МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Тольяттинский государственный университет»

Институт математики, физики и информационных технологий

Кафедра «Алгебра и геометрия»

Направление подготовки 44.03.05 «Педагогическое образование»

Направленность (профиль) «Математика и информатика»

БАКАЛАВРСКАЯ РАБОТА

на тему **«МЕТОДИКА ОБУЧЕНИЯ ЭЛЕМЕНТАМ ИСТОРИИ МАТЕМАТИКИ В КУРСЕ АЛГЕБРЫ ОСНОВНОЙ ШКОЛЫ»**

Студент ____Л.И. Абайдуллина____ ____________________

Руководитель к.п.н., доцент И.В. Антонова ____________________

Консультант __к.п.н., А.В. Кириллова____ ____________________

Допустить к защите

Заведующий кафедрой д.п.н., профессор Р.А. Утеева ______________

«_____»___________2017 г.

Тольятти 2017

АННОТАЦИЯ

Целью бакалаврской работы является выявление методических особенностей обучения учащихся элементам истории математики в курсе алгебры основной школы и разработка наборов задач по теме исследования для учащихся 7-9 классов.

Вопрос использования элементов историзма при обучении математике учащихся общеобразовательной школы относится к числу одного из актуальных проблем современной теории и методики обучения математике ввиду требований ФГОС к результатам обучающихся, осваивающих основную образовательную программу основного общего образования.

Бакалаврская работа состоит из введения, двух глав, заключения, списка литературы и приложений.

Глава I посвящена теоретическим основам обучения учащихся элементам истории математики в курсе алгебры основной школы. Определена роль элементов истории математики. Рассмотрена общая характеристика линии «Математика в историческом развитии». Проведен анализ содержания линии по данной теме. Раскрыты формы, методы и средства обучения элементам истории математики в курсе алгебры основной школы.

В Главе II представлены методические аспекты обучения учащихся элементам истории математики в курсе алгебры основной школы. Описаны методические рекомендации по обучению элементам истории математики в курсе алгебры основной школы. Разработаны наборы задач по теме исследования для учащихся 7-9-х классов.

Список литературы содержит 53 наименования.

ABSTRACT

The topic of the given bachelor's thesis is ″Method of mathematics history elements teaching the in the course of secondary school algebra "

The bachelor's thesis consists of an explanatory note, introduction, includes tables, the list of references, including foreign references and appendices.

The aim of the work is to reveal the methodological specifics of teaching pupils to the elements of the mathematics history in the course of the algebra in the secondary school. The object of the bachelor's thesis is the process of mathematics teaching to students in the secondary school. The subject of the bachelor's thesis is the method of teaching students the elements of the history of mathematics at algebra lessons in the secondary school.

The bachelor's thesis may be divided into several logically connected chapters: the theoretical foundations of teaching the elements of the history of mathematics in the course of algebra in the secondary school and the methodological aspects of teaching the elements of the history of mathematics in the course of algebra in the secondary school.

We start with the statement of the problem and then follow through with its possible solutions. We study the role of elements of the history of mathematics in teaching to students in the secondary school. Then we analyze the content of the Mathematics in Historical Development parallel. We also examine the forms, methods and means of mathematics history elements teaching in the course of algebra of the basic school. We outline in general the methodological recommendations for mathematics history elements teaching.

In conclusion, it can be stated that the tasks have been accomplished, and the research goal has been achieved.

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Актуальность исследования. В настоящее время в системе образования необходимо, чтобы преподавание математики в школе не только обеспечивало качественное овладение обучающимися основных понятий математики, но и совершенствовало у них способность использовать полученные ими знания и умения при решении практических задач. Для решения этой проблемы целесообразно использовать на уроках математики в основной школе *исторические сведения*, которые демонстрируют возникновение и формирование математики как науки.

Кроме того, вопрос использования элементов историзма при обучении математике учащихся общеобразовательной школы относится к числу одного из актуальных проблем современной теории и методики обучения математике ввиду требований ФГОС к результатам обучающихся, осваивающих основную образовательную программу основного общего образования.

Вместе с этим, согласно *примерной программе основного общего образования по математике* и соответствующим ей требованиям *стандарта*, в содержание основного общего образования включен такой дополнительный *методологический раздел*, как *«Математика в историческом развитии»*, это связано с реализацией целей общекультурного и общеинтеллектуального развития учеников. Содержимое этого раздела раскрывается в содержательно-методическую линию, которая пронизывает все основные разделы содержания математического образования на данном этапе обучения. Так же в стандарте указано, что линия «Математика в историческом развитии» содействует *формированию общекультурного, гуманитарного фона изучения курса* [39].

Д.В. Смолякова отмечает, что в программе по математике для основной школы отсутствуют определенные указания, какие данные из истории, когда и как рассказывать школьникам.

Проблема применения задач историко-математического содержания в обучении математике была предметом исследования таких методистов, как:

Т.А. Иванова [12], Ю.М. Колягин [16], К.А. Малыгин [22], Л.М. Фридман [47] и др.

Практически во всех работах вышеуказанных авторов проблема применения задач историко-математического содержания в обучении математике рассматривалась в контексте более широкой проблемы использования элементов историзма в обучении математике.

Применение *сведений из истории математики* в основной школе дает возможность продемонстрировать учащимся тот факт, что математика как наука появилась и формируется в связи с практической деятельностью человека. Аксиомы, свойства, которые изучаются в школьном курсе, получены вследствие познания окружающего мира. Компоненты истории математики, являющиеся результативным средством пробуждения интереса у обучающихся к предмету, считаются ещё одним из средств патриотического и интернационального воспитания обучающихся. Гордость за собственное государство активизирует знакомство учащихся с жизнью и творчеством отечественных ученых [44, С. 82].

Таким образом, проблема введения элементов истории математики в школьный курс является актуальной. С ее решением появляется возможность не только повысить у обучающихся качество математической подготовки и заинтересованность к изучаемой дисциплине, развить творческие способности, но и сформировать условия для “внутренней историчности” математического знания, обеспечить включение его в “человеческий контекст” [47].

В теории и методике обучения математике возможности использования исторических сведений в общеобразовательной школе ещё мало изучены и реализованы в практике преподавания. Известно, что исторический материал, применяемый на уроках, как правило, ограничивается или биографиями ученых, рассказами об их трудах, об их открытиях, или сведениями из истории отдельных разделов математики.

Проблема исследования состоит в выявлении методических особенностей обучения учащихся элементам истории математики в курсе алгебры основной школы.

Объект исследования: процесс обучения алгебре учащихся основной школы.

Предмет исследования: методика обучения учащихся элементам истории математики на уроках алгебры в основной школе.

Цель исследования: выявить методические особенности обучения учащихся элементам истории математики в курсе алгебры основной школы и разработать наборы задач по теме исследования для учащихся 7-9 классов.

Основные задачи исследования:

1. Определить роль элементов истории математики в обучении учащихся основной школы.

2. Рассмотреть общую характеристику линии «Математика в историческом развитии».

3. Провести анализ содержания линии «Математика в историческом развитии».

4. Раскрыть формы, методы и средства обучения элементам истории математики в курсе алгебры основной школы.

5. Выявить методические рекомендации по обучению элементам истории математики в курсе алгебры основной школы.

6. Разработать наборы задач по теме исследования для учащихся 7-9-х классов.

Для решения задач были использованы следующие **методы исследования**: анализ учебно-методической литературы, работ по истории математики, школьных программ, методических пособий, учебников и учебных пособий, изучение опыта работы отечественной школы.

Теоретическая значимость исследования состоит в том, что в нем: 1) определена роль элементов истории математики в обучении учащихся основной школы; 2) проведен анализ содержания линии «Математика в историческом развитии»; 3) раскрыты формы, методы и средства обучения элементам истории математики в курсе алгебры основной школы.

Практическую значимость результатов исследования составляют методические рекомендации обучения элементам истории математики учащихся 7-9-х классов на уроках алгебры и соответствующие наборы задач, которые могут быть использованы учителями математики основной школы и студентами в ходе педагогической практики.

Апробация результатов исследования. Теоретические выводы и практические результаты исследования были апробированы на 1-ом этапе научной студенческой конференции «Дни науки» института математики, физики и информационных технологий ТГУ, апрель 2017 г. (диплом за 2 место).

На защиту выносятся:

1. Методические рекомендации по теме исследования, включающие в себя: анализ содержания теоретического и задачного материалов линии «Математика в историческом развитии».

2. Наборы задач с элементами истории математики для учащихся 7 – 9 классов основной школы.

Бакалаврская работа состоит из введения, двух глав, заключения, списка литературы и Приложений.

Во введении сформулированы основные характеристики исследования: актуальность, проблема, объект, предмет, цель, задачи и методы исследования.

Глава I посвящена теоретическим основам обучения учащихся элементам истории математики в курсе алгебры основной школы. Определена роль элементов истории математики. Рассмотрена общая характеристика линии «Математика в историческом развитии». Проведен анализ содержания линии по данной теме. Раскрыты формы, методы и средства обучения элементам истории математики в курсе алгебры основной школы.

В Главе II представлены методические аспекты обучения учащихся элементам истории математики в курсе алгебры основной школы. Описаны методические рекомендации по обучению элементам истории математики в курсе алгебры основной школы. Разработаны наборы задач по теме исследования для учащихся 7-9-х классов.

В заключении сформулированы основные результаты и выводы проведённого исследования.

Список литературы содержит 53 наименования.

В Приложении представлены результаты анализа теоретического и задачного материалов.

Глава I. ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ОБУЧЕНИЯ ЭЛЕМЕНТАМ ИСТОРИИ МАТЕМАТИКИ В КУРСЕ АЛГЕБРЫ ОСНОВНОЙ ШКОЛЫ

§ 1. О роли элементов истории математики в обучении учащихся основной школы

Математика, как любая иная дисциплина, находится в постоянном развитии. Это оказывает огромное воздействие на формирование техники, экономики, на остальные науки, в том числе на педагогику и методику преподавания математики в общеобразовательной школе.

В учебно – методическом пособии Д.В. Смоляковой, отмечается то, что «история развития математических знаний предоставляет возможность увеличить запас историко-научных знаний школьников, создать у них взгляды о математике как составляющей общечеловеческой культуры. Ознакомление с главными историческими вехами происхождения и формирования математической науки, судьбами знаменитых открытий, именами людей, создававших науку, позволяет повысить интеллектуальный запас любого культурного человека». Автор замечает, что история математики должна быть необходимой составляющей усваиваемого школьниками содержания математического образования.

В журнале «Квант» С.П. Капица приводит утверждение о значимости истории науки: «Хорошо известно, что науку можно изучить совершенно не касаясь её истории. Но трудно понять её метод и совершенно невозможно правильно определить место науки в нашей культуре, минуя ее историю» [13, С. 4].

История математики представляет собой значительно важную *составляющую всеобщей истории*. Она дает возможность контролировать взаимосвязь формирования общества с формированием математики. Без изучения истории математики на соответствующем для нынешнего образования уровне невозможно формирование целостного представления у учащихся вопросов *эволюции человеческого общества* [43].

Человек, изучающий историю науки, критически и по-новому принимает поступающую информацию, что способствует развитию у него коммуникабельности, терпимости.

Д.В. Смолякова выделила *образовательные задачи истории математики* в основной школе:

а) *универсальные:*

– вырабатывать у учеников такой подход к обучению, который позволит им самостоятельно работать с заданиями, формулировать и решать проблемные задачи;

– содействовать восприятию истории в виде открытого процесса с конкретным набором возможностей, причинно-следственных и логических связей;

– вырабатывать умение ориентации в пространстве и во времени, учить определять пределы возможного в создании определенных исторических ситуаций;

– учить выстраивать прошлое, моделируя исторические события;

– совершенствовать умения и навыки исследовательской деятельности на основе работы с различными видами исторических источников;

– содействовать формированию исторической памяти, являющейся необходимым компонентом культуры;

б) *прагматические:*

– обучать моделированию реальных ситуаций через соотнесение исторического опыта с действительностью;

– способствовать формированию способностей принятия приемлемых решений, в частности в конфликтных моментах;

– содействовать развитию интуиции, умению предвидеть результаты своей деятельности.

В.Н. Молодший указывает, что «… в ходе обучения математике следует обращать внимание учеников на ее культурно-историческую значимость, на ее значимость в системе наук, на её использование в технике и практике … . В связи с этим необходимо предоставлять достаточное внимание сообщению сведений по истории математики в школе, объясняя в особенности роль и значимость выдающихся математиков…» [24, С. 154].

Г. Лейбниц отмечал, что крайне полезно познать истинное возникновение великолепных открытий, в особенности таких, какие «сделаны не случайно, а силой мысли». Это приносит пользу далеко не тем, что история воздает каждому свое и стимулирует других достигать подобных похвал, а тем, что освоение способа на выдающихся примерах ведет к формированию открытия [6, С. 148].

Исторический материал демонстрирует то, что математика является продуктом творческой деятельности человеческой мысли, обобщением огромного опыта человечества, и формировалась с целью удовлетворения постоянно растущих потребностей общества [43].

Отличительной чертой процесса формирования методов научного познания в математике является то, что математика базируясь на ранее добытых знаниях, охватывает и новые.

Исторический материал является значительным *средством развития положительной мотивации к освоению математики*, увеличению заинтересованности к ней [12, С. 88; 13, С. 93].

Д.В. Смолякова отмечает, что при освоении учащимися раздела «Математика в историческом развитии» рассматриваются такие вопросы, какие не могут найти себе места в иных дисциплинах, однако играют значительную роль в выяснении сущности самой математики. К важным из них относятся вопросы соответствия истинности и эффективности математических методов, а также интуиции и логики в математике.

История математики содержит в себе не только историю развития и формирования математических идей, определений и способов, но и *биографии людей, основавших математику*.

М.Э. Григорян выделяет *дидактические функции* применения элементов истории математики в обучении учащихся:

- *мировоззренческая функция,* которая заключается в том, что сведения из истории математики создают научные взгляды на жизнь у учащихся, их точку зрения о научной картине мира. При знакомстве с историческими материалами учащиеся понимают то, каким образом перерождалась научная картина мира от древности до наших дней;

- *методологическая функция*. Историко-математические познания помогают развитию правильного представления о способах получения знаний об окружающем нас мире. История математики демонстрирует пути формирования математических методов. Согласно тому, как математические методы формировались, они получали многофункциональный характер, то есть становились общенаучными;

- *интегративная функция,* заключающаяся в том, что понимание исторических этапов развития математических методов научного познавания оказывает содействие развитию понятия о целостности математики, тесной связи абсолютно всех её разделов. История математики обобщает математические знания, собранные обществом, систематизирует и интегрирует их в единую систему;

- *мотивационная функция*. С помощью исторического материала происходит активизация учебно-познавательного процесса, мотивация учащихся к изучению математики;

- *развивающая функция,* заключающаяся в том, что сведения из истории математики являются эффективном средством организации проблемного обучения учащихся, кроме того способствуют развитию творческих способностей школьников;

- *воспитательная функция.* Обсуждение творческой жизни математиков, примеров истории открытий в математике в рамках различные дискуссий на занятиях оказывают содействие в обучении учащихся терпимости к чужому мнению, коммуникативным умениям и навыка, способности к разрешению конфликтных ситуаций;

- *общекультурная функция.* Элементы истории математики помогают расширить представления учащихся о роли математики в развитии человеческой культуры, повышает их кругозор [7].

Д.В. Смолякова отмечает, что использование элементов истории математики в процессе обучения оказывает содействие:

– развитию научного мировоззрения и абстрактного мышления;

– развитию и формированию устойчивой заинтересованности к предмету;

– расширению научного кругозора и знаний обучающихся;

– развитию творческих умений в исследовательской работе;

– формированию познавательной самостоятельности;

– нравственному воспитанию обучающихся.

Помимо этого, история математики дает возможность учащимся:

– понять предмет, структуру математической науки, её характерные особенности;

– понять роль математики в развитии человеческой культуры, её значимость в жизни людей;

– установить роль определенной математической теории в построении естественнонаучной и всеобщей картины мира;

– представить мировоззренческую трактовку математическим открытиям и достижениям;

– усвоить ранее существующие межнаучные и внутринаучные связи, найти новые;

– осознать определенные возможности математики в решении проблем науки и практики [43].

Е.В. Шеламова отмечает, используя в процессе обучения математике элементы истории, учитель воспитывает у учащихся уважение и любовь к великим учёным, талантливым математикам, которые внесли большой вклад в развитие науки. Рассказывая о великих русских ученых, можно способствовать формированию чувства патриотизма и гордости за свою страну. На их примере учащиеся учатся упорству и настойчивости в достижении каких-либо целей или решении задач [48].

Таким образом, история математики как наука представляет собой важную составляющую всеобщей истории; выполняет: мировоззренческую, методологическую, общекультурную, развивающуюся, мотивационную, воспитательную, интегративную функции. Применение элементов истории математики в общеобразовательной школе является эффективным средством повышения мотивации к изучению математики учащимися; способствует улучшению уровня математической культуры учащихся, а также уровня их общей культуры.

§ 2. Общая характеристика линии «Математика в историческом развитии» в курсе алгебры основной школы

В Примерной основной образовательной программе основного общего образования указано: «Раздел «Математика в историческом развитии» предназначен для формирования представлений о математике как части человеческой культуры, для общего развития школьников, для создания культурно-исторической среды обучения. На него не выделяется специальных уроков, усвоение его не контролируется, но содержание этого раздела органично присутствует в учебном процессе как своего рода гуманитарный фон при рассмотрении проблематики основного содержания математического образования» [39].

В Федеральном государственном образовательном стандарте основного общего образования выделены *требования* к результатам освоения основной образовательной программы основного общего образования, связанные с разделом «Математика в историческом развитии»:

– *личностные*, отражающие:

1) знание истории, языка, культуры собственного народа, собственного края, начал культурного наследия России и человечества; усвоение гуманистических, демократических и традиционных ценностей многонационального российского общества;

2) формирование ответственного отношения к учению, готовности и способности обучающихся к саморазвитию и самообразованию на основе мотивации к обучению и познанию, осознанному выбору и построению дальнейшей индивидуальной траектории образования на базе ориентировки в мире профессий и профессиональных предпочтений;

3) формирование целостного мировоззрения, соответствующего современному уровню развития науки и общественной практики, учитывающего социальное, культурное, языковое, духовное многообразие современного мира;

4) формирование осознанного, уважительного и доброжелательного отношения к другому человеку, его мнению, мировоззрению, культуре, языку, вере, гражданской позиции, к истории, культуре, религии, традициям, языкам, ценностям народов России и народов мира; готовности и способности вести диалог с другими людьми и достигать в нем взаимопонимания;

– *метапредметные*, отражающие:

1) умение самостоятельно определять цели своего обучения, ставить и формулировать для себя новые задачи в учебе и познавательной деятельности, развивать мотивы и интересы своей познавательной деятельности;

2) умение оценивать правильность выполнения учебной задачи, собственные возможности ее решения;

3) владение основами самоконтроля, самооценки, принятия решений и осуществления осознанного выбора в учебной и познавательной деятельности;

4) умение определять понятия, создавать обобщения, устанавливать аналогии, классифицировать, самостоятельно выбирать основания и критерии для классификации, устанавливать причинно-следственные связи, строить логическое рассуждение, умозаключение (индуктивное, дедуктивное и по аналогии) и делать выводы;

5) умение создавать, применять и преобразовывать знаки и символы, модели и схемы для решения учебных и познавательных задач;

– *предметные*, обеспечивающие благополучное обучение на последующих ступенях общего образования [45].

В Примерной основной образовательной программе основного общего образования отмечается, что выпускник с целью применения в повседневной жизни и обеспечения возможности успешного продолжения образования научится:

«5 – 6 классы (на базовом уровне):

– описывать отдельные выдающиеся результаты, полученные в ходе развития математики как науки;

– знать примеры математических открытий и их авторов, в связи с отечественной и всемирной историей.

5 – 6 классы (на базовом и углубленном уровнях):

– характеризовать вклад выдающихся математиков в развитие математики и иных научных областей.

7 – 9 классы (на базовом уровне):

– описывать отдельные выдающиеся результаты, полученные в ходе развития математики как науки;

– знать примеры математических открытий и их авторов, в связи с отечественной и всемирной историей;

– понимать роль математики в развитии России.

7 – 9 классы (на базовом и углубленном уровнях):

– характеризовать вклад выдающихся математиков в развитие математики и иных научных областей;

– понимать роль математики в развитии России» [39].

В сборнике рабочих программ, Т.А. Бурмистрова отмечает, что «*в курсе алгебры существуют следующие основные содержательные линии: арифметика; алгебра; функции; вероятность и статистика»*. Наравне с данными *содержательными линиями* в содержание учебного материала по математике введены 2 дополнительных методологических раздела: *логика и множества; математика в историческом развитии*, это связано с реализацией целей умственного и общекультурного формирования обучающихся. Содержимое любого из данных разделов разворачивается в содержательно-методическую линию, захватывающую все без исключения основные содержательные линии. При этом 1-ая линия — «Логика и множества» — придерживается цели освоения учениками конкретными элементами универсального математического языка, 2-ая линия — «Математика в историческом развитии» — оказывает содействие формированию общекультурного, гуманитарного фона исследования курса [3, С. 35].

Вместе с этим, в примерной основной образовательной программе основного общего образования представлено *содержание линии «Математика в историческом развитии»*:

5 – 6 классы:

«Появление цифр, букв, иероглифов в процессе счёта и распределения продуктов на Древнем Ближнем Востоке. Связь с Неолитической революцией.

Рождение шестидесятеричной системы счисления. Появление десятичной записи чисел. Рождение и развитие арифметики натуральных чисел. НОК, НОД, простые числа. Решето Эратосфена.

Появление нуля и отрицательных чисел в математике древности. Роль Диофанта.

Дроби в Вавилоне, Египте, Риме. Открытие десятичных дробей. Старинные системы мер. Десятичные дроби и метрическая система мер. Л. Магницкий».

7 – 9 классы:

«Возникновение математики как науки, этапы её развития. Основные разделы математики. Выдающиеся математики и их вклад в развитие науки.

Бесконечность множества простых чисел. Числа и длины отрезков. Рациональные числа. Потребность в иррациональных числах. Школа Пифагора.

Зарождение алгебры в недрах арифметики. Ал-Хорезми. Рождение буквенной символики. П. Ферма, Ф. Виет, Р. Декарт. История вопроса о нахождении формул корней алгебраических уравнений степеней, больших четырёх. Н. Тарталья, Дж. Кардано, Н.Х. Абель, Э. Галуа.

Появление метода координат, позволяющего переводить геометрические объекты на язык алгебры. Появление графиков функций. Р. Декарт, П. Ферма. Примеры различных систем координат.

Задача Леонардо Пизанского (Фибоначчи) о кроликах, числа Фибоначчи. Задача о шахматной доске. Сходимость геометрической прогрессии.

Истоки теории вероятностей: страховое дело, азартные игры. П. Ферма, Б. Паскаль, Я. Бернулли, А. Н. Колмогоров.

От земледелия к геометрии. Пифагор и его школа. Фалес, Архимед. Платон и Аристотель. Построение правильных многоугольников. Триссекция угла. Квадратура круга. Удвоение куба. История числа π. Золотое сечение. «Начала» Евклида. Л Эйлер, Н. И. Лобачевский. История пятого постулата.

Геометрия и искусство. Геометрические закономерности окружающего мира.

Астрономия и геометрия. Что и как узнали Анаксагор, Эратосфен и Аристарх о размерах Луны, Земли и Солнца. Расстояния от Земли до Луны и Солнца. Измерение расстояния от Земли до Марса.

Роль российских учёных в развитии математики: Л. Эйлер. Н. И. Лобачевский, П. Л. Чебышев, С. Ковалевская, А. Н. Колмогоров.

Математика в развитии России: Петр I, школа математических и навигацких наук, развитие российского флота, А. Н. Крылов. Космическая программа и М. В. Келдыш» [39].

Т.А. Иванова отмечает, что история математики должна стать неотъемлемой частью усваиваемого школьниками содержания математического образования. *Под историей науки в школе понимается отражение в содержании образования единства 2-х процессов*: истории формирования определенной науки, ее взглядов, понятий, идей, проблем теории и истории тех или иных открытий [13, С. 92].

Д.В. Смолякова утверждает, что проблема введения *составляющих истории математики* в школьный курс является на сегодняшний день актуальной, ее решение не только позволило бы обучающимся улучшить математическую подготовку, развить творческие способности и повысить мотивацию к изучению математики.

Автор выделяет *следующие цели обучения истории математики в основной школе:*

– «ознакомление учащихся с событиями истории, фактами, биографиями ученых прошлого и современности, основными процессами развития математического образования;

– создание у учащихся представлений об исторических источниках, их особенностях;

– развитие у учащихся способностей к самостоятельному анализу событий прошлого и настоящего, раскрытию причинно-следственных связей, обобщению фактов, использованию знаний, полученных в ходе изучения математики;

– формирование у учащихся системы ценностей и убеждений, основанной на нравственных и культурных достижениях человечества» [44, С. 60].

По мнению Т.А. Ивановой, *без знакомства школьников с элементами истории математики невозможно полноценно решать задачу о воспитании культуры личности средствами математики*: отношение к математике как части человеческой культуры; понимание значения математики для общественного прогресса [13, С. 96].

Таким образом, раздел «Математика в историческом развитии» изучается в основной школе с целью развития у учащихся взглядов о математике как части человеческой культуры; формирования культурно-исторической среды обучения учащихся; улучшения их математической подготовки, развития творческих способностей учащихся и повышения мотивации к изучению математики.

§ 3. Анализ содержания линии «Математика в историческом развитии»

Применение элементов истории математики в школьном курсе математики дает возможность учащимся понять смысл математических терминов и их значение, увидеть математическое понятие во взаимосвязи с другими изучаемыми понятиями, научить школьников становиться терпимыми к чужому мнению, правильно принимать разные методы рассуждений.

Чаще всего при введении исторического материала в обучении учащихся используют исторические сведения, описанные в содержании школьных учебников математики. Эти данные представлены в виде коротких справок, или отдельными фактами в окончании глав учебников.

Проанализируем комплекты учебников математики (5-6 классы) и алгебры (7-9 классы), по которым осуществляется обучение учащихся общеобразовательной школы в настоящее время, и рассмотрим исторический материал, включающийся в них. Нами будут рассмотрены учебники И.И. Зубаревой [9-10], А.Г. Мордковича [25-30], С.М. Никольского [32-36], Н.Я. Виленкина [4-5], Ю.Н. Макарычева [19-21].

Анализ учебников математики (5-6 классов) и учебников алгебры (7-9 классов) на наличие исторических справок представлен в *Приложениях 1-2*.

Приступим к рассмотрению учебников *С.М. Никольского* и др. На обложке учебников с 5 по 9 классы изображены двое мужчин, из различных эпох развития математики. В связи с этим можно предположить, что в учебниках автора историческим данным уделяется особенный интерес.

В учебниках автора есть пункт «*Ищем информацию»*, в соответствии с которым учащимся необходимо найти сведения о математиках, которые внесли существенный вклад в развитие науки.

Индивидуальностью этих учебников считается то, что каждая глава заканчивается дополнительными сведениями, которые вместе с другими полезными фактами, включают в себя исторические данные. Всякий раз эти данные имеют отношение к содержанию изучаемой главы учебника.

Если сравнить учебники математики 5-6 классов и учебники алгебры 7-9 классов, то нельзя не заметить, как происходит увеличение объема исторического материала. Данные из истории математики с каждым годом становятся углубленнее, объемнее и обретают вид научных сведений, а не увлекательных рассказов из истории развития математики, как это представлено в учебниках 5 и 6 классов.

Анализируя учебники математики и алгебры С.М. Никольского, можно прийти к выводу о том, что в этих учебниках грамотно применен и распределен исторический материал.

Далее представим учебники математики *Н.Я. Виленкина и др.*

В учебнике математики 5 класса в условных обозначениях есть знак, указывающий на «рассказы об истории возникновения и развития математики». Именно так и написано в условных обозначениях. Изучение данной информации будет способствовать осознанию учащимися значимости истории развития математики как науки. Данный учебник содержит небольшие исторические справки, которые вписываются в теоретический материал учебника, старинные задачи в этом учебнике отсутствуют.

В учебнике математики 6 класса исторические справки размещены по-другому, и встречаются после каждого параграфа. Исторических сведений значительно меньше, чем в учебнике 5 класса. Кроме того, в данном учебнике присутствуют в небольшом количестве задачи с историческим содержанием.

Далее перейдем к рассмотрению учебников, таких авторов, как *Ю.Н. Макарычев, Н. Г. Миндюк*. Этот учебник отличается от рассмотренных выше, тем что в учебниках 7 – 9 классов почти в каждой главе присутствует биография знаменитых математиков, среди которых Архимед, И. Ньютон, Р. Декарт, Евклид, М. Лобачевский, и др. Таким образом, авторы смогли расположить в конце учебников раздел «Исторические сведения» по всем главам. Исторические сведения в данном учебнике представлены более углубленно, и чем старше класс, тем количество исторического материала больше.

Представим серию учебников математики *И.И. Зубаревой, А.Г. Мордковича (5-6 классы)* и алгебры *А. Г. Мордковича (7-9 классы)*. В учебниках данных авторов отсутствует исторический материал, нет упоминания об истории происхождения тех или иных терминов и понятий.

Итак, нами рассмотрены учебники математики и алгебры основной школы в соответствии с темой исследования. В учебниках С.М. Никольского исторический материал описан более наглядно и подробно; продемонстрировано увеличение объема исторического материала на каждой новой ступени обучения. Объем информации, которая использовалась в 5-6 классах для повышения интереса учащихся к математике, с каждым годом увеличивается. В старших классах роль истории математики в обучении принимает иной смысл. Ученики должны понимать ценность исторических сведений, именно по этой причине исторический материал соответствует содержанию главы, после которой он используется. Данный комплект учебников считается более предпочтительным с точки зрения наличия историко-математических знаний.

В учебниках алгебры Ю.Н. Макарычева, Н. Г. Миндюк для 7 – 9 классов располагается и С.М. Никольского исторический материал представлен в конце каждой главы, так же исторические сведения разбиты на подпункты, где каждый имеет название, и учащийся видит, что ему предстоит изучить.

Содержание исторического материала в учебниках математики 5-6 классов Н.Я. Виленкина и С.М. Никольского направлено по повышение мотивации к изучению математики в школе.

Как было отмечено выше, в учебниках математики *И.И. Зубаревой* и *А.Г. Мордковича,* отсутствует исторический материал, что значительно усложняет работу учителя математики. Ему надо будет самостоятельно подбирать исторический материал к урокам.

Рассмотрев анализ содержания теоретического материала линии «Математика в историческом развитии», перейдем к рассмотрению анализа *задачного материала* в учебниках математики разных авторов.

По мнению Г.И. Саранцева, одним из методов привлечения элементов истории математики в школу считается применение на уроках специальных учебных заданий. Каждое из таких заданий имеет свое назначение.

Ещё в конце 19 века поднимались вопросы об увеличении функций задач в обучении математике. В документах Международного конгресса математиков, состоявшегося в 1966 г. в Москве, подчеркивается то, что решение задач – наиболее результативная форма не только для формирования математической деятельности школьников, она применяется также с целью усвоения ими знаний, развития их способностей, а также приложений математики.

Автор отмечает, что задачи – важнейший способ формирования пространственного мышления, творческой деятельности школьников, в ходе решения задач развивается не только логическая, эвристическая, алгоритмическая составляющие мышления, однако и многие нравственные особенности учащихся.

Г.И. Саранцев указывает, что в учебных пособиях по методике обучения математике роль и место задач в обучении несколько занижены [42, С. 128-130].

Проанализируем комплекты учебников математики (5-6 классы) и алгебры (7-9 классы), по которым осуществляется обучение учащихся общеобразовательной школы в настоящее время, и рассмотрим задачный материал по теме исследования, включающийся в них. Нами будут рассмотрены учебники И.И. Зубаревой [9-10], А.Г. Мордковича [25-30], С.М. Никольского [32-36], Н.Я. Виленкина [4-5], Ю.Н. Макарычева [19-21].

Анализ учебников математики (5-6 классов) и учебников алгебры (7-9 классов) на наличие старинных задач представлен в *Приложениях 3-4*.

Приступим к рассмотрению учебников *С.М. Никольского, и др*.

В учебниках математики 5 - 6 классов в условных обозначениях присутствуют знаки, представляющие разные рубрики, с которыми учащиеся будут сталкиваться при освоении материала. Среди этих символов, присутствует знак «старинные задачи», что указывает на то, что в учебнике используются исторические задачи. Больше в целом встречаются задачи из книг Л.Н. Толстого, И. Ньютона, С.А. Рачинского, Л.Ф. Магницкого, задачи древнегреческих математиков и др. С 8 класса, авторы меньше включают в содержание учебника алгебры старинные задачи.

Далее представим серию учебников *Н.Я. Виленкина* и др. По сравнению с учебниками С.М. Никольского, автор приводит небольшое количество исторических задач, которые относятся к темам «Старинные системы мер» и «Дроби», которые в свою очередь представлены в содержании Примерной программы по математике, в разделе «Математика в историческом развитии».

Рассмотрим учебники таких авторов, как *Ю.Н. Макарычев, Н.Г. Миндюк*. В учебниках алгебры 7 – 8 классов присутствуют старинные задачи, но в небольшом количестве, которые относятся к таким темам, как: «Формулы сокращенного умножения; Решение задач с помощью уравнений; Квадратные уравнения», представленные в содержании Примерной программы по математике, в разделе «Математика в историческом развитии». Кроме того, среди старинных задач встречаются задачи повышенной трудности. В учебнике 9 класса задачи с историческим содержанием отсутствуют.

Далее представим учебники *И.И. Зубаревой, А.Г. Мордковича (5-6 классы), А. Г. Мордковича (5-9 классы)*. Небольшое количество исторических задач встречаются в учебниках 5 и 7 классов. В 5 классе представлены две задачи, которые относятся к теме «Развитие арифметики натуральных чисел; формирование понятия числа», в 7 классе предложены четыре задачи по теме «Решение задач с помощью уравнений».

Итак, нами рассмотрен задачный материал в учебниках математики и алгебры основной школы в соответствии с темой исследования. В учебниках С.М. Никольского старинные задачи представлены более наглядно и подробно. Затронуты задачи из всех тем в содержании Примерной программы по математике, раздела «Математика в историческом развитии». Отметим, что имеет место увеличение объема исторического материала на каждой новой ступени обучения в учебниках автора. В учебниках Н.Я. Виленкина приведены исторические задачи не ко всем необходимым темам. В Учебниках И.И. Зубаревой и А.Г. Мордковича, как и было отмечено, исторических задач мало, исключением являются задачники 5 и 7 классов, где предложены задачи всего из двух тем, указанных выше.

Проанализировав задачи в учебниках разных авторов по математике (5-6 классы) и алгебре (7-9 классы), были выделены *типы задач* в соответствии с Федеральным государственным образовательным стандартом основного общего образования. Перейдем к рассмотрению этих типов старинных задач.

Типы задач линии «Математика в историческом развитии» в учебниках разных авторов

В 5 классе представлены старинные задачи, по таким темам как: «Старинные системы мер», «Дроби», «Развитие арифметики натуральных чисел; формирование понятия числа». Перейдем к рассмотрению некоторых из них.

1. Старинные системы мер.

Задача 1 (№150, 5 класс [35, С. 37]).

а) Купили дюжину (12 штук) носовых платков по 1 р. за штуку, 4 пары носков по 4 р. за пару и 2 майки по 10 р. за штуку. Сколько денег заплатили?

б) С завода отправили 9 подвод с посудой, на каждой по 2 ящика, и в каждом ящике по 45 дюжин тарелок. Сколько тарелок отправили с завода?

Решение.

а) 1) $12 \cdot 1 = 12$ (р.) – стоили носовые платки;

2) $4 \cdot 4 = 16$ (р.) – стоили носки;

3) $2 \cdot 10 = 20$ (р.) – стоили майки;

4) $12 + 16 + 20 = 48$ (р.) – денег заплатили.

б) 1 дюжина = 12 тарелок;

1) $45 \cdot 12 = 540$ (тарелок) – в одном ящике;

2) $540 \cdot 2 = 1080$ (тарелок) – в двух ящиках;

3) $9 \cdot 1080 = 9720$ (тарелок) – отправлено с завода.

Ответ. а) 48 р. заплатили; б) 9720 тарелок отправили с завода.

Задача 2 (№556, 5 класс [35, С. 124]). Из Москвы в Тверь вышли одновременно 2 поезда. Первый проходил в час 39 вёрст и прибыл в Тверь 2 часами раньше второго, который проходил в час 26 вёрст. Сколько вёрст от Москвы до Твери?

Решение. Пусть x часов шёл первый поезд. Тогда $(x + 2)$ часов шёл второй поезд. Составим уравнение:

$39x = 26(x + 2)$; $\quad 39x = 26x + 52$;

$39x - 26x = 52$; $\quad 13x = 52$

$x = 52 : 13$; $\quad x = 4$

4 часа – первый поезд прошел из Москвы в Тверь;

$4 \cdot 39 = 156$ (вёрст) – от Москвы до Твери.

Ответ. 156 вёрст от Москвы до Твери.

Задача 3 (№559, 5 класс [35, С. 124]). Собака усмотрела в 150 саженях зайца, который пробегает в 2 мин по 500 сажен, а собака в 5 мин – 1300 сажен. Спрашивается, в какое время собака догонит зайца.

Решение.

1) $500 : 2 = 250$ (сажен/мин) – скорость зайца;

2) $1300 : 5 = 260$ (сажен/мин) – скорость собаки;

3) $260 - 250 = 10$ (сажен/мин) – скорость удаления;

4) $150 : 10 = 15$ (мин) – собака догонит зайца.

Ответ. За 15 мин собака догонит зайца.

Задача 4 (№1074, 5 класс [35, С. 241]). Разделите полтину на половину.

Решение. Полтина = 50 копеек. Половина = $\frac{1}{2}$.

Тогда $50 : \frac{1}{2} = \frac{50}{1} \cdot \frac{2}{1} = 100 \text{ копеек } = 1$ рубль.

Ответ. 1 рубль.

Задача 5 (№1178, 5 класс [35, С. 258]). Некто купил 96 гусей. Половину гусей он купил, заплатив по 2 алтына и 7 полушек за каждого гуся. За каждого из остальных гусей он заплатил по 2 алтына без полушки. Сколько стоит покупка?

Решение. 1 алтын = 3 копейки = 12 полушек.

1) $2 \text{ алтына } 7 \text{ полушек} = 12 \cdot 2 + 7 = 31 \text{ полушка}$;

2) $96 : 2 = 48$ (гусей) – половина гусей;

3) $31 \cdot 48 = 1488$ (полушек) – стоила первая половина гусей;

4) $2 \text{ алтына} = 24 \text{ полушки}$,

значит цена гуся из второй половины: $24 - 1 = 23$ (полушки);

5) $23 \cdot 48 = 1104$ (полушки) – цена второй половины гусей;

6) $1488 + 1104 = 2592$ (полушки)

$2596 : 4 = 648 \text{ коп } = 6\text{р}. 48 \text{ коп.} - \text{стоит покупка.}$

Ответ. Покупка стоит 6р. 48 коп.

Задача 6 (№768, 5 класс [4, С. 117]). В старину площади земельных участков измеряли в десятинах (это площадь квадрата со стороной, которая равна десятой части версты). Сравните десятину с 1 га.

Решение. 1 верста = 1 км 67 м = 1067 м.

Так как (1067 × 1067) : 100 = 1 138 489 : 100 > 1 000 000 : 100 = 1 га,

то десятина больше гектара.

Задача 7 (№839, 5 класс [4, С. 129]). На Руси в старину использовались в качестве единиц измерения объёма ведро (около 12л), штоф (десятая часть ведра). В США, Англии и других странах используются баррель (около 159 л), галлон (около 4 л), бушель (около 36 л), пинта (от 470 до 568 кубических сантиметров). Сравните эти единицы. Какие из них больше 1 м^3?

Решение. 1 пинта < 1 штоф < 1 галлон <1 ведро < 1 бушель < 1 баррель. Они все меньше 1 м^3 (1 м^3 = 1000 л).

Задача 8 (№873, 5 класс [4, С. 137]). В старину часто пользовались солнечными часами, они известны более 3000 лет. В солнечных часах время определяется по положению тени от наклонного стержня на циферблате (циферблат и стержень располагали так, чтобы в полдень тень от стержня была направлена на отметку 12 ч). Подумайте, что общего у солнечных часов (рис. 1) с современными, в чем их достоинства и недостатки.

Рис. 1. Солнечные часы.

Решение. Солнечные и современные часы показывают время, их достоинство в том, что они не требуют энергии для своей работы, а недостаток в том, что они не показывают время ночью и ими неудобно пользоваться.

2. Дроби.

Задача 9 (№1069, 5 класс [35, С. 240]). *Из «Арифметики Л.Ф. Магницкого.* Купил полторажды полтора аршина, дал полтретьяжды полтретьи гривны. Сколько надо дать за полдевятажды полдевята аршина?

Примечание. На Руси некоторые смешанные дроби имели свои названия:

$1\frac{1}{2}$ – полтора; $2\frac{1}{2}$ – полтрети; $3\frac{1}{2}$ – полчетверта; $4\frac{1}{2}$ – полпята и т.д.

В задаче упоминаются произведения дробей: $1\frac{1}{2}\cdot 1\frac{1}{2}$; $2\frac{1}{2}\cdot 2\frac{1}{2}$; $8\frac{1}{2}\cdot 8\frac{1}{2}$.

Решение.

1) $1\frac{1}{2}\cdot 1\frac{1}{2} = \frac{3}{2}\cdot\frac{3}{2} = \frac{9}{4}$ (ч.) – купил аршина;

2) $2\frac{1}{2}\cdot 2\frac{1}{2} = \frac{5}{2}\cdot\frac{5}{2} = \frac{25}{4}$ (ч.) – заплатил за аршин;

3) $8\frac{1}{2}\cdot 8\frac{1}{2}=\frac{17}{2}\cdot\frac{17}{2}=\frac{289}{4}$ (ч.) – надо купить аршина

$\frac{9}{4}$ аршина $-$ $\frac{25}{4}$ гривны

$\frac{289}{4}$ аршина $- x$ гривны

Из пропорции найдем сколько надо денег за $\frac{289}{4}$ аршина.

4) $\frac{\frac{289}{4}\cdot\frac{25}{4}}{\frac{9}{4}}=\frac{\frac{7225}{16}}{\frac{9}{4}}=\frac{7225}{16}:\frac{9}{4}=\frac{7225}{16}\cdot\frac{4}{9}=\frac{7225}{36}=200\frac{25}{36}$ гривны.

Ответ. За полдевятажды полдевята аршина надо дать $200\frac{25}{36}$ гривны.

Задача 10 (№1070, 5 класс [35, С. 241]). *Ананий из Ширака (Армения, 7 в.).* В городе Афины был водоём, в который проведены три трубы. Одна из труб может наполнить водоём за один час, другая, более тонкая, - за два часа, третья, ещё более тонкая, - за три часа. Нужно узнать, за какую часть часа все три трубы вместе наполнят водоём.

Примечание. Ананий дал такой ответ: $\frac{1}{4}\ \frac{1}{6}\ \frac{1}{12}\ \frac{1}{22}$. Используйте его для проверки своего решения.

Решение: Пусть 1 – объем водоема;

1) $1 : 1 = 1$ (часть) – за 1 час заполнить может первая труба;

2) $1 : 2=\frac{1}{2}$ (часть) – за 1 час заполнить может вторая труба;

3) $1 : 3=\frac{1}{3}$ (часть) – за 1 час может заполнить может третья труба;

t $-$время, за которое наполнят водоём все три трубы.

Составим уравнение:

$t\cdot\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)=1;\quad t\cdot\left(\frac{6}{6}+\frac{3}{6}+\frac{2}{6}\right)=1;$

$t\cdot\frac{11}{6}=1;\qquad t=1:\frac{11}{6};$

$t=\frac{6}{11}.$

$\frac{6}{11}$ часа – время, за которое все три трубы вместе наполнят водоем.

Ответ. За $\frac{6}{11}$ часа все три трубы вместе наполнят водоем.

Задача 11 (№1072, 5 класс [35, С. 241]). *Из египетских папирусов.*

а) Количество и его четвёртая часть дают вместе 15. Найдите количество.

б) Число и его половина составляют 9. Найдите число.

Решение. а) Пусть x – количество. Тогда, $\frac{1}{4}x$ – четвертая часть количества.

Составим уравнение:

$x + \frac{1}{4}x = 15; \qquad x + \frac{x}{4} = 15$

$4x + x = 15 \cdot 4; \quad 5x = 60$

$x = 12$

12 – количество.

б) Пусть x – число. Тогда, $\frac{1}{2}x$ – его половина.

Составим уравнение:

$x + \frac{x}{2} = 9; \quad 2x + x = 9 \cdot 2$

$3x = 18; \qquad x = 18 : 3$

$x = 6$

6 – число.

Ответ. 12; 6.

Задача 12 (№1206, 5 класс [35, С. 261]). Я прочитал $\frac{3}{8}$ книги и еще 52 страницы и заметил, что мне осталось прочесть еще $\frac{1}{2}$ книги без 12 страниц. Сколько страниц в книге?

Решение. Пусть x – все страницы книги. Тогда, с учетом условия задачи составим уравнение:

$x \cdot \frac{3}{8} + 52 = x \cdot \frac{1}{2} + 12\,; \qquad 52 - 12 = \frac{1}{2}x - \frac{3}{8}x$

$40 = \frac{4}{8}x - \frac{3}{8}x; \qquad\qquad 40 = \frac{1}{8}x$

$x = 40 : \frac{1}{8}; \qquad\qquad x = 320$

320 страниц в книге.

Ответ. В книге 320 страниц.

Задача 13 (№1209, 5 класс [35, С. 262]). Три крестьянки привезли на рынок масло: одна 4 кадки по $\frac{5}{12}$ пуда в каждой, вторая 2 кадки по $\frac{2}{3}$ пуда, а всё масло третьей крестьянки было разложено поровну в 5 кадок и весило $3\frac{1}{3}$ пуда. Первые две крестьянки продали всё своё масло, а третья – только одну кадку. Сколько денег получили три крестьянки вместе, если каждый пуд масла продавали по 12 р.?

Решение.

1) $4 \cdot \frac{5}{12} = \frac{4}{1} \cdot \frac{5}{12} = \frac{5}{3}$ (пуда) – масла было у первой крестьянки;
2) $\frac{5}{3} \cdot 12 = \frac{5}{3} \cdot \frac{12}{1} = 20$ (р) – получила первая крестьянка за всё своё масло;
3) $\frac{2}{3} \cdot 2 = \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{1} = \frac{4}{3}$ (пуда) - масла было у второй крестьянки;
4) $\frac{4}{3} \cdot 12 = \frac{4}{3} \cdot \frac{12}{1} = 16$ (р) - получила вторая крестьянка за всё своё масло;
5) $3\frac{1}{3} : 5 = \frac{10}{3} : \frac{5}{1} = \frac{10}{3} : \frac{1}{5} = \frac{2}{3}$ (пуда) – занимала одна кадка третьей крестьянки;
6) $\frac{2}{3} \cdot 12 = \frac{2}{3} \cdot \frac{12}{1} = 8$ (р) – получила третья крестьянка за всё своё масло;
7) $20 + 16 + 8 = 44$ (р) – получили три крестьянки вместе.

Ответ. 44 рубля получили три крестьянки вместе.

Задача 14 (№1128, 5 класс [4, С. 177]). В старинных книгах можно встретить такие названия дробей: $\frac{1}{2}$ – пол, полтина, $\frac{1}{5}$ – пятина, $\frac{1}{7}$ – седьмина, $\frac{1}{10}$ – десятина. Подумайте, как появились следующие названия: $\frac{1}{4}$ – четь, $\frac{1}{8}$ - полчети, $\frac{1}{16}$ – полполчети, $\frac{1}{32}$ – полполполчети (малая четь). Дробь $\frac{1}{3}$ называли «треть». Попробуйте догадаться, как называли дроби $\frac{1}{6}, \frac{1}{12}, \frac{1}{24}$.

Подумайте, почему смешанные числа называли: $1\frac{1}{2}$ – полвтора, $2\frac{1}{2}$ - полтретья, $3\frac{1}{2}$ – полчетверта, $4\frac{1}{2}$ – полпяты, $5\frac{1}{2}$ – полшесты и т.д. Сохранился ли такой способ чтения в наше время?

Решение: Дроби $\frac{1}{6}, \frac{1}{12}, \frac{1}{24}$ называли: $\frac{1}{6}$ – полтрети, $\frac{1}{12}$ – полполтрети, $\frac{1}{24}$ – полполполтрети (малая треть).

Отметим, что в настоящее время такой способ чтения дробей не сохранился.

3. Развитие арифметики натуральных чисел; формирование понятия числа.

Задача 15 (№195, 5 класс [35, С. 45]). Родник в 24 мин даёт бочку воды. Сколько бочек воды даёт родник в сутки?

Решение: 1 сутки = 24 часа, 1 час = 60 мин.

1) $24 \cdot 60 = 1440$ (мин) – в 1 сутках;
2) $1440 : 24 = 60$ (бочек) – воды даёт родник в сутки.

Ответ. 60 бочек.

Задача 16 (№230, 5 класс [35, С. 51]). *Задача С.А. Рачинского.* Я провёл год в деревне, в Москве и в дороге – и притом в Москве в 8 раз более времени, чем в дороге, а в деревне в 8 раз более, чем в Москве. Сколько дней провел я в дороге, в Москве и в деревне?

Решение. 1 часть провел в дороге, 8 частей провел в Москве,
$8 \cdot 8 = 64$ частей провел в деревне.

1) $1 + 8 + 64 = 73$ (частей) – всего;
2) $365 : 73 = 5$ (дней) – в дороге;
3) $5 \cdot 8 = 40$ (дней) – в Москве;
4) $5 \cdot 64 = 320$ (дней) – в деревне.

Ответ. 5 дней провел в дороге, 40 дней в Москве и 320 дней в деревне.

Задача 17 (№287, 5 класс [35, С. 62]). *Из «Арифметики» Л.Н. Толстого.*

а) У двух мужиков 35 овец. У одного на 9 овец больше, чем у другого. Сколько у каждого овец?

б) У двух мужиков 40 овец, а у одного меньше против другого на 6. Сколько у каждого?

Решение.

а) 1) $35 - 9\ : 2 = 13$ (овец) – у второго мужика;

2) $13 + 9 = 22$ (овцы) – у первого мужика;

б) 1) $40 - 6\ : 2 = 17$ (овец) – у одного мужика;

2) $17 + 6 = 23$ (овцы) – у второго мужика.

Ответ. а) 22 овцы у первого мужика, 13 овец у второго мужика; б) 17 овец у одного мужика, 23 овцы у второго.

Задача 18 (№791, 5 класс [35, С. 177]). *Из папируса Ахмеса (Египет, ок. 2000 лет до н.э.).* Приходит пастух с 70 быками. Его спрашивают:

- Сколько приводишь ты из своего многочисленного стада?

Пастух отвечает:

- Я привожу две трети от трети скота.

Сколько быков в стаде?

Решение.

1) $70 : \frac{2}{3} = \frac{70}{1} \cdot \frac{3}{2} = \frac{210}{2} = 105$ (быков) - $\frac{1}{3}$ стада;
2) $105 \cdot 3 = 315$ (быков) – в стаде.

Ответ. 315 быков в стаде.

Задача 19 (№1140, 5 класс [35, С. 251]). *Из «Азбуки» Л.Н. Толстого.* Пять братьев разделили после отца наследство поровну. В наследстве было три дома. Три дома нельзя было делить, их взяли старшие три брата. А меньшим за то выделили деньги. Каждый из старших заплатил по 800 р. меньшим. Меньшие разделили эти деньги между собою, и тогда у всех братьев стало поровну. Много ли стоили дома?

Решение.

1) $800 \cdot 3 : 2 = 1200$ (р.) – у каждого стало;
2) $1200 + 800 = 2000$ (р.) – стоимость одного дома.

Ответ. 2000 р. стоимость дома.

Задача 20 (№1154, 5 класс [35, С. 253]). Купец купил 110 фунтов табака. 50 фунтов оказались подмоченными, и купец продал их на 2 р. дешевле за 1 фунт, чем заплатил сам. Остальной табак он продал на 3 р. дороже за 1 фунт, чем уплатил сам. Подсчитайте прибыль купца.

Решение. $110x$ – весь табак;

$50(x-2)$ – продал подмоченный;

$60(x+3)$ – продал остальной табак.

Составим уравнение:

$50\ \ x-2\ \ +60\ \ x+3\ \ =110x$;

$50x-100+60x+180=110x$;

$110x+80=110x$; $\quad 80=110x-110x$;

$80\neq 0$

80 р. – прибыль.

Ответ. 80 рублей – прибыль купца.

Задача 21 (№530, 5 класс [9, С. 146]). Кусок бязи и кусок ситца имеют одинаковую длину, но 1 м бязи на 4 р. дороже, чем 1 м ситца. Весь кусок ситца стоит 105 р., а кусок бязи – 165 р. Сколько метров ткани в каждом куске и какова цена 1 м бязи и 1 м ситца?

Решение. Определим, на сколько рублей кусок бязи дороже куска ситца.

1) $165-105=60$ (р.)

Зная разницу в стоимости 1 метра тканей и разницу в цене всего куска, можно определить длину кусков.

2) $60:4=15$ (м)
3) $165:15=11$ (р.) – цена 1 м бязи;
4) $105:15=7$ (р.) – цена 1 м ситца.

Ответ. 15 м ткани в каждом куске; 11 р. цена 1 м бязи; 7 р. цена 1 м ситца.

В 6 классе представлены старинные задачи, по таким темам как: «Пропорции», «Обыкновенные дроби», «Развитие арифметики натуральных чисел; формирование понятия числа». Перейдем к рассмотрению некоторых из них.

4. *Пропорции.*

Задача 22 (№79, 6 класс [36, С. 21]). В жаркий день 6 косцов выпили бочонок кваса за 8 ч. Нужно узнать, сколько косцов за 3 ч. выпьют такой же бочонок кваса.

Решение. ↓6 косцов = 8 ч. ↑

↓ x косцов = 3 ч.↑

$\frac{x}{6} = \frac{8}{3}$; $x = \frac{48}{3}$; $x = 18$

18 косцов.

Ответ. 18 косцов за 3 ч выпьют такой же бочонок кваса.

Задача 23 (№80, 6 класс [36, С. 21]). *Из «Арифметики» А.П. Кисилёва.* 8 аршин сукна стоят 30 р. Сколько стоят 15 аршин этого сукна?

Решение. 8 аршин сукна = 30 р.

15 аршин сукна = x р.

$x = \frac{15 \cdot 30}{8}$; $x = \frac{450}{8}$; $x = 56\frac{1}{4}$

$56\frac{1}{4}$ рублей.

Ответ. $56\frac{1}{4}$ рублей стоят 15 аршин сукна.

Задача 24 (№186, 6 класс [36, С. 43]). *Из «Всеобщей арифметики» И. Ньютона.* Если писец может за 8 дней написать 15 листов, сколько понадобится писцов, чтобы написать 405 листов за 9 дней?

Решение. 1 писец – 8 дней – 15 листов;

x писцов – 9 дней – 405 листов.

За 1 день писец напишет $\frac{15}{8}$ л, а за 9 дней: $\frac{15}{8} \cdot 9 = \frac{135}{8}$ л.

1 п = $\frac{135}{8}$ л

x п = 405 л.

$x = 405 : \frac{135}{8}$;

$x = 24$

24 писца.

Ответ. 24 писца понадобится, чтобы написать 405 листов за 9 дней.

5. *Обыкновенные дроби.*

Задача 25 (№715, 6 класс [36, С. 139]). *(Индия, 11 в.).*

Есть кадамба цветок,
На один лепесток
Пчёлок пятая часть опустилась.
Рядом тут же росла
Вся в цвету сименгда,
И на ней третья часть поместилась.
Разность их ты найди,
Её трижды сложи
И тех пчёл на Кутай посади.
Лишь одна не нашла себе места нигде.
Всё летала то взад, то вперёд и везде
Ароматом цветов наслаждалась.
Назови теперь мне,
Подсчитавши в уме,
Сколько пчёлок всего здесь собралось.

Решение. Пусть x – количество всех пчёл;

Кадамба: $\frac{1}{5}x$ часть пчёл; Сименгда: $\frac{1}{3}x$ часть пчёл;

Кутай: $\frac{1}{3}x-\frac{1}{5}x \quad \cdot 3$. Места не нашла: 1 пчела.

Составим уравнение:

$$\frac{1}{3}x+\frac{1}{5}x+3\cdot \ \frac{1}{3}x-\frac{1}{5}x \ \ +1=x$$

$$\frac{1}{3}x+\frac{1}{5}x+x-\frac{3}{5}x+1=x$$

$$\frac{3x+5x+15x-9x+15}{15}=x$$

$$\frac{14x}{15}+\frac{15}{15}=x; \qquad \frac{14x}{15}-x=-1$$

$\frac{14x-15x}{15} = -1;\quad -\frac{x}{15} = -1$

$-x = -1 \cdot 15;\qquad x = 15$

15 пчёл.

Ответ. 15 пчёл всего собралось.

Задача 26 (№1102, 6 класс [36, С. 229]). *Задача аль – Каши.* Плата работнику за 30 дней 10 динаров и платье. Он работал 3 дня и заработал платье. Сколько динаров стоит платье?

Решение. 30 дней = 10 динаров + платье.

3 дня = платье(x)

$x = \frac{3\cdot\ 10+x}{30};\quad x = \frac{10+x}{10}$

$10x = 10 + x;\quad 10x - x = 10$

$9x = 10;\qquad x = 1\frac{1}{9}$

$1\frac{1}{9}$ динаров стоимость платья.

Ответ. $1\frac{1}{9}$ динаров стоимость платья.

Задача 27 (№1199, 6 класс [36, С. 240]). *Из «Арифметики» Л.Н. Толстого.* Муж и жена брали деньги из одного сундука, и в скором времени ничего не осталось. Муж взял $\frac{7}{10}$ всех денег, а жена 690 р. Сколько денег было всего?

Решение. Муж - $\frac{7}{10}$ денег; жена -690 р.; всего денег - x.

$1 - \frac{7}{10} = \frac{3}{10}$ – часть денег, которые взяла жена;

$690 : \frac{3}{10} = \frac{690}{1} \cdot \frac{10}{3} = 2300$ (р.) – денег было в сундуке.

Значит, $2300 - 690 = 1610$ (р.) – взял муж.

Ответ. 2300 рублей было в сундуке.

Задача 28 (№1261, 6 класс [36, С. 246]). На вопрос: «Который час?» - дали ответ: «$\frac{2}{5}$ прошедших часов от полуночи до сего времени равны $\frac{2}{3}$ часов, оставшихся до полудня». Спрашивается, сколько сейчас времени.

Решение. Пусть x часов прошло от полуночи.

Тогда, $(12 - x)$ часов оставшиеся до полудня. Составим уравнение:

$\frac{2}{5}x = \frac{2}{3} \cdot \ 12 - x$; $\frac{2}{5}x = \frac{2}{3} \cdot 12 - \frac{2}{3}x$

$\frac{2}{5}x + \frac{2}{3}x = 8;$ $\frac{6x+10x}{15} = 8$

$16x = 120;$ $x = 7{,}5$

7,5 (ч) = 7ч. 30 мин. утра

Ответ. Сейчас времени 7ч. 30 мин. утра.

Задача 29 (№1340, 6 класс [5, С. 234]). – Скажи мне, учитель, сколько учеников посещают твою школу и слушают твои беседы.

- Вот столько, - ответил учитель. – Половина изучает математику, четверть – природу, седьмая часть приводит время в размышлении, и, кроме того, есть еще три женщины.

Решение. $\frac{1}{2}$ всех учеников изучают математику. $\frac{1}{4}$ всех учеников изучают природу. $\frac{1}{7}$ всех учеников проводят время в размышлениях.

Все ученики вместе: $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{7} = \frac{14+7+4}{28} = \frac{25}{28}$.

Женщины составляют: $1 - \frac{25}{28} = \frac{28}{28} - \frac{25}{28} = \frac{3}{28}$ – всех учеников.

Женщин было трое, значит, всего учеников было: $3 : \frac{3}{28} = \frac{3}{1} \cdot \frac{28}{3} = 28$ (учеников).

Ответ. Всего было 28 учеников.

6. Развитие арифметики натуральных чисел; формирование понятия числа.

Задача 30 (№1273, 6 класс [36, С. 248]). *Задача Бхаскары.* Некто сказал другу: «Дай мне 100 рупий, и я буду вдвое богаче тебя». Друг ответил: «Дай ты мне только 10, и я стану в 6 раз богаче тебя». Сколько было у каждого?

Решение. Пусть x рупий – у 1 друга. Тогда, y рупий – у второго друга. Составим уравнение:

$2\cdot\ \ x-100\ \ =y+100$ – если первый отдаст второму,

$x+10=6\cdot(y-10)$ – если второй отдаст первому.

$2x-200=y+100;\quad y=2x-300$

$x+10=6\cdot\ \ 2x-300-10$

$x+10=12x-1800-60$

$x-12x=-1860-10$

$-11x=-1870;\quad x=170$

Т.к. $x=170$, то $y=2\cdot170-300=40$

Ответ. 170 рупий у 1 друга, 40 рупий у 2 друга.

Задача 31 (№1275, 6 класс [36, С. 248]). *Задача Л. Эйлера.* Мул и осёл несли груз весом в несколько сотен каких – то единиц. Осёл, жалуясь на свою судьбу, сказал мулу: «Мне нужно только сто единиц твоей ноши, чтобы моя стала вдвое тяжелее твоей». На это мул ему ответил: «Да, это так, но если бы ты мне отдал сто единиц из твоей ноши, то я был бы нагружен втрое больше тебя». Какого веса была ноша осла и ноша мула?

Решение. Пусть x мешков нес мул. Тогда y мешков нес осёл.

Составим уравнение:

$2\cdot\ \ x-100\ \ =y+100;\ 2x-200=y+100$

$y=2x-300$ – ноша осла.

$x+100=3\cdot\ \ y-100\ \ ;\ \ x+100=3y-300$

$x+100=3\cdot\ \ 2x-300\ \ -300$ – ноша мула.

$x+100=6x-900-300;\ x-6x=-1200-100$

$-5x=-1300; x=260$.

Т.к. $x=260,$ то $y=2\cdot260-300=220.$

Ответ. 260 мешков нес мул, 220 мешков нес осёл.

Задача 32 (№350, 6 класс [5, С. 56]). Древнегреческими учеными - последователями Пифагора открыты дружественные числа. Так они называли два числа, каждое из которых равно сумме делителей другого числа (не считая самого числа). Пифагорейцы знали только одну пару дружественных чисел – 220 и 284. Проверьте, что эти числа действительно дружественные.

Решение. Делители числа 220: 1, 2, 4, 5, 10, 11, 20, 44, 55, 110.

$1 + 2 + 4 + 5 + 10 + 11 + 20 + 44 + 55 + 110 = 284.$

Делители числа 284: 1, 2, 4, 71, 142.

$1 + 2 + 4 + 71 + 142 = 220.$

Значит, эти числа самые дружественные.

Задача 33 (№1363, 6 класс [5, С. 239]). В клетке сидят фазаны и кролики. У них 19 голов и 62 ноги. Сколько фазанов и сколько кроликов в клетке?

Решение. Пусть x фазанов в клетке. Тогда, кроликов $(19 - x)$. Всего ног 62. Составим уравнение:

$2x + 4 \cdot\ \ 19 - x\ \ = 62;\ 2x + 76 - 4x = 62$

$2x - 4x = 62 - 76; \quad -2x = -14$

$x = -14 :\ -2\ ; \qquad x = 7$

7 фазанов.

Т.к. $x = 7,$ то $19 - x = 19 - 7 = 12.$

12 кроликов.

Ответ. В клетке было 7 фазанов и 12 кроликов.

В 7 классе представлены старинные задачи, по таким темам как: «Формулы сокращенного умножения», «Рациональные дроби», «Решение задач с помощью уравнений». Перейдем к рассмотрению некоторых из них.

7. Формулы сокращенного умножения.

Задача 33 (№387, 7 класс [32, С. 109]). Я купил столько коробок с мылом, сколько было кусков в коробке. Сестра купила на 3 коробки меньше, чем я, но в каждой было на 3 куска больше, чем в купленных мной. У кого больше кусков и на сколько?

Решение. $n \cdot n = n^2$ – столько кусков мыла купил брат;

$n + 3\ \ \ n - 3\ \ = n^2 - 9$ - столько кусков мыла купил сестра;

$n^2 > n^2 - 9$, следовательно, на 9 кусков мыла брат купил больше, чем сестра.

Ответ. На 9 кусков мыла брат купил больше, чем сестра.

Задача 34 (№449, 7 класс [32, С. 118]). Докажите, что произведение двух чисел, каждое из которых есть сумма двух квадратов, само представляется двумя способами в виде суммы двух квадратов:

$$a^2+b^2 \ \cdot \ c^2+d^2 \ = \ ac+bd \ ^2+ \ bc-ad \ ^2;$$

$$a^2+b^2 \ \cdot \ c^2+d^2 \ = \ ac-bd \ ^2+ \ bc+ad \ ^2.$$

Решение. $a^2+b^2 \ \cdot \ c^2+d^2 \ = \ ac+bd \ ^2+ \ bc-ad \ ^2;$

$$a^2c^2+a^2d^2+b^2c^2+b^2d^2=a^2c^2+2acbd+b^2d^2+b^2c^2-2bcad+a^2d^2;$$

$$a^2c^2+a^2d^2+b^2c^2+b^2d^2=a^2c^2+b^2d^2+b^2c^2+a^2d^2;$$

$$a^2+b^2 \ \cdot \ c^2+d^2 \ = \ ac-bd \ ^2+ \ bc+ad \ ^2;$$

$$a^2c^2+a^2d^2+b^2c^2+b^2d^2=a^2c^2-2acbd+b^2d^2+b^2c^2+2bcad+a^2d^2;$$

$$a^2c^2+a^2d^2+b^2c^2+b^2d^2=a^2c^2+b^2d^2+b^2c^2+a^2d^2.$$

Что и требовалось доказать.

8. Рациональные дроби.

Задача 35 (№984, 7 класс [32, С. 251]). *Из «Арифметики» Диофанта (3 в).* Решите уравнение $b+x \ a=\frac{a+b \ x+ \ a+x \ b}{2}$, где x – неизвестное, a и b – известные числа. Определите, при каком условии: а) уравнение имеет единственный корень; б) уравнение не имеет корней; в) корнем уравнения является любое число x.

Решение.

а) $b+x \ a=\frac{a+b \ x+ \ a+x \ b}{2};$

$$ab+ax=\frac{ax+bx+ab+bx}{2};$$

$2ab+2ax=ax+bx+ab+bx;$

$2ax-ax-bx-bx=ab-2ab;$

$ax-2bx=-ab; \qquad -x \ 2b-a \ =-ab; x=\frac{ab}{2b-a};$

Если $a\neq 2b$, то уравнение имеет один корень $x=\frac{ab}{2b-a}$.

б) Если $2b=a, b\neq 0$, то данное уравнение не имеет корней.

в) Если $a = 2b, b = 0$, то корнем данного уравнения является любое число x.

Ответ. а) Если $a \neq 2b$, то уравнение имеет один корень; б) Если $2b = a, b \neq 0$, то уравнение не имеет корней; в) Если $a = 2b, b = 0$, то корнем уравнения является любое число x.

9. Решение задач с помощью уравнений.

Задача 36 (№998 а,б, 7 класс [32, С. 253]). *Задачи С.А. Рачинского.*

б) Дочь ткала одна 4 дня по 3 аршина в день, но потом стала ткать и мать – по 5 аршин в день. Когда их тканья стало поровну, они прекратили работу. Сколько аршин они соткали вдвоём?

в) Я всем своим ученикам дал орехов поровну. Четверо из них съели по 12 орехов, и тогда у этих четверых осталось столько орехов, сколько получил от меня каждый из них. По скольку орехов я раздавал?

Решение. б) $4 \cdot 3 = 12$ (аршин) – соткала дочь за первые 4 дня.

$3x$ – в день ткала дочь, $5x$ – в день ткала мать.

$12 + 3x = 5x$; $\quad 12 = 5x - 3x$;

$12 = 2x$; $\quad x = 6$.

6 дней ткали мать и дочь.

$6 \cdot 3 = 18$ (аршин) – ткала дочь параллельно с матерью;

$5 \cdot 6 = 30$ (аршин) – ткала мать параллельно с матерью;

$12 + 18 + 30 = 60$ (аршин) – они соткали вместе.

Ответ. 60 аршин соткали вместе мать и дочь.

в) $4x - 12 = x$; $\quad 4x - x = 12$;

$3x = 12$; $\quad x = 4$.

$4 \cdot 4 = 16$ (орехов) – раздавали изначально.

Ответ. 16 орехов.

Задача 37 (№157, 7 класс [19, С. 34]). Послан человек из Москвы в Вологду и велено ему проходить во всякий день по 40 вёрст. На следующий день вслед ему был послан другой человек и велено ему проходить по 45 вёрст в день. Через сколько дней второй догонит первого?

Решение. Пусть t дней первый человек будет в пути. Тогда, второй человек будет в пути $t - 1$ день. Значит, $40t = 45 \cdot \ \ t - 1$

$40t = 45t - 45; \quad 5t = 45; \quad t = 9.$

$t - 1 = 9 - 1 = 8$, за 8 дней второй человек догонит первого.

Ответ. За 8 дней второй человек догонит первого.

Задача 38 (№4.42, 7 класс [25, С. 26]). Спросил некто у учителя: «Скажи, сколько у тебя в классе учеников, так как я хочу отдать тебе в ученье своего сына». Учитель ответил: «Если придёт ещё столько же, сколько имею, и полстолько, и четвёртая часть, и твой сын, то будет у меня 100 учеников». Спрашивается, сколько было у учителя учеников?

Решение. Пусть x – учеников было у учителя. Составим уравнение:

$x + x + \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}x + 1 = 100; \quad 2{,}75x = 99; \quad x = 36.$

Ответ. У учителя было 36 учеников.

Задача 39 (№4.43, 7 класс [27, С. 26]). Идёт по морю корабль, на нём 120 человек – мужчин и женщин. Всего они заплатили 120 гривен, причём мужчина платил 4 алтына, а женщина – 3 алтына. Сколько было на корабле мужчин и женщин, если 1 гривна составляет 10 копеек, а 1 алтын – 3 копейки?

Решение. Пусть y – мужчин было на корабле. Составим уравнение:

1) $12y + 9\ \ 120 - y\ \ = 1200; \quad 12y + 1080 - 9y = 1200;$

   $3y = 120; \quad y = 40.$

2) $120 - 40 = 80.$

Ответ. На корабле было 40 мужчин и 80 женщин.

В 8 классе представлены старинные задачи, по таким темам как: «Квадратные уравнения», «Системы уравнений». Перейдем к рассмотрению некоторых из них.

10. Квадратные уравнения.

Задача 40 (№337, 8 класс [33, С. 110]). Задача Безу. Некто купил лошадь и спустя некоторое время продал её за 24 пистоля. При этой продаже он теряет столько процентов, сколько стоила ему лошадь. Спрашивается: за какую сумму он её купил?

Решение. Пусть x – пистолей стоила лошадь.

Тогда, $\frac{x-24}{x} \cdot 100\%$ - потерянные проценты.

$\frac{x-24}{x} \cdot 100 = x;$ $\quad \frac{100x-2400}{x} - x = 0;$

$\frac{100x-2400-x \cdot x}{x} = 0;$ $\quad \frac{-x^2+100x-2400}{x} = 0;$

$x^2 - 100x - 2400 = 0;$

$D = b^2 - 4ac = 100^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2400 = 10000 - 9600 = 400$

$x_1 = \frac{-b+\sqrt{D}}{2a} = \frac{100+20}{2 \cdot 1} = 60;$ $\quad x_2 = \frac{-b-\sqrt{D}}{2a} = \frac{100-20}{2 \cdot 1} = 40.$

Ответ. 60 пистолей или 40 пистолей.

Задача 41 (№921, 8 класс [33, С. 272]). На вопрос о возрасте одна дама ответила: «Мой возраст таков, что если его возвести в квадрат или сначала умножить на 53, а затем из результата вычесть 696, то получится одно и то же». Сколько лет даме?

Решение. $x^2 = x \cdot 53 - 696;$ $\quad x^2 - 53x + 696 = 0;$

$D = b^2 - 4ac = 2809 - 2784 = 25;$

$x_1 = \frac{-b+\sqrt{D}}{2a} = \frac{53+5}{2 \cdot 1} = 29;$ $\quad x_2 = \frac{-b-\sqrt{D}}{2a} = \frac{53-5}{2 \cdot 1} = 24.$

Ответ. 29 лет или 24 года.

Задача 42 (№569, 8 класс [20, С. 132]). Стая обезьян забавляется. Восьмая часть их в квадрате резвится в лесу. Остальные двенадцать кричат на вершине холма. Скажи мне, сколько всего обезьян?

Решение. Пусть x – всего обезьян. Тогда, $\left(\frac{x}{8}\right)^2 + 12 = x;$

$$\frac{x^2}{64} + 12 = x;$$

$$x^2 - 64x + 768 = 0;$$

$$D = b^2 - 4ac = 64^2 - 4 \cdot 1 \cdot 768 = 4096 - 3072 = 1024;$$

$x_1 = \frac{-b+\sqrt{D}}{2a} = \frac{64+32}{2 \cdot 1} = 48;$ $\quad x_2 = \frac{-b-\sqrt{D}}{2a} = \frac{64-32}{2 \cdot 1} = 16.$

Ответ. Обезьян всего 48 или 16.

11. Системы уравнений.

Задача 43 (№ 608 б, 8 класс [33, С. 230]). *Из «Арифметики» Диофанта.* Решить систему уравнений: б) $\begin{aligned} x+y&=20,\\ x^2-y^2&=80. \end{aligned}$

Решение. $\begin{aligned} x+y&=20,\\ x^2-y^2&=80. \end{aligned}$

$\begin{aligned} x&=20-y,\\ x^2-y^2&=80 \end{aligned}$ $\quad\begin{aligned} x&=20-y,\\ (20-y)^2-y^2&=80 \end{aligned}$

$(20-y)^2-y^2=80;\quad 400-40y+y^2-y^2=80;$

$-40y=80-400;\ \ 40y=320;\ \ y=8$

$\begin{aligned} x&=20-y,\\ y&=8 \end{aligned}$ $\quad\begin{aligned} x&=20-8,\\ y&=8 \end{aligned}$ $\quad\begin{aligned} x&=12,\\ y&=8. \end{aligned}$

Ответ. $x=12, y=8.$

Задача 44 (№ 609 а, 8 класс [33, С. 230]). *Из «Алгебры» аль – Хорезми (7-8 вв.).* Решить систему уравнений: а) $\begin{aligned} x+y&=10,\\ xy&=21. \end{aligned}$

Решение. $\begin{aligned} x&=10-y,\\ xy&=21 \end{aligned}$ $\quad\begin{aligned} x&=10-y,\\ (10-y)y&=21 \end{aligned}$

$10-y\ \ y=21;\ \ 10y-y^2-21=0$

$y^2-10y+21=0$

$D=b^2-4ac=10^2-4\cdot 1\cdot 21=100-84=16;$

$y_1=\frac{-b+\ \overline{D}}{2a}=\frac{10+4}{2\cdot 1}=7;\quad y_2=\frac{-b-\ \overline{D}}{2a}=\frac{10-4}{2\cdot 1}=3.$

$\begin{aligned} x_1&=10-y,\\ y_1&=7 \end{aligned}$ $\quad\begin{aligned} x_1&=10-7,\\ y_1&=7 \end{aligned}$ $\quad\begin{aligned} x_1&=3,\\ y_1&=7 \end{aligned}$

$\begin{aligned} x_2&=10-y,\\ y_2&=3 \end{aligned}$ $\quad\begin{aligned} x_2&=10-3,\\ y_2&=3 \end{aligned}$ $\quad\begin{aligned} x_2&=7,\\ y_2&=3 \end{aligned}$

Ответ. $x_1=3, y_1=7; x_2=7, y_2=3.$

Задача 45 (№ 974, 8 класс [33, С. 279]). *Из трактата «Девять отделов искусства счёта» (Китай).* 5 волов и 2 барана стоят 11 таэлей, а 2 вола и 8 баранов стоят 8 таэлей. Сколько стоят отдельно вол и баран?

Решение. Пусть x - цена вола, y – цена барана. Составим уравнения:

$$\begin{cases} 5x + 2y = 11, & (\cdot 4) \\ 2x + 8y = 8 \end{cases}$$

$$+\begin{cases} 20x + 8y = 44, \\ 2x + 8y = 8 \end{cases}$$

$20x - 2x + 8y - 8y = 44 - 8;\ 18x = 36;\ x = 2.$

$5 \cdot 2 + 2y = 11;\ 2y = 11 - 10;\ 2y = 1;\ y = \frac{1}{2}.$

Ответ. Вол стоит 2 таэля, баран стоит 0,5 таэля.

В 9 классе представлены старинные задачи, по таким темам как: «Неравенства», «Уравнения и системы уравнений», «Арифметическая и геометрическая прогрессии». Перейдем к рассмотрению некоторых из них.

12. Неравенства.

Задача 46 (№ 890, 9 класс [34, С. 260]). *Задача Бхаскары (Индия, 12в.).* Докажите, что $\sqrt{10 + \sqrt{24} + \sqrt{40} + \sqrt{60}} = \sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5}.$

Решение. Возведем в квадрат обе стороны:

$10 + \sqrt{24} + \sqrt{40} + \sqrt{60} = ((\sqrt{2} + \sqrt{3}) + \sqrt{5})^2$

$10 + 2\sqrt{6} + 2\sqrt{15} = \left(\sqrt{2} + \sqrt{3}\right)^2 + 2\sqrt{5} \cdot (\sqrt{2} + \sqrt{3}) + 5$

$10 + 2\sqrt{6} + 2\sqrt{15} = 2 + 2\sqrt{6} + 3 + 2\sqrt{10} + 2\sqrt{15} + 5$

$10 + 2\sqrt{6} + 2\sqrt{15} = 10 + 2\sqrt{6} + 2\sqrt{15}$

Что и требовалось доказать.

13. Уравнения и системы уравнений.

Задача 47 (№ 1186, 9 класс [34, С. 291*]). Задача П.Л. Чебышёва.* Мальчик сказал: «Если мне дадут ещё 40 орехов, то у меня будет столько же, сколько у моего брата. А если мне дадут 90 орехов, то у меня станет в 2 раза больше, чем у моего брата». Сколько орехов у каждого?

Решение. Пусть x орехов у мальчика, y орехов у брата. Составим уравнение:

$$-\begin{cases} x + 40 = y, \\ x + 90 = 2y \end{cases}$$

$-50 = -y,\ \ y = 50$

50 орехов у брата.

$x+40=50, \quad x=10$

10 орехов у мальчика.

Ответ. 10 орехов у мальчика и 50 орехов у брата.

Задача 48 (№ 1218, 9 класс [34, С. 295]). *Задача Бега – Эддина (Иран, 16 в.).* Заиду обещана награда в виде большей из двух частей, дающих в сумме 20, произведение же этих частей 96. Как велика награда?

Решение.

$$\begin{matrix} a+b=20, \\ ab=96 \end{matrix} \qquad \begin{matrix} a=20-b, \\ (20-b)b=96 \end{matrix} \qquad \begin{matrix} a=20-b, \\ 20b-b^2=96 \end{matrix}$$

$b^2-20b+96=0$

$D=b^2-4ac=20^2-4\cdot1\cdot96=400-384=16;$

$b_1=\frac{-b+\sqrt{D}}{2a}=\frac{20+4}{2\cdot1}=12; \quad b_2=\frac{-b-\sqrt{D}}{2a}=\frac{20-4}{2\cdot1}=8.$

$$\begin{matrix} a_1=20-b_1, \\ b_1=12 \end{matrix} \qquad \begin{matrix} a_1=20-12, \\ b_1=12 \end{matrix} \qquad \begin{matrix} a_1=8, \\ b_1=12 \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} a_2=20-b_2, \\ b_2=8 \end{matrix} \qquad \begin{matrix} a_2=20-8, \\ b_2=8 \end{matrix} \qquad \begin{matrix} a_2=12, \\ b_2=8. \end{matrix}$$

Ответ. 12

14. Арифметическая и геометрическая прогрессии.

Задача 49 (№ 472, 9 класс [34, С. 132]). *Задача Пифагора (580-500 гг. до н.э.).* Найдите сумму первых нечётных натуральных чисел:

$$1+3+5+\dots+\ 2n-1\ .$$

Решение. Сумма n - первых членов арифметической прогрессии:

$$S_n=\frac{2a_1+d(n-1)}{2}\cdot n.$$

$a_1=1, d=2,$ значит $S_n=\frac{2\cdot1+2(n-1)}{2}\cdot n=\frac{2+2n-2}{2}\cdot n=n^2$. **Ответ.** n^2.

Таким образом, проанализировав учебники математики на наличие исторических задач, можно сказать, что задачи с историческим содержанием представлены не во всех современных учебниках математики в необходимом количестве. В них представлены не все типы задач в соответствии с Федеральным государственным образовательным стандартом основного общего образования. В учебниках С.М. Никольского старинные задачи затронуты из всех тем в содержании Примерной программы по математике, раздела «Математика в историческом развитии». В учебниках Н.Я. Виленкина приведены исторические задачи не ко всем необходимым темам. В Учебниках И.И. Зубаревой и А.Г. Мордковича, как и было отмечено, исторических задач мало. Типы задач, которые отсутствуют в рассмотренных учебниках, для изучения линии «Математика в историческом развитии» в основной школе мы рекомендуем подобрать из таких дополнительных источников, как: И.И. Барвин, Е.А. Фрибус [2]; К.А. Малыгин [22]; Л.Л. Николау [31]; Я.И. Перельман [38]; Г.И. Глейзер «История математики в школе»; J. Fauvel, J.V. Maanen [49]; T.L. Heath [50]; L.A. Hodgkin [51]; N. Kretzmann, G. Nuchelmans [52]; Lucas N. H. Bunt, S. Phillip Jones [53] и др.

§ 4. Формы, методы и средства обучения элементам истории математики в курсе алгебры основной школы

Исторический материал необходим учащимся в подростковом возрасте. Так же он помогает учащимся углублять знания, формировать у них интеллектуальные умения.

Введение элементов историзма в обучение математике с точки зрения феномена множественности культур способствует осознанию учениками того, то что математика – наука, над формированием которой работали представители различных культур и народов. История математики втягивает в процесс познания человеческие чувства, в отсутствии которых неосуществим поиск истины [44, С. 65].

Т.А. Иванова отмечает, что *средства и формы* изучения исторических сведений многообразны: *исторические справки*, которые приводит учитель по ходу изложения материала, доклады (в том числе и на семинарских занятиях); *математические газеты, математические листки*, и т.д. В содержательном плане это могут быть история какого – либо открытия; зарождение и развитие понятия, метода; биография ученого – математика; исторические и старинные задачи; происхождение того или иного математического термина и др.

Каждый педагог знает, какую заинтересованность, оживленность вызывают короткие экскурсы в историю математики, *рассказы о биографиях* знаменитых математиков, об истории формирования отдельных терминов и определений, различных способов решения задач. Школьники с энтузиазмом решают древние, *исторические задачи*, делают сообщения на исторические темы. Исследование опыта работы учителей показывает то, что элементы истории математики, введенные в процесс обучения, способствуют не только развитию интереса к изучению математики, но и к истории математики, стимулируют учащихся самостоятельно читать литературу по истории математики [13].

По мнению Л.М. Фридмана, элементы истории математики включались ранее в обучение, до появления в программе линии «Математика в историческом развитии», очень неуверенно в абсолютно малом количестве, и только в виде какого – либо приложения. Исключительно только по этой причине у множества учащихся отсутствуют правильные взгляды о математике как о науке, они не осознают главных фактов истории её развития, её современного состояния и проблем. Все данное болезненно влияет на отношении учащихся к математике как к учебному предмету, на достижение результатов в их учебной деятельности.

Тем не менее, *при внедрении элементов историзма* в школьный курс математики автор исходит из следующих положений:

1. Изучение нового раздела, темы или определения следует начинаться, как правило, с краткого *исторического введения*, в котором следует продемонстрировать, как данное определение исторически возникло и под воздействием каких практических или сугубо математических потребностей оно появилось и развивалось.

2. Нужно раскрыть ученикам то, что *математические определения* вводятся, меняются и формируются на основе внутренних противоречий в

самой математике и, основным образом, под воздействием потребностей человеческой практики. Ученики должны видеть связь математики с производством, техникой и иными науками, многие из которых формируются на основе достижений математики. Под воздействием требований других наук и техники ученые - математики обязаны решать новейшие задачи, формировать новые способы решения задач, которые обогатят саму математику.

3. Историю математики необходимо применять *с целью объяснения логики* её формирования. Чтобы понять, почему в курсе математики исследуются те или другие определения, теории. Только лишь понимание истории этих определений способно предоставить полное объяснение.

4. Использование историзма в обучении математике дает возможность формировать *проблемные ситуации*. В ряде случаев уместно применять отдельные факты истории математики с целью постановки перед учащимися проблем, на самом деле появившихся в математике, а затем рассказать, как данные проблемы решались.

5. Использование элементов историзма в курс математики обязано реализовывать в органической связи с содержанием исследуемого материала. Не следует вводить в курс математики какие – то специальные темы либо разделы, посвященные истории математики. Исторические экскурсы следует предоставлять при изучении учебного материала по мере необходимости в этом.

По мнению Л.Д. Кудрявцева «обучение должно быть построено таким образом, чтобы в его процессе учащийся, получая знания, удивлялся и восхищался мудростью тех, кто принес людям эти знания, удивлялся и восхищался гармонией (а там, где ее нет, дисгармонией) вещей, с которыми его знакомят, чтобы он по существу оценивал смысл и значение приобретенных знаний... Несомненно то, что достичь данного можно, лишь широко применяя в обучении математике её историю» [47, С. 73 - 74].

Согласно программным материалам, *сведения из истории математики*, которые сообщаются *на уроках*, по мнению Г. Самойлика, могут быть:

1) *связаны с содержанием урока* (т.е. данные, требующие наиболее полного и ясного представления программного материала);

2) *не связаны с содержанием урока*, однако применяемые учителем для учебно-воспитательных задач (данные из биографии ученых, о формировании и значении определений, истории открытий и т. д., которые будут служить повышением интереса и воспитания личности, способствующие гуманизации предмета).

Автор обращает внимание на то, что учителю следует предварительно *определить количество сведений*, которые будут сообщаться на уроке, применять материалы из истории математики в конкретных «рамках».

Содержание материала следует установить исходя из: связи используемого материала с материалом урока; времени, которое отводится на сведения; уровня подготовки учеников; возраста учеников.

Эффективность применения исторических сведений в основном зависит от их содержания. Объем данных сведений может быть разным. Тут необходимо учитывать возраст учеников, воспитательную и образовательную ценность материала, подготовку учеников к восприятию исторического материала.

Г. Самойлик предлагает различные *формы работы на уроке* с историческими сведениями:

1. *Исторические обзоры* по отдельным вопросам в виде краткой беседы.

2. *Решение задач* из классических и старинных сборников.

3. *Отдельные исторические замечания* при изучении программного материала или при решении задач.

4. *Наглядные пособия в виде хронологических и иных таблиц, чертежей, рисунков, схем, портретов* выдающихся математиков и т. д.

Автор отмечает, что эти пособия могут быть включены в постоянное оформление кабинета или показываться учащимся только при изучении соответствующего материала.

5. *Сообщения* о наиболее важных исторических темах, используемых чаще всего в форме рассказа.

Г. Самойлик обращает внимание на то, что элементы лекционного изложения можно применять уже в 7-8-х классах.

6. *Проведение беседы об истории развития математики за весь курс* как основной, так и общеобразовательной школы.

В ходе рассказов из истории математики учитель может использовать различные наглядные пособия, например, географическую карту. Тогда в ходе рассказа учитель может показывать на географической карте страны, ученые которых приняли участие в разработке данной теории. Этот метод к предоставлению материала обеспечит усвоение мысли о том, что у науки нет географических границ, а успехи её - достояние всех людей, живущих на нашей планете.

7. Проблемное изложение, которое является наиболее ценным методическим приемом. Объяснение нового материала можно начать постановкой проблемы, которая логически вытекает из ранее пройденного материала и ведет к необходимости наиболее высшей ступени познания окружающего мира. Данный метод к подаче исторического материала, вызывает наибольший интерес учащихся к математике.

8. *Самостоятельная и исследовательская работы учащихся*. Знакомство с историческим материалом должно предполагать непосредственное участие самих учеников в этой работе.

В качестве различных *форм вовлечения* их в *самостоятельную и исследовательскую* работу Г. Самойлик выделил:

А. Семинары, в центре которых - обсуждение и знакомство с историей и развитием конкретных проблем. Эта форма предполагает *самостоятельную подготовку учащихся к сообщениям или докладам* и способствует развитию возможностей учеников и требует формирования умения поиска нужной информации и ее анализа, обобщения полученных сведений и способности доступным образом довести их до аудитории.

Автор так же обращает внимание на то, что чтобы приучить учащихся к самостоятельности, задания следует постоянно усложнять. Так, *сначала* ученикам могут быть предложены *готовые тексты выступлений, затем - темы сообщений и список рекомендуемой литературы с указанием страниц*.

Б. Прослушивание и обсуждение нескольких докладов, объединенных общей идеей представляет собой не что иное, как *урок-конференцию*.

В. Еще одной формой знакомства учащихся с историей математики является их *активное участие в художественном оформлении этих уроков*. Это и выполнение различных наглядных пособий с красочными рисунками и чертежами, и ведение исторического календаря, и вывешивание списка литературы из истории математики по данной теме, и выпуск стенных газет с историческими фактами, занимательными старинными задачами и т. д.

Г. Самойлик подчеркивает, что исторический материал может быть как *частью урока*, так и *материалом целого урока*, поэтому учитель может подготовить *лекцию по определенной теме*. Это даст учителю возможность более связанно преподнести материал учащимся, что будет способствовать ясному пониманию истории вопроса.

Подводя итоги по использованию элементов историзма на уроках математики, автор отмечает, что такое обучение будет способствовать развитию у учащихся прочного и устойчивого интереса к предмету, более глубокому и осознанному усвоению математики, не прибегая к внеклассным формам работы.

К другим *формам учебно-воспитательной работы в школе*, дающим возможность приобщить учащихся к *истории математики*, можно отнести:

1) историко-математические вечера; 2) недели математики; 3) математические олимпиады; 4) тематические экскурсии в музеи.

Эти формы учебной работы традиционно интересны ученикам, а, следовательно, дают педагогу возможность повысить качество знаний и расширить кругозор учащихся.

Г. Самойлик утверждает, что применение форм учебной работы, которые позволяют использовать исторический материал при обучении математике, не ограничивает возможность работы с учащимися. Найти данные возможности и установить их на служение формирования мировоззрения и мышления учеников, увеличения их кругозора через исторический материал, в этом и состоит талант настоящего учителя [41 , С. 1-4].

Знаменитый французский математик, физик и философ Жюль Анри Пуанкаре утверждал, что при выборе методов преподавания история науки должна быть основным проводником, потому как любое обучение делается красочнее, богаче от любого соприкосновения с историей изучаемого предмета.

В своей статье [23] Н.А. Медникова показывает, как применяет элементы истории математики при обучении с целью формирования у учащихся познавательного интереса. Автор указывает, что *беседы* по истории математики лучше проводить с помощью *инсценировок, используя практические упражнения*. Помимо этого на уроках математики ею рекомендуется применять разные *дидактические игры*. Ученики могут принимать наиболее активное участие на уроках математики и готовить краткие *сообщения и доклады*, самостоятельно подбирая исторический материал из дополнительной литературы.

Таким образом, в данном параграфе нами рассмотрены различные формы, методы и средства обучения элементам истории математики в курсе алгебры основной школы, раскрытые такими авторами, как: Т.А. Иванова, Н.А. Медникова, Д.В. Смолякова, Л.М. Фридман, Г. Самойлик, и применение которых будет способствовать развитию у учащихся прочного и устойчивого интереса к предмету, более глубокому и осознанному усвоению математики, не прибегая к внеклассным формам работы.

Выводы по первой главе

1. Определена роль элементов истории математики в обучении учащихся основной школы. Установлено, что история математики как наука представляет собой важную составляющую всеобщей истории; выполняет: мировоззренческую, методологическую, общекультурную, развивающуюся, мотивационную, воспитательную, интегративную функции. Применение элементов истории математики в общеобразовательной школе является эффективным средством повышения мотивации к изучению математики учащимися; способствует улучшению уровня математической культуры учащихся, а также уровня их общей культуры.

2. Рассмотрена общая характеристика линии «Математика в историческом развитии». Определено, что раздел «Математика в историческом развитии» изучается в основной школе с целью развития у учащихся взглядов о математике как части человеческой культуры; формирования культурно-исторической среды обучения учащихся; улучшения их математической подготовки, развития творческих способностей учащихся и повышения мотивации к изучению математики.

3. Проведен анализ содержания линии «Математика в историческом развитии». Проанализировав учебники математики на наличие исторических задач, можно сказать, что задачи с историческим содержанием представлены не во всех современных учебниках математики в необходимом количестве. В них представлены не все типы задач в соответствии с Федеральным государственным образовательным стандартом основного общего образования.

4. Раскрыты формы, методы и средства обучения элементам истории математики в курсе алгебры основной школы. Установлено, что их применение будет способствовать развитию у учащихся прочного и устойчивого интереса к предмету, более глубокому и осознанному усвоению математики, не прибегая к внеклассным формам работы.

Глава II. МЕТОДИЧЕСКИЕ АСПЕКТЫ ОБУЧЕНИЯ ЭЛЕМЕНТАМ ИСТОРИИ МАТЕМАТИКИ В КУРСЕ АЛГЕБРЫ ОСНОВНОЙ ШКОЛЫ

§5. Методические рекомендации по обучению элементам истории математики в курсе алгебры основной школы

Вопросом использования исторического материала в математическом образовании занимались такие педагоги, как В.В. Бобынин, Г.И. Глейзер, И.Я. Депман, современные методисты Ю.А. Дробышев, Е.Ю. Малькова, И.Б. Фомичёва, О.Н. Макара и др. Они предлагали знакомить учащихся с историей науки для более глубокого её изучения.

Действующие программы по математике содержат познавательные исторические сведения, но их использование часто не имеет чёткого целеполагания, полноты и систематичности. Как правило, они фрагментарны, неорганично вплетены в урок, отделены от основного учебного материала.

О.Н. Макара, анализируя методическую литературу, выделил следующий *объём исторического материала, доступного для изучения в основной школе*: сведения из истории математических понятий, краткие факты из истории математики, справки о жизни учёных математиков, практическое применение старинных приёмов счёта, изучение понятия по версии его происхождения. Кроме того, отдельную группу представляют текстовые задачи с историческим содержанием, старинные задачи, задания, где соприкасаются история и математика (оперирование над знаменательными датами, фактическими сведениями из истории отдельной личности, страны, мира).

Краткие сведения из истории возникновения математических терминов в практике учителей используются очень редко.

Математические термины (понятия) – слова или словосочетания, имеющие специальный математический смысл [37], которые способствуют расширению кругозора учащихся, более глубокому осмыслению математических понятий, так как позволяют обратиться к истокам их возникновения; установлению простейших причинно-следственных связей (школьники отвечают на вопросы: где, когда, почему, для чего появилось то или иное понятие).

В учебниках по математике имеется ряд терминов, к которым для более полного понимания необходимо давать исторический комментарий (этимологическую справку, познавательные сведения из истории их возникновения и т.п.).

Учащиеся на уроках знакомятся и с *увлекательными фактами из жизни учёных-математиков*. В рамках личностно ориентированного подхода к образованию это свободное самосовершенствование учащихся, развитие их характера, нравственно-патриотического воспитания на примерах выдающихся личностей. Учитель дает стимул детям в поисках новых сведений об открытиях в математике и в других науках, в особенности у учёных Древней Греции, эпохи Возрождения. В классе может быть *сформирован краткий архив материалов об знаменитых математиках*. Кроме того, в процессе внеклассной работы можно *оформить карту*, на которой отмечают, где и в какое время жили известные математики.

Занимательный практический материал по применению *древнейших приёмов счёта* возможно добавлять в *соответствующие темы уроков*. Примером является пальцевый счёт парами, тройками, шестёрками, девятками, дюжинами, приёмы умножения на пальцах и др. О связи счёта на пальцах и современного исследования арифметики И.Я. Депман писал: «10 пальцев – это стандартное множество, с которым сравнивал первобытный человек всякое иною любое множество. Историческое значение пальцев мы вспоминаем тогда, когда рекомендуем учащемуся считать по пальцам». Данная практика показывает, что у учащихся существуют различные возможности к исследованию вопросов математики. Возможно, именно примеры древнего счёта направят учеников к лучшему запоминанию материала.

Приведем *пример* умножения на пальцах.

Задача. Найти произведение $6 \cdot 9$.

Решение. Вытянем на одной руке 4 пальца, а на другой 1 палец. Загнутыми остаются на первой руке 1 палец, а на второй 4 пальца. Сумма чисел вытянутых пальцев 5 даёт десятки искомого произведения, произведение чисел загнутых пальцев 1 и 4, равное 4, и есть число единиц произведения: $6 \cdot 9 = 5 \cdot 10 + 4 = 54$ [8, С. 26 - 28].

Так же О.Н. Макара отмечает некоторые методические особенности работы над историческими сведениями при обучении математике. Так, автор рекомендует *при подготовке к урокам*, на которых есть возможность применять исторические сведения, придерживаться следующего *плана*.

1. Определить роль исторического материала при изучении темы.
2. Рассмотреть, с какими элементами этой темы, можно связать применение исторического материала.
3. Отметить роль исторического материала на уроке, его использование в течение всего урока или частично.
4. Обдумать мотивационно-проблемную ситуацию, благодаря которой можно показать значение и потребность изучения материала темы.
5. Выбрать из известных средств обучения те, какие можно применить на данном уроке более результативно, предоставят возможность развития личностных компетентностей учащихся.
6. Спланировать внеурочную деятельность учащихся, в процессе которой могут быть более полно рассмотрены эти вопросы. В качестве обобщения после изученных тем можно провести обобщающее мероприятие, оформить стенгазету.

Автор приводит пример *задания-теста* «Что ты знаешь об истории математики?»

1. Какое геометрическое тело носит имя Хеопса?

а) пирамида; б) конус; в) цилиндр.

2. Где родился и жил Архимед?

а) Древняя Греция; б) Россия; в) Англия.

3. В какой стране появилось обозначение для 0?

а) Индия; б) Италия; в) Древняя Греция.

4. Кто автор первого в России учебника по арифметике?

а) Магницкий Л.Ф.; б) Ломоносов М.В.; в) Рачинский С.А.

5. Древнее название миллиона на Руси.

а) темень; б) толпа; в) тьма.

6. Кто из учёных не был математиком?

7. а) Пифагор; б) Колумб; в) Платон.

8. При помощи чего обозначались числа в Древней Руси?

а) букв; б) чёрточек; в) арабских цифр.

9. Как называются древние счёты?

а) абак; б) вершок; в) титло.

10. Какой из перечисленных мер измеряли длину?

а) сажень; б) пуд; в) аршин [18, С. 23 - 26].

В учебно – методическом пособии Д.В. Смоляковой выделены *примеры использования учебных заданий с элементами истории математики в учебном процессе*. Рассмотрим, как можно включить исторические задания в учебный процесс.

Пример 1. На уроке создается ситуация, где ученики подталкиваются к обращению к заданиям с элементами истории математики. Например, в 7 классе, после изучения формулы квадрата суммы $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$, учащимся предлагается игра «Лабиринт» (Рис. 2), как средство самоконтроля.

Ученикам предоставляется такая *инструкция*: странствуя по лабиринту, не забывайте, для того чтобы открыть заключительную дверь, вам следует собрать 6 драгоценных камней. Вы найдете их в том случае, если только правильно выполните задания. У каждого входа нужный вам камень располагается с правой стороны от двери (согласно движению), в том случае, если к данному времени получается полный квадрат разности, и с левой стороны, если – квадрат суммы. Камни, которые вы соберете, дадут вам слово.

Ученики приходят к слову «гномон».

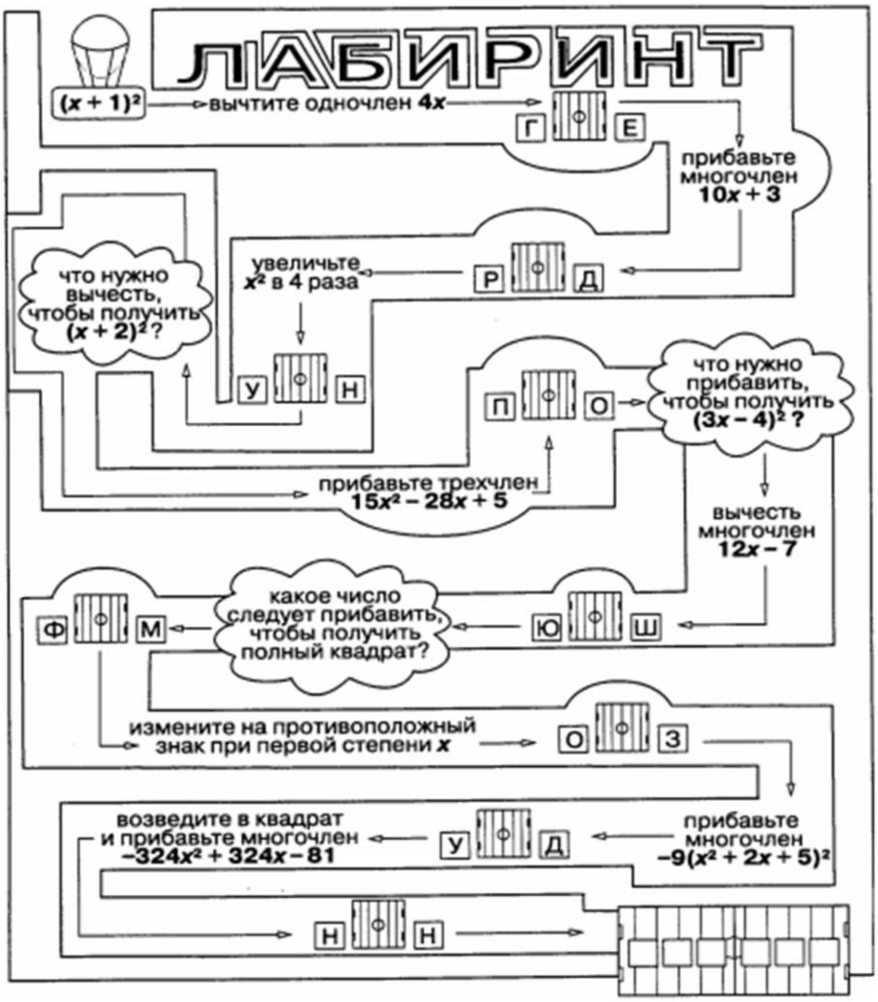


Рис.2. Игра «Лабиринт».

Они могут поработать с серией заданий «от чисел к тождествам». Такие задания можно рассмотреть в классе, либо рекомендовать в качестве индивидуальных заданий с дальнейшей презентацией на уроках. Приведем пример автора.

Задание. «Способы представления чисел фигурами уходят корнями в математику Древнего Вавилона, Греции, Египта. В те времена никто не расчерчивал папирус, глиняные таблички или пергамент на клеточки – люди составляли рисунки из точек. Нам же будет удобнее использовать для рассказа бумагу в клетку.

В Древней Греции число, равное произведению двух натуральных чисел, называлось плоским числом.

Оно изображалось соответствующим количеством точек на плоскости в узлах прямоугольной решетки. Например, число $12 = 4 \cdot 3$ представлено на рисунке 3 в виде решетки из 12 точек.

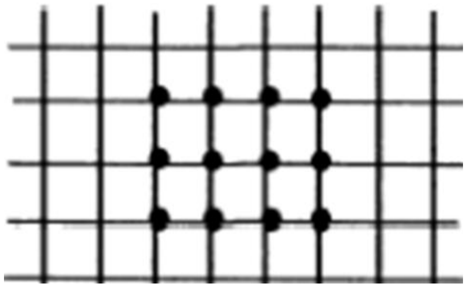


Рис. 3. Изображение числа 12
в Древней Греции.

Плоское число изображалось и таким образом: прямоугольником на клетчатой бумаге, который содержит соответствующее количество клеток, как и показано на Рис. 4. Прямоугольная решетка становится квадратной, если множители равны между собой.

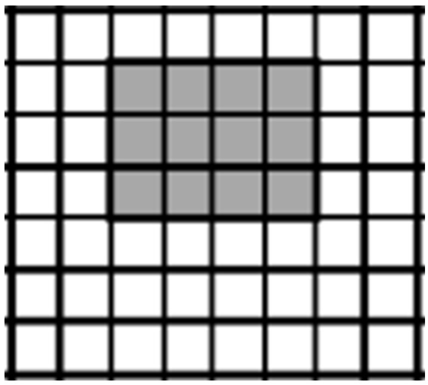


Рис. 4. Изображение числа
12 в Древней Греции.

Такое плоское число называют квадратом. В наше же время данное название «плоское число» не употребляют, а вот слово «квадрат» не только обозначение фигуры, но и числа, которое сохранилось и по сей день».

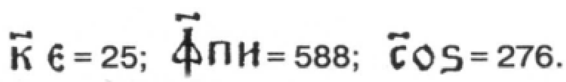
Пример 2. Задания с элементами истории математики стимулируют изучение материала. Например, серьезной проблемой преподавания математики в основной школе автор считает проблему организации повторения в 5 классе. Оно должно актуализовать знания, которые уже есть у учеников, и обогащать их. Помимо этого, это повторение должно содействовать формированию общих интеллектуальных умений учеников, формировать у них настроение успеха.

Д.В. Смолякова приведем примеры трех таких заданий [43].

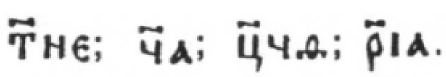
Задание 1. «Цифры, которые употребляем мы, чтобы обозначать числа, называются арабскими. Греки и римляне использовали для изображения чисел буквы своего алфавита. У славян так же была своя система записи. В славянской нумерации над буквами славянского алфавита, которые должны были изображать числа, ставился особый знак ~ «титло» (Рис. 5). Если число записывалось двумя или тремя буквами, то титло ставилось над одной из букв.

Рис. 5. Славянская нумерация.

Рассмотрим примеры записи чисел, которые меньше 1000, в славянской системе счисления:



1. Запишите в этой же системе счисления числа: 252, 354, 78,23, 199.
2. Прочитайте числа:



Задание 2. «В римской системе счисления используются цифры:

I	V	X	L	C	O	M
1	5	10	50	100	500	1000

Когда написано несколько римских цифр рядом, то число, которое обозначается ими, читается по следующим правилам:

1. Если цифра с большим значением стоит слева от цифры с меньшим значением, то их значения складываются.

2. Если цифра с меньшим значением стоит слева от цифры с большим значением, то из большего значения вычитается меньшее. При этом меньшая цифра не должна повторяться.

3. Если рядом стоят две одинаковые цифры, то их значения складываются.

4. Одна и та же цифра может быть написана подряд не более трех раз.

Например, число 6 можно записать так: VI (V + I); число 4 так: IV (V – I);
число 161 – CLXI;
CCLXXXIII = 200 + 50 + 30 + 3 = 283; XLIX = 50 – 10 + 10 – 1 = 49».

Вместе с этим, Д.В. Смоляковой приводит далее другие *примеры использования учебных заданий с элементами истории математики в учебном процессе*.

Пример 3. На основе тех материалов, которые помещены на сайтах в Интернете или по предложенной литературе, ученики самостоятельно составляют доклады по истории математики; справочники, дидактические игры и др.

Пример 4. Материалы по истории математики являются средством систематизации, свертывания знаний учащихся об изученном.

Например, после изучения темы «Рациональные числа» учащимся автором предлагается игра, где рассматриваются старинные задачи. С помощью их решений учащиеся знакомятся со старинными мерами веса, длины, денежными измерениями. Это даст возможность ученикам использовать свои имеющиеся знания о рациональных числах в любой ситуации.

Д.В. Смоляков приводит примеры *задач*.

1. «Папаха боярская с сапогами стоят без 4 грошей 6 рублей с полтиной. Могу и обмен устроить: за папаху давай 15 лаптей, а за сапоги 3 лаптя. Покупай-ка одни сапоги, а папаху я сам поношу. Почем папаха?

Рубль	2 полтины
Полтина	50 коп.
Пятиалтынный	15 коп.
Алтын	3 коп.
Гривенник	10 коп.
Грош	$\frac{1}{2}$ коп.
Полушка	$\frac{1}{4}$ коп.
2 деньги	1 коп.».

2. «В бочонке 32 фунта огурцов. Полбочонка продана по четыре гривенника с четырьмя грошами за шесть фунтов, а другая половина – по полтине за восемь фунтов. Есть еще одна бочка огурцов. Нужно купить её.

Кадь	14 пудов
Берковец	10 пудов
Пуд	40 фунтов
Доля	0,044 г.» [44, С. 18-31].

В статье «Об использовании сведений из истории математики на уроках» из научного журнала «Молодой ученый» Е.Ю. Малькова и И.Б. Фомичёва рассматривают вопрос *введения элементов истории математики* двумя путями:

– применение тем из истории математики по заранее изготовленному плану, где используются разные методические приемы, такие как: беседа по историческому материалу, рассмотрение ранее подготовленных учащимися докладов, решение старинных задач и др.

– внеклассная работа: выпуск специальных газет, календарей, альбомов, стендов, историко-математические кружки, проведение историко-математических вечеров и др.

Чтобы сделать наиболее полные обобщения и выводы, необходимо исторические сведения сообщать при закреплении или повторении пройденной темы. Более зачастую используемыми *методическими приемами* сообщения исторического материала являются: рассказ, беседа, проблемное изложение, лекция, исследовательская работа учеников [46, С. 477-479].

Так же, в учебно – методическом пособии Д.В. Смоляковой представлены основные содержательные линии школьного курса математики (такие как: числовые системы, тождественные преобразования, уравнения и функции) и определено значение, которое могут сыграть задачи с элементами истории математики при усвоении данных тем. Автор демонстрирует, каким образом включать исторический материал в различные темы при обучении математике.

5 класс. Классификация знаний о множестве натуральных чисел. Главной целью данной темы считается классификация и обобщение сведений о натуральных числах, которые школьники приобрели в начальной школе.

Учащимся предлагаются *небольшие задания*, которые построены на базе *исторических фактов*. С помощью этих заданий, учащиеся повторяют исторический путь поиска позиционной записи натуральных чисел, давая оценку разным этапам и продолжая знакомство с одним из замечательных открытий в истории математики – позиционной записи натуральных чисел.

5 класс. Действия над натуральными числами. Задачи, где рассматривается *сравнение старинных методов действий над натуральными числами с современными*. Задания помогают ученикам актуализировать знания о свойствах математических действий, создать алгоритмическую культуру обучающихся, сформировать способность составлять план и реализовывать контроль учебной деятельности.

5 класс. Десятичные дроби и действия над ними. В курсе математики основное место занимаем изучение десятичных дробей и действий над ними. *С помощью заданий* применение элементов истории математики, в том числе и изучение истории развития обозначений десятичных дробей может быть средством *выявления их значительных свойств, а анализ метрических концепций граней* является аргументом изучения десятичных дробей.

6 класс. Целые числа и основные понятия. Целью данной темы считается изучение множества целых чисел и действий над ними.

Элементы истории формирования знаний об отрицательных числах обосновывают изучение данных чисел. *Задания,* которые связаны с а*нализом алгоритмов выполнения операций над целыми числами*, известные в истории математики, является средством развития умения разрабатывать план и контролировать свою мыслительную работу, умения работать с данными, которые представлены в разных формах.

6 класс. Делимость чисел. Основной целью данной темы является увеличение и более полное раскрытие знаний о свойствах натуральных чисел; знакомство учеников с основными определениями, которые связаны с делимостью чисел; знакомство с признаками делимости, а так же развитие навыков *применения этих признаков* при помощи *заданий*.

Элементы истории формирования знаний об отрицательных числах могут аргументировать *задания на исследование данных чисел*. Элементы истории математики знакомят учащихся с совершенными числами, числами Ферма, решетом Эратосфена, и т.д.

6 класс. Рациональные числа. Ученики продолжают знакомиться с числовыми системами. Выполняя *задания* с элементами истории математики, развивается *умение переводить данные с одного языка в другой.* Старинные задачи помогают развивать интерес учащихся, развивают творческие условия на уроках, расширяют их круг интересов, *знакомят со способами решения задач*.

6 класс. Проценты. Текстовые задания, выстроенные на основе исторических фактов, мотивируют исследование *процентов, демонстрируют их использование в решении заданий*, помогают понять значение термина «процент».

7 класс. Мотивация изучения алгебры. В данной теме элементы истории математики предоставляют возможность обучающимся проследить историю формирования алгебры, формирование языка алгебры, изменение предмета ее изучения.

7 класс. Тождества сокращенного умножения. Задачи с элементами истории математики формируют условия для знакомства с доказательствами тождеств, которые вошли в историю математики, содействуют формированию умения кодировать данные разными способами, вырабатывают способность понимать и принимать другие решения.

Рассматривая информацию о тождествах из «Начал» Евклида, школьники знакомятся с геометрической алгеброй. Помимо этого, учащиеся могут принять участие в формировании тождеств, исследуя «фигурные числа», формируя этим общие умения: *исследование, сравнение, обобщение*.

8 класс. Действительные числа. Целью данной темы считается введение множества иррациональных чисел, систематизация знаний о различных подмножествах множества действительных чисел.

Анализ проблем, которые приводят к внедрению иррациональных чисел, в том числе и числа $\sqrt{2}$, содействует сознательному подходу к их исследованию, развивает открытую познавательную позицию школьников. Анализ разных приложений числа $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$, вошедших в историю математики, дает возможность разглядеть приложения математики в разных сферах.

8 класс. Квадратные уравнения. Основной целью данной темы является метод решения уравнений и задач, которые и привели к квадратным уравнениям в истории математики.

Сравнение способов, которые представляют правила решения квадратных уравнений, дает возможность понять преимущества применения современной символики, основательнее понять идеи решения разных квадратных уравнений, обучиться переходить от риторической алгебры к символической.

9 класс. Функция. *С помощью специальных текстов* школьникам предлагается изучить историю формирования понятия «функция», узнать имена ученых, внесших вклад в формирование данного понятия. Учащиеся могут рассмотреть разные определения понятия «функция», раскрыть в чем их различие, этим обучающиеся акцентируют существенные особенности этого определения.

9 класс. Системы уравнений. При помощи данной темы школьники могут познакомиться *с методами решения систем уравнений*, вошедших в историю [43, С. 35-36].

О.Н. Макара в своей статье «Задачи с историческим содержанием в обучении математике» пишет, что старинные задания могут быть предложены учащимся не только на уроках математики, но и *во внеурочных занятиях*. Так же автор *приводит примерный план работы над задачей с историческим содержанием*:

1. Исследование сюжетной линии задачи. На данном этапе обнаруживаются увлекательные исторические факты, ученики делятся знаниями по описываемой исторической теме.

2. Исторический экскурс, который связан с введением учеников в содержание задачи. На данном этапе описывается историческая эпоха, факты, о которых идет речь в задаче.

3. Лексическая работа, в которой выявляются и объясняются незнакомые, устаревшие слова.

4. Прогнозирование результатов. Учащиеся предполагают результат будущих вычислительных действий в соответствии с содержанием задачи.

5. Поиск решения задачи, т.е. с анализом, построением модели и решением согласно традиционной схеме.

6. Учебно-познавательный анализ задачи и ее решения связаны со сравнением разных способов решения задачи. Тут раскрывается ее познавательный аспект, отмечаются воспитательные моменты, приводятся примеры,

которые важны для нравственного совершенствования младших школьников [17, С. 36 - 38].

Таким образом, в данном параграфе рассмотрены методические рекомендации по использованию элементов истории математики в основной школе.

§ 6. Наборы задач с элементами истории математики для учащихся 7 классов основной школы

В данном параграфе приведем наборы задач для учащихся 7 класса, которые взяты из старинных сборников и учебников алгебры, в соответствии с Федеральным государственным образовательным стандартом основного общего образования и Примерной программой по математике. От учеников их решение требует не только математических знаний, но и умения логически мыслить, находить нестандартные пути решения.

Помимо этого, эти задачи помогают учителю проводить небольшие экскурсы в историю развития математики, рассказать о составителях этих задач, о тех, кем сегодня гордится народ [31, С. 67].

В 7 классе представлены старинные задачи, по таким темам как: «*Формулы сокращенного умножения*», «*Рациональные числа*», «*Решение задач с помощью уравнений*», из таких источников, как [2; 16; 22; 32]. Рассмотрим некоторых из них.

Формулы сокращенного умножения

При решении задач на применение формул сокращенного умножения у учащихся формируются знания о понятии *разложения многочлена на множители*, в частности о понятии *формул сокращенного умножения*; они учатся применять их при решений уравнений.

Задания данного блока можно использовать в 7 классе при изучении темы «*Формулы сокращенного умножения*», в 8 при изучении темы «*Квад-*

ратные уравнения», а так же в 9 классе при *обобщающем повторении и подготовке к ГИА.*

Задача 1 (№ 137, 7 класс [2, С. 50]). Задача Эйлера. Показать, что произведение двух чисел, из которых каждое есть сумма четырех квадратов, является также суммой четырех квадратов:

$$(a^2+b^2+c^2+d^2)\cdot(m^2+n^2+p^2+q^2)=$$
$$=(an+bm+cq+dp)^2+(am-bn+cp-dq)^2$$
$$+(-ap-bq+cm+dn)^2+(aq-bp-cn+dm)^2.$$

Решение. Раскроем скобки в обеих частях:

$$a^2m^2+a^2n^2+a^2p^2+a^2q^2+b^2m^2+b^2n^2+b^2p^2+b^2q^2+c^2m^2+$$
$$+c^2n^2+c^2p^2+c^2q^2+d^2m^2+d^2n^2+d^2p^2+d^2q^2=((an+bm)+$$
$$+(cq+dp))^2+((am-bn)+(cp-dq))^2+((-ap-bq)+(cm+$$
$$dn))^2++((aq-bp)-(cn+dm))^2;$$

$$a^2m^2+a^2n^2+a^2p^2+a^2q^2+b^2m^2+b^2n^2+b^2p^2+b^2q^2+c^2m^2+$$
$$+c^2n^2+c^2p^2+c^2q^2+d^2m^2+d^2n^2+d^2p^2+d^2q^2=$$
$$=an^2+2anbm+bm^2+2ancq+2andp+2bmcq+$$
$$+2bmdp+cq^2+2cqdp+dp^2+am^2-2ambn+bn^2+2amcp-$$
$$-2amdq-2bncp+2bndq+cp^2+2cpbq+dq^2+ap^2+2apbq+$$
$$+bq^2-2apcm-2apdn-2bqcm-2bqdn+cm^2+2cmdn+dn^2+$$
$$+aq^2-2aqbp+bp^2-2aqcn-2aqdm+2bpcn+2bpdm;$$

$$a^2m^2+a^2n^2+a^2p^2+a^2q^2+b^2m^2+b^2n^2+b^2p^2+b^2q^2+c^2m^2+$$
$$+c^2n^2+c^2p^2+c^2q^2+d^2m^2+d^2n^2+d^2p^2+d^2q^2=$$
$$=a^2m^2+a^2n^2+a^2p^2+a^2q^2+b^2m^2+b^2n^2+b^2p^2+b^2q^2+c^2m^2+$$
$$+c^2n^2+c^2p^2+c^2q^2+d^2m^2+d^2n^2+d^2p^2+d^2q^2=$$
$$=a^2m^2+a^2n^2+a^2p^2+a^2q^2+b^2m^2+b^2n^2+b^2p^2+$$
$$+b^2q^2+c^2m^2+c^2n^2+c^2p^2+c^2q^2+d^2m^2+d^2n^2+d^2p^2+d^2q^2.$$

Задача 2 (№ 809, 7 класс [16, С. 286]). Задача Авиценны. Доказать, что если число, будучи разделено на 9, дает в остатке 1 или 8, то квадрат этого числа, деленны на 9, дает в остатке 1.

Решение. Пусть $y -$ число. Тогда, если число будучи разделено на 9, дает в остатке 1, то оно имеет вид: $y = 9x + 1$.

Найдем квадрат этого числа:

$$y^2 = (9x + 1)^2 = (9x)^2 + 2 \cdot 9x \cdot 1 + 1^2 = 81x^2 + 18x + 1 =$$
$$= 9 \cdot 9x^2 + 9 \cdot 2x + 1 = 9(9x^2 + 2x) + 1,$$

значит, при делении на 9 останется остаток 1.

Если число разделить на 9, и в остатке будет 8, то оно имеет вид:

$y = 9n + 8$.

Найдем квадрат этого числа:

$$y^2 = (9n + 8)^2 = (9n)^2 + 2 \cdot 9n \cdot 8 + 8^2 = 81n^2 + 144x + 64 =$$
$$= 9 \cdot 9n^2 + 9 \cdot 16n + 7 \cdot 9 + 1 = 9(9n^2 + 16n + 7) + 1,$$

значит, при делении на 9 останется остаток 1.

При делении y на 9 в остатке будет 1, что и требовалось доказать.

Задача 3 (№ 448, 7 класс [32, С. 118]). Задача Пифагора. Докажите, что всякое нечетное натуральное число, кроме 1, есть разность квадратов двух последовательных натуральных чисел.

Решение. Пусть $n -$ любое натуральное число, следующее число будет $n + 1$. Найдем разность квадратов этих двух последовательных чисел:

$$(n + 1)^2 - n^2 = n^2 + 2n + 1 - n^2 = 2n + 1.$$

$2n + 1 -$ нечетное число, что и требовалось доказать.

Задача 4 (№ 959, 7 класс [32, С. 249]). Из “Арифметики” Диофанта. Доказать:

$$\text{а)}\ \frac{144}{x^4 - 60x^2 + 900} \cdot 30 + \frac{60}{x^2 - 30} = \frac{60x^2 + 2520}{x^4 - 60x^2 + 900}.$$

Решение. Применим формулу сокращенного умножения и приведем к общему знаменателю.

$$\frac{144 \cdot 30}{(x^2 - 30)^2} + \frac{60}{x^2 - 30} = \frac{60x^2 + 2520}{(x^2 - 30)^2};$$

$$\frac{4320 + 60 \cdot (x^2 - 30)}{(x^2 - 30)^2} = \frac{60x^2 + 2520}{(x^2 - 30)^2};$$

$$\frac{4320+60x^2-1800}{x^2-30\ ^2}=\frac{60x^2+2520}{x^2-30\ ^2};$$

Приведем подобные, получим:

$$\frac{60x^2+2520}{x^2-30\ ^2}=\frac{60x^2+2520}{x^2-30\ ^2}.$$

Применим формулу сокращенного умножения и приведем к общему знаменателю.

$$\text{б)}\,\frac{96}{x^4-12x^2+36}-\frac{12}{6-x^2}=\frac{12x^2+24}{x^4-12x^2+36};$$

$$\frac{96}{x^2-6\ ^2}-\frac{12}{6-x^2}=\frac{12x^2+24}{x^2-6\ ^2};$$

$$\frac{96+12\cdot(x^2-6)}{x^2-6\ ^2}=\frac{12x^2+24}{x^2-6\ ^2};$$

$$\frac{96+12x^2-72}{x^2-6\ ^2}=\frac{12x^2+24}{x^2-6\ ^2};$$

Приведем подобные, получим:

$$\frac{12x^2+24}{x^2-6\ ^2}=\frac{12x^2+24}{x^2-6\ ^2}.$$

Рациональные числа

При решении задач на рациональные числа у учащихся формируются знания о понятии *рационального числа*, свойстве рациональных дробей, они учатся применять их при решений задач.

Задания данного блока можно использовать в 7 классе при изучении темы «*Рациональные числа*», в 8 при изучении темы «*Рациональные дроби*», а так же в 9 классе при *обобщающем повторении и подготовке к ГИА*.

Задача 5 (№3, 7 класс [22, С. 55]). Два лица имеют равные капиталы, при этом каждый состоит из известного числа вещей однаковой ценности и известного числа монет. Число вещей и сумма денег у каждого различные. Нужно узнать ценность вещи.

Решение. Пусть у первого будет m вещей и a монет, а у второго n вещей и b монет, а y – ценность вещи. Составим уравнение:

$$my + a = ny + b$$

$$my - ny = b - a$$

$$y \cdot (m - n) = b - a$$

$$y = \frac{b - a}{m - n}$$

Ответ. Ценность вещи равна отношению разности числа монет в разности числа монет.

Задача 6 (№ 37, 7 класс [2, С. 19]). Древнеримская задача (2в.). Некто, умирая, завещал: «Если у моей жены родится сын, то пусть ему будет дано $\frac{2}{3}$ имения, а жене – остальная часть. Если же родится дочь, то ей $\frac{1}{3}$, а жене $\frac{2}{3}$». Родилась двойня – сын и дочь. Как же разделить имение?

Решение. Поскольку постольку сын должен получить в 2 раза больше, чем мать, а мать в 2 раза больше, чем дочь, то дочь получает 1 часть наследства, мать – 2 части, а сын 4 части, т. е. наследство, разделили так: сын - $\frac{4}{7}$ наследства, жена - $\frac{2}{7}$ наследства, дочь - $\frac{1}{7}$ наследства.

Ответ. Сыну $\frac{4}{7}$ наследства, жене $\frac{2}{7}$ наследства, дочери $\frac{1}{7}$ наследства.

Задача 7 (№4, 7 класс [22, С. 55]). Три луга, покрытые травою одинаковой густоты и скорости роста, имеют площади: $3\frac{1}{3}$*га, 10 га, 24 га*. Первый прокормил 12 быков в продолжение 4 недель; второй – 21 быка в течение 9 недель. Сколько быков может прокормить третий луг в течение 18 недель?

Решение. При решении задачи нужно учитывать то обстоятельство, что трава на лугу непрерывно пополняется за счет роста. Если же мы обозначим через x ту долю первоначального запаса травы на 1 *га*, которая прирастает за неделю, то на первом лугу в течение недели прирастет травы $3\frac{1}{3}x$, а в течение четырех недель $3\frac{1}{3}x \cdot 4 = 13\frac{1}{3}x$ запаса, первоначально имевшегося на нем. А это равносильно тому, как если бы первоначальная площадь луга увеличилась на $13\frac{1}{3}x$ *га,* т.е. сделалась бы равной $3\frac{1}{3} + 13\frac{1}{3}x$ *га*.

Другими словами, быки съели столько травы, сколько покрывает луг площадью в $3\frac{1}{3} + 13\frac{1}{3}x$ *га*. В одну неделю 12 быков поели $\frac{1}{4}$ этого количества, а 1 бык в неделю $\frac{1}{48}$, т.е. запас, растущий на площади:

$$3\frac{1}{3} + 13\frac{1}{3}x \ :48 = \frac{10+40x}{144}\ (га).$$

Подобным же образом находим площадь луга, кормящего одного быка в течение недели, из данных для второго луга:

Недельный прирост на 1 *га* = x,

9-недельный прирост на 1 *га* = 9 x,

9-недельный прирост на 10 *га* = $90\ x$.

Площадь участка, содержащего запас травы для прокормления 21 быка в течение 9 недель, равна 10 + $90\ x$.

Площадь, достаточная для прокормления 1 быка в течение 1 недели:

$$\frac{10+90x}{9\cdot 21} = \frac{10+90x}{189}\ (га).$$

Обе нормы прокормления должны быть одинаковы:

$$\frac{10+40x}{144} = \frac{10+90x}{189}, \text{ откуда } x = \frac{1}{12}.$$

Определим площадь луга, наличный запас травы которого достаточен для прокормления одного быка в течение недели:

$$\frac{10+40x}{144} = \frac{10+40\cdot\frac{1}{12}}{144} = \frac{5}{54}\ (га).$$

Обозначим искомое число быков через y, тогда

$$\frac{24+24\cdot 18\cdot\frac{1}{12}}{18y} = \frac{5}{54}, \text{ откуда } y = 36.$$

Ответ. Третий луг может прокормить в течение 18 недель 36 быков.

Задача 8 (№4, 7 класс [16, С. 62]). Некто пришел в ряд, купил игрушек для малых ребят: за первую игрушку заплатил $\frac{1}{5}$ часть всех своих денег, за другую - $\frac{3}{7}$ остатка от первой покупки, за третью игрушку заплатил $\frac{3}{5}$ остатка от второй покупки. А по приезде в дом нашел в кошельке остальных денег 1 р. 92 коп. Спрашивается, сколько в кошельке денег было и сколько за каждую игрушку денег заплачено?

Решение. За общее количество денег примем 1.

1) $1-\frac{1}{5}=\frac{4}{5}$ – осталось после того, как заплатили за 1 игрушку;

2) $\frac{4}{5}\cdot\frac{3}{7}=\frac{12}{35}$ – заплатили за 2 игрушку;

3) $\frac{4}{5}-\frac{12}{35}=\frac{16}{35}$ - осталось после того, как заплатили за 2 игрушку;

4) $\frac{3}{5}\cdot\frac{16}{35}=\frac{48}{175}$ – заплатили за 3 игрушку;

5) $\frac{16}{35}-\frac{48}{175}=\frac{32}{175}$ – осталось после того, как заплатили за 3 игрушку;

$1 \text{ руб.} 92 \text{ коп} = 192 \text{ коп.}$

6) $192\cdot\frac{175}{35}=1050 \text{ коп.} = 10 \text{ руб.} 50 \text{ коп.}$ – было в кошельке;

7) $1050\cdot\frac{1}{5}=2 \text{ руб } 10 \text{ коп.}$– заплатили за 1 игрушку;

8) $1050\cdot\frac{12}{35}=3 \text{ руб } 60 \text{ коп.}$ – заплатили за 2 игрушку;

9) $1050\cdot\frac{48}{175}=2 \text{ руб } 88 \text{ коп.}$ – заплатили за 3 игрушку.

Ответ. $10 \text{ руб.} 50 \text{ коп.}$ было в кошельке; $2 \text{ руб } 10 \text{ коп.}$ заплатили за первую игрушку; $3 \text{ руб } 60 \text{ коп.}$ заплатили за вторую игрушку; $2 \text{ руб } 88 \text{ коп.}$ заплатили за третью игрушку.

Решение задач с помощью уравнений

При решении задач с помощью уравнений у учащихся формируются знания о понятии *уравнения, корня уравнения*, они учатся применять их *при решении текстовых задач* алгебраическим способом.

Задания данного блока можно использовать в 7 классе при изучении темы «*Линейные уравнения*», в 8 при изучении темы «*Квадратные уравнения*», а так же в 9 классе при *обобщающем повторении и подготовке к ГИА*.

Задача 9 (№59, 7 класс [2, С. 30]). Задача из легенды «История Морадбальса». Одна женщина отправилась в сад собрать яблоки. Чтобы выйти из сада, ей нужно было пройти через 4 двери, у каждой из которых стоял стражник. Стражнику у первых дверей женщина отдала половину собранных ею яблок. Дойдя до второго стражника, женщина отдала ему половину оставшихся яблок. Так же она поступила и с третьим стражником; а когда она поделилась яблоками со стражником у четвертых дверей, то у нее осталось лишь 10 яблок. Сколько яблок она собрала в саду?

Решение. Пусть x яблок было собрано всего. Тогда, $\frac{1}{2}x$ яблок было отдано стражнику у первых дверей, $\frac{1}{4}x$ яблок было отдано стражнику у вторых дверей, $\frac{1}{8}x$ яблок было отдано стражнику у третьих дверей, $\frac{1}{16}x$ яблок было отдано стражнику у четвертых дверей. По условию в конце у женщины остается 10 яблок.

$$x - \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}x - \frac{1}{8}x - \frac{1}{16}x = 10$$

Приведем к общему знаменателю и решим уравнение:

$$\frac{16x - 8x - 4x - 2x - x}{16} = 10$$

$$\frac{x}{16} = 10$$

$$x = 160$$

Ответ. Женщина собрала 160 яблок.

Задача 10 (№60, 7 класс [2, С. 30]). Задача из сказки «1001 ночь». Стая голубей подлетела к высокому дереву. Часть голубей села на ветвях, а другая расположилась под деревом. Сидевшие на ветвях голуби говорят расположившимся внизу: «Если бы один из вас взлетел к нам, то вас стало бы втрое меньше, чем нас всех вместе, а если бы один из нас слетел к вам, то нас с вами стало бы поровну». Сколько голубей сидело на ветвях и сколько под деревом?

Решение. Пусть x голубей расположилась под деревом, а y голубей на дереве. Тогда:

$$\begin{gathered} x-1=\frac{y+1}{3} \\ y-1=x+1 \end{gathered}$$

Умножим первое уравнение системы на 3, во втором уравнении системы выразим y через x:

$$\begin{gathered} 3\cdot\ x-1\ =y+1 \\ y=x+2 \end{gathered}, \quad \begin{gathered} 3x-3=y+1 \\ y=x+2 \end{gathered}$$

Подставим значение y в первое уравнение системы:

$$\begin{gathered} 3x=x+2+1+3 \\ y=x+2 \end{gathered}, \quad \begin{gathered} 3x-x=6 \\ y=x+2 \end{gathered}$$

$$\begin{gathered} 2x=6 \\ y=x+2 \end{gathered}, \quad \begin{gathered} x=3 \\ y=x+2 \end{gathered}$$

Подставим x во второе уравнение системы и найдем значение y:

$$\begin{gathered} x=3 \\ y=3+2 \end{gathered}, \quad \begin{gathered} x=3 \\ y=5 \end{gathered}$$

Следовательно, 3 голубя расположились под деревом, а 5 голубей на ветвях.

Ответ. 3 голубя сидело под деревом, а 5 голубей на ветвях.

Задача 11 (№1, 7 класс [22, С. 54]). Задача “Греческой Антологии”.

- Скажи мне, знаменитый Пифагор, сколько учеников посещают твою школу и слушают твои беседы?

- Вот сколько, - ответил знаменитый философ, - половина изучает математику, четверть – музыку, седьмая часть пребывает в молчании и, кроме того, есть еще три женщины.

Решение. Если обозначить число учеников Пифагора через y, то можно составить такое уравнение:

$$\frac{1}{2}y+\frac{1}{4}y+\frac{1}{7}y+3=y,$$

Приведем уравнение к общему знаменателю и решим его:

$$\frac{14y+7y+4y+84-28y}{28}=0$$

$\frac{-3y}{28} = -3, \quad y = 28.$ **Ответ.** 28 учеников посещают школу.

Задача 12 (№3, 7 класс [22, С. 57]). Задача Л.Н. Толстого. Артели косцов надо было скосить два луга, один вдвое больше другого. Половину дня артель косила большой луг. После этого артель разделилась пополам: первая половина осталась на большом лугу и докосила его к вечеру до конца; вторая половина косила малый луг, на котором к вечеру еще остался участок, скошенный на другой день одним косцом за один день работы. Сколько косцов было в артели?

Решение. Обозначим через y число косцов. Тогда до обеда на первом поле работало y косцов, после обеда $\frac{y}{2}$ косцов. Это все равно, как если бы на первом поле до обеда работало $y + \frac{y}{2} = 1\frac{1}{2}y$ косцов, которые за полдня скосили все поле.

На втором поле $\frac{y}{2}$ косцов работали также полдня и оставили кусочек, который один косец скосил за один день или скосили бы два косца за полдня. Таким образом, второй луг косили $\frac{y}{2} + 2$ косца полдня. Но второй луг вдвое меньше первого, значит, $1\frac{1}{2}y = 2$, откуда $y = 8$. Значит в артели было 8 косцов.

Ответ. В артели было 8 косцов.

Задача 12 (№811, 7 класс [16, С. 286]). Мне теперь вдвое больше лет, чем было вам тогда, когда мне было столько лет, сколько вам теперь; а когда вам будет столько лет, сколько мне теперь, то нам будет обоим вместе 63 года. Сколько лет мне и соклько лет вам?

Решение. Пусть x лет мне, а вам y лет. Разница в возрасте $(x - y)$ лет. Когда мне было столько, сколько сейчас вам, вам было $(y - (x - y))$ лет. Сейчас мне в два раза больше, тогда: $x = 2 \cdot (y - \ x - y \ )$. Когда вам станет x лет, то мне будет $(x + \ x - y \ )$ лет. По условию нам обоим будет $x + \ x - y \ + x = 63$, откуда $3x - y = 63$.

Составим систему уравнений:

$$x = 2 \cdot \ \ y - \ \ x - y \ \ \ ,$$
$$63 = 3x - y$$

Раскроем сскобки в первом уравнении системы:

$$x = 2y - 2x + 2y, \qquad 3x - 4y = 0,$$
$$63 = 3x - y \qquad\qquad 3x - y = 63$$

Вычтем из первого уравнения системы второе уравнение, получим:

$63 = 3y, \quad y = 21, \quad x = \frac{63+21}{3} = 28$. Значит, мне 28 лет, а вам 21 год.

Ответ. Мне 28 лет, вам 21 год.

Таким образом, нами рассмотрен набор задач для 7 класса, по таким темам, как: «Формулы сокращенного умножения», «Рациональные дроби», «Решение задач с помощью уравнений», которые можно использовать как на уроках алгебры, так и на внеклассных занятиях.

§ 7. Наборы задач с элементами истории математики для учащихся 8 классов основной школы

В данном параграфе приведем наборы задач для учащихся 8 класса, которые взяты из старинных сборников и учебников алгебры, в соответствии с Федеральным государственным образовательным стандартом основного общего образования и Примерной программой по математике.

В 8 классе представлены старинные задачи, по таким темам как: «*Квадратные уравнения*», «*Системы уравнений*», из таких источников, как [1; 2; 22; 33]. Рассмотрим некоторых из них.

Квадратные уравнения

При решении задач на квадратные уравнения у учащихся формируются знания о понятии *квадратных уравнений*, умение выводить *формулу квадратного уравнения*, они учатся применять их при решений задач.

Задания данного блока можно использовать в 8 классе при изучении темы «*Квадратные уравнения*», а так же в 9 классе при *обобщающем повторении и подготовке к ГИА*.

Задача 1 (№1, 8 класс [22, С. 65]). Из трактата «Хисаб-алджебрвал-Мукабала».

а) $5x^2 = 40x$.

Решение. Поделим обе части уравнения на 5: $x^2 = 8x;$

Перенесем все в левую часть: $x^2 - 8x = 0$;

Вынесем x: $x(x-8) = 0$. $x = 0$ или $x - 8 = 0$. $x = 8$

Ответ. $x = 0, x = 8$.

Задача 2 (№2, 8 класс [22, С. 65]). Из трактата «Хисаб-алджебрвал-Мукабала».

б) $10x = x^2 + 21$;

Решение. Перенесем все в левую часть и решим квадратное уравнение:

$$x^2 + 10x - 21 = 0.$$

$$D = b^2 - 4ac = 10^2 - 4 \cdot 1 \cdot\ -21\ = 100 - 84 = 16$$

Найдем корни квадратного уравнения:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a} = \frac{-10 + 4}{2} = \frac{-6}{2} = -3;$$

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a} = \frac{-10 - 4}{2} = \frac{-14}{2} = -7.$$

Ответ. $x_1 = -3$; $x_2 = -7$.

Задача 3 (№24, 8 класс [2, С. 16]). Задача Евклида. Доказать:

$$\sqrt{a + \sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2 - b}}{2}} + \sqrt{\frac{a - \sqrt{a^2 - b}}{2}}$$

Доказательство. Возведем обе части в квадрат:

$$\left(\sqrt{a + \sqrt{b}}\right)^2 = \left(\sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2 - b}}{2}} + \sqrt{\frac{a - \sqrt{a^2 - b}}{2}}\right)^2$$

$$a + \sqrt{b} = \frac{a + \sqrt{a^2 - b}}{2} + 2 \cdot \sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2 - b}}{2}} \cdot \sqrt{\frac{a - \sqrt{a^2 - b}}{2}} + \frac{a - \sqrt{a^2 - b}}{2}$$

$$a + \sqrt{b} = \frac{a + \sqrt{a^2 - b} + a - \sqrt{a^2 - b}}{2} + 2 \cdot \sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2 - b}}{2}} \cdot \sqrt{\frac{a - \sqrt{a^2 - b}}{2}}$$

$$a + \ \overline{b} = \frac{2a}{2} + 2\cdot \ \overline{\frac{a + \ \overline{a^2 - b} \ \cdot \ a - \ \overline{a^2 - b}}{2\cdot 2}}$$

$$a + \ \overline{b} = a + 2\cdot \ \overline{\frac{a^2 - a\cdot \ \overline{a^2 - b} + a\cdot \ \overline{a^2 - b} - a^2 - b}{4}}$$

$$a + \ \overline{b} = a + 2\cdot \ \overline{\tfrac{b}{4}}, \quad a + \ \overline{b} = a + 2\cdot \frac{\overline{b}}{2}, \quad a + \ \overline{b} = a + \ \overline{b}.$$

Задача 4 (№ 852, 8 класс [1, С. 209]). Задача Эйлера. У двух крестьянок было 100 яиц, одна больше, нежели другая; обе крестьянки заработали одинаково. Первая крестьянка сказала второй: “Будь у меня все твои яйца, тогда я заработала бы 15 крейцеров”. На что вторая ответила: “А будь у меня твои яйца, я бы заработала $6\frac{2}{3}$ крейцера”. По сколько яиц было у крестьянок?

Решение. Пусть 1 крестьянка продала x яиц, тогда 1 выручит: $\frac{15x}{100-x}$ крейцеров, а 2 выручит: $\frac{20\cdot(100-x)}{3x}$ крейцеров.

Составим уравнение:

$$\frac{15x}{100-x} = \frac{20\cdot(100-x)}{3x}$$

Решим уравнение.

$$15x\cdot 3x = 20\cdot(100-x)\cdot(100-x)$$

$$45x^2 = 20\cdot \ 100 - x \ ^2$$

$$45x^2 = 20\cdot(10000 - 200x + x^2)$$

$$45x^2 - 20x + 4000x - 200000 = 0$$

$$25x^2 + 4000x - 8000 = 0$$

$$x^2 + 160x - 8000 = 0$$

Решим квадратное уравнение и найдем его корни:

$$D = b^2 - 4ac = 25600 - 4\cdot 1\cdot \ -8000 \ = 57600$$

$$x_1 = \frac{-b + \ \overline{D}}{2a} = \frac{-160 + 240}{2} = 40,$$

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a} = \frac{-160 - 240}{2} = -200$$

$$\text{не подходит, т. к. отрицательный корень}$$

Значит, 1 крестьянка продала 40 яиц, а 2 крестьянка продала: $100 - 40 = 60$ яиц.

Ответ. 1 крестьянка продала 40 яиц, а 2 крестьянка продала 60 яиц.

Системы уравнений

При решении задач на системы уравнений у учащихся формируются знания о понятии *уравнения с двумя неизвестными*, умение *решать системы двух линейных уравнений с двумя неизвестными*, они учатся применять их при решений задач.

Задания данного блока можно использовать в 8 классе при изучении темы «*Системы уравнений*», а так же в 9 классе при *обобщающем повторении и подготовке к* ГИА.

Задача 5 (№610 а, 8 класс [33, С. 231]). Из"Алгебры" аль-Караджи. Решить систему уравнений:

$$x = \frac{3}{4}y,$$
$$xy + x + y = 62$$

Решение. Подставим $\frac{3}{4}y$ вместо x.

$$x = \frac{3}{4}y,$$
$$\frac{3}{4}y \cdot y + \frac{3}{4}y + y = 62$$

$$\frac{3}{4}y^2 + \frac{3}{4}y + y = 62, \qquad \text{умножим обе части на 4}$$

$$3y^2 + 3y + 4y = 248$$

$$3y^2 + 7y - 248 = 0$$

Решим квадратное уравнение и найдем его корни:

$$D = b^2 - 4ac = 49 - 4 \cdot 3 \cdot \ -248 \ = 3025$$

$$y_1 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a} = \frac{-7 + 55}{2 \cdot 3} = 8,$$

$$y_2 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a} = \frac{-7 - 55}{2 \cdot 3} = -10\frac{1}{3}.$$

$$x = \frac{3}{4}y, \quad y_1 = 8, \quad y_2 = -10\frac{1}{3} \qquad x_1 = \frac{3}{4} \cdot 8, \quad x_2 = \frac{3}{4} \cdot \left(-10\frac{1}{3}\right), \quad y_1 = 8, \quad y_2 = -10\frac{1}{3}$$

$$x_1 = 6, \quad x_2 = -7\frac{3}{4}, \quad y_1 = 8, \quad y_2 = -10\frac{1}{3}$$

Ответ. $x_1 = 6, y_1 = 8;\ x_2 = -7\frac{3}{4}, y_2 = -10\frac{1}{3}$.

Задача 6 (№82, 8 класс [2, С. 36]). Задача Адама Ризе. Трое торгуют лошадь за 12 флоринов, но никто в отдельности не располагает этой суммой. Первый говорит двум другим: «Дайте мне каждый по половине своих денег, и я куплю лошадь». Второй говорит первому и третьему: «Дайте мне по $\frac{1}{3}$ ваших денег, и я куплю лошадь». Третий говорит первому и второму: «Дайте мне только по $\frac{1}{4}$ ваших денег, и лошадь будет моя». Спрашивается, сколько денег было у каждого?

Решение. Пусть a – количество флоринов у первого покупателя, b флоринов у второго, c флоринов у третьего. Тогда:

$$\begin{cases} a + \frac{1}{2}(b + c) = 12 \\ b + \frac{1}{3}(a + c) = 12 \\ c + \frac{1}{4}(a + b) = 12 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2a + b + c = 24 \\ 3b + a + c = 36 \\ 4c + a + b = 48 \end{cases}$$

Выразим в первом уравнении системы c и подставим его во второе уравнение системы:

$$\begin{array}{c} c = 24 - 2a - b \\ 3b + a + 24 - 2a - b = 36, \\ 4c + a + b = 48 \end{array} \qquad \begin{array}{c} c = 24 - 2a - b \\ a = 2b - 12 \\ 4c + a + b = 48 \end{array}$$

Значение a подставим в первое уравнение системы:

$$\begin{array}{c} c = 24 - 2 \cdot (2b - 12) - b \\ a = 2b - 12 \\ 4c + a + b = 48 \end{array} , \qquad \begin{array}{c} c = 48 - 5b \\ a = 2b - 12 \\ 4c + a + b = 48 \end{array}$$

Подставим значение c в третье уравнение системы:

$$\begin{array}{c} c = 48 - 5b \\ a = 2b - 12 \\ 4(48 - 5b) + 2b - 12 + b = 48 \end{array} , \qquad \begin{array}{c} c = 48 - 5b \\ a = 2b - 12 \\ 192 - 20b + 3b - 12 = 48 \end{array}$$

$$\begin{array}{c} c = 48 - 5b \\ a = 2b - 12 \\ b = 7\dfrac{13}{17} \end{array}$$

Найдем a, b, c:

$$\begin{array}{c} c = 48 - 5 \cdot 7\frac{13}{17} \\ a = 2 \cdot 7\frac{13}{17} - 12, \\ b = 7\frac{13}{17} \end{array} \qquad \begin{array}{c} a = 3\frac{9}{17} \\ b = 7\frac{13}{17} \\ c = 9\frac{3}{17} \end{array}$$

Значит, у первого покупателя $3\frac{9}{17}$ флоринов, у второго покупателя $7\frac{13}{17}$ флоринов, у третьего покупателя $9\frac{3}{17}$ флоринов.

Ответ. $3\frac{9}{17}$, $7\frac{13}{17}$, $9\frac{3}{17}$ флоринов у покупателей.

Задача 7 (№ 576, 8 класс [1, С. 150]). Задача Маклорена. Несколько человек обедали вместе и по счету должны были уплатить 175 шиллингов. Так как у двоих из них денег не оказалось, каждому из оставшихся пришлось уплатить на 10 шиллингов больше. Сколько человек обедало?

Решение. Пусть обедали x человек, тогда

$$x \cdot 175 = (x - 2) \cdot (175 + 10)$$

Раскроем скобки и решим уравнение:

$$x \cdot 175 = (x - 2) \cdot (175 + 10), \quad 175x = \ x - 2 \ \cdot 185$$

$$175x = 185x - 370, \quad -10x = -370, \quad x = 37$$

Значит обедали 37 человек.

Ответ. 37 человек.

Задача 8 (№ 612 а, 8 класс [33, С. 231]). Из книги “Косс” К.Рудольфа. Решить сиситему уравнений:

$$\begin{array}{c} x+y \ \cdot \ x^2+y^2 \ = 539\,200, \\ x-y \ \cdot \ x^2-y^2 \ -78\,400 \end{array}$$

Решение. Допустим, $a = x - y, b = x + y$;

$$a \cdot b = \ x-y \ \cdot \ x+y \ = x^2 - y^2$$

$$a^2 + b^2 = \ x-y \ ^2 + \ x+y \ ^2 = x^2 - 2xy + y^2 + x^2 + 2xy + y^2 =$$

$$= 2x^2 + 2y^2 = 2 \cdot \ x^2 + y^2 \ ;$$

$$x^2 + y^2 = \frac{a^2 + b^2}{2}$$

Подставим получившиеся значения в систему:

$$\begin{array}{l} b \cdot \frac{a^2+b^2}{2} = 539\,200, \\ a \cdot ab = 78\,400 \end{array} \qquad \begin{array}{l} a^2 b = 78\,400, \\ b \ a^2 + b^2 \ = 1\,078\,400 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} a^2 = \frac{78\,400}{b}, \\ b \cdot \ \frac{78\,400}{b} + b^2 \ = 1\,078\,400 \end{array} \qquad \begin{array}{l} a^2 = \frac{78\,400}{b}, \\ 78\,400 \ + \ b^3 \ = 1\,078\,400 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} a^2 = \frac{78\,400}{b}, \\ b^3 \ = 1\,000\,000 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} a^2 = \frac{78\,400}{b}, \\ b \ = 100 \end{array} \quad \begin{array}{l} a^2 = \frac{78\,400}{100}, \\ b \ = 100 \end{array} \quad \begin{array}{l} a^2 = 784, \\ b \ = 100 \end{array} \quad \begin{array}{l} a_1 = 28, \\ a_2 = -28, \\ b \ = 100 \end{array}$$

1) $a = 28, b = 100$;

$$+\begin{array}{l} x - y = 28 \\ x + y = 100\text{’} \end{array} \qquad \begin{array}{l} 2x = 128 \\ y = 100 - x\text{’} \end{array} \qquad \begin{array}{l} x = 64 \\ y = 100 - 64\text{’} \end{array} \qquad \begin{array}{l} x_1 = 64 \\ y_1 = 36 \end{array}$$

2) $a = -28, b = 100$;

$$+\begin{array}{l} x - y = -28 \\ x + y = 100\text{’} \end{array} \qquad \begin{array}{l} 2x = 72 \\ y = 100 - x\text{’} \end{array} \qquad \begin{array}{l} x = 36 \\ y = 100 - 72\text{’} \end{array} \qquad \begin{array}{l} x_2 = 36 \\ y_2 = 64 \end{array}$$

Ответ. $x_1 = 64, y_1 = 36$; $x_2 = 36, y_2 = 64$.

Задача 9 (№608 в, 8 класс [33, С. 231]). Из “Арифметики” Диофанта. Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} x = 3y, \\ x^2 + y^2 = 5 \cdot (3y + y) \end{cases}$$

Решение.

$$\begin{cases} x = 3y, \\ 3y^{\ 2} + y^2 = 5 \cdot (3y + y) \end{cases} \quad \begin{cases} x = 3y, \\ 9y^2 + y^2 = 5 \cdot 4y \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 3y, \\ 10y^2 - 20y = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x = 3y, \\ 10y(y-2) = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 = 0, \\ y_1 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x_2 = 6, \\ y_2 = 2 \end{cases}$$

Ответ. $x_1 = 0, y_1 = 0;\ x_2 = 6, y_2 = 2.$

Таким образом, нами рассмотрен набор задач для 8 класса, по таким темам, как: «Квадратные уравнения», «Системы уравнений», которые можно использовать как на уроках алгебры, так и на внеклассных занятиях.

§ 8. Наборы задач с элементами истории математики для учащихся 9 классов основной школы

В данном параграфе приведем наборы задач для учащихся 9 класса, которые взяты из старинных сборников и учебников алгебры, в соответствии с Федеральным государственным образовательным стандартом основного общего образования и Примерной программой по математике.

В 9 классе представлены старинные задачи, по таким темам как: «Уравнения и системы уравнений», «Арифметическая и геометрическая прогрессии», из таких источников, как [2; 22; 34; 38]. Рассмотрим некоторых из них.

Уравнения и системы уравнений

При решении задач на уравнения и систему уравнений у учащихся формируются знания о понятии *уравнений с несколькими переменными*, умение решать уравнения третьей и четвертой степеней, они учатся применять их при решений задач.

Задания данного блока можно использовать в 9 классе при изучении темы «*Системы уравнений*», а так же при *обобщающем повторении и подготовке к ГИА.*

Задача 1 (№1189, 9 класс [34, С. 292]). Сообща покупают курицу. Если каждый человек внесёт по 9 (денежных единиц), то останется 11, если же каждый человек внесет по 6, то не хватит 16. Найти количество людей и стоимость курицы.

Решение. Пусть x всего человек, а $y-$ стоимость курицы. Составим уравнение:

$$\begin{aligned}9x&=y+11,\\ 6x&=y-16\end{aligned}\qquad \begin{aligned}y&=9x-11,\\ 6x&=9x-11-16\end{aligned}\qquad \begin{aligned}y&=9x-11,\\ x&=9\end{aligned}\qquad \begin{aligned}x&=9,\\ y&=70\end{aligned}$$

Значит, всего было 9 человек, и курица стоила 70 (денежных единиц).

Ответ. 9 человек, 70 ден. ед.

Задача 2 (№39, 9 класс [2, С. 20]). Задача Диофанта Александрийского. Найти такие 3 числа, чтобы квадрат суммы всех трёх, вычтенный из каждого числа, давал квадрат.

Решение. Задача сводится к решению системы:

$$\begin{aligned}X-(X+Y+Z)^2&=\alpha^2\\ Y-(X+Y+Z)^2&=\beta^2\\ Z-(X+Y+Z)^2&=\gamma^2\end{aligned}\qquad(1)$$

Диофант использовал такие подстановки:

$$X+Y+Z=x, X=2x^2, Y=5x^2, Z=10x^2.$$

Преобразовываем систему (1):

$$\begin{aligned}x^2&=\alpha^2\\ 4x^2&=\beta^2\\ 9x^2&=\gamma^2\end{aligned}\qquad(2)$$

Из отношения $X+Y+Z=x$ он получал $2x^2+5x^2+10x^2=x$, откуда $x=\frac{1}{17}$. Искомыми числами будут $X=\frac{2}{289}, Y=\frac{5}{289}, Z=\frac{10}{289}$. Раскрывая мысль Диофанта, можно сделать вывод, что $X=ax^2, Y=bx^2, Z=cx^2$. Тогда $x=\frac{1}{a+b+c}$ и решение системы (1) имело бы вид:

$$X=\frac{a}{(a+b+c)^2}, Y=\frac{b}{(a+b+c)^2}, Z=\frac{c}{(a+b+c)^2}.$$

Ответ. $X=\frac{a}{(a+b+c)^2}, Y=\frac{b}{(a+b+c)^2}, Z=\frac{c}{(a+b+c)^2}$.

Задача 3 (№57, 9 класс [2, С. 28]). Задача Бхаскары. Решить уравнение:

$$x^4 - 2x^2 - 400x = 9999$$

Решение. Прибавим к обеим частям $4x^2 + 400x + 1$, получим:

$$x^4 + 2x^2 + 1 = 4x^2 + 400x + 10\,000.$$

Извлечем квадратные корни из обеих частей, получим:

$$x^2 + 1 = 2x + 100, \quad x^2 - 2x - 99 = 0$$

$$D = b^2 - 4ac = 4 - 4 \cdot (-99) = 400$$

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a} = \frac{2 + 20}{2} = 11$$

$$x_2 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a} = \frac{2 - 20}{2} = -9 \text{ не учитывается, т. к. отрицательный}$$

Ответ. 11

Задача 4 (№62, 9 класс [2, С. 30]). Задача Абу Камила. Разделить 10 на две части y и $10 - y$ так, что

$$\frac{y}{10 - y} + \frac{10 - y}{y} = \sqrt{5}$$

Решение. Обозначим $\frac{10-y}{y} = x$, получим $x^2 + 1 = \sqrt{5}x$ и $x = \frac{\sqrt{5}}{2} \pm \frac{1}{2}$. Из уравнения $\frac{10-y}{y} = \frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{1}{2}$ последовательно имеем:

$$10 - \frac{3}{2}y = \frac{\sqrt{5}}{2}y \text{ и } y = 5 \cdot (3 - \sqrt{5})$$

Аналогичным образом из уравнения $\frac{10-y}{y} = \frac{\sqrt{5}}{2} - \frac{1}{2}$ получим $y = 5 \cdot (\sqrt{5} - 1)$.

Ответ. $y = 5 \cdot (3 - \sqrt{5})$; $y = 5 \cdot (\sqrt{5} - 1)$.

Арифметическая и геометрическая прогрессии

При решении задач на уравнения и систему уравнений у учащихся формируются знания о понятии *числовой последовательности*, в частности понятия арифметической и геометрической прогрессий, различать арифметическую и геометрическую прогрессий, а так же применение формулы прогрессий *при решений задач.*

Задания данного блока можно использовать в 9 классе при изучении темы «*Числовые последовательности и их свойства*», а так же при *обобщающем повторении и подготовке к ГИА.*

Задача 5 (9 класс [22, С. 84]). Из папируса Ринда.

Сто мер хлеба разделили между пятью людьми так, чтобы второй получил на столько же больше первого, на сколько третий получил больше второго, четвертый больше третьего и пятый больше четвертого. Кроме того, двое первых получили в семь раз меньше трех остальных. Сколько нужно дать каждому?

Решение. Количество хлеба, полученные участниками раздела, составляют возрастающую арифметическую прогрессию.

Пусть первый ее член х, разность у. Тогда доли:

1: $x,$

2: $x+y,$

3: $x+2y,$

4: $x+3y,$

5: $x+4y.$

На основании условия задачи, составляем следующие 2 уравнения:

$$x+(x+y)+(x+2y)+(x+3y)+(x+4y)=100$$

$$7(x+(x+y))=(x+2y)+(x+3y)+(x+4y)$$

После упрощения первое уравнение получит вид: $x+2y=20$, а второе $11x=2y.$

Решим систему:

$$\begin{array}{c} x+2y=20, \\ 11x=2y \end{array} \qquad \begin{array}{c} x=20-2y, \\ 11\cdot\ \ 20-2y\ \ -2y=0 \end{array}$$

$$\begin{array}{c} x=20-2y, \\ 220-22y-2y=0 \end{array}, \qquad \begin{array}{c} x=20-2y, \\ -24y=-220 \end{array}$$

$$\begin{array}{c} x=20-2\cdot 9 \\ y=9 \end{array}, \qquad \begin{array}{c} x=2 \\ y=9 \end{array}$$

Решив эту систему, имеем: $x=2$ и $y=9.$

Ответ. Каждому нужно дать: 2; 11; 21; 29; 38 частей хлеба.

Задача 6 (9 класс [22, С. 84]). Задача Л.Ф. Магницкого.

«Некто продал лошадь за 150 рублей. Но покупатель, приобретя лошадь, раздумал её покупать и возвратил продавцу, говоря: “Нет мне расчёта покупать за эту цену лошадь, которая таких денег не стоит”.

Тогда продавец предложил другие условия: “Если по-твоему цена лошади высока, то купи только её подковные гвозди, лошадь же получишь тогда в придачу бесплатно. Гвоздей в каждой подкове 6. За первый гвоздь дай мне всего $\frac{1}{4}$ копейки, за второй — $\frac{1}{2}$ копейки, за третий — 1 копейку и т.д.”.

Покупатель, соблазнённый низкой ценой и желая даром получить лошадь, принял условия продавца, рассчитывая, что за гвозди придётся уплатить не более 10 рублей. На сколько покупатель проторговался?

Решение. За 24 подковных гвоздя пришлось уплатить

$$\frac{1}{4}+\frac{1}{2}+1+2+2^2+2^3+\cdots+2^{24-3} \text{ копеек.}$$

Сумма равна:

$$S=\frac{b_n\cdot q-b_1}{q-1}=\frac{2^{21}\cdot 2-\frac{1}{4}}{2-1}=2^{22}-\frac{1}{4}=4\,194\,303\ \frac{3}{4} \text{ коп.},$$

т.е. около 42 тысяч рублей.

Ответ. 42 тысячи рублей.

Задача 7 (№26, 9 класс [2, С. 17]). Задача Архимеда. Найти сумму квадратов n первых чисел натурального ряда:

$$1^2+2^2+3^2\ldots+n^2.$$

Решение. Из тождества $n^3-\ n-1\ ^3=3n^2-3n+1$ при $n=1,2,3,\ldots,n$ сложением находим последовательно:

$$n^3=3\cdot\ 1^2+2^2+\cdots+n^2\ -3\cdot\ 1+2+\cdots+n\ ;$$

$$3\cdot\ 1^2+2^2+\cdots+n^2\ =n^3-n+\frac{3\cdot(n+1)\cdot n}{2};$$

$$1^2+2^2+\cdots+n^2=\frac{n\cdot\ n+1\ \cdot\ 2n+1}{6}.$$

Задача 8 (9 класс [38, С. 35]). У четырех братьев 45 рублей. Если деньги первого увеличить на 2 рубля, деньги второго уменьшить на 2 рубля, деньги третьего увеличить вдвое, то у всех окажется поровну. Сколько было у каждого?

Решение. Пусть x рублей у первого брата, y рублей у второго брата, z рублей у третьего брата и t рублей у четвертого брата.

Если деньги первого увеличить на 2 рубля, то получается: $x + 2$ руб.; деньги второго уменьшить на 2 рубля: $y - 2$ руб.; деньги третьего увеличить вдвое: $2z$ руб.; деньги четвертого уменьшить вдвое: $\frac{t}{2}$, то у всех окажется поровну: $x + 2 = y - 2 = 2z = \frac{t}{2}$.

Расчленим последнее уравнение на три отдельных: $x + 2 = y - 2$,

$$x + 2 = 2z, \quad x + 2 = \frac{t}{2},$$

откуда:

$$y = x + 4, \quad z = \frac{x+2}{2}, \quad t = 2x + 4.$$

Подставив эти значения в первое уравнение, получаем:

$$x + x + 4 + \frac{x+2}{2} + 2x + 4 = 45,$$

откуда $x = 8$. Далее находим: $y = x + 4 = 8 + 4 = 12$,

$$z = \frac{x+2}{2} = \frac{8+2}{2} = 5,$$

$$t = 2x + 4 = 2 \cdot 8 + 4 = 20.$$

Итак, у братьев было: 8 рублей, 12 рублей, 5 рублей, 20 рублей.

Ответ. У братьев было: 8 руб., 12 руб., 5 руб., 20 руб.

Задача 9 (9 класс [38, С. 179]). Служившему воину дано вознаграждение за первую рану 1 копейка, за другую – 2 копейки, за третью – 4 копейки, и т.д. По исчислению нашлось, что воин получил всего вознаграждения 655 руб. 35 коп. Спрашивается число его ран.

Решение. Составляем уравнение

$65\,535 = 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^{x-1}$ или

$S = \frac{b_n \cdot q - b_1}{q-1}$, $\quad 65\ 535 = \frac{2^{x-1} \cdot 2}{2-1} = 2^x - 1$,

откуда имеем: $65\ 536 = 2^x$ и $x = 16$.

Значит, воин должен получить 16 ран, чтобы получить награду в 655 руб. 35 коп. **Ответ.** 16 ран.

Задача 10 (№101, 9 класс [2, С. 40]). Задача Пьера Ферма. Показать, что если S есть сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии $q_1, q_2, q_3, \ldots$, то

$$\frac{S}{S - q_1} = \frac{q_1}{q_2}$$

Решение. Имеем: $S = \frac{q_1}{1-q}$, где $q -$ знаменатель прогрессии,

$$S - q_1 = \frac{q_1}{1-q} - q_1 = \frac{q_1 q}{1-q} = \frac{q_2}{1-q}.$$

$$\frac{S}{S - q_1} = \frac{q_1}{1-q} : \frac{q_2}{1-q} = \frac{q_1}{1-q} \cdot \frac{1-q}{q_2} = \frac{q_1}{q_2}.$$

Задача 11 (№107, 9 класс [2, С. 42]). Задача Исаака Ньютона. Даны три последовательных члена геометрической прогрессии. Их сумма равна 19, а сумма их квадратов 133. Определить эти члены.

Решение. Пусть $\frac{m}{q}, m, mq -$ три члена геометрической прогрессии. По условию:

$$\frac{m}{q} + m + mq = 19$$
$$\frac{m^2}{q^2} + m^2 + m^2 q^2 = 133.$$

Положив $x = q + \frac{1}{q}$, получим:

$$m\ x + 1 = 19$$
$$m^2\ x^2 - 1 = 133.$$

Отсюда $x = \dfrac{19}{m} - 1$ и $x^2 = \dfrac{133}{m^2} + 1$.

Далее имеем: $\dfrac{19}{m} - 1 \quad ^2 = \dfrac{133}{m^2} + 1.$ Поэтому $m = 6, x = 2\dfrac{1}{6}$.

Наконец, $q_1 = \frac{2}{3}$ и $q_2 = \frac{3}{2}$. Условиям задачи удовлетворяют тройки чисел: 9,6,4 и 4,6,9. **Ответ.** $9, 6, 4$ и $4, 6, 9$.

Таким образом, нами рассмотрен набор задач для 9 класса, по таким темам, как: «Уравнения и системы уравнений», «Арифметическая и геометрическая прогрессий», которые можно использовать как на уроках алгебры, так и на внеклассных занятиях.

Итак, нами были рассмотрены наборы задач для 7 – 9 классов взятых из старинных сборников и учебников алгебры, в соответствии с Федеральным государственным образовательным стандартом основного общего образования и Примерной программой по математике. Использование старинных задач на уроках математики и внеклассных занятиях вызывает большой интерес у учащихся, пробуждает их к самостоятельным мыслительным действиям, т.е. к проявлению творчества в поиске решения [28, С.70].

Выводы по второй главе

1. Выявлены методические рекомендации по обучению элементам истории математики в курсе алгебры основной школы.

2. Разработаны наборы задач по теме исследования для учащихся 7-9-х классов в соответствии с Федеральным государственным образовательным стандартом основного общего образования и Примерной программой по математике и рекомендации по их применению.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В заключении сформулируем выводы и полученные результаты проведенного исследования.

1. Определена роль элементов истории математики в обучении учащихся основной школы. Исторический материал демонстрирует то, что математика является продуктом творческой деятельности человеческой мысли, обобщением огромного опыта человечества, и формировалась с целью удовлетворения постоянно растущих потребностей общества. История математики как наука представляет собой важную составляющую всеобщей истории; выполняет ряд функций. Применение элементов истории математики в общеобразовательной школе является эффективным средством повышения мотивации к изучению математики учащимися; способствует улучшению уровня математической культуры учащихся, а также уровня их общей культуры.

2. Рассмотрена общая характеристика линии «Математика в историческом развитии». Определено, что под историей науки в школе подразумевается отражение в содержании образования единства 2-х процессов: истории формирования определенной науки, ее взглядов, понятий, идей, проблем теории и истории тех или иных открытий. Раздел «Математика в историческом развитии» изучается в основной школе с целью развития у учащихся взглядов о математике как части человеческой культуры; формирования культурно-исторической среды обучения учащихся; улучшения их математической подготовки, развития творческих способностей учащихся и повышения мотивации к изучению математики.

3. Проведен анализ содержания линии «Математика в историческом развитии». Проанализировав учебники математики на наличие исторических задач, можно сказать, что задачи с историческим содержанием представлены не во всех современных учебниках математики. В них представлены не все типы задач в соответствии с Федеральным государственным образовательным стандартом основного общего образования.

4. Раскрыты формы, методы и средства обучения элементам истории математики в курсе алгебры основной школы. Установлено, что 1) *сведения из истории математики*, сообщаемые на уроках могут быть *двух видов*: *сведения, непосредственно связанные с содержанием урока* (те сведения, которые требуют более глубокого и ясного понимания программного материала); *сведения, непосредственно не связанные с содержанием урока*, но привлекаемые учителем для учебно-воспитательных задач; 2) *объем исторического материала* на уроке необходимо определить исходя из: *связи данного материала с материалом урока*; *времени*, отводимом на сведения; *уровня подготовки учащихся*; *возраста* учащихся; 3) *эффективность использования исторических сведений* во многом зависит от *их содержания*; 4) различными *формами работы на уроке* с историческими сведениями являются: *исторические обзоры* по отдельным вопросам в виде краткой беседы; р*ешение задач* из классических и старинных сборников; о*тдельные исторические замечания* при изучении программного материала или при решении задач; *наглядные пособия в виде хронологических и иных таблиц, чертежей, рисунков, схем, портретов* выдающихся математиков и т. д.; *сообщения* о наиболее важных исторических темах, используемых чаще всего в форме рассказа; *проведение беседы об истории развития математики за весь курс* как основной, так и общеобразовательной школы; *проблемное изложение;* с*амостоятельная и исследовательская работы учащихся*.

5. Выявлены методические рекомендации по обучению элементам истории математики в курсе алгебры основной школы.

6. Разработаны наборы задач по теме исследования для учащихся 7-9-х классов в соответствии с Федеральным государственным образовательным стандартом основного общего образования и Примерной программой по математике и рекомендации по их применению.

Все это дает основание считать, что задачи, поставленные в исследовании, полностью решены.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Алимов, Ш.А. Алгебра. 8 класс [Текст]: учеб. для общеобразоват. учреждений / Ш.А. Алимов, Ю.М. Колягин, Ю.В. Сидоров и др. – 19-е изд. – М.: Просвещение, 2012. – 255 с.

2. Баврин, И.И. Старинные задачи. [Текст]: Кн. для учащихся / И.И. Баврин, Е.А. Фрибус. – М.: Просвещение, 1994. – 128 с.

3. Бурмистрова , Т.А. Алгебра. Сборник рабочих программ. 7 – 9 классы [Текст]:: пособие для учителей общеобразоват. организаций/ Т.А. Бурмистрова. – 2-е изд., доп. – М.: Просвещение, 2014. – 96 с.

4. Виленкин, Н.Я. Математика. 5 класс [Текст]: учеб. для учащихся общеобразоват. учреждений / Н.Я. Виленкин, В.И. Жохов, А.С. Чесноков, С.И. Шварчбурд. – 31-е изд., стер. – М.: Мнемозина, 2013. – 280 с.

5. Виленкин, Н.Я. Математика. 6 класс [Текст]: учеб. для учащихся общеобразоват. учреждений / Н.Я. Виленкин, В.И. Жохов, А.С. Чесноков, С.И. Шварчбурд. – 30-е изд., стер. – М.: Мнемозина, 2013. – 288 с.

6. Гнеденко, Б. В. О математике / Б.В. Гнеденко. – М.:Эдиториал УРСС, 2000. – 208 с.

7. Григорян, М.Э. Дидактические функции истории математики [Электронный ресурс] / М.Э. Григорян // Успехи современного естествознания. – 2014. - № 11. - С. 84-86. - Режим доступа: http://elibrary.ru/download/ 22029513.pdf – Последнее обновление 11.05.2017.

8. Депман, И.Я. История арифметики / И.Я. Депман. – М. : Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2011.

9. Зубарева, И.И. Математика. 5 класс [Текст]: учеб. для учащихся общеобразоват. учреждений / И.И. Зубарева, А.Г. Мордкович. – 14-е изд., испр. и доп. – М.: Мнемозина, 2013. – 270 с.

10. Зубарева, И.И. Математика. 6 класс [Текст]: учеб. для учащихся общеобразоват. учреждений / И.И. Зубарева, А.Г. Мордкович. – 8-е изд., стер. – М.: Мнемозина, 2009. – 264 с.

11. Зубкова, Е.В. Универсальная история. На пути к новой концепции школьного историкознания / Е.В. Зубкова // Историки читают учебники истории. Традиционные и новые концепции учебной литературы. - М.: АИРО-XX, 2002. С. 93-114.

12. Иванова, Т.А. Теоретические основы обучения математике в средней школе [Текст]: Учебное пособие / Т.А. Иванова, Е.Н. Перевощикова, Т.П. Григорьева, Л.И. Кузнецова. – Н.Новгород: НГУ. - 2003.- 320 с.

13. Иванова, Т.А. Теория и технология обучения математике в средней школе [Текст]: Учеб. пособие для студентов математических специальностей педагогических вузов / Т.А. Иванова, Е.Н. Перевощикова, Л.И. Кузнецова, Т.П. Григорьева. - 2-е изд., испр. и доп. – Н. Новгород: НГПУ, 2009. 355с.

14. Капица, С.П. Замечательные ученые / С.П. Капица // Библиотечка журнал «Квант». – 1980. - выпуск 9.– 192 с.

15. Козлова, В.В. Фундаментальное ядро содержания общего образования / Рос. акад. наук, Рос. акад. образования; под ред. В.В. Козлова, А.М. Кондакова. — 4-е изд., дораб. — М.: Просвещение, 2011. — 79 с.

16. Колягин, Ю.М. Алгебра. 7 класс [Текст]: учеб. для общеобразоват. учреждений / Ю.М. Колягин, М.В Ткачёва, Н.Е. Фёдорова, М.И. Шабунин. – М.: Просвещение, 2012. – 319 с.

17. Макара, О.Н. Задачи с историческим содержанием в обучении математике [Электронный ресурс] / О.Н. Макара // Начальная школа. – 2013. - №7. – С. 36-38. - Режим доступа: http://elibrary.ru/download/ 21131144.pdf – Последнее обновление 11.05.2017.

18. Макара, О.Н. Методический аспект использования исторического материала в обучении математике [Электронный ресурс] / О.Н. Макара // Начальная школа. – 2014. - № 6. – С. 23 – 26. - Режим доступа: http://elibrary.ru/download/ 25631564.pdf – Последнее обновление 11.05.2017.

19. Макарычев, Ю.Н. Алгебра. 7 класс [Текст]: учеб. для общеобразоват. учреждений / Ю.Н. Макарычев, Н.Г. Миндюк, К.И. Нешков, С.Б. Суворова; под ред. С.А. Теляковского. – М.: Просвещение, 2013. – 256 с.

20. Макарычев, Ю.Н. Алгебра. 8 класс [Текст]: учеб. для общеобразоват. организаций с прил. на электрон. носителе / Ю.Н. Макарычев, Н.Г. Миндюк, К.И. Нешков, С.Б. Суворова; под ред. С.А. Теляковского. – М.: Просвещение, 2013. – 287 с.

21. Макарычев, Ю.Н. и др. Алгебра. 9 класс [Текст]: учеб. для общеобразоват. учреждений / Ю. Н. Макарычев, Н. Г. Миндюк, К. И. Нешков, С. Б. Суворова; под ред. С. А. Теляковского. – 18-е изд. - М.: Просвещение, 2011. – 271 с.

22. Малыгин, К.А. Элементы историзма в преподавании математики в средней школе. [Текст] : Пособие для учителей / К.А. Малыгин. – М.: Учпедгиз, 1963. – 224 с.

23. Медникова, Н.А. Использование исторических сведений на уроках математики [Электронный ресурс] / Н.А. Медникова // Начальная школа. – 2009. - № 5. – С. 50 – 54. – Режим доступа: http://elibrary.ru/download/13002598.pdf – Последнее обновление 11.05.2017.

24. Молодший, В.Н. Очерки по философским вопросам математики [Текст] / В. Н. Молодший. – М.: Просвещение, 1969. – 303 с.

25. Мордкович, А.Г. Алгебра. 7 класс. В 2 ч. Ч. 1. [Текст] : Учебник для учащихся общеобразовательных учреждений / А.Г. Мордкович. – 17-е изд., доп. – М.: Мнемозина, 2013. – 175 с.

26. Мордкович, А.Г. Алгебра. 7 класс. В 2 ч. Ч. 2. [Текст] : Задачник для учащихся общеобразовательных учреждений / А.Г. Мордкович. – 17-е изд., стер. – М.: Мнемозина, 2013. – 271 с.

27. Мордкович, А.Г. Алгебра. 8 класс. В 2 ч. Ч. 1. [Текст] : Учебник для учащихся общеобразовательных учреждений / А.Г. Мордкович. – 12-е изд., доп. – М.: Мнемозина, 2010. – 215 с.

28. Мордкович, А.Г. Алгебра. 8 класс. В 2 ч. Ч. 2. [Текст] : Задачник для учащихся общеобразовательных учреждений / А.Г. Мордкович. – 12-е изд., испр. и доп. – М.: Мнемозина, 2010. – 271 с.

29. Мордкович, А.Г. Алгебра. 9 класс. В 2 ч. Ч. 1. [Текст] : Учебник для учащихся общеобразовательных учреждений / А.Г. Мордкович, П.В. Семенов. – 12-е изд., стер. – М.: Мнемозина, 2010. – 224 с.

30. Мордкович, А.Г. Алгебра. 9 класс. В 2 ч. Ч. 2. [Текст] : Задачник для учащихся общеобразовательных учреждений / А.Г. Мордкович, Л.А. Александрова, Т.Н. Мишустина и др.; под ред. А.Г. Мордковича. – 12-е изд., испр. – М.: Мнемозина, 2010. – 223 с.

31. Николау, Л.Л. Старинные задачи – для развития интереса к математике / Л.Л. Николау // Начальная школа. – 2001. - №5. – С. 67 – 70.

32. Никольский, С.М. Алгебра. 7 класс[Текст] : учеб. для общеобразоват. организаций / С.М. Никольский, М.К. Потапов, Н.Н. Решетников, А.В. Шевкин. – М.: Просвещение, 2013. – 287 с.

33. Никольский, С.М. Алгебра. 8 класс[Текст] : учеб. для общеобразоват. организаций / С.М. Никольский, М.К. Потапов, Н.Н. Решетников, А.В. Шевкин. – М.: Просвещение, 2014. – 301 с.

34. Никольский, С.М. Алгебра. 9 класс [Текст] : учеб. для общеобразоват. организаций / С.М. Никольский, М.К. Потапов, Н.Н. Решетников, А.В. Шевкин. – М.: Просвещение, 2014. – 335 с.

35. Никольский, С.М. Математика. 5 класс [Текст] : учеб. для общеобразоват. организаций / С.М. Никольский, М.К. Потапов, Н.Н. Решетников, А.В. Шевкин. – 14-е изд. – М.: Просвещение, 2015. – 272 с.

36. Никольский, С.М. Математика. 6 класс [Текст] : учеб. для общеобразоват. организаций / С.М. Никольский, М.К. Потапов, Н.Н. Решетников, А.В. Шевкин. – 14-е изд. – М.: Просвещение, 2015. – 256 с.

37. Ожегов, С.И. Толковый словарь русского языка / С.И. Ожегов, Н.Ю. Шведова, М. : АЗЪ,1992. – 690 с.

38. Перельман, Я.И. Занимательная математика. [Текст]: математические рассказы и очерки / Я.И. Перельман. – М.: МГИК, 1993. - 97 с.

39. Примерные программы основного общего образования по учебным предметам. Математика. – М: Просвещение, 2009. – 96 с. – (Стандарты второго поколения).

40. Пустовалова, Г.П. Исторический материал на уроках математики / Г.П. Пустовалова // Начальная школа. – 2004. - № 6. – С. 70 - 73.

41. Самойлик, Г. Использование исторического материала в обучении / Г. Самойлик // Математика в школе. — 2002. - № 14. - С. 1-4.

42. Саранцев, Г.И. Общая методика преподавания математики [Текст] : Учеб. пособие для студентов математических спец. педагогических вузов и университетов / Г.И. Саранцев. – Саранск: Тип. «Красный Октябрь», 1999. – 208с.

43. Смолякова, Д.В. Теория и методика обучения математике: использование элементов истории математики в учебном процессе [Текст]: учебно – методическое пособие / Д.В. Смолякова. – Томск: Изд-во ТГПУ, 2012. – 36с.

44. Смолякова, Д.В. Учебные задания с элементами истории математики как средство обогащения умственного опыта учащихся основной школы при обучении математике [Текст]: дис. канд. пед. наук: 13.00.02 /Д.В. Смолякова. - Новосибирск, 2006. - 171 с.

45. Федеральный государственный образовательный стандарт основного общего образования: Приказ Мин. образования и науки РФ от 17.05.2012 г. №413. [Электронный ресурс]. – Режим доступа: http://минобрнауки.рф/документы/543. – Последнее обновление 11.05.2017.

46. Фомичёва, И.Б. Об использовании сведений из истории математики на уроках [Электронный ресурс] / И.Б. Фомичёва, Е.Ю. Малькова // Молодой учёный. – 2015. - № 20. - С. 477 - 480. – Режим доступа: http://elibrary.ru/download/ 24790689.pdf– Последнее обновление 11.05.2017.

47. Фридман, Л.М. Теоретические основы методики обучения математике [Текст]: Учебное пособие / Л.М. Фридман. - Изд. 3-е. – М.: Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2009. – 248 с.

48. Шеламова, Е.В. Элементы истории математики как средство активизации учебной деятельности школьников [Электронный ресурс] / Е.В. Шеламова // Continuum. Математика. Информатика. Образование. - 2016. – № 2. – С. 105 -109. – Режим доступа: http://elibrary.ru/download/27289455.pdf – Последнее обновление 11.05.2017.

49. Fauvel, J. History in Mathematics Education / J.Fauvel, J. V. Maanen / - Kluwer Academic Publishers, 2002. – 456 p.

50. Heath, T. L. Diophantus of Alexandria: A study in the history of Greek algebra / T. L. Heath. - Cambridge at the University Press, 1910. – 404 p.

51. Hodgkin, L. A History of Mathematics / Luke Hodgkin/ - Oxford University Press, 2005. - 296 p.

52. Kretzmann, N. The beginnings of Greek Mathematics / N. Kretzmann, G. Nuchelmans, L. M. De Rijk / - D. Reidel Publishing, 1966. – 353 p.

53. Lucas, N. H. Bunt The historical roots of elementary mathematics / Lucas N. H. Bunt, Phillip S. Jones, Jack D. Bedient. – New-York: Dover publication, INC, 1998. – 299 p.

Приложение 1

Анализ учебников математики 5-6 классов на наличие исторических справок

Таблица 1

Математика, 5 класс

Учебники математики 5 класса		
С.М. Никольский	Н.Я. Виленкин	И.И. Зубарева, А.Г. Мордкович
Глава 1. Натуральные числа и нуль. О системах счисления. *Глава 2. Измерение величин.* О мерах длины. *Глава 3. Делимость натуральных чисел.* О делимости чисел, простых числах, о «решете» Эратосфена. *Глава 4. Обыкновенные дроби.* О том, как в древности обозначали дробные числа.	*Глава 1. Натуральные числа.* О системах записи чисел. О Гауссе, о десятичной позиционной и шестидесятичной системах счисления. О Колмогорове, о единицах длины в России. О площади земельных участков. О единице измерения объема, о различных системах измерения длины, массы, объема. *Глава 2. Дробные числа.* О солнечных часах. О монетах, составляющих доли копейки. О частях и долях в измерении. О десятичных дробях. О вычислительных устройствах. О происхождении процента.	Исторические справки отсутствуют.

Таблица 2

Математика, 6 класс

Учебники математики 6 класса		
С.М. Никольский	Н.Я. Виленкин	И.И. Зубарева, А.Г. Мордкович
Глава 1. Отношения, пропорции, проценты. О пропорциях и процентах. *Глава 2. Целые числа.* О появлении отрицательных чисел. *Глава 3. Рациональные числа.* О возникновении рациональных чисел *Глава 4. Десятичные дроби.* О возникновении десятичных дробей и действий над ними. *Глава 5. Обыкновенные и десятичные дроби.* Об иррациональных числах, о числе π.	*Глава 1. Обыкновенные дроби.* О делимости чисел. О возникновении теории чисел. О возникновении обыкновенных дробей. Об отношениях и пропорциях. *Глава 2. Рациональные числа.* Об отрицательных числах. О сложении и вычитании отрицательных чисел. О рациональных числах. О возникновении алгебры. О координатах.	Исторические справки отсутствуют.

Приложение 2

Анализ учебников алгебры 7-9 классов на наличие исторических справок

Таблица 3

Алгебра, 7 класс

Учебники алгебры 7 класса		
С.М. Никольский	Ю.Н. Макарычев, Н.Г. Миндюк	И.И. Зубарева, А.Г. Мордкович
Глава 1. Действительные числа. О развитии алгебры и теории чисел. *Глава 2. Алгебраические выражения.* Об алгебре и ученых, внесших вклад в её развитие. *Глава 3. Линейные уравнения.* О задачах, решаемых с помощью составления уравнений.	*Глава 1. Выражения, тождества, уравнения.* О возникновении алгебры *Глава 2. Функции.* О функциях. *Глава 5. Формулы сокращенного умножения.* О формулах сокращенного умножения. *Глава 6. Системы линейных уравнений.* О методе координат.	Исторические справки отсутствуют.

Таблица 4

Алгебра, 8 класс

Учебники алгебры 8 класса		
С.М. Никольский	Ю. Н. Макарычев, Н. Г. Миндюк	И.И. Зубарева, А.Г. Мордкович
Глава 1. Простейшие функции. Квадратные корни. О функции графическом ее изображении, о приближенном извлечении квадратного корня. *Глава 2. Квадратные и рациональные уравнения.* О решении квадратных уравнений, о комплексных числах. *Глава 3. Линейная, квадратичная и дробно-линейная функции.* О графике квадратичной функции, о вкладе Архимеда в ее изучение. *Глава 4. Системы рациональных уравнений.* О системах уравнений.	*Глава 1. Рациональные дроби.* О дробях. *Глава 2. Квадратные корни.* О действительных числах. О квадратных корнях. *Глава 3. Квадратные уравнения.* О квадратных уравнениях. *Глава 4. Неравенства.* О неравенствах.	Исторические справки отсутствуют.

Таблица 5

Алгебра, 9 класс

Учебники алгебры 9 класса		
С.М. Никольский	Ю.Н. Макарычев, Н.Г. Миндюк	И.И. Зубарева, А.Г. Мордкович
Глава 1. Неравенства. О понятиях равенства и неравенства чисел. *Глава 2. Степень числа.* О корнях различной степени из числа. *Глава 3. Последовательности.* Об арифметической и геометрической прогрессиях. *Глава 4. Тригонометрические формулы.* О происхождении понятий синуса, косинуса и тангенса угла, о развитии тригонометрии. *Глава 5. Элементы приближенных вычислений, статистики, комбинаторики и теории вероятности.* О приближенных вычислениях, о возникновении статистики.	*Глава 1. Квадратичная функция.* О функциях. *Глава 2. Уравнения и неравенства с одной переменной.* Об уравнениях высших степеней. О степенях. *Глава 4. Арифметическая и геометрическая прогрессии.* О прогрессиях. *Глава 5. Элементы комбинаторики и теории вероятностей.* О теории вероятностей.	Исторические справки отсутствуют.

Приложение 3

Анализ учебников математики 5-6 классов на наличие старинных задач

Таблица 6

Математика, 5 класс

Учебники математики 5 класса		
Авторы	Содержание задачного материала	Типы задач в соответствии с ФГОС
С.М. Никольский	*Глава 1. Натуральные числа и нуль.* № 148, 149, 150, 151, 152, 195, 230, 287, 338. *Глава 2. Измерение величин.* № 551, 555, 556, 559. *Глава 4. Обыкновенные дроби.* № 784, 791, 859, 883, 884, 952, 953, 954, 956, 964, 1069, 1070, 1071, 1072, 1074, 1075, 1078, 1081, 1085. *Задачи для повторения.* № 1139, 1140, 1142, 1145, 1148, 1150, 1151, 1152, 1153, 1154, 1161, 1173, 1174, 1178, 1180, 1181, 1184, 1206, 1207, 1208, 1209, 1210, 1211, 1212, 1213.	*Старинные системы мер.* № 148, 149, 150, 551, 555, 556, 559, 883, 1069, 1074, 1085, 1145, 1153, 1173, 1178. *Дроби.* № 784, 791, 859,884, 952, 953, 954, 956, 964, 1069, 1070, 1071, 1072, 1074, 1075, 1078, 1081, 1085, 1206, 1207, 1208, 1209, 1210, 1211, 1212, 1213. *Развитие арифметики натуральных чисел; формирование понятия числа.* № 148, 150, 151, 152, 195, 230, 287, 338, 556, 791, 1139, 1140, 1142, 1145, 1148, 1151, 1152, 1153, 1154, 1161, 1173, 1174, 1178, 1180, 1184.
Н.Я. Виленкин	*Глава 1.Натуральные числа.* № 768, 839. *Глава 2. Дробные числа.* № 873, 1128.	*Старинные системы мер.* № 768, 839, 873. *Дроби.* № 1128.
И.И. Зубарева, А.Г. Мордкович	*Глава 3. Геометрические фигуры.* № 147, 172.	*Развитие арифметики натуральных чисел; формирование понятия числа.* № 147, 172.
Примерная программа введения линии «Математика в историческом развитии» История формирования понятия числа: натуральные числа, дроби. Старинные системы записи чисел. Дроби в Вавилоне, Египте, Риме. Старинные системы мер. Открытие десятичных дробей. Десятичные дроби и метрическая система мер.		

Таблица 7

Математика, 6 класс

Учебники математики 6 класса		
Авторы	Содержание задачного материала	Типы задач в соответствии с ФГОС
С.М. Никольский	*Глава 1. Отношения, пропорции, проценты.* № 40, 44, 79, 80, 90, 91, 163, 185, 186, 187, 188. *Глава 2. Целые числа.* № 434. *Глава 3. Рациональные числа.* № 650, 651, 652, 715, 716, 717, 718, 719. *Глава 4. Десятичные дроби.* № 846. *Глава 5. Обыкновенные и десятичные дроби.* № 1102, 1103, 1104, 1105, 1106, 1107, 1108, 1109. *Задачи для повторения.* № 1120, 1183, 1184, 1185, 1199, 1200, 1201, 1211, 1214, 1233, 1234, 1244, 1251, 1252, 1253, 1254, 1261, 1265, 1273, 1274, 1275.	*Пропорции.* № 40, 44, 79, 80, 90, 91, 186, 434, 1105, 1106, 1107, 1233. *Обыкновенные дроби.* № 91, 163, 715, 716, 717, 718, 846, 1102, 1103, 1106, 1108, 1109, 1120, 1183, 1184, 1185, 1199, 1201, 1211, 1214, 1233, 1234, 1261,1265. *Развитие арифметики натуральных чисел; формирование понятия чисел.* № 40, 79, 186, 434, 1102, 1103, 1104, 1105, 1244, 1251, 1252, 1253, 1265, 1273, 1274, 1275.
Н.Я. Виленкин	*Глава 1. Обыкновенные дроби.* № 259, 350. *Глава 2. Рациональные числа.* № 938, 1340, 1363.	*Обыкновенные дроби.* № 1340. *Развитие арифметики натуральных чисел; формирование понятия чисел.* № 259, 350, 938, 1363.
И.И. Зубарева, А.Г. Мордкович	Задачи с историческим содержанием отсутствуют.	
Примерная программа введения линии «Математика в историческом развитии» Появление отрицательных чисел и нуля. Л. Магницкий. Л. Эйлер.		

Приложение 4

Анализ учебников алгебры 7-9 классов на наличие старинных задач

Таблица 8

Алгебра, 7 класс

Учебники алгебры 7 класса		
Авторы	Содержание задачного материала	Типы задач в соответствии с ФГОС
С.М. Никольский	*Глава 2. Алгебраические выражения.* № 387, 447, 448, 449, 476. *Глава 3. Линейные уравнения.* № 757, 759, 765,769, 770, 771, 772. *Задачи для повторения.* 978, 984, 986, 990, 992, 998, 1003, 1005, 1021, 1037, 1045, 1046, 1051, 1071, 1089, 1090, 1097, 1103, 1114.	*Формулы сокращенного умножения.* № 387, 447, 448, 449, 476. *Рациональные дроби.* № 842, 867, 978,984, 1021, 1071, 1097. *Решение задач с помощью уравнений.* № 757, 759, 765, 769, 770, 771, 772, 986, 990, 992, 998, 1003, 1005, 1037, 1045, 1046, 1051, 1089, 1090, 1097, 1103, 1114.
Ю.Н. Макарычев, Н.Г. Миндюк	*Глава 1. Выражения, тождества, уравнения.* № 147, 157. *Глава 4. Многочлены.* № 641. *Глава 5. Формулы сокращенного умножения.* № 1004. *Глава 6. Системы линейных уравнений.* № 1104, 1105, 1115. *Задачи повышенной трудности.* № 1226.	*Формулы сокращенного умножения.* № 1004. *Решение задач с помощью уравнений.* № 147, 157, 641, 1105, 1115, 1226.
И.И. Зубарева, А.Г. Мордкович	*Глава 1. Математический язык. Математическая модель.* № 4.40, 4.41, 4.42, 4.43.	*Решение задач с помощью уравнений.* № 4.40, 4.41, 4.42, 4.43.
Примерная программа введения линии «Математика в историческом развитии» Зарождение алгебры в недрах арифметики. Рождение буквенной символики. П. Ферма. Ф. Виет. Р. Декарт.		

Таблица 9

Алгебра, 8 класс

<table>
<tr><td colspan="3">Учебники алгебры 8 класса</td></tr>
<tr><td>Авторы</td><td>Содержание задачного материала</td><td>Типы задач в соответствии с ФГОС</td></tr>
<tr><td>С.М. Никольский</td><td>Глава 2. Квадратные и рациональные уравнения.
№ 337.
Глава 4. Системы рациональных уравнений.
№ 608, 609, 610, 611, 612.
Задачи для повторения.
643, 728, 879, 921, 928, 929, 930, 974, 975, 976, 977, 981, 982, 985, 986, 988, 989, 990, 991.</td><td>Квадратные уравнения.
№337, 643, 728, 879, 921, 928, 929, 930, 981, 982.
Системы уравнений.
№ 608, 609, 610, 611, 612, 974, 975, 976, 977, 985, 986, 988, 989, 990, 991.</td></tr>
<tr><td>Ю.Н. Макарычев, Н.Г. Миндюк</td><td>Глава 3. Квадратные уравнения.
№ 569, 570, 625, 666.</td><td>Квадратные уравнения.
№ 569, 570, 625, 666</td></tr>
<tr><td>И.И. Зубарева, А.Г. Мордкович</td><td colspan="2">Задачи с историческим содержанием отсутствуют.</td></tr>
<tr><td colspan="3">Примерная программа введения линии «Математика в историческом развитии»
История формирования понятия числа. История вопроса о нахождении формул корней алгебраических уравнений.</td></tr>
</table>

Таблица 10

Алгебра, 9 класс

<table>
<tr><td colspan="3">Учебники алгебры 9 класса</td></tr>
<tr><td>Авторы</td><td>Содержание задачного материала</td><td>Типы задач в соответствии с ФГОС</td></tr>
<tr><td>С.М. Никольский</td><td>Глава 1. Неравенства.
№ 190, 191.
Глава 3. Последовательности.
№ 472, 473, 487, 500, 511, 512, 513.
Задачи для повторения.
№ 848, 850, 890, 891, 975, 1099, 1182, 1186, 1187, 1188, 1189, 1190, 1191, 1204, 1208, 1218, 1219, 1220, 1258.</td><td>Равенства.
№ 190, 191, 890, 891.
Уравнения и системы уравнений.
№ 975, 1182, 1186, 1187, 1188, 1189, 1190, 1191, 1204, 1208, 1218, 1219, 1220, 1258.
Арифметическая и геометрическая прогрессии.
№ 472, 473, 487, 500, 511, 512, 513, 848, 850, 1099.</td></tr>
<tr><td>Ю.Н. Макарычев, Н.Г. Миндюк</td><td colspan="2" rowspan="2">Задачи с историческим содержанием отсутствуют.</td></tr>
<tr><td>И.И. Зубарева, А.Г. Мордкович</td></tr>
<tr><td colspan="3">Примерная программа введения линии «Математика в историческом развитии»
Задача Леонардо Пизанского (Фибоначчи) о кроликах, числа Фибоначчи.
Задача о шахматной доске. Истоки теории вероятностей.
П. Ферма, Б. Паскаль, Я. Бернулли, А. Н. Колмогоров.</td></tr>
</table>