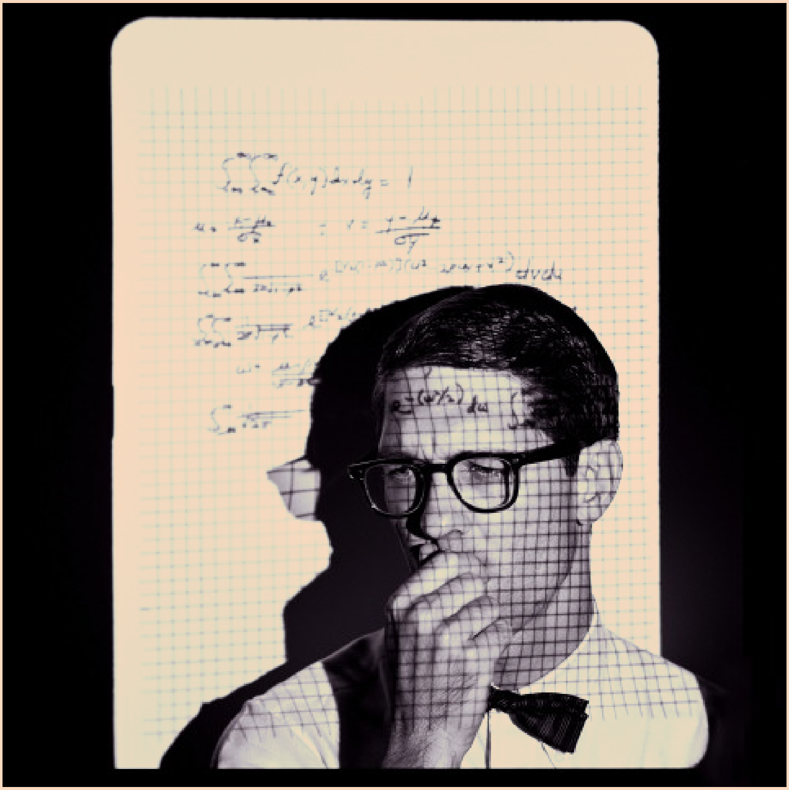
ТОЛЬЯТТИНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

СФЕРИЧЕСКОЕ ДВИЖЕНИЕ ТВЕРДОГО ТЕЛА



Министерство образования и науки Российской Федерации
Тольяттинский государственный университет
Институт машиностроения
Кафедра «Нанотехнологии, материаловедение и механика»

СФЕРИЧЕСКОЕ ДВИЖЕНИЕ ТВЕРДОГО ТЕЛА

Учебное пособие

Составители С.И. Будаев, С.Г. Прасолов

Тольятти
Издательство ТГУ
2013

УДК 531(075.8)
ББК 22.21я73
С919

Рецензенты:
канд. пед. наук, доцент, проректор по научной и учебной работе Института менеджмента, маркетинга и права (г. Тольятти) *П.Э. Шендерей*;
д-р физ.-мат. наук, профессор *Д.Л. Мерсон* (Тольяттинский государственный университет).

Научный редактор канд. пед. наук, доцент П.Э. Шендерей.

С919 Сферическое движение твердого тела : учеб. пособие / сост. С.И. Будаев, С.Г. Прасолов. – Тольятти : Изд-во ТГУ, 2013. – 68 с. : обл.

В учебном пособии приведены теоретические и практические сведения по темам «Вращательное движение твердого тела» и «Сферическое движение твердого тела». Показаны примеры применения теоретических положений на практике. В приложении приведены тесты по данным темам.

Предназначено для студентов, обучающихся по направлениям подготовки бакалавров 140000 «Энергетика, энергетическое машиностроение и электротехника», 150000 «Металлургия, машиностроение и материалообработка», 270000 «Архитектура и строительство», 020000 «Естественные науки», 210000 «Электронная техника, радиотехника и связь» очной и заочной форм обучения.

УДК 531(075.8)
ББК 22.21я73

Рекомендовано к изданию научно-методическим советом Тольяттинского государственного университета.

ВВЕДЕНИЕ

Одной из классических задач механики является задача о сферическом движении – движении твердого тела вокруг неподвижной точки. Эта задача имеет первостепенное значение для теории гироскопов, нашедшей широкое применение в различных областях современной техники. Эйлер дал аналитическое решение этой задачи в простейшем случае, а именно в случае движения тела вокруг неподвижной точки по инерции. Пуансо дал для того же самого случая наглядную геометрическую интерпретацию. Лагранж решил эту задачу в том случае, когда твердое тело имеет динамическую ось симметрии, проходящую через неподвижную точку. После Эйлера и Лагранжа многие ученые пытались найти новый случай решения этой задачи, т. е. новый случай интегрируемости дифференциальных уравнений движения твердого тела вокруг неподвижной точки, но безуспешно.

В 1888 году Парижская академия наук объявила конкурс на лучшее теоретическое исследование движения твердого тела вокруг неподвижной точки. Премию на этом конкурсе получила русская женщина – математик и механик Софья Васильевна Ковалевская. Она дала полное решение этой задачи в новом случае, значительно более сложном по сравнению со случаями Эйлера и Лагранжа. Эта работа принесла С.В. Ковалевской мировую известность и в значительной степени способствовала прославлению русской науки.

Для успешного изучения сферического движения твердого тела с точки зрения методики преподавания в начале учебного пособия дается тема «Вращательное движение твердого тела вокруг неподвижной оси».

1. ВРАЩАТЕЛЬНОЕ ДВИЖЕНИЕ ТВЕРДОГО ТЕЛА ВОКРУГ НЕПОДВИЖНОЙ ОСИ

1.1. Уравнение, или закон, вращательного движения твердого тела вокруг неподвижной оси

Если твердое тело движется так, что две его точки остаются неподвижными, то такое движение твердого тела называется вращательным движением вокруг неподвижной оси.

Прямая, проходящая через две неподвижные точки твердого тела, называется неподвижной осью этого тела.

Чтобы осуществить вращательное движение твердого тела вокруг неподвижной оси, достаточно закрепить две его какие-нибудь точки при помощи, например, подшипника A и подпятника B (рис. 1.1). Тогда прямая, проходящая через эти точки, будет неподвижной осью вращения тела. Очевидно, что все точки тела, лежащие на этой оси, будут во все время вращательного движения тела оставаться неподвижными. При этом траектории точек тела, не лежащих на оси вращения, являются окружностями, плоскости которых перпендикулярны к оси вращения. Центры этих окружностей лежат на оси вращения, и, следовательно, радиус каждой из них равен расстоянию соответствующей точки вращающегося тела от оси вращения.

Пусть ось вращения совпадает с осью z. Чтобы определить положение вращающегося тела, проведем через ось z две плоскости: подвижную Q, неизменно связанную с вращающимся телом, и неподвижную P (рис. 1.1). Двугранный угол φ между подвижной плоскостью Q и неподвижной плоскостью P *называется углом поворота тела*. Условимся считать этот угол положительным тогда, когда с положительного конца оси z мы видим его отложенным от неподвижной плоскости P в направлении против движения часовой стрелки, и отрицательным – по движению часовой стрелки.

Заданием величины и знака угла поворота вполне определяется положение плоскости Q относительно неподвижной системы отсчета xyz (рис. 1.1), а поскольку плоскость Q неизменно связана с вращающимся телом, то значением угла поворота будет вполне определяться и положение этого тела.

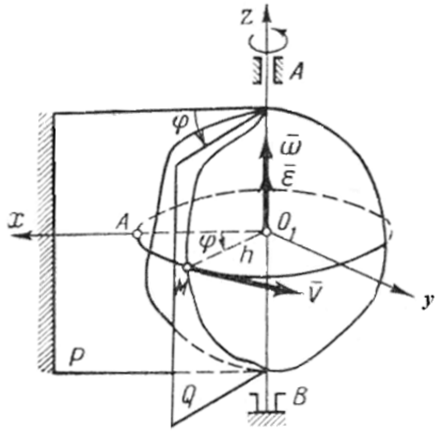


Рис. 1.1

Угол поворота тела обычно измеряют в радианах. Иногда в практических задачах этот угол выражают числом оборотов N тела. Так как один π оборот тела, т. е. его поворот на 360°, соответствует 2π рад, то получаем следующую зависимость:

$$\varphi = 2\pi N. \tag{1.1}$$

При вращении тела вокруг неподвижной оси Z угол поворота этого тела изменяется с течением времени, следовательно, он является некоторой функцией времени

$$\varphi = f(t). \tag{1.2}$$

Функцию $f(t)$ будем считать однозначной, непрерывной и дифференцируемой по крайней мере дважды.

Равенство (1.2) называется *уравнением, или законом, вращательного движения твердого тела вокруг неподвижной оси*. Это уравнение вполне определяет положение твердого тела в любой момент времени.

Итак, при вращательном движении твердого тела вокруг неподвижной оси оно имеет одну обобщенную координату и, следовательно, одну степень свободы.

При вращательном движении тела различные его точки движутся, вообще говоря, по-разному. Однако и для вращательного движения тела можно отыскать такие кинематические характеристики, которые были бы общими для всех точек тела, т. е. для всего тела в целом. Такими кинематическими характеристиками будут угол поворота φ, угловая скорость ω и угловое ускорение ε. Поэтому имеют отчетливый научный смысл понятия «угловая скорость *тела*» и «угловое ускорение *тела*», но нельзя говорить об угловой скорости *точки* и угловом ускорении *точки*.

1.2. Угловая скорость твердого тела, вращающегося вокруг неподвижной оси

Угловая скорость тела характеризует быстроту изменения угла поворота этого тела с течением времени.

Пусть в момент времени t положение вращающегося тела определяется углом поворота φ, а в момент $t_1 = t + \Delta t$ – углом поворота $\varphi = \varphi + \Delta\varphi$, где $\Delta\varphi$ – приращение угла поворота за промежуток времени Δt.

Отношение $\Delta\varphi/\Delta t$ называют *средней угловой скоростью тела за промежуток времени* Δt. Предел этого отношения, когда Δt стремится к нулю, называют *угловой скоростью тела в данный момент времени*. Обозначая угловую скорость в данный момент через ω, получаем

$$\omega = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \frac{d\varphi}{dt} = \dot{\varphi}. \qquad (1.3)$$

Таким образом, *угловая скорость тела в данный момент равна первой производной от угла поворота тела по времени*.

Значение угловой скорости $\omega = \frac{d\varphi}{dt}$ для данного момента времени может быть положительным или отрицательным в зависимости от того, возрастает или убывает угол поворота на интервале данных значений времени.

Когда тело вращается против движения часовой стрелки, если смотреть с положительного конца оси вращения Oz, то угол поворота φ возрастает, поэтому $\omega = \frac{d\varphi}{dt} > 0$. Если тело вращается по движению часовой стрелки, то угол поворота φ (принимая отрицательные значения) убывает, поэтому $\omega = \frac{d\varphi}{dt} < 0$.

Следовательно, знак угловой скорости указывает, в какую сторону в данный момент вращается тело вокруг оси.

Исходя из определения угловой скорости, можно найти и ее размерность. Размерность угловой скорости, если за единицу угла принять 1 рад, а за единицу времени 1 с, будет

$$[\omega]=\frac{[d\varphi]}{[dt]}=\frac{[\text{угол}]}{[\text{время}]}=\frac{\text{рад}}{\text{с}}$$

или

$$[\omega]=\frac{1}{c} \qquad \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \text{с}^{-1},$$

так как радиан – величина безразмерная.

1.3. Угловое ускорение твердого тела, вращающегося вокруг неподвижной оси

Угловое ускорение тела характеризует быстроту изменения угловой скорости этого тела с течением времени.

Если за промежуток времени $\Delta t = t_1 - t$ угловая скорость тела изменится на величину $\Delta\omega$, то отношение $\frac{\Delta\omega}{\Delta t}$ называется *средним угловым ускорением тела за промежуток времени* Δt. Предел этого отношения, когда Δt стремится к нулю, называют *угловым ускорением тела в данный момент времени*. Обозначая угловое ускорение через ε, получаем

$$\varepsilon = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\omega}{\Delta t}=\frac{d\omega}{dt}=\dot{\omega}\,, \tag{1.4}$$

или, принимая во внимание равенство (1.3),

$$\varepsilon=\frac{d^2\varphi}{dt^2}=\ddot{\varphi}\,. \tag{1.5}$$

Таким образом, *угловое ускорение тела в данный момент равно первой производной от угловой скорости по времени или второй производной от угла поворота тела по времени*.

Размерность углового ускорения выражается так:

$$[\varepsilon]=\frac{[d\omega]}{[dt]}=\frac{[\text{угловая скорость}]}{[\text{время}]}$$

или

$$[\varepsilon]=\frac{1}{\text{с}^2}=\text{с}^{-2}.$$

Если $\omega > 0$, то при $\varepsilon > 0$ угловая скорость возрастает, т. е. вращение тела ускоренное; если же $\varepsilon < 0$, то угловая скорость убывает – вращение тела *замедленное*.

Если $\omega < 0$, то при $\varepsilon < 0$ абсолютная величина угловой скорости возрастает – вращение тела ускоренное; если же $\varepsilon > 0$, то абсолютная величина угловой скорости убывает – вращение тела *замедленное*.

Таким образом, вращение тела будет ускоренным, когда угловая скорость ω и угловое ускорение ε имеют одинаковые знаки, и замедленным – когда знаки разные.

1.4. Частные случаи вращательного движения твердого тела вокруг неподвижной оси

А. Если угловая скорость тела ω остается во все время вращательного движения постоянной ($\omega = \text{const}$), то вращение тела называется *равномерным.* Найдем закон равномерного вращения тела. Так как

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt},$$

то

$$d\varphi = \omega dt,$$

где $\omega = \text{const}$. Отсюда при интегрировании получаем

$$\varphi = \omega t + C,$$

где C – постоянная интегрирования. Величину C находим из начального условия. Если при $t = 0$, $\varphi = \varphi_0$, то $C = \varphi_0$.

Отсюда получаем закон равномерного вращения тела в виде

$$\varphi = \varphi_0 + \omega t. \tag{1.6}$$

Считая, что в начальный момент при $t = 0$ угол $\varphi = \varphi_0 = 0$, получим

$$\varphi = \omega t. \tag{1.7}$$

Из этого равенства следует, что при равномерном вращении тела

$$\omega = \frac{\varphi}{t}. \tag{1.8}$$

В технике угловую скорость равномерного вращения обычно характеризуют числом оборотов в минуту и обозначают эту величину через n об/мин. При одном обороте тело поворачивается на угол 2π, а при n оборотах оно поворачивается на угол $2\pi n$; этот поворот тела совершается за время $t = 1$ мин $= 60$ с. Из формулы (1.8) следует тогда, что

$$\omega = \frac{\pi n}{30}\frac{1}{\text{с}}. \tag{1.9}$$

Для грубых расчетов можно считать $\pi \approx 3$, и тогда

$$\omega \approx 0{,}1 n\frac{1}{\text{с}}. \tag{1.10}$$

Б. Если угловое ускорение тела остается во все время вращательного движения постоянным ($\varepsilon = \text{const}$), то вращение тела называется *равнопеременным*. Найдем закон равнопеременного вращения тела. Так как

$$\varepsilon = \frac{d\varphi}{dt},$$

то $d\omega = \varepsilon dt$.

При интегрировании этого равенства получаем

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} = \varepsilon t + C_1,$$

где постоянная интегрирования C_1 находится из начальных условий. Если при $t = 0$, $\omega = \omega_0$, то $C_1 = \omega_0$.

Отсюда следует, что в случае равнопеременного вращательного движения тела угловая скорость определяется по формуле

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} = \omega_0 + \varepsilon t. \tag{1.11}$$

Если равенство (1.11) проинтегрировать, то получим

$$\varphi = \omega_0 t + \frac{\varepsilon t^2}{2} + C_2.$$

Если при $t = 0$, $\varphi = 0$, то постоянная интегрирования $C_2 = 0$. Тогда окончательно закон равнопеременного вращательного движения тела примет вид

$$\varphi = \omega_0 t + \frac{\varepsilon t^2}{2}. \tag{1.12}$$

Если угловая скорость ω и угловое ускорение ε имеют одинаковые знаки, то вращение тела будет *равноускоренным*, а если разные – *равнозамедленным*.

1.5. Скорости и ускорения точек тела, вращающегося вокруг неподвижной оси

Рассмотрим какую-нибудь точку M вращающегося тела, находящуюся на расстоянии h от оси вращения z (рис. 1.1 и 1.2). При вращении тела точка M будет описывать окружность радиуса h, плоскость которой перпендикулярна к оси вращения, а центр O_1 лежит на самой оси. Так как угловая скорость тела не зависит от выбора подвижной плоскости Q, то мы всегда можем выбрать эту плоскость так, чтобы она проходила через рассматриваемую точку M (рис. 1.1). Будем определять положение точки M на ее траектории дуговой координатой s, отсчитываемой от взятой на плоскости P неподвижной точки A, причем за положительное направление отсчета дуги s примем положительное направление отсчета угла поворота φ (рис. 1.1 и 1.2).

Тогда $s = h\varphi$, а следовательно, скорость точки M будет

$$v_\tau = \frac{ds}{dt} = h\frac{d\varphi}{dt},$$

или

$$v_\tau = h\omega. \tag{1.13}$$

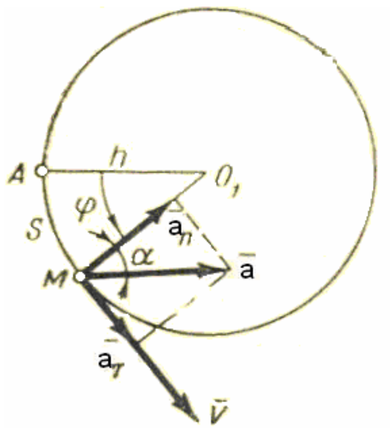


Рис. 1.2

Эту скорость точки M в отличие от угловой скорости тела часто называют *линейной скоростью*.

Таким образом, *линейная скорость какой-либо точки вращающегося твердого тела равняется произведению угловой скорости тела на расстояние от этой точки до оси вращения.* Вектор линейной скорости $\bar{v}$ точки M направлен по касательной к окружности, которую описывает точка M, и, следовательно, перпендикулярен к плоскости, проходящей через ось вращения и точку M.

Модуль v вектора линейной скорости $\bar{v}$ точки, как известно, равен

$$v = |v_\tau| = \left|\frac{ds}{dt}\right|,$$

поэтому в нашем случае

$$v = h|\omega|, \tag{1.14}$$

где $|\omega|$ – абсолютное значение угловой скорости тела.

Так как угловая скорость ω является кинематической характеристикой всего тела в целом, то из формулы (1.13) следует, что линейные скорости точек вращающегося тела пропорциональны расстояниям этих точек от оси вращения.

По формулам, полученным в кинематике точки, найдем

$$a_\tau = \frac{dv_\tau}{dt} = h\frac{d\omega}{dt} = h\varepsilon\,; \tag{1.15}$$

$$a_n = \frac{v_\tau^2}{\rho} = \frac{\omega^2 h}{h} = h\omega^2\,, \tag{1.16}$$

так как для окружности $\rho = h$.

Следовательно, модуль вектора касательного ускорения точки равен

$$|\bar{a}_\tau| = h\,|\varepsilon|, \tag{1.17}$$

где $|\varepsilon|$ – абсолютное значение углового ускорения.

Если тело вращается *ускоренно*, то в этом случае вектор касательного ускорения $\bar{a}_\tau$ и вектор скорости $\bar{v}$ точки M направлены в *одну* и *ту же сторону* по касательной к описываемой точкой M окружности (рис. 1.2). Если же тело вращается *замедленно*, то векторы $\bar{a}_\tau$ и $\bar{v}$ направлены в противоположные стороны (рис. 1.3).

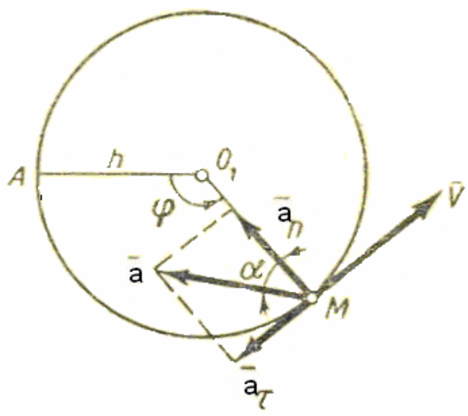


Рис. 1.3

Модуль вектора нормального ускорения $\bar{a}_n$ точки M выражается формулой

$$|\bar{a}_n| = a_n = h\,\omega^2. \qquad (1.18)$$

Что касается вектора $\bar{a}_n$, то он направлен всегда по радиусу окружности, описываемой точкой M. Поэтому ускорение $\bar{a}_n$ иногда называют центростремительным ускорением.

Модуль вектора полного ускорения $\bar{a}$ точки M равен

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2} = h\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}. \qquad (1.19)$$

Чтобы определить направление вектора $\bar{a}$, достаточно вычислить угол α, образуемый этим вектором с радиусом O_1M описываемой точкой окружности. Из рис. 1.2 или 1.3 ясно, что

$$\mathrm{tg}\alpha = \frac{|\omega_\tau|}{\omega_n} = \frac{|\varepsilon|}{\omega^2}$$

или

$$\mathrm{tg}\alpha = \frac{|\varepsilon|}{\omega^2}. \qquad (1.20)$$

Так как угловая скорость ω и угловое ускорение ε являются кинематическими характеристиками всего тела в целом, то из формулы (1.19) следует, что линейные ускорения всех точек вращающегося тела пропорциональны расстояниям этих точек от оси вращения. При этом из формулы (1.20) следует, что линейные ускорения всех точек вращающегося тела образуют в данный момент времени один и тот же угол α с радиусами описываемых ими окружностей.

В частном случае, когда тело вращается равномерно ($\omega = \mathrm{const}$), угловое ускорение $\varepsilon = 0$, поэтому $\alpha = 0$ и $a_\tau = 0$, следовательно, полное ускорение равно по модулю $a = a_n = h\omega^2$ и направлено к центру окружности, описываемой точкой М.

1.6. Угловая скорость и угловое ускорение твердого тела, вращающегося вокруг неподвижной оси, как векторы

Чтобы получить векторные формулы, определяющие векторы скорости и ускорения точек вращающегося вокруг неподвижной оси твердого тела, условились изображать угловую скорость этого тела вектором. Модуль вектора $\overline{\omega}$, изображающего угловую скорость тела, считают равным абсолютной величине угловой скорости тела, т. е. $|\overline{\omega}| = |\varphi|$. При этом вектор $\overline{\omega}$ откладывают по оси вращения так, чтобы наблюдатель, смотрящий с конца этого вектора в сторону его начала, видел вращение тела совершающимся против движения часовой стрелки (правило правого винта).

Что касается начала вектора $\overline{\omega}$, то оно может быть помещено в любой точке на оси вращения, т. е. вектор угловой скорости определяют как вектор *скользящий.*

Задав *вектор угловой скорости* $\overline{\omega}$, можно для каждого момента времени сразу определить: 1) положение оси вращения тела (прямая, вдоль которой расположен вектор $\overline{\omega}$); 2) направление вращения тела вокруг этой оси, определяемое направлением вектора $\overline{\omega}$ по правилу правого винта; 3) абсолютную величину угловой скорости тела, равную модулю вектора $\overline{\omega}$.

Угловое ускорение тела (по аналогии с угловой скоростью) также изображают в виде вектора. Производную от вектора угловой скорости по времени, т. е. $\frac{d\overline{\omega}}{dt}$, называют *вектором углового ускорения* и обозначают через $\overline{\varepsilon}$. Обозначим через $\overline{k}^\circ$ единичный вектор вектора $\overline{\omega}$, тогда

$$\overline{\omega} = \omega\overline{k}^\circ. \tag{1.21}$$

Так как ось вращения твердого тела неподвижна, то $\overline{k}^\circ$ есть вектор постоянный не только по модулю, но и по направлению, т. е. $\overline{k}^\circ = \text{const}$. Дифференцируя равенство (1.21) по времени, получим вектор углового ускорения

$$\overline{\varepsilon} = \frac{d\overline{\omega}}{dt} = \frac{d\omega}{dt}\overline{k}^\circ = \frac{d^2\varphi}{dt^2}\overline{k}^\circ,$$

или

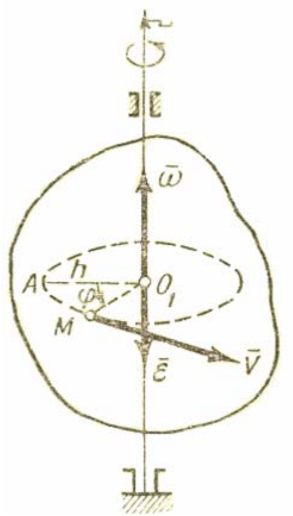
$$\overline{\varepsilon} = \varepsilon\overline{k}^\circ. \tag{1.22}$$

Из формул (1.21) и (1.22)следует, что для тела, вращающегося вокруг неподвижной оси, вектор $\overline{\varepsilon}$, так же как и вектор $\overline{\omega}$, направлен вдоль оси вращения. Если при этом знак ε совпадает со знаком ω, т. е. если тело вращается ускоренно, то вектор $\overline{\varepsilon}$ направлен в ту же сторону, что и вектор $\overline{\omega}$ (рис. 1.1). Если же тело вращается замедленно (когда ε и ω разных знаков), то вектор $\overline{\varepsilon}$ направлен в сторону, противоположную вектору $\overline{\omega}$ (рис. 1.4).

Модуль вектора углового ускорения $\overline{\varepsilon}$ равен абсолютной величине углового ускорения тела, т. е. $|\overline{\varepsilon}| = |\dot{\omega}| = |\ddot{\varphi}|$.

1.7. Векторные формулы для определения скоростей и ускорений точек твердого тела, вращающегося вокруг неподвижной оси

Выведем теперь векторную формулу для определения вектора скорости произвольной точки твердого тела, вращающегося вокруг неподвижной оси (рис. 1.5). Для этой цели в качестве неподвижного полюса примем центр O_1 окружности, описываемой данной точкой *M*, и составим векторное произведение $\overline{\omega}\times\overline{h}$, в котором через $\overline{h}$ обозначен радиус-вектор точки *M*. Результатом этого векторного произведения будет вектор, перпендикулярный к $\overline{\omega}$ и $\overline{h}$ и направленный таким образом, что если смотреть с конца этого вектора в сторону его начала, то поворот от $\overline{\omega}$ к $\overline{h}$ на наименьший угол совершится против движения часовой стрелки. Но это направление будет совпадать с направлением вектора скорости $\bar{v}$ точки *M* (рис. 1.5).



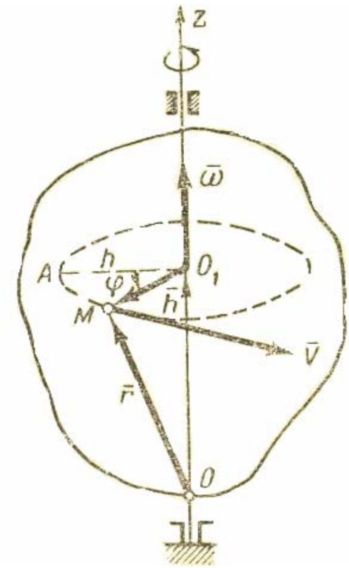


Рис. 1.4 Рис. 1.5

Кроме того, модуль векторного произведения $\overline{\omega}\times\overline{h}$ равен

$$\left|\overline{\omega}\times\overline{\mathrm{h}}\right| = \left|\overline{\omega}\right|\left|\overline{h}\right|\cdot\sin 90^{o} = |\omega|\cdot h,$$

где ω – абсолютное значение угловой скорости тела. Принимая во внимание формулу (1.14), мы заключаем, что модуль и направление вектора $\overline{\omega} \times \overline{h}$ совпадают с модулем и направлением вектора скорости $\overline{v}$ точки *M*; поэтому

$$\overline{v} = \overline{\omega} \times \overline{h}. \qquad (1.23)$$

Если на оси вращения тела выбрать произвольный полюс О и построить радиус-вектор $\overline{\mathbf{r}}$, соединяющий этот полюс с точкой *M*, то легко видеть (рис. 1.5), что

$$\overline{r} = \overline{OO_1} + \overline{h},$$

или

$$\overline{h} = \overline{r} - \overline{OO_1}.$$

Отсюда следует, что

$$\overline{v} = \overline{\omega} \times \overline{h} = \overline{\omega} \times (\overline{r} - \overline{OO_1}) = \overline{\omega} \times \overline{r} - \overline{\omega} \times \overline{OO_1} = \overline{\omega} \times \overline{r},$$

так как векторное произведение коллинеарных векторов $\overline{\omega}$ и $\overline{OO_1}$ тождественно равно нулю $\overline{\omega} \times \overline{OO_1} = 0$.

Таким образом, получаем искомую векторную формулу

$$\overline{v} = \overline{\omega} \times \overline{r}, \qquad (1.24)$$

т. е. *вектор скорости любой точки тела, вращающегося вокруг неподвижной оси, равен векторному произведению вектора угловой скорости тела на радиус-вектор этой точки, проведенный из произвольно выбранной точки, взятой на оси вращения тела*.

Формула (1.24) называется *формулой Эйлера*. Она позволяет при заданном векторе угловой скорости найти модуль и направление скоростей точек тела, вращающегося вокруг неподвижной оси.

Выведем теперь векторную формулу для определения вектора ускорения произвольной точки М твердого тела, вращающегося вокруг неподвижной оси. Для этого продифференцируем равенство (1.24) по времени. Тогда получим

$$\overline{a} = \frac{d\overline{v}}{dt} = \frac{d\overline{\omega}}{dt} \times \overline{r} + \overline{\omega} \times \frac{d\overline{r}}{dt}.$$

Так как

$$\frac{d\overline{\omega}}{dt} = \overline{\varepsilon} \text{ и } \frac{d\overline{r}}{dt} = \overline{v},$$

то, внося значения $\frac{d\overline{\omega}}{dt}$ и $\frac{d\overline{r}}{dt}$ в предыдущее равенство, получим

$$\overline{a} = \overline{\varepsilon} \times \overline{r} + \overline{\omega} \times \overline{v}. \qquad (1.25)$$

Докажем, что векторное произведение $\bar{\varepsilon} \times \bar{r}$ представляет собой вектор касательного ускорения $\bar{a}_\tau$ точки *M*, а векторное произведение $\bar{\omega} \times \bar{v}$ представляет собой вектор нормального ускорения $\bar{a}_n$ точки *M*. Пусть для определенности вращение тела ускоренное (рис. 1.6).

В этом случае направление вектора $\bar{\varepsilon}$ совпадает с направлением вектора $\bar{\omega}$. Тогда из сравнения векторов $\bar{\varepsilon} \times \bar{r}$ и $\bar{v} = \bar{\omega} \times \bar{r}$ следует, что направление вектора $\bar{\varepsilon} \times \bar{r}$ совпадает с направлением вектора скорости $\bar{v} = \bar{\omega} \times \bar{r}$ точки *M*.

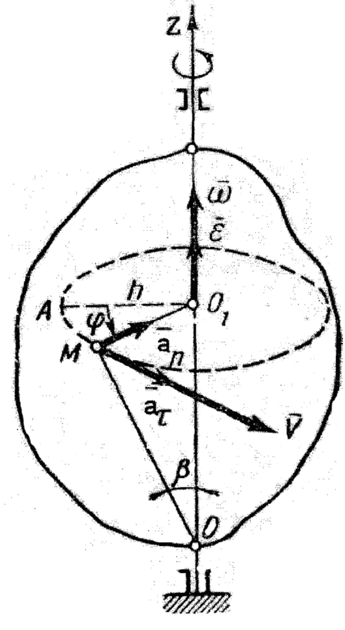


Рис. 1.6

Отсюда следует, что направление вектора $\bar{\varepsilon} \times \bar{r}$ совпадает с направлением вектора касательного ускорения $\bar{a}_\tau$ точки *M*. Модуль вектора $\bar{\varepsilon} \times \bar{r}$ будет (рис. 1.6)

$$\left|\bar{\varepsilon} \times \bar{r}\right| = \left|\bar{\varepsilon}\right| r \sin\beta = \left|\bar{\varepsilon}\right| h = \left|\varepsilon\right| h,$$

где $|\varepsilon|$ – абсолютное значение углового ускорения тела; β – угол между $\bar{r}$ и осью z. Принимая во внимание формулу (1.17), заключаем, что модуль и направление вектора $\bar{\varepsilon} \times \bar{r}$ совпадают с модулем и направлением вектора касательного ускорения точки М; поэтому

$$\bar{a}_\tau = \bar{\varepsilon} \times \bar{r}\ . \qquad (1.26)$$

Направление вектора $\bar{\omega} \times \bar{v}$ перпендикулярно к вектору угловой скорости $\bar{\omega}$ тела и вектору скорости $\bar{v}$ точки *M*, т. е. идет по радиусу окружности, описываемой точкой *M*, к ее центру O_1. Модуль вектора $\bar{\omega} \times \bar{v}$ будет

$$|\bar{\omega} \times \bar{v}| = |\bar{\omega}||\bar{v}| \sin 90^\circ = |\bar{\omega}| v = |\omega| v.$$

Но при движении точки *M* по окружности радиуса $h = O_1M$ имеем

$$|\bar{v}| = v = |\omega| h\ ,$$

поэтому предыдущая формула примет вид

$$|\bar{\omega} \times \bar{v}| = \omega^2 h.$$

Принимая во внимание формулу (1.18), заключаем, что модуль и направление вектора $\bar{\omega} \times \bar{r}$ совпадают с модулем и направлением вектора нормального ускорения $\bar{a}_n$ точки *M*; поэтому

$$\bar{a}_n = \bar{\omega} \times \bar{v}\ . \qquad (1.27)$$

1.8. Решение задач

Задачи, относящиеся к вращательному движению твердого тела вокруг неподвижной оси, можно разделить на три основных типа: 1) определение угла поворота, угловой скорости и углового ускорения тела; 2) определение линейных скоростей и ускорений точек вращающегося тела; 3) задачи, относящиеся к передаче вращательного движения от одного тела к другому (зубчатые и ременные передачи).

С методами решения этих основных задач проще всего ознакомиться, рассмотрев решения следующих задач.

Задача 1. Турбина реактивного двигателя, достигшая скорости вращения 2700 об/мин, начала с этого момента вращаться равноускоренно, и через 50 с скорость ее вращения возросла до 4200 об/мин. Определить угловое ускорение турбины, а также число оборотов, сделанных ею за 50 с.

Решение. Эта задача относится к задачам первого типа. Так как турбина вращается равноускоренно, то для нее

$$\omega = \omega_0 + \varepsilon t; \qquad (а)$$

$$\varphi = \omega_0 t + \frac{\varepsilon t^2}{2}, \tag{б}$$

считая $\varphi_0 = 0$.

В данном случае

$$\omega_0 = \frac{\pi n_0}{30} = \frac{\pi \cdot 2700}{30} = 90\pi \frac{1}{c}; \quad \omega = \frac{\pi n}{30} = \frac{\pi \cdot 4200}{30} = 140\pi \frac{1}{c};$$

$$t = 50 \text{ с}.$$

Подставляя эти значения в формулы (а) и (б), определяем угловое ускорение турбины

$$\varepsilon = \frac{\omega - \omega_0}{t} = \frac{140\pi - 90\pi}{50} = \pi \frac{1}{c^2}$$

и угол ее поворота

$$\varphi = 90\pi \cdot 50 + \frac{\pi \cdot 50^2}{2} = 5750 \text{ рад}.$$

Так как $\varphi = 2\pi N$, то число сделанных турбиной за 50 с оборотов N будет равно

$$N = \frac{\varphi}{2\pi} = \frac{5750\pi}{2\pi} = 2875 \text{ об}.$$

Задача 2. В период разгона маховик вращается вокруг своей оси по закону $\varphi = 8\pi t^3$. Определить угловую скорость и угловое ускорение маховика в тот момент, когда он сделает 4 оборота.

Решение. Эта задача относится к задачам первого типа. По заданному закону вращательного движения находим угловую скорость и угловое ускорение маховика в данный момент

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} = 24\pi t^2; \quad \varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = 48\pi t.$$

Так как маховик сделал 4 оборота, то угол поворота равен

$$\varphi = 2\pi N = 2\pi 4 = 8\pi \text{ рад}.$$

Далее находим, в какой момент времени t угол поворота маховика будет равен $\varphi = 8\pi$ рад. Для этого подставим это значение угла поворота в формулу $\varphi = 8\pi t^3$, тогда получим $8\pi = 8\pi t^3$, отсюда

$$t = \sqrt[3]{1} = 1\, c.$$

Угловая скорость и угловое ускорение маховика в этот момент времени будут равны

$$\omega = 24\pi \cdot 1^2 = 24\pi \frac{1}{c}; \quad \varepsilon = 48\pi \cdot 1 = 48\pi \frac{1}{c}.$$

Задача 3. Вал, делающий $n = 90$ об/мин, после выключения двигателя начинает вращаться равнозамедленно и до остановки сделал 30 оборотов. Определить, сколько времени прошло с момента выключения двигателя до остановки вала.

Решение. Эта задача относится к задачам первого типа. Так как вал вращается равнозамедленно, то для него

$$\omega = \omega_0 + \varepsilon t; \qquad (а)$$

$$\varphi = \omega_0 t + \frac{\varepsilon t^2}{2}, \qquad (б)$$

считая $\varphi_0 = 0$.

Начальной угловой скоростью вала будет та, которую вал имел до выключения двигателя. Следовательно,

$$\omega_0 = \frac{\pi n}{30} = \frac{\pi \cdot 90}{30} = 3\pi \frac{1}{c} .$$

Так как в момент остановки угловая скорость вала равна нулю, то $\omega = 0$. Подставляя это значение в уравнение (б), получаем

$$0 = 3\pi + \varepsilon t.$$

Отсюда

$$\varepsilon = -\frac{3\pi}{t}.$$

Так как вал до остановки сделал $N = 30$ об, то угол поворота вала равен $\varphi = 2\pi N = 2\pi \cdot 30 = 60\pi$ рад. Подставляя найденные значения ε и φ в уравнение (а), получаем

$$60\pi = 3\pi t - \frac{3\pi}{t} \cdot \frac{t^2}{2},$$

откуда

$$t = \frac{120}{3} = 40\ c .$$

Задача 4. Маховик радиуса $R = 1$ м вращается равномерно вокруг своей оси, делая пять оборотов за 0,5 с. Определить линейную скорость и линейное ускорение точки, лежащей на ободе маховика.

Решение. Эта задача относится к задачам второго типа. Так как маховик вращается равномерно, то для него

$$\varphi = \varphi_0 + \omega t,$$

или

$$\omega = \frac{\varphi - \varphi_0}{t}.$$

В данном случае за время $t = 0{,}5$ с угол поворота маховика

$$\varphi - \varphi_0 = 2\pi N = 2\pi \cdot 5 = 10\pi \text{ рад},$$

поэтому

$$\omega = \frac{10\pi}{0{,}5} = 20\pi \frac{1}{c}.$$

Кроме того, при равномерном вращении маховика $\omega = \text{const}$, следовательно, $\varepsilon = 0$.

Таким образом,

$$v = R\omega = 1 \cdot 20\pi = 20\pi \cong 62{,}8 \text{ м/с};$$

$$a_\tau = R\varepsilon = 0;$$

$$a_n = R\omega^2 = 1 \cdot 400\pi^2 \cong 3943{,}8 \text{ м/с}^2;$$

$$a = a_n \cong 3943{,}8 \text{ м/с}.$$

Итак, искомая скорость v~62,8 м/с, а искомое ускорение $a \cong 3943{,}8$ м/с и направлено по радиусу к оси вращения маховика.

Задача 5. В период разгона маховик вращается по закону $\varphi = \frac{1}{2}t^2$. Определить линейную скорость и линейное ускорение точки, находящейся на расстоянии $h = 1$ м от оси вращения, в тот момент, когда касательное ускорение этой точки станет равно нормальному.

Решение. Эта задача относится к задачам второго типа. Найдем сначала угловую скорость и угловое ускорение маховика в данный момент

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} = t\frac{1}{c}; \qquad \varepsilon = 1\frac{1}{c^2}.$$

Для касательного и нормального ускорений точки имеем формулы $a_\tau = h\varepsilon$; $a_n = h\omega^2$. Определим момент, в который $a_\tau = a_n$. Очевидно, в этот момент $\varepsilon = \omega^2$, или $t^2 = 1$, откуда $t = 1$ с.

Подставляя это значение времени t в выражение для ω, найдем, что в момент $t = 1$ с

$$\omega = 1\frac{1}{c}; \qquad \varepsilon = 1\frac{1}{c^2}.$$

Отсюда искомая скорость при $t = 1$ с будет равна

$$v = h\omega = 1 \text{ м/с}.$$

Так как касательное и нормальное ускорения точки, находящейся на расстоянии $h = 1$ м от оси вращения маховика, при $t = 1$ с равны $a_\tau = h\varepsilon = 1$ м/с^2; $a_n = h\omega^2 = 1$ м/с^2, то искомое ускорение при этом будет равно

$$a = h\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4} = \sqrt{2} \text{ м/с}^2 \cong 1{,}41 \text{ м/с}^2.$$

Так как

$$tg\alpha = \frac{|\varepsilon|}{\omega^2} = 1,$$

то вектор искомого ускорения $\overline{\omega}$ направлен под углом $\alpha = 45°$ к радиусу h.

Задача 6. Зубчатое колесо I радиусом $r_1 = 0{,}6$ м находится во внешнем зацеплении с колесом II радиусом $r_2 = 0{,}5$ м (рис. 1.7).

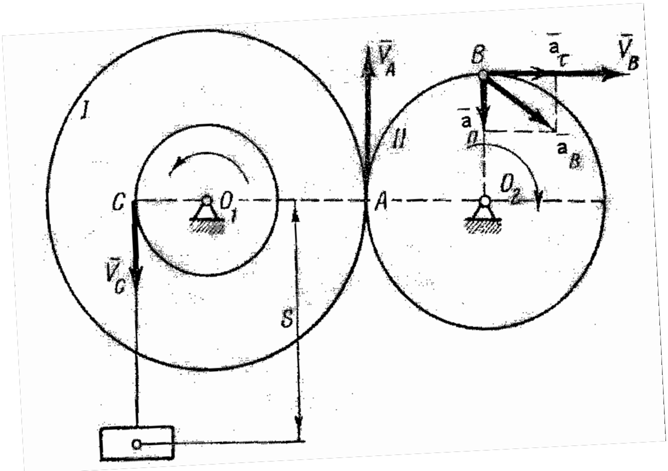


Рис. 1.7

На вал радиусом $r_3 = 0{,}3$ м колеса I намотана нить, к концу её подвешен груз, который движется в вертикальном направлении по закону $s = 3t^2$ (s – в метрах, t – в секундах). Определить угловую скорость и угловое ускорение колеса II, а также полное линейное ускорение какой-либо точки B, лежащей на ободе этого колеса.

Решение. Эта задача относится к задачам третьего типа. Колесо I (ведущее) вращается вокруг неподвижной оси O_1 в направлении, противоположном движению часовой стрелки. Скорость точки A зацепления колес будет направлена, как показано на рис. 1.7, следовательно, колесо II (ведомое) будет вращаться вокруг неподвижной оси O_2 в сторону, противоположную вращению ведущего колеса I.

Для линейной скорости точки A, принадлежащей одновременно и колесу I и колесу II, будем иметь

$$V_A = \omega_1 r_1 = \omega_2 r_2,$$

где ω_1 и ω_2 – угловые скорости колес I и II. Отсюда следует, что

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{r_1}{r_2},$$

т. е. отношение угловой скорости ведущего колеса и угловой скорости ведомого равно обратному отношению их радиусов.

Линейная скорость поступательно движущегося груза (или скорость нити) равна

$$v_c = \frac{ds}{dt} = 6t \text{ м/с} .$$

Так как вал приводится во вращательное движение сматываемой с него нитью, то линейная скорость точки C, лежащей на ободе вала, равна скорости груза (или нити). При этом угловая скорость вала, а следовательно и колеса I, будет равна

$$\omega = \frac{v_c}{r_3} = \frac{6t}{0{,}3} = 20t \frac{1}{\text{с}},$$

а угловое ускорение колеса I будет равно

$$\varepsilon_1 = \frac{d\omega_1}{dt} = 20 \frac{1}{c^2} .$$

Вращение колес I и II равноускоренное, а поэтому для угловых скоростей этих колес имеем формулы $\omega_1 = \varepsilon_1 t$ и $\omega_2 = \varepsilon_2 t$, откуда

$$\frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{r_1}{r_2} = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} .$$

Отсюда находим угловую скорость ω_2 и угловое ускорение ε_2 колеса II

$$\omega_2 = \omega_1 \frac{r_1}{r_2} = 20t \frac{0{,}6}{0{,}5} = 24t \frac{1}{c} \quad \text{и} \quad \varepsilon_2 = \varepsilon_1 \frac{r_1}{r_2} = 20 \frac{0{,}6}{0{,}5} = 24 \frac{1}{c^2}.$$

Линейное ускорение произвольной точки B обода колеса II будет равно

$$a_B = r_2 \sqrt{\varepsilon_2^2 + \omega_2^4} = 12\sqrt{1 + 576t^4} \text{ м/с}^2 .$$

Контрольные вопросы

1. Как записывается уравнение, или закон, вращательного движения твердого тела вокруг неподвижной оси?
2. Как находится угловая скорость твердого тела, вращающегося вокруг неподвижной оси?
3. Как находится угловое ускорение твердого тела, вращающегося вокруг неподвижной оси?
4. Как выглядят частные случаи вращательного движения твердого тела вокруг неподвижной оси?
5. Как находятся скорости и ускорения точек тела, вращающегося вокруг неподвижной оси?
6. Как представляются угловая скорость и угловое ускорение твердого тела, вращающегося вокруг неподвижной оси, как векторы?
7. Как выглядят векторные формулы для определения скоростей и ускорений точек твердого тела, вращающегося вокруг неподвижной оси?

2. СФЕРИЧЕСКОЕ ДВИЖЕНИЕ ТВЕРДОГО ТЕЛА

2.1. Уравнения движения твердого тела, имеющего одну неподвижную точку

Если твердое тело движется таким образом, что какая-нибудь одна его точка остается неподвижной, то такое движение называется движением твердого тела вокруг неподвижной точки, или сферическим движением. При этом неподвижная точка может принадлежать телу или находиться вне тела, но тогда следует представлять себе, что она каким-нибудь образом неизменно связана с телом, например при помощи стержня. Примером твердого тела, имеющего одну неподвижную точку, может служить волчок, заостренный конец ножки которого упирается в гнездо, сделанное в подставке, и при вращении волчка остается неподвижным.

Предположим, что рассматриваемое твердое тело имеет одну неподвижную точку O (рис. 2.1) и может как угодно вращаться вокруг этой точки.

Выберем неподвижную прямоугольную систему координат $O\xi\eta\zeta$, начало которой находится в неподвижной точке O этого тела. Построим теперь подвижную прямоугольную систему координат $Oxyz$, неизменно связанную с телом и имеющую начало в той же точке O. Для определения положения тела, имеющего одну неподвижную точку O, относительно неподвижной системы координат $O\xi\eta\zeta$ достаточно определить положение подвижной системы координат $Oxyz$ относительно неподвижной $O\xi\eta\zeta$. Наиболее удобным способом определения положения подвижной системы координат относительно неподвижной является способ, предложенный Эйлером и основанный на задании так называемых трех *углов Эйлера*.

Установим предварительно понятие углов Эйлера. Линия пересечения ON неподвижной плоскости $O\xi\eta$ с подвижной плоскостью Oxy называется *линией узлов*. Проведем плоскость через оси $O\zeta$ и Oz; эта плоскость перпендикулярна к линии узлов ON, так как последняя должна быть перпендикулярна одновременно к оси $O\zeta$ и к оси Oz. Угол между неподвижной осью $O\xi$ и линией узлов ON обозначают через ψ и называют *углом прецессии*. Угол между линией узлов ON и подвижной осью Ox обозначают через φ и называют *углом собственного вращения*. Угол между плоскостями $O\xi\eta$ и Oxy или, что то же, угол между неподвижной осью $O\zeta$ и подвижной осью Oz обозначают через θ и называют *углом нутации*.

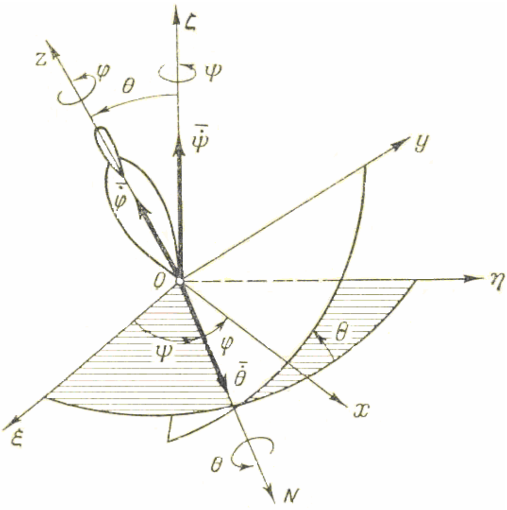


Рис. 2.1

Углы ψ, φ и θ называются углами Эйлера. Эти углы условились считать положительными в том случае, если для наблюдателей, смотрящих соответственно с положительных концов осей $O\xi$, ON и Oz, эти углы представляются отложенными от осей $O\xi$, $O\zeta$ и ON в сторону, противоположную вращению часовой стрелки.

Поясним теперь, как можно найти положение подвижной системы координат относительно неподвижной, если заданы все углы Эйлера.

Посредством трех последовательных независимых поворотов тела – на угол ψ вокруг оси $O\zeta$, затем на угол θ вокруг оси ON и, наконец, на угол φ вокруг оси Oz – можно подвижную систему координат $Oxyz$, совмещенную первоначально с неподвижной $O\xi\eta\zeta$, перевести в положение, указанное на рис. 2.1. В самом деле, совершим поворот прямоугольной системы $O\xi\eta\zeta$ вокруг оси $O\zeta$ на угол ψ, тогда получим систему $ON\eta_1\zeta$ (рис. 2.2). Далее, совершая поворот прямоугольной системы $ON\eta_1\zeta$ вокруг оси ON на угол θ, получим систему $ON\eta_2z$. Наконец, поворачивая прямоугольную систему $ON\eta_2z$ вокруг оси Oz на угол φ, получим подвижную систему координат $Oxyz$.

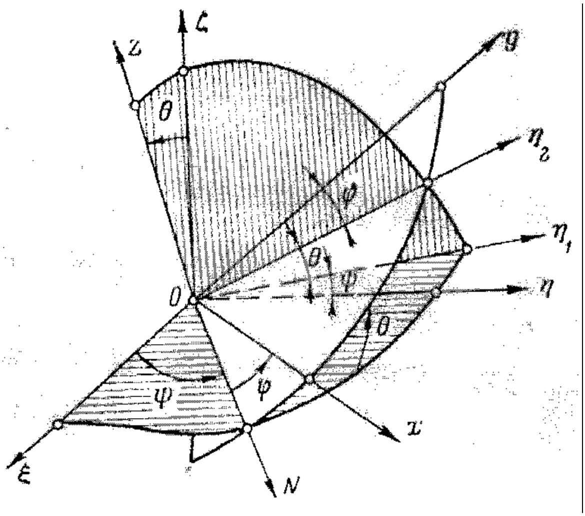


Рис. 2.2

Таким образом, действительно, с помощью трех независимых друг от друга углов Эйлера положение подвижной системы координат относительно неподвижной, а следовательно, и положение твердого тела, с которым подвижная система неизменно связана, определяются полностью. Мы видим, что твердое тело, совершающее сферическое движение, имеет три обобщенные координаты (ψ, θ и φ) и три степени свободы.

Если твердое тело совершает движение вокруг неподвижной точки, то углы Эйлера ψ, θ и φ непрерывно изменяются, т. е. являются функциями времени t:

$$\psi = f_1(t); \quad \theta = f_2(t); \quad \varphi = f_3(t). \tag{2.1}$$

При этом функции $f_1(t), f_2(t)$ и $f_3(t)$ должны быть однозначными, непрерывными и дифференцируемы по крайней мере дважды. Если эти функции известны, то положение твердого тела, имеющего одну неподвижную точку, будет известно для любого момента времени. Поэтому уравнения (2.1) вполне определяют движение тела вокруг неподвижной точки и называются *уравнениями движения твердого тела вокруг неподвижной точки, или уравнениями сферического движения твердого тела*.

Пусть в момент времени t тело занимает положение, определяемое углами Эйлера ψ, θ и φ, а в момент $t + \Delta t$ приходит в положение, определяемое углами $\psi + \Delta\psi$, $\theta + \Delta\theta$ и $\varphi + \Delta\varphi$. Следовательно, за промежуток времени Δt тело повернулось вокруг оси $O\zeta$ на угол $\Delta\psi$, вокруг оси ON – на угол $\Delta\theta$ и вокруг оси Oz – на угол $\Delta\varphi$. Тогда отношения $\frac{\Delta\psi}{\Delta t}$, $\frac{\Delta\theta}{\Delta t}$ и $\frac{\Delta\varphi}{\Delta t}$ дадут значения средних угловых скоростей поворотов вокруг соответствующих осей. Переходя к пределу при $\Delta t \to 0$, получаем

$$\lim_{\Delta t\to 0} \frac{\Delta\psi}{\Delta t} = \frac{d\psi}{dt} = \dot{\psi};$$

$$\lim_{\Delta t\to 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{d\theta}{dt} = \dot{\theta};$$

$$\lim_{\Delta t\to 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \frac{d\varphi}{dt} = \dot{\varphi};$$

где ψ – угловая скорость прецессии; θ – угловая скорость нутации; φ – угловая скорость собственного вращения в данный момент времени t. Эти угловые скорости могут быть изображены в виде векторов $\bar{\psi}$, $\bar{\theta}$ и $\bar{\varphi}$, направленных по соответствующим осям поворота $O\zeta$, ON и Oz (рис. 2.1).

Таким образом, элементарное перемещение тела, имеющего одну неподвижную точку, слагается из элементарных поворотов вокруг осей $O\zeta$, ON и Oz с угловыми скоростями $\bar{\dot{\psi}}$, $\bar{\dot{\theta}}$ и $\bar{\dot{\varphi}}$.

2.2. Теорема Эйлера – Даламбера

Выше было установлено, что перемещение тела, имеющего одну неподвижную точку, из одного положения в другое осуществляется путем трех последовательных независимых поворотов вокруг соответствующих осей. Однако есть способ доказать, что такое перемещение можно осуществить не тремя поворотами, а одним поворотом вокруг оси, выбранной надлежащим образом. Чтобы это представить себе, докажем следующую теорему Эйлера – Даламбера*: всякое перемещение твердого тела, имеющего одну неподвижную точку O, из одного положения в другое можно осуществить одним поворотом этого тела вокруг оси, проходящей через точку O.*

Опишем вокруг точки O сферу (σ) таким радиусом, чтобы эта сфера пересекла тело (рис. 2.3). Тогда сечение тела сферой будет некоторой сферической фигурой (S), расположенной на поверхности сферы и ограниченной некоторым контуром. Проведем диаметральную плоскость сферы, тогда след этой плоскости на сферической фигуре (S) будет дугой большого круга. Выберем на этой дуге две точки A и B. Задание положения этих точек на сфере или, что то же, задание дуги АВ вполне определяет положение сферической фигуры (S), а следовательно, и положение тела относительно неподвижной системы координат $O\xi\eta\zeta$. Каждому положению дуги АВ на неподвижной сфере (σ) будет соответствовать единственное и вполне определенное положение сферической фигуры (S), а следовательно, и положение тела. Таким образом, мы привели изучение движения твердого тела вокруг неподвижной точки O к изучению движения дуги АВ по поверхности неподвижной сферы (σ). Отсюда вывод: мы пришли к задаче, вполне аналогичной той, к которой сводилось изучение плоскопараллельного движения твердого тела, только с разницей, что вместо рассмотрения движения прямолинейного отрезка на неподвижной плоскости мы в настоящем случае должны рассматривать движение дуги большого круга по неподвижной сфере.

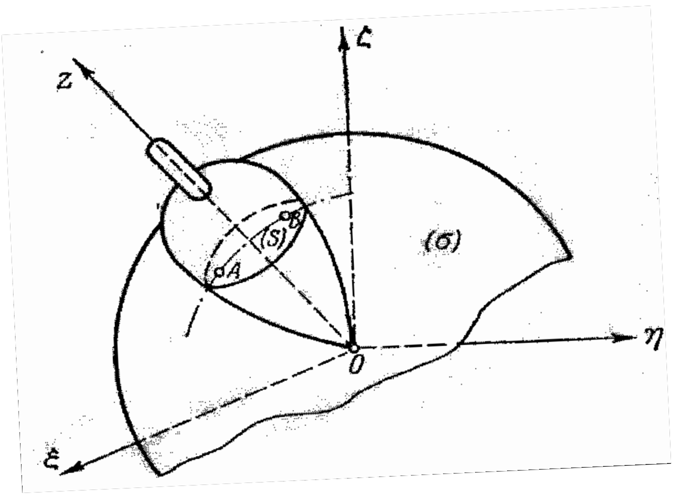


Рис. 2.3

Поэтому теорема Эйлера – Даламбера для сферического движения доказывается так же, как и теорема Бернулли – Шаля для плоскопараллельного движения.

Пусть в данный момент времени *t* положение сферической фигуры (*S*), а следовательно, и тела, имеющего одну неподвижную точку *O*, определяется дугой большого круга AB (рис. 2.4), а по истечении промежутка времени Δt – дугой A_1B_1.

Если мы покажем, что дугу AB можно совместить с дугой A_1B_1 одним поворотом вокруг некоторой оси, проходящей через неподвижную точку *O*, то теорема Эйлера – Даламбера будет доказана.

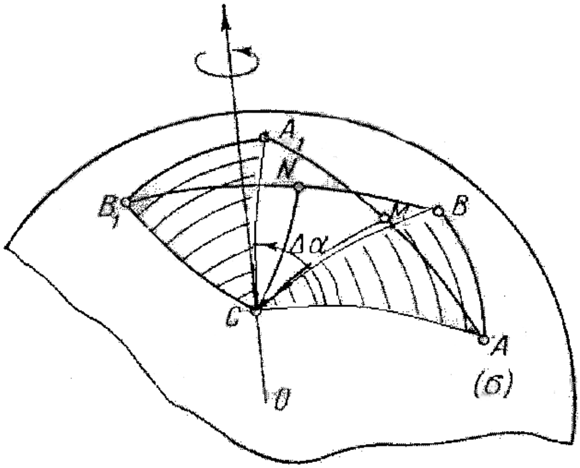


Рис. 2.4

Соединим точку *A* с ее конечным положением A_1 и точку B соответственно с точкой B_1 дугами больших кругов AA_1 и BB_1. Из середин *M* и *N* этих дуг восставим перпендикулярные к ним дуги больших кругов до пересечения в точке *C*.

Соединим точку *C* дугами больших кругов с точками *A* и *B*, а также с точками A_1 и B_1, т. е. образуем два сферических треугольника ABC и A_1B_1C с общей вершиной *C*. Легко видеть, что полученные треугольники ABC и A_1B_1C, лежащие на сфере, равны в силу равенства соответственных сторон. В самом деле, $AB = A_1B_1$ в силу неизменяемости сферической фигуры (*S*), $AC = A_1C$, а также $BC = B_1C$ по построению точки *C*, лежащей на высотах, восставленных соответственно из середин оснований AA_1 и BB_1 сферических треугольников AA_1C и BB_1C. Из равенства треугольников ABC и A_1B_1C следует, что у них углы при вершине *C* равны $\angle ACB = \angle A_1CB_1$, или

$$\angle ACB + \angle BCA_1 = \angle A_1CB_1 + \angle BCA_1,$$

поэтому

$$\angle ACA_1 = \angle BCB_1 = \Delta\alpha .$$

Если повернуть дугу AB (а вместе с нею и тело) вокруг оси OC на угол ACA_1, то дуга AB совместится с дугой A_1B_1, т. е. тело перейдет из первого положения во второе, что и доказывает теорему Эйлера – Даламбера.

Ось OC, вокруг которой поворачивают тело на угол ACA_1, чтобы перевести его из первого положения во второе, называют *осью конечного вращения,* так как поворот тела происходит на конечный угол.

2.3. Мгновенная ось вращения и мгновенная угловая скорость

Очевидно, что перевод твердого тела, имеющего одну неподвижную точку, из одного положения, соответствующего моменту *t*, в другое положение, соответствующее моменту $t + \Delta t$, одним поворотом вокруг оси конечного вращения на угол $\Delta\alpha$ вообще не представляет действительного перемещения этого тела. Однако чем меньше будет промежуток времени Δt, тем перемещение, совершаемое поворотом вокруг оси на угол $\Delta\alpha$, будет ближе к действительному перемещению тела.

При приближении Δt к нулю второе положение твердого тела приближается к первому, а вместе с тем ось конечного вращения OC приближается к некоторому предельному положению OP, которое называется *мгновенной осью вращения тела*.

Мгновенная ось вращения представляет собой геометрическое место точек тела, скорости которых в данный момент равны нулю.

Таким образом, при движении тела, имеющего одну неподвижную точку, в каждый данный момент существует мгновенная ось вращения, проходящая через эту неподвижную точку. Поворотом вокруг этой оси на бесконечно малый угол тело перемещается из данного положения в положение соседнее, бесконечно близкое к данному. Угловая скорость

$$\omega = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\alpha}{\Delta t}, \tag{2.2}$$

с которой совершается этот поворот, представляет собой *мгновенную угловую скорость* тела, имеющего одну неподвижную точку. При этом следует иметь в виду, что количество $\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \alpha}{\Delta t}$ не равно производной от угла α по времени t, так как при движении твердого тела вокруг неподвижной точки такого угла не существует. Следовательно, угловую скорость тела, имеющего одну неподвижную точку, уже нельзя, как раньше, определять производной от некоторого угла по времени. Поэтому мгновенная угловая скорость ω должна быть задана в функции времени непосредственно. Эту угловую скорость можно изобразить в виде соответствующего вектора $\overline{\omega}$, направленного вдоль мгновенной оси вращения OP так, чтобы наблюдатель, смотрящий с конца вектора $\overline{\omega}$, видел вращение тела происходящим против движения часовой стрелки.

2.4. Подвижные и неподвижные аксоиды

Положение мгновенной оси вращения не остается неизменным: в различные моменты времени эта ось занимает различные положения как в неподвижной системе отсчета $O\xi\eta\zeta$, так и в подвижной системе отсчета Oxyz, неизменно связанной с телом, движущимся вокруг неподвижной точки. Геометрическое место положений мгновенных осей вращения относительно неподвижной системы отсчета представляет собой коническую поверхность с вершиной в неподвижной точке. Геометрическое место положений мгновенных осей вращения относительно подвижной системы отсчета, неизменно связанной с движущимся телом, также представляет собой коническую поверхность с вершиной в неподвижной точке. Эти поверхности носят название *аксоидов* соответственно *неподвижного* и *подвижного*.

Подвижный и неподвижный аксоиды образованы перемещением одной и той же прямой – мгновенной оси вращения OP, значит, в каждый момент времени они касаются друг друга вдоль этой общей образующей OP (рис. 2.5).

Так как скорости точек тела, лежащих на мгновенной оси вращения OP, в данный момент равны нулю, то подвижный аксоид при движении тела вокруг неподвижной точки катится без скольжения по неподвижному аксоиду.

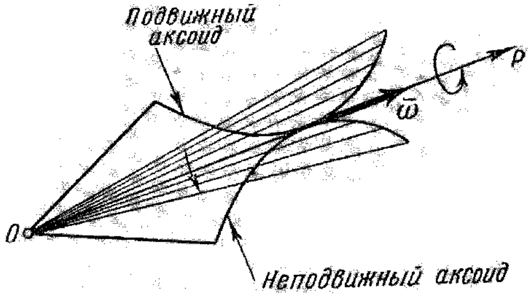


Рис. 2.5

Принципиальное значение этих выводов заключается в том, что любое движение тела вокруг неподвижной точки можно осуществить, если катить без скольжения подвижный аксоид, неизменно связанный с движущимся телом, по неподвижному так, чтобы в каждый момент была осуществлена такая угловая скорость этого качения, которая воспроизводит угловую скорость действительного движения тела. Если оба аксоида суть прямые круглые конусы, то в этом случае движение твердого тела вокруг неподвижной точки называется *прецессионным*, или *прецессией*. Прецессионное движение есть частный случай движения твердого тела вокруг неподвижной точки.

2.5. Скорости точек твердого тела, имеющего одну неподвижную точку

Если мгновенная угловая скорость $\overline{\omega}$ задана в функции времени, то легко определить скорость какой-либо точки М тела, вращающегося вокруг неподвижной точки, по формуле

$$\overline{v} = \overline{\omega} \times \overline{r}, \qquad (2.3)$$

где $\overline{r}$ – радиус-вектор точки *M*.

Здесь можно обосновать справедливость формулы (2.3) для случая движения твердого тела вокруг неподвижной точки.

Рассмотрим перемещение этого тела вокруг неподвижной точки *O* за промежуток времени Δt (рис. 2.6).

Пусть точка *M* тела (на рис. 2.6 тело не показано) за этот промежуток времени переместилась в положение M_1, определяемое радиусом-вектором $\overline{r_1}$. Пользуясь теоремой Эйлера – Даламбера, построим ось конечного вращения ОС, направление которой задано единичным вектором $\overline{\overline{l^0}}$. При этом перемещение тела из первого заданного положения во второе можно осуществить одним поворотом на угол $\Delta\alpha$ вокруг оси ОС.

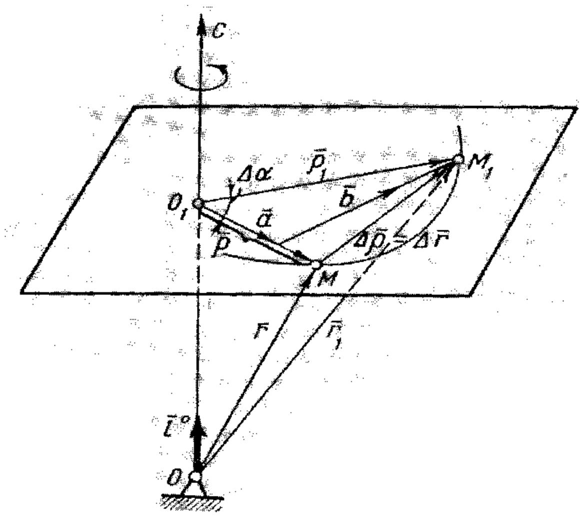


Рис. 2.6

Проведем плоскость, перпендикулярную оси ОС и проходящую через вектор $\overline{\Delta r} = \overline{r_1} - \overline{r}$. Тогда положение точек M и M_1 можно определить с помощью векторов $\overline{\rho}$ и $\overline{\rho}_1$, модули которых равны между собой.

Из рис. 2.6 видно, что вектор $\overline{\rho}_1$ может быть представлен в виде геометрической суммы двух векторов $\overline{b}$ и $\overline{a}$, т. е. $\overline{\rho_1} = \overline{a} + \overline{в}$, из которых первый направлен по вектору $\overline{\rho}$, а второй перпендикулярен вектору $\overline{\rho}$. Эти векторы ($\overline{b}$ и $\overline{a}$) можно выразить через вектор $\overline{\rho}$ и угол поворота $\Delta\alpha$:

$$\overline{a} = \overline{\rho}\cos\Delta\alpha\,; \quad \overline{b} = \overline{\overline{l^0}} \times \overline{\rho}\sin\Delta\alpha\,\cdot$$

Первая из этих формул не требует пояснений, а вторая может быть проверена. Вектор $\overline{b}$ перпендикулярен к векторам $\overline{\overline{l^0}}$ и $\overline{\rho}$, а поэтому может быть представлен в виде их векторного произведения. Но модуль этого вектора равен $\rho\sin\Delta\alpha$, где учтено, что $\rho_1 = \rho$. Этим и объясняется присутствие множителя $\sin\Delta\alpha$ при векторном произведении $\overline{\overline{l^0}} \times \overline{\rho}$.

Таким образом, имеем

$$\overline{\rho_1} = \overline{\rho}\cos\Delta\alpha + \overline{l^0} \times \overline{\rho}\sin\Delta\alpha\,.$$

Замечая, что $\overline{\rho_1} = \overline{\rho} + \Delta\overline{\rho}$ и $\Delta\overline{\rho} = \Delta\overline{r}$, найдем

$$\Delta\overline{r} = (\cos\Delta\alpha - 1)\overline{\rho} + \overline{l^0} \times \overline{\rho}\sin\Delta\alpha,$$

или

$$\Delta\overline{r} = -2\overline{\rho}\sin^2\frac{\Delta\alpha}{2} + 2\overline{l^0} \times \overline{\rho}\sin\frac{\Delta\alpha}{2}\cos\frac{\Delta\alpha}{2}.$$

Чтобы определить скорость точки *M*, надо умножить и поделить второе слагаемое правой части этого равенства на $\Delta\alpha$, а затем поделить обе части этого равенства на Δt и перейти к пределу при $\Delta t \to 0$, т. е.

$$\overline{v} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\overline{r}}{\Delta t} = -2\overline{\rho}\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\sin^2\frac{\Delta\alpha}{2}}{\Delta t} + \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\sin\frac{\Delta\alpha}{2}}{\frac{\Delta\alpha}{2}}\lim_{\Delta t\to 0}\left(\frac{\Delta\alpha}{\Delta t}\overline{l^0}\times\overline{\rho}\right)\lim_{\Delta t\to 0}\cos\frac{\Delta\alpha}{2}.$$

Но $$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\alpha}{\Delta t} = \omega;\ \lim\frac{\sin\frac{\Delta\alpha}{2}}{\frac{\Delta\alpha}{2}} = 1;\ \lim_{\Delta t\to 0}\overline{l^0} = \overline{\omega^0};$$

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\sin^2\frac{\Delta\alpha}{2}}{\Delta t} = 0;\quad \lim_{\Delta t\to 0}\cos\frac{\Delta\alpha}{2} = 1.$$

Отсюда очевидно, что

$$\overline{\mathbf{v}} = \frac{d\overline{r}}{dt} = \overline{\omega}\times\overline{\rho} = \overline{\omega}\times\overline{r}. \tag{2.4}$$

Заметим, что формула (2.4), определяющая скорость произвольной точки тела в данный момент, была нами получена при условии $|\overline{r}|$ = const, а поэтому она дает выражение производной от любого вектора $\overline{r}$, модуль которого постоянен.

Вектор скорости $\overline{\mathbf{v}}$ точки *M* можно проектировать как на неподвижные, так и на подвижные координатные оси. Представляя правую часть формулы (2.4) в виде определителя, получим

$$\overline{v} = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ \omega_\xi & \omega_\eta & \omega_\zeta \\ \xi & \eta & \zeta \end{vmatrix},$$

где ω_ξ, ω_η, ω_ζ – проекции вектора угловой скорости тела на неподвижные оси $O\xi\eta\zeta$, а ξ, η и ζ – проекции на те же оси радиуса-вектора $\overline{r}$ точки *M*, т. е. координаты точки *M*. Раскрывая определитель, получим проекции вектора скорости $\overline{\mathbf{v}}$ точки *M* на неподвижные оси $O\xi$, $O\eta$ и $O\zeta$

$$\left.\begin{aligned} v_\xi &= \omega_\eta \zeta - \omega_\zeta \eta; \\ v_\eta &= \omega_\zeta \xi - \omega_\xi \zeta; \\ v_\zeta &= \omega_\xi \eta - \omega_\eta \xi. \end{aligned}\right\} \tag{2.5}$$

Если угловая скорость $\bar{\omega}$ известна как функция времени, то ω_ξ, ω_η, ω_ζ также известны для любого момента времени. Тогда по формулам (2.5) мы можем определить проекции v_ξ, v_η, v_ζ скорости $\bar{v}$ любой точки тела на неподвижные координатные оси, а затем определить модуль и направление этой скорости.

Если проекции вектора $\bar{\omega}$ на подвижные координатные оси обозначить через ω_x, ω_y и ω_z, а проекции радиуса-вектора $\bar{r}$ на те же оси – через x, y, z, то мы получим, подобно предыдущему, проекции скорости любой точки тела на подвижные координатные оси

$$\left.\begin{aligned} v_x &= \omega_y z - \omega_z y; \\ v_y &= \omega_z x - \omega_x z; \\ v_z &= \omega_x y - \omega_y x, \end{aligned}\right\} \tag{2.6}$$

где x, y и z – величины постоянные, так как положение точки M относительно осей Oxyz, неизменно связанных с движущимся телом, с течением времени не изменяется.

Формулы (2.5) и (2.6) называются *формулами Эйлера*.

Если мы возьмем какую-либо точку тела, лежащую в данный момент на мгновенной оси вращения, то радиус-вектор $\bar{r}$ этой точки и вектор угловой скорости $\bar{\omega}$ тела будут направлены по одной прямой, а поэтому векторное произведение этих векторов равно нулю, т. е.

$$\bar{\omega} \times \bar{r} = 0. \tag{2.7}$$

Так оно и должно быть, поскольку скорости всех точек тела, лежащих на мгновенной оси вращения, в данный момент равны нулю. Уравнение (2.7), следовательно, представляет собой уравнение мгновенной оси вращения.

Проектируя векторное уравнение (2.7) на неподвижные координатные оси, получим уравнения мгновенной оси вращения в неподвижной системе отсчета

$$\frac{\xi}{\omega} = \frac{\eta}{\omega} = \frac{\zeta}{\omega}. \quad (2.8)$$

Аналогично уравнению (2.8) мы получаем и уравнение мгновенной оси вращения в подвижной системе отсчета

$$\frac{x}{\omega_x} = \frac{y}{\omega_y} = \frac{z}{\omega_z}. \quad (2.9)$$

2.6. Мгновенное угловое ускорение тела

При сферическом движении тела положение мгновенной оси вращения со временем изменяется, а следовательно, изменяется не только модуль, но и направление вектора угловой скорости тела. При этом производная от вектора мгновенной угловой скорости по времени равна вектору мгновенного углового ускорения тела, т. е.

$$\bar{\varepsilon} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \bar{\omega}}{\Delta t} = \frac{d\bar{\omega}}{dt}. \quad (2.10)$$

Так как при вращении твердого тела вокруг неподвижной точки вектор $\bar{\omega}$ изменяется с течением времени не только по модулю, но и по направлению, то направление вектора $\bar{\varepsilon}$ не совпадает с направлением вектора $\bar{\omega}$.

Направление вектора мгновенного углового ускорения $\bar{\varepsilon}$ надо выяснять в каждом конкретном случае, построив годограф вектора $\bar{\omega}$, т. е. траекторию, описываемую концом вектора $\bar{\omega}$. По смыслу векторной производной вектор $\bar{\varepsilon} = \frac{d\bar{\omega}}{dt}$ направлен по касательной к годографу вектора $\bar{\omega}$ в соответствующей точке (рис. 2.7).

По модулю и по направлению вектор $\bar{\varepsilon}$, очевидно, совпадает с линейной скоростью конца вектора $\bar{\omega}$ по его годографу. Вектор $\bar{\varepsilon}$ мы будем откладывать от неподвижной точки O тела (рис. 2.7).

Вектор $\bar{\varepsilon}$ можно проектировать как на неподвижные, так и на подвижные координатные оси.

Из равенства (2.10) следует, что проекции вектора мгновенного углового ускорения $\bar{\varepsilon}$ на неподвижные оси равны производным по времени от соответствующих проекций вектора мгновенной угловой скорости $\bar{\omega}$ на те же оси, т. е.

$$\varepsilon_\xi = \left(\frac{d\bar{\omega}}{dt}\right)_\xi = \dot{\omega}_\xi; \ \varepsilon_\eta = \left(\frac{d\bar{\omega}}{dt}\right)_\eta = \dot{\omega}_\eta; \ \varepsilon_\zeta = \left(\frac{d\bar{\omega}}{dt}\right)_\zeta. \quad (2.11)$$

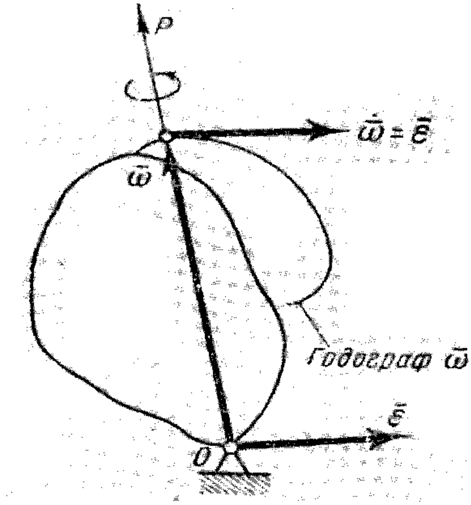


Рис. 2.7

Что касается проекций вектора $\bar{\varepsilon}$ на подвижные координатные оси, неизменно связанные с движущимся вокруг неподвижной точки телом, то будут иметь место аналогичные формулы:

$$\varepsilon_x = \dot{\omega}_x; \quad \varepsilon_y = \dot{\omega}_y; \quad \varepsilon_z = \dot{\omega}_z. \tag{2.12}$$

Однако справедливость этих формул необходимо обосновать. Для этого прежде всего найдем производные по времени от единичных векторов $\bar{i}$, $\bar{j}$ и $\bar{\kappa}$ подвижных координатных осей, равные скоростям концов этих векторов. По формуле (2.4) можем написать:

$$\frac{d\bar{i}}{dt} = \bar{\omega}\times\bar{i}; \; \frac{d\bar{j}}{dt} = \bar{\omega}\times\bar{j}; \; \frac{d\bar{\kappa}}{dt} = \bar{\omega}\times\bar{\kappa}. \tag{2.13}$$

Учитывая эти формулы, будем иметь

$$\varepsilon_x = \left(\frac{d\bar{\omega}}{dt}\right)_x = \frac{d\bar{\omega}}{dt}\cdot\bar{i} = \frac{d}{dt}\left(\bar{\omega}\cdot\bar{i}\right) - \bar{\omega}\cdot\frac{d\bar{i}}{dt} = \frac{d\omega_x}{dt} - \bar{\omega}\cdot\left(\bar{\omega}\times\bar{i}\right) = \frac{d\omega_x}{dt} = \omega_x,$$

так как $\bar{\omega}\cdot\left(\bar{\omega}\times i\right) = 0$, и аналогично для других проекций, что и доказывает справедливость формул (2.12).

Покажем теперь способ определения вектора $\bar{\varepsilon}$ для того случая, когда вектор $\bar{\omega}$ изменяется только по направлению. Годографом вектора $\bar{\omega}$ в этом случае является окружность, а следовательно, аксоидами будут прямые круглые конусы (рис. 2.8).

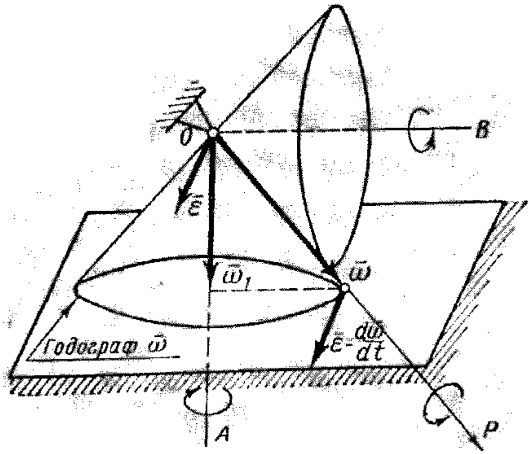


Рис. 2.8

Обозначим через $\overline{\omega_1}$ угловую скорость, с которой при движении тела подвижный аксоид вращается вокруг оси ОА неподвижного аксоида.

Для определения вектора мгновенного углового ускорения $\bar{\varepsilon}$ воспользуемся определением $\bar{\varepsilon}$ как линейной скорости движения конца вектора мгновенной угловой скорости $\bar{\omega}$ по его годографу. В данном случае вследствие постоянства модуля вектора $\bar{\omega}$ искомая скорость конца вектора $\bar{\omega}$ определится как скорость точки с радиусом-вектором $\bar{\omega}$ тела, вращающегося с угловой скоростью $\overline{\omega_1}$, т. е.

$$\bar{\varepsilon} = \frac{d\bar{\omega}}{dt} = \overline{\omega_1} \times \bar{\omega} . \qquad (2.14)$$

2.7. Ускорения точек твердого тела, имеющего одну неподвижную точку

Ускорение точки *M* тела, имеющего одну неподвижную точку, легко найти, продифференцировав равенство (2.4) по времени,

$$\bar{a} = \frac{d\bar{\mathrm{v}}}{dt} = \frac{d\bar{\omega}}{dt} \times \bar{r} + \bar{\omega} \times \frac{d\bar{r}}{dt} ,$$

или

$$\bar{a} = \frac{d\bar{\mathrm{v}}}{dt} = \bar{\varepsilon} \times \bar{r} + \bar{\omega} \times \bar{\mathrm{v}} . \qquad (2.15)$$

Таким образом, мы видим, что для тела, имеющего одну неподвижную точку, ускорение его любой точки в данный момент слагается из двух составляющих: $\bar{\varepsilon}\times\bar{r}=\overline{a_1}$ и $\bar{\omega}\times\bar{v}=\overline{a_2}$.

Первое слагаемое

$$\overline{a_1}=\bar{\varepsilon}\times\bar{r} \tag{2.16}$$

называется *вращательным ускорением* точки M и направлено перпендикулярно к плоскости, проходящей через мгновенное угловое ускорение $\bar{\varepsilon}$ тела и радиус-вектор $\bar{r}$ точки M так, что с конца вектора $\overline{a_1}$ кратчайший поворот от $\bar{\varepsilon}$ к $\bar{r}$ виден совершающимся против движения часовой стрелки (рис. 2.9). В отличие от случая вращения тела вокруг неподвижной оси вектор $\bar{\varepsilon}$ не лежит на той же прямой, что и вектор $\bar{\omega}$, а направлен по касательной к годографу вектора $\bar{\omega}$ в соответствующей точке. Поэтому здесь вектор $\overline{a_1}$ перпендикулярен не радиусу вращения h_ω, представляющему собой кратчайшее расстояние от точки M до мгновенной оси вращения, а отрезку h_ε, представляющему собой кратчайшее расстояние от точки M до той прямой, вдоль которой от точки O отложен вектор $\bar{\varepsilon}$. По модулю вращательное ускорение $\overline{\omega_1}$ равно

$$\overline{a_1}=\varepsilon h_\varepsilon, \tag{2.17}$$

где $h_\varepsilon = r\sin\beta$ (рис. 2.9).

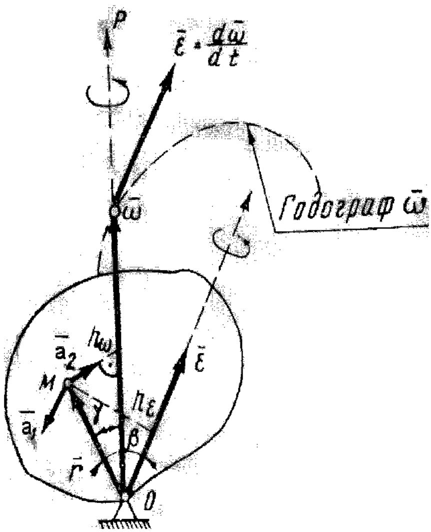


Рис. 2.9

Второе слагаемое

$$\overline{a_2} = \bar{\omega} \times \bar{\mathrm{v}} \tag{2.18}$$

называется *осестремительным ускорением* точки *M* и направлено к оси мгновенного вращения. Оно направлено перпендикулярно к плоскости, проходящей через $\bar{\omega}$ и $\bar{\mathrm{v}}$, так, что с конца вектора $\overline{a_2}$ кратчайший поворот от $\bar{\omega}$ к $\bar{\mathrm{v}}$ виден совершающимся против движения часовой стрелки. По модулю осестремительное ускорение $\overline{a_2}$ равно

$$a_2 = \omega \mathrm{v} \sin 90° = \omega \mathrm{v} = \omega^2 h_\omega\ , \tag{2.19}$$

так как модуль скорости $\bar{\mathrm{v}}$ точки *M* равен (рис. 2.9)

$$\mathrm{v} = \omega r \sin\gamma = \omega h_\omega . \tag{2.20}$$

Модуль вектора ускорения $\bar{\bar{a}}$ точки *M* как диагонали параллелограмма ускорений можно определить по формуле

$$a = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + 2a_1 a_2 \cos\left(\overline{\omega_1}, \overline{\omega_2}\right)}\ ,$$

или

$$a = \sqrt{h_\varepsilon^2 \varepsilon^2 + h_\omega^2 \omega^4 + 2h_\varepsilon h_\omega \varepsilon \omega^2 \cos\left(\bar{\omega}_1, \bar{\omega}_2\right)}.$$

Вектор ускорения $\bar{a}$ любой точки *M* тела, имеющего одну неподвижную точку, можно проектировать как на неподвижные, так и на подвижные координатные оси.

Проекция вектора ускорения $\bar{a}$ на подвижную координатную ось Ox

$$a_x = \ddot{x} = \frac{d^2x}{dt} = \frac{d\mathrm{v}_x}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\omega_y z - \omega_z y\right) = \frac{d\omega_y}{dt} z + \omega_y \frac{dz}{dt} y - \omega_2 \frac{dy}{dt} =$$

$$= \varepsilon_y z + \omega_y \mathrm{v}_z - \varepsilon_z y - \omega_z \mathrm{v}_y\ .$$

Подставляя вместо v_z и v_y значения из равенств (2.6) и прибавляя к правой части ($+\omega_x^2 x$) и ($-\omega_x^2 x$), получим окончательное значение a_x по формуле

$$a_x = \ddot{x} = \varepsilon_y z - \varepsilon_z y + \omega_x \left(x\omega_x + y\omega_y + z\omega_z\right) - x\omega^2\ ,$$

при выводе которой было учтено, что $\omega_x^2 + \omega_y^2 + \omega_z^2 = \omega^2$.

Путем круговой перестановки букв получим аналогичные формулы и для двух других проекций (a_y и a_z). Таким образом, находим следующие формулы:

$$\left.\begin{aligned} a_x &= \ddot{x} = \varepsilon_y z - \varepsilon_z y + \omega_x (x\omega_x + y\omega_y + z\omega_z) - x\omega^2 \\ a_y &= \ddot{y} = \varepsilon_z x - \varepsilon_x z + \omega_y (x\omega_x + y\omega_y + z\omega_z) - y\omega^2 \\ a_z &= \ddot{z} = \varepsilon_x y - \varepsilon_y x + \omega_z (x\omega_x + y\omega_y + z\omega_z) - z\omega^2 \end{aligned}\right\} \quad (2.21)$$

По этим формулам нетрудно вычислить проекции ускорения $\bar{a}$ на подвижные координатные оси и затем определить модуль и направление этого ускорения.

Аналогичным путем можно вывести формулы и для проекций ускорения $\bar{a}$ на неподвижные координатные оси:

$$\left.\begin{aligned} a_\xi &= \ddot{\xi} = \varepsilon_\eta \zeta - \varepsilon_\zeta \eta + \omega_\xi (\xi\omega_\xi + \eta\omega_\eta + \zeta\omega_\zeta) - \xi\omega^2; \\ a_\eta &= \ddot{\eta} = \varepsilon_\zeta \xi - \varepsilon_\xi \zeta + \omega_\eta (\xi\omega_\xi + \eta\omega_\eta + \zeta\omega_\zeta) - \eta\omega^2; \\ a_\zeta &= \ddot{\zeta} = \varepsilon_\xi \eta - \varepsilon_\eta \xi + \omega_\zeta (\xi\omega_\xi + \eta\omega_\eta + \zeta\omega_\zeta) - \zeta\omega^2. \end{aligned}\right\} \quad (2.22)$$

2.8. Связь вектора мгновенной угловой скорости с эйлеровыми углами

Покажем, как вычисляется вектор мгновенной угловой скорости $\bar{\omega}$ по заданным уравнениям движения тела (2.1).

Выше нами было установлено, что движение твердого тела вокруг неподвижной точки можно рассматривать в каждый момент времени как простое вращение вокруг мгновенной оси вращения, проходящей через эту точку, с мгновенной угловой скоростью $\bar{\omega}$.

С другой стороны, это движение твердого тела можно рассматривать как составное движение, состоящее из трех вращательных движений вокруг трех осей: 1) неподвижной оси Oζ, называемой осью прецессии, с угловой скоростью $\bar{\Psi}$; 2) линии узлов ON с угловой скоростью $\bar{\theta}$ и 3) подвижной оси Oz, называемой осью собственного вращения, с угловой скоростью $\bar{\varphi}$ (рис. 2.10).

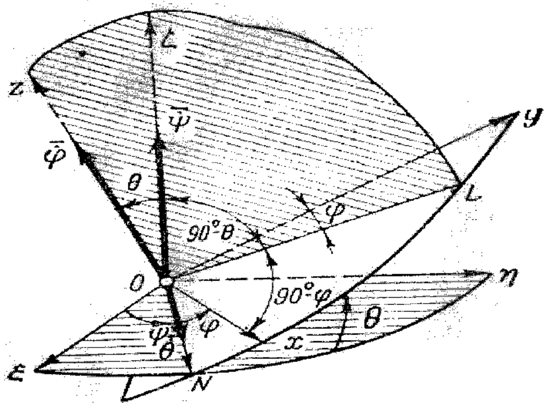


Рис. 2.10

Относительное движение представляет собой вращение вокруг оси Oz с угловой скоростью $\bar{\dot{\varphi}}$, первое переносное – вращение вокруг оси ON с угловой скоростью $\bar{\dot{\theta}}$, второе переносное – вращение вокруг оси Oζ с угловой скоростью $\bar{\dot{\psi}}$.

Возьмем в движущемся теле какую-нибудь точку *M* (на рис. 2.10 тело и его точка *M* не показаны) и, используя формулу (2.4), найдем ее абсолютную скорость

$$\overline{v_a} = \bar{\omega} \times \overline{OM} . \qquad (2.23)$$

Так как движение точки *M* также можно рассматривать как составное движение, то, используя формулу (2.4), по теореме сложения линейных скоростей получаем

$$\overline{v_a} = \overline{v_r} + \overline{v_{e1}} + \overline{v_{e2}} = \bar{\varphi} \times \overline{OM} + \bar{\theta} \times \overline{OM} + \bar{\psi} \times \overline{OM}$$

или

$$\overline{v_a} = \left(\bar{\dot{\psi}} + \bar{\dot{\theta}} + \bar{\dot{\varphi}}\right) \times \overline{OM} . \qquad (2.24)$$

Из формул (2.23) и (2.24) следует, что

$$\bar{\omega} = \bar{\dot{\psi}} + \bar{\dot{\theta}} + \bar{\dot{\varphi}} . \qquad (2.25)$$

Найдем теперь проекции мгновенной угловой скорости $\bar{\omega}$ на подвижные координатные оси Oxyz.

Проектируя векторное равенство (2.25) на подвижные координатные оси, находим

$$\left.\begin{aligned} \omega_x &= (\bar{\dot{\Psi}})_x + (\bar{\dot{\theta}})_x + (\bar{\dot{\varphi}})_x \\ \omega_y &= (\bar{\dot{\Psi}})_y + (\bar{\dot{\theta}})_y + (\bar{\dot{\varphi}})_y \\ \omega_z &= (\bar{\dot{\Psi}})_z + (\bar{\dot{\theta}})_z + (\bar{\dot{\varphi}})_z \end{aligned}\right\} \qquad (2.26)$$

Для нахождения проекций вектора $\bar{\dot{\Psi}}$ проведем в плоскости Оxy ось OL, перпендикулярную линии узлов ON (рис. 2.10). Очевидно, что $\angle LOy = \varphi$ и при этом оси Oz, Oζ и OL лежат в одной плоскости.

Из рассмотрения рис. 2.10 следует, что

$$\left.\begin{aligned} &(\bar{\dot{\Psi}})_x = \dot{\Psi}\sin\theta\sin\varphi; \quad (\bar{\dot{\Psi}})_y = \dot{\Psi}\sin\theta\cos\varphi; \; (\bar{\dot{\Psi}})_z = \dot{\Psi}\cos\theta; \\ &(\bar{\dot{\theta}})_x = \theta\cos\varphi; \qquad (\bar{\dot{\theta}})_y = -\theta\sin\varphi; \; (\bar{\dot{\theta}})_z = 0; \\ &(\bar{\dot{\varphi}})_x = 0; \quad (\bar{\dot{\varphi}})_y = 0; \quad (\bar{\dot{\varphi}})_z = \varphi. \end{aligned}\right\} \qquad (2.27)$$

Из формул (2.26) и (2.27) непосредственно находим проекции вектора $\bar{\omega}$ на подвижные координатные оси

$$\left.\begin{aligned} \omega_x &= \dot{\Psi}\sin\theta\sin\varphi + \dot{\theta}\cos\varphi; \\ \omega_y &= \dot{\Psi}\sin\theta\cos\varphi - \dot{\theta}\sin\varphi; \\ \omega_z &= \rho + \dot{\Psi}\cos\theta. \end{aligned}\right\} \qquad (2.28)$$

Уравнения (2.28) называются *кинематическими уравнениями Эйлера*. Проектируя равенство (2.25) на неподвижные оси координат O$\xi\eta\zeta$, мы точно так же найдем проекции вектора $\bar{\omega}$ на эти оси

$$\left.\begin{aligned} \omega_\xi &= \dot{\varphi}\sin\dot{\theta}\sin\phi + \dot{\theta}\cos\dot{\Psi}; \\ \omega_\eta &= -\dot{\varphi}\sin\dot{\theta}\cos\phi + \dot{\theta}\sin\dot{\Psi}; \\ \omega_\zeta &= \dot{\varphi}\cos\theta + \dot{\Psi}. \end{aligned}\right\} \qquad (2.29)$$

Полученные формулы (2.28) и (2.29) позволяют определять модуль и направление вектора мгновенной угловой скорости $\bar{\omega}$. Модуль вектора $\bar{\omega}$ будет равен

$$\omega = \sqrt{\omega_x^2 + \omega_y^2 + \omega_z^2} = \sqrt{\Psi^2 + \varphi^2 + \theta^2 + 2\Psi\varphi\cos\theta}. \qquad (2.30)$$

Направление вектора $\bar{\omega}$ получим, вычислив его направляющие косинусы с осями координат. Так как

$$\varepsilon_x = \frac{d\omega_x}{dt} = \dot{\omega}_x; \qquad \varepsilon_y = \frac{d\omega_y}{dt} = \dot{\omega}_y; \qquad \varepsilon_z = \frac{d\omega_z}{dt} = \dot{\omega}_z,$$

то, дифференцируя формулы (2.28) по времени, можно вычислить проекции вектора мгновенного углового ускорения $\bar{\varepsilon}$ через углы Эйлера.

Модуль вектора $\bar{\varepsilon}$ будет равен

$$\varepsilon = \sqrt{\varepsilon_x^2 + \varepsilon_y^2 + \varepsilon_z^2}\,. \tag{2.31}$$

Направление вектора $\bar{\varepsilon}$ также определяется через его направляющие косинусы с осями координат.

Таким образом, мы видим, что при помощи углов Эйлера можно для любого момента времени определить угловую скорость и угловое ускорение твердого тела, имеющего одну неподвижную точку, а также скорость и ускорение любой его точки.

Задача. Круглый конус с образующей, равной 40 см, катится без скольжения по неподвижной горизонтальной плоскости; при этом вершина *O* конуса остается неподвижной, а центр его основания описывает окружность, расположенную в горизонтальной плоскости, в течение 4 с (рис. 2.11). Определить векторы $\bar{\omega}$ и $\bar{\varepsilon}$, а также скорости и ускорения точек *A* и *B* основания конуса, если угол при вершине равен 60°.

Решение. Решим эту задачу, пользуясь формулами, определяющими движение твердого тела с одной неподвижной точкой.

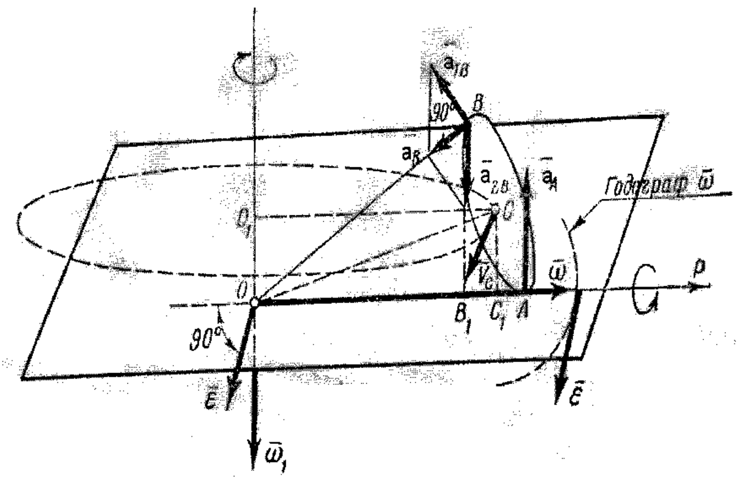


Рис. 2.11

В данном случае неподвижной будет точка *O*, т. е. вершина конуса.

Прежде всего определим положение мгновенной оси вращения и мгновенную угловую скорость. Точки конуса, лежащие на линии OA, должны иметь такие же скорости, как и точки неподвижной горизонтальной плоскости, так как по ней конус катится без скольжения. Следовательно, скорости этих точек равны нулю и линия OA является мгновенной осью вращения конуса. Вектор мгновенной угловой скорости $\overline{\omega}$ направлен по линии OA.

Так как мгновенная ось вращения OP во все время движения остается в горизонтальной плоскости, то неподвижным аксоидом является эта плоскость; подвижным же аксоидом является боковая поверхность рассматриваемого конуса.

Если из точки *C* опустить перпендикуляр CC_1 на мгновенную ось вращения, то CC_1 есть мгновенный радиус вращения точки C, а поэтому имеем

$$v_C = \omega \cdot CC_1, \qquad \text{(в)}$$

где $CC_1 = OC \sin 30° = \frac{1}{2}\ OC = \frac{1}{2}\ OA \cos 30° = \frac{1}{2} \cdot 40 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 10\sqrt{3}$ см.

При движении центра основания конуса *C* по окружности радиуса

$$CO_1 = OC_1 = OC \cos 30° = OA \cos^2 30° = 40 \cdot \frac{3}{4} = 30 \text{ см}$$

скорость его

$$v_C = CO_1 \cdot \omega_1 = 30 \cdot 0{,}5\pi = 15\pi \text{ см/с}, \qquad \text{(г)}$$

где учтено, что $\omega_1 = \frac{\pi}{2} = 0{,}5\pi\ \frac{1}{c}$ есть угловая скорость, с которой вектор $\overline{\omega}$ вращается вокруг вертикальной оси, проходящей через точку *O*.

Из формул (в) и (г) следует, что

$$10\sqrt{3}\omega = 15\pi,$$

откуда модуль вектора $\overline{\omega}$ будет равен

$$\omega = \frac{\sqrt{3}}{2}\pi\ \frac{1}{c}.$$

Так как $\overline{\omega}$ = const, то годограф вектора $\overline{\omega}$ есть окружность, описанная в указанной выше горизонтальной плоскости из центра *O* радиусом, равным $\overline{\omega}$. Поэтому вектор $\overline{\varepsilon}$ имеет направление касательной к этой окружности, а следовательно, этот вектор перпендикулярен к вектору $\overline{\omega}$; направление $\overline{\varepsilon}$ показано на рис. 2.11.

Рассматривая вектор $\bar{\varepsilon}$ как скорость конца вектора $\bar{\omega}$ и зная, что вектор $\bar{\omega}$ вращается с угловой скоростью $\overline{\omega_1}$ вокруг вертикальной оси, проходящей через точку *O*, найдем модуль вектора $\bar{\varepsilon}$

$$|\bar{\varepsilon}| = |\overline{\omega_1} \times \bar{\omega}| = \omega_1\omega = 0{,}5\pi \cdot 0{,}5\sqrt{3}\pi = 0{,}25\sqrt{3}\pi^2 \ \frac{1}{\text{с}^2}.$$

Так как точка *A* лежит на мгновенной оси вращения, то ее скорость $\overline{\mathrm{v}_A}$ равна нулю, т. е. $\overline{\mathrm{v}_A} = 0$. Если из точки *B* опустим перпендикуляр BB_1 на мгновенную ось вращения, то BB_1 есть мгновенный радиус вращения точки *B*, а поэтому модуль v_B скорости $\overline{\mathrm{v}_B}$ точки *B* равен

$$\mathrm{v}_B = BB_1 \cdot \omega = 2CC_1 \cdot \omega = 20\sqrt{3}\,\frac{\sqrt{3}}{2}\pi = 30\pi \ \frac{\text{см}}{\text{с}}.$$

Определив мгновенную угловую скорость $\bar{\omega}$ и мгновенное угловое ускорение $\bar{\varepsilon}$ конуса, найдем теперь искомые ускорения точек *A* и *B*. Так как точка *A* лежит на мгновенной оси вращения, то ее осестремительное ускорение равно нулю, т. е. $\overline{a_{2A}} = 0$, а вращательное ускорение

$$\overline{a_{1A}} = \bar{\varepsilon} \times \overline{OA} \neq 0\,,$$

следовательно, полное ускорение точки *A*

$$\overline{a_A} = \overline{a_{1A}} = \bar{\varepsilon} \times \overline{OA}\ .$$

При этом вектор $\overline{a_A}$ направлен перпендикулярно к горизонтальной плоскости, как показано на рис. 2.11, а модуль этого вектора равен

$$a_A = \varepsilon \cdot OA = 0{,}25\sqrt{3}\pi^2 \cdot 40 = 10\sqrt{3}\pi^2 \ \frac{\text{см}}{\text{с}^2}.$$

Найдем теперь ускорение точки *B*. Осестремительное ускорение точки *B* направлено по мгновенному радиусу вращения этой точки; модуль этого ускорения равен

$$a_{2B} = BB_1 \cdot \omega^2 = 2CC_1 \cdot \omega^2 = 20\sqrt{3} \cdot \frac{3}{4}\pi^2 = 15\sqrt{3}\pi^2 \ \frac{\text{см}}{\text{с}^2}.$$

Вращательное ускорение точки *B* лежит в плоскости OBB_1 и перпендикулярно к образующей OB, как показано на рис. 2.11; модуль этого ускорения равен

$$a_{1B} = OB \cdot \varepsilon = 40 \cdot 0{,}25\sqrt{3}\pi^2 = 10\sqrt{3}\pi^2 \ \frac{\text{см}}{\text{с}}.$$

Полное ускорение $\overline{a_B}$ точки *B* изобразится диагональю параллелограмма, построенного на векторах $\overline{a_{1B}}$ и $\overline{a_{2B}}$. Так как угол между векторами $\overline{a_{1B}}$ и $\overline{a_{2B}}$ равен 180°- 60°, то по теореме косинусов находим модуль полного ускорения точки *B*

$$a_B = \sqrt{a_{1B}^2 + a_{2B}^2 - 2a_{1B}a_{2B}\cos 60^\circ} = 5\pi^2\sqrt{21}\cdot\frac{\text{см}}{\text{с}}.$$

Контрольные вопросы

1. Как выглядят уравнения движения твердого тела, имеющего одну неподвижную точку?
2. Как звучит теорема Эйлера – Даламбера?
3. Что такое мгновенная ось вращения и мгновенная угловая скорость?
4. Что такое подвижные и неподвижные аксоиды?
5. Как найти скорости точек твердого тела, имеющего одну неподвижную точку?
6. Как найти мгновенное угловое ускорение тела?
7. Как найти ускорения точек твердого тела, имеющего одну неподвижную точку?
8. Какая связь вектора мгновенной угловой скорости с эйлеровыми углами?

Библиографический список

1. Тарг, С.М. Краткий курс теоретической механики : учеб. для вузов / С.М. Тарг. – 16-е изд., стер. – М. : Высш. шк., 2006.
2. Сапрыкин, В.Н. Техническая механика : учеб. / В.Н. Сапрыкин. – 2-е изд., испр. – М. : ЭКСМО, 2005. – 559 с.
3. Иродов, И.Е. Механика : Основные законы / И.Е. Иродов. – 6-е изд., испр. – М. : Лаб. базовых знаний, 2003. – 309 с.
4. Прасолов, С.Г. Автоматизированный комплекс тест-контроля знаний по теоретической механике : учеб. пособие для заоч. отделения / С.Г. Прасолов, Н.В. Корнеев, П.Э. Шендерей. – Тольятти : ТГУ, 2006. – 112 с.

ГЛОССАРИЙ

АБСОЛЮТНО ТВЕРДОЕ ТЕЛО – такое тело, расстояние между каждыми двумя точками которого всегда остается постоянным.

ВНЕШНИЕ СИЛЫ – силы, которые действуют на это тело со стороны других тел.

ВНУТРЕННИЕ СИЛЫ – силы, с которыми части данного тела действуют друг на друга.

ЛИНИЯ ДЕЙСТВИЯ СИЛЫ – прямая, вдоль которой направлена сила.

МЕХАНИЧЕСКОЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ – действия материальных тел друг на друга, в результате которых происходит изменение движения этих тел или изменение их формы.

МЕХАНИЧЕСКОЕ ДВИЖЕНИЕ – происходящее с течением времени изменение взаимного положения материальных тел в пространстве.

МЦС – мгновенный центр скоростей.

ПАРАЛЛЕЛЬНЫЕ СИЛЫ – силы, линии действия которых параллельны друг другу.

РАВНОДЕЙСТВУЮЩАЯ СИЛА – сила, эквивалентная данной системе сил.

СВОБОДНОЕ ТЕЛО – тело, которому из данного положения можно сообщить любое перемещение в пространстве.

СИЛА – величина, являющаяся основной мерой механического взаимодействия материальных тел.

СИСТЕМА СИЛ – совокупность сил, действующих на рассматриваемое тело.

СОСРЕДОТОЧЕННАЯ СИЛА – сила, приложенная к телу в какой-нибудь одной его точке.

СТАТИКА – раздел механики, в котором излагается общее учение о силах и изучаются условия равновесия материальных тел, находящихся под действием сил.

СХОДЯЩИЕСЯ СИЛЫ – силы, линии действия которых пересекаются в одной точке.

УРАВНОВЕШЕННАЯ СИСТЕМА СИЛ – система сил, под действием которой свободное твердое тело может находиться в покое.

УРАВНОВЕШИВАЮЩАЯ СИЛА – сила, равная по модулю равнодействующей, прямо противоположная ей по направлению и действующая вдоль той же прямой.

ЭКВИВАЛЕНТНЫЕ СИСТЕМЫ СИЛ – такие системы сил, когда при замене одной на другую не изменяется состояние покоя или движения свободного твердого тела.

Тесты по теме «Вращательное движение твердого тела вокруг неподвижной оси»

1. При равномерном вращении маховик делает 4 оборота в секунду. За сколько секунд маховик повернется на угол $\varphi = 2\pi$?
1) 1
2) 2
3) 3
4) 4

2. Угловая скорость тела изменяется согласно закону $\omega = -8t$. Определить угол поворота тела в момент времени t = 3 с, если при $t = 0$ угол поворота $\varphi = 5$ рад.
1) -30
2) -31
3) -32
4) -33

3. Ротор электродвигателя, начав вращаться равноускоренно, сделал за первые 5 с 100 оборотов. Определить угловое ускорение ротора.
1) 59,9
2) 55,4
3) 53,7
4) 50,3

4. Частота вращения маховика за время $t_1 = 10$ с уменьшилась в 3 раза и стала равной 30 об/мин. Определить угловое ускорение вала, если он вращался равнозамедленно.
1) -0,628
2) -0,577
3) -0,437
4) -0,314

5. Угловая скорость маховика изменяется согласно закону $\omega = \pi\,(6t - t^2)$. Определить время $t > 0$ остановки маховика.
1) 6
2) 5
3) 4
4) 3

6. Тело вращается вокруг неподвижной оси согласно закону $\varphi = t^3 + 2$. Определить угловую скорость тела в момент времени, когда угол поворота $\varphi = 10$ рад.
1) 10
2) 11
3) 12
4) 13

7. Тело вращается вокруг неподвижной оси согласно закону $\varphi = 4 + 2t^3$. Определить угловое ускорение тела в момент времени, когда угловая скорость $\omega = 6$ град/с.
1) 11
2) 12
3) 13
4) 14

8. Угловая скорость тела изменяется согласно закону $\omega = 2 - 8t^2$. Определить время t остановки тела.
1) 0,1
2) 0,9
3) 1,4
4) 0,5

9. Угловое ускорение тела изменяется согласно закону $\varepsilon = 2t$. Определить угловую скорость тела в момент времени $t = 4$ с, если при $t = 0$ угловая скорость равна нулю.
1) 15
2) 16
3) 17
4) 18

10. Угловое ускорение тела изменяется согласно закону $\varepsilon = 3t^2$. Определить угловую скорость тела в момент времени $t = 2$ с, если при $t = 0$ угловая скорость $\omega = 2$ град/с.
1) 10
2) 11
3) 12
4) 13

11. Тело, вращаясь вокруг неподвижной оси, совершает колебательные движения согласно закону $\varphi = \sin 0{,}5\pi t$. Определить угловое ускорение тела в момент времени $t = 1$ с.
1) -2,91
2) -3,11

3) -1,09
4) -2,47

12. Тело, вращаясь вокруг неподвижной оси, совершает колебательные движения согласно закону $\varphi = 0{,}5\pi \sin 2\pi t$. Определить угловую скорость тела в момент времени $t = 0{,}125$ с.
1) 6,98
2) 3,14
3) 2,72
4) 1,71

13. Деталь вращается вокруг неподвижной оси согласно закону $\varphi = 2\pi \cos \pi t^2$. Определить угол φ поворота детали в момент времени $t = 2$ с.
1) 3,14
2) 6,28
3) 5,15
4) 4,14

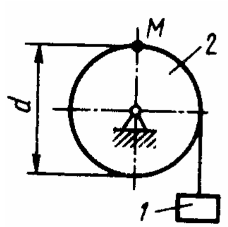
14. При пуске ротор электродвигателя вращается согласно закону $\varphi = \pi t + \pi e^{-t}$. Определить угловую скорость ротора в момент времени $t = 2$ с.
1) 2,72
2) 1,82
3) 3,43
4) 1,11

15. При вращении ротора угловая скорость меняется согласно закону $\omega = 6\pi\,(4t + e^{-0{,}01t} \sin \pi t)$. Определить угловое ускорение при $t = 100$ с.
1) 87,1
2) 80,2
3) 71,1
4) 97,2

16. Тело вращается вокруг неподвижной оси согласно закону $\varphi = t^2$. Определить скорость точки тела на расстоянии $r = 0{,}5$ м от оси вращения в момент времени, когда угол поворота $\varphi = 25$ рад.
1) 2
2) 3
3) 4
4) 5

17. Тело вращается равнопеременно с угловым ускорением $\varepsilon = 5$ рад/с^2. Определить скорость точки на расстоянии $r = 0{,}2$ м от оси

вращения в момент времени $t = 2$ с, если при $t_0 = 0$ угловая скорость $\omega_0 = 0$.
1) 1
2) 2
3) 3
4) 4



18. Груз 1 поднимается с помощью лебедки, барабан 2 которой вращается согласно закону $\varphi = 5 + 2t^3$. Определить скорость точки M барабана в момент времени $t = 1$ с, если диаметр $d = 0,6$ м.
1) 1,1
2) 1,5
3) 2,2
4) 1,8

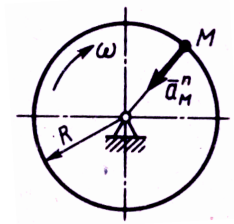
19. Угловая скорость балансира механических часов изменяется по закону $\omega = \pi \sin 4\pi t$. Определить в см/с скорость точки балансира на расстоянии $h = 6$ мм от оси вращения в момент времени $t = 0,125$ с.
1) 1,09
2) 1,88
3) 2,11
4) 3,14

20. Скорость точки тела на расстоянии $r = 0,2$ м от оси вращения изменяется по закону $\upsilon = 4t^2$. Определить угловое ускорение данного тела в момент времени $t = 2$ с.
1) 60
2) 70
3) 80
4) 90

21. Маховик вращается с постоянной частотой вращения, равной 90 об/мин. Определить ускорение точки маховика на расстоянии 0,043 м от оси вращения.
1) 2,12
2) 4,14
3) 5,08
4) 3,82

22. Тело вращается вокруг неподвижной оси согласно закону $\varphi = 2t^2$. Определить нормальное ускорение точки тела на расстоянии $r = 0,2$ м от оси вращения в момент времени $t = 2$ с.
1) 12,8

2) 11,1
3) 13,3
4) 10,9



23. Нормальное ускорение точки M диска, вращающегося вокруг неподвижной оси, равно 6,4 м/с^2. Определить угловую скорость ω этого диска, если его радиус $R = 0{,}4$ м.
1) 1
2) 2
3) 3
4) 4

24. Тело вращается вокруг неподвижной оси согласно закону $\varphi = 2t^3$. В момент времени $t = 2$ с определить касательное ускорение точки тела на расстоянии от оси вращения $r = 0{,}2$ м.
1) 4,8
2) 3,9
3) 1,1
4) 2,3

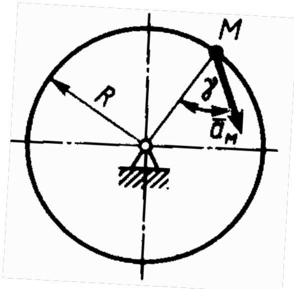
25. Угловая скорость тела изменяется по закону $\omega = 2t^3$. Определить касательное ускорение точки этого тела на расстоянии $r = 0{,}2$ м от оси вращения в момент времени $t = 2$ с.
1) 5,2
2) 2,8
3) 3,6
4) 4,8

26. В данный момент времени ротор электродвигателя вращается с угловой скоростью $\omega = 3\pi$ и угловым ускорением $\varepsilon = 8\pi$. Определить ускорение точки ротора на расстоянии 0,04 м от оси вращения.
1) 3,69
2) 2,11
3) 4,13
4) 5,97

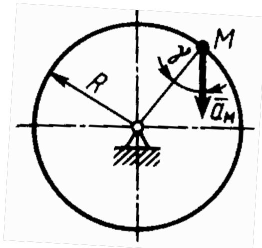
27. Тело вращается согласно закону $\varphi = 1 + 4t$. Определить ускорение точки тела на расстоянии $r = 0{,}2$ м от оси вращения.
1) 1,5
2) 3,2
3) 2,8
4) 4,1

28. Угловая скорость тела изменяется по закону $\omega = 1 + t$. Определить ускорение точки этого тела на расстоянии $r = 0{,}2$ м от оси вращения в момент времени $t = 1$ с.
1) 0,825
2) 0,717
3) 0,692
4) 0,971

29. Маховое колесо в данный момент времени вращается с угловым ускорением $\varepsilon = 20\pi$, а его точка на расстоянии от оси вращения 5 см имеет ускорение $a = 8\pi$. Определить нормальное ускорение указанной точки.
1) 19,1
2) 32,2
3) 24,9
4) 40,1



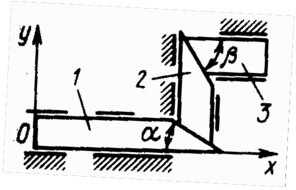
30. Ускорение точки M диска, вращающегося вокруг неподвижной оси, равно 4 м/с^2. Определить угловую скорость этого диска, если его радиус $R = 0{,}5$ м, а угол $\gamma = 60°$.
1) 1
2) 2
3) 3
4) 4



31. Ускорение точки M диска, вращающегося вокруг неподвижной оси, равно 8 м/с^2. Определить угловое ускорение этого диска, если его радиус $R = 0{,}4$ м, а угол $\gamma = 30°$.
1) 10
2) 20
3) 30
4) 40

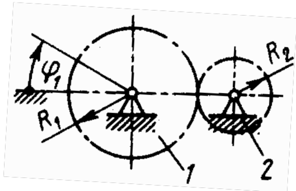
32. При движении клина по горизонтальным направляющим со скоростью 1 м/с другой клин перемещается в вертикальном направлении со скоростью 1 м/с. Определить угол в градусах скоса клиньев.
1) 37
2) 29
3) 45
4) 52

33. Клинья 1 и 3 перемещаются по параллельным горизонтальным направляющим, а промежуточный клин 2 – по вертикальным направляющим. Определить перемещение клина 3, если перемещение клина 1 равно 0,12 м, а углы $\alpha = 30°$ и $\beta = 60°$.



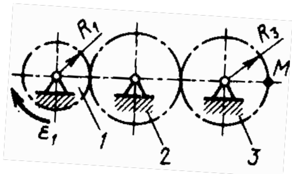
1) 0,01
2) 0,02
3) 0,03
4) 0,04

34. Колесо 1 вращается согласно закону $\varphi_1 = 20t$. Определить число оборотов, совершенных колесом 2 за время $t = 3{,}14$ с, если радиусы колес $R_1 = 0{,}8$ м, $R_2 = 0{,}5$ м.



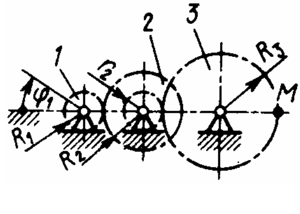
1) 11
2) 22
3) 33
4) 16

35. Зубчатое колесо 1 вращается равнопеременно с угловым ускорением $\varepsilon_1 = 4$ рад/с^2. Определить скорость точки M в момент времени $t = 2$ с, если радиусы зубчатых колес $R_1 = 0{,}4$ м, $R_3 = 0{,}5$ м. Движение начинается из состояния покоя.



1) 2,8
2) 3,2
3) 4,4
4) 5,1

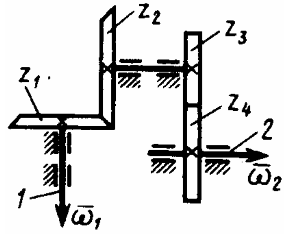
36. Зубчатое колесо 1 вращается согласно закону $\varphi_1 = 4t^2$. Определить скорость точки M колеса 3 в момент времени $t = 2$ с, если радиусы колес $R_1 = 0{,}4$ м, $R_2 = 0{,}8$ м, $r_2 = 0{,}4$ м, $R_3 = 1$ м.



1) 2,1
2) 4,4
3) 5,2
4) 3,2

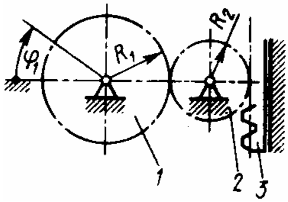
37. Редуктор состоит из конической и цилиндрической зубчатых передач с числом зубьев колес $z_1 = 18$, $z_2 = 26$, $z_3 = 28$ и $z_4 = 40$. Вал 1 вращается с угловой скоростью $\omega_1 = 20(t + e^{-t})$. В момент времени $t = 10$ с определить угловую скорость вала 2.

1) 88,2
2) 96,9
3) 77,1
4) 69,3



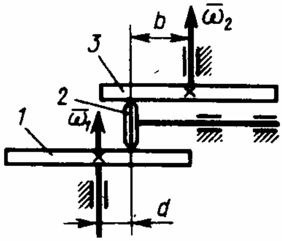
38. Зубчатое колесо 1 вращается согласно закону $\varphi_1 = 4t^2$. Определить ускорение рейки 3, если радиусы зубчатых колёс $R_1 = 0{,}8$ м, $R_2 = 0{,}4$ м.

1) 5,5
2) 2,8
3) 4,8
4) 6,4



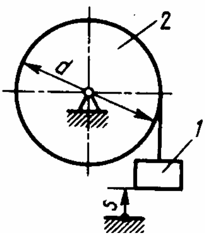
39. Вариатор состоит из ведущего диска 1, ролика 2 и ведомого диска 3. Угловые скорости дисков $\omega_1 = 10$ град/с, $\omega_2 = 5$ град/с. Определить отношение расстояния b/d.

1) 1
2) 2
3) 3
4) 4

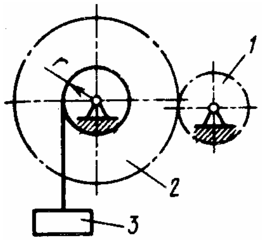


40. Груз 1 поднимается с помощью лебёдки 2. Закон движения груза имеет вид: $s = 7 + 5t^2$, где s – см. Определить угловую скорость барабана в момент времени $t = 3$ с, если его диаметр $d = 50$ см.

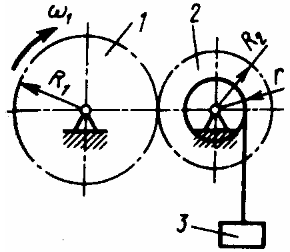
1) 1,1
2) 1,2
3) 1,3
4) 1,4



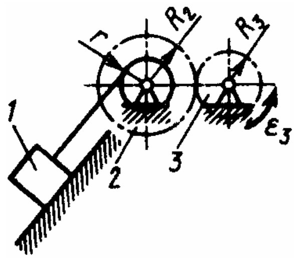
41. Какой должна быть частота вращения (об/мин) n_1 шестерни 1, чтобы тело 3 двигалось с постоянной скоростью $\upsilon = 90$ см/с, если число зубьев шестерен $z_1 = 26$, $z_2 = 78$ и радиус барабана $r = 10$ см?



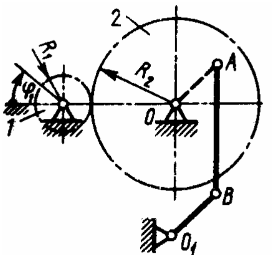
1) 211
2) 197
3) 307
4) 258



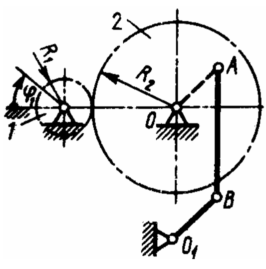
42. Угловая скорость зубчатого колеса 1 изменяется по закону $\omega_1 = 2t^2$. Определить ускорение груза 3 в момент времени $t = 2$ с, если радиусы шестерён $R_1 = 1$ м, $R_2 = 0{,}8$ м и радиус барабана $r = 0{,}4$ м.
1) 10
2) 12
3) 14
4) 4



43. Зубчатое колесо 3 вращается равнопеременно с угловым ускорением $\varepsilon_3 = 8$ рад/с^2. Определить путь, пройденный грузом 1 за промежуток времени $t = 3$ с, если радиусы $R_2 = 0{,}8$ м, $R_3 = 0{,}6$ м, $r = 0{,}4$ м. Груз 1 в начале движения находится в покое.
1) 11,2
2) 10,8
3) 12,2
4) 13,4



44. Зубчатое колесо 1 вращается согласно закону $\varphi_1 = 2t^3$. Определить скорость точки B в момент времени $t = 2$ с, если радиусы колес $R_1 = 0{,}3$ м, $R_2 = 0{,}9$ м, длина кривошипа $O_1B = OA = 0{,}6$ м, расстояние $OO_1 = AB$.
1) 2,1
2) 3,2
3) 5,7
4) 4,8



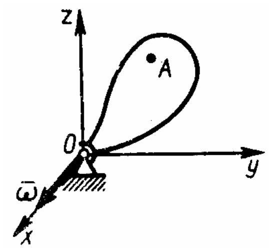
45. Зубчатое колесо 1 вращается равнопеременно с угловой скоростью $\omega_1 = 6$ рад/с. Определить ускорение точки M, если радиусы колес $R_1 = 0{,}3$ м, $R_2 = 0{,}9$ м, расстояние $O_1M = 0{,}3$ м. $OA = O_1B$ и $AB = OO_1$.
1) 1,8
2) 1,2

3) 2,1
4) 3,8

46. Тело одновременно вращается вокруг двух пересекающихся под углом 90 градусов осей с угловыми скоростями 2 рад/с. Определить результирующую угловую скорость вращения тела.
1) 1,1
2) 1,2
3) 1,3
4) 1,4

Тесты по теме «Сферическое движение твердого тела»

1. Тело вращается вокруг точки *O*. В данный момент времени мгновенная ось вращения совпадает с осью O*x*, а положение точки *M* определяется координатами $x_M = 0$, $y_M = 0{,}2$ м, $z_M = 0$. Определить в градусах угол между вектором скорости точки *V* и осью O*y*.
1) 90
2) 80
3) 70
4) 60



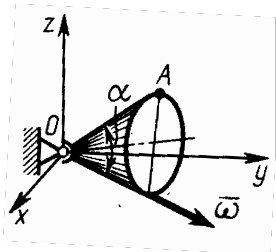
2. Тело вращается вокруг неподвижной точки *O* с постоянной по модулю угловой скоростью ω = 1 рад/с. Определить модуль скорости точки *A*, если в данный момент времени её координаты $x_A = 0$, $y_A = 0{,}3$ м, $z_A = 0{,}4$ м, а мгновенная ось вращения тела совпадает с осью O*x*.
1) 0,5
2) 0,4
3) 0,3
4) 0,2

3. Тело вращается вокруг неподвижной точки *O*; мгновенная угловая скорость тела в некоторый момент времени $\vec{\omega} = 0{,}3\vec{i} + 0{,}4\vec{j}$. Определить в этот момент времени проекцию на ось Ox вектора скорости точки *A* тела, если её координаты $x_A = 0{,}1$ м, $y_A = 0$, $z_A = 0{,}1$ м.
1) 0,01
2) 0,02
3) 0,03
4) 0,04

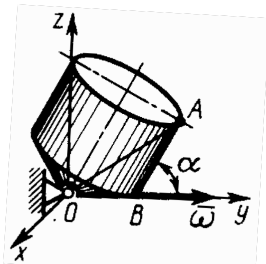
4. При сферическом движении тела в некоторый момент времени его угловая скорость $\vec{\omega} = 2\vec{i} + 3\vec{j} + 5\vec{k}$. Определить в этот момент времени скорость точки *A*, имеющей координаты $x_A = 0$, $y_A = 0$, $z_A = 0{,}5$ м.
1) 1,80
2) 2,11
3) 3,27
4) 1,21

5. При сферическом движении тела проекции его угловой скорости заданы выражениями $\omega_x = \pi \sin t$, $\omega_y = \pi \cos t$, $\omega_z = 0$. Определить скорость точки A тела в этот момент времени (с) $t = \pi$, если при этом её координаты $x_A = 0{,}4$ м, $y_A = 0{,}5$ м, $z_A = 0{,}3$ м.
1) 3,14
2) 1,57
3) 6,28
4) 0,92

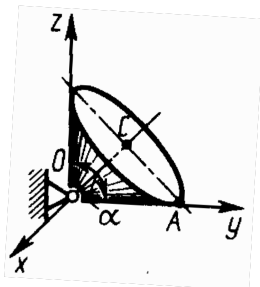
6. Определить скорость точки A тела при его сферическом движении в момент, когда координаты $x_A = 0{,}1$ м, $y_A = 0{,}3$ м, $z_A = 0{,}2$ м, а проекции мгновенной угловой скорости $\omega_x = \pi$, $\omega_y = 3\pi$, $\omega_z = 2\pi$.
1) 0
2) 1
3) 2
4) 3



7. Конус вращается вокруг неподвижной точки O, катясь по плоскости Оxy с угловой скоростью $\omega = 2$ рад/с. Определить скорость точки A, если ОА = 0,2 м и $\alpha = 30°$.
1) 0,1
2) 0,2
3) 0,3
4) 0,4



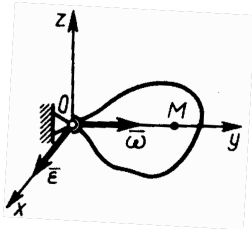
8. Тело вращается вокруг неподвижной точки O, катясь по плоскости Оху с угловой скоростью $\omega = 1$ рад/с. Определить скорость точки A, если расстояние ОА = 0,5 м, $\alpha = 60°$, OB = AB.
1) 0,17
2) 0,38
3) 0,25
4) 0,42



9. Конус с углом при вершине $\alpha = 90°$ и высотой ОС = 0,1 м катится по горизонтальной плоскости, вращается вокруг точки O, скорость центра основания $\upsilon_C = 0{,}1$ м/с. Определить модуль осестремительного ускорения точки A.
1) 0
2) 1

3) 2
4) 3

10. Тело, совершающее сферическое движение, в некоторый момент времени имеет угловую скорость $\vec{\omega} = 2\vec{i} + 3\vec{k}$ и угловое ускорение $\bar{\varepsilon} = 4\vec{j} + 5\vec{k}$. Определить ускорение точки *M* тела, если её радиус-вектор в этот момент времени $\bar{r}_{\text{M}} = 0{,}1\vec{i} + 0{,}15\vec{k}$.
1) 0,877
2) 0,702
3) 0,639
4) 0,192



11. Тело вращается вокруг неподвижной точки *O* с постоянной по модулю угловой скоростью. Определить косинус угла между вектором ускорения точки *M* и осью Oz, если в момент времени, когда вектор $\vec{\omega}$ совпадает с осью O*y*, угловое ускорение ε параллельно оси O*x*.
1) 1
2) 2
3) 3
4) 4

12. Тело совершает регулярную прогрессию вокруг неподвижной точки *O*. Мгновенная ось вращения в данный момент времени совпадает с осью O*x*. Определить косинус угла между вектором ускорения точки *A*, лежащей на мгновенной оси, и осью Oz.
1) 1
2) 2
3) 3
4) 4

13. В некоторый момент времени известен вектор мгновенного углового ускорения тела, совершающего сферическое движение, $\bar{\varepsilon} = 5\vec{i} + 6\vec{j} + 7\vec{k}$. Определить модуль вращательного ускорения точки *A* тела, если её радиус-вектор в этот момент времени $\bar{r}_{\text{A}} = 10\vec{i} + 12\vec{j} + 14\vec{k}$.
1) 4
2) 0
3) 3
4) 5

14. В некоторый момент времени известны вектор мгновенной угловой скорости тела, совершающего сферическое движение, $\vec{\omega} = 2\vec{i} + 4\vec{j} + 2\vec{k}$ и вектор скорости точки *A* тела $\overline{\upsilon_A} = 4\vec{i} + 8\vec{j} - 4\vec{k}$. Определить проекцию осестремительного ускорения на ось О*y*.

1) 8
2) 11
3) 19
4) 16

15. Закон винтового движения тела имеет вид: $x_O = 1$ м, $y_O = 2$ м, $z_O = t^2$, $\theta = 0$, $\psi = 0$, $\varphi = \pi t^2$. В момент времени $t = 1$ с определить ускорение точки *M* тела, находящейся на расстоянии ОМ = 0,1 м от оси винта.

1) 1,11
2) 2,28
3) 3,14
4) 4,47

16. Тело движется в пространстве согласно уравнениям $x_M = 0$; $y_M = 20t$; $z_M = 20t - 4{,}9t^2$; $\theta = 0{,}5$ рад; $\psi = 3$ рад; $\varphi = 12(1 - e^{-0{,}25t})$. Определить модуль угловой скорости тела в момент времени $t = 4$ с.

1) 2,28
2) 3,14
3) 1,10
4) 5,27

17. Моторная лодка перемещается по поверхности воды согласно закону: $x_M = 100$ м, $y_M = 6t$, $z_M = 0{,}2 \sin 2\pi t$, $\theta = 0{,}1 \cos 2\pi t$, $\psi = 0$, $\varphi = 0$. Определить модуль углового ускорения лодки в момент времени $t = 1$ с.

1) 1,87
2) 1,26
3) 2,11
4) 3,12

18. Тело совершает винтовое движение согласно уравнениям: $x_O = 0$, $y_O = 0$, $z_O = 5 - 0{,}3t$, $\theta = 0$; $\psi = 0$; $\varphi = 8t$. Определить скорость точки, находящейся на расстоянии 0,05 м от мгновенной оси вращения. Вектор мгновенной угловой скорости $\vec{\omega}$ параллелен скорости полюса υ_O.

1) 0,1
2) 0,2
3) 0,5
4) 0,4

19. При выводе сверла из отверстия закон движения имеет вид: $x_O = 0$, $y_O = 0$, $z_O = 4t$, $\theta = 0$, $\psi = 0$, $\varphi = 25e^{-t}$, где точка O лежит на оси симметрии сверла. В момент времени $t = 3$ с определить в см/с скорость точки сверла, которая находится на расстоянии 0,6 см от оси вращения.
1) 4,07
2) 2,98
3) 3,11
4) 5,12

20. Определить проекцию на неподвижную ось Оx скорости точки M свободного тела, если в момент времени $t = 1$ с её радиус-вектор относительно полюса O $\bar{r}_M = 2\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$, мгновенная угловая скорость $\vec{\omega} = 2\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$, уравнения движения полюса $x_O = 2t$, $y_O = 8t$, $z_O = 5t^2$.
1) -1
2) -2
3) -3
4) -4

21. Уравнения движения точки O тела имеют вид: $x_O = 5t$, $y_O = -5t$, $z_O = -2t^2$. В момент времени $t = 2$ с определить проекцию скорости точки M тела на ось Оy, если в этот момент времени $\bar{r}_M = \vec{i} + 4\vec{j} - 2\vec{k}$ и мгновенная угловая скорость $\vec{\omega} = 2\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}$.
1) 0
2) 1
3) 2
4) 3

22. При свободном движении тела в некоторый момент времени ускорение полюса $\overline{a_o} = 5\vec{i}$, угловая скорость $\vec{\omega} = \pi\vec{k}$ и угловое ускорение $\varepsilon = 0$. Определить проекцию ускорения точки M тела на ось Оy, если её положение относительно полюса O задано радиусом-вектором $\bar{r}_M = 0{,}5\vec{j}$.
1) 1,87
2) 2,39
3) 3,12
4) 4,93

23. Тело совершает свободное движение. В момент времени, когда ускорение точки O, принятой за полюс, $\overline{a_o} = 2\vec{i} + 5\vec{j} + 5\vec{k}$, угловая

скорость тела $\vec{\omega} = 0$ и угловое ускорение $\bar{\varepsilon} = 2\vec{i} + 5\vec{k}$. Определить ускорение точки *M* тела, если $\bar{r}_M = 2\vec{i} - 5\vec{k}$.
1) 7,35
2) 6,18
3) 9,12
4) 8,08

24. Тело совершает винтовое движение согласно уравнениям: $x_O = 0$, $y_O = 0$, $z_O = 0{,}05t$, $\theta = 0$, $\psi = 0$, $\varphi = \pi t$. Определить ускорение точки *M*, если расстояние от неё до оси винта OM = 0,012 м.
1) 0,192
2) 0,152
3) 0,118
4) 0,211

25. В некоторый момент времени известен вектор мгновенной угловой скорости тела, совершающего сферическое движение, $\vec{\omega} = \vec{i} + 2\vec{j} + 4\vec{k}$. Определить проекцию на ось O*x* вектора осестремительного ускорения точки *A* тела, если её радиус-вектор в этот момент $\bar{r}_A = \vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}$.
1) -10
2) -11
3) -12
4) -13

СОДЕРЖАНИЕ

Учебное издание

СФЕРИЧЕСКОЕ ДВИЖЕНИЕ ТВЕРДОГО ТЕЛА

Учебное пособие

Составители
Будаев Сергей Иванович
Прасолов Сергей Геннадиевич

Редактор *Т.Д. Савенкова*
Технический редактор *З.М. Малявина*
Вёрстка: *Л.В. Сызганцева*
Дизайн обложки: *Г.В. Карасева*

Подписано в печать 17.06.2013. Формат 60×84/16.
Печать оперативная. Усл. п. л. 3,95.
Тираж 50 экз. Заказ № 1-69-12.

Издательство Тольяттинского государственного университета
445667, г. Тольятти, ул. Белорусская, 14