

В.К. Шакурский

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ЭЛЕКТРОТЕХНИКИ

Учебное пособие

Часть 1

**Аналитические и численные
методы анализа установившихся режимов
в линейных и нелинейных
электрических цепях**

Тольятти
Издательство ТГУ
2013

Министерство образования и науки Российской Федерации
Тольяттинский государственный университет
Институт энергетики и электротехники
Кафедра «Электроснабжение и электротехника»

В.К. Шакурский

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ЭЛЕКТРОТЕХНИКИ

В двух частях

Часть 1

**Аналитические и численные методы анализа
установившихся режимов в линейных и нелинейных
электрических цепях**

Учебное пособие

Тольятти
Издательство ТГУ
2013

УДК 621.3.013(078.5)

ББК 3121

Ш19

Рецензенты:

д-р техн. наук, профессор Самарского
государственного технического университета *А.М. Абакумов*;
канд. техн. наук, доцент Тольяттинского государственного
университета *В.А. Шаповалов*.

Ш19 Шакурский, В.К. Теоретические основы электротехники :
в 2 ч. Ч. 1. Аналитические и численные методы анализа установив-
шихся режимов в электрических цепях : учеб. пособие / В.К. Ша-
курский. – Тольятти : Изд-во ТГУ, 2013. – 219 с. : обл.

Учебное пособие направлено на освоение методов и способов
численного анализа установившихся режимов в линейных и нели-
нейных электрических цепях. Приводятся примеры оформления
листинга численных решений задач анализа и диагностики элект-
рических цепей. Даются необходимые рекомендации.

Предназначено для студентов, обучающихся по направлению
подготовки 140400 «Электроэнергетика и электротехника».

УДК 621.3.013(078.5)

ББК 3121

Рекомендовано к изданию научно-методическим советом Толь-
яттинского государственного университета.

© ФГБОУ ВПО «Тольяттинский
государственный университет», 2013

Условные обозначения

В учебном пособии используется международная система единиц СИ (SI).

q – электрический заряд, кулон (Кл);

Φ – электрический потенциал, вольт (В);

ψ – начальная фаза, радиан (рад);

t – время, секунда (с);

f – частота, герц (Гц);

ω – угловая частота, радиан в секунду (рад/с);

T – период, секунда (с);

φ – фазовый сдвиг, радиан (рад);

e – мгновенное значение ЭДС, вольт (В);

i – мгновенное значение тока, ампер (А);

u – мгновенное значение напряжения, вольт (В);

p – мгновенное значение мощности, вольт-ампер (ВА);

r – активное сопротивление, ом (Ом);

x – реактивное сопротивление, ом (Ом);

z – модуль сопротивления, ом (Ом);

g – активная проводимость, сименс (См);

b – реактивная проводимость, сименс (См);

y – модуль проводимости, сименс (См);

R – сопротивление идеального резистора, ом (Ом);

G – проводимость идеального резистора, сименс (См);

L – индуктивность идеальной катушки, генри (Г);

M – взаимная индуктивность индуктивно связанных идеальных катушек, генри (Г);

C – ёмкость идеального конденсатора, фарад (Ф);

E – значение постоянной ЭДС; действующее значение переменной ЭДС, вольт (В);

E_m – максимальное значение переменной ЭДС, вольт (В);

I – значение постоянного тока; действующее значение переменного тока, ампер (А);

I_m – максимальное значение переменного тока, ампер (А);

U – значение постоянного напряжения; действующее значение переменного напряжения, вольт (В);

U_m – максимальное значение переменного напряжения, вольт (В);
 J – обозначение источника тока; постоянный ток источника тока; действующее значение переменного тока источника тока, ампер (А);
 J_m – максимальное значение переменного тока источника тока, ампер (А);
 S – модуль полной мощности, вольт-ампер (ВА);
 P – активная мощность, ватт (Вт);
 Q – реактивная мощность, вар (вар);
 j – мнимая единица;
 \underline{E} – комплексное действующее значение ЭДС, вольт (В);
 \underline{I} – комплексное действующее значение тока, ампер (А);
 \underline{I}^* – комплексное сопряжённое действующее значение тока, ампер (А);
 \underline{U} – комплексное действующее значение напряжения, вольт (В);
 \underline{S} – комплексная полная мощность, вольт-ампер (ВА);
 \underline{Z} – комплексное сопротивление, ом (Ом);
 \underline{Y} – комплексная проводимость, сименс (См);
 ψ – потокосцепление, вебер (Вб);
 l – длина, метр (м);
 s – площадь сечения, квадратный метр (м²);
 B – магнитная индукция, тесла (Т);
 H – напряжённость магнитного поля, ампер на метр (А/м);
 Φ – поток магнитной индукции, вебер (Вб);
 F – магнитодвижущая сила (МДС), ампер (А).

Примечание. В листинге численных решений обозначения могут быть другие. Это связано с особенностями программы Mathcad.

ВВЕДЕНИЕ

Установившиеся или принуждённые режимы работы электрических цепей являются частным случаем их произвольного состояния. Анализ установившихся режимов необходим для оценки основных параметров электротехнических устройств, схемами замещения которых являются идеализированные электрические цепи. Сложность существующих в технике электрических цепей требует совместного использования различных методов анализа. Аналитические методы позволяют получить систему уравнений состояния электрической цепи, а численные дают решение при известных исходных данных. Поэтому изучение дисциплины «Теоретические основы электротехники» (ТОЭ) требует параллельного освоения студентами численных методов решения систем линейных и нелинейных уравнений и других необходимых методов численного анализа.

Учебное пособие включает основные разделы численного анализа и диагностики линейных и нелинейных электрических цепей с сосредоточенными и распределёнными параметрами. Основное внимание уделяется подготовке листинга численного решения в программе Mathcad. После отработки листинга можно выполнить любое исследование цепи, варьируя параметрами источников и потребителей электрической энергии. Это позволяет углубить понимание процессов, происходящих в электрических цепях, и увидеть взаимное влияние элементов цепи друг на друга и на её общее состояние.

В учебном пособии приведены решения простых и сложных задач, поэтому им могут пользоваться студенты как электротехнических, так и других направлений подготовки. Понимание приведённых решений возможно лишь при наличии у студентов знаний основных методов анализа и диагностики электрических цепей и умений в использовании программы Mathcad.

Все замечания могут быть отправлены по электронной почте на адрес: Shakurskiy@mail.ru.

1. АНАЛИЗ ЛИНЕЙНЫХ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ С ИСТОЧНИКАМИ ПОСТОЯННОЙ ЭДС И ПОСТОЯННОГО ТОКА

Электрические цепи являются схемами замещения реальных электротехнических устройств. В линейных электрических цепях с источниками постоянной ЭДС и источниками постоянного тока в установившемся режиме протекают постоянные токи. В рассматриваемом режиме отсутствует влияние на токи индуктивных и емкостных элементов, поэтому указанные цепи содержат только источники и резисторы. Состояние электрической цепи определяется законами Кирхгофа [1; 3; 5; 6].

Рассмотрим основные методы анализа электрических цепей при постоянных токах с использованием численных решений.

1.1. Метод свёртки

Метод свёртки используется при определении значений неизвестных токов в электрических цепях с одним источником электрической энергии или при определении частичных составляющих неизвестных токов методом наложения. Операция свёртки пассивной части электрической цепи позволяет найти эквивалентное сопротивление цепи, которое является потребителем электрической энергии источника, а затем определить ток через источник ЭДС. После этого находят все остальные неизвестные токи в ветвях электрической цепи, постепенно разворачивая её к исходной схеме.

При свёртке используют эквивалентные преобразования пассивной цепи. Например, замена последовательного соединения резисторов одним эквивалентным; замена параллельного соединения резисторов одним эквивалентным; эквивалентные замены треугольника трёхлучевой звездой и наоборот.

1.1.1. Преобразования пассивных электрических цепей

Пример 1.1. На рис. 1.1 показана ветвь с последовательным соединением резисторов. Через все резисторы течёт один и тот же электрический ток. Это следует из принципа непрерывности электрического тока.

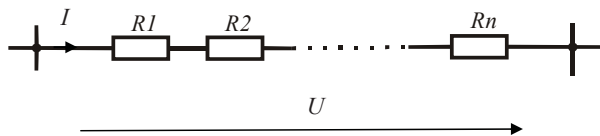


Рис. 1.1

$$U = I(R_1 + R_2 + \dots + R_n)$$

Из уравнения, составленного по второму закону Кирхгофа для данной ветви следует, что эквивалентное сопротивление ветви равно сумме сопротивлений резисторов. Определение эквивалентного сопротивления ветви, например с тремя известными резисторами, в среде MathCAD оформляется следующим образом:

$$\begin{aligned} \text{ORIGIN} &:= 1 & R_1 &:= 160 & R_2 &:= 310 & R_3 &:= 230 \\ R_{\text{э}} &:= \left(\sum_{k=1}^3 R_k \right) = 700 & R &= \begin{pmatrix} 160 \\ 310 \\ 230 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Индексация резисторов заставляет программу формировать массив данных в виде столбцовой матрицы. По умолчанию первый член массива имеет нулевой индекс (*ORIGIN:=0*). В этом случае в столбце *R* появится первый член, равный нулю (смотри следующий пример). Его можно исключить, изменив индекс первого члена массива указанным выше образом. Использование массива данных позволяет оформить описание операции суммирования компактным образом.

Пример 1.2. На рис. 1.2 показано параллельное соединение резисторов между двумя узлами. Напряжение на всех резисторах одинаковое.

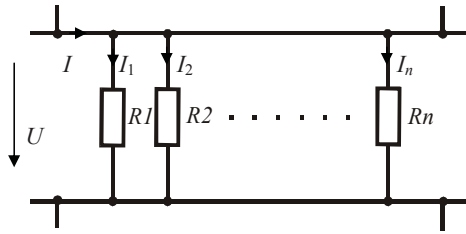


Рис. 1.2

$$I = I_1 + I_2 + \dots + I_n = U(G_1 + G_2 + \dots + G_n),$$

Из уравнения, составленного по первому и второму законам Кирхгофа для данной цепи следует, что эквивалентная проводимость всех ветвей равна сумме проводимостей отдельных ветвей. Определение эквивалентного сопротивления данного участка цепи, например с четырьмя заданными резисторами (360, 410, 530, 430), оформляется следующим образом:

$$G_1 := 360^{-1} \quad G_2 := 410^{-1} \quad G_3 := 530^{-1} \quad G_4 := 430^{-1} \quad G = \begin{pmatrix} 0 \\ 2.778 \times 10^{-3} \\ 2.439 \times 10^{-3} \\ 1.887 \times 10^{-3} \\ 2.326 \times 10^{-3} \end{pmatrix}$$

$$R_{\text{э}} := \left(\sum_{k=1}^4 G_k \right)^{-1} = 106.054$$

Отсутствующему в массиве исходных данных элементу G_0 программой присвоено значение ноль.

Пример 1.3. На рис. 1.3 показано эквивалентное преобразование соединения резисторов треугольником в соединение трёхлучевой звездой и наоборот.

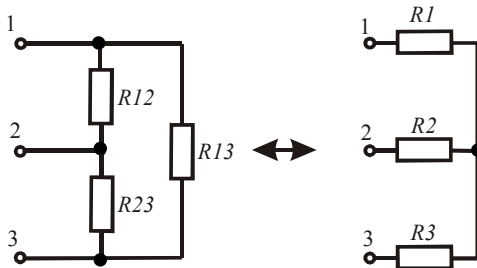


Рис. 1.3

Условие эквивалентности цепей требует неизменности токов, подтекающих к узлам, и неизменности напряжений между узлами. Чтобы выполнить условие эквивалентности, необходимо пересчитывать сопротивления резисторов [1; 3].

Во многих случаях без данного преобразования нельзя выполнить свёртку сложной пассивной электрической цепи к одному эквивалентному резистору.

Определение сопротивлений резисторов после преобразования осуществляется по известным формулам. Например, даны сопротивления ветвей треугольника. Определим сопротивления ветвей эквивалентной звезды. Это оформляется следующим образом:

$$\begin{array}{lll}
 R12 := 250 & R23 := 300 & R13 := 180 \\
 m := R12 + R23 + R13 & R1 := \frac{R12 \cdot R13}{m} & R2 := \frac{R23 \cdot R12}{m} & R3 := \frac{R13 \cdot R23}{m} \\
 R1 = 61.644 & R2 = 102.74 & R3 = 73.973
 \end{array}$$

Если даны сопротивления ветвей звезды, то расчёт сопротивлений ветвей треугольника оформляется следующим образом:

$$\begin{array}{lll}
 R1 := 120 & R2 := 180 & R3 := 200 \\
 p := R1 \cdot R3 + R2 \cdot R3 + R1 \cdot R2 & R12 := \frac{p}{R3} & R23 := \frac{p}{R1} & R13 := \frac{p}{R2} \\
 R12 = 408 & R23 = 680 & R13 = 453.333
 \end{array}$$

В последних примерах формирование массивов данных не требуется, поэтому для обозначения резисторов используются строчные цифры.

1.1.2. Численный анализ электрической цепи с одним источником электрической энергии

Для определения неизвестных токов в электрической цепи с одним источником электрической энергии используется метод свёртки [1; 3]. Для определения токов в параллельных ветвях используют формулу разброса токов (токи в параллельных ветвях обратно пропорциональны сопротивлениям ветвей). Далее находят остальные неизвестные токи по мере разворачивания цепи к исходной схеме.

Пример 1.4. Определим неизвестные токи в заданной электрической цепи (рис. 1.4).

Для свёртки пассивного двухполюсника, который подключен к источнику, необходимо выполнить преобразование звезды в треугольник (рис. 1.5).

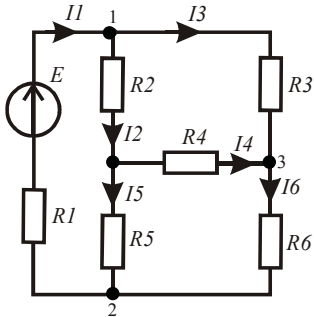


Рис. 1.4

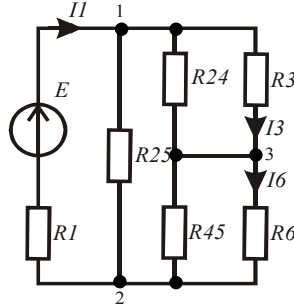


Рис. 1.5

Затем выполним последовательно преобразования, необходимые для свёртки цепи к одной ветви (рис. 1.6, 1.7, 1.8).

Выполним численный анализ цепи. Введём в листинг решения параметры цепи:

ORIGIN := 1

$E := 24$ $R_1 := 100$ $R_2 := 80$ $R_3 := 40$ $R_4 := 150$ $R_5 := 120$ $R_6 := 140$

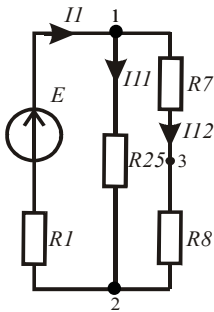


Рис. 1.6

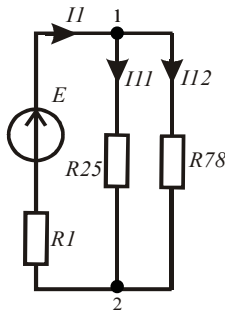


Рис. 1.7

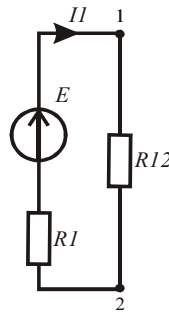


Рис. 1.8

Рассчитаем сопротивления ветвей на этапах преобразования цепи:

$$m := R_2 \cdot R_4 + R_4 \cdot R_5 + R_2 \cdot R_5 \quad R_{24} := \frac{m}{R_5} \quad R_{25} := \frac{m}{R_4} \quad R_{45} := \frac{m}{R_2}$$

$$R_7 := \left[(R_3)^{-1} + (R_{24})^{-1} \right]^{-1} \quad R_8 := \left[(R_6)^{-1} + (R_{45})^{-1} \right]^{-1}$$

$$R_{12} := \left[(R_{78})^{-1} + (R_{25})^{-1} \right]^{-1} \quad R_{78} := R_7 + R_8$$

Рассчитаем соответствующие токи в ветвях, используя промежуточные схемы и формулу разброса токов:

$$I_1 := \frac{E}{R_1 + R_{12}} = 0.124 \quad I_{12} := I_1 \cdot \frac{R_{25}}{R_{25} + R_{78}} = 0.08 \quad I_{11} := I_1 - I_{12} = 0.044$$

$$I_3 := I_{12} \cdot \frac{R_{24}}{R_{24} + R_3} = 0.071 \quad I_6 := I_{12} \cdot \frac{R_{45}}{R_{45} + R_6} = 0.062$$

$$I_2 := I_1 - I_3 = 0.053 \quad I_5 := I_1 - I_6 = 0.062 \quad I_4 := I_6 - I_3 = -8.999 \times 10^{-3}$$

Из результатов вычислений видно, что реальное направление тока I_4 противоположно направлению, выбранному предварительно.

Для проверки правильности вычислений составим уравнение баланса мощностей. Определим мощность, отдаваемую источником, и суммарную мощность, потребляемую резисторами:

$$E \cdot I_1 = 2.977 \quad \sum_{k=1}^6 [(I_k)^2 \cdot R_k] = 2.977$$

Из равенства мощностей источника и потребителей можно сделать вывод о верности найденных значений токов и их направлений.

1.1.3. Численный анализ электрической цепи методом наложения

В основе метода наложения лежит принцип суперпозиции, поэтому его можно использовать только для анализа линейных электрических цепей. Реальные токи в ветвях находят как суперпозицию частных токов. Частичные токи определяются как результат действия в электрической цепи каждого источника в отдельности, при этом остальные источники замещаются их внутренним сопротивлением. Внутреннее сопротивление источника ЭДС равно нулю, а

у источника тока внутреннее сопротивление равно бесконечности. Частичные токи находят методом свёртки.

Пример 1.5. Определим все неизвестные токи в электрической цепи (рис. 1.9). Подготовим необходимые схемы замещения (рис. 1.10, 1.11, 1.12) для определения частичных токов.

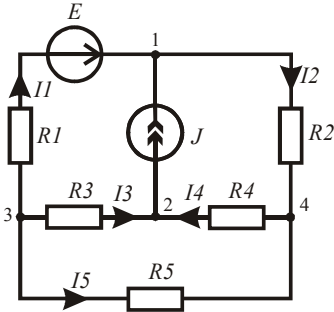


Рис. 1.9

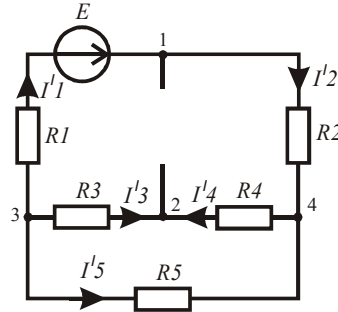


Рис. 1.10

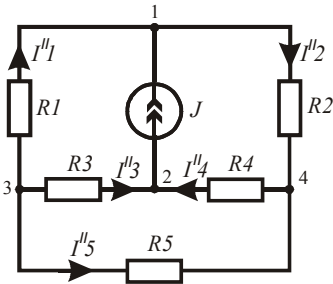


Рис. 1.11

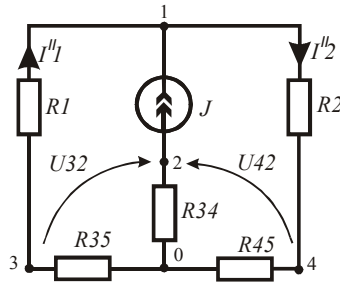


Рис. 1.12

Выполним численный анализ цепи. Введём параметры цепи:

$ORIGIN := 1$

$E := 25 \quad J := 0.5 \quad R_1 := 120 \quad R_2 := 85 \quad R_3 := 50 \quad R_4 := 150 \quad R_5 := 160$

Определим частичные токи от действия источника ЭДС по первой схеме замещения (рис. 1.10).

$$I_{11} := \frac{E}{R_1 + R_2 + \left[(R_3 + R_4)^{-1} + (R_5)^{-1} \right]^{-1}} \quad I_{12} := I_{11}$$

$$I_{14} := I_{12} \cdot R_5 \cdot (R_3 + R_4 + R_5)^{-1} \quad I_{13} := -I_{14} \quad I_{15} := I_{14} - I_{12}$$

Определим частичные токи от действия источника тока по соответствующим схемам замещения (рис. 1.11, 1.12). Для этого вначале выполним преобразование треугольника в звезду и определим сопротивления ветвей звезды, которая замещает треугольник:

$$m := R_3 + R_4 + R_5 \quad R_{34} := \frac{R_3 \cdot R_4}{m} \quad R_{35} := \frac{R_3 \cdot R_5}{m} \quad R_{45} := \frac{R_4 \cdot R_5}{m}$$

$$I_{22} := J \cdot (R_1 + R_{35}) \cdot (R_1 + R_{35} + R_2 + R_{45})^{-1} \quad I_{21} := I_{22} - J$$

$$U_{32} := J \cdot R_{34} - I_{21} \cdot R_{35} \quad I_{23} := U_{32} \cdot (R_3)^{-1}$$

$$U_{42} := J \cdot R_{34} + I_{22} \cdot R_{45} \quad I_{24} := U_{42} \cdot (R_4)^{-1} \quad I_{25} := I_{24} - I_{22}$$

Определим реальные токи в ветвях схемы как сумму частичных токов.

$$I_1 = \begin{pmatrix} 0.085 \\ 0.085 \\ -0.038 \\ 0.038 \\ -0.047 \end{pmatrix} \quad I_2 = \begin{pmatrix} -0.258 \\ 0.242 \\ 0.323 \\ 0.177 \\ -0.065 \end{pmatrix} \quad I := I_1 + I_2 = \begin{pmatrix} -0.173 \\ 0.327 \\ 0.285 \\ 0.215 \\ -0.112 \end{pmatrix}$$

Видно, что реальные направления первого и пятого токов противоположны направлениям, выбранным предварительно.

Для проверки правильности решения составим уравнение баланса мощностей. Сравним мощность, отдаваемую источниками, и мощность, потребляемую резисторами. Предварительно найдём напряжение на источнике тока.

$$U_{12} := I_2 \cdot R_2 + I_4 R_4 \quad J \cdot U_{12} + E \cdot I_1 = 25.684 \quad \sum_{k=1}^5 [(I_k)^2 \cdot R_k] = 25.684$$

Условие равенства мощностей выполнено, следовательно, результаты анализа цепи методом наложения верны.

В данном примере программой сформированы массив сопротивлений ветвей и три массива значений токов. Массивы частичных токов обозначены строчными цифрами, соответствующими штрихам на схемах замещения. Промежуточные значения сопротивлений также обозначены строчными цифрами, чтобы они не попали в массив сопротивлений ветвей исходной электрической цепи.

1.1.4. Расчёт и оформление потенциальной диаграммы

Потенциальная диаграмма является графиком, отражающим зависимость значений потенциала заданных точек цепи от сопротивления цепи, начиная от некоторой точки, обычно с нулевым потенциалом, но не обязательно.

Приведём пример оформления потенциальной диаграммы для одного контура (рис. 1.13), вырванного из сложной цепи, параметры элементов которой известны, а токи найдены.

Рассчитаем потенциалы всех пронумерованных точек. Направление обхода выбираем по часовой стрелке.

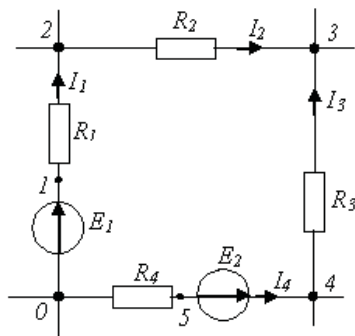


Рис. 1.13

Введём в листинг исходные данные:

```
R1 := 10    R2 := 20    R3 := 25    R4 := 80    E1 := 20    E2 := 28
I1 := 0.5   I2 := 0.8   I3 := 0.2   I4 := 0.3   Φ0 := 0
```

Определим координаты точек, учитывая, что внутреннее сопротивление источника ЭДС равно нулю.

$$\Phi_1 := \Phi_0 + E1 \quad \Phi_2 := \Phi_1 - I1 \cdot R1 \quad \Phi_3 := \Phi_2 - I2 \cdot R2$$

$$\Phi_4 := \Phi_3 + I3 \cdot R3 \quad \Phi_5 := \Phi_4 - E2 \quad \Phi_6 := \Phi_5 + I4 \cdot R4 \quad \Phi_6 = \Phi_0$$

$$R_0 := 0 \quad R_1 := R_0 + 0 \quad R_2 := R_1 + R1 \quad R_3 := R_2 + R2$$

$$R_4 := R_3 + R3 \quad R_5 := R_4 + 0 \quad R_6 := R_5 + R4$$

$$\Phi^T = (0 \ 20 \ 15 \ -1 \ 4 \ -24 \ 0) \quad R^T = (0 \ 0 \ 10 \ 30 \ 55 \ 55 \ 135)$$

Построим график $\Phi(R)$ в декартовой системе координат (рис. 1.14).

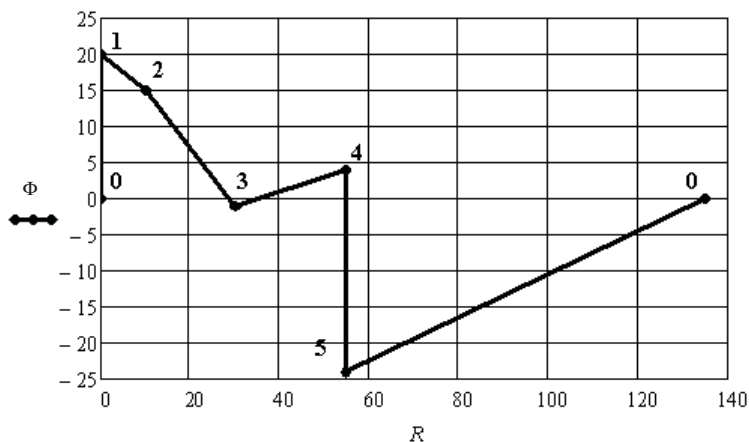


Рис. 1.14

Нумерация точек наложена после переноса графика в программу Word.

1.2. Метод уравнений Кирхгофа

Состояние любой электрической цепи в любой момент времени определяется системой уравнений, составленной по законам Кирхгофа для мгновенных значений токов, падений напряжений и ЭДС. В цепи с постоянными источниками мгновенные значения совпадают с постоянными.

При составлении уравнений используют следующие правила. Число уравнений в системе должно быть равно числу неизвестных токов. Уравнения по первому закону Кирхгофа составляются для всех узлов электрической цепи, исключая один любой узел. Уравнения по второму закону Кирхгофа составляются для независимых контуров.

Для составления уравнений вводят условно положительные направления неизвестных токов, которые задаются произвольно. В уравнениях, составленных по первому закону Кирхгофа, входящие в узел и вытекающие токи должны быть с разным знаком. При

составлении уравнений по второму закону Кирхгофа в независимых контурах задаются направления обхода. Условно положительные направления падений напряжений на пассивных участках электрической цепи совпадают с условно положительными направлениями токов. Знаки слагаемых определяют, сравнивая направления падений напряжений и ЭДС с направлением обхода. При совпадении направлений берут плюс, в противном случае берут минус.

Наиболее просто научиться составлять и использовать рассматриваемую систему уравнений на готовых примерах, которые приведены ниже.

Пример 1.6. На рис. 1.15 приведена электрическая цепь постоянного тока, которая содержит 8 ветвей с неизвестными токами, одну ветвь с источником тока и шесть узлов.

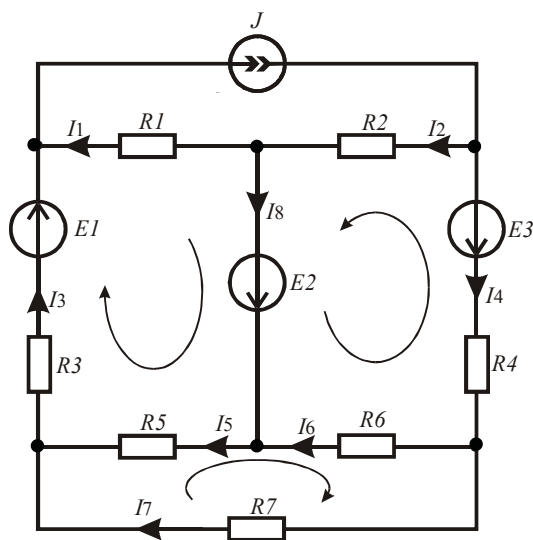


Рис. 1.15

Для определения значений неизвестных токов надо составить систему из восьми уравнений, из них пять уравнений составляются по первому закону Кирхгофа, а три – по второму закону Кирхгофа для независимых контуров. Направления неизвестных токов и направления обхода контуров выбраны произвольно.

Исключим нижний средний узел. В результате получим следующую систему уравнений.

$$\begin{cases} I_1 + I_3 - J = 0 \\ -I_1 + I_2 - I_8 = 0 \\ -I_2 - I_4 + J = 0 \\ -I_3 + I_5 + I_7 = 0 \\ I_4 - I_6 - I_7 = 0 \\ -I_1 R_1 + I_3 R_3 + I_5 R_5 = E_1 + E_2 \\ I_2 R_2 - I_4 R_4 - I_6 R_6 = E_2 - E_3 \\ -I_5 R_5 - I_6 R_6 + I_7 R_7 = 0 \end{cases} \quad (1.1)$$

Систему уравнений (1.1) запишем в матричной форме:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{I} = \mathbf{B}, \quad (1.2)$$

где в левой части уравнения первый сомножитель – квадратная матрица коэффициентов, второй сомножитель – столбцовая матрица неизвестных токов, а в правой части – столбцовая матрица соответствующих источников.

Указанные матрицы имеют следующий вид:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ -R_1 & 0 & R_3 & 0 & R_5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & R_2 & 0 & -R_4 & 0 & -R_6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -R_5 & -R_6 & R_7 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{I} = \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_4 \\ I_5 \\ I_6 \\ I_7 \\ I_8 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} J \\ 0 \\ -J \\ 0 \\ 0 \\ E_1 + E_2 \\ E_2 - E_3 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Оформим листинг численного решения. Вначале зададимся исходными данными.

$$\begin{aligned} ORIGIN &:= 1 & R_1 &:= 18 & R_2 &:= 24 & R_3 &:= 15 & R_4 &:= 26 \\ R_5 &:= 30 & R_6 &:= 20 & R_7 &:= 12 & J &:= 0.5 & E_1 &:= 50 & E_2 &:= 60 & E_3 &:= 40 \end{aligned}$$

Оператор *ORIGIN* определяет значение индекса первого члена формируемых массивов. Для решения системы уравнений надо подготовить в листинге только матрицы **A** и **B**, используя панель *matrix*.

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ -R_1 & 0 & R_3 & 0 & R_5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & R_2 & 0 & -R_4 & 0 & -R_6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -R_5 & -R_6 & R_7 & 0 \end{pmatrix} \quad B := \begin{pmatrix} J \\ 0 \\ -J \\ 0 \\ 0 \\ E_1 + E_2 \\ E_2 - E_3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Решение линейной системы уравнений находим с помощью следующего оператора:

$$I := \text{lsolve}(A, B)$$

Ответом является столбцовая матрица токов. Для компактности записи перейдём к строковой матрице с помощью оператора транспонирования.

$$I^T = (-2.005 \quad 0.244 \quad 2.505 \quad 0.256 \quad 1.211 \quad -1.039 \quad 1.295 \quad 2.25)$$

Решение линейной системы уравнений может быть найдено и с помощью следующего матричного уравнения:

$$I := A^{-1} \cdot B$$

Ответом задачи определения неизвестных токов является величина и направление всех искомым токов. Так как направлениями токов мы задались произвольно, то минус в ответе говорит об ошибке в выборе направления. В данном примере направления первого и шестого токов надо изменить на противоположные.

Убедимся в достоверности полученных значений токов. Для этого проверим баланс мощностей источников и приёмников в рассматриваемой электрической цепи.

Найдём значение мощности, отдаваемой источниками. Уравнение составим по исходной схеме цепи с произвольно выбранными направлениями токов, а токи возьмём с полученными выше знаками.

$$P_{\text{и}} := E_1 \cdot I_3 + E_2 \cdot I_8 + E_3 \cdot I_4 + J \cdot (I_1 \cdot R_1 + I_2 \cdot R_2) = 255.37$$

Сумма в круглых скобках даёт напряжение на зажимах источника тока.

Найдём значение суммарной мощности, рассеиваемой резисторами.

$$Pr := \sum_{k=1}^7 [R_k \cdot (I_k)^2] = 255.37$$

Баланс мощностей выполняется. Последнее уравнение получилось компактным, так как использовались массивы сопротивлений и токов с согласованными индексами. В предыдущем уравнении индексы не согласованы, поэтому потребовалась развёрнутая запись.

При анализе сложных электрических цепей возникают трудности на этапе выбора независимых контуров. Устранить их можно, если использовать для составления уравнений направленный граф цепи. В этом случае система уравнений в матричной форме принимает следующий вид.

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{A} \\ \mathbf{B} \cdot \mathbf{R} \end{Bmatrix} \cdot \mathbf{I} = \begin{Bmatrix} \mathbf{O} \\ \mathbf{B} \cdot \mathbf{E} - \mathbf{B} \cdot \mathbf{R} \cdot \mathbf{J} \end{Bmatrix}, \quad (1.3)$$

где \mathbf{A} – прямоугольная матрица соединений, \mathbf{B} – прямоугольная матрица контуров, \mathbf{R} – диагональная матрица сопротивлений ветвей, \mathbf{E} – матрица-столбец ЭДС ветвей, \mathbf{J} – матрица-столбец источников тока, \mathbf{O} – матрица-столбец нулей.

Матричное уравнение объединяет уравнения, составленные по первому и второму законам Кирхгофа. Знаки элементов матриц определяются исходя из условно положительных направлений, указанных на обобщённой ветви (рис. 1.16), и направлений ветвей графа. Предварительно из электрической цепи исключаются вырожденные ветви с помощью соответствующих эквивалентных преобразований (расщепление узлов и расщепление ветвей).

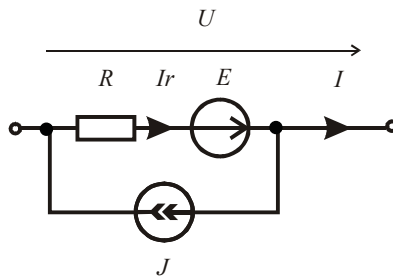


Рис. 1.16

Рассмотрим методику составления и решения матричного уравнения (1.3) на следующем примере.

Пример 1.7. На рис. 1.17 приведена исследуемая электрическая цепь.

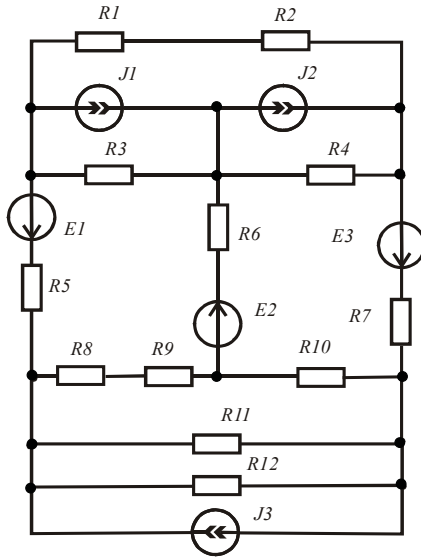


Рис. 1.17

На рис. 1.18 приведён направленный граф данной цепи с произвольно выбранными направлениями ветвей. На рис. 1.19 приведено одно из возможных деревьев графа.

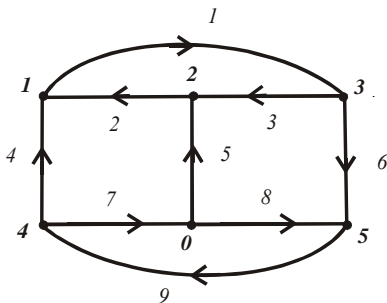


Рис. 1.18

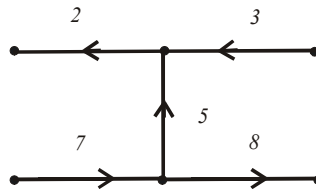


Рис. 1.19

Подготовим листинг для решения данной задачи. Составим матрицы соединений и контуров, используя следующие правила.

Строки матрицы соединений соответствуют узлам графа, за исключением нулевого узла. Столбцы соответствуют ветвям графа. Элементы матрицы равны: нулю, если данная ветвь не соединена с данным узлом; единице, если данная ветвь соединена с данным узлом и направлена от узла; минус единице, если данная ветвь соединена с данным узлом и направлена к узлу.

Строки матрицы контуров соответствуют связям дерева графа. Столбцы соответствуют ветвям графа. Элементы матрицы равны нулю, если данная ветвь не входит в контур, образованный данной связью; единице, если данная ветвь входит в контур, образованный данной связью, и направление её совпадает с направлением обхода контура, который берётся по направлению связи; минус единице, если данная ветвь входит в контур, образованный данной связью, а направление её не совпадает с направлением обхода контура.

Для графа (рис. 1.18) матрицы соединений и контуров имеют следующий вид:

$$A := \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad B := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Зададимся параметрами элементов электрической цепи.

$$\begin{aligned} \text{ORIGIN} &:= 1 & R1 &:= 18 & R2 &:= 24 & R3 &:= 15 & R4 &:= 26 & R5 &:= 30 & R6 &:= 20 \\ R7 &:= 12 & R8 &:= 35 & R9 &:= 22 & R10 &:= 32 & R11 &:= 42 & R12 &:= 40 \\ E1 &:= 50 & E2 &:= 60 & E3 &:= 40 & J1 &:= 0.5 & J2 &:= 0.2 & J3 &:= 0.4 \end{aligned}$$

Подготовим диагональную матрицу сопротивлений ветвей.

$$R := \left(R1 + R2 \quad R3 \quad R4 \quad R5 \quad R6 \quad R7 \quad R8 + R9 \quad R10 \quad \frac{R11 \cdot R12}{R11 + R12} \right)^T \quad Rd := \text{diag}(R)$$

Подготовим матрицы источников и матрицу нулей.

$$\begin{aligned} E &:= (0 \quad 0 \quad 0 \quad -E1 \quad E2 \quad E3 \quad 0 \quad 0 \quad 0)^T & J &:= (0 \quad J1 \quad J2 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad -J3)^T \\ O &:= (0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0)^T \end{aligned}$$

В системе уравнений используются столбцовые матрицы. Для компактности записи использовались строковые матрицы и оператор транспонирования.

Левую и правую части матричного уравнения (1.3) получим с помощью оператора слияния матриц по вертикали.

$$AI := \text{stack}(A, B \cdot Rd) \quad BI := \text{stack}(O, B \cdot E - B \cdot Rd \cdot J)$$

Найдём решение полученной системы линейных уравнений.

$$I := \text{lsolve}(AI, BI)$$

$$I^T = (0.069 \quad 0.697 \quad -1.002 \quad -0.627 \quad 1.699 \quad 1.071 \quad 0.689 \quad -1.01 \quad 0.061)$$

Чтобы убедиться, что токи найдены правильно, проверим баланс мощностей источников и приёмников электрической энергии в заданной цепи. Предварительно найдём токи в ветвях, содержащих резисторы, и напряжения на обобщённых ветвях.

$$Ir := I + J \quad U := \overrightarrow{(Ir \cdot R - E)}$$

При определении напряжений использован оператор векторизации. Этот оператор предназначен для работы с массивами. Он берётся с панели *Matrix* и позволяет провести однотипную операцию над всеми элементами массива.

Найдём отдельно мощности источников ЭДС и источников тока и суммарную мощность всех источников.

$$Pe := \sum_{k=1}^9 (E_k \cdot Ir_k) = 176.139 \quad Pi := \sum_{k=1}^9 (J_k \cdot U_k) = 7.579 \quad Pe + Pi = 183.718$$

Найдём мощность, рассеиваемую резисторами электрической цепи.

$$Pr := \sum_{k=1}^9 [R_k \cdot (Ir_k)^2] = 183.718$$

Баланс мощностей выполняется.

Токи в резисторах $R11$ и $R12$ обратно пропорциональны их сопротивлению. Найдём их по формулам разброса тока, подтекающего к узлу.

$$Ir11 := Ir9 \cdot \frac{R12}{R11 + R12} = -0.165 \quad Ir12 := Ir9 \cdot \frac{R11}{R11 + R12} = -0.173$$

Остальные токи в ветвях с резисторами найдены выше и имеют следующие значения:

$$I_r^T = (0.069 \quad 1.197 \quad -0.802 \quad -0.627 \quad 1.699 \quad 1.071 \quad 0.689 \quad -1.01 \quad -0.339)$$

Знаки полученных токов позволяют указать на схеме электрической цепи их реальное направление. Погрешность суммы токов в резисторах $R11$ и $R12$ по сравнению с током I_r , объясняется ограниченным количеством разрядов числа, выводимого на экран монитора. Точные значения можно получить следующим образом:

$$I_{r9} \rightarrow -0.338678524687172504069 \quad I_{r11} \rightarrow -0.16520903643276716$$

$$I_{r12} \rightarrow -0.17346948825440553$$

Необходимый оператор (стрелка) берётся с панели *Symbolic*.

В задачах анализа линейных электрических цепей система уравнений, составленная по законам Кирхгофа, используется редко из-за её громоздкости. В основном используют метод контурных токов или метод узловых потенциалов, которые позволяют составить более компактные системы уравнений. Рассмотрим использование этих методов в следующих разделах.

Результаты вычислений можно выводить в виде таблиц и в виде матриц. Для этого надо по траектории *Format, Result Format, Display Options, Matrix display style* установить *Table* либо *Matrix*. В противном случае программа выбирает стиль самостоятельно.

1.3. Метод контурных токов

В основе метода контурных токов лежит принцип суперпозиции. Задача анализа электрической цепи решается в два этапа. На первом этапе находят условные контурные токи, которые протекают в независимых контурах цепи. На втором этапе находят реальные токи в ветвях как алгебраическую сумму соответствующих контурных токов, протекающих в этих ветвях.

1.3.1. Использование системы уравнений, составленной по схеме электрической цепи

Число неизвестных контурных токов равно числу независимых контуров. Выбирают произвольное направление неизвестных кон-

Рассчитаем коэффициенты уравнений системы (1.5).

$$\begin{aligned}
 R11 &:= R_1 + R_3 + R_5 + R_8 & R22 &:= R_2 + R_4 + R_6 + R_8 & R33 &:= R_5 + R_6 + R_7 \\
 R12 &:= R_8 & R21 &:= R12 & R13 &:= -R_5 & R31 &:= R13 & R14 &:= -R_1 & R24 &:= R_2 \\
 R23 &:= R_6 & R32 &:= R23 & R34 &:= 0 & E11 &:= E_1 + E_2 & E22 &:= E_2 - E_3 & E33 &:= 0
 \end{aligned}$$

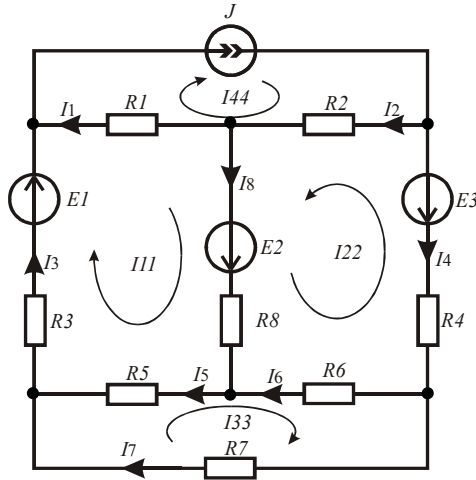


Рис. 1.20

Составим матрицу коэффициентов левой части системы (1.5) и матрицу правой части.

$$A := \begin{pmatrix} R11 & R12 & R13 \\ R21 & R22 & R23 \\ R31 & R32 & R33 \end{pmatrix} \quad B := \begin{pmatrix} E11 - R14 \cdot J \\ E22 - R24 \cdot J \\ E33 - R34 \cdot J \end{pmatrix}$$

Найдём контурные токи.

$$I_k := A^{-1} \cdot B \quad I_k^T = (0.568 \quad -0.445 \quad 0.347)$$

Найдём неизвестные токи в ветвях электрической цепи, как алгебраическую сумму соответствующих контурных токов.

$$\begin{aligned}
 I_1 &:= J - I_{k1} & I_2 &:= J + I_{k2} & I_3 &:= I_{k1} & I_4 &:= -I_{k2} & I_5 &:= I_{k1} - I_{k3} \\
 I_6 &:= I_{k2} + I_{k3} & I_7 &:= I_{k3} & I_8 &:= I_{k1} + I_{k2}
 \end{aligned}$$

$$I^T = (0.232 \quad 0.355 \quad 0.568 \quad 0.445 \quad 0.221 \quad -0.098 \quad 0.347 \quad 0.123)$$

На рис. 1.20 направления токов в ветвях проставлены после выполнения вычислений, поэтому шестой ток направлен против контурных токов, так как он получился отрицательным.

Проверим равенство мощностей источников и потребителей электрической энергии.

$$U := I_1 \cdot R_1 + I_2 \cdot R_2 \quad J \cdot U + E_1 \cdot I_3 + E_2 \cdot I_8 + E_3 \cdot I_4 = 101.621$$

$$\sum_{k=1}^8 [(I_k)^2 \cdot R_k] = 101.621$$

Баланс мощностей выполняется.

1.3.2. Использование графа электрической цепи

При анализе сложных электрических цепей возникают трудности на этапе выбора независимых контуров. Устранить их можно, если использовать для составления контурных уравнений направленный граф цепи. В этом случае система контурных уравнений в матричной форме принимает следующий вид:

$$\mathbf{B} \cdot \mathbf{R} \cdot \mathbf{B}^T \cdot \mathbf{I}_k = \mathbf{B} \cdot (\mathbf{E} - \mathbf{R} \cdot \mathbf{J}), \quad (1.6)$$

где \mathbf{B} – матрица контуров, правила составления которой с помощью направленного графа цепи рассматривались ранее; \mathbf{I}_k – матрица-столбец неизвестных контурных токов; \mathbf{R} – диагональная матрица сопротивлений ветвей; \mathbf{E} – матрица-столбец ЭДС ветвей, \mathbf{J} – матрица-столбец источников тока.

Рассмотрим методику использования уравнения (1.6) на следующем примере.

Пример 1.9. На рис. 1.21 приведена электрическая цепь постоянного тока, которая содержит вырожденные ветви. Это E_3 и J_1 .

На рис. 1.22 приведена электрическая цепь после её эквивалентного преобразования с целью исключения вырожденных ветвей. Для этого использовались операции расщепления узла и расщепления ветви. На рис. 1.23 приведён направленный граф данной цепи с произвольно выбранными направлениями ветвей. На рис. 1.24 приведено одно из возможных деревьев графа.

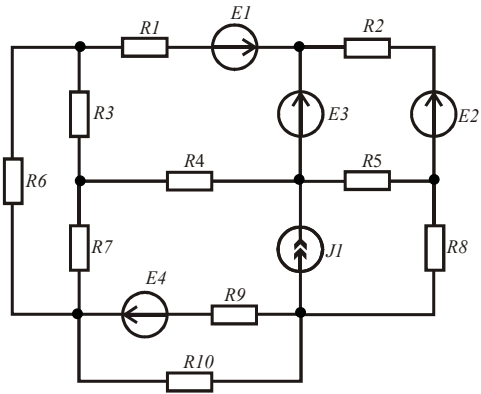


Рис. 1.21

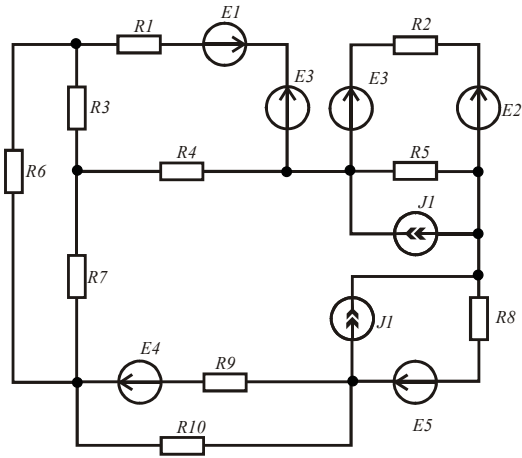


Рис. 1.22

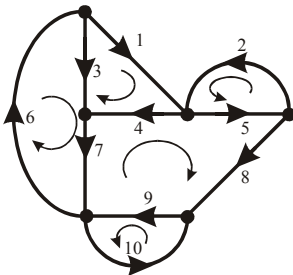


Рис. 1.23

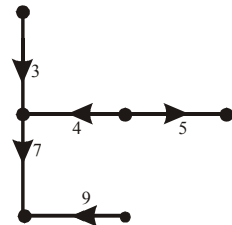


Рис. 1.24

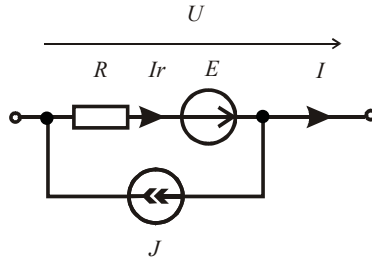


Рис. 1.25

Подготовим листинг решения данной задачи. Зададимся исходными данными. При определении знаков источников в соответствующих матрицах используем условно положительные направления токов и ЭДС в обобщённой ветви (рис. 1.25).

```
ORIGIN := 1  E1 := 200  E2 := 150  E3 := 80  E4 := 100  E5 := 140
R1 := 100  R2 := 80  R3 := 50  R4 := 75  R5 := 120  R6 := 95  R7 := 70
R8 := 110  R9 := 60  R10 := 55  J1 := 1.2
```

Составим матрицы источников и сопротивлений ветвей, затем перейдём к диагональной матрице сопротивлений ветвей.

$$E := (E1 - E3 \quad E2 - E3 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad E5 \quad E4 \quad 0)^T$$

$$J := (0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad J1 \quad 0 \quad 0 \quad J1 \quad 0 \quad 0)^T$$

$$R := (R1 \quad R2 \quad R3 \quad R4 \quad R5 \quad R6 \quad R7 \quad R8 \quad R9 \quad R10)^T \quad Rd := \text{diag}(R)$$

Составим матрицу контуров, используя дерево графа и его связи (см. пример 1.7).

$$B := \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Рассчитаем левую и правую части матричного уравнения и найдём контурные токи.

$$A := B \cdot Rd \cdot B^T \quad C := B \cdot (E - Rd \cdot J) \quad Ik := A^{-1} \cdot C$$

$$Ik^T = (0.57438 \quad -0.38681 \quad 0.1427 \quad 0.02802 \quad 0.85495)$$

Определим неизвестные токи в ветвях заданной цепи, как алгебраическую сумму соответствующих контурных токов.

$$I_1 := Ik_1 \quad I_2 := Ik_2 \quad I_3 := Ik_3 - Ik_1 \quad I_4 := Ik_1 - Ik_4 \quad I_5 := Ik_2 + J1 + Ik_4$$

$$I_6 := Ik_3 \quad I_7 := Ik_3 - Ik_4 \quad I_8 := Ik_4 + J1 \quad I_9 := Ik_4 + Ik_5 \quad I_{10} := Ik_5$$

$$I^T =$$

	1	2	3	4	5	6	7
1	0.57438	-0.38681	-0.43168	0.54636	0.84121	0.1427	...

Ток в вырожденной ветви с источником ЭДС E_3 найдём с помощью первого закона Кирхгофа:

$$IE3 := I_1 + I_2$$

Определим напряжения на ветвях цепи и убедимся в балансе мощностей источников и приёмников.

$$U_r := (R \cdot I) \quad U_v := U_r - E$$

$$\sum_{k=1}^{10} (E_k \cdot I_k) + \sum_{k=1}^{10} (U_{v_k} \cdot J_k) = 417.30111 \quad \sum_{k=1}^{10} [(I_k)^2 \cdot R_k] = 417.30111$$

Баланс мощностей выполняется.

При определении напряжений на резисторах использовался оператор векторизации. Показанное оформление вычислений позволяет сделать листинг компактным.

На последнем этапе необходимо показать на схеме электрической цепи реальные направления токов. Если токи положительные, то необходимо взять направления ветвей графа, а если токи отрицательные, то берут противоположные направления.

Для исключения вырожденной ветви с источником ЭДС необходимо параллельно источнику подключить столько таких же источников, сколько ветвей подключено к нему. Затем узел расщепляется и исчезает из схемы.

Для исключения вырожденной ветви с источником тока необходимо последовательно с ним включить столько таких же источников, сколько ветвей охватывает источник тока. Точки соединения источников соединяются с ближайшими узлами. Затем вырожденная ветвь расщепляется и исчезает из схемы.

Пример 1.10. Выполним исследование электрической цепи (рис. 1.26) при вариации тока источника тока. Для определения контурных токов используем способ решения системы уравнений методом последовательных приближений (вычислительный блок *Given/Find*).

Введём в листинг параметры элементов цепи:

$ORIGIN := 1$

$E_1 := 45 \quad E_2 := 24 \quad E_3 := 60 \quad J := 0.8 \quad R_1 := 120 \quad R_2 := 85$

$R_3 := 90 \quad R_4 := 150 \quad R_5 := 160 \quad R_6 := 100 \quad R_7 := 130$

Определим коэффициенты системы уравнений. Четвёртый контурный ток известен и равен току источника тока. Для него уравнение не составляется, но он учитывается в уравнениях для неизвестных контурных токов.

$R_{11} := R_1 + R_3 + R_5 \quad R_{22} := R_2 + R_4 + R_6 \quad R_{33} := R_5 + R_6 + R_7 \quad R_{34} := 0$

$R_{12} := 0 \quad R_{21} := R_{12} \quad R_{13} := -R_5 \quad R_{31} := R_{13} \quad R_{14} := -R_1 \quad R_{24} := R_2$

$R_{23} := R_6 \quad R_{32} := R_{23} \quad E_{11} := E_1 + E_2 \quad E_{22} := E_2 - E_3 \quad E_{33} := 0$

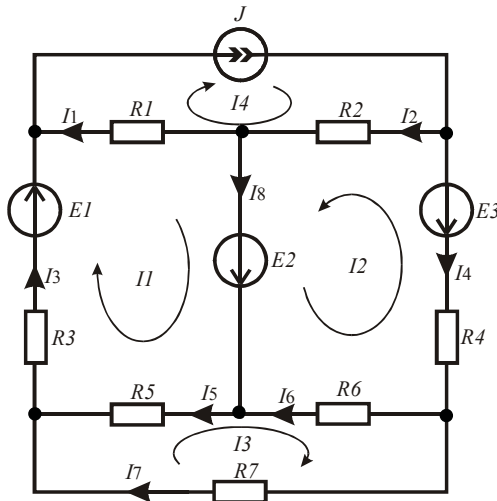


Рис. 1.26

Зададимся рядом значений тока источника и нулевыми начальными значениями искомых токов. Решение оформляется следующим образом:

$$n := 1..10 \quad JI_n := 0.1 \cdot n \quad II_n := 0 \quad I2_n := 0 \quad I3_n := 0$$

Given

$$II \cdot R11 + I2 \cdot R12 + I3 \cdot R13 = E11 - JI \cdot R14$$

$$II \cdot R21 + I2 \cdot R22 + I3 \cdot R23 = E22 - JI \cdot R24$$

$$II \cdot R31 + I2 \cdot R32 + I3 \cdot R33 = E33 - JI \cdot R34$$

$$Ik := \text{Find}(II, I2, I3) = \begin{pmatrix} \{10, I\} \\ \{10, I\} \\ \{10, I\} \end{pmatrix}$$

Знак равенства в уравнениях берётся с панели *Boolean*.

Определим реальные токи в ветвях как суперпозицию контурных токов при всех значениях тока источника тока.

$$I_1 := JI - Ik_1 \quad I_2 := JI + Ik_2 \quad I_3 := Ik_1 \quad I_4 := -Ik_2 \quad I_5 := Ik_1 - Ik_3$$

$$I_6 := Ik_2 + Ik_3 \quad I_7 := Ik_3 \quad I_8 := Ik_1 + Ik_2$$

$$I^T = (\{10, I\} \{10, I\} \{10, I\} \{10, I\} \{10, I\} \{10, I\} \{10, I\} \{10, I\})$$

$$I_1 =$$

	1
1	-0.19072
2	-0.13464
3	-0.07855
4	-0.02247
5	0.03362
6	0.0897
7	0.14579
8	0.20187
9	0.25795
10	0.31404

$$I_2 =$$

	1
1	-0.0824
2	-0.0157
3	0.051
4	0.1177
5	-0.1844
6	0.2511
7	0.3178
8	0.3845
9	0.4512
10	0.5179

$$I_3 =$$

	1
1	0.29072
2	0.33464
3	0.37855
4	0.42247
5	0.46638
6	0.5103
7	0.55421
8	0.59813
9	0.64205
10	0.68596

$$I_4 =$$

	1
1	0.1824
2	0.2157
3	0.249
4	0.2823
5	0.3156
6	0.3489
7	0.3822
8	0.4155
9	0.4488
10	0.4821

$$I_5 =$$

	1
1	0.12468
2	0.14204
3	0.1594
4	0.17676
5	0.19412
6	0.21148
7	0.22884
8	0.2462
9	0.26357
10	0.28093

$$I_6 =$$

	1
1	-0.01636
2	-0.02311
3	-0.02985
4	-0.0366
5	-0.04334
6	-0.05009
7	-0.05683
8	-0.06357
9	-0.07032
10	-0.07706

$$I_7 =$$

	1
1	0.16604
2	0.19259
3	0.21915
4	0.2457
5	0.27226
6	0.29881
7	0.32537
8	0.35193
9	0.37848
10	0.40504

$$I_8 =$$

	1
1	0.10832
2	0.11894
3	0.12955
4	0.14017
5	0.15078
6	0.1614
7	0.17201
8	0.18263
9	0.19325
10	0.20386

Видно, что некоторые токи в ветвях будут менять направление в зависимости от величины тока источника.

Для проверки правильности анализа составим уравнение баланса мощностей. Сравним мощность, отдаваемую источниками, и мощность, потребляемую резисторами схемы при всех значениях тока источника тока. Предварительно найдём напряжения на источнике тока для всех значений тока источника тока.

$$U := I_1 \cdot R_1 + I_2 \cdot R_2$$

$$\sum_{k=1}^7 [(I_k)^2 \cdot R_k] = E_1 \cdot I_3 + E_2 \cdot I_8 + E_3 \cdot I_4 + (JI \cdot U) =$$

	1
1	23.63699
2	27.35688
3	33.55668
4	42.2364
5	53.39604
6	67.03561
7	83.15509
8	101.7545
9	122.83382
10	146.39307

	1
1	23.63699
2	27.35688
3	33.55668
4	42.2364
5	53.39604
6	67.03561
7	83.15509
8	101.7545
9	122.83382
10	146.39307

Равенство мощностей источников и приёмников выполняется во всех случаях, следовательно, результаты анализа верны.

При определении мощности, отдаваемой источником тока, использовалась операция векторизации, которая берётся с панели *Matrix*.

1.4. Метод узловых потенциалов

Метод узловых потенциалов используется в тех случаях, когда в исследуемой электрической цепи количество узлов равно или меньше количества независимых контуров. На первом этапе определения неизвестных токов ищут значения потенциалов узлов, считая, что один из узлов имеет нулевой потенциал. В этом случае количество уравнений в системе на единицу меньше количества узлов в исследуемой электрической цепи. На втором этапе по найденным потенциалам узлов находят напряжения на ветвях, а затем и неизвестные токи.

Определим коэффициенты и правую часть системы уравнений

(1.8).

$$G11 := (R1)^{-1} + (R2 + R3)^{-1} + (R6)^{-1} \quad G12 := 0 \quad G21 := 0 \quad G13 := (R6)^{-1}$$

$$G22 := (R4)^{-1} + (R5)^{-1} + (R7)^{-1} + (R8)^{-1} \quad G23 := (R7)^{-1} + (R8)^{-1}$$

$$G32 := G23 \quad G33 := (R6)^{-1} + (R7)^{-1} + (R8)^{-1} \quad G31 := G13$$

$$I11 := J1 + J2 + E1 \cdot (R1)^{-1} \quad I22 := -E2 \cdot (R5)^{-1} - E3 \cdot (R7)^{-1} \quad I33 := -J2 + E3 \cdot (R7)^{-1}$$

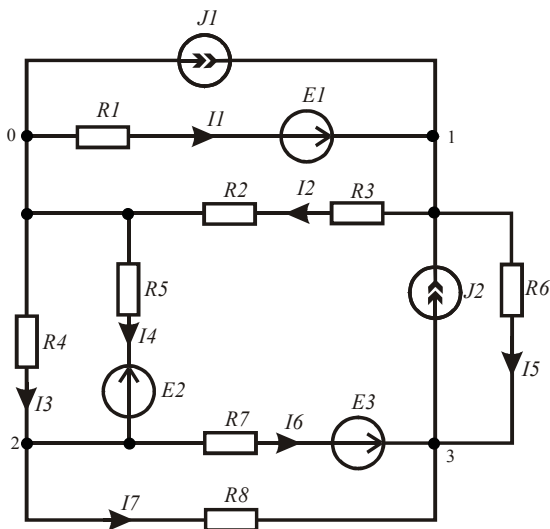


Рис. 1.27

Составим матрицу коэффициентов левой части системы (1.6) и матрицу правой части.

$$A := \begin{pmatrix} G11 & -G12 & -G13 \\ -G21 & G22 & -G23 \\ -G31 & -G32 & G33 \end{pmatrix} \quad B := \begin{pmatrix} I11 \\ I22 \\ I33 \end{pmatrix}$$

Найдём потенциалы узлов.

$$\Phi := A^{-1} \cdot B \quad \Phi^T = (89.978 \quad -18.502 \quad -1.124)$$

На втором этапе анализа найдём неизвестные токи в ветвях с помощью напряжений на ветвях и уравнений, составленных по второму закону Кирхгофа для каждой ветви.

$$\begin{aligned}
\Phi_1 + I_1 \cdot R1 &= E1 & I_1 &:= \frac{(E1 - \Phi_1)}{R1} & \Phi_1 - I_2 \cdot (R2 + R3) &= 0 & I_2 &:= \frac{\Phi_1}{R2 + R3} \\
\Phi_2 + I_3 \cdot R4 &= 0 & I_3 &:= \frac{-\Phi_2}{R4} & \Phi_2 + I_4 \cdot R5 &= -E2 & I_4 &:= \frac{-(E2 + \Phi_2)}{R5} \\
\Phi_3 - \Phi_1 + I_5 \cdot R6 &= 0 & I_5 &:= \frac{(\Phi_1 - \Phi_3)}{R6} & \Phi_3 - \Phi_2 + I_6 \cdot R7 &= E3 \\
I_6 &:= \frac{(E3 - \Phi_3 + \Phi_2)}{R7} & \Phi_3 - \Phi_2 + I_7 \cdot R8 &= 0 & I_7 &:= \frac{(\Phi_2 - \Phi_3)}{R8}
\end{aligned}$$

$$I^T = (-0.375 \quad 0.514 \quad 0.123 \quad -0.034 \quad 0.911 \quad 0.213 \quad -0.124)$$

Проверим баланс мощностей источников электрической энергии и приёмников.

$$J1 \cdot \Phi_1 + J2 \cdot (\Phi_1 - \Phi_3) + E1 \cdot I_1 - E2 \cdot I_4 + E3 \cdot I_6 = 159.829$$

$$Pr := (I_1)^2 \cdot R1 + (I_2)^2 \cdot (R2 + R3) + (I_3)^2 \cdot R4 + (I_4)^2 \cdot R5 + (I_5)^2 \cdot R6 + (I_6)^2 \cdot R7 + (I_7)^2 \cdot R8$$

$$Pr = 159.829$$

Баланс мощностей выполняется.

Пример 1.12. Рассмотрим пример использования метода узловых потенциалов, когда в электрической цепи есть вырожденная ветвь с источником ЭДС. В этом случае число узлов с неизвестными потенциалами уменьшается, так как разность потенциалов на вырожденной ветви известна и равна ЭДС ветви.

На рис. 1.28 приведена электрическая цепь, в которой надо найти неизвестные токи.

Потенциал одного из узлов вырожденной ветви приравняем к нулю. В цепи останутся два узла с неизвестными потенциалами. Потенциал третьего узла равен ЭДС вырожденной ветви. Система уравнений по методу узловых потенциалов будет иметь следующий вид:

$$\begin{cases} G_{11}\Phi_1 - G_{12}\Phi_2 - G_{13}\Phi_3 = I_{11} \\ -G_{21}\Phi_1 + G_{22}\Phi_2 - G_{23}\Phi_3 = I_{22} \end{cases}, \quad (1.9)$$

где $\Phi_3 = -E_2$.

Оформим листинг решения задачи. Зададимся исходными данными.

ORIGIN := 1

$E1 := 65$ $E2 := 24$ $E3 := 80$ $J1 := 1.5$ $J2 := 0.5$ $R1 := 120$

$R2 := 85$ $R3 := 90$ $R4 := 150$ $R5 := 160$ $R6 := 100$ $R7 := 200$

Определим коэффициенты и правую часть уравнений (1.9).

$G11 := (R1)^{-1} + (R2 + R3)^{-1} + (R5)^{-1}$ $G12 := (R5)^{-1}$ $G21 := G12$

$G22 := (R6)^{-1} + (R7)^{-1} + (R5)^{-1}$ $G23 := (R7)^{-1} + (R6)^{-1}$ $G13 := 0$

$I11 := J1 + J2 + E1 \cdot (R1)^{-1}$ $I22 := -J2 + E3 \cdot (R6)^{-1}$ $\Phi3 := -E2$

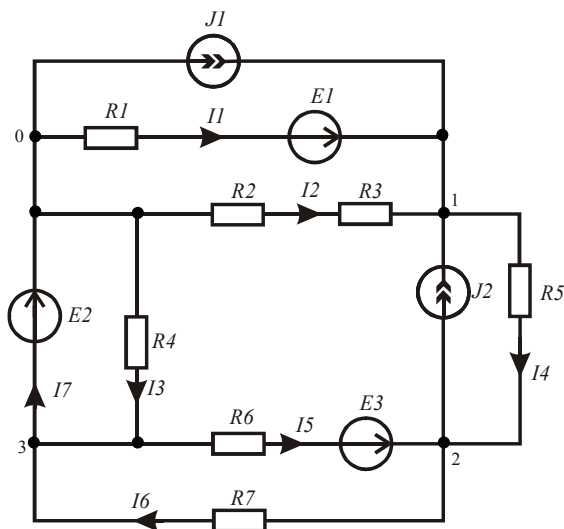


Рис. 1.28

Составим матрицы коэффициентов левой (1.9) и правой части системы.

$$A := \begin{pmatrix} G11 & -G12 \\ -G21 & G22 \end{pmatrix} \quad B := \begin{pmatrix} I11 + G13 \cdot \Phi3 \\ I22 + G23 \cdot \Phi3 \end{pmatrix}$$

Найдём потенциалы узлов.

$$\Phi := A^{-1} \cdot B \quad \Phi^T = (136.734 \quad 37.392) \quad \Phi_3 := \Phi_3$$

На втором этапе анализа найдём неизвестные токи в ветвях с помощью напряжений на ветвях и уравнений, составленных по второму закону Кирхгофа для каждой ветви. Ток в вырожденной ветви найдём по первому закону Кирхгофа.

$$\Phi_1 + I_1 \cdot R1 = E1 \quad I_1 := \frac{(E1 - \Phi_1)}{R1} \quad \Phi_1 - I_2 \cdot (R2 + R3) = 0 \quad I_2 := \frac{\Phi_1}{R2 + R3}$$

$$\Phi_3 + I_3 \cdot R4 = 0 \quad I_3 := \frac{-\Phi_3}{R4} \quad \Phi_1 - \Phi_2 - I_4 \cdot R5 = 0 \quad I_4 := \frac{(\Phi_1 - \Phi_2)}{R5}$$

$$\Phi_2 - \Phi_3 + I_5 \cdot R6 = E3 \quad I_5 := \frac{(\Phi_3 - \Phi_2 + E3)}{R6} \quad \Phi_2 - \Phi_3 - I_6 \cdot R7 = 0$$

$$I_6 := \frac{(\Phi_2 - \Phi_3)}{R7} \quad I_3 + I_6 - I_5 - I_7 = 0 \quad I_7 := I_3 + I_6 - I_5$$

$$I^T = (-0.598 \quad 0.781 \quad 0.16 \quad 0.621 \quad 0.186 \quad 0.307 \quad 0.281)$$

Проверим баланс мощностей источников электрической энергии и приёмников.

$$J1 \cdot \Phi_1 + J2 \cdot (\Phi_1 - \Phi_2) + E1 \cdot I_1 + E2 \cdot I_7 + E3 \cdot I_5 = 237.543$$

$$(I_1)^2 \cdot R1 + (I_2)^2 \cdot (R2 + R3) + (I_3)^2 \cdot R4 + (I_4)^2 \cdot R5 + (I_5)^2 \cdot R6 + (I_6)^2 \cdot R7 = 237.543$$

Баланс мощностей выполняется.

1.4.2. Использование графа электрической цепи

При анализе сложных электрических цепей следует использовать направленный граф цепи. В этом случае система узловых уравнений в матричной форме принимает следующий вид:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{Y} \cdot \mathbf{A}^T \cdot \mathbf{\Phi} = \mathbf{A} \cdot (\mathbf{J} - \mathbf{E}), \quad (1.10)$$

где \mathbf{A} – матрица соединений, правила составления которой с помощью направленного графа цепи рассматривались ранее; $\mathbf{\Phi}$ – матрица-столбец неизвестных потенциалов; \mathbf{Y} – диагональная матрица проводимостей ветвей; \mathbf{E} – матрица-столбец ЭДС ветвей, \mathbf{J} – матрица-столбец источников тока ветвей.

Рассмотрим пример использования матричного уравнения (1.10).

Пример 1.13. На рис. 1.29 приведена электрическая цепь, в которой надо найти неизвестные токи методом узловых потенциалов. На рис. 1.30 приведён направленный граф данной цепи.

Оформим листинг решения задачи. Зададимся исходными данными.

$$\begin{aligned} ORIGIN &:= 1 & E1 &:= 200 & E2 &:= 150 & E3 &:= 80 & E4 &:= 100 & E5 &:= 140 \\ R1 &:= 100 & R2 &:= 80 & R3 &:= 50 & R4 &:= 75 & R5 &:= 120 & R6 &:= 95 & R7 &:= 70 \\ R8 &:= 110 & R9 &:= 60 & R10 &:= 55 & R11 &:= 125 & J1 &:= 1.2 & J2 &:= 0.8 \end{aligned}$$

Составим столбцовые матрицы ЭДС ветвей, источников тока ветвей и диагональную матрицу проводимостей ветвей. Для этого вначале составим столбцовую матрицу сопротивлений ветвей. Для определения знаков используем понятие условно-положительных направлений в обобщённой ветви, которое рассматривалось выше.

$$E := (E1 \ E3 \ 0 \ 0 \ 0 \ E2 \ 0 \ 0 \ 0 \ E4 \ -E5)^T$$

$$J := (0 \ 0 \ 0 \ J2 \ 0 \ -J1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0)^T$$

$$R := (R1 \ R2 \ R3 \ R4 \ R5 \ R6 \ R7 \ R8 \ R9 \ R10 \ R11)^T \quad Y := R^{-1} \quad Yd := \text{diag}(Y)$$

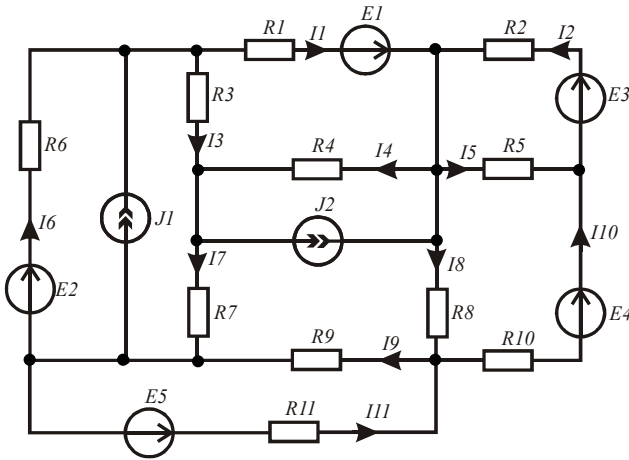


Рис. 1.29

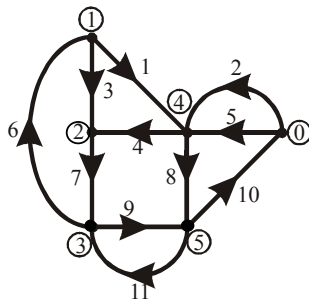


Рис. 1.30

Составим матрицу соединений по правилам, которые рассматривались выше (см. пример 1.7). Найдём левую и правую части матричного уравнения (1.8), а затем и неизвестные потенциалы.

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B := A \cdot Yd \cdot A^T \quad C := A \cdot (J - Yd \cdot E) \quad \Phi := B^{-1} \cdot C$$

$$\Phi^T = (-48.845 \quad -73.937 \quad -150.168 \quad 30.101 \quad -79.49)$$

Составим матрицу напряжений на ветвях. Учитывая большую длину, разделим её на две матрицы, а затем составим одну матрицу с помощью оператора слияния строчковых матриц.

$$U1 := (\Phi_1 - \Phi_4 \quad -\Phi_4 \quad \Phi_1 - \Phi_2 \quad \Phi_4 - \Phi_2 \quad -\Phi_4 \quad \Phi_3 - \Phi_1)$$

$$U2 := (\Phi_2 - \Phi_3 \quad \Phi_4 - \Phi_5 \quad \Phi_3 - \Phi_5 \quad \Phi_5 \quad \Phi_5 - \Phi_3)$$

$$U3 := \text{augment}(U1, U2) \quad U := U3^T$$

Найдём неизвестные токи, решая систему уравнений в матричной форме, составленную по второму закону Кирхгофа для ветвей схемы.

$$I := Yd \cdot (U + E)$$

$$I^T = \begin{array}{c|cccccccc} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ \hline 1 & 1.211 & 0.624 & 0.502 & 1.387 & -0.251 & 0.512 & 1.089 & \dots \end{array}$$

Используя прокрутку, можно увидеть в таблице значения всех найденных токов. Пятый, девятый и одиннадцатый токи отрицательные, следовательно, реальные направления данных токов противоположны направлениям соответствующих ветвей графа, которые были выбраны произвольно. Реальные направления токов наносятся на исследуемую электрическую цепь (рис. 1.29).

В заключение проверим баланс мощностей источников электрической энергии и приёмников.

$$\sum_{k=1}^{11} (E_k \cdot I_k) + \sum_{k=1}^{11} (U_k \cdot J_k) = 688.616 \qquad \sum_{k=1}^{11} [(I_k)^2 \cdot R_k] = 688.616$$

Баланс мощностей выполняется.

Построим потенциальную диаграмму для контура, образованного ветвями графа 2-1-6-9-10.

При построении потенциальной диаграммы учтём промежуточные точки между источниками ЭДС и резисторами.

Составим матрицы координат.

$$R12 := R1 + R2 \qquad R16 := R1 + R2 + R6$$

$$R19 := R1 + R2 + R6 + R9 \qquad R110 := R1 + R2 + R6 + R9 + R10$$

$$\phi := (0 \ E3 \ \Phi_4 \ \Phi_4 - E1 \ \Phi_1 \ \Phi_3 + E2 \ \Phi_3 \ \Phi_5 \ -E4 \ 0)^T$$

$$r := (0 \ 0 \ R2 \ R2 \ R12 \ R16 \ R16 \ R19 \ R110 \ R110)^T$$

Построим потенциальную диаграмму. Узловые точки на графике обозначим после его импортирования.

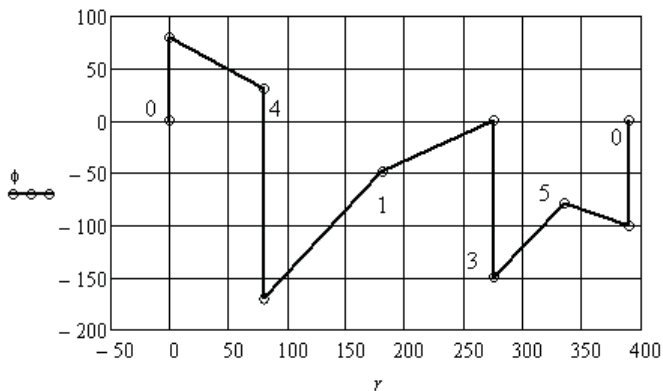


Рис. 1.31

1.5. Численное исследование электрической цепи методом эквивалентного генератора

Численные методы анализа электрических цепей позволяют выполнить исследования состояний цепи любой сложности. Для исследования режимов в одной ветви используют метод эквивалентного генератора. В этом случае пассивная часть исследуемой ветви рассматривается как нагрузка активного двухполюсника, который включает всю остальную электрическую цепь. Объём вычислений уменьшается, так как нет необходимости рассчитывать все неизвестные токи.

Рассмотрим пример использования метода эквивалентного генератора для определения зависимости выделяемой мощности в резисторе заданной ветви сложной электрической цепи от сопротивления этого резистора.

Пример 1.14. На рис. 1.32 приведена исследуемая электрическая цепь.

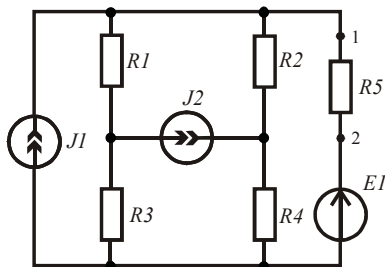


Рис. 1.32

Необходимо получить зависимость рассеиваемой мощности в резисторе $R5$ от значения его сопротивления. Данная зависимость является нелинейной. Найдём её в результате численного исследования цепи при заданных параметрах элементов.

Будем считать зажимы 1 и 2 зажимами активного двухполюсника, схема которого приведена на рис. 1.33. Схема замещения активного двухполюсника содержит элементы $Rэ$ и $Eэ$, а исследуемая цепь принимает вид, приведённый на рис. 1.34. Эквивалентная ЭДС активного двухполюсника равна напряжению холостого хода

на его зажимах, а эквивалентное сопротивление равно входному сопротивлению относительно его зажимов.

Покажем оформление листинга для численного решения поставленной задачи.

Введём заданные параметры исследуемой электрической цепи.

$E1 := 65$ $J1 := 1.5$ $J2 := 0.5$ $R1 := 120$ $R2 := 85$ $R3 := 90$ $R4 := 150$ $R5 := 100$

Определим эквивалентное сопротивление, заменив источники их внутренними сопротивлениями ($R_E = 0$, $R_J = \infty$).

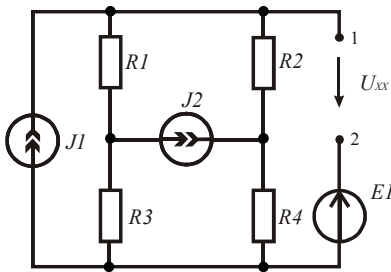


Рис. 1.33

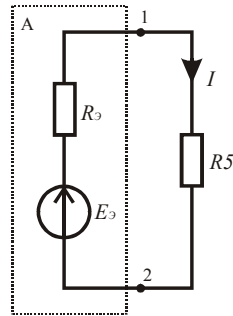


Рис. 1.34

Определим напряжение холостого хода из контурного уравнения:

$$U_{R2} + U_{R4} - U_x = E_1.$$

Для этого методом наложения найдём токи в резисторах.

$$I_{12} := J1 \cdot \frac{(R1 + R3)}{(R1 + R3) + (R2 + R4)} \quad I_{14} := I_{12} \quad I_{24} := J2 - I_{22}$$

$$I_{22} := -J2 \cdot \frac{(R3 + R4)}{(R3 + R4) + (R1 + R2)} \quad I_2 := I_{12} + I_{22} \quad I_4 := I_{14} + I_{24}$$

Найдём напряжение холостого хода и ток в нагрузке активного двухполюсника при заданном сопротивлении $R5$.

$$U_{xx} := -E1 + I_2 \cdot R2 + I_4 \cdot R4 \quad Eэ := U_{xx} \quad I := \frac{Eэ}{Rэ + R5} = 0.919$$

Рассчитаем и построим зависимость мощности, рассеиваемой резистором $R5$, от величины его сопротивления. Обозначим сопротивление $R5$ текущей величиной r .

$$r := 0..10000 \quad P(r) := \left(\frac{E\varepsilon}{R\varepsilon + r} \right)^2 \cdot r$$

На рис. 1.35 приведена соответствующая зависимость. Видно, что при заданной величине сопротивления $R5$ в нём выделяется не максимальная мощность, хотя и близкая к ней.

Легко убедиться, что согласованный режим работы активного двухполюсника соответствует экстремуму полученной зависимости. Найдём его.

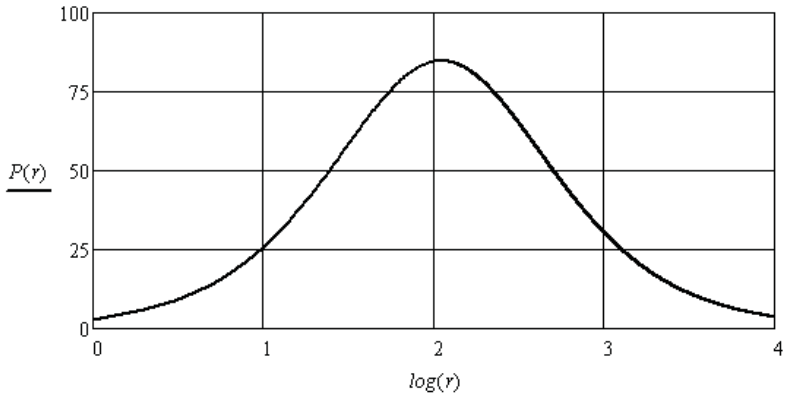


Рис. 1.35

Вначале получим уравнение производной от зависимости (рис. 1.35). Для ограничения количества разрядов чисел, выводимых на рабочий стол, используем оператор *float, n*, который вводится в знаковое место перед стрелкой (панель *Evaluation*).

$$\left[\frac{d}{dr} \left[\left(\frac{E\varepsilon}{R\varepsilon + r} \right)^2 \cdot r \right] \right] \text{float}, 8 \rightarrow \frac{37588.06}{(r + 110.89888)^2} - \frac{75176.12 \cdot r}{(r + 110.89888)^3}$$

Скопируем выражение после стрелки и найдём его корень.

$$\text{root} \left[\left[\frac{37588.06}{(r + 110.89888)^2} - \frac{75176.12 \cdot r}{(r + 110.89888)^3} \right], r, 100, 120 \right] = 110.899$$

Решение даёт нам сопротивление, при котором в резисторе $R5$ выделяется максимальная мощность. Эквивалентное сопротивление активного двухполюсника равно такой же величине:

$$R_{\Sigma} = 110.899$$

Полученные результаты подтверждают известный факт, что в согласованном режиме, когда эквивалентное сопротивление активного двухполюсника равно сопротивлению его нагрузки, в нагрузке выделяется максимальная мощность.

1.6. Диагностика сопротивлений резисторов в электрических цепях постоянного тока

Задача определения реальных сопротивлений резисторов, включенных в электрическую цепь, относится к задачам диагностики. Это класс обратных задач. При диагностике электрических цепей необходимо по минимально возможному количеству измерений токов и напряжений определить сопротивления всех резисторов электрической цепи. Особенностью диагностики является то, что не ко всем элементам электрической цепи возможен доступ для проведения измерений, особенно это касается измерений токов.

В общем случае измеряются и токи, и напряжения. По измеренным токам необходимо определить остальные токи с помощью первого закона Кирхгофа, а по измеренным напряжениям определяются остальные напряжения с помощью второго закона Кирхгофа. Реальные сопротивления резисторов определяются по закону Ома.

Для диагностики сложных электрических цепей удобно использовать направленный граф цепи. Выбирается дерево графа. Токи измеряются в связях графа, а напряжения измеряются на ветвях дерева графа. Дерево выбирается таким образом, чтобы все измерения были технически возможны. Использование графа цепи позволяет автоматически определить минимально необходимое количество измерений и упростить составление уравнений.

Рассмотрим методику диагностики электрической цепи на следующем примере.

Пример 1.15. На рис. 1.36 приведена диагностируемая электрическая цепь. На рис. 1.37 приведён направленный граф данной цепи, в котором дерево выделено жирными линиями. В результате физического эксперимента были измерены токи в связях 1, 2, 3, 9, 12, 13 и напряжения на ветвях 4, 5, 6, 7, 8, 10, 11 дерева графа.

Покажем оформление листинга для численного определения

сопротивлений резисторов. При составлении системы уравнений по первому и второму законам Кирхгофа используем матрицу соединений и матрицу контуров.

Введём известные параметры источников. Для определения токов в резисторах подготовим матрицу соединений (см. пример 1.7).

$ORIGIN := 1$ $J1 := 0.4$ $J2 := 0.2$ $E1 := 200$

$E2 := 150$ $E3 := 180$ $E4 := 250$ $E5 := 90$

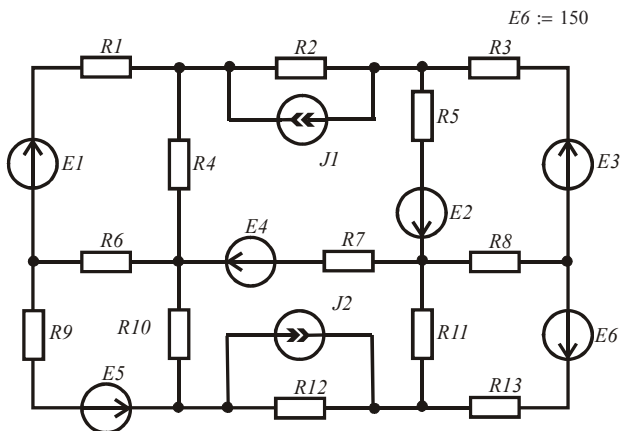


Рис. 1.36

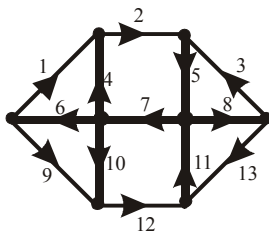


Рис. 1.37

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Для составления матричного уравнения по первому закону Кирхгофа подготовим столбцовые матрицы токов и нулей.

$$D := (I1 \ I2 \ I3 \ I4 \ I5 \ I6 \ I7 \ I8 \ I9 \ I10 \ I11 \ I12 \ I13)^T$$

$$O := (0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0)^T$$

Введём значения измеренных токов.

$$I1 := 0.84 \quad I2 := 0.9 \quad I3 := 0.82 \quad I9 := 0.09 \quad I12 := 0.41 \quad I13 := 0.17$$

Составим матричное уравнение для токов. Знак равенства берётся с панели *Boolean*.

$$C := A \cdot D = O \quad C \rightarrow \begin{pmatrix} 0.93 - I6 \\ 0.06 - I4 \\ 0.32 - I10 \\ I4 + I6 - I7 + I10 \\ I5 - 1.72 \\ 0.99 - I8 \\ I11 - 0.58 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

В общем случае резисторы электрической цепи могут быть и нелинейные, поэтому для определения неизвестных токов используем метод последовательных приближений, который реализуется вычислительным блоком *Given/Find*. Зададимся нулевыми начальными значениями искомых токов и оформим решение матричного уравнения, скопировав матричное равенство из выражения выше после стрелки.

$$I4 := 0 \quad I5 := 0 \quad I6 := 0 \quad I7 := 0 \quad I8 := 0 \quad I10 := 0 \quad I11 := 0$$

Given

$$\begin{pmatrix} 0.93 - I6 \\ 0.06 - I4 \\ 0.32 - I10 \\ I4 + I6 - I7 + I10 \\ I5 - 1.72 \\ 0.99 - I8 \\ I11 - 0.58 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$Iv := \text{Find}(I1, I2, I3, I4, I5, I6, I7, I8, I9, I10, I11, I12, I13)$$

$$Iv^T =$$

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	0.84	0.9	0.82	0.06	1.72	0.93	1.31	0.99	0.09	...

Так как в скобке оператора *Find* были внесены все токи электрической цепи, то автоматически был сформирован массив токов всех ветвей. В общем случае все ветви рассматриваются как обобщённые.

Найдём токи в резисторах, исключая токи источников тока.

$$J := (0 \quad J1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad -J2 \quad 0)^T \quad Ir := Iv + J$$

$$Ir^T =$$

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	0.84	1.3	0.82	0.06	1.72	0.93	1.31	0.99	0.09	...

Найдём напряжения на резисторах. Введём измеренные напряжения.

$$U4 := 5.4 \quad U5 := 40.1 \quad U6 := 105.2 \quad U7 := -125 \quad U8 := 79.2 \quad U10 := 23.2 \quad U11 := 57$$

Подготовим матрицу контуров (см. пример 1.7).

$$B := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Для составления матричного уравнения по второму закону Кирхгофа подготовим столбцовые матрицы напряжений и нулей.

$$DI := (U1 \ U2 \ U3 \ U4 \ U5 \ U6 \ U7 \ U8 \ U9 \ U10 \ U11 \ U12 \ U13)^T$$

$$OI := (0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0)^T$$

Составим матричное уравнение контуров.

$$CI := B \cdot DI = OI \quad CI \rightarrow \begin{pmatrix} U1 + 99.8 \\ U2 - 79.5 \\ U3 + 119.3 \\ U9 + 82.0 \\ U12 - 44.8 \\ U13 + 136.2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Зададимся нулевыми начальными значениями искомым напряжений и оформим решение матричного уравнения, скопировав матричное равенство.

$$U1 := 0 \quad U2 := 0 \quad U3 := 0 \quad U9 := 0 \quad U12 := 0 \quad U13 := 0$$

$$\text{Given} \quad \begin{pmatrix} U1 + 99.8 \\ U2 - 79.5 \\ U3 + 119.3 \\ U9 + 82.0 \\ U12 - 44.8 \\ U13 + 136.2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$Uv := \text{Find}(U1, U2, U3, U4, U5, U6, U7, U8, U9, U10, U11, U12, U13)$$

Выведем значения напряжений на обобщённых ветвях.

$$Uv^T = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|c|c|} \hline & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ \hline 1 & -99.8 & 79.5 & -119.3 & 5.4 & 40.1 & 105.2 & -125 & \dots \\ \hline \end{array}$$

Через значения напряжений на резисторах определим сопротивления резисторов.

$$Ird := \text{diag}(Ir) \quad Rv := Ird^{-1} \cdot (Uv + E)$$

$$Rv^T = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|} \hline & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ \hline 1 & 119.286 & 61.154 & 74.024 & 90 & 110.523 & 113.118 & \dots \\ \hline \end{array}$$

При определении сопротивлений в матричном уравнении, составленном по закону Ома, использовалась диагональная матрица токов резисторов.

Убедимся, что результаты вычислений верные. Проверим баланс мощностей источников и приёмников электрической энергии.

$$\sum_{k=1}^{13} (J_k \cdot U_{v_k}) + \sum_{k=1}^{13} (E_k \cdot I_{r_k}) = 957.54 \qquad \sum_{k=1}^{13} [(I_{r_k})^2 \cdot R_{v_k}] = 957.54$$

Баланс мощностей выполняется.

Контрольные вопросы

1. В каких случаях используются преобразования электрических цепей?
2. В каких случаях используются преобразования «расщепление узла» и «расщепление ветви»?
3. Дайте определение понятию «обобщённая ветвь» и поясните её использование.
4. В каких случаях источники электрической энергии являются генераторами, а в каких – потребителями?
5. Почему в схеме замещения электрической цепи постоянного тока отсутствуют катушки и конденсаторы?
6. С какой целью составляется уравнение баланса мощностей?
7. Каковы положительные стороны использования направленного графа электрической цепи?
8. Какой критерий используется при выборе метода анализа электрической цепи?
9. В каких случаях используется метод эквивалентного генератора?
10. Как сформировать массив данных и зачем?
11. Поясните использование оператора *ORIGIN*.
12. Поясните использование оператора «векторизировать».
13. Поясните использование оператора «транспонировать».
14. Как ограничить количество разрядов чисел, выводимых программой на рабочий стол?

2. АНАЛИЗ НЕЛИНЕЙНЫХ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ С ИСТОЧНИКАМИ ПОСТОЯННОЙ ЭДС И ПОСТОЯННОГО ТОКА

К нелинейным электрическим цепям относятся цепи, содержащие нелинейные элементы. В цепях постоянного тока это нелинейные резисторы. У нелинейных резисторов сопротивление зависит от величины тока, протекающего через него. В этом случае для анализа состояния цепи нельзя использовать принцип суперпозиции. Анализ ведётся с помощью системы уравнений, составленной по законам Кирхгофа, которая решается методом последовательных приближений (вычислительный блок *Given/Find*(x_1, x_2, \dots)).

На первом этапе анализа необходимо найти вольтамперные характеристики нелинейных резисторов. На втором этапе решается система уравнений, в которую вносятся соответствующим образом вольтамперные характеристики резисторов [2; 3; 7; 9].

2.1. Численная аппроксимация характеристик нелинейных резисторов

Анализ нелинейных электрических цепей постоянного тока начинается в самом общем случае с экспериментального определения вольтамперных характеристик (ВАХ) нелинейных резисторов. Результатом такого эксперимента являются координаты отдельных точек ВАХ, полученные с некоторой погрешностью. Численная обработка экспериментальных данных позволяет получить сглаженные кривые, аппроксимирующие ВАХ. Рассмотрим самые простые способы обработки экспериментальных данных.

2.1.1. Использование полиномиальной регрессии

Полиномиальная регрессия экспериментальных данных позволяет получить уравнение кривой, проходящей в области экспериментальных точек, с минимизацией среднеквадратичного значения отклонения точек от кривой. Уравнением кривой является полином, степень которого оптимизируется в процессе аппроксимации. Существует возможность дополнительной вариации коэффициентов полинома после выполнения регрессии, если на ВАХ резисторов накладываются дополнительные требования, например требование симметрии.

Пример 2.1. Найдём уравнение регрессии ВАХ нелинейного резистора по результатам эксперимента. Координаты узловых точек ВАХ $Ur(Ir)$ внесём в столбцовые матрицы, которые для компактности оформим следующим образом:

$$Ir := (0 \ 1 \ 2 \ 3 \ 4 \ 5 \ 6)^T \quad Ur := (0 \ 10 \ 16 \ 30 \ 55 \ 70 \ 110)^T$$

Выберем третий порядок полинома регрессии ($k = 3$), и найдём коэффициенты уравнения регрессии.

$$k := 3 \quad s := \text{regress}(Ir, Ur, k) \quad K := \text{submatrix}(s, 3, \text{length}(s) - 1, 0, 0)$$

$$K^T = (0.262 \ 8.075 \ -0.167 \ 0.306)$$

По полученным коэффициентам запишем следующий полином:

$$U2(I) := 0.262 + 8.075 \cdot I - 0.167 \cdot I^2 + 0.306 \cdot I^3$$

С помощью функции интерполяции можно получить данную кривую для дальнейших численных расчётов и не используя уравнение полинома.

$$U1(I) := \text{interp}(s, Ir, Ur, I)$$

В рассматриваемом примере на уравнение регрессии накладываются следующие требования. ВАХ нелинейного резистора должна проходить через начало координат и быть симметричной относительно начала координат. Для выполнения этих требований необходимо вернуться к полиному регрессии, исключить из него постоянную составляющую и слагаемое второй степени и изменить значения оставшихся коэффициентов, чтобы новая кривая мало отличалась от кривой, полученной в результате регрессии. Получим следующее уравнение:

$$U(I) := 8 \cdot I + 0.27 \cdot I^3$$

На рис. 2.1 приведены экспериментальные точки ВАХ резистора и аппроксимирующие кривые.

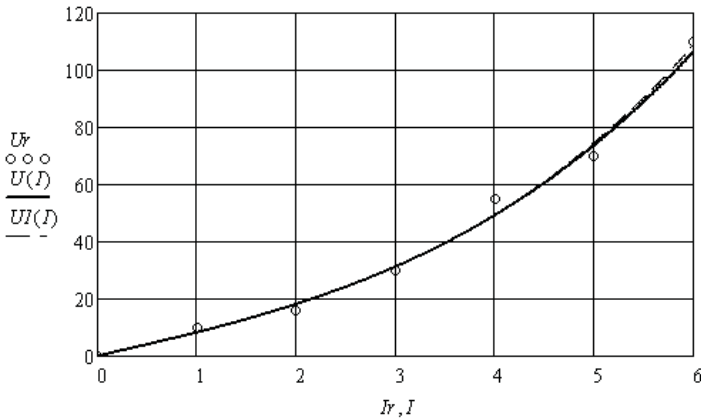


Рис. 2.1

На рис. 2.2 показано, какую ошибку даёт аппроксимация при изменении направления тока, если не выполнено условие симметрии относительно начала координат.

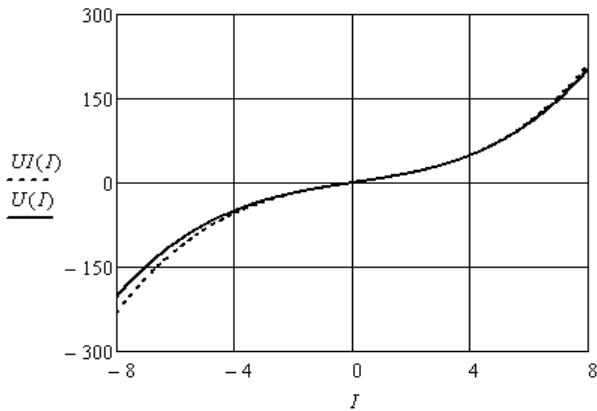


Рис. 2.2

В тех случаях, когда уравнение регрессии определено заранее, коэффициенты уравнения можно определить с помощью функции $genfit(X, Y, V, F)$. Для этого надо дополнительно подготовить столбцовую матрицу F , содержащую уравнение регрессии и производные относительно коэффициентов уравнения, и матрицу V начальных значений.

Например, листинг определения коэффициентов выбранного выше уравнения регрессии оформляется следующим образом:

$$F(x, k) := \begin{pmatrix} k_0 \cdot x + k_1 x^3 \\ x \\ x^3 \end{pmatrix} \quad V := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad KI := genfit(Ir, Ur, V, F)$$

$$KI = \begin{pmatrix} 7.857 \\ 0.284 \end{pmatrix}$$

Полученные коэффициенты близки к коэффициентам, полученным в результате подбора. Данный вариант регрессии более удобен для аппроксимации ВАХ нелинейных резисторов, но требует предварительного выбора уравнения регрессии.

2.1.2. Использование сплайн-аппроксимации

Сплайн-аппроксимация позволяет найти гладкую кривую, проходящую через все заданные узловые точки ВАХ, полученные экспериментально.

Для сплайн-аппроксимации имеются следующие операторы:

$cspline(X, Y)$ – возвращает вектор S вторых производных при приближении к узловым точкам кубическим полиномом;

$pspline(X, Y)$ – возвращает вектор S вторых производных при приближении к узловым точкам параболической кривой;

$lspline(X, Y)$ – возвращает вектор S вторых производных при приближении к узловым точкам прямой;

$interp(S, X, Y, x)$ – возвращает значение $y(x)$ для заданных векторов S, X, Y и заданного значения x .

Сплайн-аппроксимация проводится в два этапа. На первом этапе с помощью одной из первых трёх функций отыскивается вектор вторых производных. На втором этапе с помощью четвёртой функции вычисляются значения $y(x)$.

Пример 2.2. Выполним аппроксимацию характеристики $Ur(Ir)$ кубическим сплайном. Координаты узловых точек ВАХ нелинейного резистора получены экспериментально и сведены в следующие матрицы.

$$Ur := (0 \ 1 \ 2 \ 3 \ 4 \ 5 \ 6 \ 7 \ 8 \ 9 \ 10)^T$$

$$Ir := (0 \ 0.19 \ 0.41 \ 0.68 \ 0.99 \ 1.3 \ 1.54 \ 1.73 \ 1.89 \ 2.02 \ 2.13)^T$$

Вспользуемся операторами аппроксимации и интерполяции.

$$S := cspline(Ir, Ur) \quad Ua(I) := interp(S, Ir, Ur, I)$$

В результате получена характеристика, которая приведена на рис. 2.3.

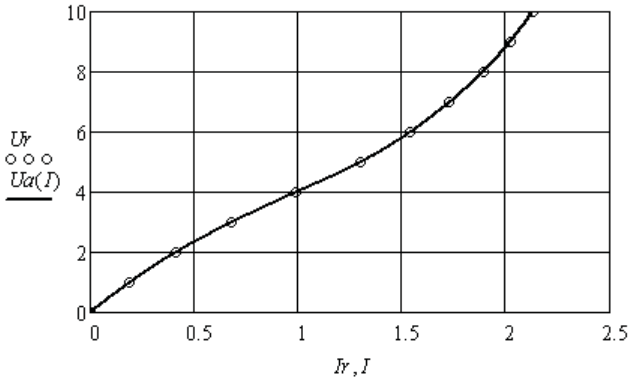


Рис. 2.3

Так как аппроксимируемая ВАХ должна быть симметричной относительно начала координат, то следует расширить массив координат на третью четверть системы координат, как это показано ниже.

$$U1 := (1 \ 2 \ 3 \ 4 \ 5 \ 6 \ 7 \ 8 \ 9 \ 10)^T \quad U2 := reverse(-U1) \quad U3 := stack(U2, Ur)$$

$$U3^T \rightarrow (-10 \ -9 \ -8 \ -7 \ -6 \ -5 \ -4 \ -3 \ -2 \ -1 \ 0 \ 1 \ 2 \ 3 \ 4 \ 5 \ 6 \ 7 \ 8 \ 9 \ 10)$$

$$I1 := (0.19 \ 0.41 \ 0.68 \ 0.99 \ 1.3 \ 1.54 \ 1.73 \ 1.89 \ 2.02 \ 2.13)^T \quad I2 := reverse(-I1)$$

$$I3 := stack(I2, Ir) \quad S1 := cspline(I3, U3) \quad U(I) := interp(S1, I3, U3, I)$$

Функция $reverse(A)$ осуществляет перестановку элементов вектора A в обратном порядке. Функция $stack(A, B)$ осуществляет слияние матриц A и B сверху вниз.

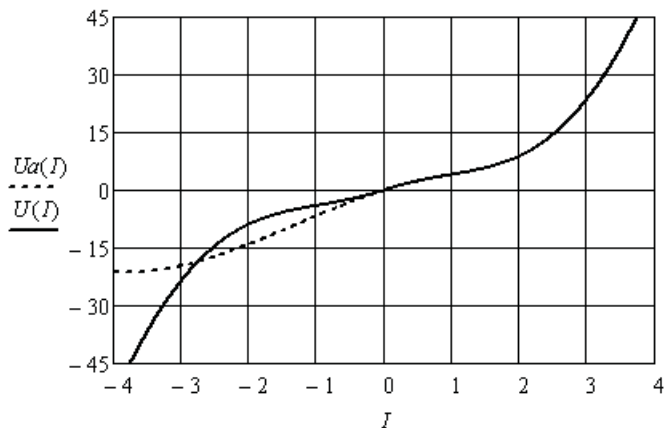


Рис. 2.4

На рис. 2.4 показаны симметричная и не симметричная характеристики в более широком диапазоне токов. Видно, что вне диапазона использованных координат зависимости могут существенно отличаться по своему виду. Это следует учитывать при решении нелинейных задач.

2.1.3. Использование экстраполяции нелинейных характеристик

Экстраполяция выполняется с целью расширения используемого диапазона токов и напряжений по сравнению с диапазоном, полученным экспериментально.

Пример 2.3. Координаты узловых точек зависимости $U_{\alpha}(I_{\alpha})$ нелинейного резистора получены экспериментально на ограниченном интервале напряжений. Выполним экстраполяцию полученной характеристики. Вначале выполним аппроксимацию кубическим сплайном.

$$I_r := (0 \ 1 \ 2 \ 3 \ 4 \ 5 \ 6 \ 7 \ 8 \ 9 \ 10)^T$$

$$U_r := (0 \ 2 \ 4.4 \ 7 \ 9.9 \ 12.8 \ 15.8 \ 18.9 \ 22.2 \ 25.7 \ 29.5)^T$$

$$S := \text{cspline}(I_r, U_r) \quad U(I) := \text{interp}(S, I_r, U_r, I)$$

Выберем диапазон и подготовим массив значений U , взятых через равные промежутки аргумента. Зададимся количеством m используемых значений вектора U и количеством n элементов предсказаний. Выполним экстраполяцию характеристики функцией предсказания.

$$I := 0..10 \quad U_I := U(I) \quad m := 6 \quad n := 5 \quad k := 0..5$$

$$A := \text{predict}(U, m, n) \quad A^T = (33.327 \ 36.855 \ 39.525 \ 40.934 \ 40.747)$$

На рис. 2.5 показан предсказанный участок характеристики. Видно, что для экстраполяции характеристики можно использовать только четыре точки. Добавим их в массивы координат и снова выполним аппроксимацию.

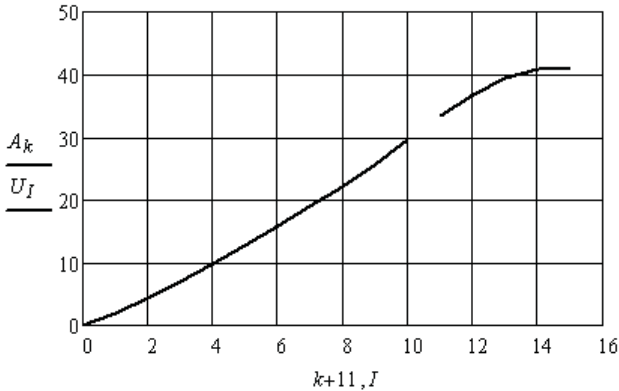


Рис. 2.5

Полученная характеристика (рис. 2.6) может быть с успехом использована при решении нелинейной задачи в более широком диапазоне значений токов и напряжений.

$$Ia := (0 \ 1 \ 2 \ 3 \ 4 \ 5 \ 6 \ 7 \ 8 \ 9 \ 10 \ 11 \ 12 \ 13)^T$$

$$Ua := (0 \ 2 \ 4.4 \ 7 \ 9.9 \ 12.8 \ 15.8 \ 18.9 \ 22.2 \ 25.7 \ 29.5 \ 33.33 \ 36.85 \ 39.53)^T$$

$$S := \text{cspline}(Ia, Ua) \quad UIa(IIa) := \text{interp}(S, Ia, Ua, IIa)$$

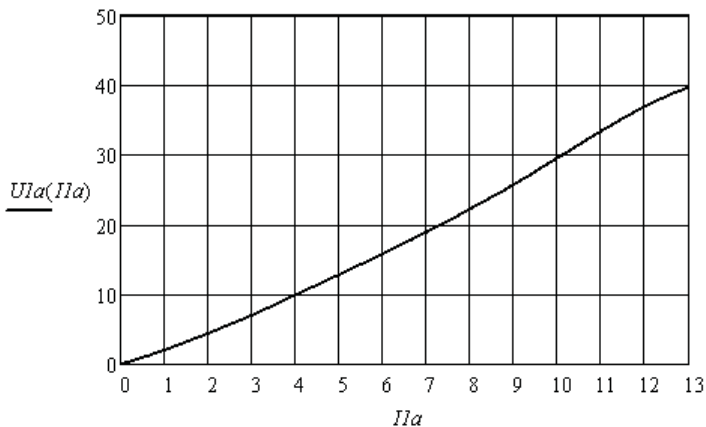


Рис. 2.6

2.2. Численный анализ нелинейной электрической цепи постоянного тока

Анализ сложных нелинейных электрических цепей возможен только одним способом. Это решение системы нелинейных уравнений, составленной по законам Кирхгофа. В уравнения, составленные по второму закону Кирхгофа, подставляются аппроксимации ВАХ нелинейных резисторов. Система уравнений решается методом последовательных приближений с помощью вычислительного блока *Given/Find(x1,x2,...)*.

Рассмотрим примеры оформления численного решения.

2.2.1. Свёртка нелинейных пассивных двухполюсников

Правила свёртки определяются законами Кирхгофа.

При последовательном соединении двухполюсников необходимо использовать зависимости $R(I)$ или вольтамперные характеристики $U(I)$ и находить эквивалентные зависимости и характеристики.

При параллельном соединении двухполюсников необходимо использовать зависимости $R(U)$ или ампервольтные характеристики $I(U)$ и находить эквивалентные зависимости и характеристики.

Пример 2.4. Экспериментально получены нелинейные зависимости сопротивлений двух резисторов от тока, которые представлены массивами координат. Резисторы соединены последовательно. Необходимо найти соответствующую зависимость эквивалентного двухполюсника.

Выполним аппроксимацию зависимостей и сложим их.

$$\begin{aligned}
 x &:= (0 \ 1 \ 2 \ 3 \ 4 \ 5 \ 6 \ 7 \ 8 \ 9 \ 10 \ 11 \ 12)^T \\
 y &:= (2 \ 2.14 \ 2.31 \ 2.48 \ 2.69 \ 2.94 \ 3.2 \ 3.48 \ 3.77 \ 4.12 \ 4.47 \ 4.62 \ 4.8)^T \\
 z &:= (3 \ 3.1 \ 3.21 \ 3.34 \ 3.49 \ 3.62 \ 3.8 \ 3.96 \ 4.17 \ 4.37 \ 4.57 \ 4.8 \ 5.0)^T \\
 \\
 S &:= \text{cspline}(x,y) & R1(I) &:= \text{interp}(S,x,y,I) \\
 SI &:= \text{cspline}(x,z) & R2(I) &:= \text{interp}(SI,x,z,I) \\
 \\
 R12(I) &:= R1(I) + R2(I)
 \end{aligned}$$

Иллюстрация свёртки последовательного соединения двухполюсников приведена на рис. 2.7.

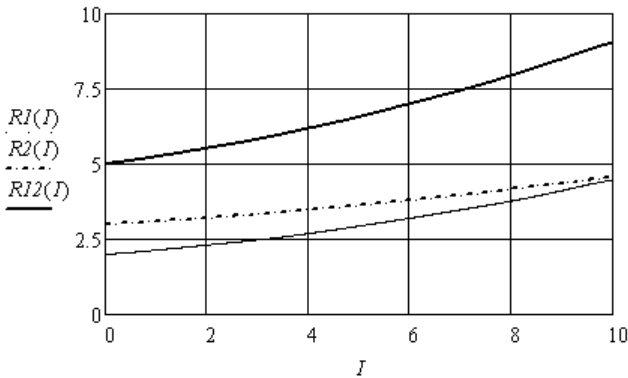


Рис. 2.7

Пример 2.5. Экспериментально получены нелинейные зависимости сопротивлений двух резисторов от напряжения, которые представлены массивами координат. Резисторы соединены параллельно. Необходимо найти соответствующую зависимость эквивалентного двухполюсника.

Выполним аппроксимацию зависимостей и найдём эквивалентную зависимость.

$$\begin{aligned}
 u &:= (0 \ 0.34 \ 0.62 \ 1.44 \ 2.76 \ 4.7 \ 7.2 \ 10.36 \ 14.16 \ 19.08 \ 24.7 \ 29 \ 33.6)^T \\
 y &:= (2.08 \ 2.24 \ 2.32 \ 2.48 \ 2.69 \ 2.94 \ 3.2 \ 3.48 \ 3.77 \ 4.12 \ 4.47 \ 4.62 \ 4.8)^T \\
 j &:= (0 \ 0.2 \ 0.42 \ 1.02 \ 1.96 \ 3.1 \ 4.8 \ 6.72 \ 9.36 \ 12.33 \ 15.7 \ 20 \ 25)^T \\
 z &:= (3.07 \ 3.16 \ 3.21 \ 3.34 \ 3.49 \ 3.62 \ 3.8 \ 3.96 \ 4.17 \ 4.37 \ 4.57 \ 4.8 \ 5.0)^T \\
 S2 &:= \text{cspline}(u,y) & R3(U) &:= \text{interp}(S2,u,y,U) \\
 S3 &:= \text{cspline}(j,z) & R4(U) &:= \text{interp}(S3,j,z,U)
 \end{aligned}$$

$$R34(U) := [(R3(U))^{-1} + (R4(U))^{-1}]^{-1}$$

Иллюстрация свёртки параллельного соединения двух нелинейных резисторов приведена на рис. 2.8.

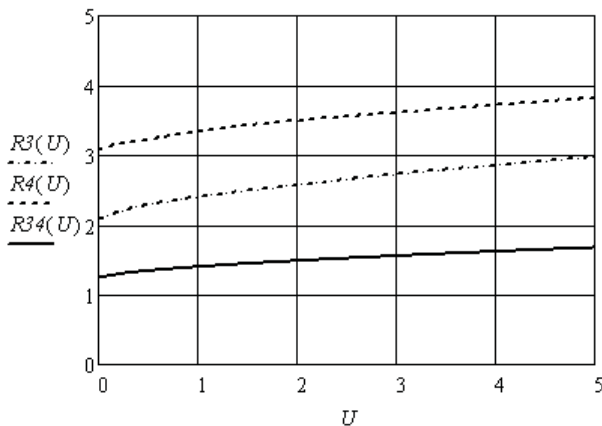


Рис. 2.8

Зависимость сопротивления эквивалентного двухполюсника от напряжения можно преобразовать в зависимость от тока. Для этого выберем значения напряжения и найдём соответствующие значения сопротивлений и токов, используя закон Ома. Составим массивы новых координат и выполним аппроксимацию. Результат приведён на рис. 2.9.

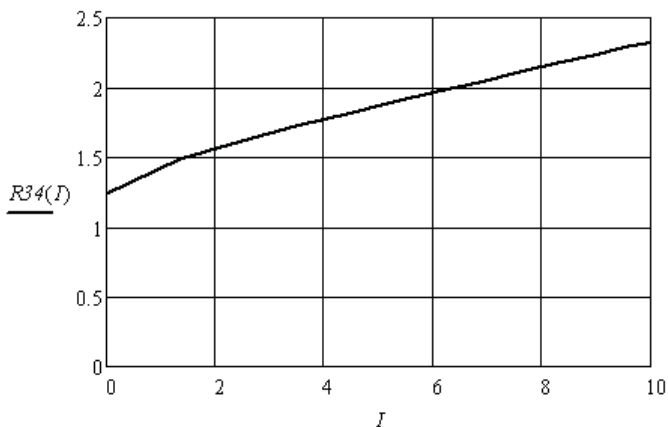


Рис. 2.9

2.2.2. Использование системы уравнений, составленной по схеме нелинейной цепи

Пример 2.6. Необходимо определить неизвестные токи и значения статических сопротивлений нелинейных резисторов в заданной электрической цепи (рис. 2.10). Зависимости статических сопротивлений нелинейных резисторов от тока получены экспериментально. Второй и третий резисторы одинаковые.

Введём в листинг решения координаты зависимостей сопротивлений от тока в следующем виде:

$$I := (0 \ 0.1 \ 0.2 \ 0.3 \ 0.4 \ 0.5 \ 0.6 \ 0.7 \ 0.8 \ 0.9 \ 1.0 \ 1.1 \ 1.2)^T$$

$$r1 := (3 \ 3.14 \ 3.31 \ 3.48 \ 3.69 \ 3.94 \ 4.2 \ 4.48 \ 4.77 \ 5.12 \ 5.47 \ 5.62 \ 5.8)^T$$

$$r2 := (4 \ 4.1 \ 4.21 \ 4.34 \ 4.49 \ 4.62 \ 4.8 \ 4.96 \ 5.17 \ 5.37 \ 5.57 \ 5.8 \ 6.0)^T$$

Выполним сплайн-аппроксимацию данных зависимостей.

$$S := \text{cspline}(I, r1) \quad R1(I1) := \text{interp}(S, I, r1, I1)$$

$$S1 := \text{cspline}(I, r2) \quad R2(I2) := \text{interp}(S1, I, r2, I2) \quad R3(I3) := \text{interp}(S1, I, r2, I3)$$

Зададимся значением источника ЭДС, нулевыми начальными значениями неизвестных токов и решим нелинейную систему уравнений, составленную по законам Кирхгофа для заданной цепи. Знак равенства берётся с панели *Boolean*.

$$E := 8 \quad I1 := 0 \quad I2 := 0 \quad I3 := 0$$

Given

$$I1 = I2 + I3$$

$$E = I1 \cdot R1(I1) + I2 \cdot R2(I2)$$

$$I2 \cdot R2(I2) = I3 \cdot R3(I3)$$

$$\text{Find}(I1, I2, I3) = \begin{pmatrix} 1.021 \\ 0.511 \\ 0.511 \end{pmatrix}$$

Определим значения статических сопротивлений резисторов.

$$R1(1.021) = 5.516 \quad R2(0.511) = 4.638 \quad R3(0.511) = 4.638$$

В данном примере аппроксимировались зависимости сопротивлений резисторов только при положительных токах, так как направления токов известны. Они заданы источником ЭДС.

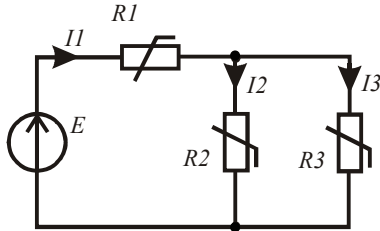


Рис. 2.10

Пример 2.7. Необходимо найти неизвестные токи в электрической цепи, приведённой на рис. 2.11.

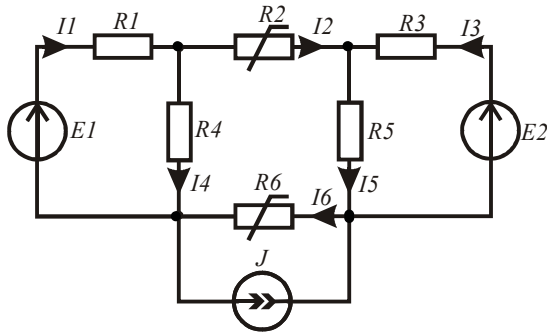


Рис. 2.11

Введём в листинг решения исходные данные.

$$E1 := 120 \quad E2 := 150 \quad R1 := 35 \quad R3 := 25 \quad R4 := 50 \quad R5 := 60 \quad J := 0.5$$

$$U2(I2) := 12 \cdot I2 + 0.5 \cdot (I2)^3 \quad U6(I6) := 15 \cdot I6 - 0.3 \cdot (I6)^3$$

Зададимся нулевыми начальными значениями неизвестных токов. С помощью функции *Given* введём систему уравнений для заданной электрической цепи, а с помощью функции *Find*(x_1, x_2, \dots) найдём значения неизвестных токов.

Листинг оформляется следующим образом. Знак равенства берётся с панели *Boolean*.

$$\begin{array}{l} I1 := 0 \quad I2 := 0 \quad I3 := 0 \quad I4 := 0 \quad I5 := 0 \quad I6 := 0 \\ \text{Given} \end{array}$$

$$I1 - I2 - I4 = 0 \quad I2 + I3 - I5 = 0 \quad I4 + I6 - I1 - J = 0$$

$$U2(I2) + U6(I6) - I4 \cdot R4 + I5 \cdot R5 = 0$$

$$E1 = I1 \cdot R1 + I4 \cdot R4 \quad E2 = I3 \cdot R3 + I5 \cdot R5$$

$$I := \text{Find}(I1, I2, I3, I4, I5, I6)$$

$$I^T = (1.027 \quad -0.654 \quad 2.226 \quad 1.681 \quad 1.572 \quad -0.154)$$

Из решения видно, что реальные направления второго и шестого токов противоположны направлениям, выбранным предварительно.

Убедимся в верности решения задачи. Найдём мощности источников электрической энергии и приёмников. Для этого предварительно найдём статические сопротивления нелинейных резисторов при соответствующих токах и составим массив сопротивлений.

$$R2 := \frac{U2(I2)}{I2} \quad R6 := \frac{U6(I6)}{I6} \quad R := (R1 \quad R2 \quad R3 \quad R4 \quad R5 \quad R6)^T$$

$$\sum_{k=1}^6 [R_k \cdot (I_k)^2] = 456.042 \quad E1 \cdot I_1 + E2 \cdot I_3 + J \cdot U6(I_6) = 456.042$$

Баланс мощностей выполняется.

Пример 2.8. Необходимо в рассмотренном выше примере исследовать влияние изменения тока источника тока на токи в ветвях (рис. 2.12).

Введём исходные данные.

$$E1 := 120 \quad E2 := 150 \quad R1 := 35 \quad R3 := 25 \quad R4 := 50 \quad R5 := 60$$

$$U2(I2) := 12 \cdot I2 + 0.5 \cdot (I2)^3 \quad U6(I6) := 15 \cdot I6 - 0.3 \cdot (I6)^3$$

Зададим пять значений тока источника тока и нулевые начальные значения неизвестных токов для всех пяти случаев.

$$ORIGIN := 1$$

$$n := 1..5 \quad J_n := 0.1 \cdot n$$

$$I1_n := 0 \quad I2_n := 0 \quad I3_n := 0 \quad I4_n := 0 \quad I5_n := 0 \quad I6_n := 0$$

Ниже показан листинг решения данной задачи.

Given

$$I1 - I2 - I4 = 0 \quad I2 + I3 - I5 = 0 \quad I4 + I6 - I1 - J = 0$$

$$U2(I2) + U6(I6) - I4 \cdot R4 + I5 \cdot R5 = 0$$

$$E1 = I1 \cdot R1 + I4 \cdot R4 \quad E2 = I3 \cdot R3 + I5 \cdot R5$$

$$I := \text{Find}(I1, I2, I3, I4, I5, I6)$$

Покажем численные значения всех найденных токов и выполним проверку верности решения.

$$I_1^T = (1.081 \quad 1.067 \quad 1.054 \quad 1.041 \quad 1.027)$$

$$I_2^T = (-0.563 \quad -0.586 \quad -0.608 \quad -0.631 \quad -0.654)$$

$$I_3^T = (2.162 \quad 2.178 \quad 2.194 \quad 2.21 \quad 2.226)$$

$$I_4^T = (1.644 \quad 1.653 \quad 1.662 \quad 1.672 \quad 1.681)$$

$$I_5^T = (1.599 \quad 1.592 \quad 1.586 \quad 1.579 \quad 1.572)$$

$$I_6^T = (-0.463 \quad -0.386 \quad -0.308 \quad -0.231 \quad -0.154)$$

$$R2 := \frac{U2(I2)}{I2} \quad R6 := \frac{U6(I6)}{I6} \quad R := (R1 \quad R2 \quad R3 \quad R4 \quad R5 \quad R6)^T$$

$$\sum_{k=1}^6 \left[\overrightarrow{R_k \cdot (I_k)^2} \right] = \begin{pmatrix} 453.3 \\ 453.637 \\ 454.206 \\ 455.008 \\ 456.042 \end{pmatrix} \quad E1 \cdot I_1 + E2 \cdot I_3 + \overrightarrow{(J \cdot U6(I6))} = \begin{pmatrix} 453.3 \\ 453.637 \\ 454.206 \\ 455.008 \\ 456.042 \end{pmatrix}$$

Видно, что во всех случаях баланс мощностей выполняется.

2.2.3. Использование системы уравнений, составленной по графу нелинейной цепи

При анализе сложных нелинейных электрических цепей можно формализовать составление уравнений по законам Кирхгофа, если использовать символьные матричные преобразования. С помощью графа цепи составляются матрицы соединений и контуров, а затем левые части матричных уравнений в символьной форме. Строки полученных матриц копируются и приравняются к нулю. В полученную систему уравнений вводятся нелинейные зависимости. Система уравнений решается численно.

Пример 2.9. Необходимо определить неизвестные токи в заданной электрической цепи (рис. 2.12). Граф цепи приведён на рис. 2.13.

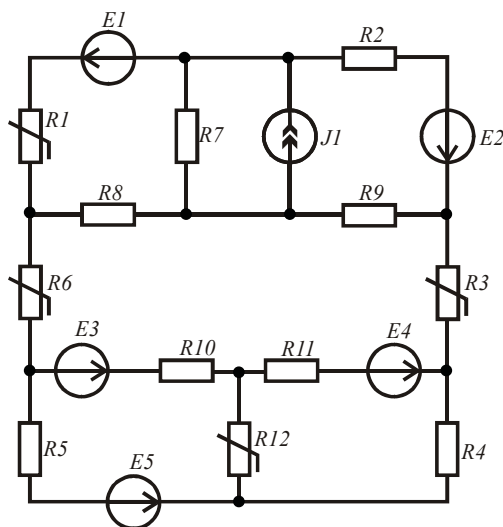


Рис. 2.12

Выполним необходимые преобразования в символьной форме.

$$ORIGIN := 1 \quad I := (I1 \quad I2 \quad I3 \quad I4 \quad I5 \quad I6 \quad I7 - J1 \quad I8 \quad I9 \quad I10 \quad I11 \quad I12)^T$$

Подготовим матрицу соединений, с помощью которой получим матрицу левой части узловых уравнений. Затем подготовим матрицу контуров, с помощью которой получим матрицу левой части контурных уравнений. Ветви дерева графа выделены жирными линиями.

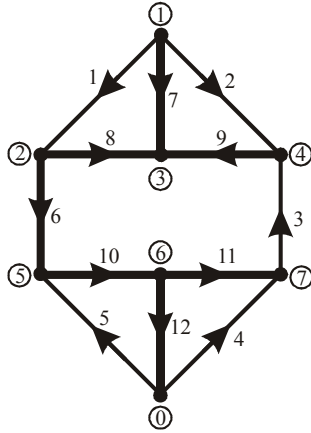


Рис. 2.13

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad A \cdot I \rightarrow \begin{pmatrix} I1 + I2 + I7 - J1 \\ I6 - I1 + I8 \\ J1 - I8 - I9 - I7 \\ I9 - I3 - I2 \\ I5 - I6 + I10 \\ I11 - I10 + I12 \\ I3 - I4 - I11 \end{pmatrix}$$

$$B := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad U := \begin{pmatrix} U1(I1) - E1 \\ I2 \cdot R2 - E2 \\ U3(I3) \\ I4 \cdot R4 \\ I5 \cdot R5 - E5 \\ U6(I6) \\ I7 \cdot R7 \\ I8 \cdot R8 \\ I9 \cdot R9 \\ I10 \cdot R10 - E3 \\ I11 \cdot R11 - E4 \\ U12(I12) \end{pmatrix}$$

$$B \cdot U \rightarrow \begin{pmatrix} U1(I1) - E1 - I7 \cdot R7 + I8 \cdot R8 \\ I2 \cdot R2 - E2 - I7 \cdot R7 + I9 \cdot R9 \\ U3(I3) - E4 - E3 + U6(I6) - I8 \cdot R8 + I9 \cdot R9 + I10 \cdot R10 + I11 \cdot R11 \\ E4 + U12(I12) + I4 \cdot R4 - I11 \cdot R11 \\ E3 - E5 - U12(I12) + I5 \cdot R5 - I10 \cdot R10 \end{pmatrix}$$

Подготовим данные для решения задачи. Выполним сплайн-интерполяцию ВАХ нелинейных резисторов по экспериментальным данным. Аналитическая аппроксимация ВАХ шестого резистора задана.

$$\begin{aligned}
E1 &:= 100 & E2 &:= 60 & E3 &:= 80 & E4 &:= 95 & E5 &:= 130 & J1 &:= 0.4 \\
R2 &:= 150 & R4 &:= 80 & R5 &:= 90 & R7 &:= 60 & R8 &:= 110 & R9 &:= 70 \\
R10 &:= 40 & R11 &:= 75 & U6(I6) &:= 20 \cdot I6 + I6^3
\end{aligned}$$

$$i := (-2.4 \quad -2 \quad -1.6 \quad -1.2 \quad -0.8 \quad -0.4 \quad 0 \quad 0.4 \quad 0.8 \quad 1.2 \quad 1.6 \quad 2 \quad 2.4)^T$$

$$u1 := (-92 \quad -66 \quad -48 \quad -34 \quad -22 \quad -10 \quad 0 \quad 10 \quad 22 \quad 34 \quad 48 \quad 66 \quad 92)^T$$

$$u3 := (-63 \quad -50 \quad -38 \quad -27 \quad -17 \quad -8 \quad 0 \quad 8 \quad 17 \quad 27 \quad 38 \quad 50 \quad 63)^T$$

$$u12 := (-65 \quad -60 \quad -52 \quad -41 \quad -28 \quad -15 \quad 0 \quad 15 \quad 28 \quad 41 \quad 52 \quad 60 \quad 65)^T$$

$$S := \text{cspline}(i, u1) \quad U1(I1) := \text{interp}(S, i, u1, I1)$$

$$S1 := \text{cspline}(i, u3) \quad U3(I3) := \text{interp}(S1, i, u3, I3)$$

$$S2 := \text{cspline}(i, u12) \quad U12(I12) := \text{interp}(S2, i, u12, I12)$$

Зададимся нулевыми начальными значениями неизвестных токов. Составим систему уравнений, копируя полученные выше выражения, и решим её.

$$\begin{aligned}
I1 &:= 0 & I2 &:= 0 & I3 &:= 0 & I4 &:= 0 & I5 &:= 0 & I6 &:= 0 & I7 &:= 0 & I8 &:= 0 & I9 &:= 0 \\
I10 &:= 0 & I11 &:= 0 & I12 &:= 0
\end{aligned}$$

Given

$$I1 + I2 + I7 - J1 = 0 \quad I6 - I1 + I8 = 0 \quad -I7 - I8 - I9 + J1 = 0$$

$$I9 - I3 - I2 = 0 \quad I5 - I6 + I10 = 0 \quad I11 - I10 + I12 = 0$$

$$I3 - I4 - I11 = 0 \quad U1(I1) - E1 - R7 \cdot I7 + I8 \cdot R8 = 0$$

$$I2 \cdot R2 - E2 - I7 \cdot R7 + I9 \cdot R9 = 0$$

$$U3(I3) - E4 - E3 + U6(I6) - I8 \cdot R8 + I9 \cdot R9 + I10 \cdot R10 + I11 \cdot R11 = 0$$

$$E4 + U12(I12) + I4 \cdot R4 - I11 \cdot R11 = 0$$

$$E3 - E5 - U12(I12) + I5 \cdot R5 - I10 \cdot R10 = 0$$

$$I := \text{Find}(I1, I2, I3, I4, I5, I6, I7, I8, I9, I10, I11, I12)$$

$$I^T =$$

	1	2	3	4	5	6	7	8
1	1.281	-0.238	1.055	0.023	0.559	1.055	-0.643	...

Найдём значения статических сопротивлений нелинейных резисторов и проверим баланс мощностей источников и приёмников электрической энергии.

$$R1 := \frac{U1(I1)}{I1} \quad R3 := \frac{U3(I3)}{I3} \quad R6 := \frac{U6(I6)}{I6} \quad R12 := \frac{U12(I12)}{I12}$$

$$R := (R1 \ R2 \ R3 \ R4 \ R5 \ R6 \ R7 \ R8 \ R9 \ R10 \ R11 \ R12)^T$$

$$E := (E1 \ E2 \ 0 \ 0 \ E5 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ E3 \ E4 \ 0)^T$$

$$\sum_{k=1}^{12} [R_k \cdot (I_k)^2] = 308.64 \quad \sum_{k=1}^{12} (E_k \cdot I_k) + J1 \cdot I7 \cdot R7 = 308.64$$

Баланс мощностей выполняется.

2.2.4. Использование схемы замещения в виде нелинейной электрической цепи для анализа магнитных цепей с постоянными магнитодвижущими силами

Магнитные цепи содержат участки, создающие магнитодвижущие силы (МДС), магнитопроводящие участки и воздушные зазоры, в которых происходит преобразование энергии магнитного поля в другие виды энергии. Состояние магнитной цепи с постоянными МДС определяется законами Кирхгофа, которые аналогичны законам Кирхгофа для электрических цепей. Составление системы уравнений для магнитных цепей упрощается, если составить электрическую схему замещения магнитной цепи. В схеме замещения МДС являются источниками, магнитопроводы являются нелинейными магнитными сопротивлениями, а воздушные зазоры являются линейными магнитными сопротивлениями. Рассмотрим примеры использования схемы замещения.

Пример 2.10. Необходимо определить неизвестные магнитные потоки в магнитной цепи, схема замещения которой приведена на рис. 2.14 (прямая задача).

Сечения магнитопроводов и воздушных зазоров, длины средних силовых линий участков магнитной цепи и МДС имеют следующие значения:

$$s1 := 2 \cdot 10^{-4} \quad s2 := 4 \cdot 10^{-4} \quad s3 := 4 \cdot 10^{-4} \quad s4 := 2.5 \cdot 10^{-4} \quad s5 := 2.5 \cdot 10^{-4}$$

$$s6 := 4 \cdot 10^{-4} \quad l1 := 0.03 \quad l2 := 0.04 \quad l3 := 0.02 \quad l4 := 0.001 \quad l5 := 0.001$$

$$l6 := 0.04 \quad F1 := 50 \quad F2 := 40 \quad F3 := 45 \quad \mu := 4\pi \cdot 10^{-7}$$

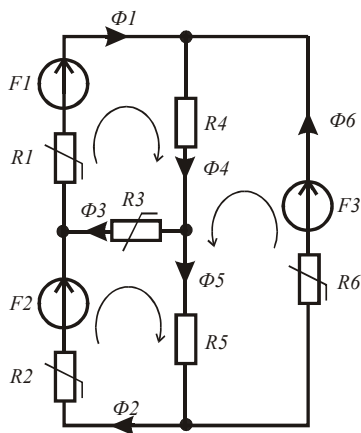


Рис. 2.14

Материал магнитопровода одинаков для всех участков. Зависимость напряжённости магнитного поля от индукции для данного материала (рис. 2.15) аппроксимируется выражением:

$$H(B) := 150 \cdot B + 300 \cdot B^3$$

Запишем выражения для нелинейных магнитных сопротивлений магнитопроводов и линейных магнитных сопротивлений воздушных зазоров:

$$R1(B) := \frac{H(B) \cdot l1}{s1 \cdot B} \quad R2(B) := \frac{H(B) \cdot l2}{s2 \cdot B} \quad R3(B) := \frac{H(B) \cdot l3}{s3 \cdot B}$$

$$R6(B) := \frac{H(B) \cdot l6}{s6 \cdot B} \quad R4 := \frac{l4}{\mu \cdot s4} \quad R5 := \frac{l5}{\mu \cdot s5}$$

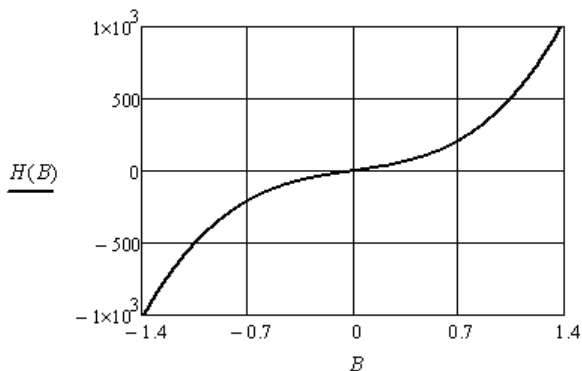


Рис. 2.15

Выполним аппроксимацию зависимостей нелинейных магнитных сопротивлений от величины магнитного потока следующими выражениями:

$$R1(\Phi) := R1(10^{-4}) + (10^6 \cdot \Phi \cdot 1.1)^2 \quad R2(\Phi) := R2(10^{-4}) + (10^5 \cdot \Phi \cdot 4.3)^2$$

$$R3(\Phi) := R3(10^{-4}) + (10^5 \cdot \Phi \cdot 3)^2 \quad R6(\Phi) := R6(10^{-4}) + (10^5 \cdot \Phi \cdot 4.4)^2$$

На рис. 2.16 показаны соответствующие зависимости для второго магнитного сопротивления. Видно, что аппроксимирующее выражение совпадает с исходным.

Для определения неизвестных магнитных потоков составим систему уравнений по законам Кирхгофа, используя аппроксимации зависимостей нелинейных магнитных сопротивлений от магнитных потоков на соответствующих участках магнитной цепи. На схеме замещения направления магнитных потоков и обхода контуров выбраны произвольно.

$$\Phi := -1 \cdot 10^{-3}, -9.99 \cdot 10^{-4} .. 1 \cdot 10^{-3} \quad B := -10^{-3}, -9.99 \cdot 10^{-4} .. 10^{-3}$$

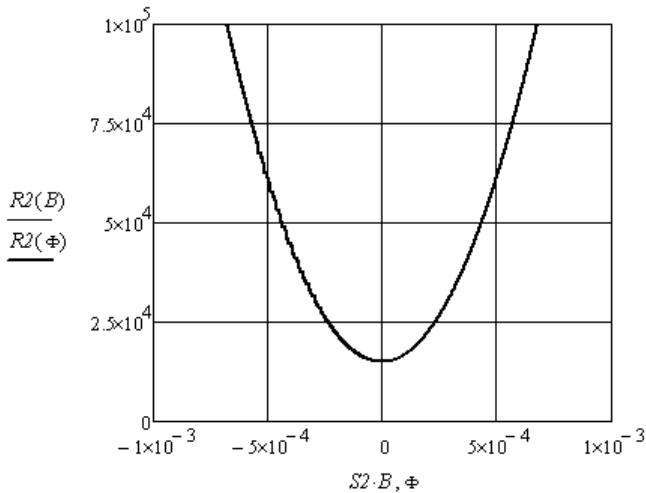


Рис. 2.16

Сделаем необходимые обозначения и решим систему нелинейных уравнений.

$$R10 := R1(0) \quad R20 := R2(0) \quad R60 := R6(0) \quad R30 := R3(0)$$

$$ORIGIN := 1 \quad \Phi := (0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0)^T$$

Given

$$\Phi_1 - \Phi_4 + \Phi_6 = 0 \quad -\Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_3 = 0 \quad -\Phi_2 + \Phi_5 - \Phi_6 = 0$$

$$F1 = \Phi_1 \cdot \left[R10 + \left(10^5 \cdot \Phi_1 \cdot 1.1 \right)^2 \right] + \Phi_3 \cdot \left[R30 + \left(10^5 \cdot \Phi_3 \cdot 3 \right)^2 \right] + \Phi_4 \cdot R4$$

$$F2 = \Phi_2 \cdot \left[R20 + \left(10^5 \cdot \Phi_2 \cdot 4.3 \right)^2 \right] - \Phi_3 \cdot \left[R30 + \left(10^5 \cdot \Phi_3 \cdot 3 \right)^2 \right] + \Phi_5 \cdot R5$$

$$F3 = \Phi_4 \cdot R4 + \Phi_5 \cdot R5 + \Phi_6 \cdot \left[R60 + \left(10^5 \cdot \Phi_6 \cdot 4.4 \right)^2 \right]$$

$$\Phi := Find(\Phi)$$

$$\Phi^T = (4.038 \times 10^{-4} \quad 3.983 \times 10^{-4} \quad 5.557 \times 10^{-6} \quad 1.259 \times 10^{-5} \quad 7.033 \times 10^{-6} \quad -3.912 \times 10^{-4})$$

Видно, что реальное направление шестого магнитного потока будет противоположно выбранному на схеме замещения.

Убедимся, что решение выполнено верно. Для этого найдём статические магнитные сопротивления нелинейных элементов и составим уравнение баланса мощностей в схеме замещения.

$$R_1 := R10 + \left(10^5 \cdot \Phi_1 \cdot 1.1 \right)^2 \quad R_2 := R20 + \left(10^5 \cdot \Phi_2 \cdot 4.3 \right)^2 \quad R_3 := R30 + \left(10^5 \cdot \Phi_3 \cdot 3 \right)^2$$

$$R_4 := R4 \quad R_5 := R5 \quad R_6 := R60 + \left(10^5 \cdot \Phi_6 \cdot 4.4 \right)^2$$

$$R^T = (2.447 \times 10^4 \quad 4.433 \times 10^4 \quad 7.503 \times 10^3 \quad 3.183 \times 10^6 \quad 3.183 \times 10^6 \quad 4.463 \times 10^4)$$

$$\sum_{k=1}^6 \left[R_k \cdot (\Phi_k)^2 \right] = 0.019 \quad F1 \cdot \Phi_1 + F2 \cdot \Phi_2 + F3 \cdot \Phi_6 = 0.019$$

Баланс мощностей выполняется.

Пример 2.11. Необходимо найти значения МДС, которые создают заданные индукции в воздушных зазорах магнитной цепи (обратная задача). Схема замещения магнитной цепи приведена на рис. 2.17.

Введём в листинг решения исходные данные, это размеры магнитопроводов, индукции в воздушных зазорах и аппроксимацию зависимости напряжённости магнитного поля в материале магнитопроводов от индукции.

$$s1 := 8 \cdot 10^{-4} \quad s2 := 15 \cdot 10^{-4} \quad s3 := 6 \cdot 10^{-4} \quad s4 := 24 \cdot 10^{-4} \quad s5 := 24 \cdot 10^{-4}$$

$$l1 := 0.1 \quad l2 := 0.09 \quad l3 := 0.12 \quad l4 := 0.001 \quad l5 := 0.001 \quad \mu := 4 \cdot \pi \cdot 10^{-7}$$

$$B1 := 0.2 \quad B2 := 0.3 \quad H(B) := 150 \cdot \tan(B) \quad \text{ORIGIN} := 1$$

Рассчитаем магнитные потоки в магнитопроводах.

$$\Phi_1 := B1 \cdot s4 \quad \Phi_2 := B2 \cdot s5 \quad \Phi_3 := \Phi_1 + \Phi_2 \quad B3 := \frac{\Phi_3}{s2}$$

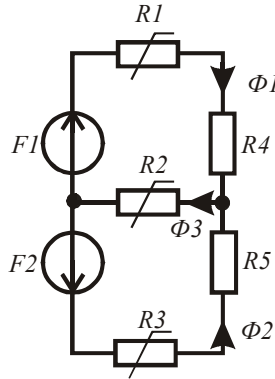


Рис. 2.17

Определим магнитные сопротивления всех участков магнитной цепи.

$$R1 := \frac{H(B1) \cdot l1}{s1 \cdot B1} \quad R2 := \frac{H(B3) \cdot l2}{s2 \cdot B3} \quad R3 := \frac{H(B2) \cdot l3}{s3 \cdot B2}$$

$$R4 := \frac{l4}{\mu \cdot s4} \quad R5 := \frac{l5}{\mu \cdot s5}$$

Определим магнитные сопротивления ветвей магнитной цепи и значения МДС с помощью уравнений, составленных по второму закону Кирхгофа.

$$Rv := (R1 + R4 \quad R3 + R5 \quad R2)^T$$

$$F1 := \Phi_1 \cdot Rv_1 + \Phi_3 \cdot Rv_3 \quad F2 := (\Phi_2 \cdot Rv_2 + \Phi_3 \cdot Rv_3) \quad F = \begin{pmatrix} 182.177 \\ 274.905 \end{pmatrix}$$

Для проверки правильности решения найдём левую и правую части уравнения баланса мощностей в схеме замещения.

$$\sum_{k=1}^3 [Rv_k \cdot (\Phi_k)^2] = 0.285$$

$$F_1 \cdot \Phi_1 + F_2 \cdot \Phi_2 = 0.285$$

Баланс мощностей выполняется.

Контрольные вопросы

1. Какая разница между сопротивлением линейного и нелинейного резистора?
2. Поясните термин «аппроксимация».
3. Чем отличается «регрессия» от сплайн-аппроксимации?
4. Поясните термин «интерполяция».
5. Какая система уравнений позволяет выполнить анализ состояния нелинейной электрической цепи?
6. Как осуществляется свёртка различных соединений нелинейных резисторов?
7. Какой симметрией должны обладать зависимости $U(I)$ у нелинейных резисторов?
8. Какой симметрией должны обладать зависимости $R(I)$ у нелинейных резисторов?
9. Как определяются статические и дифференциальные сопротивления нелинейных резисторов?
10. В каких случаях и как используется вычислительный блок *Given/Find*(x_1, x_2, \dots)?
11. Какие уравнения составляются с помощью направленного графа нелинейной электрической цепи?
12. В чём аналогия между нелинейной электрической цепью и магнитной цепью с постоянными МДС?
13. Чем отличаются прямая и обратная задачи анализа магнитных цепей?
14. Назначение оператора *reverse*(A)?
15. Назначение оператора *stack*(A, B)?

3. АНАЛИЗ ЛИНЕЙНЫХ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ С ИСТОЧНИКАМИ СИНУСОИДАЛЬНОЙ ЭДС И СИНУСОИДАЛЬНОГО ТОКА

Мгновенные значения падений напряжений на идеальных элементах R , L , C электрической цепи и мгновенные значения токов связаны выражениями:

$$u_R = Ri_R, u_L = L \frac{di_L}{dt}, i_C = C \frac{du_C}{dt}.$$

Видно, что состояние электрической цепи в любой момент времени определяется системой дифференциальных уравнений, составленных по законам Кирхгофа. При синусоидальных токах и напряжениях анализ состояния электрической цепи упрощается благодаря использованию комплексного или символического метода. Перенос задачи на комплексную плоскость позволяет заменить дифференциальные уравнения состояния электрической цепи алгебраическими и исключить из них время.

При переносе решения на комплексную плоскость синусоидальные источники ЭДС $e(t) = E\sqrt{2} \sin(\omega t + \psi)$ замещаются комплексными векторами $\underline{E} = Ee^{j\psi}$, зафиксированными в момент времени $t = 0$. Аналогично замещаются и синусоидальные источники тока. Сопротивления резисторов, индуктивности катушек и ёмкости конденсаторов замещаются их комплексными сопротивлениями: $\underline{Z}_R = r + j0 = r$, $\underline{Z}_L = 0 + j\omega L = jx_L$, $\underline{Z}_C = 0 - j\frac{1}{\omega C} = -jx_C$. Для составления уравнений необходимо использовать законы Кирхгофа в комплексной форме. После определения комплексных действующих значений неизвестных токов они записываются в виде синусоид.

Верность решения проверяется с помощью уравнения баланса мощностей в комплексной форме.

Решение иллюстрируется векторными диаграммами токов и векторными топографическими диаграммами напряжений [1; 3; 4; 5; 6; 9].

3.1. Использование метода свёртки в комплексной форме

Для определения неизвестных токов в цепи с одним источником электрической энергии используется метод свёртки на комплексной плоскости. Вначале находится эквивалентное комплексное сопротивление пассивного двухполюсника, подключенного к источнику электрической энергии. После этого находится ток через источник, если это источник ЭДС. Затем находятся токи в параллельных ветвях, используя формулу разброса токов. Далее находят остальные токи по мере разворачивания цепи к исходной схеме. После решения задачи на комплексной плоскости возвращаются на временную плоскость и записывают синусоиды токов.

Эквивалентные комплексные сопротивления находятся по известным правилам. Например, эквивалентное комплексное сопротивление ветви равно сумме комплексных сопротивлений всех её участков n ; эквивалентное комплексное сопротивление n параллельных ветвей находится через сумму комплексных проводимостей ветвей; эквивалентные преобразования соединения ветвей треугольником в соединение ветвей звездой, и наоборот, требуют пересчёта комплексных сопротивлений ветвей.

Численно это делается следующим образом.

В ветви 3 участка. Определим комплексное сопротивление ветви, если даны комплексные сопротивления участков.

$$Z_1 := 160 + 120j \quad Z_2 := 310 - 200j \quad Z_3 := 230 + 180j$$

$$\sum_{k=1}^3 Z_k = 700 + 100j$$

Параллельно соединены 4 ветви с известными комплексными сопротивлениями. Определим эквивалентное комплексное сопротивление двухполюсника.

$$Z_1 := 360 + 100j \quad Z_2 := 210 - 160j \quad Z_3 := 530 - 400j \quad Z_4 := 430 + 500j$$

$$\left[\sum_{k=1}^4 (Z_k)^{-1} \right]^{-1} = 124.811 - 21.438j$$

Даны сопротивления ветвей треугольника, определим сопротивления ветвей эквивалентной звезды.

$$\begin{aligned} Z12 &:= 250 & Z23 &:= 300 - 400j & Z13 &:= 180j \\ m &:= Z12 + Z23 + Z13 & Z1 &:= \frac{Z12 \cdot Z13}{m} & Z2 &:= \frac{Z23 \cdot Z12}{m} & Z3 &:= \frac{Z13 \cdot Z23}{m} \\ Z1 &= -28.213 + 70.533j & Z2 &= 180.251 - 109.718j & Z3 &= 78.997 + 129.781j \end{aligned}$$

Даны сопротивления ветвей звезды, определим сопротивления ветвей эквивалентного треугольника.

$$\begin{aligned} Z1 &:= 120 + 200j & Z2 &:= 180 + 200j & Z3 &:= 200 - 150j \\ p &:= Z1 \cdot Z3 + Z2 \cdot Z3 + Z1 \cdot Z2 & Z12 &:= \frac{p}{Z3} & Z23 &:= \frac{p}{Z1} & Z13 &:= \frac{p}{Z2} \\ Z12 &= 97.12 + 547.84j & Z23 &= 573.382 - 163.971j & Z13 &= 515.028 - 44.475j \end{aligned}$$

Модуль и аргумент комплексного числа находятся следующим образом:

$$|Z12| = 556.38203 \quad \arg(Z12) = 1.39534$$

Знак модуля берётся с панели *Calculator*.

Пример 3.1. Необходимо найти неизвестные токи в электрической цепи, приведённой на рис. 3.1, с источником ЭДС вида $e(t) = E\sqrt{2} \sin(\omega t + \psi)$.

Внесём в листинг вычислений исходные данные.

$$\begin{aligned} E &:= 120 & \omega &:= 1000 & \psi &:= 1.2 & R1 &:= 55 & R2 &:= 80 & R3 &:= 40 & L1 &:= 0.08 \\ L2 &:= 0.06 & L3 &:= 0.09 & C1 &:= 20 \cdot 10^{-6} & C2 &:= 25 \cdot 10^{-6} & C3 &:= 35 \cdot 10^{-6} \end{aligned}$$

Найдём комплексные сопротивления ветвей и выполним операцию свёртки. Затем найдём ток в первой ветви, а через него найдём токи в параллельных ветвях. Мнимая единица в листинге набирается как множитель *1j*. Кроме этого, чтобы отличать мнимую единицу и мгновенное значение тока, следует по маршруту *Format/Result format/Display options* установить *Imaginary value j(J)*.

$$\begin{aligned}
 \text{ORIGIN} &:= 1 & EI &:= 120 \cdot e^{1.2j} & x1 &:= \omega \cdot L1 & x2 &:= \omega \cdot L2 & x3 &:= \omega \cdot L3 & r1 &:= R1 \\
 r2 &:= R2 & r3 &:= R3 & x4 &:= \frac{1}{\omega \cdot C1} & x5 &:= \frac{1}{\omega \cdot C2} & x6 &:= \frac{1}{\omega \cdot C3} \\
 Z1 &:= r1 + j(x1 - x4) & Z2 &:= r2 + j(x2 - x5) & Z3 &:= r3 + j(x3 - x6) \\
 Z3 &:= Z1 + \frac{Z2 \cdot Z3}{Z2 + Z3} = 88.374 + 54.972j \\
 I1 &:= \frac{EI}{Z3} = 0.922 + 0.692j & |I1| &= 1.153 & \arg(I1) &= 0.644 \\
 I2 &:= I1 \cdot \frac{Z3}{Z2 + Z3} = 0.295 + 0.503j & |I2| &= 0.583 & \arg(I2) &= 1.041 \\
 I3 &:= I1 \cdot \frac{Z2}{Z2 + Z3} = 0.628 + 0.189j & |I3| &= 0.656 & \arg(I3) &= 0.292
 \end{aligned}$$

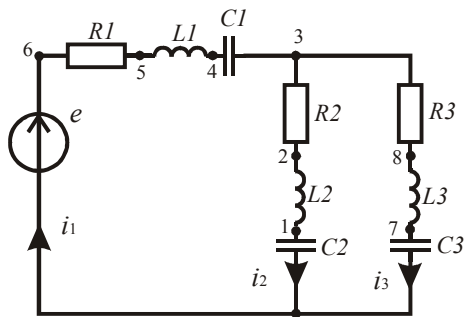


Рис. 3.1

Убедимся в верности решения. Найдём комплексную мощность источника и комплексную мощность приёмников электрической энергии.

$$S_z := \sum_{k=1}^3 \left[\left(\overrightarrow{|I_k|} \right)^2 \cdot Z_k \right] = 117.485 + 73.08j \quad S_e := EI \cdot \overline{I_1} = 117.485 + 73.08j$$

Баланс активных и реактивных мощностей выполняется.

Спряжённое комплексное значение первого тока вычисляется с помощью клавиши [“] латинской клавиатуры. →

Массив модулей токов вычисляется с помощью оператора $f(M)$ «векторизировать» панели *Matrix*.

Запишем найденные токи в виде гармонических функций времени. Частота токов равна частоте источника ЭДС.

$$i_1(t) = 1.153\sqrt{2} \sin(\omega t + 0.644),$$

$$i_2(t) = 0.583\sqrt{2} \sin(\omega t + 1.041), \quad i_3(t) = 0.656\sqrt{2} \sin(\omega t + 0.292).$$

Пример 3.2. Необходимо рассчитать и построить векторную диаграмму токов и векторную топографическую диаграмму напряжений по результатам решения задачи в предыдущем примере.

Диаграммы строятся как графики в полярных координатах. Токи строятся как векторы, выходящие из начала координат. Векторы напряжений образуют замкнутый многоугольник и отображают второй закон Кирхгофа.

Найдём комплексные потенциалы всех выделенных цифрами точек электрической цепи, затем сформируем массивы координат точек для напряжений и токов.

$$\Phi_0 := 0 \quad \Phi_1 := \Phi_0 + I_2 \cdot (-j \cdot x_5) \quad \Phi_2 := \Phi_1 + I_2 \cdot (j \cdot x_2) \quad \Phi_3 := \Phi_2 + I_2 \cdot r_2$$

$$\Phi_4 := \Phi_3 + I_1 \cdot (-j \cdot x_4) \quad \Phi_5 := \Phi_4 + I_1 \cdot (j \cdot x_1) \quad \Phi_6 := \Phi_5 + I_1 \cdot r_1$$

$$\Phi_7 := \Phi_0 + I_3 \cdot (-j \cdot x_6) \quad \Phi_8 := \Phi_7 + I_3 \cdot (j \cdot x_3)$$

$$\psi := \arg(\Phi) \quad U := \overrightarrow{|\Phi|} \quad \psi I := \arg(I) \quad II := \overrightarrow{|I|}$$

Подготовим соответствующие столбцовые матрицы координат.

$$\psi a := (0 \ \psi_1 \ \psi_2 \ \psi_3 \ \psi_4 \ \psi_5 \ \psi_6 \ 0)^T \quad U a := (0 \ U_1 \ U_2 \ U_3 \ U_4 \ U_5 \ U_6 \ 0)^T$$

$$\psi b := (0 \ \psi_7 \ \psi_8 \ \psi_3)^T \quad U b := (0 \ U_7 \ U_8 \ U_3)^T$$

$$\psi c := (0 \ \psi I_1 \ 0 \ \psi I_2 \ 0 \ \psi I_3 \ 0)^T \quad I c := (0 \ II_1 \ 0 \ II_2 \ 0 \ II_3 \ 0)^T$$

Построим полученные графики и после импортирования нанесём на них стрелки и обозначения с помощью рисования в Word (рис. 3.2).

Векторную диаграмму можно построить и в системе декартовых координат. В этом случае координаты точек задаются проекциями на вещественную и мнимую оси комплексной плоскости.

Подготовим соответствующие столбцовые матрицы координат.

$$A := \text{Re}(\Phi) \quad B := \text{Im}(\Phi) \quad AI := \text{Re}(I) \quad BI := \text{Im}(I)$$

$$C := (0 \ A_1 \ A_2 \ A_3 \ A_4 \ A_5 \ A_6 \ 0)^T \quad D := (0 \ B_1 \ B_2 \ B_3 \ B_4 \ B_5 \ B_6 \ 0)^T$$

$$CI := (0 \ A_7 \ A_8 \ A_3)^T \quad DI := (0 \ B_7 \ B_8 \ B_3)^T$$

$$C2 := (0 \ AI_1 \ 0 \ AI_2 \ 0 \ AI_3 \ 0)^T \quad D2 := (0 \ BI_1 \ 0 \ BI_2 \ 0 \ BI_3 \ 0)^T$$

Построим полученные графики в одной системе декартовых координат. Масштаб по обеим осям должен быть одинаковым, ячейки должны быть квадратными. После импортирования графика нанесём стрелки и обозначения узлов и токов (рис. 3.3).

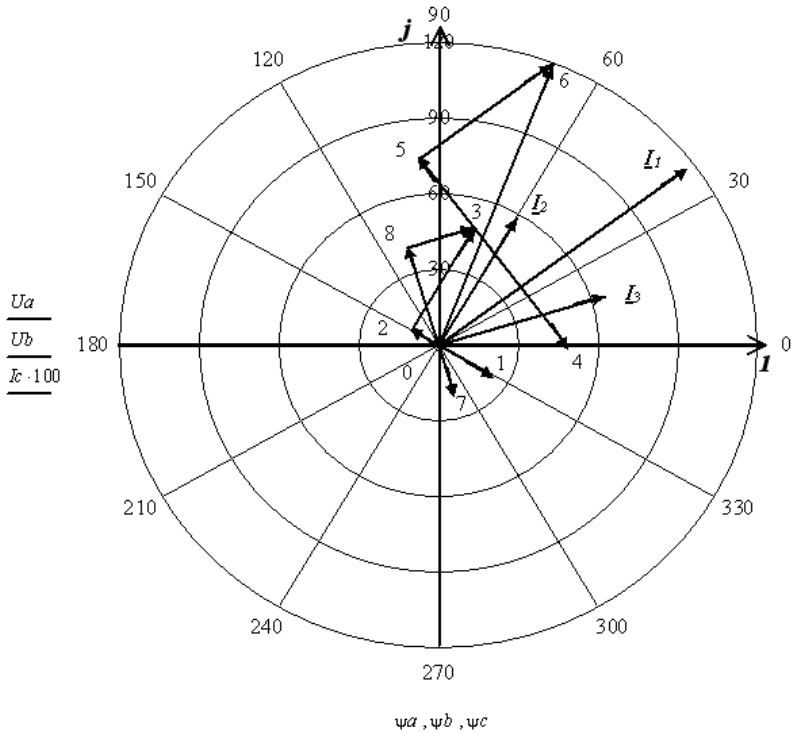


Рис. 3.2

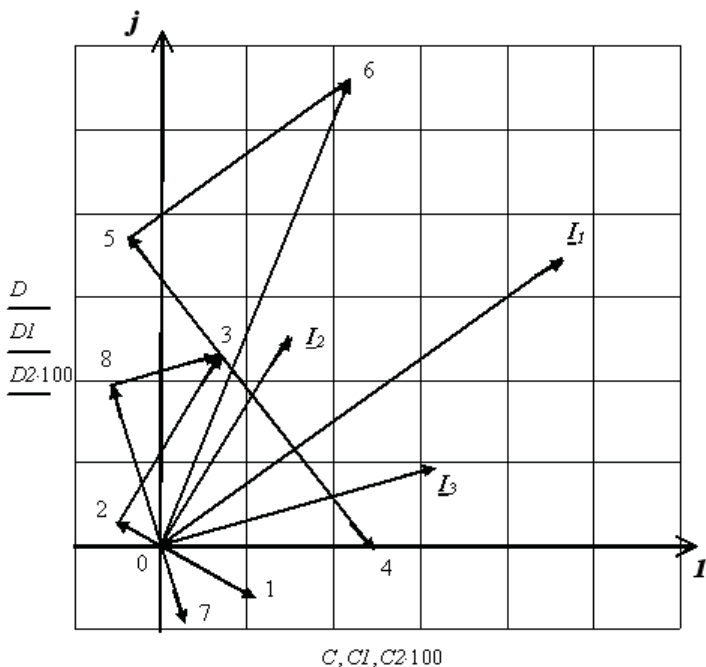


Рис. 3.3

Пример 3.3. Необходимо найти неизвестные токи в электрической цепи, содержащей индуктивно связанные катушки (рис. 3.4).

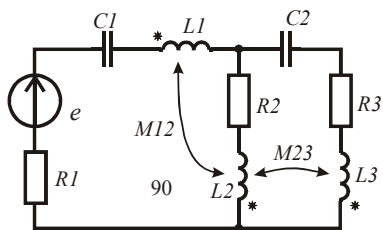


Рис. 3.4

Задача решается методом свёртки, но предварительно выполняется операция развязки индуктивно связанных катушек.

Составим для заданной цепи систему уравнений по законам Кирхгофа в комплексной форме.

$$\begin{cases} \underline{I}_1 - \underline{I}_2 - \underline{I}_3 = 0; \\ \underline{I}_1 r_1 - \underline{I}_1 j x_{C1} + \underline{I}_1 j x_{L1} - \underline{I}_2 j x_{M12} + \underline{I}_2 r_2 + \underline{I}_2 j x_{L2} - \underline{I}_1 j x_{M12} + \underline{I}_3 j x_{M23} = \underline{E}; \\ \underline{I}_1 r_1 - \underline{I}_1 j x_{C1} + \underline{I}_1 j x_{L1} - \underline{I}_2 j x_{M12} - \underline{I}_3 j x_{C2} + \underline{I}_3 r_3 + \underline{I}_3 j x_{L3} + \underline{I}_2 j x_{M23} = \underline{E}. \end{cases}$$

Во втором уравнении, используя первое уравнение, выразим третий ток через первый и второй токи. В третьем уравнении выразим второй ток через первый и третий токи. В результате получим систему уравнений в следующем виде:

$$\begin{cases} \underline{I}_1 \underline{Z}_1 + \underline{I}_2 \underline{Z}_2 = \underline{E}; \\ \underline{I}_1 \underline{Z}_1 + \underline{I}_3 \underline{Z}_3 = \underline{E}; \\ \underline{I}_1 - \underline{I}_2 - \underline{I}_3 = 0, \end{cases}$$

где $\underline{Z}_1 = r_1 + j(x_{L1} - x_{C1} - x_{M12} + x_{M23})$, $\underline{Z}_2 = r_2 + j(x_{L2} - x_{M12} + x_{M23})$,
 $\underline{Z}_3 = r_3 + j(x_{L3} - x_{C2} + x_{M12} - x_{M23})$

Полученные уравнения позволяют составить схему замещения цепи, в которой отсутствуют взаимно индуктивные связи (рис. 3.5).

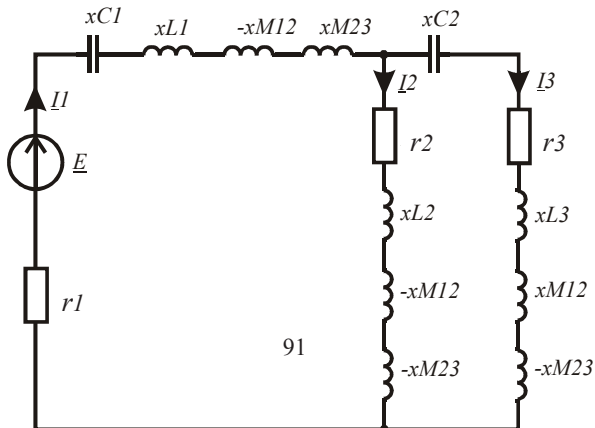


Рис. 3.5

Внесём в листинг вычислений исходные данные.

$$\omega := 1000 \quad E_m := 220 \cdot \sqrt{2} \quad \psi := 1.2 \quad R1 := 60 \quad R2 := 50$$

$$R3 := 40 \quad L1 := 0.08 \quad L2 := 0.06 \quad L3 := 0.09$$

$$C1 := 20 \cdot 10^{-6} \quad C2 := 15 \cdot 10^{-6} \quad M12 := 0.02 \quad M23 := 0.03$$

Найдём сопротивления реактивных элементов и запишем комплексное действующее значение ЭДС источника.

$$x1 := \omega \cdot L1 \quad x2 := \omega \cdot L2 \quad x3 := \omega \cdot L3 \quad x12 := \omega \cdot M12 \quad x23 := \omega \cdot M23$$

$$x4 := \frac{1}{\omega \cdot C1} \quad x5 := \frac{1}{\omega \cdot C2} \quad E := 220 \cdot e^{1.2j} \quad r1 := R1 \quad r2 := R2 \quad r3 := R3$$

По схеме замещения (рис. 3.5) найдём комплексные сопротивления ветвей, а затем неизвестные токи.

$$Z1 := r1 + j(x1 - x4 - x12 + x23) \quad Z2 := r2 + j(x2 - x23 - x12)$$

$$Z3 := r3 + j(x3 - x5 + x12 - x23) \quad Ze := Z1 + \frac{Z2 \cdot Z3}{Z2 + Z3}$$

$$I1 := \frac{E}{Ze} \quad I2 := I1 \cdot \frac{Z3}{Z2 + Z3} \quad I3 := I1 \cdot \frac{Z2}{Z2 + Z3}$$

Для проверки верности решения найдём комплексные мощности источников и приёмников электрической энергии.

$$S := E \cdot (\overline{I1}) = 447.755 + 250.586j$$

$$P := (|I1|)^2 \cdot r1 + (|I2|)^2 \cdot r2 + (|I3|)^2 \cdot r3$$

$$Q := (|I1|)^2 \cdot (x1 - x4) + (|I2|)^2 \cdot x2 + (|I3|)^2 \cdot (x3 - x5)$$

$$Q12 := -2 \cdot |I1| \cdot |I2| \cdot x12 \cdot \cos(\arg(I1) - \arg(I2))$$

$$Q23 := 2 \cdot |I2| \cdot |I3| \cdot x23 \cdot \cos(\arg(I2) - \arg(I3))$$

$$SI := P + j \cdot (Q + Q12 + Q23) = 447.755 + 250.586j$$

Баланс мощностей выполняется.

Запишем выражения для мгновенных значений найденных токов, ограничивая количество показываемых разрядов.

$$i1(t) := \sqrt{2} \cdot |I1| \cdot \sin(\omega \cdot t + \arg(I1)) \quad i1(t) \left| \begin{array}{l} \text{simplify} \\ \text{float}, 3 \end{array} \right. \rightarrow 3.3 \cdot \sin(1000.0 \cdot t + 0.69)$$

$$i2(t) := \sqrt{2} \cdot |I2| \cdot \sin(\omega \cdot t + \arg(I2)) \quad i2(t) \left| \begin{array}{l} \text{simplify} \\ \text{float}, 3 \end{array} \right. \rightarrow 1.5 \cdot \sin(1000.0 \cdot t + 0.758)$$

$$i3(t) := \sqrt{2} \cdot |I3| \cdot \sin(\omega \cdot t + \arg(I3)) \quad i3(t) \left| \begin{array}{l} \text{simplify} \\ \text{float}, 3 \end{array} \right. \rightarrow 1.81 \cdot \sin(1000.0 \cdot t + 0.633)$$

Определим коэффициент мощности источника ЭДС.

$$\cos(\arg(E) - \arg(I1)) = 0.873$$

В данном примере источник используется неэффективно. Реактивную мощность цепи можно уменьшить, если использовать встречное включение второй и третьей катушек.

3.2. Использование метода контурных токов в комплексной форме

Анализ электрических цепей в установившемся режиме с синусоидальными источниками одинаковой частоты ведётся либо методом контурных токов, либо методом узловых потенциалов. Решение переносится на комплексную плоскость. При этом система уравнений по методу контурных токов принимает следующий вид:

$$\left\{ \begin{aligned} \underline{Z}_{11} \underline{I}_{11} + \underline{Z}_{12} \underline{I}_{22} + \underline{Z}_{13} \underline{I}_{33} + \dots + \underline{Z}_{1n} \underline{I}_{nn} + \underline{J}_1 \underline{Z}_{1\ n+1} + \dots &= \underline{E}_{11} \\ \dots & \\ \underline{Z}_{n1} \underline{I}_{11} + \underline{Z}_{n2} \underline{I}_{22} + \underline{Z}_{n3} \underline{I}_{33} + \dots + \underline{Z}_{nn} \underline{I}_{nn} + \underline{J}_1 \underline{Z}_{nn+1} + \dots &= \underline{E}_{nn} \end{aligned} \right. , \quad (3.1)$$

где $\underline{I}_{m\ m}$ — неизвестные комплексные действующие значения контурных токов; \underline{J}_p — известные комплексные действующие значения контурных токов, которые определяются источниками тока; $\underline{Z}_{m\ m}$ — сумма комплексных сопротивлений ветвей, образующих контур m ; $\underline{Z}_{k\ m}$ — сумма комплексных сопротивлений ветвей, по которым течёт контурный ток k и контурный ток m (берётся со знаком плюс, если направления контурных токов в ветвях одинаковые, в противном случае берётся со знаком минус); $\underline{E}_{m\ m}$ — алгебраическая сумма комплексных действующих значений ЭДС, входящих в данный контур.

Использование направленного графа электрической цепи упрощает выбор независимых контуров и формализует составление уравнений. Предварительно необходимо избавиться от вырожденных ветвей с помощью операции расщепления узлов и ветвей. В этом случае система контурных уравнений в матричной форме принимает следующий вид:

$$\mathbf{B} \cdot \underline{\mathbf{Z}} \cdot \mathbf{B}^T \cdot \underline{\mathbf{I}}_k = \mathbf{B} \cdot (\underline{\mathbf{E}} - \underline{\mathbf{Z}} \cdot \underline{\mathbf{J}}) , \quad (3.2)$$

где \mathbf{B} — матрица контуров, правила составления которой с помощью направленного графа цепи рассматривались ранее; $\underline{\mathbf{I}}_k$ — матрица-столбец неизвестных комплексных действующих значений контурных токов; $\underline{\mathbf{Z}}$ — диагональная матрица комплексных сопро-

тивлений ветвей; \underline{E} — матрица-столбец комплексных действующих значений ЭДС ветвей, \underline{J} — матрица-столбец комплексных действующих значений источников тока.

Рассмотрим методику составления и решения матричного уравнения (3.2) на следующем примере.

Пример 3.4. На рис. 3.6 приведена электрическая цепь, в которой надо найти все неизвестные токи. На рис. 3.7 приведён направленный граф данной цепи, в котором выделено дерево графа жирными линиями.

Подготовим листинг для решения данной задачи. Зададимся исходными данными. При определении знаков источников используем условно положительные направления токов и ЭДС в обобщённой ветви (рис. 1.11).

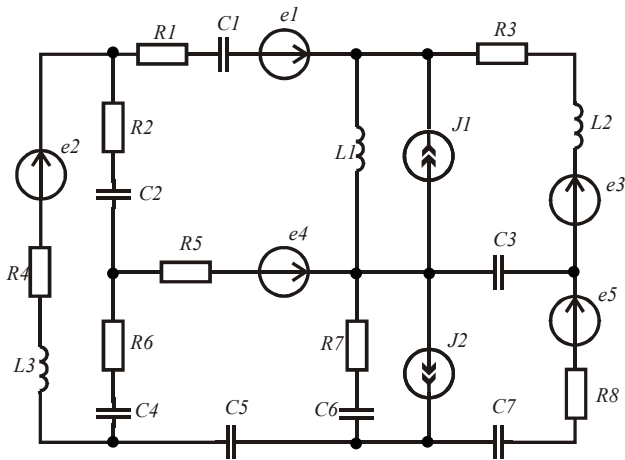


Рис. 3.6

Зададимся параметрами источников.

$$\begin{aligned}
 e_1(t) &= 200\sin(1000t + 0.4), & e_2(t) &= 150\sin(1000t + 0.6), \\
 e_3(t) &= 100\sin(1000t + 1), & e_4(t) &= 250\sin(1000t + 0.1), \\
 e_5(t) &= 180\sin(1000t + 1.5), & J_1(t) &= 0.5\sin(1000t), \\
 J_2(t) &= 0.2\sin(1000t + 1.2).
 \end{aligned}$$

Введём в листинг параметры элементов цепи.

$$\begin{aligned}
 R1 &:= 76 & R2 &:= 50 & R3 &:= 100 & R4 &:= 110 & R5 &:= 80 & R6 &:= 70 & R7 &:= 90 & R8 &:= 95 \\
 L1 &:= 0.05 & L2 &:= 0.08 & L3 &:= 0.09 & C1 &:= 20 \cdot 10^{-6} & C1 &:= 20 \cdot 10^{-6} & C2 &:= 10 \cdot 10^{-6} \\
 C3 &:= 15 \cdot 10^{-6} & C4 &:= 12 \cdot 10^{-6} & C5 &:= 18 \cdot 10^{-6} & C6 &:= 28 \cdot 10^{-6} & C7 &:= 30 \cdot 10^{-6} \\
 \omega &:= 1000
 \end{aligned}$$

Найдём комплексные сопротивления ветвей и комплексные действующие значения источников.

$$\begin{aligned}
 Z1 &:= R1 - j \cdot (\omega \cdot C1)^{-1} & Z2 &:= R4 + j \cdot \omega \cdot L3 & Z3 &:= R2 - j \cdot (\omega \cdot C2)^{-1} \\
 Z4 &:= j \cdot \omega \cdot L1 & Z5 &:= R3 + j \cdot \omega \cdot L2 & Z6 &:= R5 & Z7 &:= -j \cdot (\omega \cdot C3)^{-1} \\
 Z8 &:= R6 - j \cdot (\omega \cdot C4)^{-1} & Z9 &:= R7 - j \cdot (\omega \cdot C6)^{-1} & Z10 &:= R8 - j \cdot (\omega \cdot C7)^{-1} \\
 Z11 &:= -j \cdot (\omega \cdot C5)^{-1} & E1 &:= 200 \cdot \frac{e^{j \cdot 0.4}}{\sqrt{2}} & E2 &:= 150 \cdot \frac{e^{-j \cdot 0.6}}{\sqrt{2}} & E3 &:= 100 \cdot \frac{e^{j \cdot 1}}{\sqrt{2}} \\
 E4 &:= 250 \cdot \frac{e^{-j \cdot 0.1}}{\sqrt{2}} & E5 &:= 180 \cdot \frac{e^{j \cdot 1.5}}{\sqrt{2}} & J1 &:= \frac{0.5}{\sqrt{2}} & J2 &:= 0.2 \cdot \frac{e^{j \cdot 1.2}}{\sqrt{2}}
 \end{aligned}$$

Используя граф цепи (рис. 3.7), подготовим матрицы источников и сопротивлений ветвей. Составим матрицу контуров **B** и найдём коэффициенты контурных уравнений в матричной форме. Решим систему уравнений в матричной форме и найдём контурные токи.

$$ORIGIN := 1 \quad E := (E1 \ E2 \ 0 \ 0 \ E3 \ E4 \ 0 \ 0 \ 0 \ E5 \ 0)^T$$

$$J := (0 \ 0 \ 0 \ J1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ J2 \ 0 \ 0)^T$$

$$Z := (Z1 \ Z2 \ Z3 \ Z4 \ Z5 \ Z6 \ Z7 \ Z8 \ Z9 \ Z10 \ Z11)^T \quad Zd := \text{diag}(Z)$$

$$B := \begin{pmatrix}
 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1
 \end{pmatrix}$$

$$A := B \cdot Zd \cdot B^T$$

$$C := B \cdot (E - Zd \cdot J)$$

$$Ik := A^{-1} \cdot C$$

$$Ik^T = (0.377 - 0.245j \ 0.922 - 0.499j \ 0.603 + 0.239j \ -0.587 + 0.287j \ -1.134 - 0.051j)$$

Найдём токи в ветвях электрической цепи как алгебраическую сумму соответствующих контурных токов.

$$I_1 := Ik_1 \quad I_2 := Ik_2 \quad I_3 := Ik_2 - Ik_1 \quad I_4 := Ik_1 + Ik_3 + J1 \quad I_5 := Ik_3 \quad I_6 := -Ik_1 - Ik_5$$

$$I_7 := Ik_3 - Ik_4 \quad I_8 := Ik_2 + Ik_5 \quad I_9 := Ik_5 - Ik_4 + J2 \quad I_{10} := Ik_4 \quad I_{11} := Ik_5$$

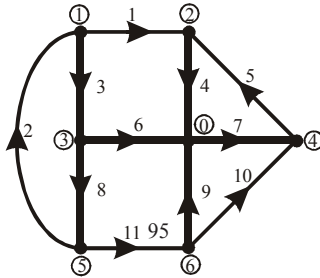
$$I^T = \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline 1 & & 0.377-0.245j & 0.922-0.499j & 0.545-0.254j \\ \hline & & & & \dots \\ \hline \end{array}$$


Рис. 3.7

Для проверки правильности решения задачи найдём комплексные мощности источников и приёмников электрической энергии.

$$U := (\vec{Z} \cdot I) \quad Uv := U - E \quad \sum_{k=1}^{11} \left[\left[\left(\frac{\vec{I}}{|I|} \right)^2 \right]_k \cdot Z_k \right] = 339.791 - 44.206j$$

$$\sum_{k=1}^{11} \left[E_k \cdot (\vec{I})_k \right] + \sum_{k=1}^{11} \left[Uv_k \cdot (\vec{J})_k \right] = 339.791 - 44.206j$$

Баланс мощностей выполняется. Теперь можно записать выражения для мгновенных значений искомым токов в виде гармонических функций. Например, для первого тока получим выражение:

$$i1(t) := \sqrt{2} \cdot |I_1| \cdot \sin(\omega \cdot t + \arg(I_1)) \quad i1(t) \xrightarrow[\text{float}, 3]{\text{simplify}} 0.636 \cdot \sin(1000.0 \cdot t - 0.576)$$

Пример 3.5. Использование направленного графа электрической цепи так же упрощает выбор независимых контуров и формализует составление уравнений, в том числе при наличии в цепи индуктивно связанных катушек. В этом случае в квадратную матрицу комплексных сопротивлений ветвей вводят на соответствующие места комплексные сопротивления взаимных индуктивностей.

На рис. 3.8 приведена электрическая цепь, в которой надо найти все неизвестные токи. На рис. 3.9 приведён направленный граф данной цепи, в котором выделено дерево графа жирными линиями.

Зададимся параметрами источников.

$$e_1(t) = 200\sin(1000t + 0.4), \quad e_2(t) = 150\sin(1000t - 0.6),$$

$$e_3(t) = 180\sin(1000t + 1), \quad J_1(t) = 0.3\sin(1000t),$$

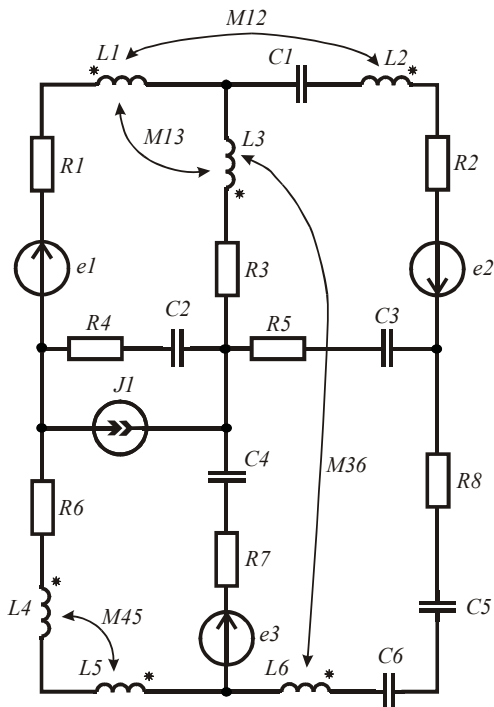


Рис. 3.8

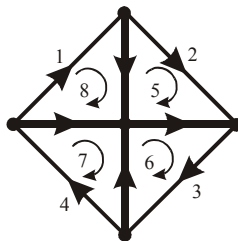


Рис. 3.9

Введём в листинг параметры элементов цепи.

$$R1 := 60 \quad R2 := 55 \quad R3 := 100 \quad R4 := 110 \quad R5 := 80 \quad R6 := 70 \quad R7 := 90$$

$$R8 := 95 \quad L1 := 0.05 \quad L2 := 0.08 \quad L3 := 0.09 \quad L4 := 0.1 \quad L5 := 0.11 \quad L6 := 0.7$$

$$M12 := 0.02 \quad M13 := 0.04 \quad M36 := 0.06 \quad M45 := 0.08 \quad C1 := 20 \cdot 10^{-6}$$

$$C2 := 10 \cdot 10^{-6} \quad C3 := 15 \cdot 10^{-6} \quad C4 := 12 \cdot 10^{-6} \quad C5 := 18 \cdot 10^{-6}$$

$$C6 := 28 \cdot 10^{-6} \quad \omega := 1000$$

Найдём комплексные сопротивления ветвей, комплексные взаимные сопротивления и комплексные действующие значения источников.

$$\begin{aligned}
Z1 &:= R1 + j \cdot \omega \cdot L1 & Z2 &:= R2 + j \cdot \omega \cdot L2 - j \cdot (\omega \cdot C1)^{-1} & Z5 &:= R3 + j \cdot \omega \cdot L3 \\
Z3 &:= R8 + j \cdot \omega \cdot L6 - j \cdot (\omega \cdot C5)^{-1} - j \cdot (\omega \cdot C6)^{-1} & Z6 &:= R5 - j \cdot (\omega \cdot C3)^{-1} \\
Z4 &:= R6 + j \cdot \omega \cdot L4 + j \cdot \omega \cdot L5 - 2 \cdot j \cdot \omega \cdot M45 & Z12 &:= j \cdot \omega \cdot M12 & Z15 &:= j \cdot \omega \cdot M13 \\
Z7 &:= R7 - j \cdot (\omega \cdot C4)^{-1} & Z8 &:= R4 - j \cdot (\omega \cdot C2)^{-1} & Z35 &:= j \cdot \omega \cdot M36 \\
Z21 &:= Z12 & Z51 &:= Z15 & Z53 &:= Z35 \\
E1 &:= 200 \cdot \frac{e^{j \cdot 0.4}}{\sqrt{2}} & E2 &:= 150 \cdot \frac{e^{-j \cdot 0.6}}{\sqrt{2}} & E3 &:= 180 \cdot \frac{e^{j \cdot 1}}{\sqrt{2}} & J1 &:= \frac{0.3}{\sqrt{2}}
\end{aligned}$$

Используя граф цепи (рис. 3.9), подготовим матрицы источников и сопротивлений. Составим матрицу контуров **B** и найдём коэффициенты контурных уравнений в матричной форме. Решим систему уравнений в матричной форме и найдём контурные токи. Знаки взаимных сопротивлений в матрице сопротивлений определяются направлением ветвей графа относительно одноимённых зажимов индуктивно связанных катушек. В данном примере все катушки включены встречно, поэтому взаимные сопротивления взяты со знаком минус.

$$ORIGIN := 1 \quad E := (E1 \ E2 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ E3 \ 0)^T$$

$$J := (0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ -J1)^T \quad Zv := (Z1 \ Z2 \ Z3 \ Z4 \ Z5 \ Z6 \ Z7 \ Z8)^T$$

$$Z := \begin{pmatrix} Z1 & -Z12 & 0 & 0 & -Z15 & 0 & 0 & 0 \\ -Z21 & Z2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Z3 & 0 & -Z35 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Z4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -Z51 & 0 & -Z53 & 0 & Z5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & Z6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & Z7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & Z8 \end{pmatrix}$$

$$B := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad A := B \cdot Z \cdot B^T \quad C := B \cdot (E - Z \cdot J)$$

$$Ik^T = (0.591 + 0.079j \ 0.5 - 0.216j \ 0.034 - 0.117j \ 0.344 - 0.541j)$$

Найдём токи в ветвях схемы как суперпозицию контурных токов.

$$\begin{aligned}
 I_1 &:= Ik_1 & I_2 &:= Ik_2 & I_3 &:= Ik_3 \\
 I_4 &:= Ik_4 & I_5 &:= Ik_1 - Ik_2 \\
 I_6 &:= Ik_3 - Ik_2 & I_7 &:= Ik_3 - Ik_4 \\
 I_8 &:= Ik_4 - Ik_1 - JI
 \end{aligned}
 \quad I = \begin{pmatrix} 0.591 + 0.079j \\ 0.5 - 0.216j \\ 0.034 - 0.117j \\ 0.344 - 0.541j \\ 0.091 + 0.295j \\ -0.466 + 0.1j \\ -0.311 + 0.425j \\ -0.459 - 0.62j \end{pmatrix}$$

Для проверки правильности решения задачи найдём комплексные мощности источников и приёмников электрической энергии и убедимся в балансе мощностей.

$$UJI := -I_8 \cdot Z_8 \sum_{k=1}^8 [E_k(\vec{I})_k] + UJI \cdot \bar{JI} = 186.097 - 46.458j$$

$$Q_{I2} := -2 \cdot Z_{I2} \cdot |I_1| \cdot |I_2| \cdot \cos(\arg(I_1) - \arg(I_2))$$

$$Q_{I5} := -2 \cdot Z_{I5} \cdot |I_1| \cdot |I_5| \cdot \cos(\arg(I_1) - \arg(I_5))$$

$$Q_{I35} := -2 \cdot Z_{I35} \cdot |I_3| \cdot |I_5| \cdot \cos(\arg(I_3) - \arg(I_5))$$

$$\sum_{k=1}^8 \left[\left[\left(\frac{\vec{I}}{|I|} \right)^2 \right]_k \cdot Z_{vk} \right] + Q_{I2} + Q_{I5} + Q_{I35} = 186.097 - 46.458j$$

Баланс мощностей выполняется. Теперь можно записать выражения для мгновенных значений искомым токов в виде синусоидальных функций. Например, выражение для первого тока имеет вид:

$$iI(t) := |I_1| \cdot \sqrt{2} \cdot \sin(\omega \cdot t + \arg(I_1)) \quad iI(t) \begin{matrix} \text{simplify} \\ \text{float}, 3 \end{matrix} \rightarrow 0.844 \cdot \sin(1000.0 \cdot t + 0.133)$$

3.3. Использование метода узловых потенциалов в комплексной форме

Анализ электрических цепей в установившемся режиме с синусоидальными источниками одинаковой частоты ведётся либо методом контурных токов, либо методом узловых потенциалов.

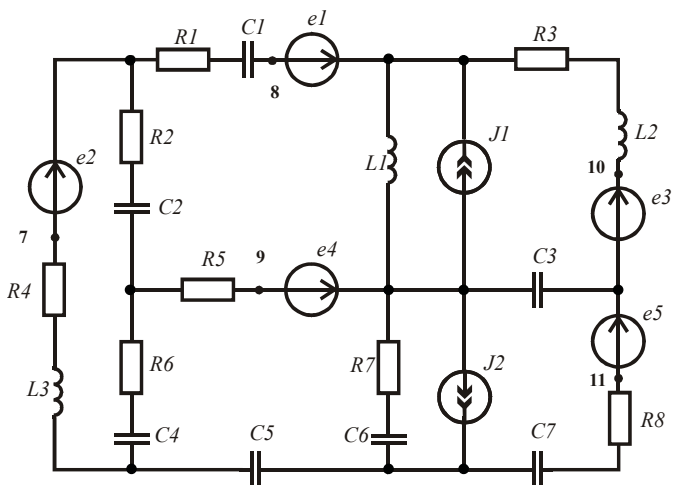


Рис. 3.10

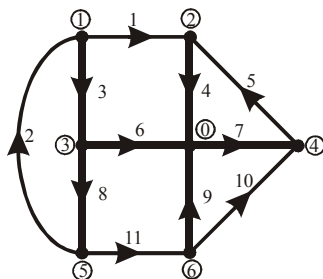


Рис. 3.11

Введём в листинг параметры элементов цепи.

```

R1 := 76  R2 := 50  R3 := 100  R4 := 110  R5 := 80  R6 := 70  R7 := 90  R8 := 95
L1 := 0.05  L2 := 0.08  L3 := 0.09  C1 := 20·10-6  C1 := 20·10-6  C2 := 10·10-6
C3 := 15·10-6  C4 := 12·10-6  C5 := 18·10-6  C6 := 28·10-6  C7 := 30·10-6
ω := 1000
  
```

Определим комплексные сопротивления ветвей и комплексные действующие значения источников ЭДС и тока.

$$\begin{aligned}
Z1 &:= R1 - j \cdot (\omega \cdot C1)^{-1} & Z2 &:= R4 + j \cdot \omega \cdot L3 & Z3 &:= R2 - j \cdot (\omega \cdot C2)^{-1} \\
Z4 &:= j \cdot \omega \cdot L1 & Z5 &:= R3 + j \cdot \omega \cdot L2 & Z6 &:= R5 & Z7 &:= -j \cdot (\omega \cdot C3)^{-1} \\
Z8 &:= R6 - j \cdot (\omega \cdot C4)^{-1} & Z9 &:= R7 - j \cdot (\omega \cdot C6)^{-1} & Z10 &:= R8 - j \cdot (\omega \cdot C7)^{-1} \\
Z11 &:= -j \cdot (\omega \cdot C5)^{-1} & E1 &:= 200 \cdot \frac{e^{j \cdot 0.4}}{\sqrt{2}} & E2 &:= 150 \cdot \frac{e^{-j \cdot 0.6}}{\sqrt{2}} & E3 &:= 100 \cdot \frac{e^{j \cdot 1}}{\sqrt{2}} \\
E4 &:= 250 \cdot \frac{e^{-j \cdot 0.1}}{\sqrt{2}} & E5 &:= 180 \cdot \frac{e^{j \cdot 2.5}}{\sqrt{2}} & J1 &:= \frac{0.5}{\sqrt{2}} & J2 &:= 0.4 \cdot \frac{e^{j \cdot 1.8}}{\sqrt{2}}
\end{aligned}$$

Подготовим матрицы источников и матрицы проводимостей ветвей. Составим матрицу соединений. Найдём коэффициенты узловых уравнений в матричной форме и решим систему уравнений в матричной форме относительно комплексных потенциалов узлов схемы.

$$ORIGIN := 1 \quad E := (E1 \ E2 \ 0 \ 0 \ E3 \ E4 \ 0 \ 0 \ 0 \ E5 \ 0)^T$$

$$J := (0 \ 0 \ 0 \ J1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ J2 \ 0 \ 0)^T$$

$$Z := (Z1 \ Z2 \ Z3 \ Z4 \ Z5 \ Z6 \ Z7 \ Z8 \ Z9 \ Z10 \ Z11)^T \quad Y := Z^{-1}$$

$$Yd := \text{diag}(Y)$$

$$A := \begin{pmatrix}
1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1
\end{pmatrix}$$

$$B := A \cdot Yd \cdot A^T$$

$$C := A \cdot (J - Yd \cdot E)$$

$$\Phi := B^{-1} \cdot C$$

Найдём напряжения на ветвях, считая $\Phi 0 := 0$.

$$Uv := (\Phi_1 - \Phi_2 \ \Phi_5 - \Phi_1 \ \Phi_1 - \Phi_3 \ \Phi_2 \ \Phi_4 - \Phi_2 \ \Phi_3 \ -\Phi_4 \ \Phi_3 - \Phi_5 \ \Phi_6 \ \Phi_6 - \Phi_4 \ \Phi_5 - \Phi_6)^T$$

Найдём токи в ветвях.

$$I := Yd \cdot (Uv + E)$$

$$I^T = \begin{array}{|c|c|c|c|c|}
\hline
& 1 & 2 & 3 & 4 \\
\hline
1 & 0.484-0.109j & 1.085-0.391j & 0.601-0.282j & \dots \\
\hline
\end{array}$$

Для проверки верности решения найдём комплексные мощности источников и приёмников электрической энергии и убедимся в их равенстве.

$$\sum_{k=1}^{11} \left[\left[\left(\vec{I} \right)^2 \right]_k \cdot Z_k \right] = 418.792 - 124.579j$$

$$\sum_{k=1}^{11} (E_k \cdot \bar{I}_k) + \sum_{k=1}^{11} (U_{vk} \cdot \bar{J}_k) = 418.792 - 124.579j$$

Баланс мощностей выполняется. Теперь можно записать найденные токи в виде синусоидальных функций времени (см. пример 3.5).

Проиллюстрируем решение задачи векторной диаграммой токов и векторной топографической диаграммой напряжений. Выделим на схеме (рис. 3.10) дополнительные точки 7–11 и найдём их комплексные потенциалы. Диаграмму напряжений построим в декартовых координатах. Для этого найдём проекции потенциалов на вещественную и мнимую оси.

$$\begin{aligned} \Phi_7 &:= \Phi_1 - E2 & \Phi_8 &:= \Phi_2 - E1 & \Phi_9 &:= E4 & \Phi_{10} &:= \Phi_4 + E3 \\ \Phi_{11} &:= \Phi_4 - E5 & A &:= Re(\Phi) & B &:= Im(\Phi) \end{aligned}$$

Чтобы построить вектора напряжений для всех ветвей, наложим друг на друга три графика, которые задаются точками со следующими координатами:

$$\begin{aligned} C1 &:= (0 \ A_9 \ A_3 \ A_1 \ A_8 \ A_2 \ A_{10} \ A_4 \ 0)^T \\ B1 &:= (0 \ B_9 \ B_3 \ B_1 \ B_8 \ B_2 \ B_{10} \ B_4 \ 0)^T \\ B2 &:= (B_4 \ B_{11} \ B_6 \ B_5 \ B_7 \ B_1 \ B_8 \ B_2 \ 0)^T \\ C2 &:= (A_4 \ A_{11} \ A_6 \ A_5 \ A_7 \ A_1 \ A_8 \ A_2 \ 0)^T \\ C3 &:= (0 \ A_6 \ A_5 \ A_3)^T \quad B3 := (0 \ B_6 \ B_5 \ B_3)^T \end{aligned}$$

Вектора токов построим в полярных координатах. Точки соответствующего графика задаются следующими координатами:

$$\begin{aligned} II &:= \vec{I} \quad \psi := arg(I) \\ \psi I &:= (0 \ \psi_1 \ 0 \ \psi_2 \ 0 \ \psi_3 \ 0 \ \psi_4 \ 0 \ \psi_5 \ 0 \ \psi_6 \ 0 \ \psi_7 \ 0 \ \psi_8 \ 0 \ \psi_9 \ 0 \ \psi_{10} \ \psi_2 \ \psi_{11} \ 0)^T \\ II &:= (0 \ II_1 \ 0 \ II_2 \ 0 \ II_3 \ 0 \ II_4 \ 0 \ II_5 \ 0 \ II_6 \ 0 \ II_7 \ 0 \ II_8 \ 0 \ II_9 \ 0 \ II_{10} \ 0 \ II_{11} \ 0)^T \end{aligned}$$

Полученные диаграммы приведены на рис. 3.12 и 3.13. Обозначения и стрелки нанесены после импортирования рисунков.

Направления векторов ЭДС определяются их начальной фазой. Направления векторов падений напряжений определяются направлением вектора тока и характером сопротивления ветви. При активно-индуктивном сопротивлении напряжение опережает соответствующий ток, а при активно-емкостном сопротивлении напряжение отстает от тока.

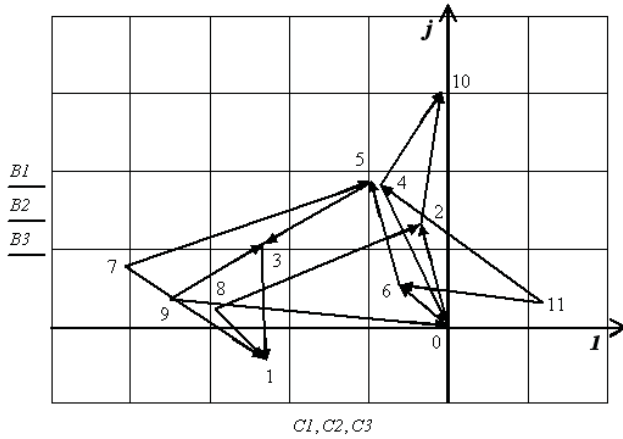


Рис. 3.12

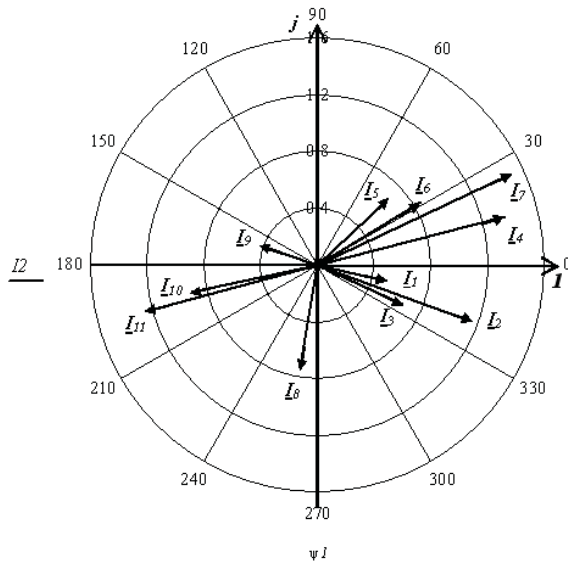


Рис. 3.13

Определим, какие источники являются генераторами активной мощности, а какие потребителями.

$$P_e := \operatorname{Re}[\overrightarrow{I \cdot E}] \quad P_i := \operatorname{Re}[\overrightarrow{U_v \cdot J}]$$

$$P_e^T =$$

	1	2	3	4	5	6	7	8
1	57.048	118.4	0	0	45.582	119.59	0	...

$$P_i^T =$$

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	0	0	0	-6.08	0	0	0	0	...

Знак активной мощности источников показывает, что все источники ЭДС являются генераторами, а источник тока JI в четвёртой ветви является потребителем электрической энергии.

3.4. Анализ частотных характеристик электрических цепей

Частотные характеристики – это зависимости параметров электрической цепи от частоты протекающих в ней синусоидальных токов. Для анализа частотных характеристик необходимо исследуемые параметры представить в виде функции частоты. Частотные характеристики иллюстрируются графиками в заданной области частот.

С помощью частотных характеристик удобно исследовать различные эффекты, например эффект резонанса. В качестве примера построим частотные зависимости тока и напряжений на элементах для ветви, содержащей резистор, катушку и конденсатор. Для этого подключим ветвь к источнику синусоидальной ЭДС и выберем диапазон изменения его частоты в области резонанса. Данное исследование оформляется следующим образом.

Введём в листинг исходные данные и запишем выражения для искомых зависимостей.

$$E := 100 \quad L := 0.011 \quad C := 10^{-7} \quad R := 50$$

$$I(\omega) := \frac{E}{\sqrt{R^2 + \left(\omega \cdot L - \frac{1}{\omega \cdot C}\right)^2}}$$

$$UL(\omega) := I(\omega) \cdot \omega \cdot L$$

$$UC(\omega) := I(\omega) \cdot (\omega \cdot C)^{-1}$$

Полученные зависимости приведены на рис. 3.14, где хорошо видны все известные особенности поведения данных зависимостей. В цепи имеет место резонанс напряжений.

Соединим все три элемента параллельно и подключим их к источнику синусоидального тока. Сопротивление резистора увеличим в сорок раз, чтобы сохранить добротность цепи примерно такой же, какой она была при последовательном соединении элементов.

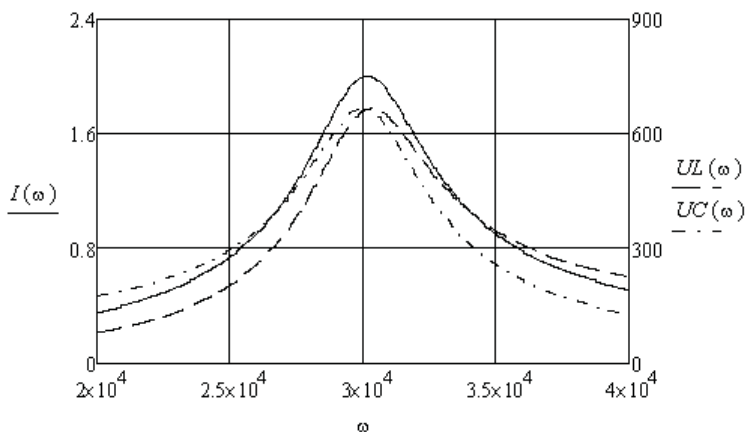


Рис. 3.14

Введём в листинг исходные данные и запишем выражения для искомых зависимостей.

$$J := 1 \quad Y(\omega) := \sqrt{[(40 \cdot R)^{-1}]^2 + [(\omega \cdot L)^{-1} - \omega \cdot C]^2}$$

$$U(\omega) := J \cdot (Y(\omega))^{-1} \quad IL(\omega) := U(\omega) \cdot (\omega \cdot L)^{-1} \quad IC(\omega) := U(\omega) \cdot \omega \cdot C$$

Полученные зависимости приведены на рис. 3.15. И в этом случае хорошо видны все известные особенности поведения зависимостей напряжения на параллельном участке и токов в катушке и конденсаторе от частоты источника. В цепи имеет место резонанс токов.

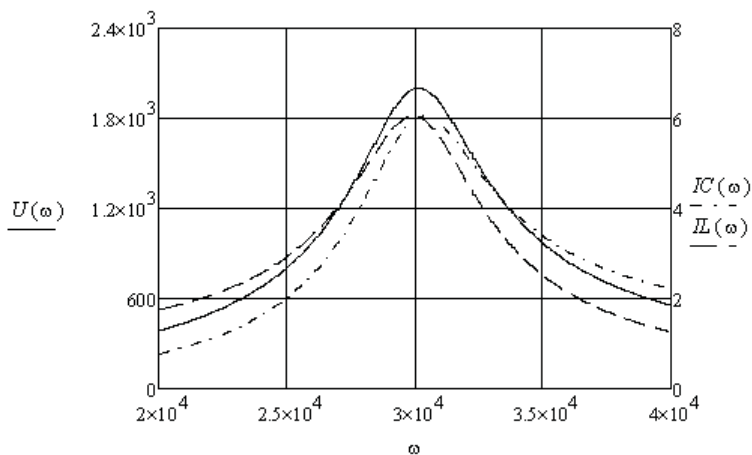


Рис. 3.15

Пример 3.7. Для заданной цепи (рис. 3.16) построить зависимости модуля и аргумента комплексных сопротивлений ветвей, эквивалентного комплексного сопротивления и комплексного действующего значения тока через источник от частоты источника, ЭДС которого $e(t) = 120\sqrt{2} \sin(\omega t)$.

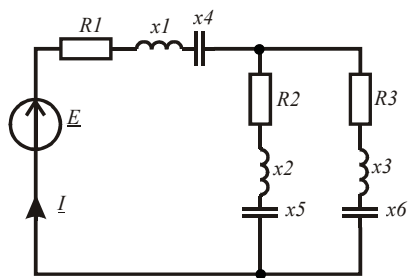


Рис. 3.16

Введём в листинг исходные данные.

```

omega := 10..20000    L1 := 0.08    L2 := 0.004    L3 := 0.09
C1 := 20·10-6    C2 := 3·10-6    C3 := 35·10-6
R1 := 65    R2 := 10    R3 := 20    E := 120

```

Получим зависимости заданных параметров от частоты.

$$x1(\omega) := \omega \cdot L1 \quad x2(\omega) := \omega \cdot L2 \quad x3(\omega) := \omega \cdot L3$$

$$x4(\omega) := \frac{1}{(\omega \cdot C1)} \quad x5(\omega) := \frac{1}{(\omega \cdot C2)} \quad x6(\omega) := \frac{1}{(\omega \cdot C3)}$$

$$Z1(\omega) := R1 + j(x1(\omega) - x4(\omega)) \quad Z2(\omega) := R2 + j(x2(\omega) - x5(\omega))$$

$$Z3(\omega) := R3 + j(x3(\omega) - x6(\omega)) \quad Z(\omega) := Z1(\omega) + \frac{Z2(\omega) \cdot Z3(\omega)}{Z2(\omega) + Z3(\omega)}$$

$$I(\omega) := \frac{E}{Z(\omega)} \quad a(\omega) := |I(\omega)| \quad \Phi(\omega) := \arg(I(\omega)) \quad a1(\omega) := |Z1(\omega)|$$

$$a2(\omega) := |Z2(\omega)| \quad a3(\omega) := |Z3(\omega)| \quad a4(\omega) := |Z(\omega)| \quad \Phi1(\omega) := \arg(Z1(\omega))$$

$$\Phi2(\omega) := \arg(Z2(\omega)) \quad \Phi3(\omega) := \arg(Z3(\omega)) \quad \Phi4(\omega) := \arg(Z(\omega))$$

Построим полученные зависимости (рис. 3.17, 3.18, 3.19).

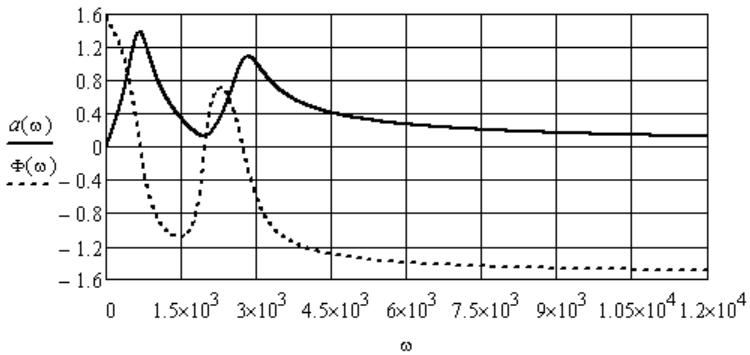


Рис. 3.17

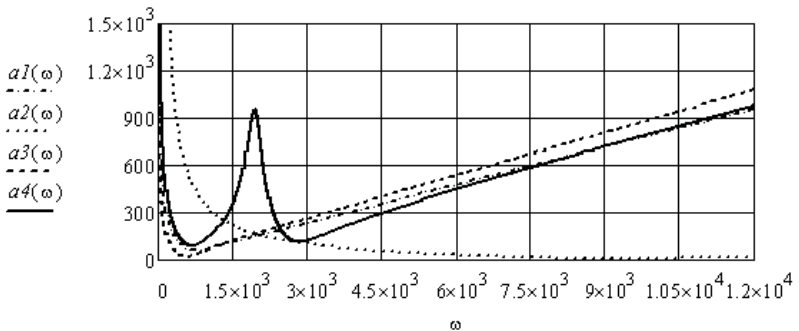


Рис. 3.18

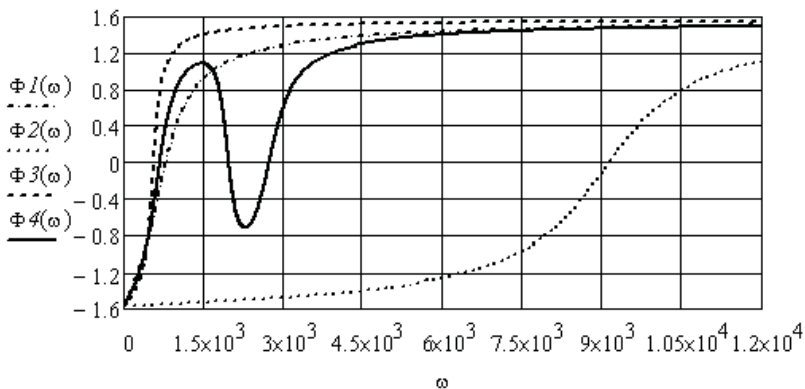


Рис. 3.19

Наличие частот, при которых фазовый сдвиг между напряжением источника и его током равен нулю, говорит о резонансе на этих частотах. Определим точные значения этих частот, выделив соответствующие области на графике (рис. 3.17).

$$\begin{aligned} \text{root}(\Phi(\omega), \omega, 500, 1000) &= 680.33863 & \text{root}(\Phi(\omega), \omega, 1000, 2500) &= 1.977 \times 10^3 \\ \text{root}(\Phi(\omega), \omega, 2500, 3000) &= 2.731 \times 10^3 \end{aligned}$$

На первой и третьей резонансных частотах модули сопротивления цепи максимальны. Следовательно, это резонансы токов. На второй резонансной частоте модуль сопротивления цепи минимален. Следовательно, это резонанс напряжений.

Пример 3.8. Для заданной цепи (рис. 3.20) необходимо построить зависимости модуля и аргумента комплексного напряжения на втором конденсаторе от частоты источника при различных коэффициентах связи между катушками. В данной цепи две индуктивно связанные катушки являются линейным трансформатором.

Для решения задачи используем метод контурных токов. Направление известного контурного тока определяется источником тока. Направления двух неизвестных контурных токов выберем по часовой стрелке. Система уравнений имеет вид:

$$\begin{cases} I_{11}(\omega)Z_{11}(\omega) + I_{22}(\omega)Z_{12}(\omega) + I_1(\omega)Z_{13}(\omega) = 0 \\ I_{11}(\omega)Z_{21}(\omega) + I_{22}(\omega)Z_{22}(\omega) = 0 \end{cases},$$

$$\text{где } \underline{Z}_{11}(\omega) = R_1 + j(\omega L_1 - \frac{1}{\omega C_1}), \quad \underline{Z}_{22}(\omega) = R_2 + j(\omega L_2 - \frac{1}{\omega C_2}),$$

$$\underline{Z}_{12}(\omega) = -j\omega M_{12}, \quad \underline{Z}_{13}(\omega) = j\frac{1}{\omega C_1}.$$

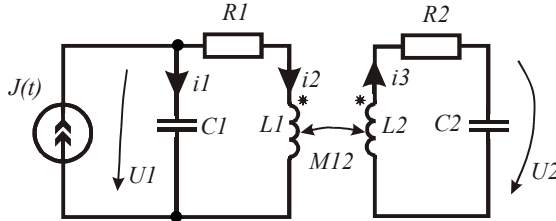


Рис. 3.20

Решая систему уравнений, найдём выражения для контурных токов, а затем выражения для заданных напряжений.

$$I_{11}(\omega) = \frac{J(\omega)Z_{22}(\omega)Z_{13}(\omega)}{Z_{12}^2(\omega) - Z_{11}(\omega)Z_{22}(\omega)}, \quad I_{22}(\omega) = \frac{-J(\omega)Z_{12}(\omega)Z_{13}(\omega)}{Z_{12}^2(\omega) - Z_{11}(\omega)Z_{22}(\omega)},$$

$$U_2(\omega) = \frac{J(\omega)Z_{12}(\omega)Z_{13}(\omega)j\omega C_2}{Z_{12}^2(\omega) - Z_{11}(\omega)Z_{22}(\omega)}, \quad U_1(\omega) = \left[-\frac{J(\omega)Z_{12}(\omega)Z_{13}(\omega)j\omega C_2}{Z_{12}^2(\omega) - Z_{11}(\omega)Z_{22}(\omega)} + J(\omega) \right] \left(-j\frac{1}{\omega C_1} \right).$$

Перейдём к численному анализу. Введём в листинг исходные данные.

$$\omega := 10, 11 \dots 3000 \quad J(t) := 0.01 \cdot \sqrt{2} \cdot \sin(\omega \cdot t) \quad Kl := 0.1 \quad Kn := 0.08$$

$$R1 := 10 \quad R2 := 5 \quad L1 := 0.08 \quad L2 := 0.082 \quad C1 := 4 \cdot 10^{-6} \quad C2 := 3.7 \cdot 10^{-6}$$

Запишем выражения для реактивных сопротивлений элементов и комплексных коэффициентов контурных уравнений в зависимости от частоты. Комплексное действующее значение тока источника тока не зависит от частоты.

$$x1(\omega) := \omega \cdot L1 \quad x2(\omega) := \omega \cdot L2 \quad x3(\omega) := \frac{1}{(\omega \cdot C1)} \quad x4(\omega) := \frac{1}{(\omega \cdot C2)}$$

$$Z11(\omega) := R1 + j(x1(\omega) - x3(\omega)) \quad Z22(\omega) := R2 + j(x2(\omega) - x4(\omega)) \quad J := 0.01$$

$$Z13(\omega) := j \cdot x3(\omega) \quad Z12(\omega) := -j \cdot \omega \cdot Kl \cdot \sqrt{L1 \cdot L2} \quad Z12n(\omega) := -j \cdot \omega \cdot Kn \cdot \sqrt{L1 \cdot L2}$$

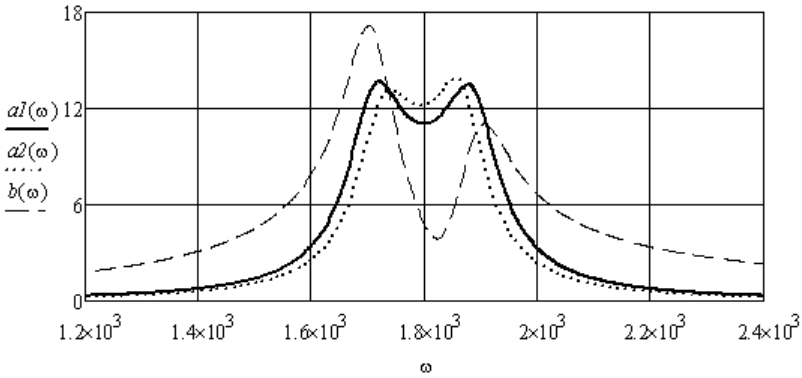


Рис. 3.21

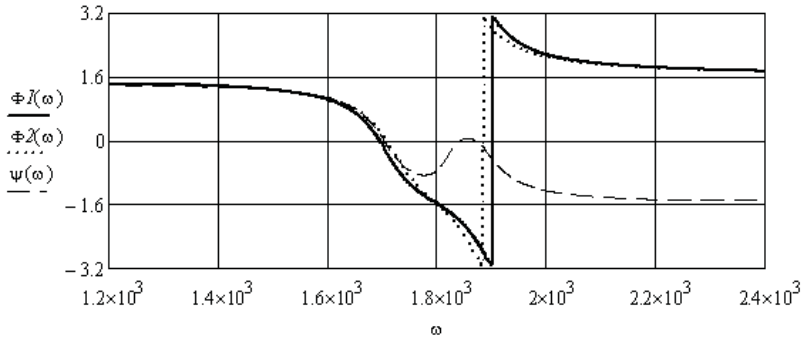


Рис. 3.22

Выразим напряжение на втором конденсаторе при двух значениях коэффициента связи, а для сравнения выразим напряжение на первом конденсаторе при первом значении коэффициента связи. По выражениям построим соответствующие зависимости. Полученные результаты приведены на рис. 3.21 и 3.22.

$$U2(\omega) := \frac{J \cdot Z12(\omega) \cdot Z13(\omega) \cdot j \cdot x4(\omega)}{(Z12(\omega))^2 - Z11(\omega) \cdot Z22(\omega)} \quad U2n(\omega) := \frac{J \cdot Z12n(\omega) \cdot Z13(\omega) \cdot j \cdot x4(\omega)}{(Z12n(\omega))^2 - Z11(\omega) \cdot Z22(\omega)}$$

$$U1(\omega) := \left[\frac{-J \cdot Z22(\omega) \cdot Z13(\omega)}{(Z12(\omega))^2 - Z11(\omega) \cdot Z22(\omega)} + J \right] \cdot (-j \cdot x3(\omega))$$

$$\begin{aligned}
 a1(\omega) &:= |U2(\omega)| & \Phi1(\omega) &:= \arg(U2(\omega)) \\
 a2(\omega) &:= |U2n(\omega)| & \Phi2(\omega) &:= \arg(U2n(\omega)) \\
 b(\omega) &:= |U1(\omega)| & \Psi(\omega) &:= \arg(U1(\omega))
 \end{aligned}$$

3.5. Анализ электрических цепей с зависимыми источниками

Зависимые источники являются не автономными источниками электрической энергии. Величина ЭДС зависимого источника или величина тока зависимого источника определяются или током в заданной ветви или напряжением на заданном участке. При анализе такой цепи необходимо управляющий параметр зависимого источника выразить через неизвестный контурный ток, если анализ ведётся методом контурных токов, или через разность потенциалов, если анализ ведётся методом узловых потенциалов. В этом случае количество неизвестных остаётся прежним и размерность системы уравнений не изменяется.

Пример 3.9. Необходимо найти неизвестные токи в электрической цепи (рис. 3.23), содержащей зависимый источник тока J_2 , управляемый током (ИТУТ).

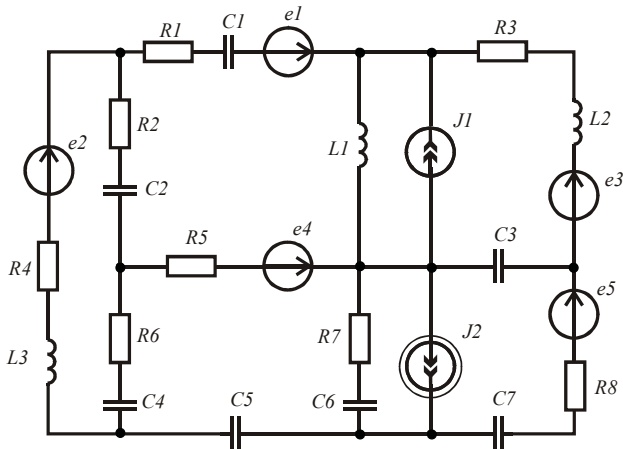


Рис. 3.23

Управляющим параметром зависимого источника является ток в ветви с источником ЭДС eI . Комплексные действующие значения тока источника и управляющего тока связаны комплексным коэффициентом \underline{P} : $\underline{J}_2 = \underline{P} \cdot \underline{I}_{eI}$.

На первом этапе задача решается в символьном виде с использованием направленного графа цепи. После получения необходимых матричных уравнений задача решается численно.

Рассчитаем заданную цепь методом контурных токов с использованием графа цепи (рис. 3.24).

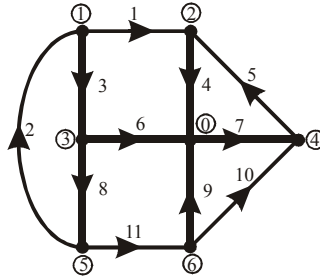


Рис. 3.24

Получим выражения для коэффициентов контурных уравнений в символьном виде.

$$ORIGIN := 1 \quad E := (E1 \ E2 \ 0 \ 0 \ E5 \ E6 \ 0 \ 0 \ 0 \ E10 \ 0)^T$$

$$J := (0 \ 0 \ 0 \ J4 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ J9 \ 0 \ 0)^T$$

$$Z := (Z1 \ Z2 \ Z3 \ Z4 \ Z5 \ Z6 \ Z7 \ Z8 \ Z9 \ Z10 \ Z11)^T \quad Zd := \text{diag}(Z)$$

$$B := \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A := B \cdot Zd \cdot B^T$$

$$C := B \cdot (E - Zd \cdot J)$$

$$A \rightarrow \begin{pmatrix} Z1 + Z3 + Z4 + Z6 & -Z3 & Z4 & 0 & Z6 \\ -Z3 & Z2 + Z3 + Z8 & 0 & 0 & Z8 \\ Z4 & 0 & Z4 + Z5 + Z7 & -Z7 & 0 \\ 0 & 0 & -Z7 & Z7 + Z9 + Z10 & -Z9 \\ Z6 & Z8 & 0 & -Z9 & Z6 + Z8 + Z9 + Z11 \end{pmatrix}$$

$$C \rightarrow \begin{pmatrix} E1 - E6 - J4 \cdot Z4 \\ E2 \\ E5 - J4 \cdot Z4 \\ E10 + J9 \cdot Z9 \\ -E6 - J9 \cdot Z9 \end{pmatrix}$$

Управляющий ток зависимого источника тока равен первому контурному току, поэтому необходимо перенести соответствующие слагаемые в четвёртом и пятом уравнениях из правой части в левую и сгруппировать коэффициенты. Получим новые матрицы $A1$ и $C1$. На этом этапе вносим в листинг исходные данные и переносим решение на комплексную плоскость.

$$\begin{aligned} R1 &:= 76 & R2 &:= 50 & R3 &:= 100 & R4 &:= 110 & R5 &:= 80 & R6 &:= 70 & R7 &:= 90 & R8 &:= 95 \\ L1 &:= 0.05 & L2 &:= 0.08 & L3 &:= 0.09 & C1 &:= 20 \cdot 10^{-6} & C1 &:= 20 \cdot 10^{-6} & C2 &:= 10 \cdot 10^{-6} \\ C3 &:= 15 \cdot 10^{-6} & C4 &:= 12 \cdot 10^{-6} & C5 &:= 18 \cdot 10^{-6} & C6 &:= 28 \cdot 10^{-6} & C7 &:= 30 \cdot 10^{-6} \\ \omega &:= 1000 & E1(t) &:= 200 \sin(\omega \cdot t + 0.4) & E2(t) &:= 150 \sin(\omega \cdot t - 0.6) \end{aligned}$$

$$E3(t) := 100 \sin(\omega \cdot t + 1) \quad E4(t) := 250 \sin(\omega \cdot t - 0.1) \quad E5(t) := 180 \sin(\omega \cdot t + 1.5)$$

$$J1(t) := 0.5 \sin(\omega \cdot t) \quad J2(t) := 0.2 \sin(\omega \cdot t + 1.2)$$

$$Z1 := R1 - j \cdot (\omega \cdot C1)^{-1} \quad Z2 := R4 + j \cdot \omega \cdot L3 \quad Z3 := R2 - j \cdot (\omega \cdot C2)^{-1}$$

$$Z4 := j \cdot \omega \cdot L1 \quad Z5 := R3 + j \cdot \omega \cdot L2 \quad Z6 := R5 \quad Z7 := -j \cdot (\omega \cdot C3)^{-1}$$

$$Z8 := R6 - j \cdot (\omega \cdot C4)^{-1} \quad Z9 := R7 - j \cdot (\omega \cdot C6)^{-1} \quad Z10 := R8 - j \cdot (\omega \cdot C7)^{-1}$$

$$Z11 := -j \cdot (\omega \cdot C5)^{-1} \quad E1 := 200 \cdot \frac{e^{j \cdot 0.4}}{\sqrt{2}} \quad E2 := 150 \cdot \frac{e^{-j \cdot 0.6}}{\sqrt{2}} \quad E5 := 100 \cdot \frac{e^{j \cdot 1}}{\sqrt{2}}$$

$$E6 := 250 \cdot \frac{e^{-j \cdot 0.1}}{\sqrt{2}} \quad E10 := 180 \cdot \frac{e^{j \cdot 1.5}}{\sqrt{2}} \quad J4 := \frac{0.5}{\sqrt{2}} \quad P := 0.8 \cdot e^{-j \cdot 0.5}$$

$$C1 := \begin{pmatrix} E1 - E6 - J4 \cdot Z4 \\ E2 \\ E5 - J4 \cdot Z4 \\ E10 \\ -E6 \end{pmatrix}$$

$$E := (E1 \ E2 \ 0 \ 0 \ E5 \ E6 \ 0 \ 0 \ 0 \ E10 \ 0)^T$$

$$Z := (Z1 \ Z2 \ Z3 \ Z4 \ Z5 \ Z6 \ Z7 \ Z8 \ Z9 \ Z10 \ Z11)^T$$

$$AI := \begin{pmatrix} Z1 + Z3 + Z4 + Z6 & -Z3 & Z4 & 0 & Z6 \\ -Z3 & Z2 + Z3 + Z8 & 0 & 0 & Z8 \\ Z4 & 0 & Z4 + Z5 + Z7 & -Z7 & 0 \\ -P \cdot Z9 & 0 & -Z7 & Z7 + Z9 + Z10 & -Z9 \\ Z6 + P \cdot Z9 & Z8 & 0 & -Z9 & Z6 + Z8 + Z9 + Z11 \end{pmatrix}$$

Решим матричное уравнение и найдём неизвестные контурные токи и ток зависимого источника тока.

$$Ik := AI^{-1} \cdot CI \quad J := (0 \ 0 \ 0 \ J4 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ P \cdot Ik_1 \ 0 \ 0)^T$$

Найдём токи в ветвях схемы, как суперпозицию контурных токов.

$$I_1 := Ik_1 \quad I_2 := Ik_2 \quad I_3 := Ik_2 - Ik_1 \quad I_4 := Ik_1 + Ik_3 + J4 \quad I_5 := Ik_3 \quad I_6 := -Ik_1 - Ik_5$$

$$I_7 := Ik_3 - Ik_4 \quad I_8 := Ik_2 + Ik_5 \quad I_9 := Ik_5 - Ik_4 + J9 \quad I_{10} := Ik_4 \quad I_{11} := Ik_5$$

$$I^T = \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline 1 & 0.37-0.289j & 0.888-0.575j & 0.518-0.286j & \dots \\ \hline \end{array}$$

Для проверки правильности решения задачи найдём комплексные мощности источников и приёмников электрической энергии и убедимся в балансе активных и реактивных мощностей источников и приёмников электрической энергии.

$$U := \overrightarrow{(Z \cdot I)} \quad Uv := U - E \quad \sum_{k=1}^{11} \left[\left[\left(\overrightarrow{|I|} \right)^2 \right]_k \cdot Z_k \right] = 333.647 - 41.91j$$

$$\sum_{k=1}^{11} \left[E_k \cdot \overrightarrow{(\vec{I})}_k \right] + \sum_{k=1}^{11} \left[Uv_k \cdot \overrightarrow{(\vec{J})}_k \right] = 333.647 - 41.91j$$

Баланс мощностей выполняется.

Пример 3.10. Необходимо найти неизвестные токи в электрической цепи (рис. 3.25), содержащей зависимый источник напряжения e_4 , управляемый напряжением (ИНУН).

Для составления уравнений используем граф цепи из предыдущего примера (рис. 3.24).

Управляющим параметром зависимого источника является напряжение на конденсаторе C_3 . Комплексные действующие значения напряжения источника и управляющего напряжения связаны комплексным коэффициентом \underline{P} : $\underline{E}_4 = \underline{P} \cdot \underline{U}_{C_3}$.

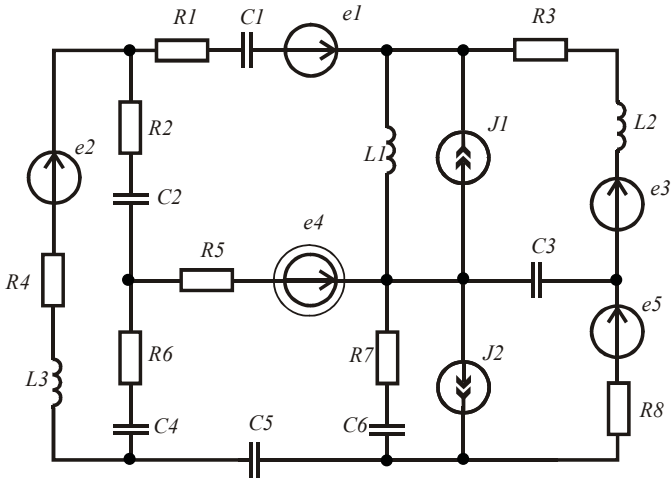


Рис. 3.25

На первом этапе задача решается в символьном виде с использованием направленного графа цепи. После получения необходимых матричных уравнений задача решается численно.

Рассчитаем заданную цепь методом узловых потенциалов.

Получим выражения для коэффициентов уравнений относительно узловых потенциалов в символьном виде.

$$\begin{aligned}
 ORIGIN &:= 1 & E &:= (E1 \ E2 \ 0 \ 0 \ E3 \ E4 \ 0 \ 0 \ 0 \ E5 \ 0)^T \\
 J &:= (0 \ 0 \ 0 \ J1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ J2 \ 0 \ 0)^T \\
 Y &:= (Y1 \ Y2 \ Y3 \ Y4 \ Y5 \ Y6 \ Y7 \ Y8 \ Y9 \ Y10 \ Y11)^T \\
 A &:= \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \\
 Yd &:= \text{diag}(Y) \\
 B &:= A \cdot Yd \cdot A^T \\
 C &:= A \cdot (J - Yd \cdot E)
 \end{aligned}$$

$$B \rightarrow \begin{pmatrix} Y1+Y2+Y3 & -Y1 & -Y3 & 0 & -Y2 & 0 \\ -Y1 & Y1+Y4+Y5 & 0 & -Y5 & 0 & 0 \\ -Y3 & 0 & Y3+Y6+Y8 & 0 & -Y8 & 0 \\ 0 & -Y5 & 0 & Y5+Y7+Y10 & 0 & -Y10 \\ -Y2 & 0 & -Y8 & 0 & Y2+Y8+Y11 & -Y11 \\ 0 & 0 & 0 & -Y10 & -Y11 & Y9+Y10+Y11 \end{pmatrix}$$

$$C \rightarrow \begin{pmatrix} E2 \cdot Y2 - E1 \cdot Y1 \\ J1 + E1 \cdot Y1 + E3 \cdot Y5 \\ -E4 \cdot Y6 \\ E5 \cdot Y10 - E3 \cdot Y5 \\ -E2 \cdot Y2 \\ J2 - E5 \cdot Y10 \end{pmatrix}$$

Управляющее напряжение зависимого источника напряжения равно потенциалу четвёртого узла, поэтому необходимо перенести соответствующее слагаемое в третьем уравнении из правой части в левую часть и сгруппировать коэффициенты. Получим новые матрицы $B1$ и $C1$. На этом этапе вносим в листинг исходные данные и переносим решение на комплексную плоскость, задавшись комплексными действующими значениями источников.

$$R1 := 76 \quad R2 := 50 \quad R3 := 100 \quad R4 := 110 \quad R5 := 80 \quad R6 := 70 \quad R7 := 90 \quad R8 := 95$$

$$L1 := 0.05 \quad L2 := 0.08 \quad L3 := 0.09 \quad C1 := 20 \cdot 10^{-6} \quad C1 := 20 \cdot 10^{-6} \quad C2 := 10 \cdot 10^{-6}$$

$$C3 := 15 \cdot 10^{-6} \quad C4 := 12 \cdot 10^{-6} \quad C5 := 18 \cdot 10^{-6} \quad C6 := 28 \cdot 10^{-6} \quad C7 := 30 \cdot 10^{-6}$$

$$\omega := 1000$$

$$Y1 := [R1 - j \cdot (\omega \cdot C1)^{-1}]^{-1} \quad Y2 := (R4 + j \cdot \omega \cdot L3)^{-1} \quad Y3 := [R2 - j \cdot (\omega \cdot C2)^{-1}]^{-1}$$

$$Y4 := (j \cdot \omega \cdot L1)^{-1} \quad Y5 := (R3 + j \cdot \omega \cdot L2)^{-1} \quad Y6 := (R5)^{-1} \quad Y7 := [-j \cdot (\omega \cdot C3)^{-1}]^{-1}$$

$$Y8 := [R6 - j \cdot (\omega \cdot C4)^{-1}]^{-1} \quad Y9 := [R7 - j \cdot (\omega \cdot C6)^{-1}]^{-1} \quad Y10 := [R8 - j \cdot (\omega \cdot C7)^{-1}]^{-1}$$

$$Y11 := [-j \cdot (\omega \cdot C5)^{-1}]^{-1} \quad E1 := 200 \cdot \frac{e^{j \cdot 0.4}}{\sqrt{2}} \quad E2 := 150 \cdot \frac{e^{-j \cdot 0.6}}{\sqrt{2}} \quad P := 1.8 \cdot e^{j \cdot 0.8}$$

$$E3 := 100 \cdot \frac{e^{j \cdot 1}}{\sqrt{2}} \quad E5 := 180 \cdot \frac{e^{j \cdot 2.5}}{\sqrt{2}} \quad J1 := \frac{0.5}{\sqrt{2}} \quad J2 := 0.4 \cdot \frac{e^{j \cdot 1.8}}{\sqrt{2}}$$

$$B1 := \begin{pmatrix} Y1 + Y2 + Y3 & -Y1 & -Y3 & 0 & -Y2 & 0 \\ -Y1 & Y1 + Y4 + Y5 & 0 & -Y5 & 0 & 0 \\ -Y3 & 0 & Y3 + Y6 + Y8 & P \cdot Y6 & -Y8 & 0 \\ 0 & -Y5 & 0 & Y5 + Y7 + Y10 & 0 & -Y10 \\ -Y2 & 0 & -Y8 & 0 & Y2 + Y8 + Y11 & -Y11 \\ 0 & 0 & 0 & -Y10 & -Y11 & Y9 + Y10 + Y11 \end{pmatrix}$$

$$C1 := \begin{pmatrix} E2 \cdot Y2 - E1 \cdot Y1 \\ J1 + E1 \cdot Y1 + E3 \cdot Y5 \\ 0 \\ E5 \cdot Y10 - E3 \cdot Y5 \\ -E2 \cdot Y2 \\ J2 - E5 \cdot Y10 \end{pmatrix} \quad \begin{aligned} J &:= (0 \ 0 \ 0 \ J1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ J2 \ 0 \ 0)^T \\ Y &:= (Y1 \ Y2 \ Y3 \ Y4 \ Y5 \ Y6 \ Y7 \ Y8 \ Y9 \ Y10 \ Y11)^T \\ Yd &:= \text{diag}(Y) \\ \Phi &:= B1^{-1} \cdot C1 \\ E &:= (E1 \ E2 \ 0 \ 0 \ E3 \ P \cdot \Phi_4 \ 0 \ 0 \ 0 \ E5 \ 0)^T \end{aligned}$$

Найдём напряжения на ветвях и токи в ветвях, считая $\Phi 0 := 0$.

$$Uv := (\Phi_1 - \Phi_2 \ \Phi_5 - \Phi_1 \ \Phi_1 - \Phi_3 \ \Phi_2 \ \Phi_4 - \Phi_2 \ \Phi_3 \ -\Phi_4 \ \Phi_3 - \Phi_5 \ \Phi_6 \ \Phi_6 - \Phi_4 \ \Phi_5 - \Phi_6)^T$$

$$I := Yd \cdot (Uv + E)$$

$$Z1c := 60 - j \cdot 10 \quad Z2a := 45 - j \cdot 20 \quad Z2b := 40 - j \cdot 15 \quad Zc$$

$$Zab := 80 + j \cdot 25 \quad Zbc := 75 + j \cdot 30 \quad Zca := 85 + j \cdot 15$$

Для проверки верности решения найдём комплексные мощности источников и приёмников электрической энергии.

$$Z := Y^{-1} \quad \sum_{k=1}^{11} \left[\left[\left(\vec{I} \right) \right]_k^2 \cdot Z_k \right] = 514.91 + 31.389j$$

$$\sum_{k=1}^{11} (E_k \cdot \bar{I}_k) + \sum_{k=1}^{11} (Uv_k \cdot \bar{J}_k) = 514.91 + 31.389j$$

Баланс мощностей выполняется.

3.6. Анализ трёхфазных электрических цепей

Трёхфазные электрические цепи являются сложными электрическими цепями, содержащими трёхфазные источники синусоидальной ЭДС. Анализ таких цепей ведётся либо методом контурных токов, либо методом узловых потенциалов. Рассмотрим примеры анализа трёхфазных цепей.

Пример 3.11. Необходимо найти неизвестные токи в трёхфазной цепи, содержащей трёхфазный генератор, линию передачи и три потребителя, соединённые по схеме звезда с нулевым проводом, звезда без нулевого провода и треугольник (рис. 3.26).

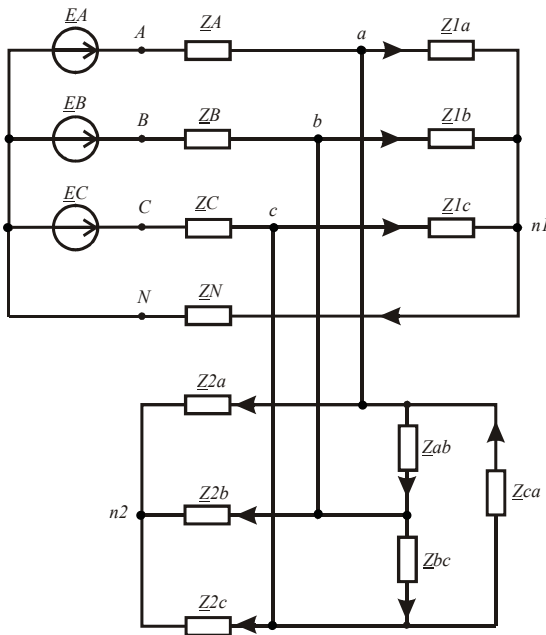


Рис. 3.26

Выполним анализ цепи методом узловых потенциалов. Для составления уравнений в матричной форме используем направленный граф цепи (рис. 3.27). Направления ветвей графа соответствуют условно положительным направлениям токов в трёхфазных цепях.

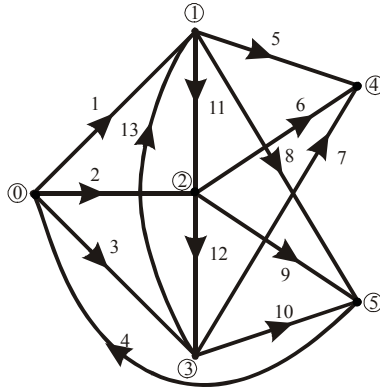


Рис. 3.27

Введём в листинг решения исходные данные в комплексной форме.

$$\begin{aligned}
 EA &:= 220 & EB &:= 220 \cdot e^{-j \cdot 2 \cdot \frac{\pi}{3}} & EC &:= 220 \cdot e^{j \cdot 2 \cdot \frac{\pi}{3}} & Z1b &:= 45 + j \cdot 35 \\
 ZA &:= 4 + j \cdot 4 & ZB &:= 4 + j \cdot 4 & ZC &:= 4 + j \cdot 4 & Z1a &:= 50 + j \cdot 30 \\
 Z1c &:= 60 - j \cdot 10 & Z2a &:= 45 - j \cdot 20 & Z2b &:= 40 - j \cdot 15 & Z2c &:= 40 - j \cdot 25 \\
 Zab &:= 80 + j \cdot 25 & Zbc &:= 75 + j \cdot 30 & Zca &:= 85 + j \cdot 15 & ZN &:= 6 + j \cdot 6
 \end{aligned}$$

Подготовим массивы значений источников и массивы проводимостей ветвей. Составим матрицу соединений. Найдём коэффициенты узловых уравнений в матричной форме и решим систему уравнений относительно комплексных потенциалов узлов схемы.

$$\begin{aligned}
 ORIGIN &:= 1 & E &:= (EA \ EB \ EC \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0)^T \\
 Z &:= (ZA \ ZB \ ZC \ ZN \ Z1a \ Z1b \ Z1c \ Z2a \ Z2b \ Z2c \ Zab \ Zbc \ Zca)^T
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 Y &:= Z^{-1} \\
 Yd &:= \text{diag}(Y) \\
 B &:= A \cdot Yd \cdot A^T \\
 C &:= A \cdot (-Yd \cdot E) \\
 \Phi &:= B^{-1} \cdot C
 \end{aligned}$$

$$A := \begin{pmatrix}
 -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\
 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\
 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \\
 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0
 \end{pmatrix}$$

Найдём напряжения на ветвях и токи в ветвях, считая $\Phi^N := 0$.

$$U1 := (-\Phi_1 \quad -\Phi_2 \quad -\Phi_3 \quad \Phi_4 \quad \Phi_1 - \Phi_4 \quad \Phi_2 - \Phi_4 \quad \Phi_3 - \Phi_4 \quad \Phi_1 - \Phi_5)$$

$$U2 := (\Phi_2 - \Phi_5 \quad \Phi_3 - \Phi_5 \quad \Phi_1 - \Phi_2 \quad \Phi_2 - \Phi_3 \quad \Phi_3 - \Phi_1) \quad U3 := \text{augment}(U1, U2)$$

$$Uv := U3^T \quad I := Yd \cdot (Uv + E)$$

$$I^T =$$

	1	2	3	4
1	11.192-3.434j	-8.83-7.284j	-3.778+10.877j	...

Для проверки верности решения найдём комплексные мощности источников и приёмников электрической энергии.

$$\sum_{k=1}^{13} \left[\left[\left(\vec{I} \right)^2 \right]_k \cdot Z_k \right] = 7.309 \times 10^3 + 2.113j \times 10^3$$

$$\sum_{k=1}^{13} (E_k \cdot \bar{I}_k) = 7.309 \times 10^3 + 2.113j \times 10^3$$

Баланс мощностей выполняется.

Определим, с каким коэффициентом мощности работают фазные ЭДС трёхфазного генератора.

$$\cos(\arg(EA) - \arg(I_1)) = 0.956 \quad \cos(\arg(EB) - \arg(I_2)) = 0.937$$

$$\cos(\arg(EC) - \arg(I_3)) = 0.982$$

Рассчитаем и построим векторную топографическую диаграмму напряжений для первого потребителя (рис. 3.28,а).

$$U := \vec{|\Phi|} \quad \psi := \arg(\Phi) \quad Id := \vec{|I|} \quad \psi_i := \arg(I)$$

$$\psi 1 := (0 \quad \arg(EC) \quad \psi_3 \quad \psi_4 \quad \psi_1 \quad 0 \quad 0)^T$$

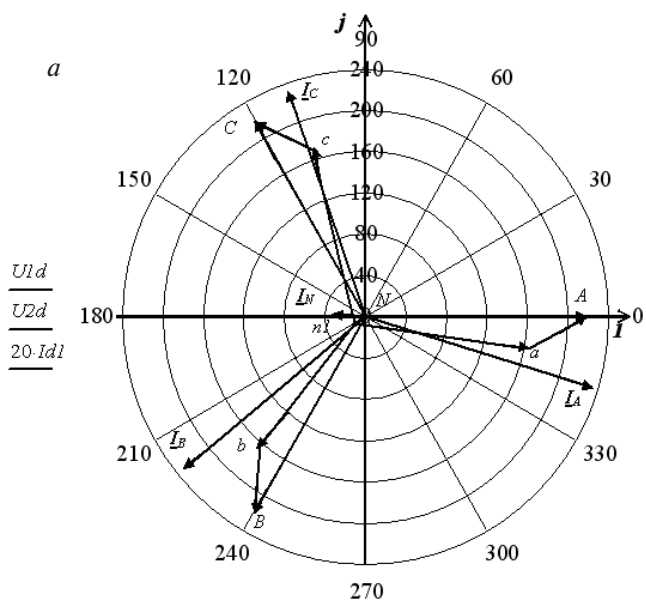
$$\psi 2 := (0 \quad \psi_4 \quad \psi_2 \quad \arg(EB) \quad 0)^T$$

$$U1d := (0 \quad |EC| \quad U_3 \quad U_4 \quad U_1 \quad EA \quad 0)^T$$

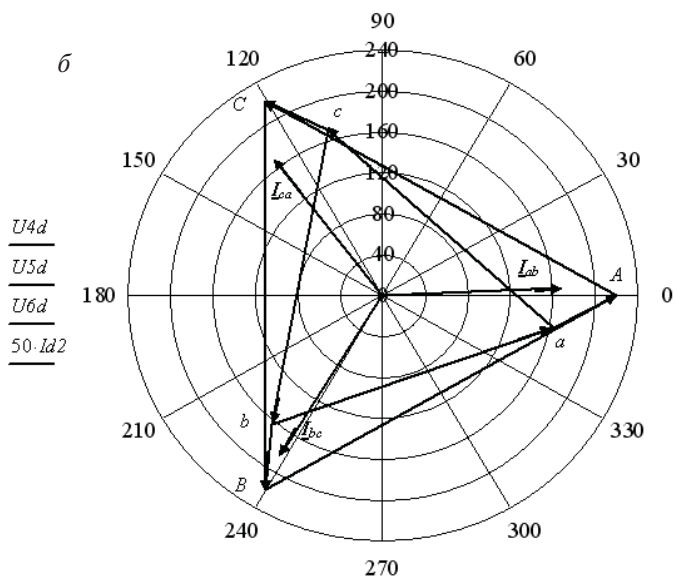
$$U2d := (0 \quad U_4 \quad U_2 \quad |EB| \quad 0)^T$$

$$\psi i 1 := (0 \quad \psi_{i1} \quad 0 \quad \psi_{i2} \quad 0 \quad \psi_{i3} \quad 0 \quad \psi_{i4} \quad 0)^T$$

$$Id 1 := (0 \quad Id_1 \quad 0 \quad Id_2 \quad 0 \quad Id_3 \quad 0 \quad Id_4 \quad 0)^T$$



$\psi_1, \psi_2, \psi_{i1}$



$\psi_4, \psi_5, \psi_6, \psi_{i2}$

Рис. 3.28

Рассчитаем и построим векторную топографическую диаграмму напряжений для потребителя, соединённого треугольником (рис. 3.28,б).

$$\begin{aligned} \psi_4 &:= (\arg(EC) \ \psi_3 \ \psi_1 \ \arg(EA) \ \arg(EC))^T & U_{4d} &:= (|EC| \ U_3 \ U_1 \ |EA| \ |EC|)^T \\ \psi_5 &:= (\arg(EA) \ \arg(EB) \ \psi_2 \ \psi_1)^T & U_{5d} &:= (|EA| \ |EB| \ U_2 \ U_1)^T \\ \psi_6 &:= (\arg(EB) \ \arg(EC) \ \psi_3 \ \psi_2)^T & U_{6d} &:= (|EB| \ |EC| \ U_3 \ U_2)^T \\ \psi_{i2} &:= (0 \ \psi_{i11} \ 0 \ \psi_{i12} \ 0 \ \psi_{i13} \ 0)^T & Id_2 &:= (0 \ Id_{11} \ 0 \ Id_{12} \ 0 \ Id_{13} \ 0)^T \end{aligned}$$

Пример 3.12. Необходимо найти неизвестные токи в трёхфазной электрической цепи (рис. 3.29) с несимметричным трёхфазным генератором.

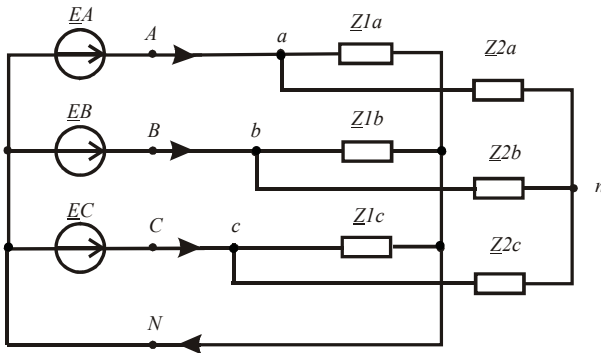


Рис. 3.29

Несимметричная трёхфазная система ЭДС представляется суммой трёх симметричных составляющих нулевой, прямой и обратной последовательностей фаз. Задача решается методом наложения. Каждый неизвестный ток находится как суперпозиция частных токов от действия каждой последовательности трёхфазной ЭДС. При симметричном потребителе ток в нулевом проводе равен сумме фазных токов от действия нулевой последовательности фаз. При отсутствии нулевого провода появляется напряжение смещения нейтрали, равное ЭДС нулевой последовательности.

Введём в листинг решения исходные данные для анализа заданной цепи на комплексной плоскости. Оба потребителя симметричные.

$$\begin{aligned}
 UA &:= 400 & UB &:= 360 \cdot e^{-j \cdot 2.1 \cdot \frac{\pi}{3}} & UC &:= 380 \cdot e^{j \cdot 2.1 \cdot \frac{\pi}{3}} & a &:= e^{j \cdot 2 \cdot \frac{\pi}{3}} \\
 Z1 &:= 50 + j \cdot 20 & Z2 &:= 40 + j \cdot 10
 \end{aligned}$$

Найдём комплексные действующие значения симметричных составляющих нулевой, прямой и обратной последовательности фаз.

$$\begin{aligned}
 UA0 &:= \frac{(UA + UB + UC)}{3} & UB0 &:= UA0 & UC0 &:= UA0 \\
 UA1 &:= \frac{(UA + a \cdot UB + a^2 \cdot UC)}{3} & UB1 &:= UA1 \cdot a^2 & UC1 &:= UA1 \cdot a \\
 UA2 &:= \frac{(UA + a^2 \cdot UB + a \cdot UC)}{3} & UB2 &:= UB1 \cdot a & UC2 &:= UA2 \cdot a^2
 \end{aligned}$$

Ток в нулевом проводе четырёхпроводного трёхфазного потребителя равен:

$$In := 3 \cdot UA0 \cdot ZI^{-1} = -0.491 + 0.52j$$

Напряжение смещения нейтрали трёхпроводного трёхфазного потребителя равно:

$$Un := UA0 = -11.654 + 5.393j$$

Найдём фазные токи потребителей и генератора. Вначале найдём частичные токи первого потребителя.

$$\begin{aligned}
 Ia0 &:= UA0 \cdot ZI^{-1} & Ib0 &:= Ia0 & Ic0 &:= Ia0 \\
 Ia1 &:= UA1 \cdot ZI^{-1} & Ib1 &:= UB1 \cdot ZI^{-1} & Ic1 &:= UC1 \cdot ZI^{-1} \\
 Ia2 &:= UA2 \cdot ZI^{-1} & Ib2 &:= UB2 \cdot ZI^{-1} & Ic2 &:= UC2 \cdot ZI^{-1}
 \end{aligned}$$

Затем найдём фазные токи первого потребителя.

$$Ia := Ia0 + Ia1 + Ia2 \quad Ib := Ib0 + Ib1 + Ib2 \quad Ic := Ic0 + Ic1 + Ic2$$

Найдём частичные токи второго потребителя.

$$\begin{aligned}
 Iat0 &:= 0 & Ibt0 &:= 0 & Ict0 &:= 0 \\
 Iat1 &:= UA1 \cdot Z2^{-1} & Ibt1 &:= UB1 \cdot Z2^{-1} & Ict1 &:= UC1 \cdot Z2^{-1} \\
 Iat2 &:= UA2 \cdot Z2^{-1} & Ibt2 &:= UB2 \cdot Z2^{-1} & Ict2 &:= UC2 \cdot Z2^{-1}
 \end{aligned}$$

Найдём фазные токи второго потребителя.

$$I_{at} := I_{at1} + I_{at2} \quad I_{bt} := I_{bt1} + I_{bt2} \quad I_{ct} := I_{ct1} + I_{ct2}$$

Найдём фазные токи генератора.

$$I_A := I_a + I_{at} \quad I_B := I_b + I_{bt} \quad I_C := I_c + I_{ct}$$

Выполним проверку баланса комплексных мощностей генератора и потребителей.

$$S_e := U_A \cdot \overline{I_A} + U_B \cdot \overline{I_B} + U_C \cdot \overline{I_C} = 1.768 \times 10^4 + 5.543j \times 10^3$$

$$S_p := (|I_a|^2 \cdot Z_1 + |I_b|^2 \cdot Z_1 + |I_c|^2 \cdot Z_1 + |I_{at}|^2 \cdot Z_2 + |I_{bt}|^2 \cdot Z_2 + |I_{ct}|^2 \cdot Z_2)$$

$$S_p = 1.768 \times 10^4 + 5.543j \times 10^3$$

Баланс мощностей выполняется.

Использование метода симметричных составляющих во многих случаях упрощает анализ трёхфазных цепей в аварийных режимах.

Пример 3.13. Выполним анимацию кругового вращающегося магнитного поля, создаваемого трёхфазной ЭДС в статоре асинхронной электрической машины.

На обмотки статора подаются напряжения, смещённые по фазе на 120 градусов относительно друг друга:

$$f := 50 \quad \omega := 2 \cdot \pi \cdot f \quad U_a(t) := 220 \cdot \cos(\omega \cdot t)$$

$$U_b(t) := 220 \cdot \cos\left(\omega \cdot t + \frac{2 \cdot \pi}{3}\right) \quad U_c(t) := 220 \cdot \cos\left(\omega \cdot t + \frac{4 \cdot \pi}{3}\right)$$

Зависимости напряжений от времени приведены на рис. 3.30.

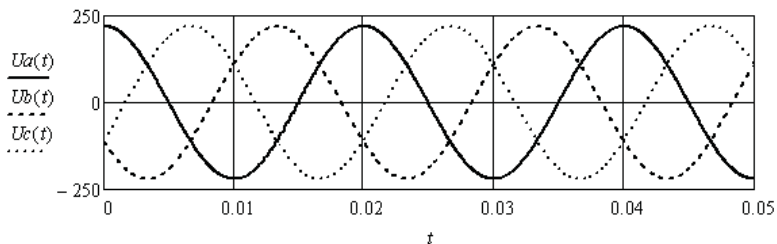


Рис. 3.30

Магнитный поток, создаваемый током каждой из обмоток статора, отстаёт от приложенного напряжения на 90 градусов. Амплитуда индукции магнитного поля пропорциональна величине

мгновенного значения приложенного напряжения и определяется параметрами обмоток статора. Примем амплитуду вектора электромагнитной индукции равной единице.

$$B_{am}(t) := 1 \cdot \sin(\omega \cdot t) \quad B_{bm}(t) := 1 \cdot \sin\left(\omega \cdot t + \frac{2 \cdot \pi}{3}\right)$$

$$B_{cm}(t) := 1 \cdot \sin\left(\omega \cdot t + \frac{4 \cdot \pi}{3}\right)$$

Создадим модель пространственного расположения обмоток статора. Воспользуемся комплексной плоскостью и расположим векторы индукции магнитного поля каждой обмотки со смещением на 120 градусов.

$$\psi_a := 0 \quad \psi_b := \frac{-2 \cdot \pi}{3} \quad \psi_c := \frac{-4 \cdot \pi}{3}$$

$$B_a(t) := \sin(\omega \cdot t) \quad B_b(t) := \sin\left(\omega \cdot t + \frac{2 \cdot \pi}{3}\right) \cdot e^{\psi_b \cdot j} \quad B_c(t) := \sin\left(\omega \cdot t + \frac{4 \cdot \pi}{3}\right) \cdot e^{\psi_c \cdot j}$$

Построим векторы магнитной индукции в системе полярных координат. Длина векторов будет соответствовать интенсивности магнитных полей, а угол соответствовать пространственной направленности векторов в статоре асинхронной машины. Результирующее магнитное поле найдём как векторную сумму частичных векторов. Выполним построение для момента времени $t = 0$.

Запишем координаты трёх частичных векторов магнитной индукции.

$$t0 := 0 \quad Ba0 := (0 \quad B_{am}(t0) \quad 0)^T \quad Bb0 := (0 \quad B_{bm}(t0) \quad 0)^T \quad Bc0 := (0 \quad B_{cm}(t0) \quad 0)^T$$

$$\phi a0 := (0 \quad \psi_a \quad 0)^T \quad \phi b0 := (0 \quad \psi_b \quad 0)^T \quad \phi c0 := (0 \quad \psi_c \quad 0)^T$$

Определим координаты суммарного вектора при $t = 0$:

$$Bs0 := [0 \quad |(Ba(t0)) + Bb(t0) + Bc(t0)| \quad 0]^T$$

$$\phi s0 := [0 \quad \arg[(Ba(t0)) + Bb(t0) + Bc(t0)] \quad 0]^T$$

Векторная диаграмма, иллюстрирующая пространственное распределение векторов магнитной индукции, приведена на рис. 3.31.

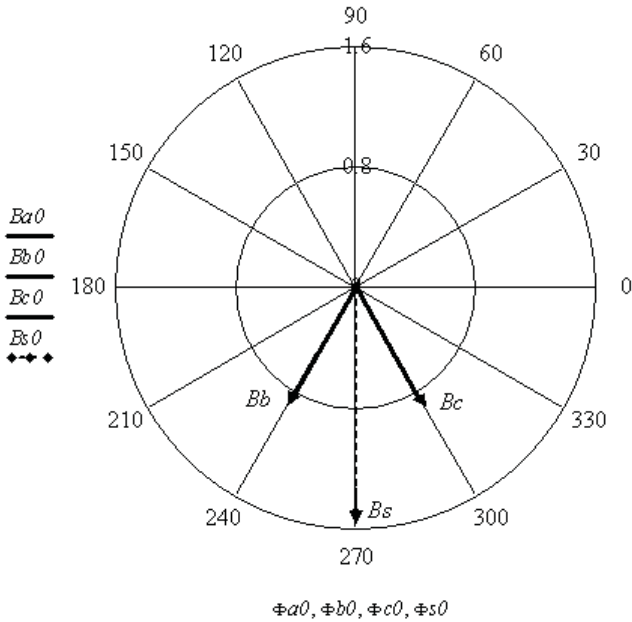


Рис. 3.31

Выполним анимацию вращения магнитного поля во времени, используя встроенные в программу инструменты.

$$Time := \frac{FRAME}{5000} \quad Baa := (0 \quad Bam(Time) \quad 0)^T \quad Bba := (0 \quad Bbm(Time) \quad 0)^T$$

$$Bca := (0 \quad Bcm(Time) \quad 0)^T \quad \Phi aa := (0 \quad 0 \quad 0)^T \quad \Phi ba := \left(0 \quad \frac{-2 \cdot \pi}{3} \quad 0\right)^T$$

$$\Phi ca := \left(0 \quad \frac{2 \cdot \pi}{3} \quad 0\right)^T \quad Bsa := [0 \quad |(Ba(Time)) + Bb(Time) + Bc(Time)| \quad 0]^T$$

$$\Phi sa := [0 \quad \arg[(Ba(Time)) + Bb(Time) + Bc(Time)] \quad 0]^T$$

Подготовим для анимации векторную диаграмму (рис. 3.32).

Для анимации вращения магнитного поля требуется выбрать в меню *Tools* вкладку *Animation (Record)*. В появившемся окне указать начальное (0) и конечное (100) значения для анимации одного оборота результирующего вектора. Количество кадров в секунду установить равным 10. Затем выделить область, занятую графиком (неправильное выделение приведёт к ошибке) и нажать кнопку *Animate*. После обработки программой всех кадров появится окно проигрыва-

ния. Для сохранения видеофайла следует использовать кнопку *Save*.
 Окно проигрывания имеет вид, приведённый на рис. 3.33.

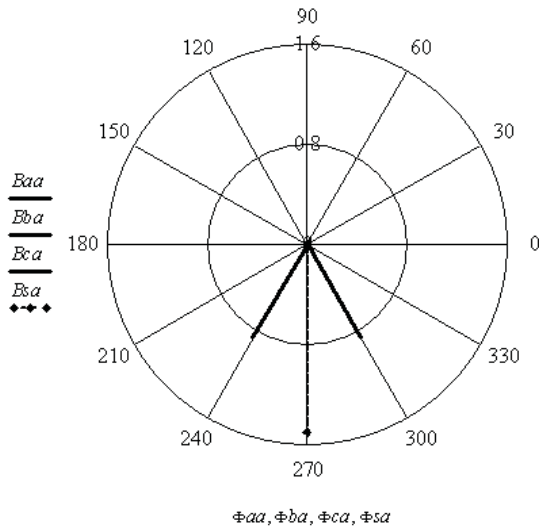


Рис. 3.32

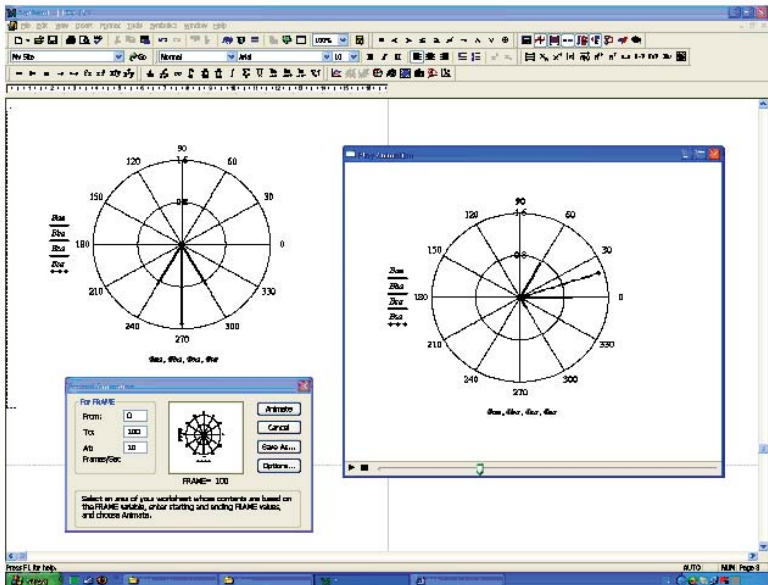


Рис. 3.33

Контрольные вопросы

1. Какая разница между активными и реактивными сопротивлениями элементов электрической цепи?
2. Зачем анализ состояния электрической цепи с синусоидальными токами переносят на комплексную плоскость?
3. Как перейти к комплексным сопротивлениям элементов?
4. Как используется треугольник сопротивлений?
5. Как используется треугольник проводимостей?
6. Как используется треугольник мощностей?
7. Как найти комплексное сопряжённое значение тока?
8. Как определяются активная и реактивная мощности?
9. Как находится реактивная мощность обмена индуктивно связанных катушек?
10. Поясните термин «одноимённые зажимы».
11. Чем отличаются резонанс напряжений и резонанс токов?
12. Как строится векторная топографическая диаграмма напряжений?
13. Зачем составляется уравнение баланса комплексных мощностей?
14. По какой частотной характеристике определяется резонансная частота двухполюсника?
15. В чём особенность зависимых источников?
16. Перечислите возможные соединения трёхфазного генератора и трёхфазного потребителя.
17. Как рассчитывается «коэффициент мощности» работы источника?
18. Чем отличаются друг от друга прямая, обратная и нулевая последовательности фаз?
19. Что такое смещение нейтрали?
20. Как создаётся круговое вращающееся магнитное поле?
21. Какая связь между линейной и фазной ЭДС трёхфазного генератора?
22. Какая связь между амплитудным и действующим значениями синусоидальной ЭДС?

4. АНАЛИЗ ЛИНЕЙНЫХ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ С НЕСИНУСОИДАЛЬНЫМИ ТОКАМИ

Несинусоидальные токи в линейных электрических цепях возникают при действии нескольких синусоидальных источников с разной частотой или при действии несинусоидальных источников тока и ЭДС. Для определения мгновенных значений неизвестных токов используют метод наложения.

Если в цепи действуют несколько источников с разной частотой тока или ЭДС, то находят частичные мгновенные значения неизвестных токов от действия каждого источника в отдельности, а потом их складывают.

Если в цепи действует источник несинусоидального тока или несинусоидальной ЭДС, то они аппроксимируются ограниченным рядом Фурье. Далее находят частичные мгновенные значения неизвестных токов от действия каждой составляющей ряда Фурье, рассматривая её как источник. Полученные частичные мгновенные значения токов в каждой ветви складывают.

Действующие значения найденных несинусоидальных токов определяют как корень квадратный из суммы квадратов действующих значений всех частичных составляющих токов [1; 2; 3; 6; 9].

Рассмотрим соответствующие примеры.

4.1. Анализ электрической цепи с источниками синусоидального тока и синусоидальной ЭДС разной частоты

Пример 4.1. Необходимо найти неизвестные токи в электрической цепи (рис. 4.1), в которой действует источник постоянного тока и два источника синусоидальных ЭДС разной частоты.

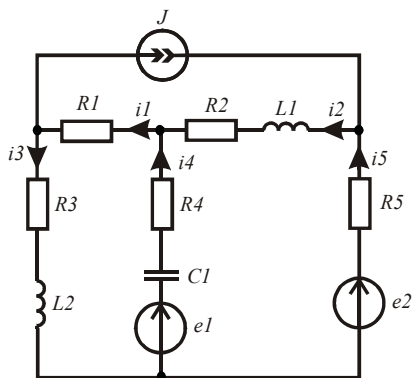


Рис. 4.1

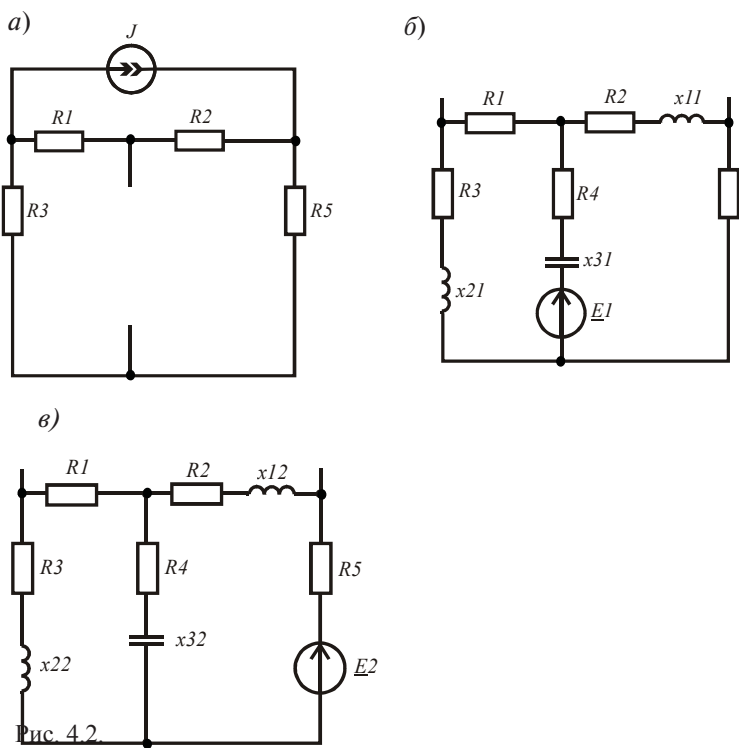


Рис. 4.2

Рис. 4.2

Используем метод наложения. Определим частичные токи. Для этого составим три схемы замещения (рис. 4.2, а, б, в). Условно положительные направления токов на всех схемах остаются неизменными.

Введём в листинг решения исходные данные.

$$R1 := 50 \quad R2 := 40 \quad R3 := 25 \quad R4 := 20 \quad R5 := 45 \quad L1 := 0.004$$

$$L2 := 0.006 \quad C1 := 8 \cdot 10^{-6} \quad J := 0.8 \quad \omega 1 := 5000 \quad \omega 2 := 8000$$

$$e1(t) := 100 \cdot \sin(\omega 1 \cdot t + 0.2 \cdot \pi) \quad e2(t) := 125 \cdot \sin(\omega 2 \cdot t - 0.6 \cdot \pi)$$

Определим сопротивления реактивных элементов, комплексные сопротивления ветвей на частотах источников и комплексные амплитудные значения ЭДС источников.

$$Z11 := R1 \quad Z21 := R2 + j \cdot \omega 1 \cdot L1 \quad Z31 := R3 + j \cdot \omega 1 \cdot L2 \quad Z41 := R4 - j \cdot (\omega 1 \cdot C1)^{-1}$$

$$Z51 := R5 \quad Z12 := Z11 \quad Z52 := Z51 \quad Z22 := R2 + j \cdot \omega 2 \cdot L1 \quad Z32 := R3 + j \cdot \omega 2 \cdot L2$$

$$Z42 := R4 - j \cdot (\omega 2 \cdot C1)^{-1} \quad E1 := 100 \cdot e^{j \cdot 0.2 \cdot \pi} \quad E2 := 125 \cdot e^{-j \cdot 0.6 \cdot \pi}$$

Найдём частичные токи от действия источника постоянного тока, используя схему замещения, приведённую на рис. 4.2, а.

$$I40 := 0 \quad I10 := J \cdot \frac{R3 + R5}{R1 + R2 + R3 + R5} \quad I20 := I10 \quad I30 := -(J - I10) \quad I50 := I30$$

Найдём комплексные амплитудные значения частичных токов от действия первого синусоидального источника ЭДС (рис. 4.2, б).

$$I41 := \frac{E1}{Z41 + \frac{(Z11 + Z31) \cdot (Z21 + Z51)}{Z11 + Z31 + Z21 + Z51}} \quad I11 := I41 \cdot \frac{Z21 + Z51}{Z21 + Z51 + Z11 + Z31}$$

$$I31 := I11 \quad I21 := -(I41 - I11) \quad I51 := I21$$

Найдём комплексные амплитудные значения частичных токов от действия второго синусоидального источника ЭДС (рис. 4.2, в).

$$I52 := \frac{E2}{Z22 + Z52 + \frac{(Z12 + Z32) \cdot Z42}{Z12 + Z32 + Z42}} \quad I12 := I52 \cdot \frac{Z42}{Z12 + Z32 + Z42}$$

$$I22 := I52 \quad I32 := I12 \quad I42 := -(I22 - I12)$$

Найдём мгновенные значения неизвестных токов, суммируя частичные мгновенные значения.

$$i1(t) := I10 + |I11| \cdot \sin(\omega1 \cdot t + \arg(I11)) + |I12| \cdot \sin(\omega2 \cdot t + \arg(I12))$$

$$i2(t) := I20 + |I21| \cdot \sin(\omega1 \cdot t + \arg(I21)) + |I22| \cdot \sin(\omega2 \cdot t + \arg(I22))$$

$$i3(t) := I30 + |I31| \cdot \sin(\omega1 \cdot t + \arg(I31)) + |I32| \cdot \sin(\omega2 \cdot t + \arg(I32))$$

$$i4(t) := I40 + |I41| \cdot \sin(\omega1 \cdot t + \arg(I41)) + |I42| \cdot \sin(\omega2 \cdot t + \arg(I42))$$

$$i5(t) := I50 + |I51| \cdot \sin(\omega1 \cdot t + \arg(I51)) + |I52| \cdot \sin(\omega2 \cdot t + \arg(I52))$$

Уравнения токов с численными значениями коэффициентов, на примере первого тока, находятся следующим образом:

$$i1(t) \rightarrow \text{float}, 4 \cdot 0,8495 \cdot \sin(5000.0 \cdot t + 0.7571) + \\ + 0.2928 \sin(8000.0 \cdot t - 3.089) + 0.35$$

Значения амплитуд и начальных фаз ограничены четырьмя рядами после запятой.

Определим действующие значения найденных токов.

$$I_1 := \sqrt{I10^2 + 0.5 \cdot (|I11|)^2 + 0.5 \cdot (|I12|)^2} \quad I_2 := \sqrt{I20^2 + 0.5 \cdot (|I21|)^2 + 0.5 \cdot (|I22|)^2}$$

$$I_3 := \sqrt{I30^2 + 0.5 \cdot (|I31|)^2 + 0.5 \cdot (|I32|)^2} \quad I_4 := \sqrt{I40^2 + 0.5 \cdot (|I41|)^2 + 0.5 \cdot (|I42|)^2}$$

$$I_5 := \sqrt{I50^2 + 0.5 \cdot (|I51|)^2 + 0.5 \cdot (|I52|)^2} \quad I^T = (0 \quad 0.725 \quad 1.05 \quad 0.779 \quad 1.363 \quad 1.087)$$

На рис. 4.3 приведены зависимости третьего и четвертого токов от времени.

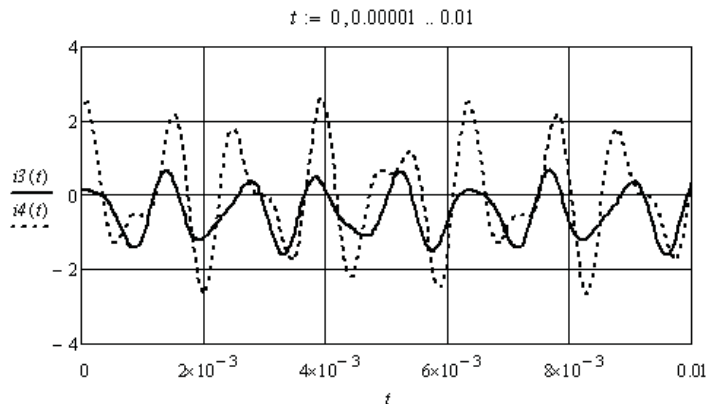


Рис. 4.3

4.2. Аппроксимация несинусоидальных периодических токов, напряжений и ЭДС рядами Фурье и эквивалентными синусоидами

Первым этапом анализа цепей с несинусоидальными источниками является аппроксимация несинусоидальных периодических токов и ЭДС источников ограниченным рядом Фурье. В программе MathCAD есть специальные функции численного прямого и обратного преобразования Фурье на основе быстрых алгоритмов. Приведём некоторые из них.

$FFT(V)$ — выполняет прямое быстрое преобразование Фурье вещественных данных, записанных в векторе V , 2^n с элементами одного периода, где n — целое число. Возвращает вектор размера $2^{n-1} + 1$.

$IFFT(V)$ — обратное быстрое преобразование Фурье, соответствующее $FFT(V)$. Вектор V имеет размер $2^{n-1} + 1$. Возвращает вектор с размером 2^n .

$fft(V)$ и $ifft(V)$ — аналогичные прямое и обратное преобразования, но в иной нормировке.

$CFFT(\underline{A})$, $ICFFT(\underline{A})$ и $cfft(\underline{A})$, $icfft(\underline{A})$ — аналогичные преобразования для комплексных данных.

Прямое преобразование Фурье периодической вещественной функции даёт спектр комплексных коэффициентов \underline{C} , а функция представляется в виде ряда

$$u(t) = C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} 2|C_n| \cos(n\omega t + \arg(C_n)) .$$

Эквивалентные синусоиды несинусоидальных напряжений и токов участка цепи находят из условия сохранения действующих значений напряжения и тока и сохранения значения активной мощности, выделяемой на этом участке цепи.

Пример 4.2. Выполним аппроксимацию несинусоидального напряжения и несинусоидального тока участка линейной электрической цепи.

Напряжение и ток заданы отсчётами их мгновенных значений, взятыми на одном периоде.

$$u := (11 \ 35 \ 52 \ 76 \ 75 \ 25 \ -3 \ -38 \ -45 \ -50 \ -32 \ -5 \ 11)^T$$

$$i := (-0.1 \ -0.02 \ 0.3 \ 0.7 \ 0.8 \ 0.72 \ 0.2 \ 0.09 \ -0.01 \ -0.25 \ -0.6 \ -0.55 \ -0.1)^T$$

Выполним сплайн интерполяцию напряжения и тока. Результат интерполяции приведён на рис. 4.4.

$$n_k := k \cdot 2 \cdot \frac{\pi}{12} \quad S := cspline(n, u) \quad U(\omega t) := interp(S, n, u, \omega t)$$

$$S := cspline(n, i) \quad I(\omega t) := interp(S, n, i, \omega t)$$

Найдём спектры напряжения и тока.

$$T := 2 \cdot \pi \quad Td := \frac{2 \cdot \pi}{256} \quad k := 0..255 \quad U_k := U(Td \cdot k) \quad C := FFT(U)$$

$$n := 0..32 \quad Um_n := if(n > 0, 2 \cdot |C_n|, C_n) \quad \Phi u_n := if(Um_n > 0.0001, arg(C_n), 0)$$

$$k := 0..255 \quad I_k := I(Td \cdot k) \quad CI := FFT(I)$$

$$n := 0..32 \quad Im_n := if(n > 0, 2 \cdot |CI_n|, CI_n) \quad \Phi i_n := if(Im_n > 0.0001, arg(CI_n), 0)$$

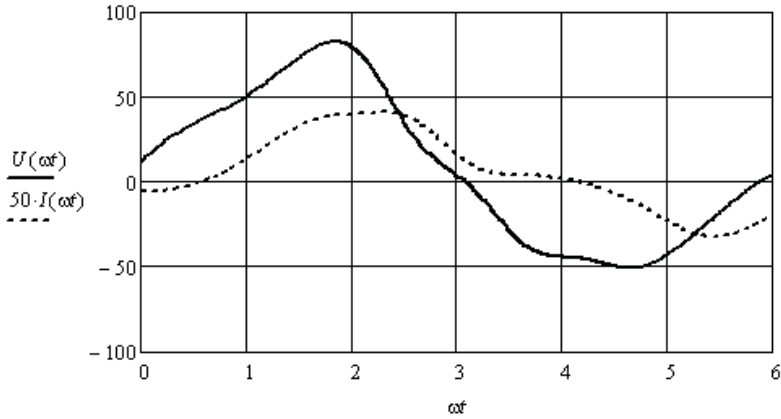


Рис. 4.4

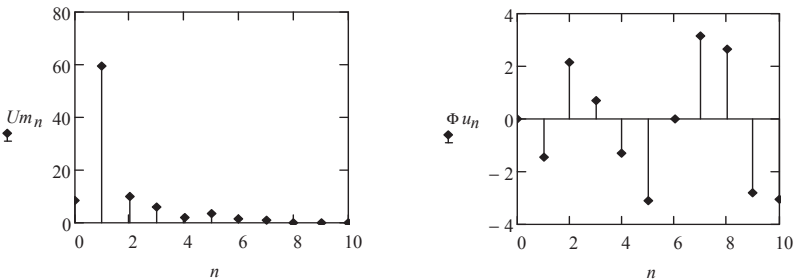


Рис. 4.5

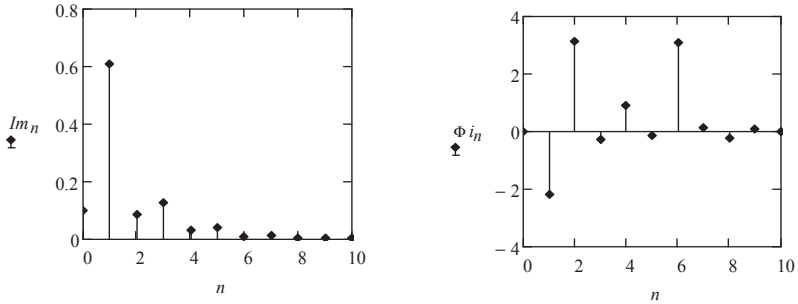


Рис. 4.6

На рис. 4.5 и 4.6 приведены ограниченные спектры напряжения и тока. На рисунках приведены амплитуды и начальные фазы составляющих спектра. Ограничим аппроксимирующие ряды Фурье постоянной составляющей и девятью гармоническими составляющими. Запишем выражения для мгновенных значений напряжения и тока. Эти же выражения запишем и через синусоиды.

$$\omega := 100 \cdot \pi \quad ua(t) := Um_0 + \sum_{n=1}^9 (Um_n \cdot \cos(n \cdot \omega \cdot t + \Phi u_n))$$

$$ia(t) := Im_0 + \sum_{n=1}^9 (Im_n \cdot \cos(n \cdot \omega \cdot t + \Phi i_n))$$

$$ua(t) := Um_0 + \sum_{n=1}^9 \left(Um_n \cdot \sin\left(n \cdot \omega \cdot t + \Phi u_n + \frac{\pi}{2}\right) \right)$$

$$ia(t) := Im_0 + \sum_{n=1}^9 \left(Im_n \cdot \sin\left(n \cdot \omega \cdot t + \Phi i_n + \frac{\pi}{2}\right) \right)$$

Определим параметры эквивалентных синусоид напряжения и тока.

$$U := \sqrt{(Um_0)^2 + \sum_{n=1}^9 \frac{(Um_n)^2}{2}} \quad I := \sqrt{(Im_0)^2 + \sum_{n=1}^9 \frac{(Im_n)^2}{2}}$$

$$P := Um_0 \cdot Im_0 + \sum_{n=1}^9 \left[\frac{(Um_n \cdot Im_n)}{2} \cdot \cos(\Phi u_n - \Phi i_n) \right] \quad \Phi_s := \arccos\left(\frac{P}{U \cdot I}\right)$$

$$us(t) := U \cdot \sqrt{2} \cdot \sin(\omega \cdot t) \quad is(t) := I \cdot \sqrt{2} \cdot \sin(\omega \cdot t - \Phi_S)$$

Знак начальной фазы тока определяется активно-индуктивным характером сопротивления участка цепи. Это следует из начальных фаз основных гармонических составляющих (рис. 4.5 и 4.6).

Определим параметры элементов данного участка.

$$z := \frac{U}{I} \quad xL := z \cdot \sin(\Phi_S) = 65.795 \quad R := z \cdot \cos(\Phi_S) = 69.42 \quad L := \frac{xL}{\omega} = 0.209$$

На рис. 4.7 приведены аппроксимации напряжения и тока, и их эквивалентные синусоиды.

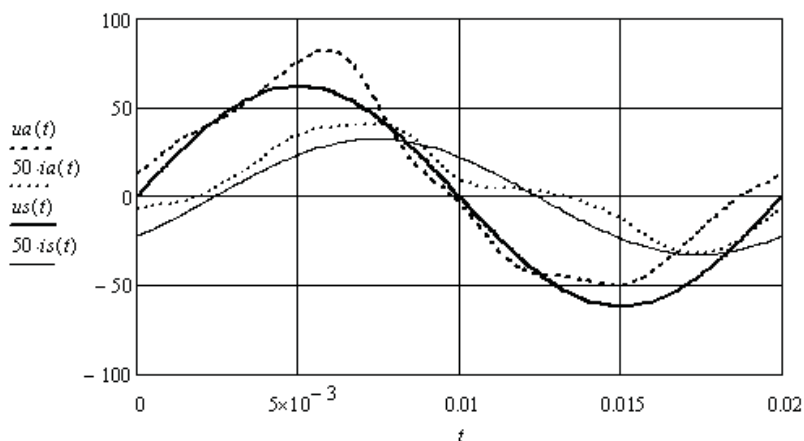


Рис. 4.7

4.3. Анализ линейной электрической цепи с источником несинусоидальной ЭДС

В общем случае, при действии в линейной электрической цепи источников с несинусоидальным током или несинусоидальной ЭДС, на первом этапе выполняют аппроксимацию их огибающих на одном периоде, которые затем аппроксимируют ограниченным рядом Фурье. На втором этапе находят частичные токи от действия всех компонент всех источников по очереди. На третьем этапе находят выражения для мгновенных значений токов и оценивают их

по степени искажения относительно синусоидальных токов. Для оценки используют следующие коэффициенты.

Коэффициент формы $K_\phi = I/I_{\text{cp}}$ – это отношение действующего значения к среднему по модулю значению. У синусоиды $K_\phi = 1,11$.

Коэффициент амплитуды $K_a = i_{\text{max}}/I$ – это отношение максимального значения к действующему значению. У синусоиды $K_a = 1,41$.

Коэффициент искажения $K_u = I_1/I$ – это отношение действующего значения первой гармонической составляющей к действующему значению. У синусоиды $K_u = 1$.

Коэффициент гармоник $K_g = I_{\text{высш}}/I_1$ – это отношение действующего значения высших гармонических составляющих к действующему значению первой гармонической составляющей. У синусоиды $K_g = 0$.

Пример 4.3. Необходимо определить неизвестные токи в заданной электрической цепи с несинусоидальным источником ЭДС (рис. 4.8).

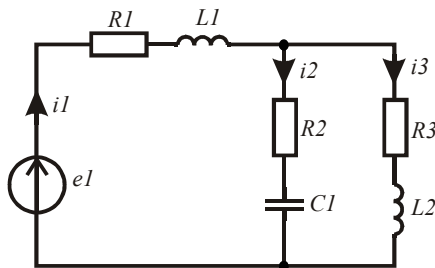


Рис. 4.8

Огибающая ЭДС задана отсчётами на интервале, больше периода ЭДС.

$$A := \begin{pmatrix} -64 & -48 & -32 & -16 & 0 & 16 & 32 & 48 & 64 & 80 & 96 & 112 & 128 & 144 & 160 & 176 \\ -100 & -25 & -10 & 75 & 90 & 80 & -10 & -75 & -100 & -25 & -10 & 75 & 90 & 80 & -10 & -75 \end{pmatrix}$$

Выполним аппроксимацию огибающей ЭДС и определим период по координате отсчётов k (рис. 4.9).

$$B := A^T \quad E := B^{(1)} \quad K := B^{(0)}$$

$$S := \text{cspline}(K, E) \quad U(k) := \text{interp}(S, K, E, k)$$

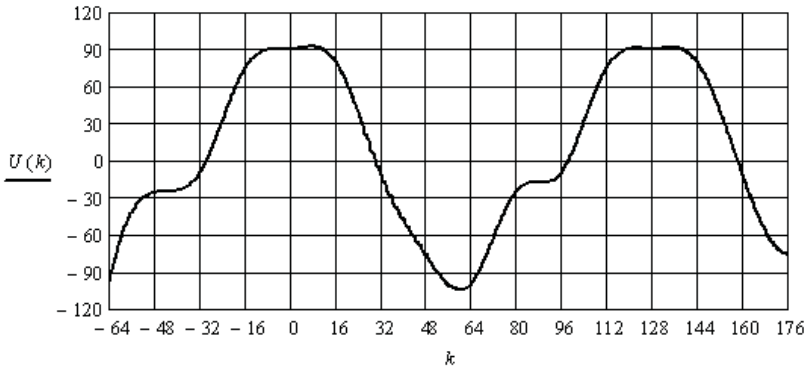


Рис. 4.9

Найдём спектр огибающей ЭДС, используя отсчёты одного периода на интервале $0 \div 127$.

$$k := 0..127 \quad E_k := U(k) \quad C := FFT(E)$$

$$n := 0..10 \quad EI_n := if(n > 0, 2 \cdot |C_n|, C_n) \quad \psi_n := if(EI_n > 0.01, arg(C_n), 0)$$

На рис. 4.10, а, б показаны значения модулей и начальных фаз составляющих спектра.

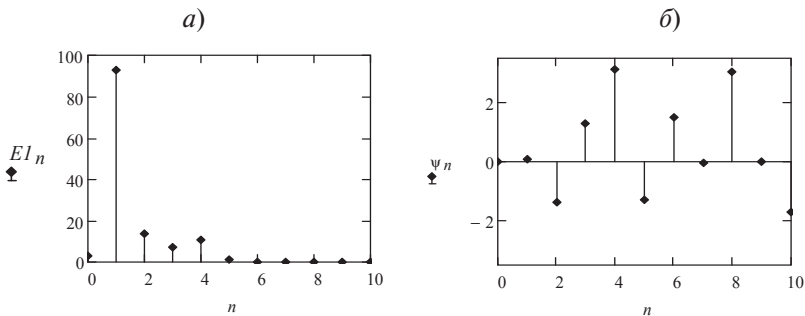


Рис. 4.10

Ограничим спектр ЭДС постоянной составляющей и четырьмя первыми гармоническими составляющими. Введём в листинг исходные данные. Найдём комплексные сопротивления ветвей для каждой составляющей спектра ЭДС.

$$\begin{aligned}
U_0 &:= EI_0 & U_1 &:= EI_1 e^{j \cdot \Psi_1} & U_2 &:= EI_2 e^{j \cdot \Psi_2} & U_3 &:= EI_3 e^{j \cdot \Psi_3} & U_4 &:= EI_4 e^{j \cdot \Psi_4} \\
R_1 &:= 30 & R_2 &:= 40 & R_3 &:= 45 & L_1 &:= 0.004 & L_2 &:= 0.006 & C_1 &:= 8 \cdot 10^{-6} \\
\omega &:= 5000 & Z_{11} &:= R_1 + j \cdot \omega \cdot L_1 & Z_{21} &:= R_2 - j \cdot (\omega \cdot C_1)^{-1} & Z_{31} &:= R_3 + j \cdot \omega \cdot L_2 \\
Z_{12} &:= R_1 + j \cdot 2 \cdot \omega \cdot L_1 & Z_{22} &:= R_2 - j \cdot (2 \cdot \omega \cdot C_1)^{-1} & Z_{32} &:= R_3 + j \cdot 2 \cdot \omega \cdot L_2 \\
Z_{13} &:= R_1 + j \cdot 3 \cdot \omega \cdot L_1 & Z_{23} &:= R_2 - j \cdot (3 \cdot \omega \cdot C_1)^{-1} & Z_{33} &:= R_3 + j \cdot 3 \cdot \omega \cdot L_2 \\
Z_{14} &:= R_1 + j \cdot 4 \cdot \omega \cdot L_1 & Z_{24} &:= R_2 - j \cdot (4 \cdot \omega \cdot C_1)^{-1} & Z_{34} &:= R_3 + j \cdot 4 \cdot \omega \cdot L_2
\end{aligned}$$

Найдём частичные токи в ветвях заданной цепи.

$$\begin{aligned}
I_{10} &:= \frac{U_0}{R_1 + R_3} & I_{20} &:= 0 & I_{30} &:= I_{10} \\
I_{11} &:= \frac{U_1}{Z_{11} + \frac{Z_{21} \cdot Z_{31}}{Z_{21} + Z_{31}}} & I_{21} &:= I_{11} \cdot \frac{Z_{31}}{Z_{21} + Z_{31}} & I_{31} &:= I_{11} - I_{21} \\
I_{12} &:= \frac{U_2}{Z_{12} + \frac{Z_{22} \cdot Z_{32}}{Z_{22} + Z_{32}}} & I_{22} &:= I_{12} \cdot \frac{Z_{32}}{Z_{22} + Z_{32}} & I_{32} &:= I_{12} - I_{22} \\
I_{13} &:= \frac{U_3}{Z_{13} + \frac{Z_{23} \cdot Z_{33}}{Z_{23} + Z_{33}}} & I_{23} &:= I_{13} \cdot \frac{Z_{33}}{Z_{23} + Z_{33}} & I_{33} &:= I_{13} - I_{23} \\
I_{14} &:= \frac{U_4}{Z_{14} + \frac{Z_{24} \cdot Z_{34}}{Z_{24} + Z_{34}}} & I_{24} &:= I_{14} \cdot \frac{Z_{34}}{Z_{24} + Z_{34}} & I_{34} &:= I_{14} - I_{24}
\end{aligned}$$

Подготовим массивы модулей и начальных фаз всех частичных составляющих токов в ветвях схемы.

$$\begin{aligned}
I_1 &:= (I_{10} \ |I_{11}| \ |I_{12}| \ |I_{13}| \ |I_{14}|)^T & I_2 &:= (I_{20} \ |I_{21}| \ |I_{22}| \ |I_{23}| \ |I_{24}|)^T \\
I_3 &:= (I_{30} \ |I_{31}| \ |I_{32}| \ |I_{33}| \ |I_{34}|)^T \\
\Phi_1 &:= (0 \ \arg(I_{11}) \ \arg(I_{12}) \ \arg(I_{13}) \ \arg(I_{14}))^T \\
\Phi_2 &:= (0 \ \arg(I_{21}) \ \arg(I_{22}) \ \arg(I_{23}) \ \arg(I_{24}))^T \\
\Phi_3 &:= (0 \ \arg(I_{31}) \ \arg(I_{32}) \ \arg(I_{33}) \ \arg(I_{34}))^T
\end{aligned}$$

Найдём мгновенные значения токов в ветвях, суммируя частичные токи. Формы токов и ЭДС приведены на рис. 4.11.

$$i1(t) := I1_0 + \sum_{n=1}^4 (I1_n \cdot \cos(n \cdot \omega \cdot t + \Phi1_n)) \quad i3(t) := I3_0 + \sum_{n=1}^4 (I3_n \cdot \cos(n \cdot \omega \cdot t + \Phi3_n))$$

$$i2(t) := I2_0 + \sum_{n=1}^4 (I2_n \cdot \cos(n \cdot \omega \cdot t + \Phi2_n)) \quad e(t) := E1_0 + \sum_{n=1}^4 (E1_n \cdot \cos(n \cdot \omega \cdot t + \psi_n))$$

Определим коэффициенты, характеризующие несинусоидальность ЭДС источника. Максимальное значение ЭДС, равное 105 В, берём из рис. 4.11.

$$E := \sqrt{(E1_0)^2 + \sum_{n=1}^4 \frac{(E1_n)^2}{2}} \quad K_{ge} := \frac{\sqrt{\sum_{n=2}^4 \frac{(E1_n)^2}{2}}}{\frac{E1_1}{\sqrt{2}}} = 0.202$$

$$T := \frac{2 \cdot \pi}{\omega} \quad E_{cp} := T^{-1} \cdot \int_0^T |e(t)| dt$$

$$K_{\Phi e} := \frac{E}{E_{cp}} = 1.141 \quad K_{ae} := \frac{105}{E} = 1.565 \quad K_{ue} := \frac{E1_1}{\sqrt{2} \cdot E} = 0.979$$

Аналогичным образом определим коэффициенты, характеризующие несинусоидальность первого тока.

$$I1d := \sqrt{(I1_0)^2 + \sum_{n=1}^4 \frac{(I1_n)^2}{2}} \quad K_{gi1} := \frac{\sqrt{\sum_{n=2}^4 \frac{(I1_n)^2}{2}}}{\frac{I1_1}{\sqrt{2}}} = 0.15$$

$$I1cp := T^{-1} \cdot \int_0^T |i1(t)| dt$$

$$K_{\Phi i1} := \frac{I1d}{I1cp} = 1.131 \quad K_{ai1} := \frac{1.6}{I1d} = 1.515 \quad K_{ui1} := \frac{I1_1}{\sqrt{2} \cdot I1d} = 0.988$$

Определим коэффициенты, характеризующие несинусоидальность второго тока.

$$I2d := \sqrt{(I2_0)^2 + \sum_{n=1}^4 \frac{(I2_n)^2}{2}} \quad K_{gi2} := \frac{\sqrt{\sum_{n=2}^4 \frac{(I2_n)^2}{2}}}{\frac{I2_1}{\sqrt{2}}} = 0.191$$

$$I2cp := T^{-1} \cdot \int_0^T |i2(t)| dt$$

$$K_{\Phi i3} := \frac{I3d}{I3cp} = 1.116 \quad K_{ai3} := \frac{0.9}{I3d} = 1.543 \quad K_{ui3} := \frac{I3_1}{\sqrt{2} \cdot I3d} = 0.992$$

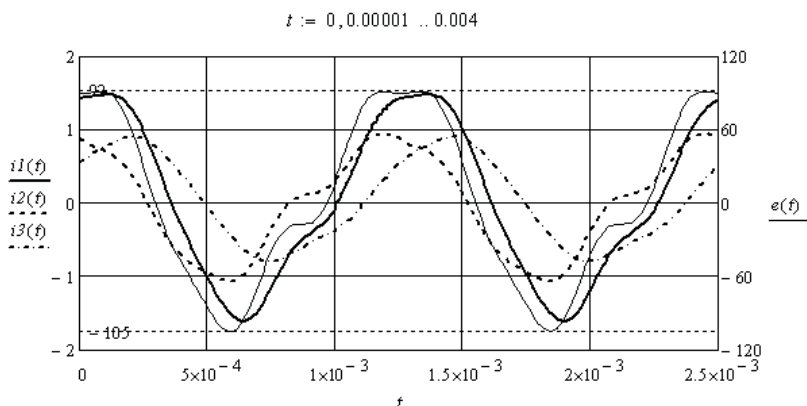


Рис. 4.11

Определим коэффициенты, характеризующие несинусоидальность третьего тока.

$$3d := \sqrt{(I3_0)^2 + \sum_{n=1}^4 \frac{(I3_n)^2}{2}} \quad K_{gi3} := \frac{\sqrt{\sum_{n=2}^4 \frac{(I3_n)^2}{2}}}{\frac{I3_1}{\sqrt{2}}} = 0.107$$

$$I3cp := T^{-1} \cdot \int_0^T |i3(t)| dt$$

$$K_{\Phi i3} := \frac{I3d}{I3cp} = 1.116 \quad K_{ai3} := \frac{0.9}{I3d} = 1.543 \quad K_{ui3} := \frac{I3_1}{\sqrt{2} \cdot I3d} = 0.992$$

Полученные результаты сведём в таблицу.

	$\sin \omega t$	$e(t)$	$i_1(t)$	$i_2(t)$	$i_3(t)$
K_{Φ}	1,11	1,141	1,131	1,146	1,116
K_a	1,41	1,565	1,515	1,57	1,543
K_u	1,0	0,979	0,988	0,982	0,992
K_z	0	0,202	0,15	0,191	0,107

Видно, что ток через источник менее искажён, чем ЭДС. Это объясняется активно-индуктивным характером эквивалентного сопротивления цепи. Ток в ветви с конденсатором искажён сильнее, чем ток в ветви с индуктивностью.

Контрольные вопросы

1. Перечислите причины возникновения в линейных электрических цепях периодических несинусоидальных токов.
2. Укажите способы аппроксимации несинусоидальных токов.
3. Как найти действующее значение несинусоидального тока?
4. Какие коэффициенты используют для сравнения несинусоидальных токов?
5. Поясните термин «эквивалентные синусоиды напряжения и тока».

5. АНАЛИЗ ЛИНЕЙНЫХ ЧЕТЫРЁХПОЛЮСНИКОВ

Состояние пассивного четырёхполюсника в установившемся режиме определяется системой из двух уравнений. При анализе четырёхполюсников используют несколько форм таких уравнений. Они эквивалентны друг другу. Коэффициенты **A**, **Y**, **Z**, **H**, **B**, **G** форм уравнений называются первичными коэффициентами. Коэффициенты \underline{Z}_c и $\underline{\Gamma}$ уравнений с гиперболическими функциями называются вторичными коэффициентами [3; 5; 6; 9].

Активные четырёхполюсники могут быть преобразованы в пассивные.

Целью анализа четырёхполюсников является определение коэффициентов заданной формы уравнений, определение параметров элементов схемы замещения, свёртка нескольких четырёхполюсников. Все задачи анализа четырёхполюсников формализованы. Необходимые выражения имеются в справочниках. Рассмотрим далее несколько примеров решения соответствующих задач.

5.1. Определение первичных коэффициентов уравнений четырёхполюсников

Если задана схема пассивного четырёхполюсника, не приведённая к одной из схем замещения, то значения первичных коэффициентов находят с помощью опытов холостого хода и короткого замыкания со стороны первичных или вторичных зажимов. В остальных случаях используют известные преобразования.

Пример 5.1. Необходимо найти первичные коэффициенты **A**-формы и вторичные коэффициенты четырёхполюсника, схема которого приведена на рис. 5.1.

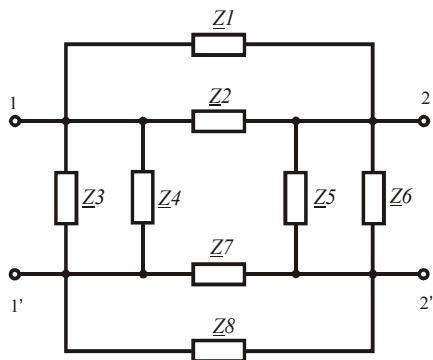


Рис. 5.1

Введём в листинг решения исходные данные.

$$\begin{aligned} \text{ORIGIN} &:= 1 & Z1 &:= 5 + j \cdot 25 & Z2 &:= 4 - j \cdot 30 & Z3 &:= 50 + j \cdot 40 & Z4 &:= 60 - j \cdot 70 \\ Z5 &:= 80 + j \cdot 55 & Z6 &:= 75 - j \cdot 60 & Z7 &:= 6 + j \cdot 20 & Z8 &:= 7 - j \cdot 30 \end{aligned}$$

Выполним опыт холостого хода со стороны вторичных зажимов, подключив к первичным зажимам источник ЭДС. Определим соответствующие токи и напряжения.

$$\begin{aligned} U1 &:= 100 & Z12 &:= (Z1^{-1} + Z2^{-1})^{-1} & Z34 &:= (Z3^{-1} + Z4^{-1})^{-1} \\ Z56 &:= (Z5^{-1} + Z6^{-1})^{-1} & Z78 &:= (Z7^{-1} + Z8^{-1})^{-1} \\ Zx &:= [Z34^{-1} + (Z12 + Z56 + Z78)^{-1}]^{-1} & I1x &:= \frac{U1}{Zx} & I1x &= 2.491 - 0.334j \\ I2x &:= I1x \cdot \frac{Z34}{Z12 + Z34 + Z56 + Z78} & U2x &:= I2x \cdot Z56 \end{aligned}$$

Выполним опыт короткого замыкания со стороны вторичных зажимов, подключив к первичным зажимам источник ЭДС. Определим соответствующие токи и напряжения.

$$Zk := [Z34^{-1} + (Z12 + Z78)^{-1}]^{-1} \quad I1k := \frac{U1}{Zk} \quad I2k := I1k \cdot \frac{Z34}{Z12 + Z34 + Z78}$$

Определим первичные коэффициенты \underline{A} -формы и покажем соответствующую матрицу коэффициентов.

$$A_{1,1} := \frac{U1}{U2x} \quad A_{2,1} := \frac{I1x}{U2x} \quad A_{1,2} := \frac{U1}{I2k} \quad A_{2,2} := \frac{I1k}{I2k}$$

$$A = \begin{pmatrix} 2.63 + 0.965j & 100.249 + 54.009j \\ 0.069 + 0.015j & 3.012 + 0.887j \end{pmatrix}$$

Найденные первичные коэффициенты позволяют с помощью известных выражений найти вторичные коэффициенты: согласованные или характеристические сопротивления со стороны первичных и вторичных зажимов и постоянную передачи.

$$Z_{1c} := \sqrt{\frac{A_{1,1} \cdot A_{1,2}}{A_{2,1} \cdot A_{2,2}}} = 37.436 + 6.445j \quad Z_{2c} := \sqrt{\frac{A_{2,2} \cdot A_{1,2}}{A_{2,1} \cdot A_{1,1}}} = 42.35 + 4.482j$$

$$G := \ln(\sqrt{A_{2,2} \cdot A_{1,1}} + \sqrt{A_{1,2} \cdot A_{2,1}}) = 1.757 + 0.337j$$

Используя первичные коэффициенты и известные выражения, определим параметры элементов Т-образной неуравновешенной схемы замещения (рис. 5.2) рассматриваемого четырёхполюсника.

$$Z_{1t} := \frac{A_{1,1} - 1}{A_{2,1}} \quad Z_{2t} := \frac{A_{2,2} - 1}{A_{2,1}} \quad Z_{3t} := \frac{1}{A_{2,1}}$$

$$Z_{1t} = 25.572 + 8.365j \quad Z_{2t} = 30.64 + 6.118j \quad Z_{3t} = 13.87 - 3.076j$$

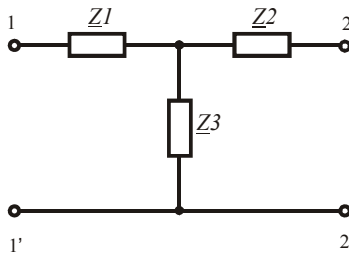


Рис. 5.2

Пример 5.2. По заданным параметрам элементов П-образной неуравновешенной схемы замещения пассивного четырёхполюсника (рис. 5.3) необходимо найти первичные коэффициенты \underline{A} -формы уравнений, вторичные коэффициенты и преобразовать \underline{A} -матрицу коэффициентов в \underline{Z} -матрицу.

Введём в листинг решения исходные данные и определим первичные коэффициенты.

$$Z_{1p} := 2 - j \cdot 5 \quad Z_{2p} := 40 + j \cdot 35 \quad Z_{3p} := 50 + j \cdot 25$$

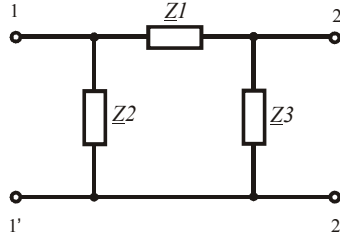


Рис. 5.3

$$A_{1,1} := \frac{Z3p + Z1p}{Z3p} \quad A_{1,2} := Z1p \quad A_{2,1} := \frac{Z1p + Z2p + Z3p}{Z3p \cdot Z2p} \quad A_{2,2} := \frac{Z2p + Z1p}{Z2p}$$

$$A = \begin{pmatrix} 0.992 - 0.096j & 2 - 5j \\ 0.029 - 0.022j & 0.966 - 0.096j \end{pmatrix}$$

Определим вторичные коэффициенты.

$$Z1c := \sqrt{\frac{A_{1,1} \cdot A_{1,2}}{A_{2,1} \cdot A_{2,2}}} = 11.922 - 3.328j \quad Z2c := \sqrt{\frac{A_{2,2} \cdot A_{1,2}}{A_{2,1} \cdot A_{1,1}}} = 11.609 - 3.268j$$

$$G := \ln(\sqrt{A_{2,2} \cdot A_{1,1}} + \sqrt{A_{1,2} \cdot A_{2,1}}) = 0.281 - 0.343j$$

Перейдём к Z -матрице первичных коэффициентов.

$$Zp := \begin{pmatrix} A_{1,1} & -|A| \\ A_{2,1} & A_{2,1} \\ 1 & -A_{2,2} \\ A_{2,1} & A_{2,1} \end{pmatrix} \quad Zp = \begin{pmatrix} 23.593 + 14.374j & -22.173 - 16.635j \\ 22.173 + 16.635j & -23.018 - 13.957j \end{pmatrix}$$

Пример 5.3. Необходимо по заданным вторичным параметрам пассивного четырёхполюсника получить A -матрицу первичных коэффициентов.

Введём в листинг решения вторичные коэффициенты.

$$Z1c := 20 + j \cdot 10 \quad Z2c := 30 + j \cdot 10 \quad G := 0.8 + j \cdot 0.4$$

Определим A -матрицу первичных коэффициентов.

$$A_{1,1} := \sqrt{\frac{Z1c}{Z2c}} \cdot \cosh(G) \quad A_{1,2} := \sqrt{Z1c \cdot Z2c} \cdot \sinh(G) \quad A_{2,1} := \frac{\sinh(G)}{\sqrt{Z1c \cdot Z2c}}$$

$$A_{2,2} := \sqrt{\frac{Z2c}{Z1c}} \cdot \cosh(G) \quad A = \begin{pmatrix} 1.013 + 0.364j & 14.796 + 21.119j \\ 0.036 + 6.323j \times 10^{-3} & 1.49 + 0.306j \end{pmatrix}$$

5.2. Свёртка четырёхполюсников

При свёртке соединения четырёхполюсников необходимо найти матрицу первичных коэффициентов эквивалентного четырёхполюсника через матрицы коэффициентов сворачиваемых четырёхполюсников.

Рассмотрим примеры свёртки различных соединений четырёхполюсников.

Пример 5.4. Выполним свёртку каскадного соединения двух четырёхполюсников (рис. 5.4). При каскадном соединении используется A-форма уравнений четырёхполюсников. A-матрица первичных коэффициентов эквивалентного четырёхполюсника равна произведению A-матриц сворачиваемых четырёхполюсников.

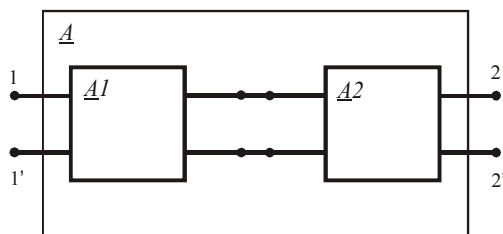


Рис. 5.4

Введём в листинг исходные данные.

`ORIGIN := 1`

$$A1 := \begin{pmatrix} 3 + j \cdot 2 & 100 + j \cdot 50 \\ 0.05 + j \cdot 0.01 & 3.5 + j \cdot 0.8 \end{pmatrix} \quad A2 := \begin{pmatrix} 2 - j \cdot 0.5 & 110 - j \cdot 20 \\ 0.02 - j \cdot 0.01 & 1.5 - j \cdot 1.2 \end{pmatrix}$$

Найдём эквивалентную A-матрицу.

$$A := A1 \cdot A2 \quad A = \begin{pmatrix} 9.5 + 2.5j & 580 + 115j \\ 0.183 - 0.024j & 11.91 - 2.9j \end{pmatrix}$$

Пример 5.5. Выполним свёртку последовательного соединения двух четырёхполюсников (рис. 5.5). При последовательном соединении используется Z-форма уравнений четырёхполюсников. В этом случае Z-матрица первичных коэффициентов эквивалент-

ного четырёхполюсника равна сумме \underline{Z} -матриц сворачиваемых четырёхполюсников.

Получим \underline{Z} -матрицы коэффициентов сворачиваемых четырёхполюсников через \underline{A} -матрицы из предыдущего примера.

$$Z1 := \begin{pmatrix} \frac{A1_{1,1}}{A1_{2,1}} & \frac{-|A1|}{A1_{2,1}} \\ 1 & \frac{-A1_{2,2}}{A1_{2,1}} \end{pmatrix} \quad Z2 := \begin{pmatrix} \frac{A2_{1,1}}{A2_{2,1}} & \frac{-|A2|}{A2_{2,1}} \\ 1 & \frac{-A2_{2,2}}{A2_{2,1}} \end{pmatrix}$$

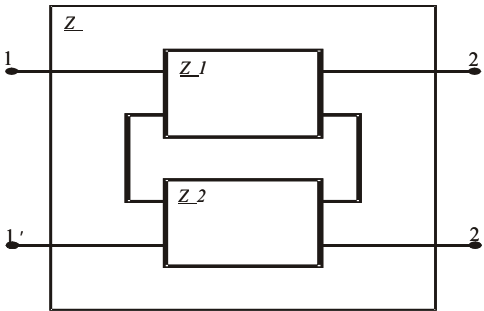


Рис. 5.5

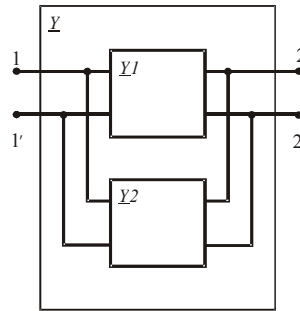


Рис. 5.6

Найдём \underline{Z} -матрицу коэффициентов эквивалентного четырёхполюсника.

$$Z := Z1 + Z2 \quad Z = \begin{pmatrix} 155.385 + 46.923j & -156.308 - 38.538j \\ 59.231 + 16.154j & -154.385 + 16.077j \end{pmatrix}$$

Вернёмся к \underline{A} -матрице коэффициентов эквивалентного четырёхполюсника.

$$Az := \begin{pmatrix} \frac{Z_{1,1}}{Z_{2,1}} & \frac{|Z|}{Z_{2,1}} \\ 1 & \frac{Z_{2,2}}{Z_{2,1}} \end{pmatrix} \quad Az = \begin{pmatrix} 2.643 + 0.071j & -252.857 + 70j \\ 0.016 - 4.286j \times 10^{-3} & -2.357 + 0.914j \end{pmatrix}$$

Пример 5.6. Выполним свёртку параллельного соединения двух четырёхполюсников (рис. 5.6). При параллельном соединении используется \underline{Y} -форма уравнений четырёхполюсников. В этом случае \underline{Y} -матрица первичных коэффициентов эквивалентного четырёхполюсника равна сумме \underline{Y} -матриц сворачиваемых четырёхполюсников.

Получим \underline{Y} -матрицы коэффициентов сворачиваемых четырёх-полюсников через \underline{A} -матрицы из примера 5.4.

$$Y1 := \begin{pmatrix} \frac{A1_{2,2}}{A1_{1,2}} & \frac{-|A1|}{A1_{1,2}} \\ -1 & \frac{A1_{1,1}}{A1_{1,2}} \\ \frac{A1_{1,2}}{A1_{1,2}} & \frac{A1_{1,2}}{A1_{1,2}} \end{pmatrix} \quad Y2 := \begin{pmatrix} \frac{A2_{2,2}}{A2_{1,2}} & \frac{-|A2|}{A2_{1,2}} \\ -1 & \frac{A2_{1,1}}{A2_{1,2}} \\ \frac{A2_{1,2}}{A2_{1,2}} & \frac{A2_{1,2}}{A2_{1,2}} \end{pmatrix}$$

Найдём \underline{Y} -матрицу коэффициентов эквивалентного четырёх-полюсника.

$$Y := Y1 + Y2 \quad Y = \begin{pmatrix} 0.046 - 0.016j & -0.065 - 0.016j \\ -0.017 + 2.4j \times 10^{-3} & 0.05 + 2.8j \times 10^{-3} \end{pmatrix}$$

Вернёмся к \underline{A} -матрице коэффициентов эквивалентного четырёхполюсника.

$$Ay := \begin{pmatrix} \frac{-Y_{2,2}}{Y_{2,1}} & \frac{-1}{Y_{2,1}} \\ |Y| & \frac{-Y_{1,1}}{Y_{2,1}} \\ \frac{Y_{2,1}}{Y_{2,1}} & \frac{Y_{2,1}}{Y_{2,1}} \end{pmatrix} \quad Ay = \begin{pmatrix} 2.917 + 0.583j & 58.333 + 8.333j \\ -0.079 + 0.035j & 2.833 - 0.533j \end{pmatrix}$$

Пример 5.7. Необходимо найти \underline{A} -матрицу первичных коэффициентов активного неавтономного четырёхполюсника (рис. 5.7,а).

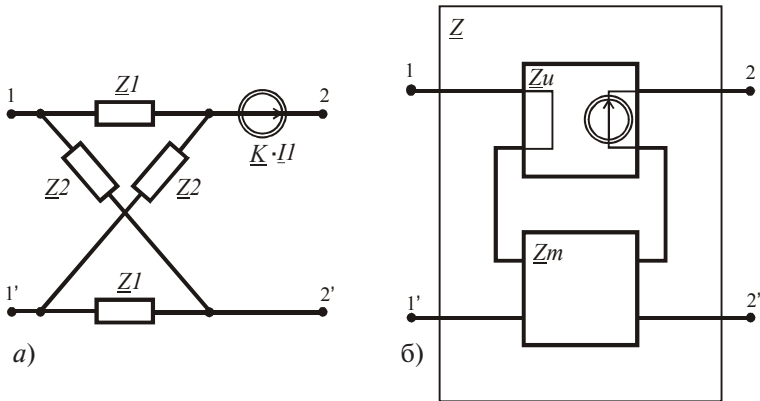


Рис. 5.7

Четырёхполюсник содержит зависимый источник ЭДС, управляемый током. Схему замещения данного четырёхполюсника представим как последовательное соединение двух четырёхполюсников (рис. 5.7,б).

Введём в листинг исходные данные, подготовим \underline{Z} -матрицы сворачиваемых четырёхполюсников и выполним свёртку.

$$Z1 := 5 - j \cdot 20 \quad Z2 := 10 + j \cdot 10 \quad K := 10 - j \cdot 5$$

$$Zm := \begin{pmatrix} \frac{Z1 + Z2}{2} & \frac{Z1 - Z2}{2} \\ \frac{Z2 - Z1}{2} & \frac{Z1 + Z2}{2} \end{pmatrix} \quad Zu := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ K & 0 \end{pmatrix}$$

$$Z := Zm + Zu \quad Z = \begin{pmatrix} 7.5 - 5j & -2.5 - 15j \\ 12.5 + 10j & 7.5 - 5j \end{pmatrix}$$

Вернёмся к \underline{A} -матрице коэффициентов эквивалентного четырёхполюсника.

$$Az := \begin{pmatrix} \frac{Z_{1,1}}{Z_{2,1}} & \frac{|Z|}{Z_{2,1}} \\ \frac{1}{Z_{2,1}} & \frac{Z_{2,2}}{Z_{2,1}} \end{pmatrix} \quad Az = \begin{pmatrix} 0.171 - 0.537j & 1.098 + 10.122j \\ 0.049 - 0.039j & 0.171 - 0.537j \end{pmatrix}$$

5.3. Взаимные преобразования форм уравнений четырёхполюсников

При анализе четырёхполюсников необходимо пользоваться известными преобразованиями и выражениями, которых достаточно много. В этом случае надо создать библиотеку необходимых выражений и поместить её в скрытую область. Например, ниже приведены взаимные преобразования матриц первичных коэффициентов разных форм.

$$Ay := \begin{pmatrix} \frac{-Y_{2,2}}{Y_{2,1}} & \frac{1}{Y_{2,1}} \\ \frac{-|Y|}{Y_{2,1}} & \frac{Y_{1,1}}{Y_{2,1}} \end{pmatrix} \quad Az := \begin{pmatrix} \frac{Z_{1,1}}{Z_{2,1}} & \frac{-|Z|}{Z_{2,1}} \\ \frac{1}{Z_{2,1}} & \frac{-Z_{2,2}}{Z_{2,1}} \end{pmatrix} \quad Ah := \begin{pmatrix} \frac{-|H|}{H_{2,1}} & \frac{H_{1,1}}{H_{2,1}} \\ \frac{H_{2,2}}{H_{2,1}} & \frac{1}{H_{2,1}} \end{pmatrix} \quad Ag := \begin{pmatrix} \frac{1}{G_{2,1}} & \frac{-G_{2,2}}{G_{2,1}} \\ \frac{G_{1,1}}{G_{2,1}} & \frac{-|G|}{G_{2,1}} \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
 Ha &:= \begin{pmatrix} \frac{A_{1,2}}{A_{2,2}} & \frac{|A|}{A_{2,2}} \\ \frac{1}{A_{2,2}} & \frac{-A_{2,1}}{A_{2,2}} \end{pmatrix} & Hy &:= \begin{pmatrix} \frac{1}{Y_{1,1}} & \frac{-Y_{1,2}}{Y_{1,1}} \\ \frac{Y_{2,1}}{Y_{1,1}} & \frac{|Y|}{Y_{1,1}} \end{pmatrix} & Hz &:= \begin{pmatrix} \frac{|Z|}{Z_{2,2}} & \frac{Z_{1,2}}{Z_{2,2}} \\ \frac{-Z_{2,1}}{Z_{2,2}} & \frac{1}{Z_{2,2}} \end{pmatrix} & Hg &:= \begin{pmatrix} \frac{G_{2,2}}{|G|} & \frac{-G_{1,2}}{|G|} \\ \frac{-G_{2,1}}{|G|} & \frac{G_{1,1}}{|G|} \end{pmatrix} \\
 Za &:= \begin{pmatrix} \frac{A_{1,1}}{A_{2,1}} & \frac{-|A|}{A_{2,1}} \\ \frac{1}{A_{2,1}} & \frac{-A_{2,2}}{A_{2,1}} \end{pmatrix} & Zy &:= \begin{pmatrix} \frac{Y_{2,2}}{|Y|} & \frac{-Y_{1,2}}{|Y|} \\ \frac{-Y_{2,1}}{|Y|} & \frac{Y_{1,1}}{|Y|} \end{pmatrix} & Zh &:= \begin{pmatrix} \frac{|H|}{H_{2,2}} & \frac{H_{1,2}}{H_{2,2}} \\ \frac{-H_{2,1}}{H_{2,2}} & \frac{1}{H_{2,2}} \end{pmatrix} & Zg &:= \begin{pmatrix} \frac{1}{G_{1,1}} & \frac{-G_{1,2}}{G_{1,1}} \\ \frac{G_{2,1}}{G_{1,1}} & \frac{|G|}{G_{1,1}} \end{pmatrix} \\
 Ha &:= \begin{pmatrix} \frac{A_{1,2}}{A_{2,2}} & \frac{|A|}{A_{2,2}} \\ \frac{1}{A_{2,2}} & \frac{-A_{2,1}}{A_{2,2}} \end{pmatrix} & Hy &:= \begin{pmatrix} \frac{1}{Y_{1,1}} & \frac{-Y_{1,2}}{Y_{1,1}} \\ \frac{Y_{2,1}}{Y_{1,1}} & \frac{|Y|}{Y_{1,1}} \end{pmatrix} & Hz &:= \begin{pmatrix} \frac{|Z|}{Z_{2,2}} & \frac{Z_{1,2}}{Z_{2,2}} \\ \frac{-Z_{2,1}}{Z_{2,2}} & \frac{1}{Z_{2,2}} \end{pmatrix} & Hg &:= \begin{pmatrix} \frac{G_{2,2}}{|G|} & \frac{-G_{1,2}}{|G|} \\ \frac{-G_{2,1}}{|G|} & \frac{G_{1,1}}{|G|} \end{pmatrix} \\
 Ga &:= \begin{pmatrix} \frac{A_{2,1}}{A_{1,1}} & \frac{|A|}{A_{1,1}} \\ \frac{1}{A_{1,1}} & \frac{-A_{1,2}}{A_{1,1}} \end{pmatrix} & Gy &:= \begin{pmatrix} \frac{|Y|}{Y_{2,2}} & \frac{Y_{1,2}}{Y_{2,2}} \\ \frac{-Y_{2,1}}{Y_{2,2}} & \frac{1}{Y_{2,2}} \end{pmatrix} & Gz &:= \begin{pmatrix} \frac{1}{Z_{1,1}} & \frac{-Z_{1,2}}{Z_{1,1}} \\ \frac{Z_{2,1}}{Z_{1,1}} & \frac{|Z|}{Z_{1,1}} \end{pmatrix} & Gg &:= \begin{pmatrix} \frac{H_{2,2}}{|H|} & \frac{-H_{1,2}}{|H|} \\ \frac{-H_{2,1}}{|H|} & \frac{H_{1,1}}{|H|} \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

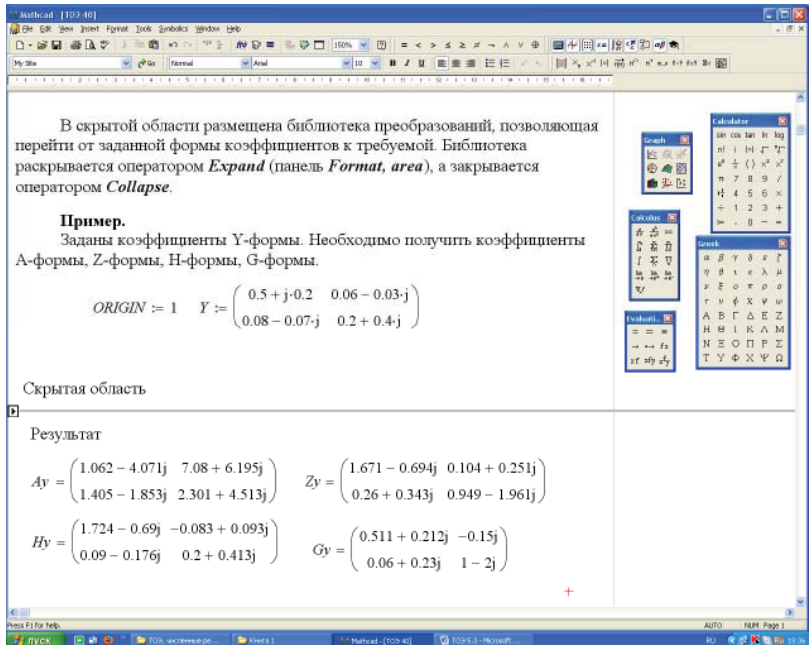


Рис. 5.8

Создадим скрытую область в месте расположения курсора, активизируя оператор *Area* на панели *Insert*. Наберём в выделенной области все необходимые преобразования.

Выделенная область сворачивается в линию двойным щелчком мыши по стрелке на границе области и разворачивается аналогичным образом. Можно использовать и операторы *Expand* и *Collapse* панели *Format, area*.

На рис. 5.8 приведён листинг решения, в котором использована библиотека преобразований в скрытой области.

Исходные данные вводят перед скрытой областью. Результат вычислений получают ниже скрытой области. Использование скрытой области позволяет упростить оформление листинга громоздких задач.

5.4. Частотные характеристики четырёхполюсников и фильтров

При исследовании частотных характеристик четырёхполюсников и фильтров необходимо получить зависимости постоянной передачи и характеристических сопротивлений от частоты источника в режимах произвольных сопротивлений на входе и выходе четырёхполюсника и в согласованном режиме.

Пример 5.8. Необходимо получить частотные характеристики заданного четырёхполюсника (рис. 5.9).

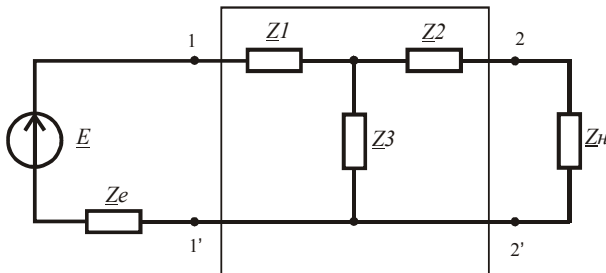


Рис. 5.9

Введём в листинг расчёта характеристик исходные данные и определим зависимости комплексных сопротивлений ветвей от частоты источника.

$$\begin{aligned} \omega &:= 0, 10..400000 & E &:= 100 \\ Z_e(\omega) &:= 5 + j \cdot \omega \cdot 0.0001 & Z_n(\omega) &:= 20 + j \cdot \omega \cdot 0.0002 & L1 &:= 0.001 & L2 &:= 0.002 \\ C &:= 50 \cdot 10^{-9} & Z1(\omega) &:= 2 + j \cdot \omega \cdot L1 & Z2(\omega) &:= 2 + j \cdot \omega \cdot L2 & Z3(\omega) &:= 60 - j \cdot \frac{1}{\omega \cdot C} \end{aligned}$$

Определим зависимости токов и напряжений на входе и выходе четырёхполюсника от частоты источника.

$$\begin{aligned} I1(\omega) &:= \frac{E}{Z1(\omega) + Z_e(\omega) + \frac{Z3(\omega) \cdot (Z2(\omega) + Z_n(\omega))}{Z3(\omega) + Z2(\omega) + Z_n(\omega)}} & U1(\omega) &:= E - I1(\omega) \cdot Z_e(\omega) \\ I2(\omega) &:= I1(\omega) \cdot \frac{Z3(\omega)}{Z2(\omega) + Z3(\omega) + Z_n(\omega)} & U2(\omega) &:= I2(\omega) \cdot Z_n(\omega) \end{aligned}$$

Определим зависимости вещественной и мнимой части постоянной передачи от частоты источника.

$$G(\omega) := 0.5 \cdot \ln \left(\frac{U1(\omega) \cdot I1(\omega)}{U2(\omega) \cdot I2(\omega)} \right) \quad A(\omega) := \text{Re}(G(\omega)) \quad B(\omega) := \text{Im}(G(\omega))$$

Построим полученные зависимости (рис. 5.10 и 5.11).
оим полученные зависимости (рис. 5.10 и 5.11).

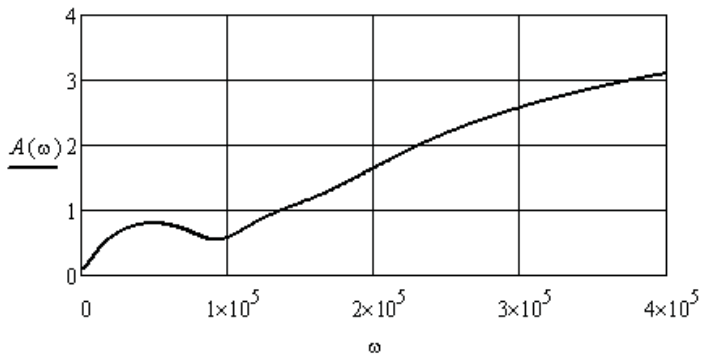


Рис. 5.10

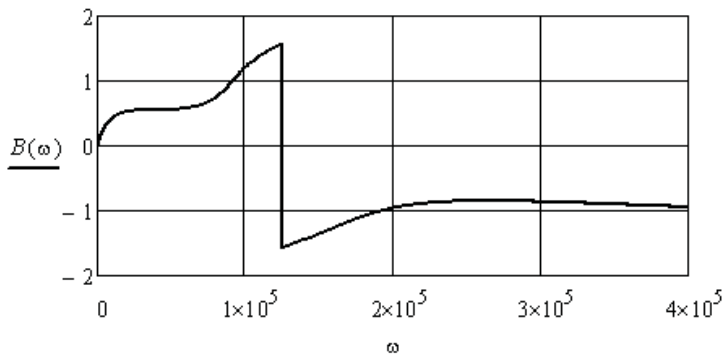


Рис. 5.11

Определим зависимости первичных коэффициентов А-формы уравнений заданного четырёхполюсника от частоты источника.

$$A11(\omega) := \frac{Z1(\omega) + Z3(\omega)}{Z3(\omega)} \quad A12(\omega) := Z1(\omega) + Z2(\omega) + \frac{Z1(\omega) \cdot Z2(\omega)}{Z3(\omega)}$$

$$A21(\omega) := \frac{1}{Z3(\omega)} \quad A22(\omega) := \frac{Z2(\omega) + Z3(\omega)}{Z3(\omega)}$$

Определим зависимости характеристических сопротивлений данного четырёхполюсника от частоты и построим эти зависимости (рис. 5.12 и 5.13).

$$Z1c(\omega) := \sqrt{\frac{A11(\omega) \cdot A12(\omega)}{A21(\omega) \cdot A22(\omega)}} \quad Z2c(\omega) := \sqrt{\frac{A22(\omega) \cdot A12(\omega)}{A21(\omega) \cdot A11(\omega)}}$$

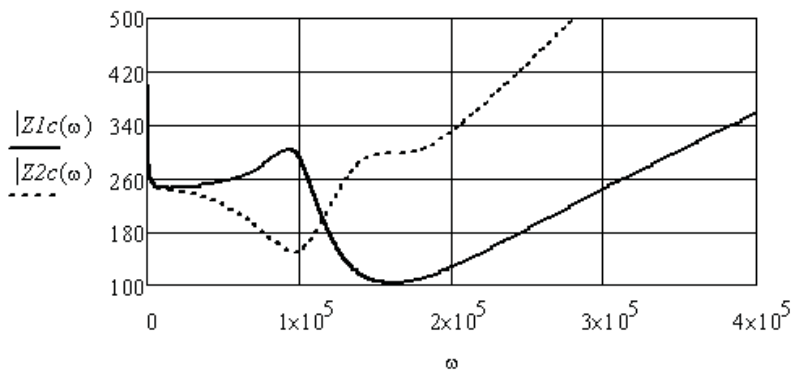


Рис. 5.12

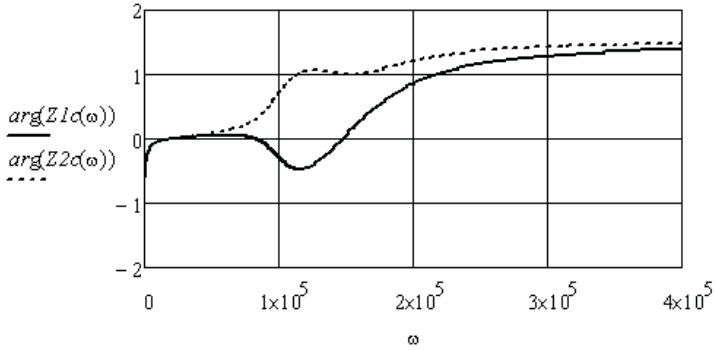


Рис. 5.13

Определим постоянную передачи для случая согласования четырёхполюсника по входу и выходу в заданном частотном диапазоне. Построим зависимости вещественной и мнимой части постоянной передачи (рис. 5.14 и 5.15).

$$G1(\omega) := \ln(\sqrt{A11(\omega) \cdot A22(\omega)} + \sqrt{A12(\omega) \cdot A21(\omega)})$$

$$A1(\omega) := \operatorname{Re}(G1(\omega)) \quad B1(\omega) := \operatorname{Im}(G1(\omega))$$

Видно, что в согласованном режиме характеристики четырёхполюсника стали более гладкими. Однако параметры согласованного сопротивления источника и согласованной нагрузки существенно отличаются от заданных параметров.

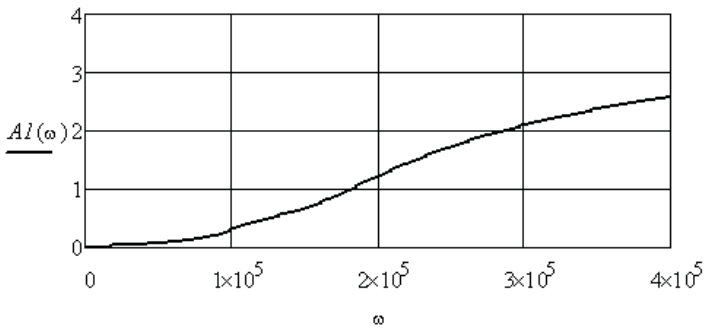


Рис. 5.14

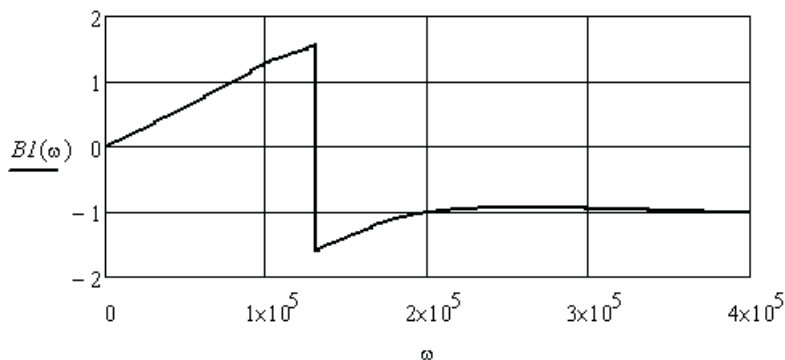


Рис. 5.15

Пример 5.9. Необходимо выполнить исследование частотных характеристик полосного фильтра постоянной K , который выполнен по Т-образной неуравновешенной схеме (рис. 5.16). В процессе исследования надо оценить влияние активного сопротивления используемых индуктивностей, влияние сопротивления источника и сопротивления нагрузки на частотные характеристики фильтра. Активные сопротивления индуктивностей на схеме не изображены.

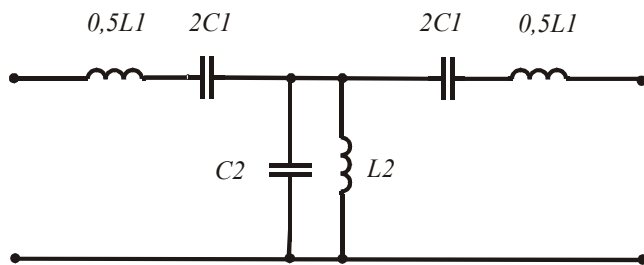


Рис. 5.16

Заданы границы полосы пропускания $\omega_1 = 20$ и $\omega_2 = 80$. Используя выражения $\omega_1 \omega_2 = \omega_0^2$ и $\omega_{1,2} = \omega_0 (\sqrt{m^2 + 1} \mp m)$, найдём среднюю частоту полосы пропускания фильтра и коэффициент m . Внесём их в листинг решения.

$$\omega l := 20 \quad \omega 2 := 80 \quad \omega 0 := \sqrt{\omega l \cdot \omega 2} = 40$$

$$m := \text{root}\left(\omega 0 \cdot \sqrt{m^2 + 1} - \omega 0 \cdot m - \omega l, m, 0, 1\right) = 0.75$$

Используя условие $L_1 C_1 = L_2 C_2$ и задавшись величиной C_1 , найдём параметры элементов фильтра. Кроме того, зададимся минимальными активными сопротивлениями индуктивностей.

$$C1 := 10^{-4} \quad L1 := (\omega 0^2 \cdot C1)^{-1} = 6.25 \quad L2 := L1 \cdot m^2 = 3.516$$

$$C2 := (\omega 0^2 \cdot L2)^{-1} = 1.778 \times 10^{-4} \quad r1 := 1.0 \quad r2 := 1.0$$

Запишем выражения для продольного сопротивления и поперечной проводимости Т-образной схемы в зависимости от частоты.

$$Z1(\omega) := r1 + j \cdot \left(\omega \cdot L1 - \frac{1}{\omega \cdot C1} \right) \quad Y2(\omega) := \left(\frac{1}{r2 + j \cdot \omega \cdot L2} \right) + j \cdot \omega \cdot C2$$

Найдём входные сопротивления фильтра со стороны источника в режимах короткого замыкания и холостого хода со стороны нагрузки. Так как схема фильтра симметричная, то согласованные сопротивления со стороны входа и выхода будут одинаковыми. Запишем выражение для согласованного сопротивления в зависимости от частоты.

$$Zk(\omega) := 0.5 \cdot Z1(\omega) + \left[Y2(\omega) + (0.5 \cdot Z1(\omega))^{-1} \right]^{-1}$$

$$Zx(\omega) := 0.5 \cdot Z1(\omega) + (Y2(\omega))^{-1} \quad Zc(\omega) := \sqrt{Zk(\omega) \cdot Zx(\omega)}$$

На рис. 5.17 показаны зависимости модуля согласованного сопротивления и его аргумента от частоты в области полосы пропускания фильтра. Видно, что согласованное сопротивление является активным в полосе пропускания, но его величина изменяется от нуля почти до двухсот. Увеличение активных сопротивлений индуктивностей искажает данные характеристики. Например, если $r1$ и $r2$ увеличить до 10 Ом, то зависимости примут вид, изображённый на рис. 5.18.

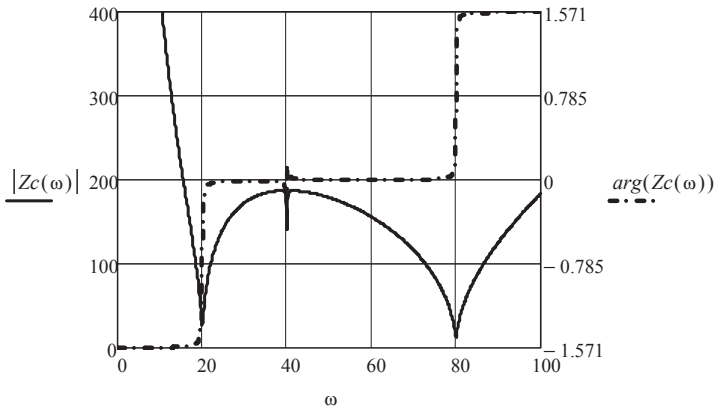


Рис. 5.17

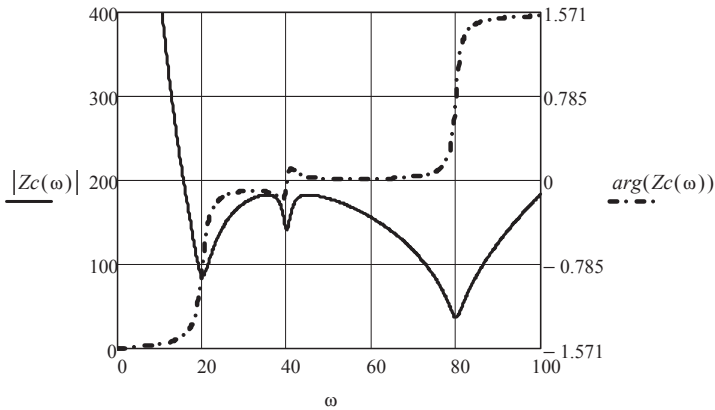


Рис. 5.18

Исследуем поведение постоянной передачи фильтра при вариации активных сопротивлений индуктивностей и сопротивлений источника и нагрузки. Зададимся произвольной величиной ЭДС источника, сопротивлениями источника и нагрузки и найдём вещественную и мнимую составляющие постоянной передачи (см. пример 5.8).

$$E := 100 \quad Ru := 10 \quad Rn := 100$$

$$II(\omega) := \frac{E}{Ru + 0.5 \cdot ZI(\omega) + [Y2(\omega) + (0.5 \cdot ZI(\omega) + Rn)^{-1}]^{-1}}$$

$$U1(\omega) := E - II(\omega) \cdot Ru$$

$$I2(\omega) := II(\omega) \cdot \frac{(Y2(\omega))^{-1}}{(Y2(\omega))^{-1} + 0.5 \cdot ZI(\omega) + Rn}$$

$$U2(\omega) := I2(\omega) \cdot Rn$$

$$G(\omega) := 0.5 \cdot \ln \left(\frac{U1(\omega) \cdot II(\omega)}{U2(\omega) \cdot I2(\omega)} \right)$$

$$A(\omega) := \operatorname{Re}(G(\omega))$$

$$B(\omega) := \operatorname{Im}(G(\omega))$$

При минимальных активных сопротивлениях индуктивностей и выбранных сопротивлениях источника и нагрузки получим зависимости, приведённые на рис. 5.19.

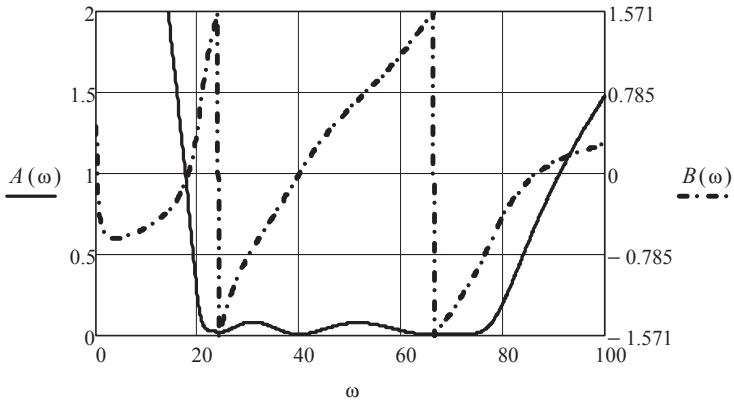


Рис. 5.19

Исследования показывают, что сопротивление источника практически не влияет на форму приведённых зависимостей. Если $r1$ и $r2$ увеличить до 10 Ом, то зависимости примут вид, изображённый на рис. 5.20. Видно, что затухание вне полосы ухудшается. Если дополнительно уменьшить сопротивление нагрузки до 10 Ом, то зависимости примут вид, приведённый на рис. 5.21. В этом случае увеличивается затухание в полосе пропускания. Таким образом, можно сделать вывод: характеристики исследуемого фильтра практически не зависят от

сопротивления источника ЭДС, а зависят от активных потерь в реактивных элементах фильтра и от сопротивления нагрузки.

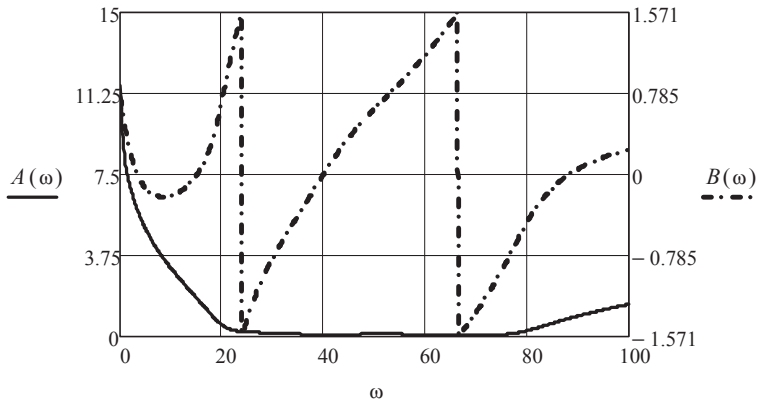


Рис. 5.20

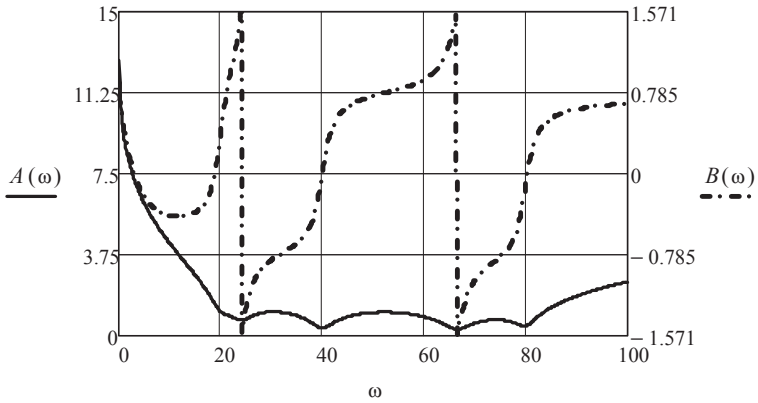


Рис. 5.21

Выполненные исследования подтверждают известный факт о низкой эффективности фильтров постоянной K . Эффективность можно повысить, используя каскадное соединение нескольких фильтров или вводя звенья фильтров постоянной M .

Контрольные вопросы

1. Какие коэффициенты называются первичными, а какие вторичными?
2. Перечислите основные соединения четырёхполюсников.
3. Как осуществляется свёртка четырёхполюсников?
4. Дайте определение понятию «согласованная нагрузка».
5. Перечислите схемы замещения четырёхполюсников.
6. Как экспериментально определить значения первичных коэффициентов?
7. Какая связь между первичными и вторичными коэффициентами и параметрами элементов схем замещения четырёхполюсников?
8. Зачем нужны частотные характеристики четырёхполюсников?
9. Поясните термин «активные неавтономные четырёхполюсники».
10. Как сформировать скрытую область в листинге численного решения сложной задачи?
11. Что показывает вещественная часть постоянной передачи четырёхполюсника?
12. Что показывает мнимая часть постоянной передачи четырёхполюсника?
13. Какие частоты подавляет фильтр низких частот?
14. Какие частоты подавляет фильтр высоких частот?
15. Какие частоты пропускает полосный фильтр?
16. Какие частоты подавляет заграждающий фильтр?
17. Как влияют активные потери в элементах фильтра на его частотные характеристики?
18. Чем отличается отрицательная обратная связь четырёхполюсника от положительной обратной связи?

6. АНАЛИЗ НЕЛИНЕЙНЫХ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ С ПОМОЩЬЮ ХАРАКТЕРИСТИК ДЛЯ МГНОВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ ТОКОВ И НАПРЯЖЕНИЙ

Наличие в электрической цепи нелинейных элементов при любых источниках периодических токов или ЭДС приводит к искажению формы токов. Сложность анализа нелинейных цепей связана с невозможностью использования метода наложения и других методов, в основе которых лежит принцип суперпозиции. Состояние нелинейной электрической цепи в установившемся режиме определяется только системой уравнений, составленной по законам Кирхгофа [2; 3; 7; 9].

В задачах, где целью анализа является определение формы тока и его спектрального состава, используют нелинейные характеристики, связывающие мгновенные значения тока и напряжения, или другие соответствующие параметры. При этом цепи считаются безинерционными.

6.1. Анализ нелинейных электрических цепей с источниками синусоидального тока или синусоидальной ЭДС

Целью анализа является определение степени искажения формы тока или напряжения по сравнению с синусоидой, а также определение параметров эквивалентной синусоиды тока или напряжения. Это позволит далее перенести решение на комплексную плоскость.

Пример 6.1. Необходимо найти форму тока через активный нелинейный двухполюсник при заданном синусоидальном напряжении на нём и известной его вольтамперной характеристике (ВАХ). Вид ВАХ приведён на рис. 6.1.

Введём в листинг решения аналитическую аппроксимацию ВАХ и описание синусоидального напряжения.

$$id(ud) := 0.1 \cdot ud + 6 \cdot 10^{-5} \cdot ud^3 \quad \omega := 400 \cdot \pi \quad \psi := 0.5 \quad u(t) := 100 \sin(\omega \cdot t + \psi)$$

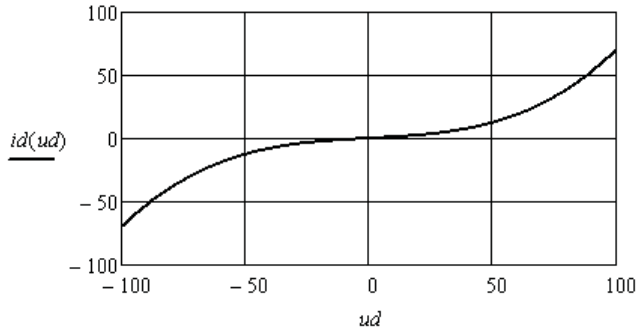


Рис. 6.1

Получим аналитическую аппроксимацию формы тока.

$$i(t) := 0.1 \cdot u(t) + 6 \cdot 10^{-5} \cdot (u(t))^3$$

Построим кривые тока и напряжения (рис. 6.2).

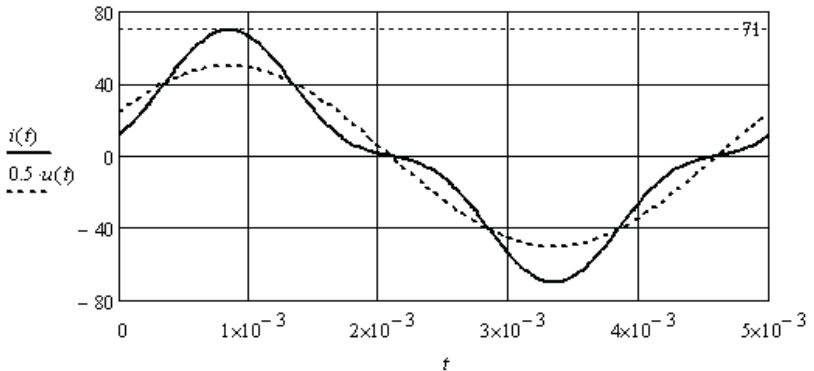


Рис. 6.2

Выполним аппроксимацию периодической кривой тока рядом Фурье, задавшись шагом для определения отсчётов тока.

$$T := 5 \cdot 10^{-3} \quad \Delta T := 5 \cdot \frac{10^{-3}}{256} \quad k := 0..255 \quad I_k := i(\Delta T \cdot k) \quad C := FFT(I)$$

$C^T =$	1	2	3	4
0	13.184-24.134j	0	-7.481+0.531j	...

Видно, что ряд Фурье содержит только первую и третью гармонические составляющие. Запишем аналитическое выражение для тока.

$$I_m := 2 \cdot |C_1| \quad \Phi_1 := \arg(C_1) \quad I_3 := 2 \cdot |C_3| \quad \Phi_3 := \arg(C_3)$$

$$ic(t) := I_m \cos(400 \cdot \pi \cdot t + \Phi_1) + I_3 \cos(1200 \cdot \pi \cdot t + \Phi_3)$$

$$is(t) := I_m \sin\left(400 \cdot \pi \cdot t + \Phi_1 + \frac{\pi}{2}\right) + I_3 \sin\left(1200 \cdot \pi \cdot t + \Phi_3 + \frac{\pi}{2}\right)$$

Определим коэффициенты, характеризующие несинусоидальность тока.

$$I := \sqrt{\frac{I_m^2 + I_3^2}{2}} \quad II := \frac{I_m}{\sqrt{2}} \quad I_{с.м} := T^{-1} \cdot \int_0^T |i(t)| dt = 31.834$$

$$Kg := \frac{I_3}{I_m} = 0.273 \quad K\phi := \frac{I}{I_{с.м}} = 1.266 \quad Ku := \frac{II}{I} = 0.965 \quad Ka := \frac{71}{I} = 1.761$$

Пример 6.2. Необходимо найти форму напряжения на нелинейном индуктивном двухполюснике с известной петлёй гистерезиса сердечника катушки (рис. 6.3) при синусоидальном токе.

Характеристика двухполюсника определяется частным циклом перемагничивания сердечника, который описывается выражениями:

$$\psi_1(i) := 0.1 \cdot \operatorname{atan}(i - 0.5) + 0.002 \quad \psi_2(i) := 0.1 \cdot \operatorname{atan}(i + 0.5) - 0.002$$

Определим зависимость потокосцепления от времени при заданном синусоидальном токе (рис. 6.4).

$$\omega := 400 \cdot \pi \quad I_m := 5 \quad \phi_i := 1 \quad i(t) := I_m \cdot \sin(\omega \cdot t + \phi_i)$$

$$\psi_1(t) := 0.1 \cdot \operatorname{atan}(i(t) - 0.5) + 0.002 \quad \psi_2(t) := 0.1 \cdot \operatorname{atan}(i(t) + 0.5) - 0.002$$

$$\psi(t) := \operatorname{if}(\cos(\omega \cdot t + 1) > 0, \psi_1(t), \psi_2(t))$$

Найдём спектр зависимости потокосцепления от времени (рис. 6.5).

$$T := \frac{2 \cdot \pi}{\omega} \quad \Delta T := \frac{T}{256} \quad k := 0..255 \quad \Psi_k := \psi(\Delta T \cdot k) \quad C := \operatorname{FFT}(\Psi)$$

$$n := 0..10 \quad \Psi_{m_n} := 2 \cdot |C_n| \quad \phi_n := \operatorname{if}(\Psi_{m_n} > 0.0001, \arg(C_n), 0)$$

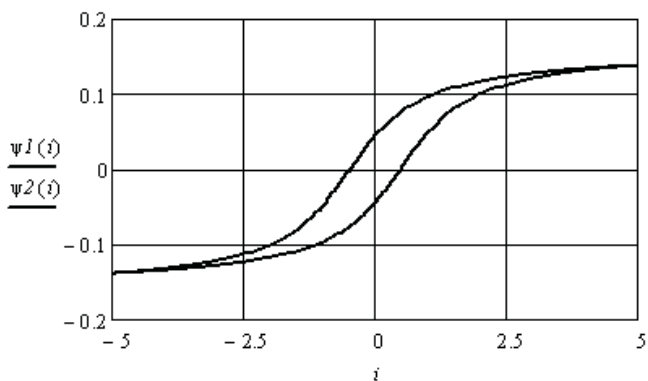


Рис. 6.3

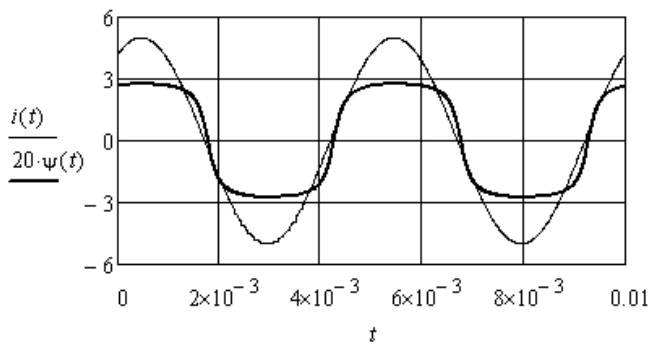


Рис. 6.4

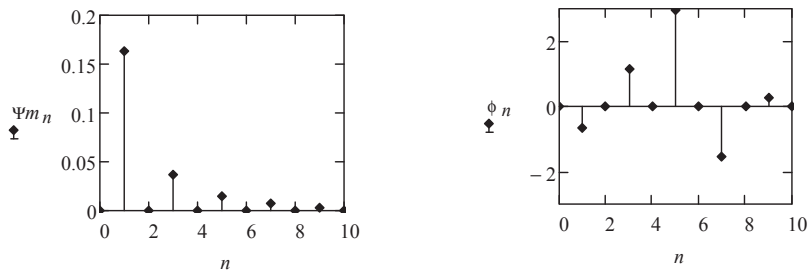


Рис. 6.5

Для аппроксимации зависимости ограничим ряд Фурье седьмой гармонической составляющей и запишем ряд через синусоидальные функции.

$$\psi_a(t) := \sum_{n=1}^7 \left(\Psi m_n \cdot \sin\left(n \cdot \omega \cdot t + \phi_n + \frac{\pi}{2}\right) \right)$$

Напряжение на индуктивном двухполюснике равно производной от потокосцепления. Получим следующее выражение.

$$u(t) := \sum_{n=1}^7 (n \cdot \omega \cdot \Psi m_n \cdot \sin(n \cdot \omega \cdot t + \phi_n + \pi))$$

Соответствующие кривые приведены на рис. 6.6.

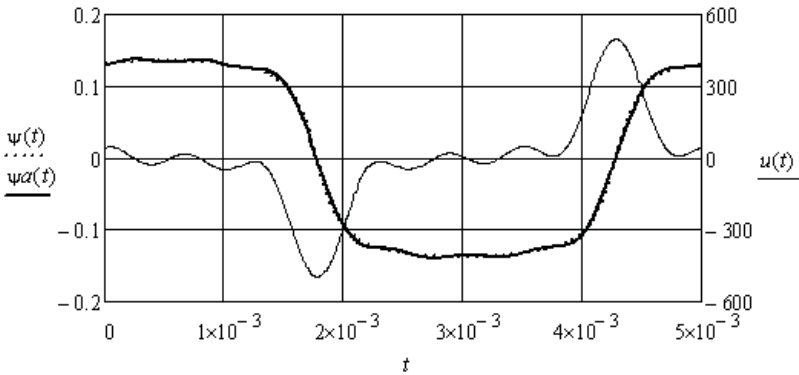


Рис. 6.6

Пример 6.3. Необходимо решить предыдущую задачу при условии, что площадь петли гистерезиса равна нулю (рис. 6.7). Зависимость потокосцепления от тока описывается выражением:

$$\psi(i) := 0.1 \cdot atan(i)$$

Зададимся синусоидальным током через нелинейную индуктивность и определим зависимость потокосцепления от времени.

$$\omega := 400 \cdot \pi \quad Im := 5 \quad \phi_i := 1 \quad i(t) := Im \cdot \sin(\omega \cdot t + \phi_i) \quad \psi(t) := 0.1 \cdot atan(i(t))$$

Найдём спектр зависимости потокосцепления от времени.

$$T := \frac{2 \cdot \pi}{\omega} \quad \Delta T := \frac{T}{256} \quad k := 0..255 \quad \Psi_k := \psi(\Delta T \cdot k) \quad C := FFT(\Psi)$$

$$n := 0..10 \quad \Psi m_n := 2 \cdot |C_n| \quad \phi_n := if(\Psi m_n > 0.0001, arg(C_n), 0)$$

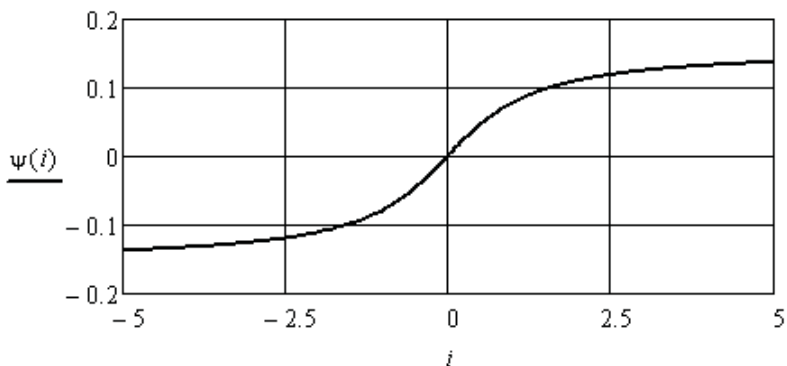


Рис. 6.7

Как и в предыдущем примере, выполним аппроксимацию зависимостей потокосцепления и напряжения от времени семью гармониками ряда Фурье.

$$\psi a(t) := \sum_{n=1}^7 (\Psi m_n \cdot \cos(n \cdot \omega \cdot t + \phi_n)) \quad u(t) := \sum_{n=1}^7 (n \cdot \omega \cdot \Psi m_n \cdot \sin(n \cdot \omega \cdot t + \phi_n + \pi))$$

На рис. 6.8 приведены полученные зависимости.

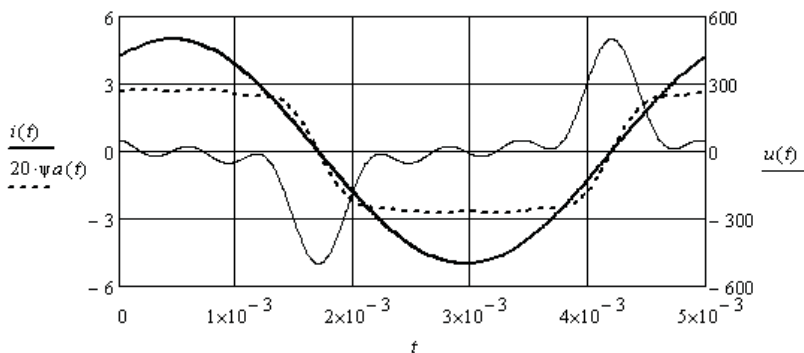


Рис. 6.8

Пример 6.4. Определим влияние асимметрии характеристики нелинейного двухполюсника на состав спектра напряжения или тока при синусоидальном источнике.

Характеристика активного нелинейного двухполюсника аппроксимируется следующей зависимостью (рис. 6.9):

$$i(u) := \left(\frac{0.1 \cdot u}{10 - u} \right)$$

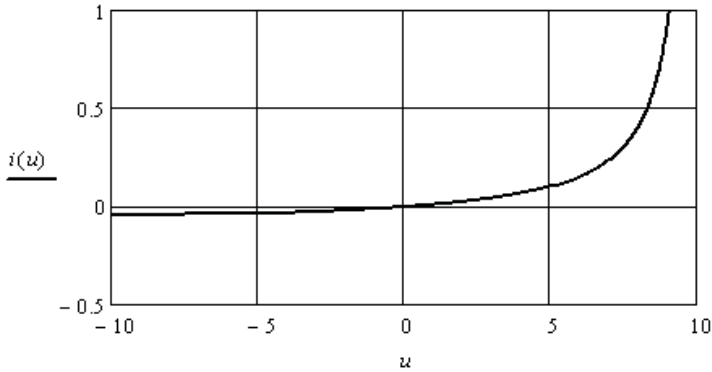


Рис. 6.9

Зададимся синусоидальным напряжением на двухполюснике и определим форму тока (рис. 6.10).

$$Um := 9 \quad \omega := 400 \cdot \pi \quad \phi u := -1 \quad u(t) := Um \cdot \sin(\omega \cdot t + \phi u) \quad i(t) := \frac{0.1 \cdot u(t)}{10 - u(t)}$$

Найдём спектр тока (рис. 6.11).

$$T := 5 \cdot 10^{-3} \quad \Delta T := 5 \cdot \frac{10^{-3}}{256} \quad k := 0..255 \quad I_k := i(\Delta T \cdot k) \quad C := FFT(I)$$

$$n := 0..16 \quad Im_n := if(n > 0, 2 \cdot |C_n|, C_n) \quad \phi_n := if(Im_n > 0.0001, arg(C_n), 0)$$

Выполним аппроксимацию тока девятью гармоническими составляющими и постоянной составляющей ряда Фурье.

$$ia(t) := Im_0 + \sum_{k=1}^9 (Im_k \cdot \cos(k \cdot \omega \cdot t + \phi_k))$$

Выразим решение через синусоиды.

$$ia(t) := Im_0 + \sum_{k=1}^9 \left(Im_k \cdot \sin\left(k \cdot \omega \cdot t + \phi_k + \frac{\pi}{2}\right) \right)$$

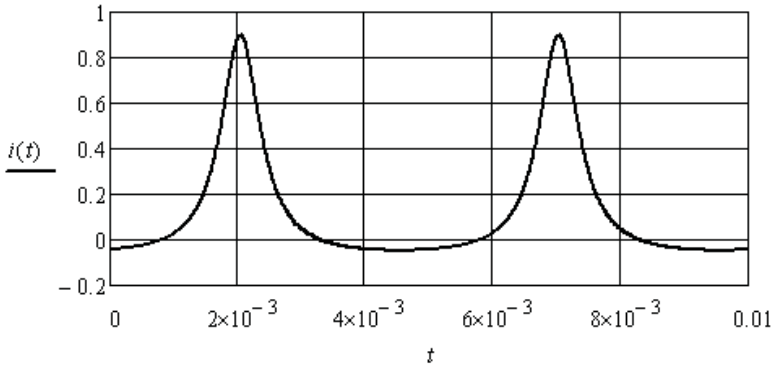


Рис. 6.10

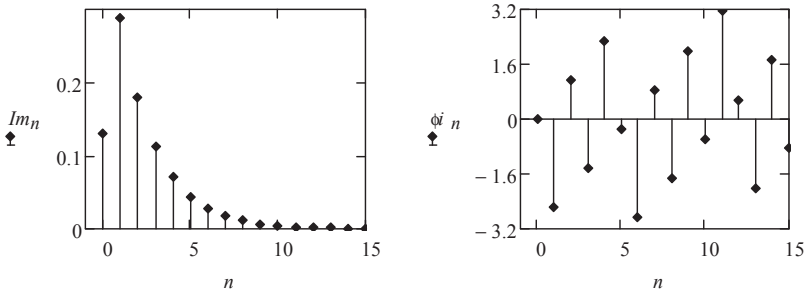


Рис. 6.11

Видно (рис. 6.11), что кроме гармонических составляющих в спектре тока появилась постоянная составляющая, которой не было в напряжении.

Пример 6.5. Определим форму тока через активный нелинейный двухполюсник с характеристикой, симметричной относительно оси токов, если к нему приложено синусоидальное напряжение.

Характеристика активного нелинейного двухполюсника аппроксимируется следующей зависимостью (рис. 6.12):

$$i(u) := 0.001 \cdot u^2$$

Зададимся синусоидальным напряжением на двухполюснике и определим форму тока.

$$Um := 20 \quad \omega := 400 \cdot \pi \quad \varphi u := 0 \quad u(t) := Um \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi u) \quad i(t) := 0.001 \cdot u(t)^2$$

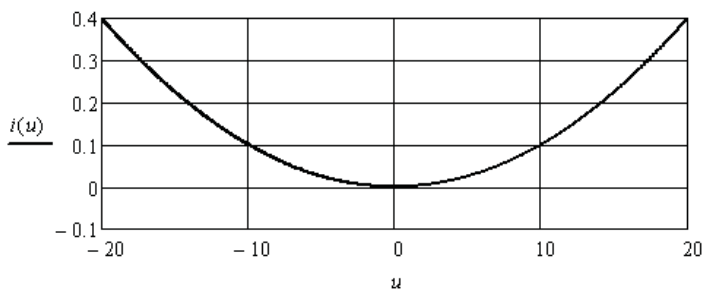


Рис. 6.12

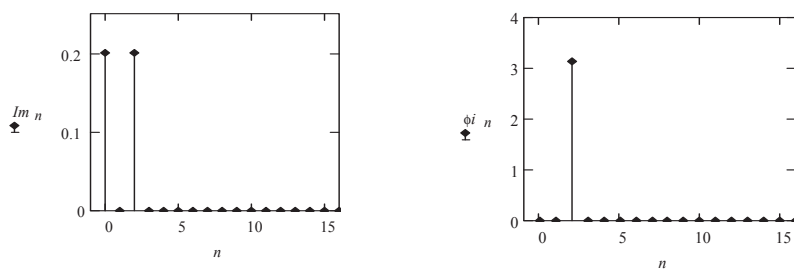


Рис. 6.13

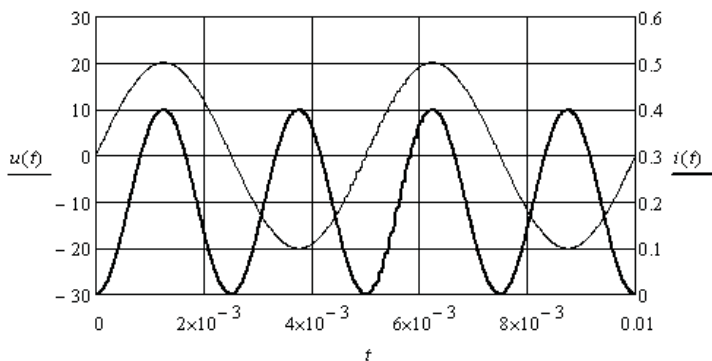


Рис. 6.14

Найдём спектр тока.

$$T := \frac{2 \cdot \pi}{\omega} \quad \Delta T := \frac{T}{256} \quad k := 0..255 \quad I_k := i(\Delta T \cdot k) \quad C := FFT(I)$$

$$n := 0..16 \quad Im_n := if(n > 0, 2 \cdot |C_n|, C_n) \quad \phi_n := if(Im_n > 0.0001, arg(C_n), 0)$$

Спектр тока (рис. 6.13) содержит только постоянную составляющую и одну гармоническую составляющую с удвоенной частотой напряжения. Это хорошо видно на рис. 6.14.

6.2. Анализ нелинейных электрических цепей с источниками несинусоидального тока или несинусоидальной ЭДС

Несинусоидальные источники периодической ЭДС возбуждают в элементах электрической цепи несинусоидальные периодические токи, а несинусоидальные источники периодического тока создают несинусоидальные периодические падения напряжения. Если элементы линейные, то спектры ЭДС и тока, или тока и падения напряжения имеют одинаковый состав гармонических составляющих. Если элементы нелинейные, то в спектре появляются новые гармонические составляющие. Это приводит к расширению спектра и к возникновению нелинейных эффектов, которые в одних случаях нежелательны, а в других дают новый результат, который используется в технике.

Рассмотрим некоторые примеры.

Пример 6.6. Найдём спектр тока через активный нелинейный двухполюсник с симметричной относительно начала координат ВАХ (рис. 6.15), которая аппроксимируется следующим выражением:

$$i(u) := 0.2 \cdot u - 5 \cdot 10^{-4} \cdot u^3$$

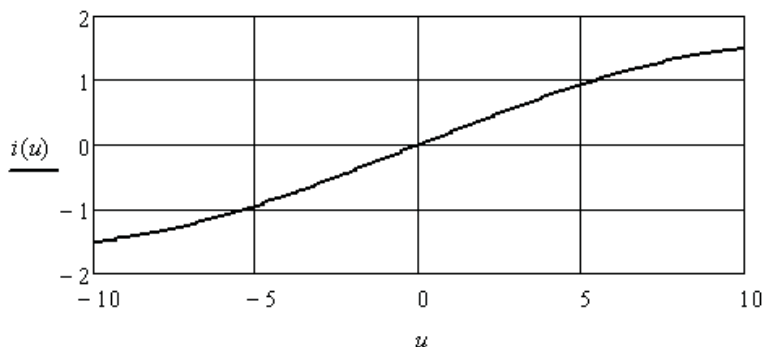


Рис. 6.15

К двухполюснику приложена несинусоидальная периодическая ЭДС, которая аппроксимируется четырьмя гармоническими составляющими.

$$u(t) := 3 \cdot \sin(1000 \cdot t + 0.2) + 3 \cdot \sin(2000 \cdot t - 0.8) + 3 \cdot \sin(3000 \cdot t + 0.3) + 3 \cdot \sin(4000 \cdot t)$$

Сравним формы ЭДС и тока (рис. 6.16).

$$i(t) := 0.2 \cdot u(t) - 5 \cdot 10^{-4} \cdot u(t)^3$$

Найдём спектр тока (рис. 6.17).

$$T := \frac{2 \cdot \pi}{1000} \quad \Delta T := \frac{T}{256} \quad k := 0..255 \quad I_k := i(\Delta T \cdot k) \quad C := FFT(I)$$

$$n := 0..25 \quad Im_n := if(n > 0, 2 \cdot |C_n|, C_n) \quad \phi_n := if(Im_n > 0.0001, arg(C_n), 0)$$

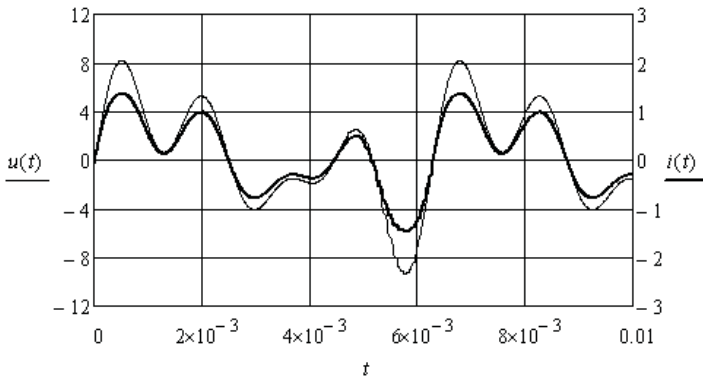


Рис. 6.16

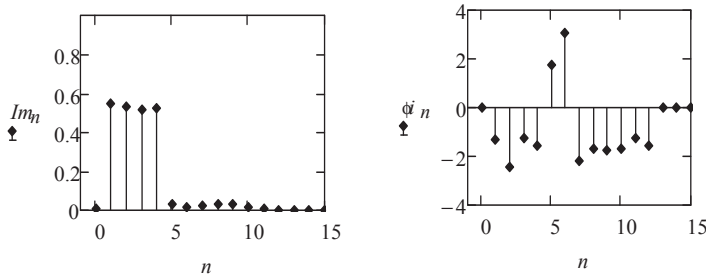


Рис. 6.17

Видно, что состав спектра увеличился до 12 гармонических составляющих. Это связано с характером нелинейности двухполюсника. В общем случае в спектре тока могут появиться гармонические составляющие с кратными частотами, разностными и суммарными частотами гармонических составляющих спектра ЭДС.

Пример 6.7. Найдём спектр тока через активный нелинейный двухполюсник с несимметричной ВАХ (рис. 6.18), которая аппроксимируется следующим выражением:

$$i(u) := 0.1 \cdot \ln(u + 1)$$

К двухполюснику приложена несинусоидальная периодическая ЭДС, которая аппроксимируется постоянной составляющей и четырьмя гармоническими составляющими.

$$u(t) := 10 + 3 \cdot \sin(1000 \cdot t + 0.2) + 3 \cdot \sin(2000 \cdot t - 0.8) + 3 \cdot \sin(3000 \cdot t + 0.3) + 3 \cdot \sin(4000 \cdot t)$$

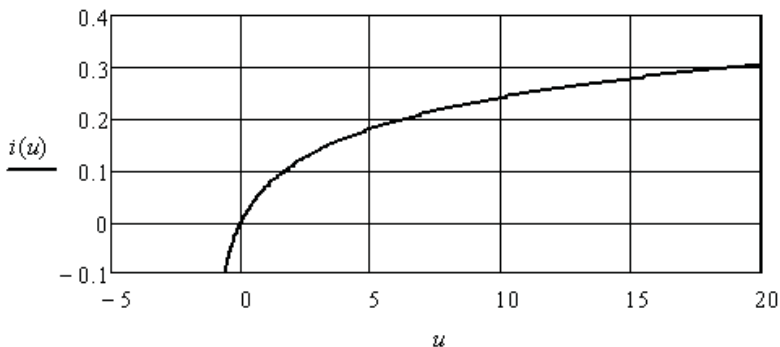


Рис. 6.18

Сравним формы ЭДС и тока (рис. 6.19) и найдём спектр тока (рис. 6.20).

$$i(t) := 0.1 \cdot \ln(u(t) + 1)$$

$$T := \frac{2 \cdot \pi}{1000} \quad \Delta T := \frac{T}{256} \quad k := 0..255 \quad I_k := i(\Delta T \cdot k) \quad C := FFT(I)$$

$$n := 0..25 \quad Im_n := if(n > 0, 2 \cdot |C_n|, C_n) \quad \phi_n := if(Im_n > 0.0001, arg(C_n), 0)$$

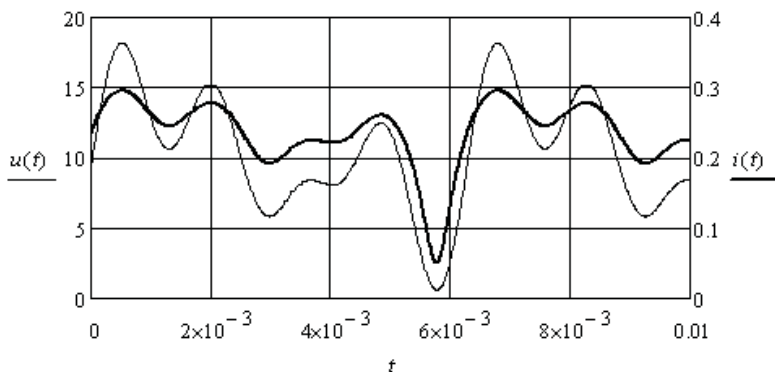


Рис. 6.19

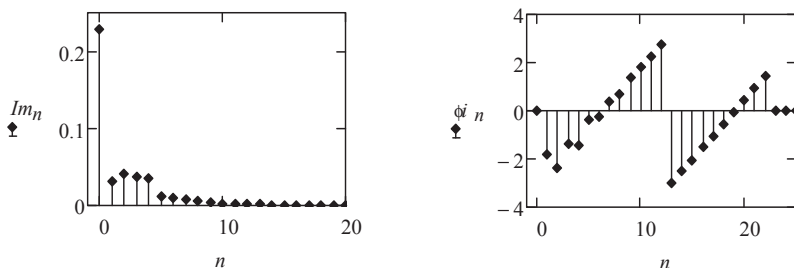


Рис. 6.20

Видно, что состав спектра тока увеличился до 22 гармонических составляющих.

Пример 6.8. Рассмотрим пример амплитудной модуляции. Этот нелинейный эффект возникает при взаимодействии двух гармонических составляющих с разной частотой на нелинейном двухполюснике.

Характеристика нелинейного двухполюсника аппроксимируется следующим выражением:

$$i(u) := 0.001 \cdot u^2$$

К двухполюснику приложено несинусоидальное периодическое напряжение:

$$u(t) := 10 + 4.5 \cdot \sin(1000 \cdot t + 0.2) + 4 \cdot \sin(8000 \cdot t + 0.1)$$

Определим спектр тока (рис. 6.21) и сравним формы напряжения и тока (рис. 6.22).

$$i(t) := 0.001 \cdot u(t)^2$$

$$T := \frac{2 \cdot \pi}{1000} \quad \Delta T := \frac{T}{256} \quad k := 0..255 \quad I_k := i(\Delta T \cdot k) \quad C := FFT(I)$$

$$n := 0..25 \quad Im_n := if(n > 0, 2 \cdot |C_n|, C_n) \quad \phi_n := if(Im_n > 0.0001, arg(C_n), 0)$$

Выделим из спектра тока 7, 8 и 9 гармонические составляющие, например с помощью полосного фильтра.

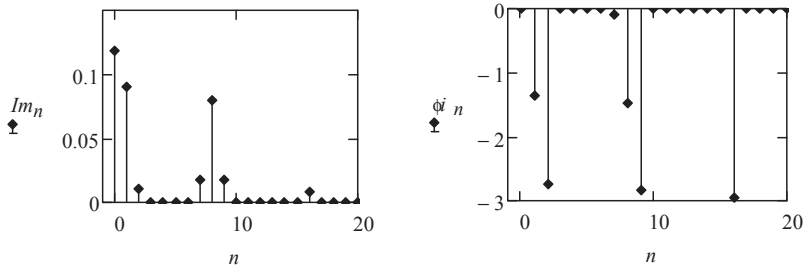


Рис. 6.21

Рассмотрим форму тока после фильтрации (рис. 6.23).

$$ip(t) := \sum_{n=7}^9 (Im_n \cdot \cos(n \cdot 1000 \cdot t + \phi_n))$$

Форма полученного тока соответствует форме тока с амплитудной модуляцией. При амплитудной модуляции амплитуда составляющей с высшей частотой является линейной функцией амплитуды составляющей с низшей частотой.

Таким образом, на участке нелинейного двухполюсника с квадратичной ВАХ произошло преобразование суммы двух гармонических напряжений в ток, модулированный по амплитуде.

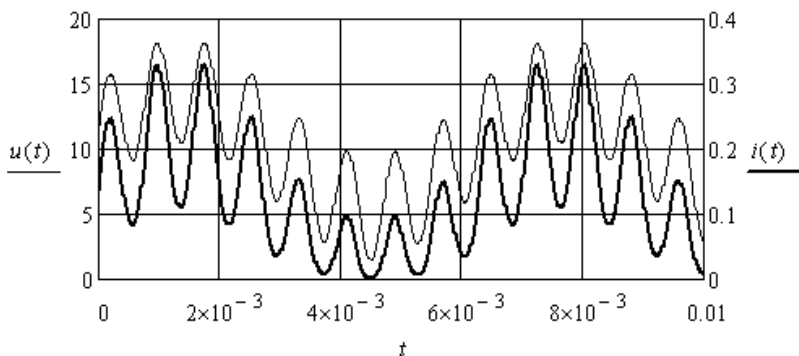


Рис. 6.22

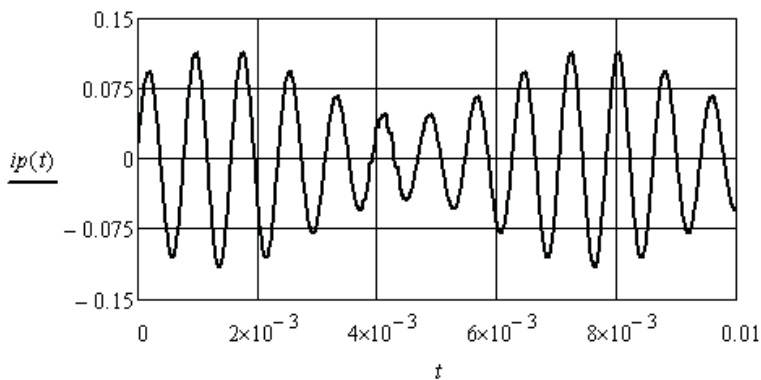


Рис. 6.23

Пример 6.9. Рассмотрим пример линейного переноса спектра из одной области частот в другую. Этот нелинейный эффект возникает при взаимодействии модулированного по амплитуде колебания одной частоты с гармоническим колебанием другой частоты в нелинейном двухполюснике.

Характеристика нелинейного двухполюсника аппроксимируется следующим выражением:

$$i(u) := 0.001 \cdot u^2$$

Напряжение на нелинейном двухполюснике равно сумме двух ЭДС (рис. 6.24).

$$eI(t) := 1.8 \cdot \cos(9000 \cdot t - 2.84) + 8 \cdot \cos(8000 \cdot t - 1.47) + 1.8 \cdot \cos(7000 \cdot t - 0.1)$$

$$e2(t) := 20 + 10 \cdot \cos(20000 \cdot t) \quad u(t) := eI(t) + e2(t)$$

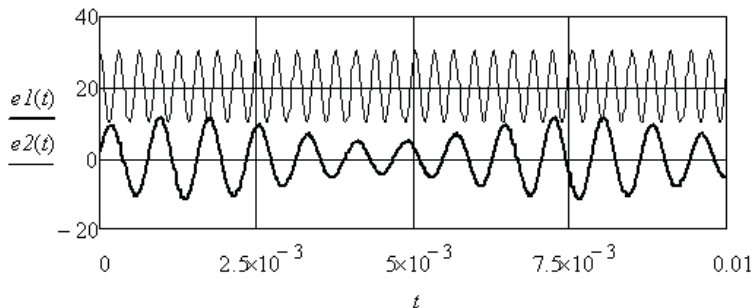


Рис. 6.24

Определим спектр тока (рис. 6.25).

$$Im(t) := 0.001 \cdot u(t)^2$$

$$T := \frac{2 \cdot \pi}{1000} \quad \Delta T := \frac{T}{256} \quad k := 0..255 \quad Im_k := Im(\Delta T \cdot k) \quad C := FFT(Im)$$

$$n := 0..35 \quad I_n := if(n > 0, 2 \cdot |C_n|, C_n) \quad \phi_n := if(I_n > 0.0001, arg(C_n), 0)$$

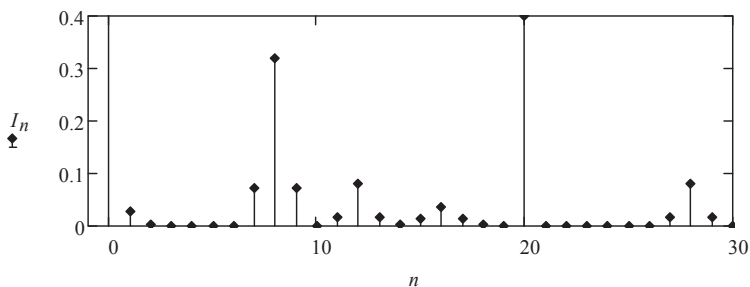


Рис. 6.25

Частота основной гармонической составляющей спектра тока равна частоте модулирующего колебания $\omega = 1000$. Составляющие 7, 8 и 9 определяют спектр амплитудно-модулированной первой ЭДС. Составляющие 15, 16 и 17 являются результатом удвоения

частоты модулированного колебания. Составляющие 11, 12 и 13 являются результатом вычитания частот колебания второй ЭДС и модулированного колебания первой ЭДС. Составляющие 27, 28 и 29 являются результатом сложения частот колебания второй ЭДС и модулированного колебания первой ЭДС.

Выделим указанные группы спектра тока, например, с помощью соответствующих фильтров, и рассмотрим полученную форму токов (рис. 6.26, 6.27, 6.28).

$$i1(t) := \sum_{n=11}^{13} (I_n \cdot \cos(n \cdot 1000 \cdot t + \phi_n)) \quad i2(t) := \sum_{n=15}^{17} (I_n \cdot \cos(n \cdot 1000 \cdot t + \phi_n))$$

$$i3(t) := \sum_{n=27}^{29} (I_n \cdot \cos(n \cdot 1000 \cdot t + \phi_n)) \quad i(t) := I_1 \cdot \cos(1000 \cdot t + \phi_1)$$

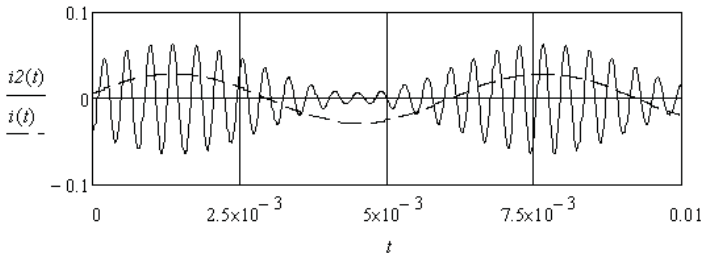


Рис. 6.26

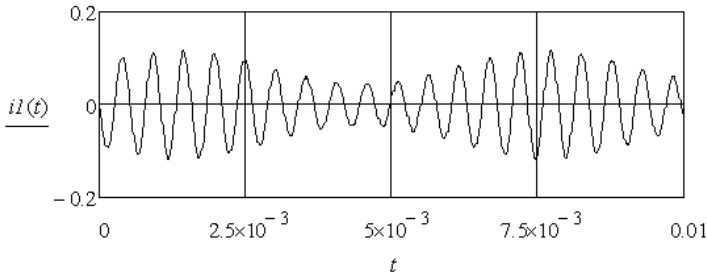


Рис. 6.27

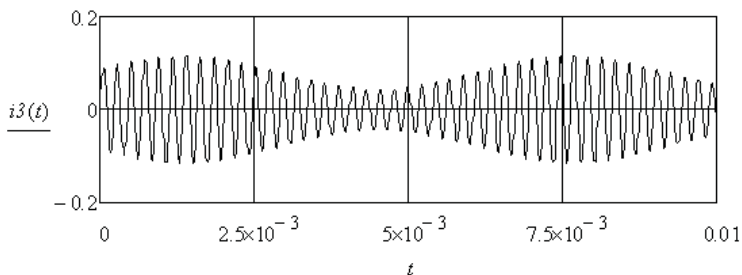


Рис. 6.28

Во всех трёх случаях переноса спектра модулированного колебания частота огибающей остаётся неизменной. Данный эффект широко используется в радиотехнике и электронике.

Контрольные вопросы

1. Как получить зависимости, связывающие мгновенные значения напряжения и тока нелинейных элементов электрической цепи?
2. В каких случаях используют ВАХ для мгновенных значений?
3. Чем отличаются линейные и нелинейные искажения формы токов и напряжений?
4. К чему приводит асимметрия ВАХ нелинейных элементов?
5. Какой элемент в схеме замещения катушки с ферромагнитным сердечником определяется площадью петли гистерезиса сердечника?
6. Перечислите нелинейные эффекты, имеющие место в электрических цепях.
7. Как влияют индуктивности и ёмкости на форму тока при одинаковом приложенном несинусоидальном напряжении?
8. Как возникает амплитудная модуляция тока или напряжения?
9. Что необходимо для переноса спектра амплитудно-модулированного колебания?
10. Какие условия использования оператора *FFT*?
11. Какие коэффициенты используют для сравнительной оценки несинусоидальности напряжения и тока?
12. Как изменяется форма напряжения или тока при ограничении спектра?

7. АНАЛИЗ НЕЛИНЕЙНЫХ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ХАРАКТЕРИСТИК ДЛЯ ДЕЙСТВУЮЩИХ ЗНАЧЕНИЙ ЭКВИВАЛЕНТНЫХ СИНУСОИД ТОКОВ И НАПРЯЖЕНИЙ

Использование ВАХ для действующих значений эквивалентных синусоид позволяет существенно упростить исследование силовых электрических цепей, содержащих нелинейные элементы, которые незначительно искажают форму синусоид токов и напряжений. Предварительно необходимо получить данные характеристики либо экспериментально, либо с помощью ВАХ для мгновенных значений напряжений и токов. После этого анализ нелинейной электрической цепи переносится на комплексную плоскость [2; 3; 7; 9].

7.1. Определение характеристик для действующих значений эквивалентных синусоид с помощью ВАХ для мгновенных значений напряжений и токов

Параметры эквивалентных синусоид находят из условия неизменности действующих значений напряжений и токов и неизменности потребляемой нелинейным элементом активной мощности. В общем случае необходимо получить зависимости действующего значения напряжения и фазового сдвига от действующего значения тока – вольтамперные характеристики и фазоамперные характеристики ($ВАХ_{д}$ и $ФАХ_{д}$). Это можно сделать с помощью ВАХ для мгновенных значений и соответствующей компьютерной программы.

Пример 7.1. Необходимо определить $ВАХ_{д}$ активного нелинейного элемента (резистора), характеристика которого для мгновенных значений (рис. 7.1) аппроксимируется выражением

$$u(i) := 20 \cdot i + 80 \cdot i^3 - 8 \cdot i^5$$

Для определения координат одной точки характеристики необходимо задаться действующим значением синусоидального тока, выбрать частоту из области рабочих частот, определить форму напряжения на элементе, выполнить аппроксимацию напряжения ограниченным рядом Фурье и определить действующее значение эквивалентной синусоиды напряжения.

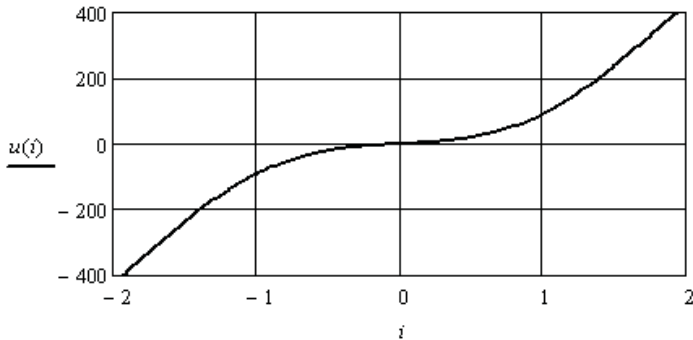


Рис. 7.1

Выберем параметры синусоиды тока и запишем выражение для напряжения.

$$\omega := 400 \cdot \pi \quad I := 0.7 \quad i(t) := I \cdot \sqrt{2} \sin(\omega \cdot t)$$

$$u(t) := 20 \cdot i(t) + 80 \cdot i(t)^3 - 8 \cdot i(t)^5$$

Найдём спектр напряжения.

$$T := 5 \cdot 10^{-3} \quad \Delta T := 5 \cdot \frac{10^{-3}}{256} \quad k := 0..255 \quad U_k := u(\Delta T \cdot k) \quad C := FFT(U)$$

$$n := 0..10 \quad Um_n := 2 \cdot |C_n| \quad \phi_n := if(Um_n > 0.001, arg(C_n), 0)$$

Найдём действующее значение несинусоидального напряжения по пяти гармоническим составляющим и запишем уравнение эквивалентной синусоиды напряжения. Учитывая активный характер сопротивления двухполюсника, сдвиг по фазе между напряжением и током берём равным нулю.

$$U := \sqrt{0.5 \cdot \sum_{n=1}^5 (Um_n)^2} = 53.18 \quad ue(t) := U \cdot \sqrt{2} \cdot \sin(\omega \cdot t)$$

На рис. 7.2 представлены соответствующие зависимости от времени.

Программа вычисления координат всех точек ВАХ_д имеет вид:

```

B :=
|
| T ← 5·10-3
| ΔT ← 5· $\frac{10^{-3}}{256}$ 
| k ← 0..255
| n ← 0..10
| ω ← 400·π
| for p ∈ 1..150
|   | I ← 0.01·p
|   | i(t) ← I·√2 sin(ω·t)
|   | u(t) ← 20·i(t) + 80·i(t)3 - 8·i(t)5
|   | for k ∈ 0..255
|   |   Uk ← u(ΔT · k)
|   | C ← FFT(U)
|   | for n ∈ 0..10
|   |   | Umn ← 2·|Cn|
|   |   | φn ← if(Umn > 0.001, arg(Cn), 0)
|   |   Ap,0 ←  $\sqrt{0.5 \cdot \sum_{n=1}^5 (U_{m_n})^2}$ 
|   |   Ap,1 ← I
|   A

```

Координаты точек сведены в таблицу:

$$B^T =$$

	0	1	2	3	4	5	6
0	0	0.2	0.401	0.603	0.808	1.015	1.226
1	0	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	...

Для дальнейшего использования характеристик выполним их аппроксимацию и интерполяцию.

$$Ue := B^{(0)} \quad Ie := B^{(1)}$$

$$S1 := cspline(Ie, Ue) \quad U(It) := interp(S1, Ie, Ue, It)$$

На рис. 7.3 приведена полученная характеристика.

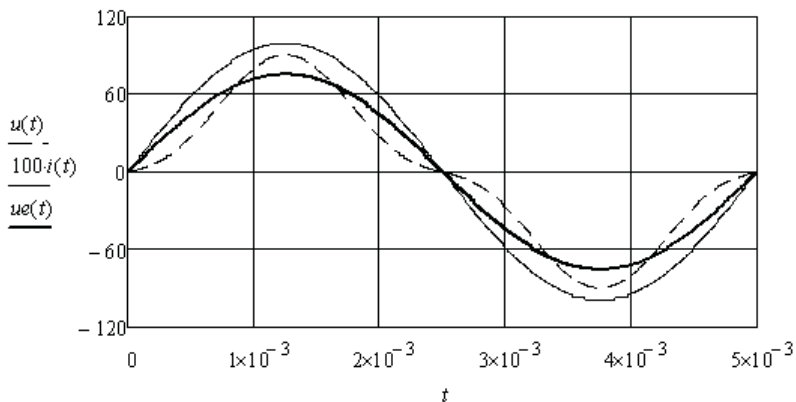


Рис. 7.2

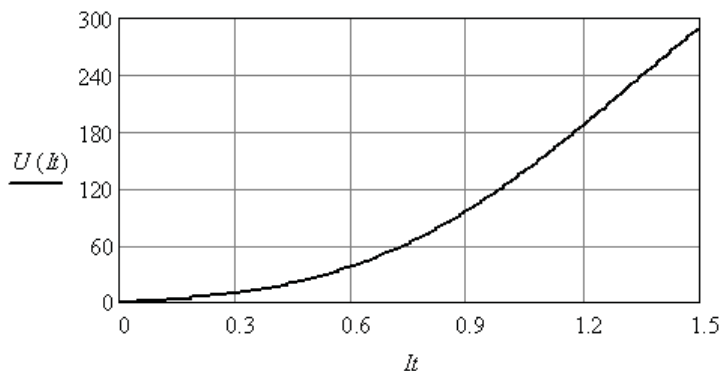


Рис. 7.3

В некоторых случаях требуется обратная зависимость. Найдём её следующим образом:

$$S2 := cspline(Ue, Ie) \quad II(Ut) := interp(S2, Ue, Ie, Ut)$$

Полученная характеристика приведена на рис. 7.4.

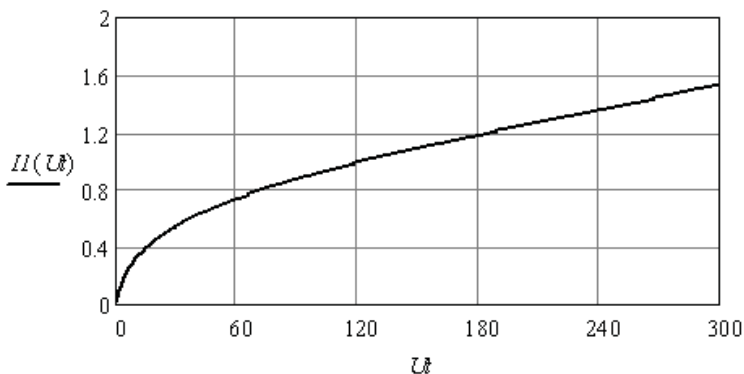


Рис. 7.4

Пример 7.2. Необходимо определить $ВАХ_{д}$ и $ФАХ_{д}$ индуктивного нелинейного элемента, учитывая частные циклы перемагничивания сердечника.

Воспользуемся аппроксимацией частного цикла перемагничивания сердечника, которая приведена в примере 6.2. Покажем вид данных циклов для двух значений амплитуд тока (рис. 7.5).

$$\begin{aligned}
 Im &:= 2 & Im1 &:= 5 & a &:= 0.24 & b &:= 0.0045 & a1 &:= 0.6 & b1 &:= 0.002 \\
 i &:= -5, -4.9..5 & \psi1(i) &:= 0.1 \cdot \text{atan}(i - a) + b & \psi2(i) &:= 0.1 \cdot \text{atan}(i + a) - b \\
 \psi3(i) &:= 0.1 \cdot \text{atan}(i - a1) + b1 & \psi4(i) &:= 0.1 \cdot \text{atan}(i + a1) - b1
 \end{aligned}$$

Подберём зависимости коэффициентов a и b от амплитуды тока таким образом, чтобы при переходе с ветви намагничивания на ветвь размагничивания не было скачка потокосцепления. Получим следующие приближённые выражения.

$$a(Im) := 0.12 \cdot Im \quad b(Im) := 0.008 \cdot (\exp(-0.3 \cdot Im) - \exp(-3 \cdot Im))$$

По аналогии с примером 7.1 составим программу для определения $ВАХ_{д}$ и $ФАХ_{д}$. Добавим в программу вычисление активной мощности, угла сдвига между напряжением и током и модуля сопротивления нелинейной индуктивности от действующего значения тока.

```

B := | T ← 5 · 10-3
      | ΔT ← 5 · 10-3 · 256-1
      | k ← 0..255
      | n ← 0..10
      | ω ← 400 · π
      | for p ∈ 0..12
      | | I ← 0.3 · p
      | | i(t) ← I · √2 · sin(ω · t)
      | | a ← 0.12 · √2 · I
      | | b ← 0.008 · (exp(-0.3 · √2 · I) - exp(-3 · √2 · I))
      | | ψ1(t) ← 0.1 · atan(i(t) - a) + b
      | | ψ2(t) ← 0.1 · atan(i(t) + a) - b
      | | ψ(t) ← if(cos(ω · t) > 0, ψ1(t), ψ2(t))
      | | for k ∈ 0..255
      | | | Ψk ← ψ(ΔT · k)
      | | C ← FFT(Ψ)
      | | for n ∈ 0..10
      | | | Ψmn ← 2 · |Cn|
      | | | φn ← if(Ψmn > 0.0003, arg(Cn), 0)
      | | Ap,0 ← √(0.5 · ∑n=19 [(n · ω · Ψmn)n]2)
      | | P ← I ·  $\frac{\Psi_{m_1} \cdot \omega}{\sqrt{2}}$  · cos(φ1 + π)
      | | Ap,1 ← acos( $\frac{P}{A_{p,0} \cdot I}$ )
      | | Ap,2 ← I
      | | Ap,3 ←  $\frac{A_{p,0}}{I}$ 

```

A

Выполним аппроксимацию и анализ полученных зависимостей (рис. 7.6).

$$\begin{aligned}
 Ue &:= B^{(0)} & \psi e &:= B^{(1)} & Ie &:= B^{(2)} & ze &:= B^{(3)} \\
 S1 &:= cspline(Ie, Ue) & U(I) &:= interp(S1, Ie, Ue, I) \\
 S2 &:= lspline(Ie, \psi e) & \psi(I) &:= interp(S2, Ie, \psi e, I) \\
 S3 &:= lspline(Ie, ze) & z(I) &:= interp(S3, Ie, ze, I)
 \end{aligned}$$

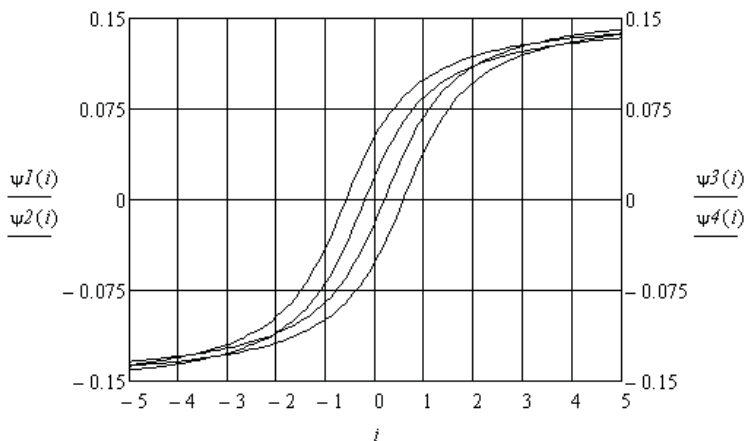


Рис. 7.5

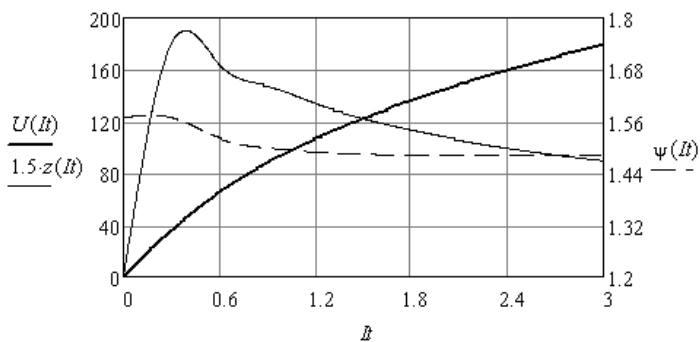


Рис. 7.6

Из полученных результатов видно, что при малых амплитудах токов аппроксимация частных циклов перемагничивания оказывается слишком грубой. Используя теоретические положения, характеристики можно поправить визуально. Для этого скопируем матрицу B в матрицу D и изменим значения сопротивления и фазового сдвига для начальных значений тока.

Выполним аппроксимацию и построим характеристики после коррекции (рис. 7.7).

$$\begin{aligned}
 Ue &:= D^{\langle 0 \rangle} & \psi e &:= D^{\langle 1 \rangle} \\
 Ie &:= D^{\langle 2 \rangle} & ze &:= D^{\langle 3 \rangle} \\
 S1 &:= cspline(Ie, Ue) \\
 U(It) &:= interp(S1, Ie, Ue, It) \\
 S2 &:= lspline(Ie, \psi e) \\
 \psi(It) &:= interp(S2, Ie, \psi e, It) \\
 S3 &:= lspline(Ie, ze) \\
 z(It) &:= interp(S3, Ie, ze, It)
 \end{aligned}
 \quad D := \begin{pmatrix}
 0 & 1.571 & 0 & 116 \\
 34.2 & 1.56 & 0.3 & 114 \\
 64.5 & 1.53 & 0.6 & 107.5 \\
 88.481 & 1.5 & 0.9 & 98.312 \\
 106.941 & 1.488 & 1.2 & 89.118 \\
 122.524 & 1.485 & 1.5 & 81.683 \\
 136.151 & 1.482 & 1.8 & 75.64 \\
 148.355 & 1.482 & 2.1 & 70.645 \\
 159.452 & 1.482 & 2.4 & 66.438 \\
 169.642 & 1.483 & 2.7 & 62.83 \\
 179.057 & 1.483 & 3 & 59.686 \\
 187.793 & 1.484 & 3.3 & 56.907 \\
 195.922 & 1.485 & 3.6 & 54.423
 \end{pmatrix}$$

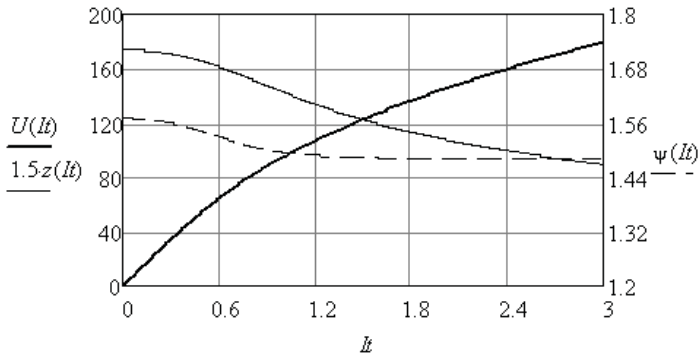


Рис. 7.7

7.2. Свёртка характеристик нелинейных двухполюсников

Использование характеристик для действующих значений эквивалентных синусоид позволяет упростить операцию свёртки нелинейных двухполюсников, соединённых последовательно или параллельно. Свёртка выполняется на основе законов Кирхгофа в комплексной форме.

При последовательном соединении двухполюсников необходимо использовать зависимости $r(I)$, $x(I)$, или характеристики $\underline{U}(I)$ для действующих значений эквивалентных синусоид, и находить эквивалентные зависимости модуля и аргумента от тока. При параллельном соединении двухполюсников необходимо использовать зависимости $r(U)$, $x(U)$, или ампервольтные характеристики $\underline{I}(U)$ для действующих значений эквивалентных синусоид, и находить эквивалентные зависимости модуля и аргумента от напряжения.

Пример 7.3. Необходимо найти характеристики нелинейной RL ветви (рис. 7.8) по характеристикам элементов, которые получены экспериментально и заданы в виде координат отдельных точек.

$$I := (0 \ 0.15 \ 0.3 \ 0.45 \ 0.6 \ 0.75 \ 0.9 \ 1.05 \ 1.2 \ 1.35 \ 1.5 \ 1.65 \ 1.8)^T$$

$$r := (19 \ 21 \ 22.4 \ 24.3 \ 26.2 \ 28.7 \ 31.6 \ 34.5 \ 37.5 \ 41 \ 44.4 \ 47.8 \ 51.7)^T$$

$$x := (31 \ 32 \ 33 \ 34.4 \ 35.8 \ 37.4 \ 39 \ 40.6 \ 42.7 \ 45 \ 47.4 \ 50 \ 53)^T$$

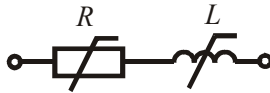


Рис. 7.8

Найдём массивы координат модуля и аргумента комплексного сопротивления эквивалентного нелинейного двухполюсника.

$$z := \sqrt{r^2 + x^2} \quad \phi := \text{atan}\left(\frac{x}{r}\right) \quad Z := \overline{z \cdot e^{j\phi}}$$

$$Z^T =$$

	0	1	2	3	4	5
0	19+31j	21+32j	22.4+33j	24.3+34.4j	26.2+35.8j	...

Выполним аппроксимацию и интерполяцию полученных зависимостей эквивалентного двухполюсника.

$$S := cspline(I, z) \quad z(I) := interp(S, I, z, I)$$

$$SI := cspline(I, \phi) \quad \phi(I) := interp(SI, I, \phi, I)$$

Полученные характеристики приведены на рис. 7.9.

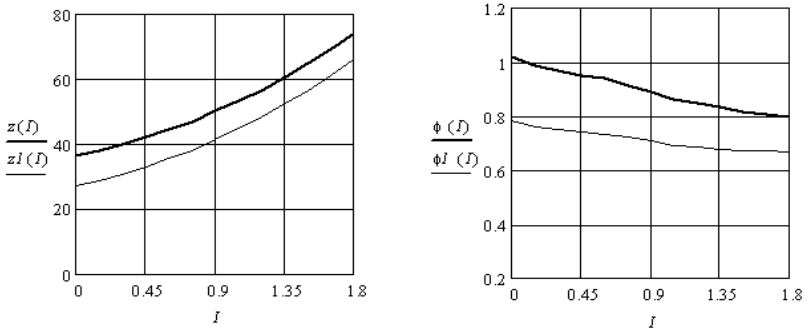


Рис. 7.9

Включим в нелинейную ветвь (рис. 7.8) линейный конденсатор (рис. 7.10) и выполним свёртку.

$$xc := 12 \quad ZI := Z - j \cdot xc \quad zI := |ZI| \quad \phi I := arg(ZI)$$

$$S2 := cspline(I, zI) \quad zI(I) := interp(S2, I, zI, I)$$

$$S3 := cspline(I, \phi I) \quad \phi I(I) := interp(S3, I, \phi I, I)$$



Рис. 7.10

Полученные характеристики также приведены на рис. 7.9.

Пример 7.4. Необходимо найти характеристики параллельного соединения нелинейных элементов R и C (рис. 7.11) по характеристикам элементов, которые получены экспериментально и заданы в виде координат отдельных точек.

$$U := (0 \ 10 \ 20 \ 30 \ 40 \ 50 \ 60 \ 70 \ 80 \ 90 \ 100 \ 110 \ 120)^T$$

$$r := (20 \ 21.4 \ 23.1 \ 24.8 \ 26.9 \ 29.4 \ 32 \ 34.8 \ 37.7 \ 41.2 \ 44.3 \ 47.6 \ 51.5)^T$$

$$x := (30 \ 31 \ 32.1 \ 33.4 \ 34.9 \ 36.2 \ 38 \ 39.6 \ 41.7 \ 44 \ 46.4 \ 49 \ 52)^T$$

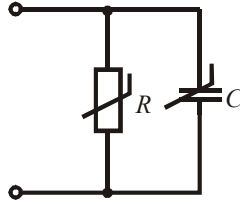


Рис. 7.11

Найдём массивы координат модуля и аргумента комплексного сопротивления эквивалентного двухполюсника и выполним аппроксимацию и интерполяцию полученных зависимостей. Результаты приведены на рис. 7.12.

$$g := (r)^{-1} \quad b := (x)^{-1} \quad y := \sqrt{g^2 + b^2} \quad \psi := \operatorname{atan}\left(\frac{b}{g}\right)$$

$$Y := \overrightarrow{(y \cdot e^{j \cdot \psi})} \quad Z := Y^{-1} \quad z := \overrightarrow{|Z|} \quad \phi := \operatorname{arg}(Z)$$

$$Z^T =$$

	0	1	2	3
0	13.846-9.231i	14.493-10.005i	15.219-10.952i	...

$$S := \operatorname{cspline}(U, z) \quad z(U) := \operatorname{interp}(S, U, z, U)$$

$$SI := \operatorname{cspline}(U, \phi) \quad \phi(U) := \operatorname{interp}(SI, U, \phi, U)$$

При необходимости использования полученных характеристик в других файлах нужно перейти от табличного представления к представлению результатов в матричной форме и объединить результаты в одну матрицу данных. Раскрыв матрицу, нужно копировать её содержание, а затем вставить её в новый файл.

Например, полученные данные представим следующим образом.

$$D := \operatorname{augment}(z(U), \phi(U), U)$$

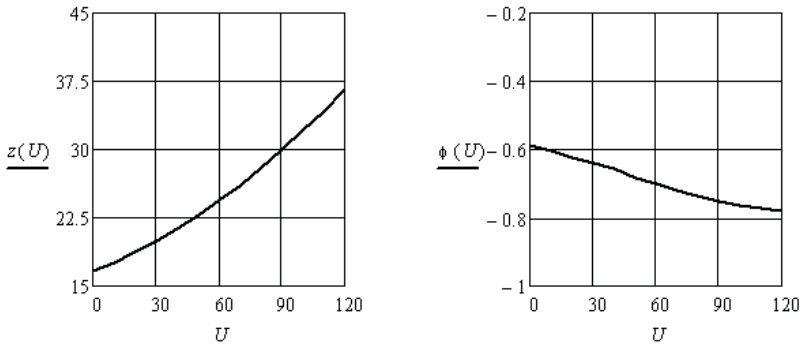


Рис. 7.12

Для примера 7.3 аналогично получим:

$$DI := \text{augment}(zI(I), \phi I(I), I)$$

$$D = \begin{pmatrix} 16.641 & -0.588 & 0 \\ 17.611 & -0.604 & 10 \\ 18.75 & -0.624 & 20 \\ 19.911 & -0.639 & 30 \\ 21.306 & -0.657 & 40 \\ 22.822 & -0.682 & 50 \\ 24.477 & -0.7 & 60 \\ 26.141 & -0.721 & 70 \\ 27.965 & -0.735 & 80 \\ 30.074 & -0.753 & 90 \\ 32.042 & -0.762 & 100 \\ 34.142 & -0.771 & 110 \\ 36.591 & -0.781 & 120 \end{pmatrix} \quad DI = \begin{pmatrix} 26.87 & 0.785 & 0 \\ 29 & 0.761 & 0.15 \\ 30.704 & 0.753 & 0.3 \\ 33.049 & 0.745 & 0.45 \\ 35.396 & 0.737 & 0.6 \\ 38.326 & 0.724 & 0.75 \\ 41.564 & 0.707 & 0.9 \\ 44.813 & 0.692 & 1.05 \\ 48.464 & 0.686 & 1.2 \\ 52.631 & 0.678 & 1.35 \\ 56.785 & 0.673 & 1.5 \\ 61.064 & 0.672 & 1.65 \\ 65.984 & 0.67 & 1.8 \end{pmatrix}$$

Пример 7.5. Необходимо найти ВАХ_д и ФАХ_д параллельного соединения нелинейных двухполюсников (рис. 7.10 и 7.11), используя полученные выше данные D и DI .

Выполним копирование данных и внесём их в новый файл. Вычислим для каждого двухполюсника зависимости комплексных сопротивлений от напряжения.

$$\begin{aligned}
U1 &:= D^{(2)} & I2 &:= D1^{(2)} & U &:= \overrightarrow{(D1^{(0)} \cdot D1^{(2)})} \\
z1 &:= D^{(0)} & \phi1 &:= D^{(1)} & z2 &:= D1^{(0)} & \phi2 &:= D1^{(1)} \\
S1 &:= cspline(U1, z1) & z1(U) &:= interp(S1, U1, z1, U) \\
S12 &:= cspline(U1, \phi1) & \phi1(U) &:= interp(S12, U1, \phi1, U) \\
S2 &:= cspline(U, z2) & z2(U2) &:= interp(S2, U, z2, U2) \\
S22 &:= cspline(U, \phi2) & \phi2(U2) &:= interp(S22, U, \phi2, U2) \\
Z1(U) &:= \overrightarrow{(z1(U) \cdot e^{\phi1(U) \cdot j})} & Z2(U) &:= \overrightarrow{(z2(U) \cdot e^{\phi2(U) \cdot j})}
\end{aligned}$$

Найдём зависимость эквивалентного комплексного сопротивления параллельного соединения двухполюсников.

$$\begin{aligned}
Y1(U) &:= Z1(U)^{-1} & Y2(U) &:= Z2(U)^{-1} \\
Y(U) &:= Y1(U) + Y2(U) & Z(U) &:= Y(U)^{-1}
\end{aligned}$$

Найдём зависимости модуля и аргумента эквивалентного сопротивления от напряжения и зависимость действующего значения тока от напряжения.

$$za := \overrightarrow{|Z(U)|} \quad \psi := arg(Z(U)) \quad Ia := \overrightarrow{\left(\frac{U}{za}\right)}$$

Выполним аппроксимацию $BA\bar{X}_d$ и $FA\bar{X}_d$ по полученным результатам.

$$\begin{aligned}
S3 &:= cspline(Ia, U) & Ua(Ia) &:= interp(S3, Ia, U, Ia) \\
S31 &:= cspline(Ia, \psi) & \psi(Ia) &:= interp(S31, Ia, \psi, Ia)
\end{aligned}$$

На рис. 7.13 представлены полученные характеристики.

Характеристики можно улучшить, если отказаться от сплайн-аппроксимации, а использовать регрессию. Выберем третий порядок полинома регрессии и найдём его коэффициенты для обеих характеристик. Затем составим соответствующие уравнения характеристик.

$$\begin{aligned}
k &:= 3 & c &:= regress(Ir, Ur, k) & c^T &= (3 \ 3 \ 3 \ -0.196 \ 18.903 \ -5.15 \ 1.955) \\
U(I) &:= interp(s, Ir, Ur, I) & U(I) &:= 18.903 \cdot I + -5.15 \cdot I^2 + 1.955 \cdot I^3 \\
c1 &:= regress(Ir, \psi r, k) & c1^T &= (3 \ 3 \ 3 \ -0.092 \ -0.067 \ -2.927 \times 10^{-3} \ 1.411 \times 10^{-3}) \\
\psi(I) &:= interp(s, Ir, \psi r, I) & \psi(I) &:= -0.092 - 0.067 \cdot I - 2.927 \cdot 10^{-3} \cdot I^2 + 1.411 \cdot 10^{-3} \cdot I^3
\end{aligned}$$

В уравнении ВАХ_д отброшена постоянная составляющая. Полученные характеристики приведены на рис. 7.14.

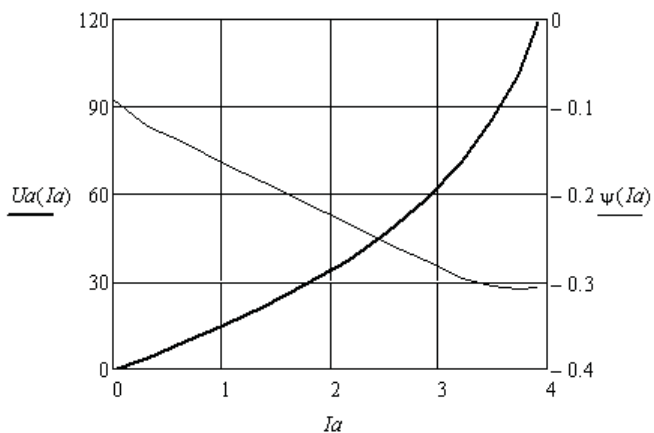


Рис. 7.13

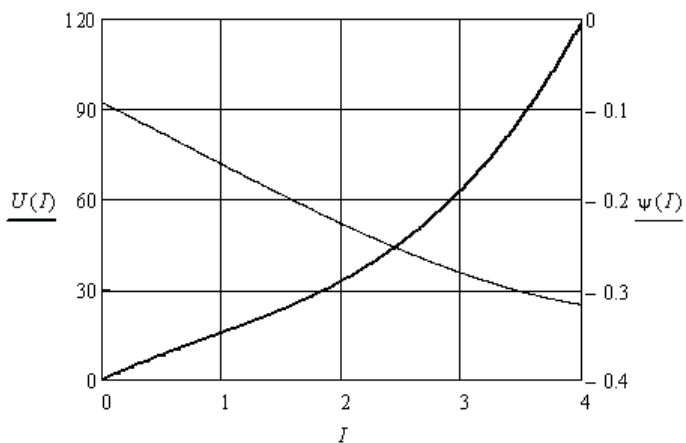


Рис. 7.14

7.3. Анализ нелинейной цепи с одним источником

Использование $ВАХ_d$ и $ФАХ_d$ позволяет перенести анализ на комплексную плоскость. Анализ нелинейной цепи ведётся методом свёртки. Особенностью является удвоение неизвестных, так как каждый неизвестный ток определяется двумя неизвестными величинами – модулем тока и его аргументом. Для решения таких задач каждое уравнение преобразуется в два уравнения относительно проекций векторов токов и напряжений на оси комплексной плоскости.

Пример 7.6. Экспериментально получены нелинейные зависимости сопротивлений резистора и индуктивности от действующего значения тока. Зависимости представлены массивами координат. Реактивной мощностью резистора пренебрегаем. Элементы соединены последовательно и подключены к источнику синусоидальной ЭДС (рис. 7.15). Необходимо найти эквивалентную синусоиду тока.

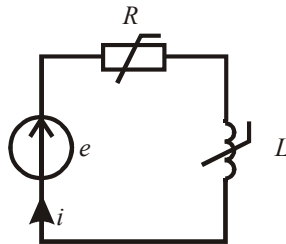


Рис. 7.15

Введём в листинг исходные данные.

$$E(t) := 10\sqrt{2} \cdot \sin(1000 \cdot t + 0.8)$$

$$Ia := (0 \ 0.1 \ 0.2 \ 0.3 \ 0.4 \ 0.5 \ 0.6 \ 0.7 \ 0.8 \ 0.9 \ 1.0 \ 1.1 \ 1.2)^T$$

$$r := (20 \ 21.4 \ 23.1 \ 24.8 \ 26.9 \ 29.4 \ 32 \ 34.8 \ 37.7 \ 41.2 \ 44.3 \ 47.6 \ 51)^T$$

$$x := (30 \ 31 \ 32.1 \ 33.4 \ 34.9 \ 36.2 \ 38 \ 39.6 \ 41.7 \ 44 \ 46.4 \ 49 \ 52)^T$$

Выполним аппроксимацию характеристик и найдём нелинейные зависимости модуля и аргумента сопротивления эквивалентного двухполюсника.

$$z := \sqrt{r^2 + x^2} \quad \phi := \operatorname{atan}\left(\frac{x}{r}\right)$$

$$S := \operatorname{cspline}(Ia, z) \quad z(I) := \operatorname{interp}(S, Ia, z, I)$$

$$SI := \operatorname{cspline}(Ia, \phi) \quad \Phi(I) := \operatorname{interp}(SI, Ia, \phi, I)$$

Составим два уравнения по закону Ома в комплексной форме относительно проекций и решим полученную систему нелинейных уравнений.

$$I := 0 \quad \psi := 0$$

Given

$$10 \cdot \cos(0.8) = I \cdot z(I) \cdot \cos(\Phi(I) + \psi)$$

$$10 \cdot \sin(0.8) = I \cdot z(I) \cdot \sin(\Phi(I) + \psi) \quad \operatorname{Find}(I, \psi) = \begin{pmatrix} 0.24718 \\ -0.13959 \end{pmatrix}$$

Проверим баланс мощностей на данном участке цепи.

$$10 \cdot e^{j \cdot 0.8} \cdot 0.24718 \cdot e^{j \cdot 0.13959} = 1.45866 + 1.99552j$$

$$(0.24718)^2 \cdot z(0.24718) \cdot e^{j \cdot \Phi(0.24718)} = 1.45865 + 1.9955j$$

Из баланса мощностей следует, что ток найден правильно. Запишем уравнение эквивалентной синусоиды тока.

$$i(t) := 0.247\sqrt{2} \cdot \sin(1000 \cdot t - 0.1396)$$

Пример 7.7. Необходимо найти эквивалентную синусоиду напряжения на параллельном участке цепи, к которой подключен источник синусоидального тока (рис. 7.16). Нелинейные зависимости сопротивлений резистора и конденсатора от напряжения представлены массивами координат. Реактивной мощностью резистора пренебрегаем.

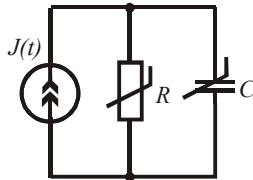


Рис. 7.16

Введём в листинг исходные данные.

$$\begin{aligned}
 Ua &:= (0 \ 10 \ 20 \ 30 \ 40 \ 50 \ 60 \ 70 \ 80 \ 90 \ 100 \ 110 \ 120)^T \\
 r &:= (20 \ 21.4 \ 23.1 \ 24.8 \ 26.9 \ 29.4 \ 32 \ 34.8 \ 37.7 \ 41.2 \ 44.3 \ 47.6 \ 51.5)^T \\
 x &:= (30 \ 31 \ 32.1 \ 33.4 \ 34.9 \ 36.2 \ 38 \ 39.6 \ 41.7 \ 44 \ 46.4 \ 49 \ 52)^T \\
 J(t) &:= 1\sqrt{2}\cdot\sin(1000\cdot t + 1.1)
 \end{aligned}$$

Выполним аппроксимацию зависимостей проводимости ветвей от действующего значения напряжения.

$$\begin{aligned}
 g &:= (r)^{-1} & b &:= (x)^{-1} \\
 S &:= \text{cspline}(Ua, g) & g(U) &:= \text{interp}(S, Ua, g, U) \\
 SI &:= \text{cspline}(Ua, b) & b(U) &:= \text{interp}(SI, Ua, b, U)
 \end{aligned}$$

Найдём зависимости модуля и аргумента комплексной проводимости эквивалентного нелинейного двухполюсника.

$$y(U) := \sqrt{(g(U))^2 + (b(U))^2} \quad \Phi(U) := \text{atan}\left(\frac{b(U)}{g(U)}\right)$$

Составим систему уравнений относительно проекций тока и решим её.

$$U := 0 \quad \psi := 0$$

Given

$$U \cdot y(U) \cdot \cos(\psi + \Phi(U)) = 1 \cdot \cos(1.1)$$

$$U \cdot y(U) \cdot \sin(\psi + \Phi(U)) = 1 \cdot \sin(1.1) \quad B := \text{Find}(U, \psi) = \begin{pmatrix} 18.588 \\ 0.479 \end{pmatrix}$$

$$UI := B_0 \quad \psi I := B_1$$

Проверим баланс мощностей в данной цепи.

$$1 \cdot e^{-j \cdot 1.1} \cdot UI e^{j \cdot \psi I} = 15.115 - 10.819j$$

$$\left(y(UI) \cdot e^{j \cdot \Phi(UI)}\right)^{-1} \cdot 1^2 = 15.115 - 10.819j$$

Видно, что напряжение найдено правильно. Запишем уравнение эквивалентной синусоиды напряжения.

$$u(t) := 18.588\sqrt{2}\cdot\sin(1000\cdot t + 0.479)$$

7.4. Анализ нелинейной электрической цепи с несколькими источниками

Анализ состояния сложной нелинейной электрической цепи определяется с помощью системы уравнений, составленной по законам Кирхгофа. При синусоидальных источниках в нелинейной цепи токи будут несинусоидальными. Использование ВАХ_д и ФАХ_д нелинейных элементов позволяет решать задачу на комплексной плоскости. Каждое из составленных уравнений в комплексной форме преобразуется в два уравнения относительно проекций векторов токов и напряжений на оси комплексной плоскости. Решая полученную систему нелинейных уравнений, находят модули и аргументы токов.

Пример 7.8. Необходимо найти эквивалентные синусоиды токов в заданной нелинейной электрической цепи (рис. 7.17). Введём в листинг исходные данные.

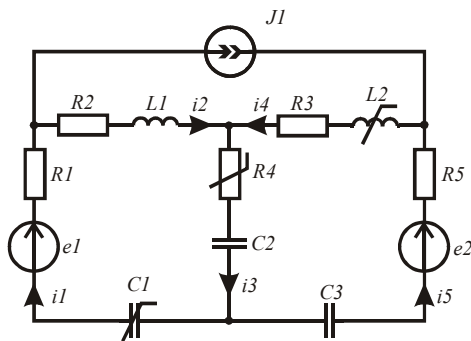


Рис. 7.17

```

e1(t) := 100*sqrt(2)*sin(1000*t + 0.5)    e2(t) := 120*sqrt(2)*sin(1000*t + 0.8)
J1(t) := 0.2*sqrt(2)*sin(1000*t - 0.5)    R1 := 80  R2 := 90  R3 := 70  R5 := 60
x1 := 35  x4 := 50  x5 := 60  xL2(I) := 45 - 6*(I)^2  xC1(I) := 40 + 4*(I)^2
E1 := 100  E2 := 120  J := 0.2  psi1 := 0.5  psi2 := 0.8  psi3 := -0.5

ORIGIN := 1  Ir := (0 0.2 0.4 0.6 0.8 1 1.2 1.4)^T
Ur := (0 12 25 39 54 70 87 105)^T
    
```

Выполним сплайн-интерполяцию VAX_d нелинейного резистора и запишем аналитические аппроксимации нелинейных реактивных сопротивлений катушки и конденсатора.

$$S := cspline(Ir, Ur) \quad Ur(I3) := interp(S, Ir, Ur, I3)$$

$$x2(I4) := 45 - 6 \cdot (I4)^2 \quad x3(I1) := 40 + 4 \cdot (I1)^2$$

Составим и решим нелинейную систему уравнений по законам Кирхгофа относительно проекций векторов токов и напряжений.

$$I1 := 0 \quad I2 := 0 \quad I3 := 0 \quad I4 := 0 \quad I5 := 0 \quad \phi1 := 0 \quad \phi2 := 0 \quad \phi3 := 0 \quad \phi4 := 0 \quad \phi5 := 0$$

Given

$$I1 \cdot \cos(\phi1) - I2 \cdot \cos(\phi2) - J \cdot \cos(\psi3) = 0 \quad I1 \cdot \sin(\phi1) - I2 \cdot \sin(\phi2) - J \cdot \sin(\psi3) = 0$$

$$I2 \cdot \cos(\phi2) - I3 \cdot \cos(\phi3) + I4 \cdot \cos(\phi4) = 0 \quad I2 \cdot \sin(\phi2) - I3 \cdot \sin(\phi3) + I4 \cdot \sin(\phi4) = 0$$

$$J \cdot \cos(\psi3) - I4 \cdot \cos(\phi4) + I5 \cdot \cos(\phi5) = 0 \quad J \cdot \sin(\psi3) - I4 \cdot \sin(\phi4) + I5 \cdot \sin(\phi5) = 0$$

$$I1 \cdot R1 \cdot \cos(\phi1) + I2 \cdot R2 \cdot \cos(\phi2) + I2 \cdot x1 \cdot \cos\left(\phi2 + \frac{\pi}{2}\right) + Ur(I3) \cdot \cos(\phi3) + \blacksquare$$

$$\blacksquare + I3 \cdot x4 \cdot \cos\left(\phi3 - \frac{\pi}{2}\right) + I1 \cdot x3(I1) \cdot \cos\left(\phi1 - \frac{\pi}{2}\right) = E1 \cdot \cos(\psi1)$$

$$I1 \cdot R1 \cdot \sin(\phi1) + I2 \cdot R2 \cdot \sin(\phi2) + I2 \cdot x1 \cdot \sin\left(\phi2 + \frac{\pi}{2}\right) + Ur(I3) \cdot \sin(\phi3) + \blacksquare$$

$$\blacksquare + I3 \cdot x4 \cdot \sin\left(\phi3 - \frac{\pi}{2}\right) + I1 \cdot x3(I1) \cdot \sin\left(\phi1 - \frac{\pi}{2}\right) = E1 \cdot \sin(\psi1)$$

$$I5 \cdot R5 \cdot \cos(\phi5) + I4 \cdot x2(I4) \cdot \cos\left(\phi4 + \frac{\pi}{2}\right) + I4 \cdot R3 \cdot \cos(\phi4) + Ur(I3) \cdot \cos(\phi3) + \blacksquare$$

$$\blacksquare + I3 \cdot x4 \cdot \cos\left(\phi3 - \frac{\pi}{2}\right) + I5 \cdot x5 \cdot \cos\left(\phi5 - \frac{\pi}{2}\right) = E2 \cdot \cos(\psi2)$$

$$I5 \cdot R5 \cdot \sin(\phi5) + I4 \cdot x2(I4) \cdot \sin\left(\phi4 + \frac{\pi}{2}\right) + I4 \cdot R3 \cdot \sin(\phi4) + Ur(I3) \cdot \sin(\phi3) + \blacksquare$$

$$\blacksquare + I3 \cdot x4 \cdot \sin\left(\phi3 - \frac{\pi}{2}\right) + I5 \cdot x5 \cdot \sin\left(\phi5 - \frac{\pi}{2}\right) = E2 \cdot \sin(\psi2)$$

$$D := Find(I1, I2, I3, I4, I5, \phi1, \phi2, \phi3, \phi4, \phi5)$$

$$D^T =$$

	1	2	3	4	5	6	7
1	0.362	0.31	-0.8	0.491	-0.537	0.527	...

Уравнения, составленные по второму закону Кирхгофа, больше ширины страницы, поэтому они записаны с переносом в две строки. В листинге они должны быть записаны в одну строку.

Определим сопротивления нелинейных элементов при найденных токах и проверим баланс мощностей.

$$\begin{aligned}
 I &:= (D_1 \ D_2 \ D_3 \ D_4 \ D_5)^T & \phi &:= (D_6 \ D_7 \ D_8 \ D_9 \ D_{10})^T & x_2 &:= x_2(I_4) \\
 x_3 &:= x_3(I_1) & R_4 &:= \frac{U_r(I_3)}{I_3} & Z &:= (R_1 - j \cdot x_3 \ R_2 + j \cdot x_1 \ R_4 - j \cdot x_4 \ R_3 + j \cdot x_2 \ R_5 - j \cdot x_5)^T \\
 UJ &:= I_4 \cdot e^{j \cdot \phi_4} \cdot Z_4 - I_2 \cdot e^{j \cdot \phi_2} \cdot Z_2 & & \sum_{k=1}^5 [(I_k)^2 \cdot Z_k] = 83.692 - 40.795j
 \end{aligned}$$

$$E_1 \cdot e^{j \cdot \psi_1} \cdot I_1 \cdot e^{-j \cdot \phi_1} + E_2 \cdot e^{j \cdot \psi_2} \cdot I_5 \cdot e^{-j \cdot \phi_5} + J \cdot e^{-j \cdot \psi_3} \cdot UJ = 83.692 - 40.795j$$

Равенство активных и реактивных мощностей выполняется, следовательно, решение верно. Запишем эквивалентные синусоиды найденных токов.

$$\begin{aligned}
 I^T &= (0.362 \ 0.31 \ -0.8 \ 0.491 \ -0.537) & \phi^T &= (0.527 \ 1.112 \ -2.031 \ 1.109 \ -1.651) \\
 i_1(t) &:= 0.362 \cdot \sqrt{2} \cdot \sin(1000 \cdot t + 0.527) & i_2(t) &:= 0.31 \cdot \sqrt{2} \cdot \sin(1000 \cdot t + 1.112) \\
 i_3(t) &:= 0.8 \cdot \sqrt{2} \cdot \sin(1000 \cdot t + \pi - 2.031) & i_4(t) &:= 0.491 \cdot \sqrt{2} \cdot \sin(1000 \cdot t + 1.109) \\
 i_5(t) &:= 0.537 \cdot \sqrt{2} \cdot \sin(1000 \cdot t + \pi - 1.651)
 \end{aligned}$$

Контрольные вопросы

1. С какой целью несинусоидальные токи и напряжения замещают эквивалентными синусоидами?
2. Каковы условия замены несинусоидальных токов и напряжений на участке цепи эквивалентными синусоидами?
3. Как найти действующие значения несинусоидальных токов и напряжений?
4. Как выбираются знаки начальных фаз эквивалентных синусоид напряжения и тока?
5. Что такое реактивная мощность искажений?
6. Как получить зависимости между действующими значениями токов и напряжений нелинейных элементов?
7. В каких случаях используют ВАХ для действующих значений?

8. Как осуществляется операция свёртки с использованием ВАХ для действующих значений?
9. Какая информация теряется при замене несинусоидальных токов и напряжений эквивалентными синусоидами?

8. ИССЛЕДОВАНИЕ ЯВЛЕНИЯ РЕЗОНАНСА В НЕЛИНЕЙНЫХ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЯХ

Использование $ВАХ_d$ и $ФАХ_d$ позволяет выполнить исследование явления резонанса в нелинейных электрических цепях, а также сопутствующее ему явление гистерезиса [3; 9].

8.1. Исследование феррорезонанса напряжений

Явление феррорезонанса напряжений проявляется в нелинейной ветви с последовательным соединением элементов R , L , C , причём основную роль играет нелинейная индуктивность, которая реализуется катушкой с ферромагнитным сердечником.

Пример 8.1. Необходимо определить параметры нелинейной электрической цепи (рис. 8.1), при которых будет иметь место явление феррорезонанса напряжений. Цепь запитывается от источника тока. Зависимость сопротивления резистора от действующего значения тока аппроксимируется линейной функцией. Зависимость сопротивления индуктивности от действующего значения тока получена экспериментально.



Рис. 8.1

Введём в листинг исходные данные.

```

$$J_a := (0 \ 0.4 \ 0.8 \ 1.2 \ 1.6 \ 2 \ 2.4 \ 2.8 \ 3.2 \ 3.6 \ 4)^T \quad x_C := 30$$

$$x_L := (60 \ 58 \ 55 \ 50 \ 44 \ 39.4 \ 35.5 \ 32 \ 29.5 \ 27 \ 25)^T \quad r := 6 + 1 \cdot J_a$$

```


Найдём действующее значение тока источника тока, при котором будет выполнено условие резонанса напряжений.

$$x := xL - xC \quad z := \sqrt{r^2 + x^2} \quad \phi := \operatorname{atan}\left(\frac{x}{r}\right)$$

$$U_l := \overrightarrow{(Ja \cdot xL)} \quad U_r := \overrightarrow{(Ja \cdot r)} \quad U_a := \overrightarrow{(z \cdot Ja)}$$

$$S := \operatorname{cspline}(Ja, U_a) \quad U(J) := \operatorname{interp}(S, Ja, U_a, J)$$

$$S1 := \operatorname{cspline}(Ja, \phi) \quad \phi(J) := \operatorname{interp}(S1, Ja, \phi, J)$$

$$Jp := \operatorname{root}(\phi(J), J, 3, 3.3) = 3.116 \quad UC := Jp \cdot xC = 93.467$$

Границы поиска корня выбраны по характеристике $\phi(J)$, которая приведена на рис. 8.2.

$$J := 1, 1.1 \dots 4$$

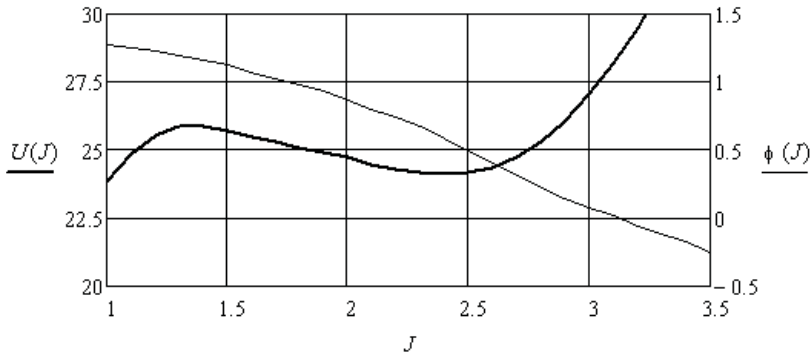


Рис. 8.2

Найдём параметры нелинейных элементов при резонансе.

$$U_r := Jp \cdot (6 + 1 \cdot Jp) = 28.4 \quad U(Jp) = 28.355$$

$$S2 := \operatorname{cspline}(Ja, U_l) \quad U_L(J) := \operatorname{interp}(S2, Ja, U_l, J) \quad U_L(Jp) = 93.488$$

$$r := \frac{U_r}{Jp} = 9.116 \quad xL := \frac{U_L(Jp)}{Jp} = 30.007$$

Видно, что добротность исследуемой цепи чуть больше трёх.

Пример 8.2. Необходимо исследовать явление гистерезиса тока в области резонанса напряжений в ветви (рис. 8.1), если к ней па-

раллельно подключен источник ЭДС. Исходные данные берём из примера 8.1.

Введём в листинг исходные данные.

$$Ia := (0 \ 0.4 \ 0.8 \ 1.2 \ 1.6 \ 2 \ 2.4 \ 2.8 \ 3.2 \ 3.6 \ 4)^T \quad xC := 30$$

$$xL := (60 \ 58 \ 55 \ 50 \ 44 \ 39.4 \ 35.5 \ 32 \ 29.5 \ 27 \ 25)^T \quad r := 6 + 1 \cdot Ia$$

Определим \underline{BAX}_D резистора и катушки.

$$UL := (Ia \cdot xL) \quad UR(I) := I \cdot (6 + 1 \cdot I)$$

$$S := cspline(Ia, UL) \quad UL(I) := interp(S, Ia, UL, I)$$

Составим и решим систему нелинейных уравнений относительно проекций напряжений и токов на оси комплексной плоскости. Предварительные исследования показывают, что правильный выбор начального значения тока позволяет получить зависимости нижней и верхней ветви петли гистерезиса от величины ЭДС.

$$E := 22 \quad I := 0.5 \quad \psi := 0$$

Given

$$0 = UR(I) \cdot \cos(\psi) + UL(I) \cdot \cos(\psi + 0.5 \cdot \pi) + xC \cdot I \cdot \cos(\psi - 0.5 \cdot \pi) - E$$

$$0 = UR(I) \cdot \sin(\psi) + \sin(\psi + 0.5 \cdot \pi) \cdot UL(I) + \sin(\psi - 0.5 \cdot \pi) \cdot xC \cdot I$$

$$Find(I, \psi) = \begin{pmatrix} 0.874 \\ -1.294 \end{pmatrix}$$

Показано решение системы уравнений для одного значения ЭДС. Для расчёта нижней ветви петли гистерезиса выбираем минимальное начальное значение тока 0,5, ориентируясь на рис. 8.2 из примера 8.1. Подбираем такие значения ЭДС, чтобы максимально точно определить начало скачка тока. В результате получим следующую матрицу данных, которая заполняется вручную.

$$B := \begin{pmatrix} 22 & 23 & 23.5 & 24 & 24.5 & 25 & 25.5 & 25.8 & 25.86 & 26 \\ 0.874 & 0.94 & 0.977 & 1.017 & 1.064 & 1.12 & 1.198 & 1.289 & 1.341 & 2.89 \\ -1.294 & -1.283 & -1.277 & -1.269 & -1.259 & -1.246 & -1.226 & -1.198 & -1.18 & -0.154 \end{pmatrix}^T$$

При значениях ЭДС больше 25,86 система перестаёт решаться. Решение для значения 26 взято из расчёта верхней петли гистерезиса. В этом случае начальное значение тока 3. В результате получена вторая матрица данных, которая также заполняется вручную.

$$BI := \begin{pmatrix} 23.5 & 24 & 24.1 & 24.2 & 24.5 & 25 & 25.5 & 26 & 27 & 28 \\ 0.977 & 1.017 & 2.493 & 2.568 & 2.666 & 2.761 & 2.831 & 2.89 & 2.992 & 3.082 \\ -1.277 & -1.269 & -0.498 & -0.429 & -0.34 & -0.256 & -0.199 & -0.154 & -0.082 & -0.023 \end{pmatrix}^T$$

Полученные результаты иллюстрируются графиками (рис. 8.3 и 8.4).

$$Ea := B^{(0)} \quad Ia := B^{(1)} \quad Eb := BI^{(0)} \quad Ib := BI^{(1)} \quad \phi a := B^{(2)} \quad \phi b := BI^{(2)}$$

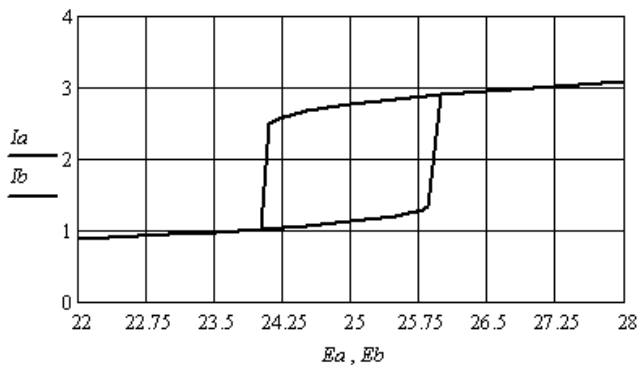


Рис. 8.3

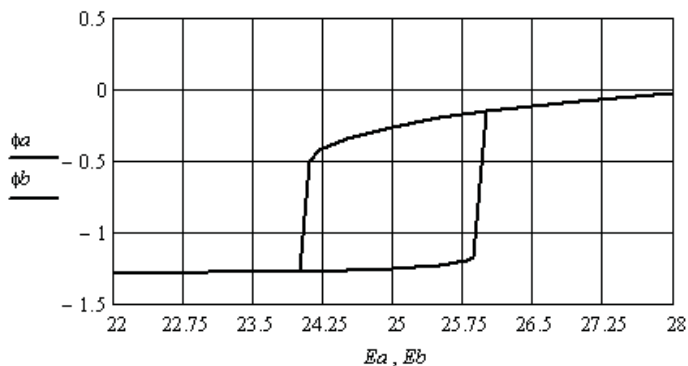


Рис. 8.4

Положение петли гистерезиса тока хорошо согласуется с зависимостями, приведёнными на рис. 8.2.

8.2. Исследование феррорезонанса токов

Явление феррорезонанса токов проявляется в двухполюснике с параллельным соединением ветви с элементами R , L и ветви с конденсатором C , причём основную роль играет нелинейная индуктивность, которая реализуется катушкой с ферромагнитным сердечником.

Пример 8.3. Необходимо определить параметры нелинейной электрической цепи (рис. 8.5), при которых будет иметь место явление феррорезонанса токов, если цепь запитывается от источника ЭДС. Характеристика нелинейного резистора аппроксимируется аналитическим выражением. Характеристика катушки получена экспериментально.

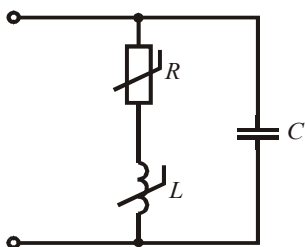


Рис. 8.5

Введём в листинг исходные данные.

$$Ia := (0.1 \ 0.4 \ 0.8 \ 1.2 \ 1.6 \ 2 \ 2.4 \ 2.8 \ 3.2 \ 3.6 \ 4)^T \quad xC := 34$$

$$xL := (50 \ 49.5 \ 49 \ 47.5 \ 45 \ 40 \ 35.5 \ 32 \ 29 \ 27 \ 26)^T \quad r := 5 - 0.3 \cdot Ia$$

Найдём комплексное сопротивление первой ветви с нелинейной индуктивностью и нелинейным резистором, а затем выполним аппроксимацию зависимости модуля сопротивления первой ветви от действующего значения тока.

$$z1 := \sqrt{r^2 + xL^2} \quad \phi1 := \text{atan}\left(\frac{xL}{r}\right) \quad Z1 := \overrightarrow{(z1 \cdot e^{j \cdot \phi1})}$$

$$S2 := \text{cspline}(Ia, z1) \quad z1a(I1a) := \text{interp}(S2, Ia, z1, I1a)$$

Найдём параметры эквивалентного тока двухполюсника, принимая значение начальной фазы тока в первой ветви равным нулю.

$$\begin{aligned}
 \overrightarrow{E1} &:= (Ia \cdot Z1) & E &:= |\overrightarrow{E1}| & I1 &:= \frac{E1}{Z1} & I2 &:= \frac{E1}{-j \cdot xC} \\
 Ie &:= I1 + I2 & I &:= |\overrightarrow{Ie}| & \phi &:= \arg(Ie) & \psi &:= \phi1 - \phi
 \end{aligned}$$

Величина ψ соответствует фазовому сдвигу между напряжением на двухполюснике и его эквивалентным током.

Выполним аппроксимацию $ВАХ_D$ и $\Phi АХ_D$ двухполюсника и построим их (рис. 8.6).

$$\begin{aligned}
 S &:= cspline(E, I) & Ia(Ea) &:= interp(S, E, I, Ea) \\
 SI &:= cspline(E, \psi) & \psi a(Ea) &:= interp(SI, E, \psi, Ea)
 \end{aligned}$$

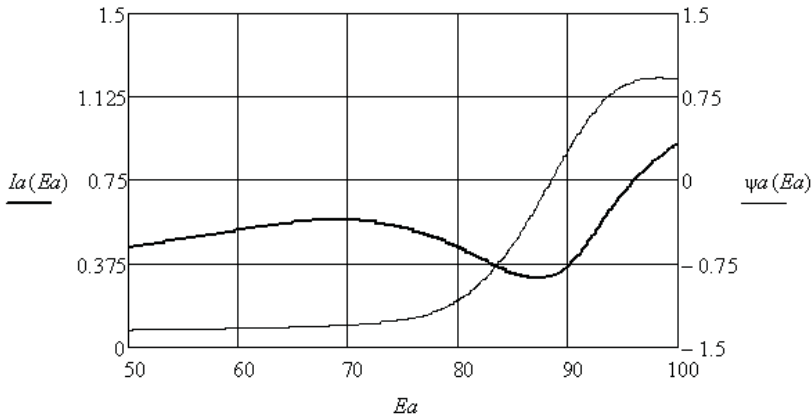


Рис. 8.6

Найдём резонансное напряжение на двухполюснике, и через резонансный ток в первой ветви определим сопротивления резистора и катушки.

$$Ep := \text{root}(\psi a(Ea), Ea, 70, 100) = 88.5 \quad I2p := \frac{Ep}{xC} = 2.603$$

$$I1a := 0 \quad \text{Given} \quad I1a \cdot z1a(I1a) = Ep \quad I1p := \text{Find}(I1a) = 2.624$$

$$Rp := 5 - 0.3 \cdot I1p = 4.213 \quad xL := \sqrt{(z1a(I1p))^2 - Rp^2} = 33.468$$

Резонансный ток двухполюсника $Ia(Ep)$ равен 0,321, следовательно, добротность цепи чуть больше восьми.

Пример 8.4. Необходимо исследовать явление гистерезиса напряжения в области резонанса токов в цепи (рис. 8.5), если к ней параллельно подключен источник тока. Для исследования воспользуемся полученными в примере 8.3 аппроксимациями $Ia(Ep)$ и $\psi a(Ep)$.

В данном случае ток двухполюсника равен току источника тока. Будем задаваться током источника и, решая нелинейное равенство, находить напряжение на двухполюснике и фазовый сдвиг между током и напряжением. Для получения ветви петли гистерезиса при увеличении тока в качестве начального значения напряжения необходимо брать минимальное напряжение, например 50. Для получения ветви при уменьшении тока в качестве начального значения напряжения необходимо брать напряжение в области ямы характеристики, например 90.

Решение для одной точки имеет вид:

$$J := 0.5 \quad Ea := 50$$

$$\text{Given} \quad J = Ia(Ea) \quad Ea := Find(Ea) = 56.791 \quad \psi a(Ea) = -1.338$$

Подбираем такие значения тока источника тока, чтобы максимально точно определить начало скачка напряжения. В результате получим следующие матрицы данных, которые заполняются вручную.

$$B := \begin{pmatrix} 0.25 & 0.3 & 0.5 & 0.52 & 0.54 & 0.56 & 0.571 & 0.572 & 0.58 & 0.6 \\ 25.932 & 31.242 & 56.791 & 59.267 & 61.84 & 65.055 & 68.893 & 93.233 & 93.344 & 93.625 \\ -1.364 & -1.364 & -1.338 & -1.333 & -1.328 & -1.318 & -1.302 & 0.709 & 0.72 & 0.746 \end{pmatrix}^T$$

$$BI := \begin{pmatrix} 0.25 & 0.3 & 0.31 & 0.33 & 0.35 & 0.4 & 0.5 & 0.6 & 0.7 & 0.92 \\ 25.932 & 31.242 & 87.213 & 88.952 & 89.636 & 90.731 & 92.249 & 93.625 & 95.176 & 100.185 \\ -1.364 & -1.364 & -0.227 & 0.08 & 0.199 & 0.379 & 0.596 & 0.746 & 0.853 & 0.907 \end{pmatrix}^T$$

$$J := B^{(0)} \quad U := B^{(1)} \quad \Phi := B^{(2)} \quad JI := BI^{(0)} \quad UI := BI^{(1)} \quad \Phi I := BI^{(2)}$$

Полученные результаты иллюстрируются следующими графиками.

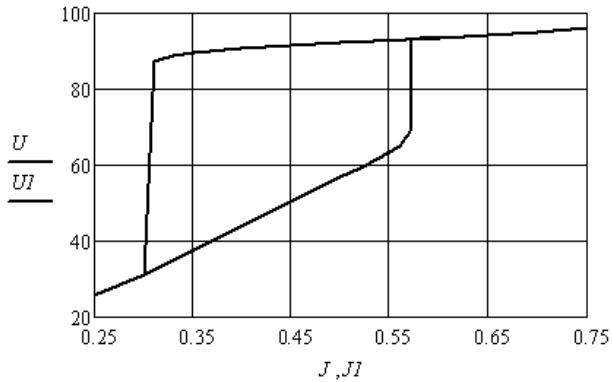


Рис. 8.7

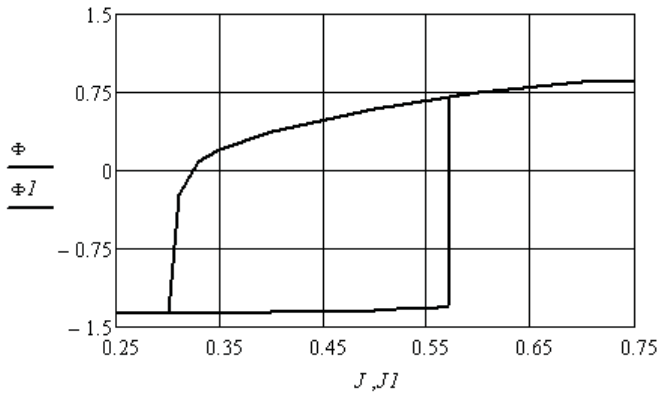


Рис. 8.8

Контрольные вопросы

1. Опишите явление резонанса.
2. Явление резонанса напряжений и условия его возникновения.
3. Явление резонанса токов и условия его возникновения.
4. Характер сопротивления электрической цепи при резонансе.
5. Дайте определение добротности электрической цепи.
6. Отличия явления резонанса в линейной электрической цепи и в нелинейной электрической цепи.

7. О чём говорит термин *феррорезонанс*?
8. Перечислите способы реализации условий феррорезонанса.
9. В каких схемах может быть феррорезонанс напряжений, а в каких феррорезонанс токов?
10. Как получить эффект гистерезиса при исследовании феррорезонанса напряжений?
11. Как получить эффект гистерезиса при исследовании феррорезонанса токов?
12. Как используется оператор *root*?
13. Какие характеристики нелинейной индуктивности используются при исследовании феррорезонанса?
14. Как называется резонанс в цепи с нелинейным конденсатором?
15. Приведите примеры использования феррорезонанса.
16. По какой характеристике определяются условия достижения резонанса?

9. АНАЛИЗ СОСТОЯНИЯ ДЛИННОЙ ЛИНИИ С ЛИНЕЙНОЙ И НЕЛИНЕЙНОЙ НАГРУЗКОЙ

Анализ состояния длинной линии выполняется с помощью уравнений через вторичные параметры, которые находят по известным погонным параметрам линии. Если источник несинусоидальный, а нагрузка линейная, то анализ ведётся методом наложения [2; 3; 7; 9].

9.1. Анализ состояния длинной линии при линейной нагрузке

В зависимости от исходных данных анализ состояния длинной линии можно вести, используя граничные значения тока и напряжения либо в начале линии, либо в конце.

Пример 9.1. Необходимо определить распределение модуля тока и напряжения в заданной длинной линии при несогласованной нагрузке. Исходными данными являются погонные параметры линии, её длина, величина нагрузки и напряжение в начале линии.

Введём в листинг исходные данные.

$$R := 8 \quad L := 1.5 \cdot 10^{-3} \quad G := 100 \cdot 10^{-6} \quad C := 10 \cdot 10^{-9} \quad \omega := 0.2 \cdot 10^6 \\ l := 20 \quad u(t) := 500 \sqrt{2} \cdot \sin(\omega \cdot t) \quad R_n := 1000 \quad L_n := 2.5 \cdot 10^{-3}$$

Перенесём анализ на комплексную плоскость и найдём комплексные погонные сопротивление и проводимость линии, и комплексное сопротивление её нагрузки.

$$Z_0 := R + j \cdot \omega \cdot L \quad Y_0 := G + j \cdot \omega \cdot C \quad Z_n := R_n + \omega \cdot L_n j$$

Определим вторичные параметры линии.

$$Z_c := \sqrt{\frac{Z_0}{Y_0}} = 387.099 + 4.51j \quad \gamma := \sqrt{Z_0 \cdot Y_0} = 0.03 + 0.775j$$

$$\alpha := \operatorname{Re}(\gamma) \quad \beta := \operatorname{Im}(\gamma) \quad \lambda := 2 \cdot \frac{\pi}{\beta} = 8.111$$

Найдём входное сопротивление и ток в начале линии.

$$U_1 := 500 \quad Z_1 := Z_c \cdot \frac{(Z_n + Z_c \cdot \tanh(\gamma \cdot l))}{Z_n \cdot \tanh(\gamma \cdot l) + Z_c} \quad I_1 := \frac{U_1}{Z_1} = 0.993 - 0.241j$$

Найдём зависимости действующих значений напряжения и тока от координаты вдоль линии и построим их (рис. 9.1).

$$U(x) := U_1 \cdot \cosh(\gamma \cdot x) - I_1 \cdot Z_c \cdot \sinh(\gamma \cdot x)$$

$$I(x) := \frac{-U_1 \cdot \sinh(\gamma \cdot x)}{Z_c} + I_1 \cdot \cosh(\gamma \cdot x)$$

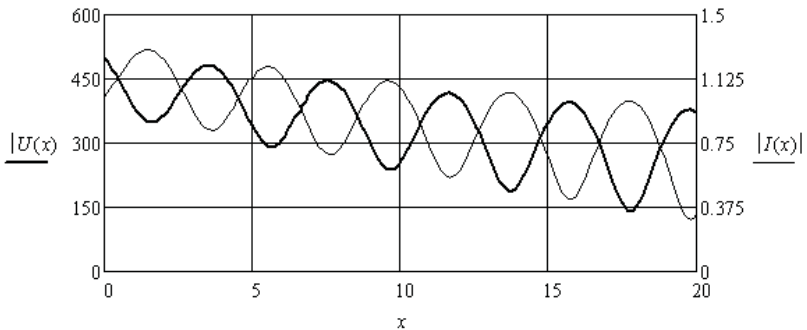


Рис. 9.1

Сравним активную мощность, подаваемую на вход линии, с мощностью, выделяемой в нагрузке. Определим КПД линии.

$$P_1 := \operatorname{Re}(U_1 \cdot \bar{I}_1) = 496.641 \quad P_n := \operatorname{Re}(Z_n) \cdot (|I(l)|)^2 = 110.884$$

$$\eta := \frac{P_n}{P_1} = 0.223$$

При согласованной нагрузке данной линии её входное сопротивление равно согласованному сопротивлению. Выражения для зависимостей действующих значений напряжения и тока от координаты вдоль линии принимают следующий вид:

$$U_c(x) := U_1 \cdot \cosh(\gamma \cdot x) - U_1 \cdot \sinh(\gamma \cdot x)$$

$$I_c(x) := -I_1 \cdot \sinh(\gamma \cdot x) + I_1 \cdot \cosh(\gamma \cdot x)$$

Соответствующие зависимости приведены на рис. 9.2.

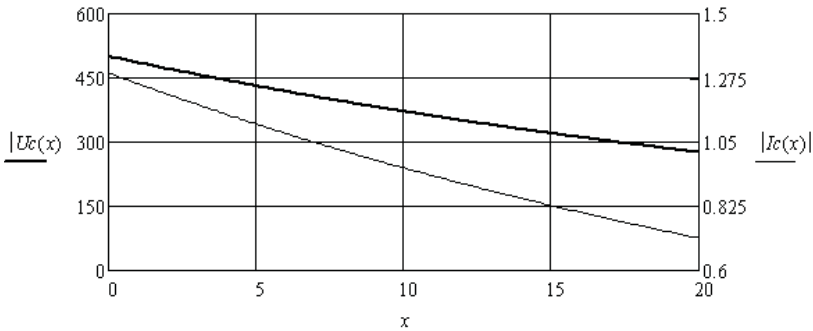


Рис. 9.2

Снова сравним мощности и найдём соответствующий КПД линии в согласованном режиме.

$$P_{lc} := \operatorname{Re}(U_1 \cdot \overline{I_1}) = 645.742 \quad P_{nc} := \operatorname{Re}(Z_n) \cdot (|I_c(l)|)^2 = 508.69$$

$$\eta_c := \frac{P_{nc}}{P_{lc}} = 0.788$$

Пример 9.2. Необходимо исследовать в заданном диапазоне частот искусственную длинную линию, представляющую собой каскадное соединение 50 четырёхполюсников, собранных по мостовой схеме (рис. 9.3).

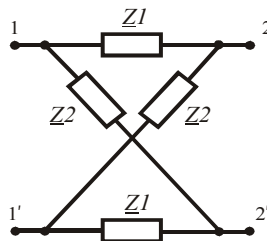


Рис. 9.3

Введём в листинг исходные данные.

$$\omega := 10, 20 \dots 10^6 \quad L := 15 \cdot 10^{-6} \quad C := 660 \cdot 10^{-12} \quad R_1 := 0.4 \quad R_2 := 0.1$$

Определим комплексные сопротивления ветвей одного четырёхполюсника и вторичные параметры искусственной длинной линии.

$$\begin{aligned}
 Z1(\omega) &:= j \cdot \omega \cdot L + 0.4 & Z2(\omega) &:= (j \cdot \omega \cdot C)^{-1} + 0.1 \\
 Zc(\omega) &:= \sqrt{Z1(\omega) \cdot Z2(\omega)} & \gamma(\omega) &:= 2 \cdot \operatorname{atanh} \left(\sqrt{\frac{Z1(\omega)}{Z2(\omega)}} \right) \\
 \alpha(\omega) &:= \operatorname{Re}(\gamma(\omega)) & \beta(\omega) &:= \operatorname{Im}(\gamma(\omega)) & \lambda(\omega) &:= 2 \cdot \frac{\pi}{\beta(\omega)}
 \end{aligned}$$

Соответствующие зависимости приведены на рис. 9.4.

Определим состояние линии на частоте $\omega = 10^6$ при нагрузке 150 Ом и напряжении на нагрузке 10 В. Результат приведён на рис. 9.5.

$$U2 := 10 \quad Z_n := 150 \quad Z_c := Z_c(10^6) \quad \gamma := \gamma(10^6)$$

$$U(x) := U2 \cdot \cosh(\gamma \cdot x) + \frac{U2}{Z_n} \cdot Z_c \cdot \sinh(\gamma \cdot x)$$

$$I(x) := \frac{U2 \cdot \sinh(\gamma \cdot x)}{Z_c} + \frac{U2}{Z_n} \cdot \cosh(\gamma \cdot x)$$

Определим напряжение и ток в начале линии.

$$U(50) = -10.117 - 5.411j \quad I(50) = -0.067 - 0.036j$$

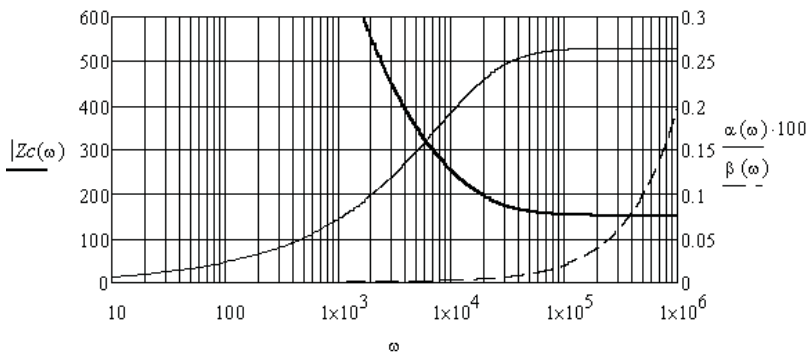


Рис. 9.4

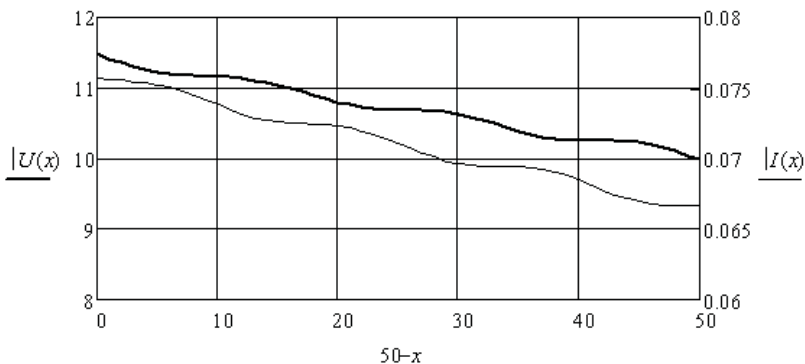


Рис. 9.5

9.2. Анализ состояния длинной линии при нелинейной нагрузке

Длинную линию с нелинейной нагрузкой необходимо рассматривать как пассивный нелинейный двухполюсник и предварительно найти его ВАХ_д и ФАХ_д. Затем по заданному напряжению в начале линии можно построить зависимости действующих значений напряжения и тока от координаты вдоль линии.

Пример 9.3. Необходимо построить зависимости значений напряжения и тока от координаты вдоль линии с нелинейной нагрузкой, которая работает на постоянном токе.

Введём в листинг исходные данные.

$$R := 8 \quad L := 1.5 \cdot 10^{-3} \quad G := 100 \cdot 10^{-6} \quad C := 10 \cdot 10^{-9} \quad \omega := 0 \quad l := 20$$

Определим вторичные параметры линии.

$$Z_0 := R \quad Y_0 := G \quad Z_c := \sqrt{\frac{Z_0}{Y_0}} = 282.843 \quad \gamma := \sqrt{Z_0 \cdot Y_0} = 0.028$$

Используя зависимость сопротивления нагрузки от напряжения и уравнения состояния линии через вторичные параметры, найдём зависимости напряжения и тока в начале линии от напряжения на нагрузке.

$$k := 0..10 \quad U_{2k} := k \cdot 10 \quad R_n := 100 + 0.007 \cdot U_{2k}^2$$

$$U1 := U2 \cdot \cosh(\gamma \cdot 20) + \frac{U2}{Rn} \cdot Zc \cdot \sinh(\gamma \cdot 20)$$

$$I1 := \frac{U2 \cdot \sinh(\gamma \cdot 20)}{Zc} + \frac{U2}{Rn} \cdot \cosh(\gamma \cdot 20)$$

Соответствующие зависимости приведены на рис. 9.6.

Используя полученные результаты, выполним аппроксимацию ВАХ данной линии относительно её начала (рис. 9.7).

$$S := \text{cspline}(I1, U1) \quad U(I) := \text{interp}(S, I1, U1, I)$$

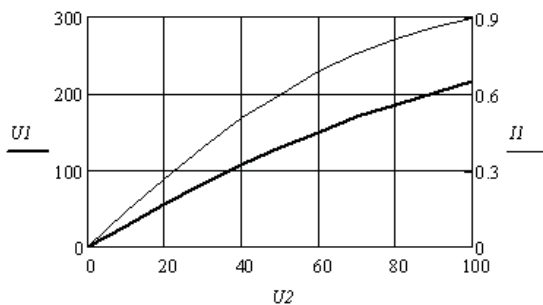


Рис. 9.6

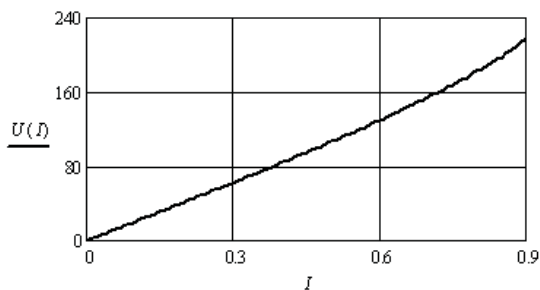


Рис. 9.7

Построим зависимости значений напряжения и тока от координаты вдоль линии, при заданном токе в начале линии (рис. 9.8).

$$I := 0.5 \quad I1 := I \quad U1 := U(I)$$

$$U(x) := U1 \cdot \cosh(\gamma \cdot x) - I1 \cdot Zc \cdot \sinh(\gamma \cdot x) \quad I(x) := \frac{-U1 \cdot \sinh(\gamma \cdot x)}{Zc} + I1 \cdot \cosh(\gamma \cdot x)$$

$$x := 0 \dots 20$$

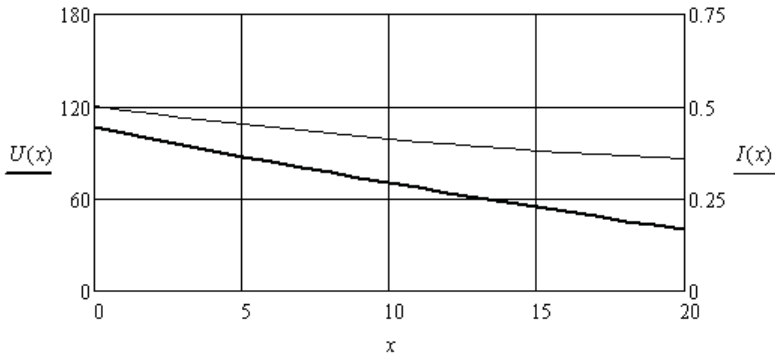


Рис. 9.8

Пример 9.4. Необходимо построить зависимости модуля и аргумента комплексных действующих значений напряжения и тока от координаты вдоль линии с нелинейной нагрузкой, которая работает на синусоидальном токе.

Введём в листинг исходные данные.

$$R := 8 \quad L := 1.5 \cdot 10^{-3} \quad G := 100 \cdot 10^{-6} \quad C := 10 \cdot 10^{-9} \quad \omega := 10^5 \quad l := 20$$

Определим вторичные параметры линии.

$$Z0 := R + j \cdot \omega \cdot L \quad Y0 := G + j \cdot \omega \cdot C$$

$$Zc := \sqrt{\frac{Z0}{Y0}} = 386.507 + 8.966j \quad \gamma := \sqrt{Z0 \cdot Y0} = 0.03 + 0.387j$$

Используем зависимость комплексного сопротивления нагрузки от действующего значения напряжения и уравнения состояния линии через вторичные параметры. Найдём зависимости модулей комплексного напряжения, комплексного тока и фазового сдвига между ними в начале линии от действующего значения напряжения на нагрузке.

$$ORIGIN := 1 \quad k := 1..10 \quad U2_k := k \cdot 10 \quad Zn := 100 + 0.007 \cdot (U2)^2 + j \cdot 10^{-2}$$

$$U1 := U2 \cdot \cosh(\gamma \cdot 20) + \frac{U2}{Zn} \cdot Zc \cdot \sinh(\gamma \cdot 20) \quad I1 := \frac{U2 \cdot \sinh(\gamma \cdot 20)}{Zc} + \frac{U2}{Zn} \cdot \cosh(\gamma \cdot 20)$$

$$Uk := \overrightarrow{|U1|} \quad Ik := \overrightarrow{|I1|} \quad \psi u := \arg(U1) \quad \psi i := \arg(I1) \quad \Phi := \psi u - \psi i$$

Полученные зависимости показаны на рис. 9.9.

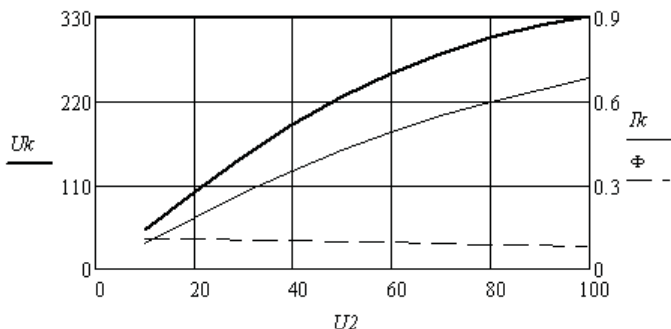


Рис. 9.9

Выполним аппроксимацию ВАХ_д и ФАХ_д длинной линии с нелинейной нагрузкой, рассматривая её как нелинейный двухполюсник (рис. 9.10).

$$S := \text{cspline}(I_k, U_k) \quad U(I) := \text{interp}(S, I_k, U_k, I)$$

$$SI := \text{cspline}(I_k, \Phi) \quad \Phi(I) := \text{interp}(SI, I_k, \Phi, I)$$

Построим зависимости модуля и аргумента комплексных действующих значений напряжения и тока от координаты вдоль линии при заданном значении ЭДС в начале линии (рис. 9.11 и 9.12).

$$E := 250 \quad I := 0.1 \quad \text{Given } E = U(I) \quad I_e := \text{Find}(I) \quad \Phi_e := \Phi(I_e)$$

$$U1 := E \quad I1 := I_e \cdot \exp(-\Phi_e \cdot j)$$

$$U(x) := U1 \cdot \cosh(\gamma \cdot x) - I1 \cdot Z_c \cdot \sinh(\gamma \cdot x) \quad I(x) := \frac{-U1 \cdot \sinh(\gamma \cdot x)}{Z_c} + I1 \cdot \cosh(\gamma \cdot x)$$

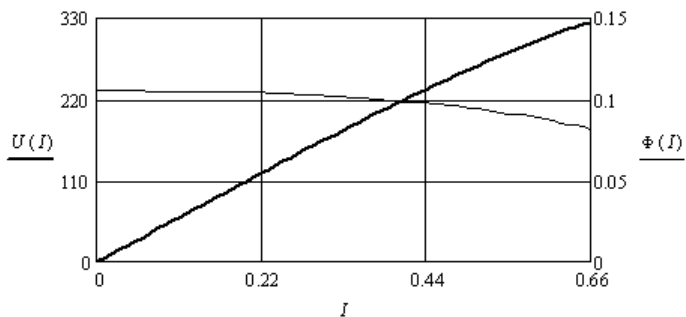


Рис. 9.10

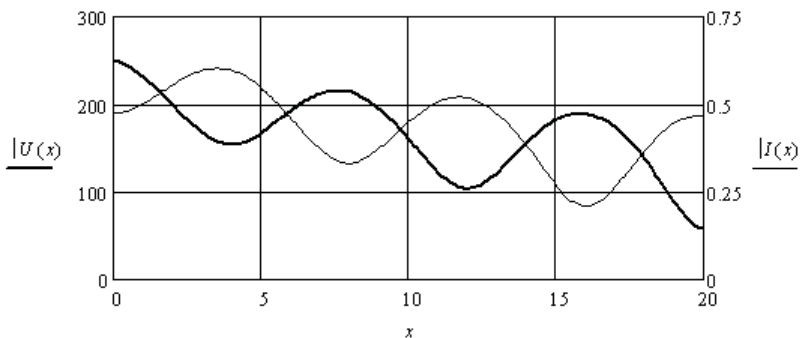


Рис. 9.11

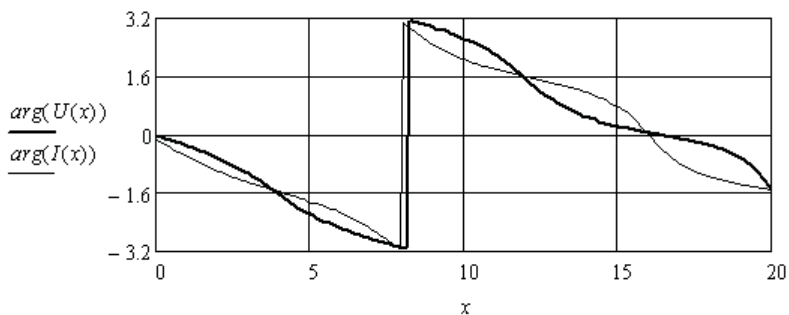


Рис. 9.12

Контрольные вопросы

1. Чем отличаются уравнения, определяющие состояние электрической цепи с сосредоточенными параметрами и состояние электрической цепи с распределёнными параметрами?
2. Дайте определение длинной линии.
3. Что относится к погонным параметрам длинной линии?
4. Из каких элементов состоит схема замещения длинной линии?
5. От чего зависит волновое сопротивление длинной линии?
6. От чего зависит входное сопротивление длинной линии?
7. При каких условиях имеют место бегущие волны?
8. При каких условиях имеют место стоячие волны?
9. Дайте определение длине волны в линии.

10. Приведите условия реализации неискажающей длинной линии.
11. Чему равна фазовая скорость в длинной линии?
12. От чего зависит коэффициент отражения?
13. От чего зависит коэффициент преломления?
14. Чему равны коэффициенты отражения в режимах холостого хода и короткого замыкания?
15. Почему возникает волна с прямоугольным фронтом?
16. Что такое искусственная длинная линия и как она используется?

10. ЗАДАНИЯ ДЛЯ ФОРМИРОВАНИЯ РАСЧЁТНО-ГРАФИЧЕСКИХ РАБОТ

Задание 1. Анализ электрической цепи постоянного тока в установившемся режиме

1. Подготовить схему электрической цепи постоянного тока, которая должна содержать не менее пяти независимых контуров, трех источников ЭДС и одного источника тока.

2. Составить для электрической цепи необходимую систему уравнений по законам Кирхгофа.

3. Выбрать произвольные параметры элементов электрической цепи и рассчитать неизвестные токи методом контурных токов.

4. Проверить правильность решения с помощью уравнения баланса мощностей.

5. Рассчитать неизвестные токи методом узловых потенциалов.

6. Используя метод эквивалентного генератора найти ток в одной из ветвей.

7. Построить потенциальную диаграмму для одного из независимых контуров, содержащего источники ЭДС.

8. Сделать выводы, в которых необходимо отразить режимы работы источников и дать оценку величинам токов в ветвях схемы.

9. Оформить отчёт о выполненной задаче по правилам оформления записки к курсовой работе или проекту. Листинги с компьютерными расчётами вынести в приложение.

Задание 2. Анализ электрической цепи синусоидального тока в установившемся режиме

1. Преобразовать схему электрической цепи постоянного тока из задачи 1, введя в каждую ветвь по одному реактивному элементу. Цепь должна содержать не менее пяти независимых контуров, трех

источников синусоидальной ЭДС и одного источника синусоидального тока. У всех источников частота должна быть одинаковой, а остальные параметры разные.

2. Выбрать произвольные параметры L и C реактивных элементов (сопротивления их должны быть одного порядка с сопротивлениями резисторов) и рассчитать неизвестные токи методом контурных токов в комплексной форме. Использовать матричную форму контурных уравнений на базе графа цепи.

3. Проверить правильность решения с помощью уравнения баланса мощностей в комплексной форме.

4. Рассчитать неизвестные токи, используя матричную форму уравнений для узловых потенциалов на базе графа цепи.

5. Построить векторную топографическую диаграмму напряжений на всех элементах и отдельно векторные диаграммы токов для каждого узла без одного.

6. Сделать выводы, в которых необходимо отразить режимы работы источников, их коэффициенты мощности и дать оценку величинам токов в ветвях схемы.

7. Оформить отчёт о выполненной задаче по правилам оформления записки к курсовой работе или проекту. Листинги с компьютерными расчётами вынести в приложение.

Задание 3. Анализ электрической цепи синусоидального тока с взаимно индуктивными связями

1. Преобразовать схему электрической цепи из задачи 2, введя две индуктивные связи с произвольными значениями коэффициентов связи. Цепь должна содержать не менее пяти независимых контуров, трехисточников синусоидальной ЭДС и одного источника синусоидального тока. У всех источников частота должна быть одинаковой.

2. Рассчитать неизвестные токи методом контурных токов в комплексной форме. Использовать матричную форму контурных уравнений на базе графа цепи.

3. Проверить правильность решения с помощью обобщённого уравнения баланса мощностей в комплексной форме.

4. Составить систему уравнений по законам Кирхгофа, которую решать не надо.

5. Сделать выводы, в которых надо отразить влияние взаимно индуктивных связей на состояние электрической цепи.

6. Оформить отчёт о выполненной задаче по правилам оформления записки к курсовой работе или проекту. Листинги с компьютерными расчётами вынести в приложение.

Задание 4. Анализ электрической цепи несинусоидального тока в установившемся режиме

1. Подготовить схему электрической цепи, содержащую источник тока, аппроксимируемый выражением и подключенные к нему две параллельные RL и RC ветви.

2. Задаться численными значениями аппроксимирующего выражения и параметрами элементов цепи.

3. Определить выражения для напряжения и токов в ветвях. Построить зависимость тока источника и все полученные зависимости от времени на интервале нескольких периодов.

4. С помощью соответствующих коэффициентов сравнить формы напряжения и токов.

5. Определить параметры эквивалентных синусоид напряжения и токов в ветвях.

6. Сделать выводы, в которых необходимо отразить влияние индуктивности и ёмкости на форму токов.

7. Оформить отчёт о выполненной задаче по правилам оформления записки к курсовой работе или проекту. Листинги с компьютерными расчётами вынести в приложение.

Задание 5. Анализ нелинейной электрической цепи постоянного тока в установившемся режиме

1. Подготовить схему нелинейной электрической цепи постоянного тока, которая должна содержать не менее трёх независимых контуров, двух источников ЭДС, одного источника тока и трёх нелинейных резисторов.

2. Составить для нелинейной электрической цепи необходимую систему уравнений по законам Кирхгофа.

3. Выбрать произвольные параметры источников, линейных резисторов и подготовить графики монотонных ВАХ нелинейных резисторов из условия, что диапазон статических сопротивлений

нелинейных резисторов должен быть одного порядка с сопротивлениями линейных резисторов, а их ВАХ должны быть симметричны относительно начала координат.

4. Выполнить численную аппроксимацию ВАХ нелинейных резисторов.

5. Рассчитать численно неизвестные токи.

6. Проверить баланс мощностей источников и приёмников.

7. Сделать выводы, в которых следует отразить режимы работы источников и дать оценку величинам токов в ветвях схемы.

8. Оформить отчёт о выполненной задаче по правилам оформления записки к курсовой работе или проекту. Листинги с компьютерными расчётами вынести в приложение.

Задание 6. Анализ цепей с распределёнными параметрами

1. Согласно порядковому номеру в списке группы выбрать вариант параметров длинной линии из таблицы ниже. Частоту ЭДС источника на входе линии выбрать в процессе решения задачи.

2. Рассчитать и построить зависимость входного сопротивления линии от её длины при согласованной нагрузке.

3. Рассчитать и построить зависимость входного сопротивления линии от её длины при несогласованной нагрузке активно-индуктивного характера.

4. Рассчитать и построить зависимость входного сопротивления линии от её длины при несогласованной нагрузке активно-емкостного характера.

5. Рассчитать и построить распределение тока и напряжения вдоль линии при согласованной нагрузке. Вдоль линии должны укладываться несколько длин волн.

6. Выбрать схему замещения линии и определить параметры её элементов.

7. Сделать выводы о степени влияния сопротивления нагрузки на входное сопротивление линии.

8. Оформить отчёт о выполненной задаче по правилам оформления записки к курсовой работе или проекту. Листинги с компьютерными расчётами вынести в приложение.

Библиографический список

1. Теоретические основы электротехники : в 3 т. : учеб. для вузов / К.С. Демирчан [и др.]. – 4-е изд., доп. для самостоят. изучения курса. – СПб. : Питер, 2006. – Т. 1. – 462 с.
2. Теоретические основы электротехники : в 3 т. : учеб. для вузов : / К.С. Демирчан [и др.]. – 4-е изд., доп. для самостоят. изучения курса. – СПб. : Питер, 2006. – Т. 2. – 575 с.
3. Бессонов, Л.А. Теоретические основы электротехники. Электрические цепи : учеб. для вузов / Л.А. Бессонов. – 11-е изд., испр. и доп. – М. : Гардарики, 2007. – 701 с.
4. Сборник задач по теоретическим основам электротехники : учеб. пособие для вузов / Л.А. Бессонов [и др.] ; под ред. Л.А. Бессонова. – 4-е изд., перераб. и испр. – М. : Высш. шк., 2003. – 528 с.
5. Бычков, Ю.А. Основы теории электрических цепей : учеб. для вузов / Ю.А. Бычков, В.М. Золотницкий, Э.П. Чернышев. – 3-е изд., стер. – СПб. : Лань, 2004. – 464 с.
6. Шакурский, В.К. Теоретические основы электротехники : учеб.-метод. пособие. Ч. 1. Анализ установившихся режимов в линейных электрических цепях / В.К. Шакурский ; ТГУ ; каф. «Электроснабжение и электротехника». – ТГУ. – Тольятти : ТГУ, 2007. – 77 с.
7. Шакурский, В.К. Теоретические основы электротехники : учеб.-метод. пособие. Ч. 2. Анализ переходных режимов в линейных электрических цепях / В.К. Шакурский ; ТГУ ; каф. «Электроснабжение и электротехника». – ТГУ. – Тольятти : ТГУ, 2007. – 71 с.
8. Алиев, И.И. Электротехнический справочник / И.И. Алиев. – 4-е изд., испр. – М. : РадиоСофт, 2006. – 383 с.
9. Кирьянов, Д.В. Mathcad 13 / Д.В. Кирьянов. – СПб. : БХВ-Петербург, 2006. – 608 с.

Параметры длинной линии (варианты)

№	R_0 (Ом/км)	G_0 (мкСм/км)	L_0 (мГн/км)	C_0 (нФ/км)
1	50	100	2	5
2	55	50	1,4	6
3	45	60	1,8	7
4	30	80	2,2	8
5	35	70	2,4	9
6	40	90	1,9	4
7	20	55	1,5	4,5
8	25	65	1,6	5,5
9	60	85	1,7	6,5
10	65	75	2,1	7,5
11	70	95	2,3	8,5
12	20	75	1,9	5
13	30	80	1,7	4,5
14	25	65	1,8	6
15	35	50	1,6	5,5
16	40	55	1,5	7,5
17	60	60	2	8
18	45	90	2,1	9
19	50	85	2,2	8,5
20	55	100	2,3	6,5
21	65	95	2,4	7
22	60	70	1,4	9,5
23	15	40	1,2	10
24	10	35	1,1	11
25	5	30	1	12

Содержание

Условные обозначения.....	3
ВВЕДЕНИЕ	5
1. АНАЛИЗ ЛИНЕЙНЫХ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ С ИСТОЧНИКАМИ ПОСТОЯННОЙ ЭДС И ПОСТОЯННОГО ТОКА	6
1.1. Метод свёртки.....	6
1.2. Метод уравнений Кирхгофа.....	15
1.3. Метод контурных токов	23
1.4. Метод узловых потенциалов.....	32
1.5. Численное исследование электрической цепи методом эквивалентного генератора.....	41
1.6. Диагностика сопротивлений резисторов в электрических цепях постоянного тока.....	44
2. АНАЛИЗ НЕЛИНЕЙНЫХ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ С ИСТОЧНИКАМИ ПОСТОЯННОЙ ЭДС И ПОСТОЯННОГО ТОКА	50
2.1. Численная аппроксимация характеристик нелинейных резисторов.....	50
2.2. Численный анализ нелинейной электрической цепи постоянного тока.....	57
3. АНАЛИЗ ЛИНЕЙНЫХ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ С ИСТОЧНИКАМИ СИНУСОИДАЛЬНОЙ ЭДС И СИНУСОИДАЛЬНОГО ТОКА	73
3.1. Использование метода свёртки в комплексной форме.....	74
3.2. Использование метода контурных токов в комплексной форме.....	82
3.3. Использование метода узловых потенциалов в комплексной форме.....	88
3.4. Анализ частотных характеристик электрических цепей.....	94
3.5. Анализ электрических цепей с зависимыми источниками.....	101
3.6. Анализ трёхфазных электрических цепей.....	108

4. АНАЛИЗ ЛИНЕЙНЫХ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ С НЕСИНУСОИДАЛЬНЫМИ ТОКАМИ	119
4.1. Анализ электрической цепи с источниками синусоидального тока и синусоидальной ЭДС разной частоты	119
4.2. Аппроксимация несинусоидальных периодических токов, напряжений и ЭДС рядами Фурье и эквивалентными синусоидами.....	123
4.3. Анализ линейной электрической цепи с источником несинусоидальной ЭДС.....	126
5. АНАЛИЗ ЛИНЕЙНЫХ ЧЕТЫРЁХПОЛЮСНИКОВ	133
5.1. Определение первичных коэффициентов уравнений четырёхполюсников	133
5.2. Свёртка четырёхполюсников.....	137
5.3. Взаимные преобразования форм уравнений четырёхполюсников.....	141
5.4. Частотные характеристики четырёхполюсников и фильтров.....	142
6. АНАЛИЗ НЕЛИНЕЙНЫХ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ С ПОМОЩЬЮ ХАРАКТЕРИСТИК ДЛЯ МГНОВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ ТОКОВ И НАПРЯЖЕНИЙ	152
6.1. Анализ нелинейных электрических цепей с источниками синусоидального тока или синусоидальной ЭДС.....	152
6.2. Анализ нелинейных электрических цепей с источниками несинусоидального тока или несинусоидальной ЭДС.....	161
7. АНАЛИЗ НЕЛИНЕЙНЫХ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ХАРАКТЕРИСТИК ДЛЯ ДЕЙСТВУЮЩИХ ЗНАЧЕНИЙ ЭКВИВАЛЕНТНЫХ СИНУСОИД ТОКОВ И НАПРЯЖЕНИЙ	170
7.1. Определение характеристик для действующих значений эквивалентных синусоид с помощью ВАХ для мгновенных значений напряжений и токов.....	170
7.2. Свёртка характеристик нелинейных двухполюсников....	178

7.3. Анализ нелинейной цепи с одним источником.....	184
7.4. Анализ нелинейной электрической цепи с несколькими источниками.....	187
8. ИССЛЕДОВАНИЕ ЯВЛЕНИЯ РЕЗОНАНСА В НЕЛИНЕЙНЫХ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЯХ	191
8.1. Исследование феррорезонанса напряжений.....	191
8.2. Исследование феррорезонанса токов.....	195
9. АНАЛИЗ СОСТОЯНИЯ ДЛИННОЙ ЛИНИИ С ЛИНЕЙНОЙ И НЕЛИНЕЙНОЙ НАГРУЗКОЙ	200
9.1. Анализ состояния длинной линии при линейной нагрузке.....	200
9.2. Анализ состояния длинной линии при нелинейной нагрузке.....	204
10. ЗАДАНИЯ ДЛЯ ФОРМИРОВАНИЯ РАСЧЁТНО- ГРАФИЧЕСКИХ РАБОТ	210
Библиографический список.....	214
Приложение.....	215

Учебное издание

Шакурский Виктор Константинович

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ЭЛЕКТРОТЕХНИКИ

В двух частях

Часть 1

АНАЛИТИЧЕСКИЕ И ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ АНАЛИЗА УСТАНОВИВШИХСЯ РЕЖИМОВ В ЛИНЕЙНЫХ И НЕЛИНЕЙНЫХ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЯХ

Редактор *Е.Ю. Жданова*

Технический редактор *З.М. Малявина*

Вёрстка: *Л.В. Сызганцева*

Дизайн обложки: *Г.В. Карасева*

Подписано в печать 2013. Формат 60×84/16.

Печать оперативная. Усл. п. л. 12,73.

Тираж 100 экз. Заказ № 1-38-12.

Издательство Тольяттинского государственного университета
445667, г. Тольятти, ул. Белорусская, 14

