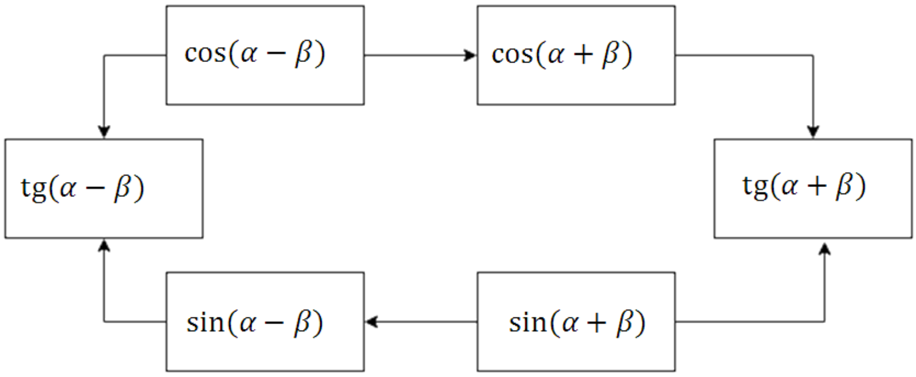

Схема 3. Связи между группами формул сложения.

Таким образом, благодаря использованию таблиц и схем при изучении школьного курса тригонометрии знания учащихся обобщаются и систематизируются. Это, в свою очередь, способствует формированию такого важного качества знаний, как осознанность.

Именно по данным схемам конструируется содержание темы «Тождественные преобразования тригонометрических выражений» в большинстве учебников. Однако некоторые авторы, например, Н. Я. Виленкин, при изучении формул второй группы, на первый план выдвигает формулы приведения, а формулы преобразования сумм тригонометрических функций произведения с косинуса или синуса суммы аргументов.

При описании разнообразных систем упражнений и заданий в методике математики, В.И. Мишин [17] использует такое понятие как цикл упражнений. Под данным определением автор понимает последовательный ряд взаимосвязанных упражнений, объединённых общими аспектами изучения и расположения материала. По отношению к тождественным преобразованиям представление о цикле может быть рассмотрено следующим образом [17].

Цикл упражнений связан с изучением одного тождества, на базе которого постепенно формируются остальные (при условии, что они находятся в закономерной связи). В состав цикла входят задания и упражнения, развивающие навык распознавания применимости того или иного тождества. Также учитывается и специфика тождества; а именно, организуются связанные с ним речевые обороты [17].

В каждом из циклов автор В.И. Мишин разбивает задания на две группы.

1) *Первая группа*. К ней относятся задания, которые выполняются при первоначальном знакомстве с каким-либо тождеством и которые служат в качестве учебного материала на протяжении нескольких идущих подряд занятий, объединенных единой темой.

2) *Вторая группа*. Данные упражнения демонстрируют связь изучаемого тождество с различными приложениями. Упражнения данной группы обычно здесь разбросаны по различным темам и как следствие не образуют какого-то композиционного единства [17].

Описанная структура цикла относится к этапу формирования навыков применения конкретных видов преобразований.

Пример 1.Учебник Ш.А. Алимова. Упражнение 308. Вычислить:

1) $2sin15°cos15°$;2)$cos^2 15° - sin^2 15°$[2, 106].

Данное упражнение относится к первой группе, здесь представлены примеры, ориентированные на прямое использование формул двойного угла для косинуса и синуса.

Решение: 1) $2sin15°cos15° = \sin\ 2*15° \ = sin30° = \frac{1}{2}$; 2) $cos^2 15° - sin^2 15° = \cos\ 2*15° \ = cos30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Рядом таких упражнений происходит определенное развитие умения учащихся распознавать те случаи, когда есть возможность применить формулы двойного угла.

Пример 2. Упражнение 308. Упростить: 1) $1 - 2sin^2 5\alpha$; 2) $\frac{1-cos2\alpha}{sin\frac{\alpha}{2}cos\frac{\alpha}{2}}$ [2, 107].

Решение: 1) $1 - 2sin^2 5\alpha = sin^2 5\alpha + cos^2 5\alpha - 2sin^2 5\alpha = cos^2 5\alpha -$ $-sin^2 5\alpha = \cos\ 2*5\alpha \ = cos10\alpha$;

2) $\frac{1-cos2\alpha}{sin\frac{\alpha}{2}cos\frac{\alpha}{2}}=\frac{cos^2\alpha+sin^2\alpha-cos^2\alpha+sin^2\alpha}{sin\frac{\alpha}{2}cos\frac{\alpha}{2}}=\frac{2sin^2\alpha}{sin\frac{\alpha}{2}cos\frac{\alpha}{2}}=\frac{2*2sin^2\alpha}{2sin\frac{\alpha}{2}cos\frac{\alpha}{2}}=$

$$=\frac{4sin^2\alpha}{\sin(2*\frac{\alpha}{2})}=\frac{4sin^2\alpha}{\sin\alpha}=4sin\alpha.$$

Данное упражнение относится ко второй группе, так как при упрощении выражений, помимо формул двойного угла, необходимо использовать формулы основного тригонометрического тождества и уметь оперировать дробями.

Через подбор упражнений различной направленности и комбинированным решением появляется возможность демонстрации не только внутрипредметных связей, но и межпредметных [23].

На вводном уроке лучше всего подробно описывать каждый шаг и требовать аналогичного от учеников, это способствует более «плотному» усвоению материала.

А. А. Столяр [26] пишет, что при изучении новой темы, то есть при введении нового тождественного преобразования, материал должен строиться по принципу «от простого к сложному», задания и упражнения должны быть последовательно направленны на:

а) формирование способности ученика выделять структуры тригонометрических выражений в зависимости от тех или иных формул, необходимых при работе с ними, другими словами, «видеть», где можно использовать какое-либо преобразование, а где нет;

б) развитие умения самостоятельно комбинировать несколько видов преобразований, формул при работе с тригонометрическими выражениями.

Иногда, например, в курсе углубленного изучения математики, предлагается и третья ступень в) развитие способности самостоятельно выводить доказательную базу к той или иной формуле.

Пример 3.Учебник Н.Я. Виленкина. Упражнение 97. Выведите формулу: а) $sin3\alpha = 3sin\alpha - 4sin^3\alpha$; б) $cos3\alpha = 4cos^3\alpha - 3cos\alpha$ [5, с. 309].

Отличие упражнений такого рода от заданий на доказательство тождеств заключается в том, что данные формулы не несут в себе частный характер и могут быть использованы при работе с другими, более сложными тригонометрическими преобразованиями.

В отличие от остальных формул тождественных преобразований тригонометрических выражений, формулы приведения могут даваться как в начале, так и в конце раздела о преобразованиях тригонометрических выражений. Доказательная база данных формул может строиться на основе формул синусов и косинусов суммы и разности аргументов, однако более рациональный подход – использовать числовую окружность в качестве наглядности. В своей книге Дуглас Даунинг [29], а также Тутак Фатма [30] и Пол Томпсон в своих статьях [33], указывают на то, что любая новая информация, закрепленная наглядными рисунками, схемами, таблицами способствует более качественному усвоению материала. Отсюда следует, что данный способ является более целесообразным в качестве первого шага в знакомстве с формулами приведения.

Пример 4. Учебник Ш.А. Алимова. Доказать формулу $sin\ \pi-\alpha\ =$ $= sin\alpha$ [2 , 109]

Доказательство: применяя формулу сложения для синуса, получаем: $sin\ \pi-\alpha\ = sin\pi * cos\alpha - cos\pi * sin\alpha = 0 * cos\alpha - \ -1\ * sin\alpha = sin\alpha.$

Как видно из данного примера, формула доказывается аналитически, с помощью применения уже ранее изученной формулы синуса разности аргументов.

Пример 5. Учебник Ю.Н. Макарычева.

Формула приведения для синуса и косинуса угла $\frac{\pi}{2} \pm \alpha$. Пусть при повороте начального радиуса *OA* = *R* (рисунок 1) около точки *O* на угол α он перейдет в радиус *OB*, тогда при повороте $\frac{\pi}{2} \pm \alpha$ на угол он перейдет в радиус*OC*. Повернем координатную плоскость по часовой стрелке около точки О на $\frac{\pi}{2}$ радиана. При этом точка *C* перейдет в точку *B*, так как *OB* равен *OC* и угол *C*ОВ = $\frac{\pi}{2}$. Ось *Y* перейдет в ось *X*. Поэтому ордината точки *C* будет равна абсциссе точки *B*. Ось *X* перейдет в ось, противоположную оси *Y*. Поэтому абсцисса точки *C* будет противоположна ординате точки *B*.

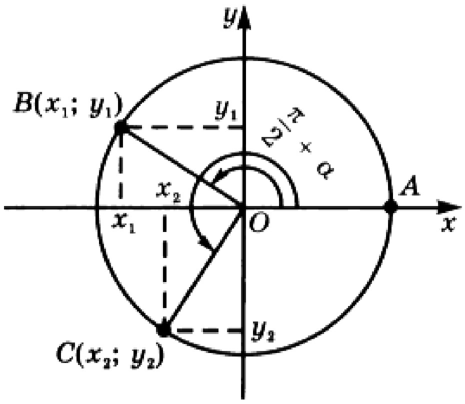

Рис. 1.

Отсюда

$$y_2 = x_1, x_2 = -y_1;\ \frac{y_2}{R} = \frac{x_1}{R}; \frac{x_2}{R} = -\frac{y_1}{R}.$$

Так как $\frac{y_2}{R} = \sin\ \frac{\pi}{2} + \alpha\ , \frac{x_1}{R} = cos\alpha, \frac{x_2}{R} = \cos\ \frac{\pi}{2} + \alpha$ и $\frac{y_1}{R} = sin\alpha$, то $\sin\ \frac{\pi}{2} + \alpha\ = cos\alpha, \cos\ \frac{\pi}{2} + \alpha\ = -sin\alpha.$

В данном случае проводится работа с поворотами радиуса числовой окружности.

Согласно учебному пособию П.И. Пидкасистого [21] существует всего два способа введения средств обучения в учебный процесс.

1) При первом способе учитель преподносит их ученикам уже "в готовом виде", т.е. так как они прописаны в учебнике и объективно существуют в культуре.

2) Во втором случае способы обучения конструируются через совместную деятельность учителя и учащихся в ходе решения теоретической задачи в общем виде. Параллельно с этим идет разработка алгоритма применения и конкретизации.

Например, *способ 1*: учитель дает готовую общую запись формулы и затем выстраивает алгоритм ее выведения согласно тому, что приведен в учебнике, учащиеся в процессе не участвуют; *способ 2*: учитель берет конкретный пример в качестве «проблемной ситуации», предлагая учащимся самостоятельно найти решение, в этом случае участвуют обе стороны, учитель выступает в роли «наводчика».

В своей книге «Совершенствование методики работы учителя математики» автор Я.И. Груденов [5], среди приемов, которые способствуют сознательному усвоению учащимися любых тождественных преобразований, включая тригонометрические, выделяет следующие:

1) Теоретическая основа тождества. Раскрытие закономерной взаимосвязи с изученным ранее материалом.

2) Требование к знанию учащимися словесной формулировки определенного свойства и тождества, его смысла.

3) Формирование навыка истолковывать изучаемые свойства и тождества различными способами, давать разные словесные интерпретации тому или иному заданию. Наличие грамотной математической речи.

4) Варьирование примеров на применение тождеств.

5) Визуальная демонстрация различных моделей решения заданий на применение тождеств, свойств и правил с подробными записями и пояснениями, а также требование на использование данного образца при решении задач на начальном этапе исследования.

6) Аналогия между тождествами и численными равенствами.

7) Внимательное изучение выражения, его анализ, поиск различных способов преобразования, анализ проделанной работы.

8) Контроль – как со стороны учителя, так и от учащихся – за выполнением преобразований [6].

Выводы по второй главе

В ходе описания особенностей обучения тождественным преобразованиям тригонометрических выражений в курсе алгебры основной школы отмечено, что основной принцип организации любой системы заданий – предъявление их от простого к сложному с учетом необходимости преодоления учениками посильных трудностей и создания проблемных ситуаций.

Изучение тождественных преобразований необходимо при:

– доказательстве теорем и выводе формул;

– решении уравнений, неравенств и их систем;

– упрощении выражений;

– нахождении значений выражений;

– исследовании функций и др.

Во второй главе проанализирован, систематизирован и обобщен:

1) теоретический материал содержания темы «Тождественные преобразования тригонометрических выражений», выделение ключевых тем:

– основное тригонометрическое тождество;

– формулы приведения;

– формулы сложения для тригонометрических функций;

– тригонометрические функции двойного и половинного углов;

– преобразование произведения тригонометрических функций в сумму и наоборот.

2) задачный материал содержания темы Тождественные преобразования тригонометрических выражений», структура построения задачного материала у разных авторов;

3) методические рекомендации по обучению тождественным преобразованиям тригонометрических выражений в курсе алгебры основной школы.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В последние годы тригонометрический материал постепенно «вытеснялся» из программ основной и старшей школы. В то же время он традиционно популярен при проведении всевозможных конкурсов, олимпиад и служит инструментом отбора математически одаренных студентов.

Таким образом, анализ учителем возможных подходов к планированию и организации изучения тригонометрии в школе, распределение материала и выбор его сложности, с учетом типа школы, предпочтений самого учителя и желаний и способностей учащихся, становятся чрезвычайно важными.

Тождественные преобразования тригонометрических выражений играют ключевую роль в разделе тригонометрии основного курса школьной алгебры. Изучение тригонометрических выражений и их тождественных преобразований позволяет учащимся овладеть конкретными математическими знаниями, необходимыми для применения в практической деятельности, изучения соответствующих дисциплин, развития умственных способностей и навыка извлекать учебную информацию на основе сравнительного анализа.

Логико-математический анализ, проведенный в данной работе, позволит лучше понять аспекты и особенности проведении обучающей деятельности по теме «Тождественные преобразования тригонометрических выражений». Только после завершения логического и математического анализа основных компонентов учебного материала школьных учебников можно начать разработку методологии обучения конкретному разделу учебника, темы и т. д.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Алгебра. Сборник рабочих программ. 7–9 классы [Текст]: пособие для учителей общеобразоват. организаций / [составитель Т. А. Бурмистрова]. — 2-е изд., доп. — М.: Просвещение, 2014. — 96 с.

2. Алимов, Ш. А. Алгебра. 9 класс[Текст]: учебник для общеобразовательных учреждений / Ш. А. Алимов, Ю. М. Колягин, Ю. В. Сидоров. — 2-е изд. — М.: Просвещение, 1995. — 223 с.

3. Блох, А.Я. Методика преподавания математики в средней школе. Частная методика[Текст]: учебное пособие для студентов педагогических институтов по физико-математической специальности/ А.Я. Блох, В.А. Гусев, Г.В. Дорофеев и др.; сост. В.И. Мишин. – М.: Просвещение, 1987. – 416 с.

4. Виленкин, Н. Я. Алгебра для 9 класса [Текст]: учебное пособие для учащихся школ и классов, с углубленным изучением математики / Н. Я. Виленкин, Г. С. Сурвилло, А. С. Симонов, А. И. Кудрявцев; Под ред. Н. Я. Виленкина. — М.: Просвещение, 1996. — 384 с.

5. Груденов Я.И. Совершенствование методики работы учителя математики [Текст]: Кн. для учителя. — М.: Просвещение, 1990. — 224 с.

6. Кара-Сал, Н.М. Применение таблиц и схем в процессе изучения тригонометрии [Электронный ресурс] / Н.М. Кара-Сал, О.М. Танова // Вестник Тувинского государственного университета. – 2012. – № 4 (15). – С. 21-27. – Режим доступа: http://tuvsu.ru/vestnik/sites/default/files/archives/2012%204/karasal_tanova_primenenie_tablic.pdf - Последнее обновление 08.05.2017.

7. Колягин, Ю.М. Задачи в обучении математике. Часть I. Математические задачи как средство обучения и развития учащихся. - М., Просвещение, 1977. - 113 с.

8. Колягин, Ю.М. Задачи в обучении математике. Часть II. Обучение математике через задачи и обучение решению задач. - М., Просвещение, 1977. - 145 с.

9. Лабораторные и практические работы по методике преподавания математики [Текст]: учеб. пособие для студентов физ.-мат. спец. пед. ин-тов / Е.И. Лященко, К.В. Зобкова, Т. Ф. Кириченко и др.; Под ред. Е. И. Лященко.— М.: Просвещение, 1988.—223 с.: ил.

10. Лакерник, А.Р. Высшая математика. Краткий курс[Текст]: Учебное пособие. – М., Логос, 2008. – 528 с.

11. Ларин А.А. Курс высшей математики[Текст]: учебник для студентов вузов /Под ред. А. А. Шестакова. Часть 1.- 2004.− 320 с.

12. Лихачев Б.Т.. Педагогика: Курс лекций [Текст]: учеб. пособие для студентов педагог, учеб. заведений и слушателей ИПК и ФПК. — 4-е изд., перераб. и доп. — М.: Юрайт-М.—7с.. 2001.

13. Лященко, Е.И. Лабораторные и практические работы по методике преподавания математики[Текст]/под ред. Е.И. Лященко. – М.: Просвещение, 1988. С. 166-190.

14. Макарычев, Ю. Н. Алгебра. 9 класс [Текст]: учебник для учащихся общеобразовательных учреждений / Ю. Н. Макарычев, Н. Г. Миндюк, К. И. Нешков, И. Е. Феоктистов. — 7-е изд., испр. и доп. — М.: Мнемозина, 2008. — 447 с.

15. Методика и технология обучения математике. Лабораторный практикум [Текст]: учебное пособие для студентов математических факультетов педагогических университетов / под науч. ред. В.В. Орлова. — М.: Дрофа, 2007. — 320 с.

16. Методика преподавания математики в средней школе. Общая методика [Текст]: учеб.пособие для студентов физ. -мат. фак. пед. Институтов/ Колягин Ю.М., Оганесян В.А., Саннинский В.Я., Луканин Г.Л. — М.: Просвещение, 1975. — 462 с.

17. Методика преподавания математики в средней школе. Частная методика [Текст]: учебное пособие для студентов педагогических институтов по физико-математической специальности/ А.Я. Блох, В.А. Гусев, Г.В. Дорофеев и др.; сост. В.И. Мишин. – М.: Просвещение, 1987. – 416 с.

18. Мордкович, А.Г. Методические проблемы изучения тригонометрии в общеобразовательной школе [Текст] / Мордкович А.Г. //Математика в школе. 2002 - № 6 – с.32-38.

19. Морушкина В.В. Рабочая программа по предмету «Алгебра и начала анализа» 9 класс. [Электронный ресурс] – 2010. – Режим доступа: http://school-math.narod.ru/index/0-3. Последнее обновление 28.05.2017.

20. Никольский, С. М. Алгебра. 9 класс[Текст]: учебник для общеобразовательных учреждений / С. М. Никольский, М. К. Потапов, Н. Н. Решетников, А. В. Шевкии. — 3-е изд. — М.: Просвещение, АО «Московские учебники», 2006.— 255 с.

21. Педагогика[Текст]: учебник для студ. учреждений высш. проф. образования / П.И. Пидкасистый, В.А. Мижериков, Т.А. Юзефавичус ; под ред. П.И. Пидкасистого. — 2-е изд., перераб. и доп. — М.: Издательский центр «Академия», 2014. — 624 с.

22. Полат, Е.С. Новые педагогические и информационные технологии в системе образования[Текст]:учебное пособие для студ. пед. вузов и системы повыш. квалиф. пед. кадров / Е. С. Полат, М. Ю. Бухаркина, М. В. Моисеева, А. Е. Петров; Под ред. Е. С. Полат. — М.: Издательский центр «Академия», 2002. — 272 с.

23. Попов, Н.И. О выявлении внутрипредметных связей при изучении тригонометрии. [Электронный ресурс] / Н.И., Попов, А.Н. Марасанов// Наука и школа. – 2009. – № 5. – С. 37-39. – Режим доступа: http://elibrary.ru/download/elibrary_15275418_26720864.pdf- Последнее обновление 08.05.2017.

24. Сайт учебно-методических комплексов по математике для 1-11 классов Г.К. Муравина и О.В. Муравиной[Электронный ресурс] – http://muravin2007.narod.ru/

25. Саранцев, Г.И. Общая методика преподавания математики[Текст]: учебное пособие для студентов математических спец. педагогических вузов и университетов/ Г.И. Саранцев. – Саранск: Тип. «Красный Октябрь», 1999. – 208 с.

26. Столяр, А.А. Методы обучения математике: – Минск, Высшая школа, 1966. - 191 с.

27. Федеральный государственный образовательный стандарт среднего (полного) общего образования: Приказ Мин. образования и науки РФ от 17.05.2012 г. №413. [Электронный ресурс]. – Режим доступа: http://минобр-науки.рф/документы/2365. – Последнее обновление 07.02.2017.

28. Чабаева, Д.М. К вопросу об изучении тригонометрии в школе [Электронный ресурс] / Д.М. Чабаева // Вестник Елецкого государственного университета им. И.А. Бунина. – 2016. – С. 230-232. – Режим доступа: http://elibrary.ru/download/elibrary_26047003_83218057.pdf - Последнее обновление 08.05.2017.

29. Douglas Downing Ph.D. Trigonometry the Easy Way (Easy Way Series). Barron's Educational Series Inc. – 2001. . – с.288.

30. Tutak, F. A. Critical pedagogy for critical mathematics education [Электронный ресурс] /Fatma Aslan Tutak, Elizabeth Bondy, Thomasenia L. Adams //International Journal of Mathematical Education in Science and Technology. – 2011. – №42(1) . – с. 65-74, DOI: 10.1080/0020739X.2010.510221. – Режим доступа: https://www.researchgate.net/publication/232819503_Critical_pedagogy_for_critical_mathematics_education. - Последнее обновление 11.05.2017.

31. Smith, Mark K. Evaluation for education, learning and change – theory and practice[Электронный ресурс] / Smith, Mark K // *Theencyclopaediaof*

informal education – 2006. – Режим доступа: www.infed.org/biblio/b-eval.htm. - Последнее обновление 11.05.2017.

32. Smith, Mark. К. Keeping a learning journal. A guide for educators and social practitioners [Электронный ресурс] / Smith, Mark K // *The encyclopaedia of informal education.* – 2013. – Режим доступа: http://infed.org/mobi/writing-and-keeping-journals-a-guide-for-educators-and-social-practitioners/. - Последнее обновление 11.05.2017.

33. Thompson, P.W. The design of tasks in support of teachers' development of coherent mathematical meanings [Электронный ресурс] / Thompson, P.W., Carlson, M.P. & Silverman, J. J // Math Teacher Educ. – 2007. – № 4. – с.415-432, DOI:10.1007/s10857-007-9054-8. – Режим доступа: https://link.springer.com/article/10.1007/s10857-007-9054-8. – Последнее обновление 11.05.2017.