

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Тольяттинский государственный университет

С.В. Талалов

ОБРАТНЫЕ И НЕКОРРЕКТНЫЕ ЗАДАЧИ

Электронное учебное пособие

2-е издание, переработанное и дополненное

ISBN 978-5-8259-1647-7

УДК 517.958(075.8)
ББК 22.311я73

Рецензенты:

д-р физ.-мат. наук, профессор, заведующий кафедрой алгебры и геометрии Самарского национального исследовательского университета им. академика С.П. Королева *А.Н. Панов*;
д-р физ.-мат. наук, доцент, профессор кафедры «Прикладная математика и информатика» Тольяттинского государственного университета *А.И. Сафронов*.

Талалов, С.В. Обратные и некорректные задачи : электронное учебное пособие / С.В. Талалов. – 2-е издание, переработанное и дополненное. – Тольятти : Издательство ТГУ, 2024. – 1 оптический диск. – ISBN 978-5-8259-1647-7.

Учебное пособие содержит конспект лекций по дисциплине «Обратные и некорректные задачи». Предполагается, что к началу изучения курса студенты в должной мере владеют языком программирования Python 3.X (либо иным), позволяющим выполнять практические задания.

Предназначено для студентов, обучающихся по направлению подготовки бакалавров 01.03.02 «Прикладная математика и информатика» очной, заочной форм обучения высшего образования (в том числе с применением ДОТ). Пособие может быть использовано в образовательном процессе студентов очной формы обучения физико-математических и ИТ-направлений подготовки.

Текстовое электронное издание.

Рекомендовано к изданию научно-методическим советом Тольяттинского государственного университета.

Минимальные системные требования: IBM PC-совместимый ком-пьютер: Windows XP/Vista/7/8/10; ППН 500 МГц или эквивалент; 128 Мб ОЗУ; SVGA; CD-ROM; Adobe Acrobat Reader; интернет-браузер.

© Талалов С.В., 2024

© ФГБОУ ВО «Тольяттинский
государственный университет», 2019

© ФГБОУ ВО «Тольяттинский государственный
университет», 2024, с изменениями

Учебное издание

Талалов Сергей Владимирович

ОБРАТНЫЕ И НЕКОРРЕКТНЫЕ ЗАДАЧИ

Электронное учебное пособие

2-е издание, переработанное и дополненное

Редактор *Е.А. Держаева*

Техническое редактирование: *С.В. Талалов*

Компьютерная верстка: *С.В. Талалов*

Художественное оформление,

компьютерное проектирование: *Г.В. Карасева*

Дата подписания к использованию 24.09.2024.

Объем издания 3 Мб.

Комплектация издания: компакт-диск, первичная упаковка.

Тираж 50 экз. Заказ № 1-01-24.

Издательство Тольяттинского государственного университета

445020, г. Тольятти, ул. Белорусская, 14,

тел. 8 (8482) 44-91-47, www.tltsu.ru

СОДЕРЖАНИЕ

Лекция 1.	
Прямые, обратные, корректные и некорректные задачи	6
Лекция 2.	
Метрические и нормированные пространства	14
Лекция 3.	
Евклидовы пространства и ряды Фурье	23
Лекция 4.	
Линейные операторы в евклидовых пространствах	30
Лекция 5.	
Спектральная задача Штурма – Лиувилля на интервале	37
Лекция 6.	
Спектральная задача Штурма – Лиувилля в пространстве $L_2[\mathbb{R}]$	45
Лекция 7.	
Дискретный спектр оператора Штурма – Лиувилля в пространстве $L_2[\mathbb{R}]$	50
Лекция 8.	
Метод подбора в решении некорректных задач	56
Лекция 9.	
Теория возмущений. Реализация градиентных методов поиска экстремума	62
Лекция 10.	
Компактные операторы и связанные с ними некорректные задачи	70

Лекция 11.	
Итерационные методы решения некорректных задач, связанных с интегральными уравнениями	76
Лекция 12.	
Обратные задачи для параболических уравнений	82
Лекция 13.	
Некорректные задачи в конечномерных пространствах	88
Лекция 14.	
Метод регуляризации: регуляризирующий оператор	94
Лекция 15.	
Задачи компьютерной томографии. I	100
Лекция 16.	
Задачи компьютерной томографии. II	105
Лекция 17.	
Обратная задача Штурма – Лиувилля в пространстве $L_2[\mathbb{R}]$	110
Практические занятия.	
Типовые задания и методические указания по выполнению и оформлению	117
Библиографический список	128

Лекция 1

Прямые, обратные, корректные и некорректные задачи

Понятие о корректных и некорректных задачах математической физики (МФ). Корректность по Адамару. Пример некорректной задачи: решение интегрального уравнения Фредгольма 1-го рода. Прямые и обратные задачи МФ. Обратная задача Штурма – Лиувилля. Пример практических приложений задачи Штурма – Лиувилля: проектирование планарных волноводов с заданными модами. Постановка задач компьютерной томографии.

В данном курсе мы будем рассматривать специальный класс задач математической физики, называемых обратными задачами. Вначале определим некоторые исходные понятия.

Математическая физика (согласно определению академика В.С. Владимиров) – это теория математических моделей физических явлений. Поэтому данный курс входит в набор дисциплин, относящихся к теме «Математическое моделирование». Основной предмет изучения математической физики – краевые задачи дифференциальных уравнений в частных производных (ЧДУ). Простейшим примером такой задачи может служить задача Коши для $2D$ волнового уравнения, которое описывает малые отклонения $u(t, x)$ точки бесконечной одномерной среды (например, струны) с координатой x в момент времени t :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0, \quad x \in (-\infty, \infty), \quad v = \text{const}. \quad (1.1)$$

Краевой задачей для такого уравнения является начальная задача – *задача*

Коши: найти решение уравнения (1.1), которые удовлетворяет условиям:

$$u(0, x) = \phi(x), \quad (1.2)$$

$$\left. \frac{\partial u(t, x)}{\partial t} \right|_{t=0} = \omega(x). \quad (1.3)$$

Функции $\phi(x)$ и $\omega(x)$ являются заданными и называются *начальными данными Коши*. При этом требуется $\phi(x) \in C^2(\mathbb{R})$, $\omega(x) \in C^1(\mathbb{R})$. Из физических соображений (отсутствие возмущений при $|x| \rightarrow \infty$) требуется также выполнение условий

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} |x|^n \phi(x) = 0, \quad \lim_{|x| \rightarrow \infty} |x|^n \omega(x) = 0, \quad \forall n = 0, 1, 2, \dots$$

Такая задача решается явно, решение дается известной формулой Даламбера:

$$u(t, x) = \frac{1}{2} [\phi(x + vt) + \phi(x - vt)] + \frac{1}{2v} \int_{x-vt}^{x+vt} \omega(z) dz.$$

Большинство краевых задач явного решения не имеют; для их решения необходимо применять те или иные численные методы. Другой важный класс задач математической физики – избранные вопросы спектральной теории дифференциальных и интегральных операторов.

Важнейшее свойство, которым должна обладать поставленная задача, – это *корректность*. Именно для корректных задач возможно найти точное или приближенное решение, подходящее для последующего практического применения.

Определение 1.1. *Краевая задача называется корректной по Адамару, если решение этой задачи: 1) существует; 2) единственно; 3) устойчиво.*

Под устойчивостью в самом общем смысле понимается следующее: «малым» изменениям начальных данных задачи отвечает «малое» изменение решения. Понятие «малое» строго будет определено позже, когда будут рассмотрены метрические и нормированные пространства.

Кажется естественным, что практический интерес представляют только такие (корректные) задачи: ведь начальные данные, как правило, определяются опытным путем и точно никогда не известны. Поэтому, если задача не является корректной (например, не обладает свойством устойчивости), мы

сталкиваемся с таким явлением: различные измерения (одних и тех же!) начальных данных, которые отличаются на малую измерительную погрешность прибора, могут приводить к решениям, отличающимся друг от друга сколь угодно сильно.

Парадокс заключается в том, что значительная часть задач, представляющих практический интерес, являются некорректными в смысле Адамара. Простейший пример – нахождение производной от функции, заданной приближенно.

Пример 1.1. Пусть нам надо найти производную функции $\phi(x)$, которая задана на отрезке $[a, b]$ с некоторой погрешностью $\delta\phi(x)$, такой, что $|\delta\phi(x)| \leq \epsilon$.

Например, возможен вариант, когда $\delta\phi(x) = \epsilon \sin \omega x$. При этом, очевидно, погрешность производной $\delta\phi'(x)$ составит

$$\delta\phi'(x) = \epsilon \omega \cos \omega x.$$

Мы видим, что, каково бы ни было малое число ϵ (что соответствует повышению точности «измерения» функции $\phi(x)$), погрешность в определении производной может быть сколь угодно велика при соответствующем выборе параметра ω .

Более сложный пример некорректной задачи – интегральное уравнение Фредгольма первого рода.

Пример 1.2. Пусть задано уравнение

$$\int_a^b K(x, y)\phi(y)dy = f(x), \quad x, y \in [a, b], \quad (1.4)$$

где $\phi(y)$ – неизвестная функция, а известные функции $f(x)$ и $K(x, y)$ – непрерывные и ограниченные в своей области определения.

Будем оценивать погрешности $\delta\phi$ и δf величин ϕ и f в равномерной метрике:

$$\rho_\infty(f_1, f_2) = \sup |f_1(x) - f_2(x)|, \quad x \in [a, b]. \quad (1.5)$$

Пусть, например, погрешность $\delta\phi$ неизвестной функции $\phi(x)$ задается выражением $\delta\phi(x) = A \sin \omega x$; тогда, в силу (1.4), погрешность известной (например, из измерений) функции $f(x)$ определяется выражением

$$\delta f(x) = A \int_a^b K(x, y) \sin(\omega y) dy.$$

Из теории интегралов Фурье известно, что при всяком x интеграл в правой части данного выражения стремится к нулю при $\omega \rightarrow \infty$. При сделанных предположениях об ограниченности функции $K(x, y)$ стремление к нулю равномерное, так что, сколь бы ни было велико число A , всегда можно выбрать число ω так, что $\max |\delta f(x)| < \epsilon$, где ϵ – любое сколь угодно малое число. Однако при этом имеем $\max \delta \phi(x) = A$. Это означает, что в данном примере увеличение точности измерений (т. е. уменьшение числа ϵ) не приводит к повышению точности определения неизвестной функции.

Прямые и обратные задачи. Строго говоря, универсального определения того, какая задача является прямой, а какая – обратной, нет. Это зависит от конкретной проблемы. Возможна, например, такая классификация: *прямой* называют задачу определения следствия по вызывающей его причине, *обратной* – определения причины по следствию. Рассмотрим некоторые примеры.

Пример 1.3. *Например, дан тонкий однородный теплопроводящий стержень, нагретый (неравномерно) при $t = 0$ до температуры $\varphi(x)$. Прямая задача: найти распределение температуры $\varphi_T(x)$ в момент времени $t = T$. Обратная задача: найти начальное распределение температуры $\varphi(x)$ по функции $\varphi_T(x)$.*

Мы рассмотрим такую задачу в последующих лекциях. Рассмотрим в качестве другого примера спектральную задачу Штурма – Лиувилля на всей оси. К ней мы будем неоднократно возвращаться в ходе данного курса.

Пример 1.4. *Пусть нам дан оператор Штурма – Лиувилля*

$$\widehat{\mathcal{L}} = -\frac{d^2}{dx^2} + u(x), \quad u(x) \in \mathcal{S},$$

как оператор пространства $L_2(\mathbb{R})$ (\mathcal{S} – пространство Шварца). Прямая задача в данном случае формулируется так: дан оператор (т. е. фактически коэффициентная функция $u(x)$), найти данные рассеяния (спектр) данного оператора. Обратная задача формулируется так: даны данные рассеяния, найти функцию $u(x)$.

Под спектром понимается полный набор данных рассеяния оператора, которые представляют собой некоторую совокупность

$$(r(k); \lambda_1, b_1, \dots, \lambda_N, b_N).$$

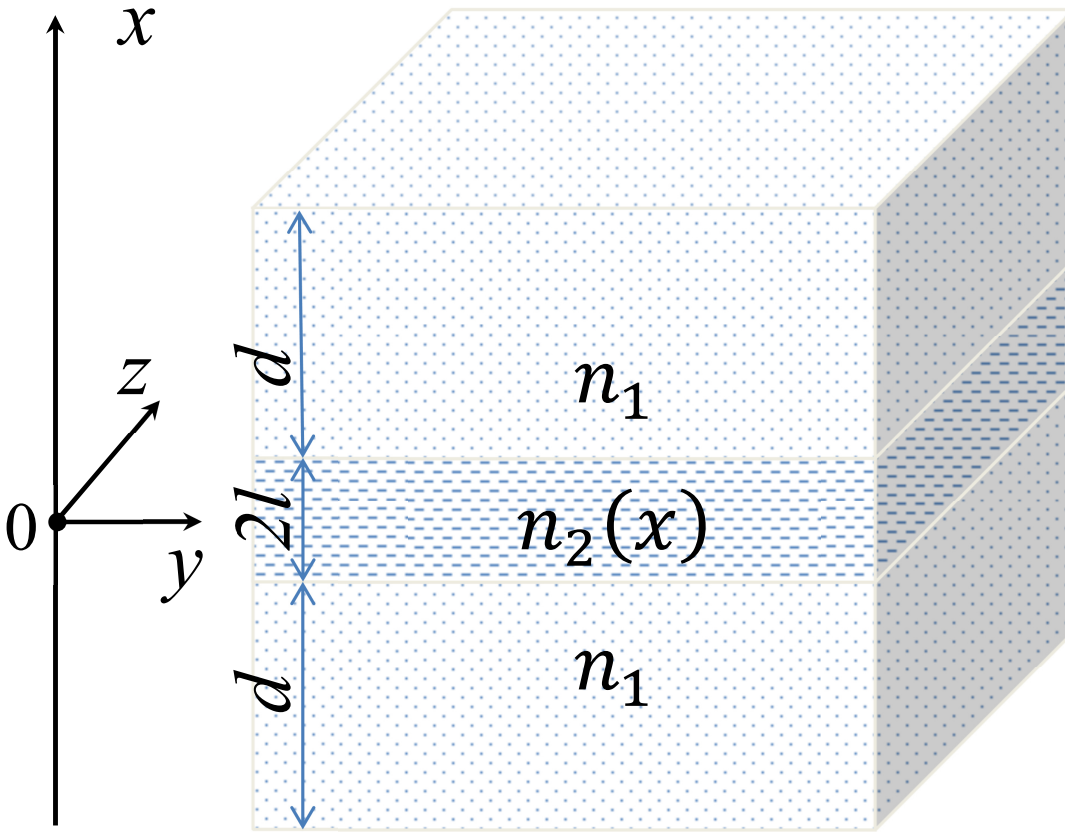


Рис. 1: Схема планарного волновода

Здесь числа λ_i , ($i = 1, \dots, N$) – собственные числа оператора $\hat{\mathcal{L}}$ в пространстве $L_2(\mathbb{R})$; определения остальных величин будут даны позже.

Заметим, что именно обратная задача представляет практический интерес: данные рассеяния, как правило, являются теми величинами, которые измеримы экспериментально. С другой стороны, данные рассеяния могут быть заданы как некоторые технические требования к устройству, описываемому уравнением Штурма – Лиувилля. В этом случае необходимо выяснить, какая функция $u(x)$ к таким данным рассеяния приводит.

Рассмотрим конкретную задачу, представляющую практический интерес и приводящую к спектральной задаче Штурма – Лиувилля: распространение излучения в планарном световоде. Такой световод представляет собой трехслойную структуру, центральный (средний) слой которой имеет (достаточно малую) толщину $2l$ и переменный, вообще говоря, показатель преломления $n_2(x)$. Схематично такая структура изображена на рис. 1.

Координата x выбрана вдоль нормали к плоскостям, являющимся границей между слоями; будем считать, что плоскости пересекают данную коор-

динатную ось в точках $x = \pm l$. Крайние слои, окаймляющие данный слой, имеют толщину $d \gg l$ и постоянный показатель преломления n_1 , причем $n_1 \leq \min n_2(x)$. Распространение излучения частоты ω , как известно, может быть описано при помощи уравнения Гельмгольца

$$(\Delta + k^2)u(\mathbf{r}) = 0, \quad k = \omega n/c, \quad (1.6)$$

где n – показатель преломления среды, c – скорость света в вакууме. Применяя метод разделения переменных, можно показать, что решение уравнения Гельмгольца в данном случае сводится к решению уравнения Штурма – Лиувилля $\widehat{\mathcal{L}}\psi = \lambda\psi$, в котором

$$u(x) = -\frac{\omega^2}{c^2}(n_2^2(x) - n_1^2), \quad |x| \leq \ell, \quad u(x) \equiv 0, \quad |x| > \ell.$$

Собственные числа задачи Штурма – Лиувилля здесь имеют ясный физический смысл: это длины волн тех волноводных мод (т. е. частных решений уравнения Гельмгольца), которые могут распространяться по данной планарной волноводной структуре. Как правило, в том или ином устройстве с использованием подобных волноводов требуются вполне определенные наборы таких длин волн. Поэтому обратная задача, в физической постановке, здесь звучит так: какую зависимость $n_2(x)$ показателя преломления центрального слоя надо сформировать, чтобы данный волновод приводил к *заданному* набору волноводных мод? Другой пример – применение спектральной задачи Штурма – Лиувилля в квантовой механике. Оператор $\widehat{\mathcal{L}}$ в этом случае играет роль гамильтониана (оператора энергии) квантово-механической частицы, движущейся в поле потенциала $u(x)$. Обратная задача здесь – это нахождение потенциала $u(x)$ по данным рассеяния $(r(k); \lambda_1, b_1, \dots, \lambda_N, b_N)$, которые и являются определяемыми на опыте величинами.

Другим важным примером некорректных задач являются *задачи компьютерной томографии*. Термином «томография» в самом широком смысле объединены методы получения изображения внутренних областей непрозрачных тел. Наиболее распространенными являются методы, дающие послойное изображение объекта, т. е. некий его «срез» в заданной плоскости. Такой срез получается, если мы сканируем объект в этой плоскости, например, узким рентгеновским пучком под разными углами и с разных позиций. Какую информацию при этом мы можем получить? Пусть некоторый рент-

геновский пучок распространяется вдоль заданной оси OX . На отрезке $[a, b]$ пучок встречает препятствие, внутренние точки которого характеризуются коэффициентом поглощения рентгеновского излучения $\mu(x)$. Переменный коэффициент поглощения является следствием сложной внутренней структуры препятствия. Так, известно, что все ткани живого организма по-разному поглощают рентгеновское излучение, каждая ткань характеризуется своим коэффициентом поглощения μ . В соответствии с законом Бугера – Бэра

$$I_{out} = I_{in} \exp \left(- \int_a^b \mu(x) dx \right),$$

где I_{in} и I_{out} – интенсивность пучка на входе и выходе соответственно. Таким образом, возникает задача о восстановлении величины $\mu(x)$, несущей информацию о структуре объекта, по ее интегралу – в данном случае измеримой величине $-\ln(I_{out}/I_{in})$. В итоге мы приходим к такому варианту формулировки математической задачи томографии: необходимо восстановить функцию $g(x, y)$, называемую изображением, по функции $\tilde{g}(R, \theta)$, называемой тенью. Тень связана с изображением интегральным преобразованием:

$$\tilde{g}(R, \theta) = \int_{L(R, \theta)} g(x, y) dl,$$

где интегрирование ведется по прямой $L(R, \theta)$, задаваемой уравнением

$$x \cos \theta + y \sin \theta = R, \quad R \in (-\infty, \infty), \quad \theta \in [0, \pi).$$

На функции $g(x, y)$ и $\tilde{g}(R, \theta)$ накладываются специальные ограничения. Мы рассмотрим некоторые задачи томографии более подробно в конце курса.

Вопросы для самоконтроля

1. Какое место математическая физика занимает в математическом моделировании?
2. Что является предметом изучения математической физики?
3. Приведите примеры краевых задач математической физики.
4. Какие краевые задачи математической физики называются корректными по Адамару?
5. Приведите примеры задач, не являющихся корректными по Адамару.
6. Является ли задача о нахождении решения интегрального уравнения Фредгольма первого рода корректной по Адамару?

7. Какие задачи можно считать прямыми, а какие – обратными?
8. Приведите примеры прямых и обратных задач.
9. Сформулируйте спектральную задачу Штурма – Лиувилля.
10. Сформулируйте обратную задачу Штурма – Лиувилля.
11. Запишите уравнение Гельмгольца.
12. Что такое планарный световод?
13. Приведите пример практической задачи, приводящей к спектральной задаче Штурма – Лиувилля.
14. Что такое томография?
15. Как формулируется математическая задача томографии?

Литература: [1, 2, 17].

Лекция 2

Метрические и нормированные пространства

Метрические пространства. Примеры различных метрик. Сходимость. Последовательности Коши. Полнота. Простейшие примеры полных и неполных пространств. Нормированные пространства. Примеры. Соотношение между различными нормами в одном пространстве. Эквивалентность норм в \mathbb{R}^n . О важности правильного выбора нормы функции в вычислительной математике.

В этой лекции мы рассмотрим ряд математических понятий, которые будут необходимы нам в дальнейшем при построении алгоритмов решения тех или иных некорректных задач. При этом, как правило, будем ограничиваться лишь определениями, а утверждения будем приводить без доказательств – апеллируя к тому факту, что многие из рассматриваемых понятий уже изучались в иных курсах. Решая численно задачу о построении приближенного решения, мы всегда подразумеваем, что понимаем, какое решение является «близким» к искомому, а какое – нет. Строгое определение «близости» одной точки, вектора или функции к другому такому же объекту требует введения такого понятия, как *метрика*.

Определение 2.1. Пусть X – множество элементов x, y, z, \dots произвольной природы. Предположим, что на множестве X определена вещественная функция $\rho(x, y)$, $x, y \in X$, обладающая следующими свойствами $\forall x, y, z \in X$:

1. $\rho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$;
2. $\rho(x, y) = \rho(y, x)$;
3. $\rho(x, y) \leq \rho(x, z) + \rho(z, y)$.

Если такая функция определена, то она называется метрикой, а множество X – метрическим пространством.

Пример 2.1. Рассмотрим декартово пространство \mathbf{R}_3 , точки которого $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots$ заданы упорядоченными тройками чисел x, y, z . Определим функцию

$$\rho(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}.$$

Несложно проверить, что данная функция удовлетворяет всем перечисленным выше аксиомам метрики. Очевидно, что в данном случае метрика совпадает с «бытовым» понятием расстояния между точками трехмерного пространства, в котором существуем мы и все окружающие нас предметы. Последнее неравенство в определении метрики в данном случае совпадает с известным утверждением о том, что сторона треугольника не может быть больше суммы двух других его сторон, поэтому и в общем случае указанное неравенство называется *неравенством треугольника*.

Пример 2.2. Рассмотрим пространство \mathbf{R}_n , точки которого $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots$ заданы упорядоченными наборами чисел $(x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n), \dots$. Кроме очевидного обобщения формулы для метрики из предыдущего примера, расстояние между точками в таком пространстве может также быть задано формулой

$$\rho(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \left(\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^p \right)^{1/p}.$$

Здесь p – любое число, такое, что $p \geq 1$.

Выполнение свойств 1 и 2 метрики здесь также очевидно. Доказательство свойства 3 более сложно, здесь мы его приводить не будем.

Пример 2.3. Рассмотрим пространство $C[a, b]$ вещественных функций, непрерывных на отрезке $[a, b]$. Метрика здесь может быть определена следующим образом:

$$\rho_\infty(f_1, f_2) = \sup_{x \in [a, b]} |f_1(x) - f_2(x)|, \quad f_1(x), f_2(x) \in C[a, b].$$

Тот факт, что данное определение удовлетворяет аксиомам метрики, проверяется непосредственно.

В метрических пространствах определено понятие *сходимости*. Пусть X – метрическое пространство с метрикой $\rho(\cdot, \cdot)$, а $x_i \in X, i = 1, 2, \dots$, – некоторая последовательность (бесконечное счетное подмножество) элементов этого множества. Данная последовательность сходится к некоторому элементу

$a \in X$, если $\forall \epsilon > 0 \exists N = N(\epsilon)$ такое, что $\rho(x_n, a) < \epsilon$, как только выполняется $n > N$.

Каждая сходящаяся последовательность является *последовательностью Коши*. Последовательность $x_i \in X, i = 1, 2, \dots$, метрического пространства X с метрикой $\rho(\cdot, \cdot)$ называется последовательностью Коши, если $\forall \epsilon > 0 \exists N = N(\epsilon)$, такое, что $\rho(x_n, x_m) < \epsilon$ для любых $n, m > N$.

Следует подчеркнуть, что в произвольном метрическом пространстве обратное утверждение неверно: произвольно взятая последовательность Коши сходиться, вообще говоря, не обязана. Пространства, в которых все последовательности Коши сходятся, называются *полными*.

Для вычислительной математики важность таких, казалось бы, достаточно абстрактных понятий, как последовательность Коши, метрическое пространство, обусловлена следующими обстоятельствами. На практике последовательность $x_i \in X$ – это некоторая последовательность вычисляемых элементов (решений дифференциального уравнения, например), которая получается при реализации некоторого алгоритма. Номер элемента можно связать с точностью вычислений. Например, это может быть количество итераций, необходимых для достижения заданной точности, и т. д. Элемент a – это искомый элемент (точное решение уравнения). Однако элемент a нам неизвестен. Отсюда, если пространство X (пространство решений) не является полным, можно сделать неутешительный для вычислителя вывод: мы не знаем, будет ли сходиться наша последовательность x_i при увеличении i (т. е. при повышении точности вычисления) к точному решению a . Ведь точное решение нам неизвестно и применить определение сходимости мы не можем. Однако, не зная точного решения, всегда можно проверить, является ли получаемая в результате вычислений последовательность приближенных решений x_i последовательностью Коши. Если это так и пространство X полное, то последовательность x_i сходится к некоторому элементу a , который можно считать искомым решением задачи.

Пример 2.4. *Вещественная ось \mathbb{R} . На вещественной оси любая последовательность Коши сходится (критерий Коши), так что \mathbb{R} – полное метрическое пространство.*

Пример 2.5. *Множество рациональных чисел \mathbb{Q} . Данное пространство не является полным, так как последовательность Коши*

$$x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

элементов данного пространства (рациональных чисел) сходится к иррациональному числу – основанию натуральных логарифмов e .

Более узким по отношению к классу метрических пространств является класс нормированных пространств. Пусть далее V – линейное векторное пространство над полем \mathbb{C} , x, y, \dots – его элементы (векторы) и число $\lambda \in \mathbb{C}$.

Определение 2.2. *Предположим, что на множестве V определена вещественная функция $\|\cdot\|$, обладающая следующими свойствами:*

1. $\|x\| \geq 0$, причем $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$;
2. $\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$;
3. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

В этом случае функция $\|\cdot\|$ называется *нормой*, а пространство V – *нормированным линейным векторным пространством*. Определение нормированного линейного пространства над полем \mathbb{R} аналогично.

Пример 2.6. *Линейное векторное пространство \mathbb{R}_n . Норма векторов $\mathbf{r} \in \mathbb{R}_n$, имеющих координаты $x_i, i = 1, \dots, n$, определяется как*

$$\|\mathbf{r}\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n |x_i|^2}.$$

Пример 2.7. *Пространство $C[a, b]$ вещественных функций, непрерывных на отрезке $[a, b]$. Норма может быть определена так:*

$$\|f\|_{\infty} = \sup_{x \in [a, b]} |f(x)|, \quad f(x) \in C[a, b].$$

Пример 2.8. *Пространство $L_2(\mathbb{R})$ функций, определенных на всей вещественной оси \mathbb{R} и удовлетворяющих условию*

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx < \infty.$$

В этом случае норму можно определить выражением

$$\|f\|_2 = \left(\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx \right)^{1/2}.$$

Заметим, норму $\|\cdot\|_2$ можно определить также в пространстве $L_2([a, b])$.

Любое нормированное пространство является метрическим. Действительно, несложно проверить, что если в некотором пространстве V задана норма $\|\cdot\|$, то функция

$$\rho(x, y) = \|x - y\|, \quad x, y \in V,$$

удовлетворяет всем аксиомам метрики. Как правило, далее мы будем иметь дело лишь с нормированными пространствами.

Рассматривая какое-либо конкретное нормированное пространство V , важно заметить, что норма и, следовательно, метрика определяются не единственным образом. Так, например, в пространстве \mathbf{R}_n норму можно определить так:

$$\|\mathbf{r}\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|.$$

В случае $n = 2$ (плоскость) метрику, порожденную данной нормой, называют «метрикой городских кварталов». Такое название интуитивно понятно. В городе (т. е. на плоскости, отдельные прямоугольные области которой – дома – недоступны для перемещения) расстояние между точками A и B целесообразно измерять вдоль улиц и проездов, образующих некоторую прямоугольную сетку, а не по прямой, соединяющей точки A и B .

В случае конечномерных векторных пространств все нормы являются эквивалентными. Это означает следующее: для любых двух норм $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|$, заданных в пространстве V , существуют (не зависящие от x) константы $c > 0$, $C > 0$, такие, что

$$c\|x\|_1 \leq \|x\| \leq C\|x\|_1, \quad \forall x \in V.$$

Так, для введенных выше норм $\|x\|_1$ и $\|x\|$ пространства \mathbf{R}_n имеем $c = 1/n$, $C = 1$ (проверить!).

Эквивалентность норм в конечномерных пространствах означает, в частности, следующее: любая последовательность, сходящаяся в одной норме, будет сходить и в другой. Это не так в бесконечномерных пространствах: различные нормы там, вообще говоря, неэквивалентны. Поэтому (функциональная, например) последовательность, сходящаяся в одной норме, в другой норме в этом же пространстве может расходиться. Это подчеркивает важность рассмотренных понятий с точки зрения вычислительной математики –

выбор «правильной», т. е. отвечающей постановке задачи, нормы представляется важным условием для построения сходящегося алгоритма. Нормы, в которых сходится меньше последовательностей, называют более сильными, а нормы, в которых последовательностей сходится больше, – более слабыми.

Пример 2.9. Рассмотрим пространство $C([a, b])$. Определим в данном пространстве нормы $\|f\|_1$ и $\|f\|_\infty$:

$$\|f\|_1 = \int_a^b |f(x)| dx, \quad \|f\|_\infty = \sup_{x \in [a, b]} |f(x)|.$$

Рассмотрим последовательность $f_n(x) \in C([a, b])$, элементы которой определены так (будем считать, что $a < -1, b > 1$):

$$f_n(x) = \pm nx + 1, x \in [\mp \frac{1}{n}, 0], \quad f_n(x) \equiv 0, x \notin [-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}].$$

Очевидно, $\|f_n\|_1 \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. В другой норме имеем: $\forall n = 1, 2, 3, \dots$ $\|f_n - f_m\|_\infty \rightarrow 1$ при $m \rightarrow \infty$. Это означает, что последовательность $f_n(x)$ по норме $\|f\|_\infty$ не является последовательностью Коши, а значит, не является сходящейся.

Отметим, что пространство $C([a, b])$ является подпространством более общих нормированных пространств $L_1[a, b]$ и $L_\infty[a, b]$ с нормами $\|\cdot\|_1$ и $\|\cdot\|_\infty$ соответственно. Мы не будем здесь останавливаться на данных пространствах подробно.

Рассмотрим далее важный с практической точки зрения пример, когда функцию, заданную с определенной точностью (например, полученную в ходе измерений) по некоторой норме $\|\cdot\|$, необходимо аппроксимировать кусочно-постоянной функцией.

Пример 2.10. Пусть на интервале $[a, b]$ интегрируемая кусочно-гладкая функция $u(x)$ задана с относительной точностью ϵ по некоторой норме $\|\cdot\|$:

$$\frac{\|\delta u(x)\|}{\|u(x)\|} \leq \epsilon,$$

где $\delta u(x)$ – погрешность в измерении функции $u(x)$. Требуется построить кусочно-постоянную функцию $\tilde{u}(x)$, аппроксимирующую значения заданной функции $u(x)$ по норме $\|\cdot\|$ с относительной точностью, не менее величины ϵ .

Алгоритм решения данной задачи таков.

1. Задаем число $M = 1$.
2. Разбиваем отрезок $[a, b]$ на M частей точками $x_i, i = 0, \dots, M, x_0 = a, x_M = b$. Для простоты мы рассмотрим случай разбиения на равные части: $x_j = x_{j-1} + \Delta$, где $j = 1, \dots, M$ и $\Delta = (b - a)/M$.
3. Выбираем произвольно точки $\xi_j \in [x_{j-1}, x_j], j = 1, \dots, M$. Можно, например, выбрать середины указанных отрезков: $\xi_j = (x_{j-1} + x_j)/2$.
4. Строим кусочно-постоянную функцию $\tilde{u}(x)$:

$$\tilde{u}(x) = u(\xi_j), \quad x \in [x_{j-1}, x_j], \quad j = 1, \dots, M.$$

5. Вычисляем величину $\delta = \|u(x) - \tilde{u}(x)\|/\|u(x)\|$.
6. Если $\delta > \epsilon$, то полагаем $M \rightarrow M + 1$ и возвращаемся к шагу 2.
7. Если $\delta \leq \epsilon$, то задача решена.

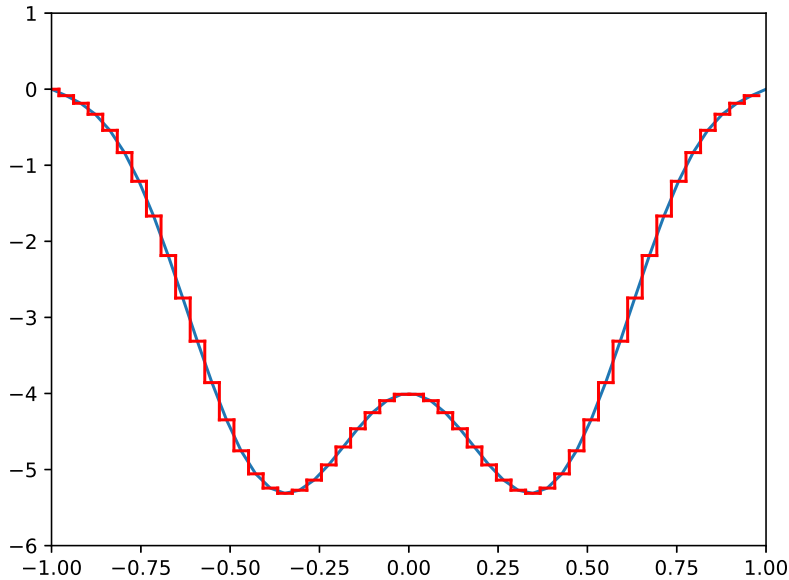


Рис. 2: Аппроксимация гладкой функции

Приведенный в примере 2.10 алгоритм аппроксимации функции является простейшим и, как правило, может быть оптимизирован. Так, если существует отрезок $[a_1, b_1] \subset [a, b]$, $a_1 \neq b_1$, такой, что $u(x) \equiv u_1 = \text{const}$ при $x \in [a_1, b_1]$, то данный отрезок, очевидно, нет смысла подвергать разбиению на более мелкие полуинтервалы, положив для искомой функции $\tilde{u}(x) \equiv u_1$ всюду при $x \in [a_1, b_1]$. В точках $x \in [a, b]$, $x \notin [a_1, b_1]$ имеет смысл выделить интервалы (z_{j-1}, z_j) , в точках которых исходная функция является гладкой и $u'(x) \neq 0$. Далее, каждый такой интервал разбивается точками x_i^j , $i = 0, \dots, M_j$, по правилу $x_i^j = x_{i-1}^j + \sigma/u'(x_{i-1}^j)$, где σ – некая константа, согласованная с заданной точностью ϵ . В том случае, если $u'(x_0^j) = 0$, точка x_1^j выбирается по отдельному правилу, например $x_1^j = x_0^j + \sigma$. Если в точке x_0^j производная не существует (терпит разрыв первого рода), то полагается $u'(x_0^j) = u'(x_0^j + 0)$. Мы не будем здесь останавливаться на подробном описании такого алгоритма.

Заметим, что правильный, отвечающий поставленной задаче выбор нормы является залогом ее оптимального (в том числе по затраченному машинному времени) решения. Например, пусть $C^1([a, b])$ – пространство непрерывно дифференцируемых на отрезке $[a, b]$ функций. Пусть необходимо найти приближение (как по значениям самой функции, так и по значениям производных) к некоторой функции $f(x) \in C^1([a, b])$ с заданной точностью ϵ . Тогда если мы выберем норму $\|f\|_\infty = \sup_{x \in [a, b]} |f(x)|$, то «правильного» решения мы, очевидно, не получим: найденное приближение может отличаться по значениям производных сколь угодно сильно. Для решения данной задачи можно выбрать, например, норму

$$\|f\|_\infty^1 = \sup_{x \in [a, b]} |f(x)| + \sup_{x \in [a, b]} |f'(x)|.$$

Тот факт, что данное выражение определяет норму, предлагается доказать самостоятельно в качестве упражнения.

Вопросы для самоконтроля

1. Дайте определение метрического пространства.
2. Дайте определение метрики.
3. Приведите примеры конечномерных метрических пространств.
4. Приведите примеры бесконечномерных метрических пространств.

5. Какая последовательность элементов метрического пространства называется сходящейся?
6. Какая последовательность элементов метрического пространства называется последовательностью Коши?
7. Какие метрические пространства называются полными?
8. Приведите примеры полных метрических пространств.
9. Приведите примеры метрических пространств, не обладающих свойством полноты.
10. Дайте определение нормированного пространства.
11. Дайте определение нормы.
12. Приведите примеры конечномерных нормированных пространств.
13. Приведите примеры бесконечномерных нормированных пространств.
14. Верно ли утверждение, что всякое нормированное пространство является метрическим?
15. Верно ли утверждение, что всякое метрическое пространство является нормированным?
16. Верно ли утверждение, что норма в нормированном пространстве задается единственным образом?
17. Какие нормы называются эквивалентными?
18. Приведите примеры эквивалентных норм в конечномерном пространстве.
19. Приведите примеры неэквивалентных норм в бесконечномерном пространстве.
20. Составьте алгоритм нахождения ступенчатой (кусочно-постоянной) функции, которая аппроксимирует заданную функцию с заданной точностью по заданной норме.

Литература: [3, 4].

Лекция 3

Евклидовы пространства и ряды Фурье

Евклидовы пространства. Скалярное произведение и ортогональность. Примеры. Норма в евклидовом пространстве. Неравенство Шварца. Гильбертовы пространства. Примеры. Ортонормированные системы векторов. Сепарабельные гильбертовы пространства. Подпространство, его ортогональное дополнение. Разложение гильбертова пространства в прямую сумму подпространств. Ряды Фурье. Примеры. Неравенство Бесселя и равенство Парсеваля. Процедура ортогонализации. Задача о наилучшем приближении заданного вектора рядом Фурье.

В этой лекции мы рассмотрим специальный класс линейных векторных пространств – евклидовы пространства. Итак, пусть E – линейное векторное пространство над полем комплексных чисел \mathbb{C} , векторы x, y, z, \dots – его элементы.

Определение 3.1. Пусть на пространстве E определена полуторалинейная функция $(\cdot, \cdot): E \times E \rightarrow \mathbb{C}$, удовлетворяющая следующим свойствам:

1. $(x, x) \geq 0$, причем $(x, x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$.
2. $(x, y) = \overline{(y, x)}$, $\forall x, y \in E$.
3. $(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2, y) = \lambda_1 (x_1, y) + \lambda_2 (x_2, y)$, $\forall x_1, x_2, y \in E, \forall \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$.

Такая функция называется скалярным произведением векторов пространства E , а само пространство E – евклидовым пространством.

Определение евклидова пространства над полем вещественных чисел \mathbb{R} аналогично – необходимо в пункте 2 определения скалярного произведения исключить черту, означающую комплексное сопряжение. В евклидовом пространстве (и только в нем!) можно ввести понятие ортогональных векторов.

Определение 3.2. Векторы $x, y \in E$ называются ортогональными, если для данных векторов $(x, y) = 0$.

Любое евклидово пространство является нормированным (и, следовательно, метрическим), если норму в нем определить выражением $\|x\| = \sqrt{(x, x)}$.

В дальнейшем, если это не оговорено особо, под нормой вектора в каком-либо евклидовом пространстве мы будем понимать именно данную норму.

Пример 3.1. Пространство \mathbf{R}_n с произведением $(x, y) = \sum_{i=1}^n x_i \bar{y}_i$, где x_i, y_i – декартовы координаты векторов $x, y \in \mathbf{R}_n$, является евклидовым и обозначается E_n .

Пример 3.2. Пространство комплекснозначных функций $f(x)$, где $x \in \mathbf{R}$, удовлетворяющих условию $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx < \infty$, со скалярным произведением

$$(f, g) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \overline{g(x)} dx$$

является евклидовым и обозначается $L_2(\mathbf{R})$.

Для произвольных векторов x, y заданного евклидова пространства E выполняется неравенство Коши – Буняковского – Шварца:

$$(x, y) \leq \|x\| \cdot \|y\|.$$

Полные евклидовы пространства называют гильбертовыми пространствами.

Пример 3.3. Евклидовы пространства из предыдущих примеров являются гильбертовыми.

Пример 3.4. Пространство l_2 последовательностей комплексных чисел x_i , удовлетворяющих условию $\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^2 < \infty$, является гильбертовым со скалярным произведением

$$(x, y) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i \bar{y}_i.$$

Определение 3.3. Система векторов $x_a \in E$, $a \in A$, где E – евклидово пространство, A – некоторое множество, называется ортогональной, если $(x_a, x_b) = 0$ при $a \neq b$.

Если данная система в (линейном) пространстве E является также базисом (полной системой векторов), такую систему называют ортогональным базисом. Если множество счетное, то можно считать выполненными равенства $(x_a, x_a) = 1 \forall a = 1, 2, 3, \dots$. Такие базисы называются ортонормированными. Гильбертовы пространства, в которых существуют счетные ортонормированные базисы, называют *сепарабельными*. В дальнейшем мы будем иметь дело только с такими пространствами.

Рассмотрим некоторое (замкнутое) подпространство E_1 евклидова пространства E .

Определение 3.4. *Множество векторов $x \in E$, таких, что $x \perp y, \forall y \in E_1$, называется ортогональным дополнением пространства E_1 и обозначается E_1^\perp .*

Очевидно, $E = E_1 \cup E_1^\perp$. Несложно доказать, что множество E_1^\perp также является подпространством пространства E . В итоге имеем разложение $E = E_1 \oplus E_1^\perp$; соответствующая операция \oplus , учитывающая как объединение \cup , так и ортогональность пространств E_1 и E_1^\perp , называется *прямой суммой*. Данное равенство обобщается на любое количество пространств:

$$E = \bigoplus_{i=1}^N E_i. \quad (3.1)$$

При этом должны быть выполнены условия: 1) попарной ортогональности пространств: $E_i \perp E_j$, при $i \neq j$; 2) каждый элемент $y \in E$ представим в виде $y = \sum_{i=1}^N x_i$, где $x_i \in E_i$. В случае бесконечномерных пространств возможно $N = \infty$, в этом случае каждый элемент $y \in E$ представим, в соответствии с (3.1), сходящимся рядом элементов $x_i \in E_i$.

Рассмотрим в бесконечномерном евклидовом пространстве E некоторый ортонормированный базис $x_i \in E$. Тогда $\forall x \in E$ имеем

$$x = \sum_{i=1}^{\infty} a_i x_i. \quad (3.2)$$

Определение 3.5. *Разложение элемента x в сумму (3.2) называется рядом Фурье элемента x по базису x_i , а коэффициенты a_i – коэффициентами Фурье.*

Пример 3.5. *Пусть $L_2[0, 2\pi]$ – евклидово пространство непрерывных вещественных 2π -периодических функций со скалярным произведением*

$(f, g) = \int_0^{2\pi} f(x)g(x)dx$. В таком пространстве, как правило, используется тригонометрический базис:

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin x, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos x, \dots, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin nx, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos nx, \dots \right).$$

Ряд Фурье в этом случае традиционно записывается в форме

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx).$$

Пример 3.6. Рассмотрим евклидово пространство $L_2[-1, 1]$ непрерывных вещественных функций со скалярным произведением $(f, g) = \int_{-1}^1 f(x)g(x)dx$. Ортогональный базис образуют полиномы Лежандра:

$$P_n(x) = \frac{1}{n!2^n} \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n, \quad (P_n, P_m) = \frac{2}{2n+1} \delta_{nm}, \quad n, m = 0, 1, 2, 3, \dots$$

Соответственно, любая функция $f(x) \in L_2[-1, 1]$ представима в виде

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n P_n(x), \quad a_n = \frac{(f, P_n)}{\|P_n\|^2}.$$

Пусть E – некоторое бесконечномерное евклидово пространство и $f \in E$. Коэффициенты Фурье $c_k = (f, x_k)$ данного элемента для произвольной полной ортонормированной системы векторов $x_k \in E$ удовлетворяют следующим соотношениям:

- *неравенство Бесселя:*

$$\sum_{n=1}^N |c_n|^2 \leq \|f\|^2.$$

Заметим, что для произвольных евклидовых пространств неравенство, вообще говоря, сохраняется при $N \rightarrow \infty$. Однако для сепарабельных пространств и полной ортонормированной системы векторов x_k при

$N \rightarrow \infty$ имеет место

- *равенство Парсеваля:*

$$\sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2 = \|f\|^2.$$

Пусть E – некоторое бесконечномерное евклидово пространство и $y_n \in E$ – некоторая полная система линейно независимых векторов. Из данной системы можно построить полный ортонормированный базис x_k посредством (рекуррентной) процедуры ортогонализации Грама – Шмидта. Данная процедура является последовательной реализацией следующих шагов:

$$1) x_1 = y_1 / \|y_1\|;$$

$$2) x_2 = z_2 / \|z_2\|, \text{ где } z_2 = y_2 - (y_2, x_1)x_1;$$

... ..

$$n) x_n = z_n / \|z_n\|, \text{ где } z_n = y_n - \sum_{i=1}^{n-1} (y_n, x_i)x_i;$$

... ..

Пример 3.7. *Полиномы Лежандра (ортонормированные на единицу) получают после применения процедуры ортогонализации к линейно независимой системе векторов*

$$1, x, x^2, x^3, \dots, x^k, \dots$$

Рассмотрим теперь задачу о наилучшем приближении заданного вектора рядом Фурье. Пусть E – некоторое бесконечномерное нормированное пространство и $V \subset E$ – его конечномерное подпространство. Пусть $z \in E$ – фиксированный элемент пространства E , который мы будем называть искомым элементом (например, функция, которую требуется найти как решение некоторой задачи). Любой алгоритм, вычислительная процедура, реализуемые за конечный промежуток времени, всегда имеют дело с некоторым конечным (возможно, очень большим) числом элементов. Поэтому приближенные к z всегда принадлежат какому-либо конечномерному пространству V . Формализуя сказанное, мы ставим задачу приблизить наилучшим в некотором смысле образом элемент $z \in E$ элементами $y \in V$:

$$f(y) = \|z - y\|, \quad \exists y_0 \in V \mid f(y_0) = \min f(y), \quad y \in V.$$

Известно, что в произвольном нормированном пространстве такой элемент существует. Если E – евклидово пространство, то такой элемент – единственный. Докажем данные утверждения. Пусть $x_i \in E, i = 1, 2, \dots,$ – некоторый ортонормированный базис пространства E , причем

$$x_i \in V, \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad N = \dim V, \quad x_i \in V^\perp, \quad i = N + 1, 2, \dots$$

Для произвольного элемента $y \in V$ и произвольного элемента $z \in E$ имеем:

$$y = \sum_{i=1}^N c_i x_i, \quad z = \sum_{i=1}^{\infty} (z, x_i) x_i.$$

В соответствии с равенством Парсеваля

$$\|z - y\|^2 = \sum_{i=1}^N |c_i - (z, x_i)|^2 + \sum_{i=N+1}^{\infty} |(z, x_i)|^2.$$

Отсюда очевидно, что минимум достигается при

$$c_i = (z, x_i), \quad i = 1, 2, \dots, N,$$

так что искомым элементом $y_0 = \sum_{i=1}^N (z, x_i) x_i$.

Вопросы для самоконтроля

1. Дайте определение евклидова пространства.
2. Дайте определение скалярного произведения двух векторов в евклидовом пространстве.
3. Какие векторы называются ортогональными?
4. В каких пространствах можно ввести понятие ортогональности двух векторов?
5. Приведите примеры конечномерных евклидовых пространств.
6. Приведите примеры бесконечномерных евклидовых пространств.
7. Какие пространства называются гильбертовыми?
8. Приведите примеры гильбертовых пространств.
9. Какая система векторов в евклидовом пространстве называется ортогональной?
10. Какая система векторов в евклидовом пространстве называется базисом?
11. Какие базисы называются ортонормированными?
12. Какое подпространство евклидова пространства E называется ортогональным дополнением к заданному подпространству $V \in E$?
13. Что такое прямая сумма подпространств?
14. Запишите разложение евклидова пространства E в прямую сумму подпространств E_i . Каким условиям должны удовлетворять пространства E_i ?
15. Дайте определение ряда Фурье элемента x евклидова пространства E по некоторому ортонормированному базису x_i .

16. Дайте определение тригонометрического базиса в пространстве $L_2[0, 2\pi]$.
17. Докажите, что тригонометрический базис является ортонормированным в пространстве $L_2[0, 2\pi]$.
18. Напишите явные выражения для коэффициентов ряда Фурье для тригонометрического базиса в пространстве $L_2[0, 2\pi]$.
19. Что такое полиномы Лежандра?
20. Запишите неравенство Бесселя.
21. Запишите равенство Парсеваля.
22. Как можно из произвольной полной системы линейно независимых векторов в евклидовом пространстве построить ортонормированный базис?
23. Из какой системы векторов в пространстве $L_2[-1, 1]$ можно получить полиномы Лежандра процедурой ортогонализации?
24. Запишите наилучшее приближение произвольного вектора $z \in E$, где E – евклидово пространство, элементами $y \in V$, где $V \subset E$ – некоторое конечномерное подпространство.

Литература: [3, 4].

Лекция 4

Линейные операторы в евклидовых пространствах

Линейные операторы, действующие из одного пространства в другое. Важнейшие случаи: линейные функционалы, линейные операторы, действующие в данном пространстве. Примеры. Операторы как элементы линейного векторного пространства. Сопряженное пространство. Лемма Рисса. Собственные векторы и собственные числа оператора. Обратный оператор. Сопряженный оператор. Симметрические (эрмитовы) и самосопряженные операторы. Унитарные операторы. Ограниченные операторы. Норма оператора. Нормы матриц. Примеры. Произведение операторов.

В формализованном виде задачи, которые мы рассматриваем, в большинстве случаев могут быть записаны так: $\hat{A}x = z$, где z – известный элемент некоторого функционального пространства H_1 , x – неизвестный элемент некоторого пространства H_2 . Символом \hat{A} здесь обозначена функция, отображающая некоторую область $D_A \subset H_1$ в пространство H_2 . Таковую функцию в общем случае называют *оператором*. Обозначения $\hat{A}x$ и $\hat{A}(x)$ мы будем считать эквивалентными. Множество D_A называют *областью определения* оператора, а множество $Ran(A) \subset H_2$, определенное как $Ran(A) = \hat{A}(D_A)$, – *областью его значений*. Множество $Ker(A) \subset D_A$, такое, что $Ax = 0 \forall x \in Ker(A)$, называют *ядром* оператора \hat{A} .

Если пространства H_1 и H_2 – линейные векторные пространства над полем комплексных (C) либо вещественных (R) чисел, то можно говорить о *линейных операторах*. Оператор \hat{A} называется линейным, если выполняется условие:

$$\hat{A}(\lambda_1\psi_1 + \lambda_2\psi_2) = \lambda_1\hat{A}\psi_1 + \lambda_2\hat{A}\psi_2, \quad \forall \psi_{1,2} \in D_A, \quad \forall \lambda_{1,2} \in \mathbb{C}(\mathbb{R}).$$

Как правило, мы будем рассматривать линейные операторы. Заметим, что в случае линейных операторов множество $Ker(A)$ само является подпространством.

Множество операторов в линейном векторном пространстве, имеющих общую область определения, само образует линейное векторное пространство. Действительно, операции суммы и умножения на число определяются естественным образом:

$$(\hat{A} + \hat{B})x = \hat{A}x + \hat{B}x, \quad (\lambda\hat{A})x = \lambda(\hat{A}x).$$

В частном случае, когда $H_2 = \mathbb{C}(\mathbb{R})$, соответствующие операторы называют комплексными (вещественными) функционалами. Так же, как операторы, функционалы могут быть линейными или нелинейными. Пусть H – некоторое линейное векторное (не обязательно гильбертово) пространство. Обозначим H' множество линейных непрерывных функционалов, определенных на векторах пространства H . Можно показать, что множество H' само является линейным векторным пространством. Такое пространство называется *сопряженным* к пространству H .

Важным для нашего дальнейшего рассмотрения случаем является случай $H_1 = H_2 = H$, причем пространство H является гильбертовым пространством. В этом случае $H = H'$. Данное утверждение носит название *леммы Рисса*.

Пример 4.1. Пусть $H = L_2(\mathbb{R})$. Тогда каждая функция $\phi(x) \in L_2(\mathbb{R})$ определяет линейный функционал

$$l_\phi(\psi) = \int_{-\infty}^{\infty} \psi(x)\phi(x)dx, \quad \forall \psi(x) \in L_2(\mathbb{R}).$$

Лемма Рисса говорит о том, что других (непрерывных) линейных функционалов на пространстве $L_2(\mathbb{R})$ нет.

Пример 4.2. Рассмотрим оператор $\hat{\mathcal{L}} = -\frac{d^2}{dx^2} + x^2$. Этот оператор можно рассматривать как оператор в пространстве $L_2(\mathbb{R})$ при условии, что он определен на области $D_A \subset L_2(\mathbb{R})$, которая состоит из дважды непрерывно дифференцируемых функций $\psi(x)$, таких, что $\int_{-\infty}^{\infty} x^4|\psi(x)|^2dx < \infty$.

Если для некоторого оператора \hat{A} два различных элемента $x_1, x_2 \in D_A$ отображаются в два различных элемента $y_1, y_2 \in \text{Ran}(A)$, то определен обратный оператор, обозначаемый как \hat{A}^{-1} . В случае линейного оператора необходимым и достаточным условием существования обратного оператора является условие $\text{Ker}(A) = 0$.

Пример 4.3. Рассмотрим конечномерное пространство E_n ; каждая квадратная матрица A размерности $N \times N$ задает линейный оператор. Известно, что СЛАУ $Ax = 0$, где $x \in E_n$ имеет нетривиальное решение (т.е. соответствующий оператор имеет ненулевое ядро) тогда и только тогда, когда $\det A = 0$. Условие $\det A \neq 0$, в свою очередь, является необходимым и достаточным для существования обратной матрицы A^{-1} .

Важнейшими для нашего дальнейшего рассмотрения являются такие объекты, как собственные векторы (СВ) и собственные числа (СЧ) оператора.

Определение 4.1. Пусть задан некоторый оператор \hat{A} , определенный в области $D_A \subset E$, где E – евклидово пространство. Решение $\psi \in D_A$ уравнения

$$\hat{A}\psi = \lambda\psi, \quad (4.1)$$

где $\lambda \in \mathbb{C}$, называется собственным вектором оператора \hat{A} . Число λ , при котором такое решение существует, называется собственным числом.

Одному СЧ могут соответствовать несколько (возможно, бесконечное число) СВ. Такие СЧ называются вырожденными. Часто вместо терминов СВ и СЧ употребляют эквивалентные: собственные функции (СФ), собственные значения (СЗ). Термин СФ употребляется, если рассматриваются операторы, действующие в функциональных пространствах.

Пример 4.4. СЧ и СВ матрицы $N \times N$. В этом случае равенство (4.1) представляет собой однородную СЛАУ порядка N . Нетривиальные решения у такой системы имеются в том и только в том случае, когда ее главный определитель равен нулю. Отсюда получаем алгебраическое уравнение порядка N :

$$\det(\hat{A} - \lambda\hat{I}) = 0.$$

Корни данного уравнения (среди которых могут быть кратные) являются СЧ для матрицы \hat{A} . СВ находятся подстановкой конкретного СЧ λ_i в уравнение (4.1) и последующее его решение.

Рассмотрим теперь понятие сопряженного оператора. Пусть E – некоторое евклидово пространство со скалярным произведением (\cdot, \cdot) , и пусть \hat{A} – некоторый действующий в нем линейный оператор. Предположим, что $D_A = E$. Заметим, что $E = \text{Ran}(A) \oplus \text{Ker}(A)$. Пусть $\text{Ker}(A) = 0$. В этом

случае оператор \hat{A}^+ , сопряженный оператору \hat{A} , определяется наиболее просто – равенством $(\hat{A}x, y) = (x, \hat{A}^+y)$, $x, y \in E$. Такая ситуация реализуется, например, когда E – конечномерное пространство и оператор задан квадратной невырожденной матрицей. В общем случае бесконечномерных евклидовых пространств, когда $D_A \subset E$, определение сопряженного оператора более сложное. Равенство $(\hat{A}x, y) = (x, \hat{A}^+y)$ выполняется лишь для векторов $x \in D_A$ и $y \in D_{A^+}$, где D_{A^+} – область определения сопряженного оператора. Если $D_A \subset D_{A^+}$ и при этом $\hat{A}x = \hat{A}^+x$, $\forall x \in D_A$, то такой оператор называют *симметрическим (эрмитовым)*. Если при этом $D_A = D_{A^+}$, то такой оператор называют *самосопряженным*. Мы, как правило, не будем делать различия между эрмитовыми и самосопряженными операторами, оставляя (достаточно тонкие) вопросы, связанные с их областями определения, вне рамок нашего курса. СЧ и СВ самосопряженных операторов обладают важным свойством.

Теорема 4.1. *СЧ самосопряженного оператора вещественны, а его СВ, отвечающие различным СЧ, ортогональны.*

Действительно, пусть λ_i есть СЧ, отвечающее СВ x_i , пусть $\|x_i\| = 1$. Тогда

$$\lambda_i = (x_i, \hat{A}x_i); \quad \overline{\lambda_i} = \overline{(x_i, \hat{A}x_i)} = (\hat{A}x_i, x_i) = (x_i, \hat{A}^+x_i) = (x_i, \hat{A}x_i).$$

Для различных СЧ λ_i и λ_j и отвечающих им СВ x_i и x_j имеем:

$$\begin{aligned} (x_i, \hat{A}x_j) &= \lambda_j(x_i, x_j), \\ (x_i, \hat{A}x_j) &= (\hat{A}x_i, x_j) = \lambda_i(x_i, x_j), \end{aligned}$$

что возможно только в случае, если $(x_i, x_j) = 0$.

Рассмотрим теперь понятие *ограниченного оператора*.

Определение 4.2. *Оператор \hat{A} , определенный в некоторой области $D_A \subset E$, где E – евклидово пространство, называется ограниченным, если*

$$\exists C > 0, \quad \left| \quad \forall x \in D_A \quad \|\hat{A}x\| \leq C\|x\|. \right.$$

Наименьшее из чисел C , фигурирующих в данном определении, называется *нормой* оператора и обозначается $\|\hat{A}\|$. Это можно записать так:

$$\|\hat{A}\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|\hat{A}x\|. \quad (4.2)$$

Пример 4.5. Пусть E – N -мерное евклидово пространство над полем \mathbf{R} , оператор \hat{A} задается вещественной матрицей размерности $N \times N$ с элементами a_{ij} . Норму матрицы, определяемую в соответствии с формулой (4.2), называют операторной нормой. Такая норма зависит от определения нормы векторов $x \in E$. Пусть, например, норма векторов $x \in E$ определена выражением $\|x\|_\infty = \max_{1 \leq k \leq N} |x_k|$. Тогда

$$\|\hat{A}\| = \max_{1 \leq k \leq N} \sum_{i=1}^N a_{ki}.$$

Такую норму называют *строчной нормой*.

Заметим, норму матрицы можно определить и аксиоматически, положив, например, $\|\hat{A}\| = N \max_{i,j} |A_{ij}|$ либо $\|\hat{A}\| = \sqrt{\sum_{i,j=1}^N A_{ij}^2}$. Поскольку пространство матриц – конечномерное (с размерностью N^2), то все эти нормы эквивалентны. Выбор той или иной нормы в конкретной задаче определяется особенностями задачи.

Рассмотрим теперь более сложный случай.

Пример 4.6. Пусть $E = L_2([a, b])$, а интегральный оператор \hat{K} , заданный на всем пространстве $L_2([a, b])$, определяется формулой

$$\hat{K}f = \int_a^b K(x, y)f(y)dy; \quad f(x) \in L_2(\mathbf{R}), \quad |K(x, y)| \leq M, \quad \forall x, y \in [a, b].$$

В этом случае

$$\|\hat{K}f\|^2 = (\hat{K}f, \hat{K}f) = \int_a^b \left(\int_a^b K(x, y)f(y)dy \right)^2 dx.$$

Действительно, считая, что ядро $K(x, y)$ при всяком $x \in [a, b]$ задает некоторую функцию $K(\cdot, y) \in L_2([a, b])$, и используя неравенство Коши – Буняковского – Шварца, имеем

$$\left(\int_a^b K(x, y)f(y)dy \right)^2 \leq \int_a^b K^2(x, y)dy \int_a^b f^2(y)dy = \int_a^b K^2(x, y)dy \cdot \|f\|^2.$$

Отсюда в пространстве $L_2[a, b]$ $\|\hat{K}\| = \sqrt{\int_a^b \int_a^b K^2(x, y)dxdy}$.

Для операторов, не являющихся ограниченными, понятие нормы ввести нельзя. Рассмотрим пример неограниченного оператора в пространстве $L_1[\mathbf{R}]$.

Пример 4.7. Пусть $f(x) \in L_1[\mathbb{R}]$ – произвольная кусочно-гладкая функция с компактным носителем и такая, что $f(x) \geq 0$ и $\|f\|_1 = 1$. Данные свойства означают, что площадь под графиком функции равна единице. Очевидно, что $\forall a$ имеем для функции $f_a(x) \equiv f(x+a)$: $\|f_a\|_1 = 1$. Рассмотрим оператор \hat{X} , определенный как $\hat{X}f(x) = xf(x)$ (оператор умножения на переменную x). Очевидно, что при $a \rightarrow \infty$ площадь под графиком функции $xf(x+a)$ будет неограниченно возрастать, так что оператор \hat{X} – неограниченный оператор.

Как правило, область определения ограниченного оператора можно считать совпадающей со всем пространством, на котором он определен¹. В этом случае определено произведение операторов:

$$(\hat{A}\hat{B})x = \hat{A}(\hat{B}x).$$

Заметим, что, вообще говоря, $\hat{A}\hat{B} \neq \hat{B}\hat{A}$! Соответственно, определена также степень оператора \hat{A}^n .

Определенный на всем пространстве E оператор \hat{U} , такой, что $\hat{U}^+ = \hat{U}^{-1}$, называют *унитарным*. Преобразование пространства E унитарным оператором сохраняет скалярное произведение двух любых векторов, поскольку выполняется $(\hat{U}x, \hat{U}y) = (x, y)$. Рассмотрим примеры унитарных операторов.

Пример 4.8. Матрица $N \times N$, элементы которой удовлетворяют соотношению

$$A_{ij} = \overline{A_{ji}}.$$

Пример 4.9. Любой оператор вида $U = \exp[i\hat{A}]$, где \hat{A} – самосопряженный оператор.

В последнем примере мы использовали определение функции от оператора: если $f(x)$ – функция переменной x , разлагаемая в ряд Тейлора, то

$$f(\hat{A}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \hat{A}^n.$$

Такое определение стало возможным после того, как мы определили произведение оператора на число, степень оператора и сумму операторов.

¹ Рассмотрение таких вопросов, как ограниченные операторы, определенные на всюду плотных в пространстве множествах, и переход к замыканию оператора, выходят за рамки нашего курса.

Вопросы для самоконтроля

1. Дайте общее определение оператора, действующего из одного пространства в другое.
2. Что такое область определения оператора?
3. Что такое область значений оператора?
4. В каких пространствах можно ввести понятие линейного оператора?
5. Что такое линейный оператор в линейном векторном пространстве?
6. Как определена сумма операторов в линейном векторном пространстве?
7. Как определено в линейном векторном пространстве умножение оператора на число?
8. Что такое линейный функционал на линейном векторном пространстве?
9. Что такое сопряженное пространство?
10. Сформулируйте лемму Рисса.
11. Что такое обратный оператор?
12. Сформулируйте необходимые и достаточные условия существования обратного оператора.
13. Что такое собственные числа оператора?
14. Что такое собственные векторы оператора?
15. Какие собственные числа называются вырожденными?
16. В каких пространствах можно определить понятие сопряженного оператора?
17. Дайте определение сопряженного оператора в евклидовом пространстве.
18. Что такое самосопряженный оператор?
19. Что такое ограниченный оператор?
20. Для каких операторов можно ввести понятие нормы?
21. Что такое норма оператора?
22. Какие нормы матриц вы знаете?
23. Что такое строчная норма матрицы?
24. Являются ли разные нормы матриц эквивалентными?
25. Как определяется норма интегрального оператора в пространстве $L_2([a, b])$?
26. Можно ли определить произведение операторов?
27. Что такое унитарный оператор?
28. Как определяется функция от оператора?

Литература: [3–5].

Лекция 5

Спектральная задача Штурма – Лиувилля на интервале

Классическая задача Штурма – Лиувилля на интервале. Спектр, его асимптотика. Примеры. Алгоритм компьютерной программы для нахождения дискретного спектра задачи Штурма – Лиувилля на интервале. Метод «стрельбы». Обратная задача Штурма – Лиувилля на интервале (формулировка).

В этой лекции мы обсудим спектральную задачу (прямую и обратную) Штурма – Лиувилля. Данная задача имеет разнообразные приложения, как практические, так и теоретические: некоторые из них мы обсуждали во вводной лекции. Начатые там обсуждения мы продолжим позже; в данной лекции мы рассмотрим основные теоретические понятия, связанные с задачей Штурма – Лиувилля на конечном интервале. Напомним, что мы рассматриваем линейное обыкновенное дифференциальное уравнение (ОДУ) второго порядка

$$-\frac{d^2\psi(x)}{dx^2} + u(x)\psi(x) = \lambda\psi(x). \quad (5.1)$$

Рассмотрим вначале *классическую задачу Штурма – Лиувилля*. Под такой понимают спектральную задачу (5.1), где вещественная коэффициентная функция $u = u(x)$ и искомое решение ψ рассматриваются на интервале $[0, \pi]$. Функция $\psi = \psi(x; \lambda)$ удовлетворяет граничным условиям общего вида:

$$\begin{aligned} A_0\psi'(0; \lambda) + B_0\psi(0; \lambda) &= 0, \\ A_\pi\psi'(\pi; \lambda) + B_\pi\psi(\pi; \lambda) &= 0. \end{aligned}$$

Здесь A_0, A_π, B_0 и B_π – конечные действительные числа. Далее мы остановимся на случае, когда $A_0 \neq 0, A_\pi \neq 0$, так что граничные условия приво-

дятся к виду:

$$\psi'(0; \lambda) + Q_0\psi(0; \lambda) = 0, \quad (5.2)$$

$$\psi'(\pi; \lambda) + Q_\pi\psi(\pi; \lambda) = 0. \quad (5.3)$$

Мы будем рассматривать только вещественные решения $\psi(x; \lambda)$.

Как всякое ОДУ второго порядка, уравнение (5.1) имеет два линейно независимых решения. Поэтому мы всегда можем выбрать решение $\psi(x; \lambda)$ такое, что $\psi(0; \lambda) = 1$ и $\psi'(0; \lambda) = -Q_0$. Будем рассматривать далее именно такие решения уравнения (5.1). Таким образом, условию (5.2) всегда можно удовлетворить при любом значении λ . Следовательно, собственные числа задачи (5.1) – это корни уравнения (5.3). Для того чтобы получить полный спектр, к собственным числам λ_n необходимо добавить *нормировочные коэффициенты*

$$\alpha_n = \int_0^\pi \psi^2(x; \lambda_n) dx. \quad (5.4)$$

Спектр данной задачи дискретный; этим она проще, чем спектральная задача Штурма – Лиувилля на всей оси, которую мы будем рассматривать в последующих лекциях. Таким образом, *прямая задача рассеяния* в рассматриваемом случае – это построение отображения \hat{A} :

$$\hat{A}: u(x) \longrightarrow \mathcal{R},$$

где «данные рассеяния» \mathcal{R} – это множество $(\lambda_1, \alpha_1; \lambda_2, \alpha_2; \dots)$.

Для нашего дальнейшего рассмотрения важными являются следующие асимптотические разложения величин λ_n и α_n :

$$\sqrt{\lambda_n} = n + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{l_k}{n^{2k+1}}, \quad (5.5)$$

$$\alpha_n = \frac{\pi}{2} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{n^{2k+2}}. \quad (5.6)$$

Рассмотрим простой пример.

Пример 5.1. Пусть $Q_0 = Q_\pi = 0$ и $u(x) \equiv -U_0 = \text{const}$, причем $U_0 \geq 0$. В этом случае находим:

$$\psi(x) = \cos(\sqrt{\lambda_n + U_0} x), \quad \sqrt{\lambda_n + U_0} = n, \quad n = 1, \dots$$

Выражение для собственных чисел λ_n может быть представлено в форме (5.5):

$$\sqrt{\lambda_n} = n - \frac{U_0}{2n} - \frac{U_0^2}{8n^3} - \dots$$

Рассмотрим более сложный пример.

Пример 5.2. *Граничные условия (5.2) и (5.3) выполнены в общем виде, причем, как и в предыдущем примере, $u(x) \equiv -U_0 = \text{const}$, $U_0 \geq 0$. Решение уравнения (5.1), удовлетворяющее условию $\psi(0; \lambda) = 1$ и $\psi'(0; \lambda) = -Q_0$, есть*

$$\psi(\lambda, x) = \cos(\sqrt{\lambda + U_0} x) - \frac{Q_0}{\sqrt{\lambda + U_0}} \sin(\sqrt{\lambda + U_0} x).$$

Трансцендентное уравнение, возникающее из требования выполнения граничного условия (5.3), записывается в виде

$$(Q_\pi - Q_0) \cos(\sqrt{\lambda + U_0} \pi) = \left(\sqrt{\lambda + U_0} + \frac{Q_0 Q_\pi}{\sqrt{\lambda + U_0}} \right) \sin(\sqrt{\lambda + U_0} \pi).$$

Вводя новую переменную $\xi = \sqrt{\lambda + U_0}$, данное уравнение можно переписать в форме

$$\tan(\xi \pi) = \frac{(Q_\pi - Q_0)\xi}{\xi^2 + Q_0 Q_\pi}. \quad (5.7)$$

Корни данного уравнения представляют собой точки пересечения графиков функций в левой и правой части данного равенства (рис. 3). Они могут быть найдены тем или иным численным методом.

Далее мы рассмотрим алгоритм нахождения спектра задачи Штурма – Лиувилля (5.1)–(5.3) на отрезке $[0, \pi]$ с произвольной кусочно-непрерывной функцией $u(x)$, удовлетворяющей условиям

$$u(0) = 0, \quad u(x) < 0, \quad x \in [0, \pi], \quad \max |u(x)| = U_0 < \infty.$$

Данный алгоритм известен под названием «метод „стрельбы”». Ниже приводятся шаги, необходимые для реализации данного алгоритма. Для простоты мы предположим также, что $\max |u(x)| = U_0$ достигается в некоторой точке $\zeta \in (0, \pi)$.

1. Выбираем некоторое натуральное число M и разбиваем интервал $[0, \pi]$ на M равных интервалов:

$$0 = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{M-1} < x_M = \pi,$$

вводим обозначение II_j для полуинтервалов $[x_{j-1}, x_j)$. Число M определяется точностью ϵ_1 , с которой считается известной исходная коэффициентная функция $u(x)$.

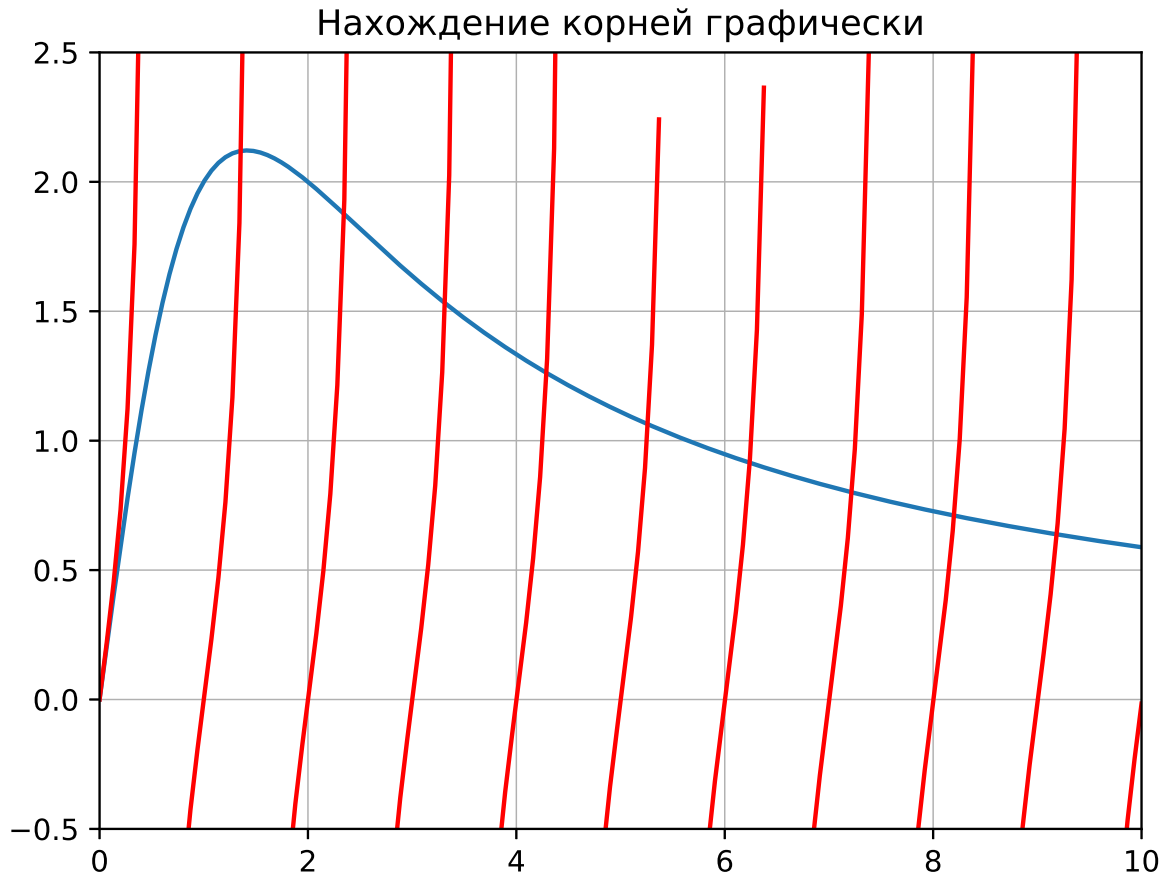


Рис. 3: Графическое исследование уравнения (5.7)

2. Заменяем функцию $u(x)$ на интервале $[0, \pi]$ на кусочно-постоянную функцию $\tilde{u}(x)$:

$$u(x) \rightarrow \tilde{u}(x); \quad \tilde{u}(x) \equiv u(\xi_k) = -U_k, \quad \forall x \in [x_{k-1}, x_k).$$

Параметры ξ_k выбираются из условия $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k)$, в остальном произвольны. Например, можно положить $\xi_k = (x_{k-1} + x_k)/2$.

Контролируем условие $[\|u(x) - \tilde{u}(x)\|/\|u(x)\|] \leq \epsilon_1$ для выбора определенного числа M (см. пример 2.10). Напомним, что функция $u(x)$ нам известна с некоторой относительной погрешностью ϵ_1 , которая задается по некоторой норме $\|\cdot\|$ в пространстве функций на интервале $[0, \pi]$.

3. Выбираем произвольное значение спектрального параметра λ , удовлетворяющее условиям:

$$\lambda \in [-U_0, \infty), \quad -U_k \neq \lambda, \quad k = 1, 2, \dots, M.$$

Разумным (но не единственно возможным) является выбор первого значения λ в виде $\lambda = -U_0 + \Delta$, где Δ – достаточно малое число (меньшее, чем расстояние между искомыми СЧ. Возможно, параметр Δ придется изменить).

4. Полагаем значение счетчика $j = 1$.

5. Вводим обозначение $\Lambda_j = U_j + \lambda$. Определяем знак Λ_j .

6. Записываем решение на интервале II_1 :

$$6_+. \quad \psi(x) \equiv \psi_{II_1}(x) = A_1 \cos(\sqrt{\Lambda_1} x) + B_1 \sin(\sqrt{\Lambda_1} x), \quad \text{при } \Lambda_1 > 0$$

или

$$6_-. \quad \psi(x) \equiv \psi_{II_1}(x) = A_1 \cosh(\sqrt{-\Lambda_1} x) + B_1 \sinh(\sqrt{-\Lambda_1} x), \quad \text{при } \Lambda_1 < 0.$$

7. Находим константы A_1 и B_1 из требований $\psi_{II_1}(0) = 1$ и $\psi'_{II_1}(0) = -Q_0$.

8. Вычисляем величину

$$\alpha^{(1)}(\lambda) = \int_{x_0}^{x_1} \psi_{II_1}^2(x) dx.$$

9. Изменяем значение счетчика $j \rightarrow j + 1$, определяем знак Λ_j .

10. Переходим на интервал II_j : $x \in [x_{j-1}, x_j]$ и записываем решение на данном интервале:

$$10_+. \quad \psi(x) \equiv \psi_{II_j}(x) = A_j \cos(\sqrt{\Lambda_j} x) + B_j \sin(\sqrt{\Lambda_j} x), \quad \text{при } \Lambda_j > 0$$

или

$$10_-. \quad \psi(x) \equiv \psi_{II_j}(x) = A_j \cosh(\sqrt{-\Lambda_j} x) + B_j \sinh(\sqrt{-\Lambda_j} x), \quad \text{при } \Lambda_j < 0.$$

11. «Сшиваем» решение на интервале II_{j-1} и на интервале II_j . Здесь возможны четыре варианта СЛАУ с неизвестными A_j и B_j , в зависимости от сочетания знаков констант Λ_{j-1} и Λ_j :

11₊₊. При $\Lambda_{j-1} > 0$ и $\Lambda_j > 0$:

$$\begin{aligned} & A_{j-1} \cos(\sqrt{\Lambda_{j-1}} x_{j-1}) + B_{j-1} \sin(\sqrt{\Lambda_{j-1}} x_{j-1}) = \\ & = A_j \cos(\sqrt{\Lambda_j} x_{j-1}) + B_j \sin(\sqrt{\Lambda_j} x_{j-1}), \\ & -A_{j-1} \sqrt{\Lambda_{j-1}} \sin(\sqrt{\Lambda_{j-1}} x_{j-1}) + B_{j-1} \sqrt{\Lambda_{j-1}} \cos(\sqrt{\Lambda_{j-1}} x_{j-1}) = \\ & = -A_j \sqrt{\Lambda_j} \sin(\sqrt{\Lambda_j} x_{j-1}) + B_j \sqrt{\Lambda_j} \cos(\sqrt{\Lambda_j} x_{j-1}). \end{aligned}$$

11₊₋. При $\Lambda_{j-1} > 0$ и $\Lambda_j < 0$: ...

11₋₊. При $\Lambda_{j-1} < 0$ и $\Lambda_j > 0$: ...

11₋₋. При $\Lambda_{j-1} < 0$ и $\Lambda_j < 0$: ...

Решаем данную СЛАУ, находим константы A_j и B_j .

12. Вычисляем величину

$$\alpha^{(j)}(\lambda) = \int_{x_{j-1}}^{x_j} \psi_{II_j}^2(x) dx.$$

13. Проверяем значение счетчика j . Если $j < M$, то переходим к шагу 9, если $j = M$, то переходим к шагу 14.

14. Определяем значение константы $\mathbf{a} = \mathbf{a}(\lambda) = \psi'_{II_M}(\pi - 0) + Q_\pi \psi_{II_M}(\pi - 0)$.

15. Вычисляем константу

$$\alpha(\lambda) = \sum_{j=1}^M \alpha^{(j)}.$$

16. Возвращаемся к шагу 3 с иным значением параметра λ . Если исходное значение параметра λ было $\lambda = -U_0 + \Delta$, полагаем $\lambda \rightarrow \lambda + \Delta$.

17. Делаем достаточное количество циклов с задаваемой заново константой λ и строим графики функции $\mathbf{a} = \mathbf{a}(\lambda)$ и $\alpha = \alpha(\lambda)$. Нули λ_i функции $\mathbf{a}(\lambda)$ и являются точками дискретного спектра задачи (5.1). Дополнительные константы α_i дискретного спектра определяются в соответствии с формулой $\alpha_i = \alpha(\lambda_i)$. С учетом разложения (5.5) находим, что цикл, вычисляющий пары (λ_n, α_n) , целесообразно прервать при $n = N$, где число N удовлетворяет условию

$$\frac{|N^2 - \lambda_N|}{\lambda_N} \simeq \epsilon_2. \quad (5.8)$$

Начиная со значения $n = N + 1$, можно считать

$$\lambda_n = n^2 + \text{const}, \quad \alpha_n = \pi/2.$$

Величина ϵ_2 в соотношении (5.8) – относительная погрешность, которая допускается при вычислении СЧ.

Структура уравнения (5.1) показывает, что числа ϵ_1 и ϵ_2 не являются независимыми. Вообще говоря, должно быть выполнено условие $\epsilon_1 \leq C\epsilon_2$, где константа C зависит от нормы, в которой задана погрешность коэффициентной функции. Мы не будем здесь подробно на этом останавливаться.

Обратной задачей рассеяния для уравнения (5.1) называют восстановление функции $u(x)$ по заданному множеству \mathcal{R} . Именно эта задача является некорректной. Решение обратной задачи может быть выполнено разными способами, как численными, так и аналитическими.

Вопросы для самоконтроля

1. Как формулируется классическая задача Штурма – Лиувилля на отрезке?
2. Как используются граничные условия для нахождения собственных чисел задачи Штурма – Лиувилля на отрезке?
3. Что включает в себя спектр задачи Штурма – Лиувилля на отрезке?
4. Дайте определение собственного числа задачи Штурма – Лиувилля на отрезке.
5. Дайте определение нормировочного коэффициента задачи Штурма – Лиувилля на отрезке.
6. Запишите асимптотическое разложение собственных чисел λ_n по номеру n задачи Штурма – Лиувилля на отрезке.
7. Запишите асимптотическое разложение нормировочных коэффициентов α_n по номеру n задачи Штурма – Лиувилля на отрезке.
8. В каких случаях СФ задачи Штурма – Лиувилля на отрезке можно найти явно?
9. В каких случаях СЧ задачи Штурма – Лиувилля на отрезке можно найти, определяя точки пересечения графиков тригонометрических и рациональных функций?
10. Приведите основные структурные элементы алгоритма нахождения СЧ задачи Штурма – Лиувилля на отрезке с заданной точностью в общем случае.

11. Как используется норма, заданная в пространстве коэффициентных функций задачи Штурма – Лиувилля, для учета того факта, что каждая такая функция на практике всегда известна с определенной погрешностью?
12. Какой критерий используется при аппроксимации коэффициентной функции оператора Штурма – Лиувилля кусочно-постоянной функцией?
13. Какое свойство собственных чисел позволяет прервать их вычисление при некотором номере СЧ N , если задана точность, с которой данные СЧ необходимо вычислить?
14. Связаны ли между собой в прямой задаче Штурма – Лиувилля относительная точность ϵ_1 , с которой задана коэффициентная функция $u(x)$, и относительная погрешность ϵ_2 , допускаемая при вычислении СЧ задачи?
15. Сформулируйте обратную задачу Штурма – Лиувилля на отрезке.

Литература: [8–10].

Лекция 6

Спектральная задача Штурма – Лиувилля в пространстве $L_2[\mathbb{R}]$

Спектральная задача Штурма – Лиувилля на всей вещественной оси. Решения Йоста. Матрица перехода. Дискретный и непрерывный спектры. Данные рассеяния.

Рассмотрим теперь спектральную задачу (5.1) при $x \in (-\infty, \infty)$. Предполагается, что вещественная, кусочно-непрерывная и определенная на всей вещественной оси \mathbb{R} функция $u(x)$ убывает при $|x| \rightarrow \infty$ быстрее любой степени x . *Прямая задача* формулируется здесь следующим образом: дана функция $u(x)$, определить *данные рассеяния*. К определению последних мы сейчас и переходим. Определим вначале *решения Йоста* уравнения (5.1). При определении данных решений мы полагаем в (5.1) $\lambda = k^2$, так что уравнение (5.1) запишется в виде

$$-\frac{d^2\psi(x, k)}{dx^2} + u(x)\psi(x, k) = k^2\psi(x, k). \quad (6.1)$$

При исследовании прямой и обратной задачи для уравнения (6.1) особую роль играют специальным образом определенные базисы решений данного уравнения.

Определение 6.1. *Базисы $(\psi_1(x, k), \psi_2(x, k))$ и $(\varphi_1(x, k), \varphi_2(x, k))$, определенные асимптотиками*

$$\begin{aligned} \psi_m(x, k) &\rightarrow \exp((-1)^m ikx), & x \rightarrow +\infty, & m = 1, 2, \\ \varphi_m(x, k) &\rightarrow \exp((-1)^m ikx), & x \rightarrow -\infty, & m = 1, 2, \end{aligned}$$

называются решениями Йоста уравнения (6.1).

Заметим, что из данного определения следуют равенства

$$\varphi_1(x, k) = \varphi_2(x, -k), \quad \psi_1(x, k) = \psi_2(x, -k).$$

Поскольку любые два базиса линейного ОДУ связаны линейным преобразованием, мы можем записать:

$$\varphi_m(x, k) = \sum_{n=1}^2 T_{mn}(k) \psi_n(x, k), \quad m = 1, 2.$$

Матрица $T(k)$ называется *матрицей перехода*. Из факта вещественности функции $u(x)$ следуют равенства (здесь k – вещественное число):

$$\varphi_1(x, k) = \overline{\varphi_2(x, k)}, \quad \psi_1(x, k) = \overline{\psi_2(x, k)},$$

поэтому матрица перехода $T(k)$ представима в виде

$$T(k) = \begin{pmatrix} a(k) & b(k) \\ \bar{b}(k) & \bar{a}(k) \end{pmatrix}.$$

В дальнейшем мы будем обозначать $\varphi(x, k) \equiv \varphi_1(x, k)$, $\psi(x, k) \equiv \psi_1(x, k)$ и вместо функций φ_2 и ψ_2 использовать функции $\bar{\varphi}$ и $\bar{\psi}$ соответственно. Как промежуточный итог можем записать соотношение

$$\varphi(x, k) = a(k)\psi(x, k) + b(k)\bar{\psi}(x, k). \quad (6.2)$$

Как известно, вронскиан $W[y_1, y_2] \equiv y_1 y_2' - y_1' y_2$ любых двух линейно независимых решений $y_1(x)$ и $y_2(x)$ уравнения (6.1) есть величина постоянная (по переменной x). Соответственно, для введенных выше функций Йоста, с учетом их асимптотик, находим:

$$W[\varphi, \bar{\varphi}] = W[\psi, \bar{\psi}] = 2ik.$$

Используя соотношение (6.2), находим:

$$|a(k)|^2 - |b(k)|^2 = 1. \quad (6.3)$$

Вместо величин $a(k)$ и $b(k)$ обычно используют величины $t(k) = a^{-1}(k)$ и $r(k) = b(k)/a(k)$, называемые соответственно *коэффициентом прохождения* и *коэффициентом отражения*. Данная терминология происходит из квантовой теории рассеяния, в которой уравнение (5.1) имеет смысл уравнения Шредингера и описывает, в частности, рассеяние квантово-механической

частицы, т. е. некоторой волны, на потенциале $u(x)$. Для величин $t(k)$ и $r(k)$ равенство (6.3) переписывается, очевидно, в виде

$$|t(k)|^2 + |r(k)|^2 = 1. \quad (6.4)$$

Позже будет показано, что функция $a(k)$ имеет аналитическое продолжение в верхнюю комплексную полуплоскость \mathbb{C}^+ переменной k . В точках $k = i\kappa_n$, $\kappa_n > 0$, $n = 1, 2, \dots, N$, функция $a(k)$ имеет простые нули. Можно доказать, что соответствующие данным значениям числа $\lambda_n = -\kappa_n^2$ являются точками *дискретного спектра* спектральной задачи (6.1), которые мы обсудим ниже. Функция $b(k)$ не имеет аналитического продолжения с вещественной оси. Зная точки дискретного спектра λ_n и коэффициент отражения $r(k)$, элементы $a(k)$ и $b(k)$ матрицы перехода можно полностью восстановить.

Действительно, формула (6.4) показывает, что величина $|a(k)| = 1/|t(k)|$ однозначно восстанавливается по величине $|r(k)|$. Например, в случае, когда $b(k) \equiv 0$ (или, что эквивалентно, $r(k) \equiv 0$), формула (6.4) приводит к результату $|a(k)| = 1$.

Рассмотрим восстановление функции $\arg a(k)$. Для этого нам понадобятся две формулы, которые выводятся и подробно обсуждаются в курсах «Теория функций комплексного переменного» и «Уравнения математической физики»:

1. *Интегральная формула Коши.* Пусть функция $f(z)$ аналитична в замкнутой области D с кусочно-гладкой границей γ . Тогда $\forall z \in D$

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta - z}. \quad (6.5)$$

2. *Формулы Сохоцкого – Племеля:*

$$\frac{1}{x \pm i0} = \mp i\pi\delta(x) + \mathcal{P}\frac{1}{x}. \quad (6.6)$$

Данные формулы справедливы при вещественном x и связывают между собой *обобщенные функции медленного роста* $\frac{1}{x \pm i0}$, $\delta(x)$ и $\mathcal{P}\frac{1}{x}$.

Как следует из уравнения (6.1), при $|k| \rightarrow \infty$ оба базиса Йоста фактически совпадают, так что в этом случае $a(k) \rightarrow 1$. Рассмотрим функцию

$$F(k) = \ln \left(a(k) \prod_{j=1}^N \frac{k + i\kappa_j}{k - i\kappa_j} \right).$$

Данная функция обладает следующими свойствами:

- аналитична в верхней комплексной полуплоскости \mathbb{C}^+ ;
- $F(k) \rightarrow 0$ при $|k| \rightarrow \infty$.

Далее мы применяем интегральную формулу Коши для контура $\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2$, где γ_1 – вещественная ось, а γ_2 – полуокружность в верхней полуплоскости \mathbb{C}^+ бесконечно большого радиуса, для которой вещественная ось является диаметром. Согласно *лемме Жордана*,

$$\int_{\gamma_2} \frac{F(\zeta)d\zeta}{\zeta - z} = 0,$$

так что при $k \in \mathbb{C}^+$

$$F(k) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{F(\zeta)d\zeta}{\zeta - k}. \quad (6.7)$$

Далее мы делаем следующие операции:

1. В аргументе $k = k_1 + ik_2$ для мнимой части k_2 переходим к пределу $k_2 \rightarrow 0$.
2. В подынтегральном выражении (в котором возникает обобщенная функция $\frac{1}{x-i0}$) пользуемся соответствующей формулой (6.6).
3. Разделяем в получившейся формуле вещественную и мнимую части.

В итоге находим:

$$\arg a(k) = \sum_{j=1}^N \arg \left(\frac{k - i\kappa_j}{k + i\kappa_j} \right) - \frac{1}{\pi} \mathcal{P} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\ln |a(s)| ds}{s - k}. \quad (6.8)$$

В частном случае $r(k) \equiv 0$ имеем простую формулу:

$$a(k) = \prod_{j=1}^N \frac{k - i\kappa_j}{k + i\kappa_j}. \quad (6.9)$$

Обсудим теперь дискретный спектр задачи (6.1). Собственное число $\lambda = \lambda_n$ является точкой дискретного спектра, если соответствующее данному числу решение $\psi_n(x) \in L_2(\mathbb{R})$. Ввиду сказанного выше все числа λ_n являются отрицательными. В силу сделанного нами предположения об асимптотиках функции $u(x)$ функции $\psi_n(x)$ имеют асимптотики

$$\psi_n(x) \rightarrow c_n^{\pm} \exp(\mp \kappa_n x), \quad x \rightarrow \pm \infty.$$

Не ограничивая общности, можно считать, что $c_n^- = 1$, $n = 1, 2, \dots, N$, и обозначить далее $b_n = c_n^+$. Пусть числа λ_n занумерованы так, что $\lambda_n < \lambda_{n+1}$. В этом случае справедлива формула $b_n = (-1)^{n-1} |b_n|$.

Определение 6.2. Множество $\mathcal{R} = (r(k); \lambda_1, |b_1|, \dots, \lambda_N, |b_N|)$ называется данными рассеяния спектральной задачи (6.1).

Построение множества \mathcal{R} по заданной функции $u(x)$ составляет содержание прямой задачи рассеяния для спектральной задачи (6.1).

Обратной задачей рассеяния для уравнения (6.1) называют восстановление функции $u(x)$ по заданному множеству \mathcal{R} . Именно эта задача является некорректной. Как уже говорилось, решение обратной задачи может быть выполнено разными способами, как численными, так и аналитическими. В одной из следующих лекций мы рассмотрим аналитический метод решения обратной задачи, основанный на получении специальной системы интегральных уравнений. Решение такой системы означает решение обратной задачи и восстановление функции $u(x)$ по данным рассеяния \mathcal{R} .

Вопросы для самоконтроля

1. Дайте определение решений Йоста для задачи Штурма – Лиувилля на всей оси.
2. Как связаны базисы Йоста, фиксированные асимптотиками на $+\infty$ и на $-\infty$?
3. Дайте определение матрицы перехода.
4. Какие свойства решений Йоста следуют из факта вещественности коэффициентной функции $u(x)$ в задаче Штурма – Лиувилля?
5. Какие свойства матрицы перехода следуют из факта вещественности коэффициентной функции $u(x)$ в задаче Штурма – Лиувилля?
6. Что такое коэффициент прохождения?
7. Что такое коэффициент отражения?
8. Что такое точка дискретного спектра задачи Штурма – Лиувилля на всей оси?
9. Каковы асимптотики СФ задачи Штурма – Лиувилля на всей оси?
10. Дайте определение данных рассеяния спектральной задачи Штурма – Лиувилля на всей оси.
11. Как восстанавливается модуль коэффициента $a(k)$ матрицы перехода?
12. Как восстанавливается аргумент коэффициента $a(k)$ матрицы перехода?

Литература: [2, 9–11].

Лекция 7

Дискретный спектр оператора Штурма – Лиувилля в пространстве $L_2[\mathbf{R}]$

Алгоритм численного нахождения дискретного спектра оператора $-d^2/dx^2 + u(x)$ в случаях:

- 1) коэффициентная функция $u(x)$ – симметричная прямоугольная «потенциальная яма»; 2) функция $u(x)$ – симметричная «потенциальная яма» произвольной формы.

В этой лекции мы рассмотрим алгоритм численного нахождения дискретного спектра оператора Штурма – Лиувилля $\hat{\mathcal{L}} = -d^2/dx^2 + u(x)$ в гильбертовом пространстве $L_2[\mathbf{R}]$. Коэффициентная функция $u(x)$ здесь – это кусочно-непрерывная функция с компактным носителем. На непрерывном спектре оператора $\hat{\mathcal{L}}$ (если он имеется) мы подробно останавливаться не будем. Заметим лишь, что собственные функции, отвечающие точкам данного спектра, являются обобщенными собственными функциями, принадлежащими к некоторому расширению исходного пространства $L_2[\mathbf{R}]$, называемому оснащением данного пространства. Данные вопросы выходят далеко за рамки нашего курса.

Рассмотрим простой пример нахождения дискретного спектра для задачи на всей оси.

Пример 7.1. Пусть функция $u(x)$ имеет вид

$$u(x) \equiv 0, \quad |x| > a, \quad u(x) = -U_0, \quad |x| \leq a, \quad a > 0, \quad U_0 > 0.$$

Такая коэффициентная функция в рассматриваемой задаче называется симметричной прямоугольной «потенциальной ямой» (название происходит из квантовой механики). Поскольку функция $u(x)$ является четной (симметричной), то решения уравнения (5.1) – искомые СФ – являются либо четными, либо нечетными. Рассмотрим оба случая. Собственные числа данной

спектральной задачи лежат в интервале $-U_0 < \lambda < 0^2$, так что мы введем далее обозначение $\lambda = -\varkappa^2$.

1. Нечетные СФ. На отрезке $|x| \leq a$ с точностью до множителя, очевидно, имеем $\psi(x) = \sin(\sqrt{U_0 - \varkappa^2}x)$. При $x > a$ имеем $\psi(x) = A \exp(-\varkappa x)$ (напомним, $\psi(x) \in L_2[\mathbf{R}]$). Требование непрерывной дифференцируемости функции $\psi(x)$ в точке $x = a$ дает равенства

$$\begin{aligned} \sin(\sqrt{U_0 - \varkappa^2}a) &= A \exp(-\varkappa a), \\ (\sqrt{U_0 - \varkappa^2}) \cos(\sqrt{U_0 - \varkappa^2}a) &= -A\varkappa \exp(-\varkappa a). \end{aligned}$$

Данные равенства совместны, если число \varkappa является решением трансцендентного уравнения:

$$\operatorname{ctg}(\sqrt{U_0 - \varkappa^2}a) = -\varkappa/\sqrt{U_0 - \varkappa^2}. \quad (7.1)$$

2. Для четных СФ аналогично находим

$$\operatorname{tg}(\sqrt{U_0 - \varkappa^2}a) = \varkappa/\sqrt{U_0 - \varkappa^2}. \quad (7.2)$$

Решения трансцендентных алгебраических уравнений (7.1) и (7.2) дает все значения $\varkappa_1, \dots, \varkappa_N$ дискретного спектра рассматриваемой задачи. Здесь, очевидно, $|b_n| = 1$.

В последней части лекции мы приведем алгоритм нахождения спектра задачи Штурма – Лиувилля с произвольной (с точностью до сделанных ниже ограничений) кусочно-непрерывной функцией $u(x)$, удовлетворяющей условиям

$$u(x) \equiv 0, \quad x \notin [a, b], \quad u(x) < 0, \quad x \in [a, b], \quad \max |u(x)| = U_0 < \infty.$$

Данный алгоритм, известный под названием «метод „стрельбы“», уже использовался нами ранее для численного нахождения дискретного спектра классической задачи Штурма – Лиувилля. Для задачи на всей оси алгоритм имеет некоторые особенности, поэтому мы исследуем его подробно.

Для простоты мы предположим, что $\max |u(x)| = U_0$ достигается в некоторой точке $\zeta \in [a, b]$.

1. Разбиваем вещественную ось \mathbf{R} на три подмножества:

$$I : x < a; \quad II : x \in [a, b]; \quad III : x > b.$$

² Данный факт предлагается доказать в качестве самостоятельного упражнения, используя метод «от противного».

2. Выбираем некоторое натуральное число M и разбиваем множество II (интервал $[a, b]$) на M равных интервалов:

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{M-1} < x_M = b,$$

вводим обозначение II_j для полуинтервалов $[x_{j-1}, x_j)$.

3. Заменяем функцию $u(x)$ на подмножестве II на кусочно-постоянную функцию $\tilde{u}(x)$:

$$u(x) \rightarrow \tilde{u}(x); \quad \tilde{u}(x) \equiv u(\xi_k) = -U_k, \quad \forall x \in [x_{k-1}, x_k).$$

Параметры ξ_k выбираются из условия $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k)$, в остальном произвольны. Например, можно положить $\xi_k = (x_{k-1} + x_k)/2$.

4. Выбираем произвольное значение спектрального параметра \varkappa , удовлетворяющее условиям:

$$0 < \varkappa^2 < U_0, \quad U_k \neq \varkappa^2, \quad k = 1, 2, \dots, M.$$

5. Записываем (с точностью до нормировочного множителя) решение уравнения (5.1) на интервале I , которое обеспечивает принадлежность искомого решения к пространству $L_2(\mathbb{R})$:

$$\psi(x) \equiv \psi_I(x) = e^{\varkappa x}.$$

6. Переходим далее на подмножество II .

7. Полагаем значение счетчика $j = 1$.

8. Вводим обозначение $\Lambda_j = U_j - \varkappa^2$. Определяем знак Λ_j .

9. Записываем решение на интервале II_j :

$$9_+. \quad \psi(x) \equiv \psi_{II_j}(x) = A_j \cos(\sqrt{\Lambda_j} x) + B_j \sin(\sqrt{\Lambda_j} x), \quad \text{при } \Lambda_j > 0$$

или

$$9_-. \quad \psi(x) \equiv \psi_{II_j}(x) = A_j \operatorname{ch}(\sqrt{-\Lambda_j} x) + B_j \operatorname{sh}(\sqrt{-\Lambda_j} x), \quad \text{при } \Lambda_j < 0.$$

10. «Сшиваем» решение на множестве I и на интервале II_j . Термин «сшиваем» здесь и далее означает то, что мы требуем от решения непрерывности и дифференцируемости в соответствующей точке. Уравнения «сшивки» записываются так:

10₊. При $\Lambda_j > 0$:

$$\begin{aligned} A_1 \cos(\sqrt{\Lambda_1} a) + B_1 \sin(\sqrt{\Lambda_1} a) &= e^{\varkappa a}, \\ -A_1 \sqrt{\Lambda_1} \sin(\sqrt{\Lambda_1} a) + B_1 \sqrt{\Lambda_1} \cos(\sqrt{\Lambda_1} a) &= \varkappa e^{\varkappa a}. \end{aligned}$$

10₋. При $\Lambda_j < 0$:

$$\begin{aligned} A_1 \operatorname{ch}(\sqrt{-\Lambda_1} a) + B_1 \operatorname{sh}(\sqrt{-\Lambda_1} a) &= e^{\varkappa a}, \\ A_1 \sqrt{-\Lambda_1} \operatorname{sh}(-\sqrt{\Lambda_1} a) + B_1 \sqrt{-\Lambda_1} \operatorname{ch}(\sqrt{-\Lambda_1} a) &= \varkappa e^{\varkappa a}. \end{aligned}$$

Решая данную СЛАУ (для того или иного знака Λ_1), находим константы A_1 и B_1 (напомним, параметр \varkappa задан).

11. Изменяем значение счетчика $j \rightarrow j + 1$, определяем знак Λ_j .
12. Переходим на интервал $II_j: x \in [x_{j-1}, x_j]$ и записываем решение на данном интервале:

$$12_+. \psi(x) \equiv \psi_{II_j}(x) = A_j \cos(\sqrt{\Lambda_j} x) + B_j \sin(\sqrt{\Lambda_j} x), \text{ при } \Lambda_j > 0$$

или

$$12_-. \psi(x) \equiv \psi_{II_j}(x) = A_j \operatorname{ch}(\sqrt{-\Lambda_j} x) + B_j \operatorname{sh}(\sqrt{-\Lambda_j} x), \text{ при } \Lambda_j < 0.$$

13. «Сшиваем» решение на интервале II_{j-1} и на интервале II_j . Здесь возможны четыре варианта СЛАУ с неизвестными A_j и B_j , в зависимости от сочетания знаков констант Λ_{j-1} и Λ_j :

13₊₊. При $\Lambda_{j-1} > 0$ и $\Lambda_j > 0$:

$$\begin{aligned} A_{j-1} \cos(\sqrt{\Lambda_{j-1}} x_{j-1}) + B_{j-1} \sin(\sqrt{\Lambda_{j-1}} x_{j-1}) &= \\ = A_j \cos(\sqrt{\Lambda_j} x_{j-1}) + B_j \sin(\sqrt{\Lambda_j} x_{j-1}), \\ -A_{j-1} \sqrt{\Lambda_{j-1}} \sin(\sqrt{\Lambda_{j-1}} x_{j-1}) + B_{j-1} \sqrt{\Lambda_{j-1}} \cos(\sqrt{\Lambda_{j-1}} x_{j-1}) &= \\ = -A_j \sqrt{\Lambda_j} \sin(\sqrt{\Lambda_j} x_{j-1}) + B_j \sqrt{\Lambda_j} \cos(\sqrt{\Lambda_j} x_{j-1}). \end{aligned}$$

13₊₋. При $\Lambda_{j-1} > 0$ и $\Lambda_j < 0$: ...

13₋₊. При $\Lambda_{j-1} < 0$ и $\Lambda_j > 0$: ...

13₋₋. При $\Lambda_{j-1} < 0$ и $\Lambda_j < 0$: ...

Решаем данную СЛАУ, находим константы A_j и B_j .

14. Проверяем значение счетчика j . Если $j < M$, то переходим к шагу 11, если $j = M$, то переходим к шагу 15.

15. Переходим на интервал III и записываем общее решение уравнения (5.1) на данном интервале:

$$\psi(x) \equiv \psi_{III}(x) = \mathbf{a}e^{\varkappa x} + \mathbf{b}e^{-\varkappa x}.$$

16. «Сшиваем» решение на интервале II_M и на интервале III :

16+. При $\Lambda_M > 0$:

$$\begin{aligned} A_M \cos(\sqrt{\Lambda_M} b) + B_M \sin(\sqrt{\Lambda_M} b) &= \mathbf{a}e^{\varkappa b} + \mathbf{b}e^{-\varkappa b}, \\ -A_M \sqrt{\Lambda_M} \sin(\sqrt{\Lambda_M} b) + B_M \sqrt{\Lambda_M} \cos(\sqrt{\Lambda_M} b) &= \mathbf{a}\varkappa e^{\varkappa b} - \mathbf{b}\varkappa e^{-\varkappa b}. \end{aligned}$$

16-. При $\Lambda_M < 0$:

$$\begin{aligned} A_M \operatorname{ch}(\sqrt{-\Lambda_M} b) + B_M \operatorname{sh}(\sqrt{-\Lambda_M} b) &= \mathbf{a}e^{\varkappa b} + \mathbf{b}e^{-\varkappa b}, \\ A_M \sqrt{-\Lambda_M} \operatorname{sh}(\sqrt{-\Lambda_M} b) + B_M \sqrt{-\Lambda_M} \operatorname{ch}(\sqrt{-\Lambda_M} b) &= \mathbf{a}\varkappa e^{\varkappa b} - \mathbf{b}\varkappa e^{-\varkappa b}. \end{aligned}$$

17. Находим из данной СЛАУ константы \mathbf{a} и \mathbf{b} .

18. Возвращаемся к шагу 4 с иным значением параметра \varkappa .

19. Делаем достаточное количество (определяется заданной точностью вычислений) циклов с задаваемой заново константой \varkappa и строим график функции $\mathbf{a} = \mathbf{a}(\varkappa)$. Нули этой функции \varkappa_i и являются точками дискретного спектра задачи (5.1). Дополнительные константы дискретного спектра определяются как $b_i = \mathbf{b}(\varkappa_i)$.

Вопросы для самоконтроля

1. Дайте определение собственных функций (СФ) и собственных значений (СЗ) задачи Штурма – Лиувилля в пространстве $L_2[R]$.
2. Запишите трансцендентное уравнение для нахождения СЗ задачи Штурма – Лиувилля в случае, когда коэффициентная функция $u(x)$ имеет вид симметричной прямоугольной «потенциальной ямы».

3. Для чего при нахождении дискретного спектра задачи Штурма – Лиувилля в общем случае необходимо аппроксимировать коэффициентную функцию $u(x)$ кусочно-постоянной функцией?
4. Есть ли в алгоритме нахождения СЗ задачи Штурма – Лиувилля методом «стрельбы» точки ветвления?
5. Предположим, что функция $u(x)$ задана с точностью δ (по некоторой норме). Как это влияет на построение кусочно-постоянной функции $\tilde{u}(x)$, аппроксимирующей заданную коэффициентную функцию $u(x)$?
6. Опишите циклы, которые входят в алгоритм метода «стрельбы».
7. Какие уравнения (системы уравнений) необходимо решать в циклах, входящих в алгоритм метода «стрельбы»?
8. Как вычисляются дополнительные константы b_i при вычислении СЗ задачи Штурма – Лиувилля методом «стрельбы»?
9. Как выбирается шаг при выборе спектрального параметра при вычислении СЗ задачи Штурма – Лиувилля методом «стрельбы»?

Литература: [2, 11].

Лекция 8

Метод подбора в решении некорректных задач

Решение некорректных задач методом подбора. Ограничение на компакт. Корректность по Тихонову. Невязка, ее минимизация. Общие вопросы поиска экстремума функции многих переменных. Проблемы при численном исследовании необходимых условий экстремума. Градиент, его определение и свойства. Градиентные методы поиска экстремума. Метод наискорейшего спуска.

В этой лекции мы рассмотрим некоторые общие вопросы решения уравнений вида

$$\hat{A}u = f, \quad u \in U, \quad f \in F. \quad (8.1)$$

Здесь \hat{A} – некоторый непрерывный оператор (не обязательно линейный), отображающий нормированное пространство U в нормированное пространство F . Таким оператором, например, может быть отображение $u(x) \rightarrow \mathcal{R}$, где \mathcal{R} – данные рассеяния задачи Штурма – Лиувилля с «потенциалом» $u(x)$. При этом обратный оператор \hat{A}^{-1} непрерывным, вообще говоря, не является. Дадим вначале следующее определение.

Определение 8.1. Пусть $u \in U$ и $f \in F$ – некоторые элементы, не связанные, вообще говоря, соотношением (8.1). Невязкой уравнения (8.1) называется величина

$$\Delta(u) = \frac{1}{2} \|Au - f\|_F^2.$$

Как уже говорилось, обратная задача – это нахождение элемента u по заданному элементу f . Метод подбора решения такой обратной задачи заключается в следующем: мы решаем прямую задачу (т. е. вычисляем $\hat{A}u$) для некоторого набора элементов $u_i \in U$, $i = 0, 1, 2, \dots$, и затем ищем на данном

множестве минимум функционала $\Delta(u)$. Пусть u^* – точное решение уравнения (8.1) и $u_i \in U$, $i = 0, 1, 2, \dots$, – некоторая последовательность элементов, сходящаяся к u^* по норме пространства U . Тогда, в силу непрерывности оператора \hat{A} , очевидно: $\lim_{n \rightarrow \infty} \Delta(u_n) = 0$. Проблемы, которые возникают при решении обратной задачи (8.1) методом подбора, сводятся к следующим моментам:

1. Последовательность u_i строится из требования сходимости числовой последовательности $\Delta(u_n)$ тем или иным методом. Однако из того факта, что $\lim_{n \rightarrow \infty} \Delta(u_n) = 0$ для некоторой последовательности u_i , не следует, что последовательность u_i куда-то сходится вообще.
2. Правая часть f и сам оператор \hat{A} могут быть заданы не точно, а с какой-либо погрешностью.

Для того чтобы обеспечить сходимость последовательности u_i , необходимо использовать некоторую *дополнительную априорную информацию* о решении u^* . Далее нам понадобится следующее определение.

Определение 8.2. *Множество $M \subset H$ метрического пространства H называется компактным, если любая последовательность $x_n \in M$, $n = 1, 2, \dots$, содержит сходящуюся подпоследовательность.*

В конечномерных пространствах компактность следует из ограниченности множества (теорема Больцано – Вейерштрасса). В бесконечномерных пространствах это не так. Например, пусть $x_n \in H$ – некоторый ортонормированный базис бесконечномерного гильбертова пространства H . Поскольку $\|x_n\| = 1$, $\forall n = 1, 2, \dots$, то данное множество ограничено. Поскольку $\|x_n - x_m\| = \sqrt{2}$ при $n \neq m$, то никакой сходящейся подпоследовательности из последовательности x_n выделить нельзя.

Априорная информация (для каждой задачи – своя) должна быть такой, чтобы было возможным сделать ограничение $u^* \in M \subset U$, где M – компактное множество. При этом элементы последовательности u_i выбираются так, что $u_i \in M$, $i = 0, 1, 2, \dots$. В этом случае сходимость гарантирует следующая лемма.

Лемма (А.Н. Тихонов). *Пусть отображение $M \rightarrow F_M \subset F$ компакта M на подмножество F_M пространства F взаимно однозначно и непрерывно. Тогда обратное отображение $F_M \rightarrow M$ также непрерывно.*

Некорректные задачи, которые допускают решение указанным способом (ограничением на компакт), называют *корректными по Тихонову*. Как отмечалось, функция f и сам оператор \hat{A} могут быть заданы не точно, поэтому решение u^* , даже при наличии сходимости, также определяется приближенно. Пусть, например, величина ε определяет точность задания функции f : $\|\delta f\|_F \leq \varepsilon$. В этом случае в качестве приближенного решения можно взять элемент $u^a \in M$, такой, что $\Delta(u^a) \simeq \varepsilon^2/2$.

Строго говоря, для решения задачи при помощи ограничения на компакт M необходимо, чтобы для правой части f уравнения (8.1) было выполнено условие

$$f \in \hat{A}M. \quad (8.2)$$

Отметим, что проверить выполнение данного условия можно далеко не всегда. В этом случае можно поступить следующим образом: искать элемент $u^q \in M$, такой, что

$$\Delta(u^q) = \inf_{u \in M} \Delta(u),$$

В этом случае говорят о *квазирешении* уравнения (8.1). Если условие (8.2) выполнено, то квазирешение совпадает с точным.

На практике при численном решении задачи множество M всегда бывает конечномерным (и ограниченным). Поэтому минимизация функционала $\Delta(u)$ на данном компактном множестве сводится к нахождению экстремума функции многих переменных. Напомним, что необходимыми условиями экстремума функции $\Phi = \Phi(\mathbf{x}) = \Phi(x_1, \dots, x_n)$ в точке $\mathbf{x}^0 = (x_1^0, \dots, x_n^0)$ являются условия

$$\left. \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} \right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}^0} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (8.3)$$

Обратим внимание, что равенства (8.3) представляют собой в совокупности систему n нелинейных, вообще говоря, уравнений с n неизвестными. Решение такой системы даже в линейном случае при значениях n порядка 10^3 – 10^4 приводит к значительным трудностям. Кроме этого, решение системы (8.3) даст лишь возможные точки экстремума. Для того чтобы среди найденных точек отобрать, например, точки минимума, необходимо проверить достаточные условия. Так, для функции одной переменной необходимо проверить знак второй производной – если она в исследуемой точке положительна, то точка является минимумом. В случае функций многих переменных такие условия существенно сложнее. Достаточные условия экстремума функции многих

действительных переменных изучаются в курсе математического анализа; мы не будем на них здесь останавливаться.

На практике для поиска экстремума функций большого числа переменных обычно используют другие способы. С одним из них – градиентным методом поиска экстремумов – мы познакомимся в рамках данной лекции.

Пусть функция $\Phi = \Phi(\mathbf{x}) = \Phi(x_1, \dots, x_n)$ определена на некотором подмножестве вещественного евклидова пространства E_n : $\mathbf{x} \in D \subset E_n$. Тогда напомним, что функция $\Phi(\mathbf{x})$ называется дифференцируемой в точке \mathbf{x} , если ее приращение представимо в окрестности данной точки в виде

$$\Phi(\mathbf{x} + \mathbf{h}) - \Phi(\mathbf{x}) = (\mathbf{g}, \mathbf{h}) + o(\|\mathbf{h}\|). \quad (8.4)$$

Вектор $\mathbf{g} = \mathbf{g}(\mathbf{x}) = \text{grad } \Phi$, если он существует, называется градиентом функции Φ в данной точке. Геометрический смысл градиента следует из его определения: данный вектор показывает направление наибоыстрейшего роста функции. Соответственно, противоположное направление изменения вектора $\mathbf{x}^0 = (x_1^0, \dots, x_n^0)$ показывает направление наискорейшего спуска – направление, по которому данная функция Φ быстрее всего убывает. Действительно, записав неравенство Коши – Буняковского – Шварца сначала для векторов \mathbf{g} и \mathbf{h} , а затем для векторов \mathbf{g} и $-\mathbf{h}$, получаем

$$-\|\mathbf{g}\| \cdot \|\mathbf{h}\| \leq (\mathbf{g}, \mathbf{h}) \leq \|\mathbf{g}\| \cdot \|\mathbf{h}\|.$$

Отсюда мы видим, что величина (\mathbf{g}, \mathbf{h}) достигает максимума, если $\mathbf{h} = \epsilon \mathbf{g}$, и минимума, если $\mathbf{h} = -\epsilon \mathbf{g}$.

Итак, алгоритм решения некорректной задачи (8.1) может быть следующим:

1. Используя априорную информацию, фиксируем компактное множество $M \subset U$. На практике это означает, что мы задаем некоторую (конечномерную) параметризацию элемента u так, что параметры меняются в ограниченных пределах:

$$u = u(\mathbf{x}) \equiv u(\mathbf{x}; x_1, \dots, x_n), \quad \sum_{i=1}^n |x_i|^2 \leq M_0.$$

2. Определяем функцию

$$\Phi = \Phi(\mathbf{x}) \equiv \Phi(x_1, \dots, x_n) = \frac{1}{2} \|\hat{A}u(x_1, \dots, x_n) - f\|_F^2.$$

3. Выбираем начальную точку $\mathbf{x}^0 = (x_1^0, \dots, x_n^0)$. Следует заметить, что общих критериев для выбора начальной точки не существует.

4. Строим итерационную процедуру

$$\mathbf{x}^{k+1} = \mathbf{x}^k - \epsilon_k \mathbf{g}^k, \quad \Phi(\mathbf{x}^{k+1}) = \Phi(\mathbf{x}^k - \epsilon_k \mathbf{g}^k), \quad \mathbf{g}^k = \text{grad } \Phi \Big|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}^k}.$$

При этом также выполняются итерации

$$u_{k+1} \simeq u_k - \epsilon_k G^k, \quad G^k = \sum_{i=1}^n \frac{\partial u_k}{\partial x_i} g_i^k, \quad G^k \in U.$$

Возможен наиболее простой вариант, когда $\epsilon_k = \epsilon$ (итерация с постоянным шагом). В этом случае проблема заключается в выборе ϵ : при малых значениях данного параметра решение задачи потребует большого количества шагов (а значит, машинных ресурсов), а при большом значении страдает точность и, более того, итерационный процесс может вообще расходиться. Наиболее эффективными являются способы, когда параметр ϵ_k выбирается на каждом шаге исходя из некоторых критериев. Один из таких методов мы обсудим ниже.

5. Останавливаем итерационную процедуру, как только

$$\Phi(\mathbf{x}^N) = \Delta(u) \simeq \frac{1}{2} \varepsilon^2.$$

Напомним, что, как правило, величина ε определяется точностью задания правой части f : $\|\delta f\|_F \leq \varepsilon$.

6. Искомое решение – элемент $u = u(\mathbf{x}^N)$.

Пример 8.1. Пусть оператор \hat{A} в (8.1) – линейный оператор, а пространство F – евклидово. Рассмотрим алгоритм выбора параметра ϵ_k , который получил название «метод наискорейшего спуска». Рассмотрим после выполнения шага итерации n функционал

$$\mathcal{F} \equiv 2\Delta(u_{n+1}) = a_n \epsilon_n^2 - 2b_n \epsilon_n + c_n,$$

в котором в силу определения невязки $\Delta(u)$ коэффициенты a_n , b_n , c_n суть величины

$$c_n = \|\hat{A}u_n - f\|_F^2, \quad b_n = (\hat{A}u_n - f, \hat{A}G^n), \quad a_n = \|\hat{A}G^n\|^2.$$

Величина ϵ_n выбирается так, что функционал \mathcal{F} минимален на каждом шаге. Очевидно, для этого надо положить $\epsilon_n = b_n/a_n$.

Вопросы для самоконтроля

1. Что такое невязка?
2. Какие проблемы возникают при решении обратной задачи $\hat{A}u = f$ методом подбора?
3. Что такое компактное множество?
4. В каких пространствах можно ввести понятие компактного множества?
5. Как соотносятся между собой компактные и ограниченные множества в конечномерных пространствах?
6. Является ли в бесконечномерном пространстве ограниченное множество компактным?
7. Какого рода априорная информация нужна для решения обратной задачи $\hat{A}u = f$ методом подбора?
8. Какие обратные задачи называют корректными по Тихонову?
9. Что такое квазирешение задачи $\hat{A}u = f$?
10. В каком случае квазирешение совпадает с точным решением?
11. Сформулируйте необходимые условия существования экстремума функции n переменных.
12. Какие проблемы могут возникнуть при нахождении возможных точек экстремума из необходимых условий экстремума?
13. Что такое градиент функции n переменных?
14. Каков геометрический смысл градиента?
15. Перечислите шаги итерационной процедуры поиска экстремума функции градиентным методом.
16. Назовите варианты выбора шага итераций при поиске экстремума функции градиентным методом.
17. Что такое метод наискорейшего спуска?

Литература: [1, 12].

Лекция 9

Теория возмущений. Реализация градиентных методов поиска экстремума

Принципы теории возмущений для линейных операторов. Нахождение поправок первого порядка к собственным значениям и собственным функциям эрмитовых операторов. Невязка для дискретного спектра в евклидовой метрике как функция N переменных. Вывод явных формул для градиента. Алгоритм реализации решения обратной задачи Штурма – Лиувилля на интервале методом подбора.

В этой лекции мы рассмотрим метод нахождения поправок к известным СЗ и СФ некоторого линейного оператора $\widehat{\mathcal{L}}$, которые обусловлены некоторым «возмущением» $\delta\widehat{\mathcal{L}}$ данного оператора. Результаты мы используем при решении обратной задачи Штурма – Лиувилля на интервале методом подбора, с использованием градиентных методов, рассмотренных в предыдущей лекции. Итак, постановка задачи заключается в следующем. Пусть спектральная задача в гильбертовом пространстве H

$$\widehat{\mathcal{L}}\psi = \lambda\psi, \quad \psi \in H$$

имеет только дискретный спектр, причем нам известны все собственные числа $\lambda = \lambda_i^{(0)}$ и собственные функции $\psi = \psi_i^{(0)}$, пронумерованные индексом $i = 1, 2, \dots$. Собственные числа мы будем считать для простоты невырожденными. Нам необходимо решить спектральную задачу

$$\widehat{\mathcal{L}}_\varepsilon\psi(\varepsilon) = \lambda(\varepsilon)\psi(\varepsilon), \quad \widehat{\mathcal{L}}_\varepsilon \equiv \widehat{\mathcal{L}} + \varepsilon\widehat{V}, \quad (9.1)$$

где ε – некоторый малый параметр. Символом \widehat{V} обозначен оператор умножения на некоторую заданную функцию $v(x)$ того же класса, что и функция $u(x)$ (мы будем считать их вещественными кусочно-непрерывными функциями с компактным носителем). Как правило, «возмущенная» задача (т. е.

задача с $\varepsilon \neq 0$) не имеет явного решения. Поэтому мы будем искать собственные числа и собственные функции такой задачи в виде ряда по параметру ε :

$$\lambda_i(\varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k \lambda_i^{(k)}, \quad \psi_i(\varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k \psi_i^{(k)}. \quad (9.2)$$

Там, где нумерующий собственные числа и отвечающие им собственные функции нижний индекс i не играет роли, мы его не выписываем. Наша ближайшая задача – найти поправки первого порядка $\lambda^{(1)}$ и $\psi^{(1)}$ к невозмущенным (известным нам) величинам $\lambda^{(0)}$ и $\psi^{(0)}$. Подставив разложения (9.2) в (9.1), находим:

$$\begin{aligned} (\widehat{\mathcal{L}} + \varepsilon \widehat{V})(\psi^{(0)} + \varepsilon \psi^{(1)} + \varepsilon^2 \psi^{(2)} + \dots) = \\ = (\lambda^{(0)} + \varepsilon \lambda^{(1)} + \varepsilon^2 \lambda^{(2)} + \dots)(\psi^{(0)} + \varepsilon \psi^{(1)} + \varepsilon^2 \psi^{(2)} + \dots). \end{aligned} \quad (9.3)$$

Раскрывая скобки, приравниваем коэффициенты при степенях параметра ε :

1. ε^0 : здесь, очевидно, получаем невозмущенное уравнение $\widehat{\mathcal{L}}\psi^{(0)} = \lambda^{(0)}\psi^{(0)}$.
2. ε^1 : равенство коэффициентов при первой степени ε приводит к уравнению

$$\widehat{\mathcal{L}}\psi^{(1)} + \widehat{V}\psi^{(0)} = \lambda^{(0)}\psi^{(1)} + \lambda^{(1)}\psi^{(0)}. \quad (9.4)$$

Домножим скалярно слева данное равенство на вектор $\psi^{(0)} \in H$. Мы будем считать, что система СФ $\psi_i^{(0)}$ ортогональна:

$$(\psi_i^{(0)}, \psi_j^{(0)}) = \alpha_i \delta_{ij}.$$

Пользуясь тем, что оператор $\widehat{\mathcal{L}}$ – симметрический в пространстве H , находим выражение для первой поправки к собственным числам дискретного спектра невозмущенной задачи:

$$\lambda_i^{(1)} = \frac{1}{\alpha_i} (\psi_i^{(0)}, \widehat{V}\psi_i^{(0)}), \quad i = 1, 2, \dots \quad (9.5)$$

Для того чтобы найти поправку $\psi_i^{(1)}$ к функции $\psi_i^{(0)}$, запишем разложение

$$\psi_i^{(1)} = \sum_{k=0}^{\infty} a_{ik} \psi_k^{(0)}, \quad a_{kk} = 0. \quad (9.6)$$

Подставляя (9.6) в (9.4), получаем равенство

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_{ik} \psi_k^{(0)} \lambda_k^{(0)} + \widehat{V} \psi_i^{(0)} = \lambda_i^{(0)} \sum_{k=0}^{\infty} a_{ik} \psi_k^{(0)} + \lambda_i^{(1)} \psi_i^{(0)}.$$

Домножая слева скалярно на функцию $\psi_m^{(0)}$, где $m \neq i$, находим:

$$a_{im} = \frac{(\psi_m^{(0)}, \widehat{V} \psi_i^{(0)})}{\alpha_m (\lambda_i^{(0)} - \lambda_m^{(0)})}. \quad (9.7)$$

3. ε^2 : здесь получаем следующее уравнение:

$$\widehat{\mathcal{L}} \psi^{(2)} + \widehat{V} \psi^{(1)} = \lambda^{(0)} \psi^{(2)} + \lambda^{(1)} \psi^{(1)} + \lambda^{(2)} \psi^{(0)}.$$

Отсюда, с учетом предыдущих шагов, можно найти поправки второго порядка.

4. ...

Конечно, вопрос о сходимости рядов (9.2) требует отдельного исследования. Мы не будем подробно здесь на этом останавливаться. Найденные формулы для поправок первого порядка мы используем в дальнейшем при решении обратной задачи Штурма – Лиувилля методом подбора, с использованием градиентного способа поиска экстремума невязки.

Далее мы рассмотрим алгоритм решения обратной *классической* задачи Штурма – Лиувилля. Формулировка прямой задачи, а также связанные с такой задачей основные понятия были рассмотрены нами в прошлых лекциях. Спектр данной задачи при произвольной функции $u(x)$ может быть найден, напомним, с использованием метода «стрельбы», который обсуждался в предыдущих лекциях. Напомним, что число точек дискретного спектра

в рассматриваемой задаче бесконечно и метод «стрельбы» определяет лишь конечное число N точек спектра (λ_n, α_n) , которое определяется заданной точностью вычислений. При $n > N + 1$ можно считать, что $\lambda_n \approx n^2 + \text{const}$, $\alpha_n = \pi/2$.

Рассмотрим теперь обратную задачу [18]. Пусть нам известны N пар чисел

$$\xi_1, \beta_1; \dots; \xi_N, \beta_N.$$

Мы полагаем, что для данных чисел справедливы неравенства $\beta_i > 0$, $\xi_i < \xi_{i+1} \forall i$, а также $\xi_i > 0 \forall i = N_1, N_1 + 1, \dots, N$ (т. е. первые N_1 чисел ξ_i могут не быть положительными; как правило, $N_1 \leq N$). Кроме этого, для данных чисел мы считаем выполненными асимптотические разложения (5.5) и (5.6) при переобозначении $\lambda \rightarrow \xi$ и $\alpha \rightarrow \beta$. Нам необходимо найти функцию $u^*(x)$ такую, чтобы соответствующая задача (5.1) приводила к собственным числам ξ_i (первые N собственных чисел) с нормировочными коэффициентами β_i . Мы приведем ниже алгоритм решения данной задачи методом подбора с использованием градиентных методов. Относительную точность вычисления ϵ собственных чисел мы считаем заданной; в соответствии с формулой (5.8) величина ϵ связана с числом N .

1. В соответствии со сказанным в прошлых лекциях, первый шаг, который необходимо сделать, – это выделить компактное множество K такое, что $u(x) \in K \subset L_2[0, \pi]$. Для этого мы должны использовать некоторую априорную информацию. Примем за основу тот факт, что функция $u(x)$, как правило, моделирует распределение некоторых физических величин. Это означает, во-первых, что величина $|u(x)|$ ограничена по абсолютной величине неким верхним пределом U_0 и, во-вторых, существует некоторый интервал с размером $\delta x \ll \pi$, в пределах которого функцию $u(x)$ можно считать постоянной. Существование такого интервала означает наличие предела точности измерений переменной x . В этой связи разобьем отрезок $[0, \pi]$ на $M = \pi/\delta x$ равных отрезков $[x_{i-1}, x_i]$, где $x_0 = 0$ и $x_M = \pi$. Сказанное означает, что вместо функции $u(x)$ мы можем искать функцию $\tilde{u}(x)$ такую, что

$$\tilde{u}(x) = \sum_{m=1}^M u_m \chi_m(x), \quad |u_m| \leq U_0, \quad \forall m = 1, \dots, M.$$

Здесь $\chi_m(x) \equiv \theta(x_m - x) - \theta(x_{m-1} - x)$ – характеристическая функция

отрезка $[x_{i-1}, x_i]$. Числа M и U_0 определяют компактное множество K такое, что $u(x) \in K \subset L_2[0, \pi]$.

2. Для того чтобы выполнить процедуру минимизации невязки градиентным методом, необходимо выбрать *начальную точку*, т. е. некоторую функцию $\tilde{v}_0(x) \in K$. Заметим, что какого-то определенного способа выбора начальной точки не существует. Здесь также допустимо использовать какую-либо априорную информацию. Далее считаем, что нам задана некая функция $v_0(x) \in L_2[0, \pi]$, по которой построена начальная точка $\tilde{v}_0(x) \in K$ указанным в первом пункте методом дискретизации.
3. Пусть набор $(\lambda_1, \alpha_1; \dots, \lambda_N, \alpha_N)$ – спектр задачи (5.1) с некоторой функцией $u(x)$. Считая, что спектр принадлежит пространству E_{2N} , запишем невязку:

$$\Delta(u) = \frac{1}{2} \left[\sum_{k=1}^N (\lambda_k - \xi_k)^2 + \sum_{m=1}^N (\alpha_m - \beta_m)^2 \right]. \quad (9.8)$$

4. В соответствии с градиентным методом мы должны определить градиент функции $\Delta(u)$. Для этого нам необходимо выделить линейную часть приращения $\Delta(u + \delta u) - \Delta(u)$. Согласно сделанным предположениям, приращение аргумента δu записывается в виде

$$\delta u(x) = \sum_{m=1}^M \delta u_m \chi_m(x). \quad (9.9)$$

5. Находим приращения $\delta \lambda_k$ и $\delta \alpha_k$, соответствующие приращению δu . Для этого воспользуемся формулами теории возмущений, полученными ранее. Поскольку мы интересуемся только линейной частью приращения, достаточно ограничиться первыми поправками. Имеем

$$\delta \lambda_k = \frac{1}{\alpha_k} (\psi_k, \delta u \psi_k),$$

где ψ_k – собственная функция, отвечающая (невозмущенному) собственному значению λ_k . Что касается приращения $\delta \alpha_k$, то оно не содержит членов, линейных по δu (т. е. по константам δu_m). Действительно,

$$\delta\alpha_k = \int_a^b |\psi_k^{(0)} + \varepsilon\psi_k^{(1)}|^2 dx - \int_a^b |\psi_k^{(0)}|^2 dx = \varepsilon^2 \sum_{l, l \neq k}^{\infty} |a_{kl}|^2 \int_a^b |\psi_l^{(0)}|^2 dx.$$

В соответствии с формулами (9.7) и (9.9), это означает, что первая по параметру ε поправка $\delta\alpha_k$ имеет структуру квадратичной формы по величинам δu_m . Таким образом, в первом (линейном по величинам δu_m) приближении $\delta\alpha_k \simeq 0$.

6. Находим линейную часть приращения невязки:

$$\begin{aligned} \Delta(u + \delta u) - \Delta(u) &= \frac{1}{2} \left[\sum_{k=1}^N (\lambda_k + \delta\lambda_k - \xi_k)^2 + \sum_{m=1}^N (\alpha_m - \beta_m)^2 \right] - \\ &- \frac{1}{2} \left[\sum_{k=1}^N (\lambda_k - \xi_k)^2 + \sum_{m=1}^N (\alpha_m - \beta_m)^2 \right] \simeq \\ &\simeq \sum_{k=1}^N (\lambda_k - \xi_k) \delta\lambda_k = \sum_{k=1}^N \frac{1}{\alpha_k} (\lambda_k - \xi_k) (\psi_k, \delta u \psi_k). \end{aligned} \quad (9.10)$$

7. Используя представление (9.9), находим в общем виде компоненты g_m вектора $\mathbf{g} = \text{grad } \Delta(u)$ – градиента невязки:

$$g_m = \sum_{k=1}^N \frac{1}{\alpha_k} (\lambda_k - \xi_k) (\psi_k, \chi_m \psi_k). \quad (9.11)$$

8. Вычисляем градиент невязки $g_m^{[0]}$ в точке $\tilde{v}_0(x)$.

9. Переходим от выбранной начальной точки $\tilde{v}_0(x)$ к точке $\tilde{v}_1 = \tilde{v}_0 + \delta v_0$, где

$$\delta v_0 = -\varepsilon \sum_{m=1}^M g_m^{[0]} \chi_m(x).$$

10. Вычисляем спектр

$$\lambda_i^{[1]} \rightarrow \lambda_i^{[0]} + \delta\lambda_i, \quad \alpha_i^{[1]} \rightarrow \alpha_i^{[0]} + \sum_{k \neq i} \alpha_k^{[0]} |a_{ik}|^2.$$

11. Вычисляем невязку в точке \tilde{v}_1 (используя исправленные точки спектра $\lambda_i^{[1]}$ и $\alpha_i^{[1]}$).

12. Вычисляем градиент невязки $g_m^{[1]}$ в точке $\tilde{v}_1(x)$.

13. Процесс продолжаем некоторое количество шагов s – до тех пор, пока невязка не достигнет величины $\Delta\lambda$ (заданной точности определения собственных чисел).

14. Полагаем $u^*(x) \simeq \tilde{u}^*(x) = \tilde{v}_s(x)$.

Формула (9.5) демонстрирует некорректность рассматриваемой обратной задачи. Действительно, величину $\delta\lambda = \max_{i=1 \dots N} \{|\lambda_i^{(1)}|\}$ естественно связать с точностью задания СЧ, а величину $\|\varepsilon \widehat{V}\|$ (при выборе той или иной нормы $\|\cdot\|$) – с точностью задания коэффициентной функции $u(x)$ в операторе Штурма – Лиувилля. Пусть, например, $\widehat{V} = A \sin(\omega x)$. Тогда величина

$$\delta\lambda = \max_{i=1 \dots N} \left(\left| \int_a^b \psi_i^{(0)} \widehat{V} \overline{\psi_i^{(0)}} dx \right| \right) = \varepsilon A \left| \int_a^b \sin(\omega x) |\psi_k^{(0)}(x)|^2 dx \right|$$

при $\omega \rightarrow \infty$ может быть сделана меньше любой наперед заданной величины δ при фиксированных числах ε и A . Напротив, величина

$$\|\varepsilon \widehat{V}\|^2 = \varepsilon^2 A^2 \int_a^b \sin^2(\omega x) dx$$

остаётся конечной при $\omega \rightarrow \infty$.

Вопросы для самоконтроля

1. Сформулируйте задачу о нахождении поправок к СЧ и СФ задачи Штурма – Лиувилля при малом «возмущении» коэффициентной функции $u(x)$.
2. Из каких условий записываются уравнения, определяющие поправки к СЧ и СФ задачи Штурма – Лиувилля порядка n ?

3. Сформулируйте обратную классическую задачу Штурма – Лиувилля, предполагая, что СЧ и нормировочные коэффициенты заданы с определенной точностью.
4. Почему в задаче Штурма – Лиувилля на отрезке можно рассматривать конечное число СЧ и нормировочных коэффициентов, если известна точность, с которой данные величины заданы?
5. К каким величинам стремятся СЧ задачи Штурма – Лиувилля при больших номерах n ?
6. К каким величинам стремятся нормировочные коэффициенты задачи Штурма – Лиувилля при больших номерах n ?
7. Как находится первая поправка к дискретным СЧ эрмитова оператора?
8. Какую структуру имеет возмущение нормировочных коэффициентов при возмущении оператора Штурма – Лиувилля?
9. Для чего при решении обратной задачи Штурма – Лиувилля необходимо ограничить допустимые значения искомой коэффициентной функции компактным множеством?
10. Как выполняется ограничение на компактное множество при решении обратной задачи Штурма – Лиувилля?
11. Перечислите шаги алгоритма поиска решения обратной задачи Штурма – Лиувилля на отрезке методом подбора с использованием градиентных методов.

Литература: [1, 7, 8, 11, 12].

Лекция 10

Компактные операторы и связанные с ними некорректные задачи

Компактные (вполне непрерывные) операторы. Примеры. Спектр компактного оператора в гильбертовом пространстве. Общее представление компактного оператора в виде $K = K_1 + K_2$, где K_1 – конечномерный оператор, а K_2 – оператор со сколь угодно малой нормой. Основные положения теории интегральных уравнений Фредгольма. Свойства собственных значений интегрального оператора задачи как причина некорректности при решении интегрального уравнения Фредгольма первого рода.

Ранее мы рассмотрели появление некорректности, возникающее при решении СЛАУ с плохо обусловленной матрицей коэффициентов. При анализе данной задачи мы использовали свойства матриц – линейных операторов в конечномерном евклидовом пространстве. В бесконечномерных пространствах ситуация существенно усложняется. В данной лекции мы познакомимся с классом операторов в бесконечномерных пространствах, по свойствам наиболее близких к операторам в конечномерных пространствах. Это *компактные*, или *вполне непрерывные*, операторы. Напомним, что множество $M \subset H$ метрического пространства H называется компактным, если любая последовательность $x_n \in M, n = 1, 2, \dots$, содержит сходящуюся подпоследовательность.

Определение 10.1. Оператор \hat{K} , действующий в некотором гильбертовом пространстве H , называется компактным (вполне непрерывным), если для любого ограниченного множества $D \subset H$ множество $M = \hat{K}(D)$ является компактным.

Свойством компактности обладают далеко не все, даже самые простые, операторы. Так, единичный оператор \hat{I} в бесконечномерном пространстве H та-

ковым не является. Важнейшим для нас примером служит интегральный оператор $\hat{K}f = \int_a^b K(x, y)f(y)dy$, рассмотренный в примере 4.6. Это компактный оператор; к данному факту мы вернемся позже, а сейчас обсудим его спектр. Интегральный оператор \hat{K} с ядром $K(x, y)$ является самосопряженным, если ядро удовлетворяет свойству

$$K(x, y) = \overline{K(y, x)}. \quad (10.1)$$

Данный факт легко доказать, используя определение сопряженного оператора (см. лекцию 4). Как правило, мы будем рассматривать далее только такие операторы. Свойства спектра самосопряженных компактных операторов определяет следующая теорема.

Теорема 10.1. *Пусть \hat{K} – самосопряженный компактный оператор, действующий в гильбертовом пространстве H . Тогда в пространстве H существует полный ортонормированный базис x_n , $n = 1, 2, \dots$, такой, что $\hat{K}x_n = \lambda_n x_n$, причем $\lambda_n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. Любое СЧ $\lambda_n \neq 0$ имеет конечную кратность.*

Важным для дальнейшего частным случаем являются самосопряженные интегральные операторы с вырожденным ядром.

Определение 10.2. *Пусть H – некоторое (функциональное) гильбертово пространство. Интегральный оператор \hat{K} , действующий в H , называется оператором с вырожденным ядром, если его ядро $K(x, y)$ представимо в виде*

$$K(x, y) = \sum_{i=1}^N f_i(x)h_i(y), \quad f_i(x), h_i(x) \in H, \quad i = 1, \dots, N. \quad (10.2)$$

Без ограничения общности функции $f_i(x), h_i(x) \in H$ можно считать линейно независимыми (данное утверждение предлагается доказать в качестве самостоятельного упражнения). В случае эрмитова оператора \hat{K} , когда ядро удовлетворяет условию (10.1), вырожденное ядро имеет вид:

$$K(x, y) = \sum_{i=1}^N f_i(x)\overline{f_i(y)}, \quad f_i(x) \in H, \quad i = 1, \dots, N.$$

Легко убедиться, что для вырожденного ядра спектральное множество $\{\lambda_n\}$, о котором говорится в теореме 10.1, содержит только конечное число точек $\lambda_n \neq 0$. Множество $\text{Ran } \hat{K}$ в данном случае – это конечномерное

подпространство $V \subset H$, образованное набором $f_i(x)$. Сам оператор \hat{K} при конечном N представим в виде $\hat{K} = \hat{A}\hat{P}_V$, где \hat{P}_V – проекционный оператор на подпространство $V \subset H$, а оператор \hat{A} – некоторый конечномерный оператор (т. е. матрица), действующий в пространстве V .

В дальнейшем мы будем рассматривать интегральные уравнения Фредгольма первого рода

$$\hat{K}y = f$$

и интегральные уравнения Фредгольма второго рода

$$y = \mu\hat{K}y + f,$$

где $f = f(x)$ – известная функция, а $y = y(x)$ – искомая. Параметр μ , при котором уравнение $y = \mu\hat{K}y$ имеет нетривиальные решения, называют *характеристическим числом* оператора \hat{K} . Очевидно, что при $\lambda_n \neq 0$ выполняется $\mu = 1/\lambda$. Использование характеристических чисел (вместо собственных) является традиционным в теории интегральных уравнений. Тот факт, что решение интегрального уравнения Фредгольма первого рода приводит к некорректной задаче, мы рассматривали в первой лекции.

В том случае, если ядро является вырожденным, решение интегрального уравнения сводится к решению СЛАУ. Покажем это на примере уравнения второго рода. Рассмотрим интегральное уравнение

$$\phi(x) = \mu \int_a^b K(x, y)\phi(y)dy + f(x), \quad (10.3)$$

в котором ядро $K(x, y)$ имеет вид (10.2). Подставив (10.2) в уравнение (10.3), находим:

$$\phi(x) = \mu \sum_{i=1}^N g_i(x) \int_a^b h_i(y)\phi(y)dy + f(x). \quad (10.4)$$

Далее выполним следующие действия:

1) домножим левую часть и правую часть уравнения (10.4) на функцию $h_j(x)$;

2) проинтегрируем левую и правую части по переменной x от a до b .

Введем обозначения:

$$c_j = \int_a^b h_j(y)\phi(y)dy, \quad f_j = \int_a^b h_j(y)f(y)dy, \quad K_{ji} = \int_a^b h_j(y)g_i(y)dy.$$

В итоге получаем СЛАУ с неизвестными c_j :

$$c_j = \mu \sum_{i=1}^N K_{ji} c_i + f_j. \quad (10.5)$$

Если число μ не является характеристическим, находим из СЛАУ (10.5) величины c_i и подставляем в (10.4). В итоге получаем

$$\phi(x) = \mu \sum_{i=1}^N g_i(x) c_i + f(x),$$

так что решение исходного уравнения (10.3) найдено.

Несложно доказать, что эрмитово ядро $K(x, y)$ в вырожденном случае представимо в виде

$$K(x, y) = \sum_{i=1}^N \lambda_i \varphi_i(x) \overline{\varphi_i(y)}, \quad (10.6)$$

где $\varphi_i(x)$ – ортонормированная система собственных функций и λ_i – отвечающие данным функциям собственные значения. Важным является факт, что формула (10.6) справедлива в общем случае для произвольного самосопряженного компактного оператора, когда $N = \infty$ и $V = H$. С помощью данного разложения может быть доказана следующая теорема.

Теорема 10.2. Пусть \hat{K} – некоторый компактный оператор в гильбертовом пространстве H . Тогда $\forall \epsilon > 0 \exists N = N(\epsilon)$, такое, что

$$\hat{K} = \hat{K}_N + \hat{K}_\epsilon,$$

где \hat{K}_N – конечномерный оператор, действующий в N -мерном пространстве $V_N \subset H$ и $\|\hat{K}_\epsilon\| \leq \epsilon$.

Эта теорема позволяет, в частности, сводить решение интегральных уравнений к решению СЛАУ. Действительно, решение на практике всегда надо найти с какой-либо заранее заданной точностью. Это позволяет выбрать число N (или ϵ) так, что последним слагаемым в формуле теоремы можно пренебречь. Конечно, в каждом конкретном случае такая процедура нуждается в дополнительных исследованиях и обоснованиях. Эти и другие свойства компактных операторов играют важную роль при решении интегральных уравнений Фредгольма первого и второго рода.

Важнейшим результатом в теории интегральных уравнений является следующая теорема.

Теорема 10.3 (альтернатива Фредгольма). Для уравнения $y = \mu \hat{K}y + f$ имеются две взаимоисключающие возможности:

- 1) либо число μ не является характеристическим числом оператора \hat{K} , и тогда данное уравнение имеет одно и только одно решение при любой правой части $f = f(x)$;
- 2) либо число μ является характеристическим числом оператора \hat{K} , и тогда уравнение $y = \mu \hat{K}y + f$ разрешимо тогда и только тогда, когда функция $f(x)$ ортогональна всем решениям сопряженного уравнения $z = \bar{\mu} \hat{K}^+ z$.

Рассмотрим теперь интегральное уравнение Фредгольма первого рода

$$\hat{K}y = f,$$

где известная $f = f(x)$ и неизвестная $y = y(x)$ функции есть элементы некоторого функционального пространства H . Пусть w_n – образующие в пространстве H базис собственные функции оператора \hat{K} , а λ_n – собственные числа. Напомним, свойства СФ и СЧ самосопряженных компактных операторов определены теоремой 10.1. Запишем разложения функций f и y по базису w_n :

$$y = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n w_n, \quad f = \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k w_k.$$

Подставив данные разложения в интегральное уравнение, для неизвестной функции $y = y(x)$ получаем выражение

$$y = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\beta_i}{\lambda_i} w_i. \quad (10.7)$$

Необходимое и достаточное условие существования и единственности уравнения $\hat{K}y = f$ – выполнение условия

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{|\beta_i|^2}{\lambda_i^2} < \infty.$$

Данное утверждение носит название **теоремы Пикара**.

Согласно теореме 10.1, для СЧ имеем $\lambda_n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. А это означает, что при больших номерах n даже малые отклонения $\delta\beta_n$ коэффициентов разложения β_n правой части f приводят к сколь угодно большим (при $n \rightarrow \infty$)

отклонениям в коэффициентах разложения β_n/λ_n искомой функции y . Таким образом, причина некорректности здесь – это спектральные свойства оператора \hat{K} . Естественная гипотеза, возникающая при анализе формулы (10.7), – это предположение о том, что возможно, например, ограничиться конечным числом слагаемых в правой части (10.7). К чему это приводит, а также другие способы борьбы с некорректностью в случае задач с компактными операторами мы рассмотрим в следующей лекции.

Вопросы для самоконтроля

1. Дайте определение компактного (вполне непрерывного) оператора.
2. Приведите пример компактного оператора в конечномерном пространстве.
3. Приведите пример компактного оператора в бесконечномерном пространстве.
4. Приведите пример оператора в бесконечномерном пространстве, который не является компактным.
5. Дайте определение интегрального оператора.
6. Какое ядро интегрального оператора называется эрмитовым?
7. Какое ядро интегрального оператора называется вырожденным?
8. Какими свойствами обладает спектр эрмитова компактного оператора?
9. Как записывается вырожденное эрмитово ядро интегрального оператора?
10. Что такое интегральное уравнение Фредгольма первого рода?
11. Что такое интегральное уравнение Фредгольма второго рода?
12. Что такое характеристическое число интегрального уравнения Фредгольма второго рода?
13. К чему сводится решение интегрального уравнения Фредгольма с вырожденным ядром?
14. Как эрмитово ядро интегрального оператора записывается через его СФ и СЧ?
15. Сформулируйте альтернативу Фредгольма.
16. Сформулируйте теорему Пикара.
17. Как записывается решение интегрального уравнения Фредгольма первого рода, если известны СФ и СЧ интегрального оператора?
18. Что является причиной некорректности при нахождении решения интегрального уравнения Фредгольма первого рода?

Литература: [4, 6].

Лекция 11

Итерационные методы решения некорректных задач, связанных с интегральными уравнениями

Некорректность при решении интегрального уравнения Фредгольма первого рода в теории восстановления временного сигнала (изображения). Понятие о вытянутых сфероидальных функциях. Способы решения. Передаточная функция. Формальное сведение интегрального уравнения теории восстановления временного сигнала к интегральному уравнению Фредгольма второго рода и применение метода итераций. Алгоритм Ландвебера.

В конце предыдущей лекции мы рассмотрели интегральное уравнение Фредгольма первого рода $\hat{K}y = f$, где $f = f(x)$ – известная и $y = y(x)$ – неизвестная функции, в общем виде. Мы установили также, что причиной некорректности такой задачи являются общие свойства спектра компактных операторов. В данной лекции мы рассмотрим конкретную и имеющую практическую ценность задачу, приводящую к такого рода проблемам.

Пусть $y = y(t)$ – некоторый временной сигнал (т. е. функция, зависящая от времени), который подается на вход устройства, осуществляющего частотную фильтрацию данного сигнала. На выходе мы имеем сигнал $f = f(t)$, который мы можем измерить с некоторой погрешностью $\delta f = \delta f(t)$. Задача: получить как можно более подробную информацию (т. е. определить с наиболее возможной точностью) об исходном сигнале $y(t)$. Заметим, что на практике любое устройство, через которое проходит зависящий от времени сигнал, осуществляет частотную фильтрацию. Характеристикой такой фильтрации служит функция $\rho(\omega) = F(\omega)/Y(\omega)$, где $F(\omega)$ и $Y(\omega)$ – амплитуды спектральных составляющих с частотой ω функций $f(t)$ и $y(t)$ соответственно. Имеем:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{i\omega t} d\omega, \quad y(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} Y(\omega) e^{i\omega t} d\omega.$$

Рассмотрим *идеализированный случай* частотной фильтрации, когда

$$\rho(\omega) = \theta(\omega_0 - |\omega|),$$

где $\theta(\omega)$ – функция Хевисайда. Это означает, что все частоты интервала $[-\omega_0, \omega_0]$ пропускаются полностью, другие частоты полностью подавляются (так как мы используем комплексное преобразование Фурье, то мы рассматриваем как положительные, так и отрицательные значения частот). Таким образом, выполняется соотношение

$$F(\omega) = \theta(\omega_0 - |\omega|)Y(\omega). \quad (11.1)$$

Применяя обратное преобразование Фурье, получаем интегральное уравнение

$$f(t) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin \omega_0(t - t')}{t - t'} y(t') dt'.$$

Поскольку измерения всегда происходят в течение конечного промежутка времени, заменим в интеграле пределы интегрирования на конечные ($\pm T$). Такое ограничение области интегрирования означает также замену равенства (11.1) на более сложное. На следствиях, вытекающих из такой замены (в том числе на вопросах, связанных с единственностью), мы в данном курсе останавливаться не будем. Далее, делая замену переменных $t \rightarrow \tau$, $t = T\tau$ и вводя обозначение $T\omega_0 = \varkappa$, находим:

$$\hat{K}_\varkappa y = f, \quad (\hat{K}_\varkappa y)(\tau) = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\sin \varkappa(\tau - \tau')}{\tau - \tau'} y(\tau') d\tau'. \quad (11.2)$$

Заметим, что уравнение, аналогичное рассматриваемому, получается в теории восстановления изображения, искаженного за счет прохождения светового сигнала через отверстие конечного диаметра. Исследуем уравнение (11.2) более подробно. Рассмотрим задачу на собственные значения

$$\hat{K}_\varkappa w_n = \lambda_n w_n.$$

Докажем: для данного интегрального оператора $\lambda_n > 0$.

Действительно, рассмотрим интегральное уравнение

$$\mu_n \varphi_n(x) = (\hat{F}_\varkappa \varphi_n)(x) \equiv \int_{-1}^1 e^{i\varkappa xy} \varphi_n(y) dy. \quad (11.3)$$

Несложно показать, что операторы \hat{F}_\varkappa и \hat{F}_\varkappa^+ коммутируют: $\hat{F}_\varkappa\hat{F}_\varkappa^+ = \hat{F}_\varkappa^+\hat{F}_\varkappa$. Это означает, что у операторов \hat{F}_\varkappa и \hat{F}_\varkappa^+ общая система СФ. Поэтому СФ $\varphi_n(x)$ оператора \hat{F}_\varkappa будут также СФ оператора \hat{F}_\varkappa^+ :

$$\overline{\mu}_n\varphi_n(x) = (\hat{F}_\varkappa^+\varphi_n)(x) \equiv \int_{-1}^1 e^{-i\varkappa xy}\varphi_n(y)dy. \quad (11.4)$$

С учетом явного вида оператора \hat{K}_\varkappa прямой проверкой находим:

$$\hat{F}_\varkappa\hat{F}_\varkappa^+ = \hat{F}_\varkappa^+\hat{F}_\varkappa = \frac{2\pi}{\varkappa}\hat{K}_\varkappa, \quad (11.5)$$

поэтому

$$\lambda_n = \frac{\varkappa|\mu_n|^2}{2\pi} > 0. \quad (11.6)$$

Мы будем рассматривать СФ w_n , нормированные специальным образом:

$$\int_{-1}^1 w_n(x)w_m(x)dx = \lambda_n\delta_{nm}. \quad (11.7)$$

Такие функции хорошо известны; они называются *вытянутыми сфероидальными функциями*. Они обладают свойством двойной ортогональности: кроме свойства (11.7), выполняется свойство ортогональности на всей оси:

$$\int_{-\infty}^{\infty} w_n(x)w_m(x)dx = \delta_{nm}. \quad (11.8)$$

Данные функции и отвечающие им собственные числа хорошо табулированы. Таким образом, формально решение исследуемого уравнения $f = \hat{K}_\varkappa y$ записывается в виде

$$y(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{c_i}{\lambda_i} w_n(x), \quad c_i = \int_{-1}^1 w_n(x)f(x)dx. \quad (11.9)$$

Как мы знаем из прошлой лекции, $\lambda_n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$ для компактных операторов в общем случае. Здесь такая ситуация предстает в наиболее «неудобном» виде: вплоть до значений $n \simeq \varkappa$ имеет место $\lambda_n \simeq 1$, далее наблюдается резкое уменьшение значений СЧ, так, что $\lambda_n \simeq 0$ (поведение типа единичной ступеньки).

Рассмотрим далее методы борьбы с данным (весьма сильным!) проявлением некорректности. Методы, рассмотренные ниже, справедливы для любых

интегральных уравнений Фредгольма первого рода $f = \hat{K}y$ с самосопряженным оператором \hat{K} , поэтому их изложение мы будем вести в общем виде. Естественное обобщение точного решения (11.9) – это записать его в виде

$$y(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \Omega_i c_i w_n(x), \quad c_i = \int_{-1}^1 w_n(x) f(x) dx, \quad (11.10)$$

отличающемся от (11.9) тем, что вместо множителя $1/\lambda_i$ введена некоторая «передаточная функция» Ω_i . Требования к данной функции противоречивы: с одной стороны, она должна мало отличаться от множителя $1/\lambda_i$ при $i < N$ для некоторого N (чтобы обеспечить заданную точность решения), а с другой – значительно отличаться от данного множителя при $i > N$ (чтобы обеспечить устойчивость). Противоречие состоит в том, что для точности решения N должно быть как можно больше, а для устойчивости – как можно меньше. В этой связи большую роль играет выбор Ω_i при $i > N$. Рассмотрим различные варианты:

1. Простейший вариант решения данной задачи – положить $\Omega_i = 1/\lambda_i$ при $i \leq N$ и $\Omega_i = 0$ при $i > N$. Для рассмотренной выше задачи о преобразовании временного сигнала естественно выбрать $N \simeq \varkappa$. Однако данный метод слишком прост и никак не учитывает составляющие решения, отвечающие слагаемым в (11.9) с большими значениями i . Проблема устойчивости здесь решена, проблема точности – нет.

2. Рассмотрим метод построения передаточной функции Ω_i при помощи алгоритма Ландвебера. Данный метод основан на формальном сведении уравнения $f = \hat{K}y$ к интегральному уравнению второго рода. Сформулируем шаги данного алгоритма:

- 1) прибавим к левой и правой частям уравнения $f = \hat{K}y$ (искомое) решение y . В итоге получим уравнение

$$y = f + (\hat{I} - \hat{K})y.$$

Решением данного (эквивалентного исходному) уравнения является формальный ряд

$$y = \sum_{i=0}^{\infty} (\hat{I} - \hat{K})^i f. \quad (11.11)$$

Данный ряд может быть получен при помощи итерационной процедуры

$$y^{(n+1)} = f + (\hat{I} - \hat{K})y^{(n)}, \quad y^{(0)} = f.$$

Можно показать, что ряд сходится, если исходное уравнение разрешимо;

2) обрываем ряд (11.11) на конечном числе слагаемых:

$$y^{(n+1)} = \sum_{i=0}^n (\hat{I} - \hat{K})^i f; \quad (11.12)$$

3) подставим в правую часть (11.12) разложение $f = \sum_{i=1}^{\infty} c_i w_i$, где w_i – СФ оператора \hat{K} и $c_i = (f, w_i)$. В итоге находим

$$y^{(n+1)} = \sum_{k=1}^{\infty} c_k w_k \sum_{i=0}^n (1 - \lambda_k)^i = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k} \left[1 - (1 - \lambda_k)^{(n+1)} \right] c_k w_k. \quad (11.13)$$

Таким образом, мы получили приближенное решение $y^{(n+1)} \simeq y$, которое фактически означает использование передаточной функции

$$\Omega_k^{(n)} = \frac{1}{\lambda_k} \left[1 - (1 - \lambda_k)^{(n+1)} \right].$$

Не ограничивая общности, можно считать, что $|\lambda_k| < 1$. Поэтому мы видим, что при $n \rightarrow \infty$ выполняется $\Omega_k \rightarrow 1/\lambda_k$, так что решение стремится к точному. Еще раз подчеркнем, что выбор числа n в данной формуле – это всегда компромисс между точностью и устойчивостью.

Вопросы для самоконтроля

1. Как связаны спектры сигналов (в общем виде) на входе и выходе преобразующего сигнал устройства?
2. Как связаны функции, моделирующие зависящий от времени сигнал, на входе и выходе преобразующего сигнал устройства?
3. Как связаны между собой спектр и временная зависимость сигнала?
4. Что такое идеализированный случай частотной фильтрации?
5. Какое интегральное уравнение получается для временного сигнала в идеализированном случае частотной фильтрации?
6. Какое интегральное уравнение получается для временного сигнала при учете конечности промежутка времени, в течение которого происходит наблюдение?
7. Какими свойствами обладают СЧ интегрального оператора в теории преобразования временного сигнала?

8. Как связаны между собой интегральный оператор в теории преобразования временного сигнала и оператор преобразования Фурье?
9. Что такое вытянутые сфероидальные функции?
10. Какими свойствами нормировки обладают вытянутые сфероидальные функции?
11. Как можно записать решение интегрального уравнения в теории преобразования временного сигнала с использованием СЧ интегрального оператора и вытянутых сфероидальных функций?
12. К какому типу уравнений относится интегральное уравнение в теории преобразования временного сигнала?
13. В чем причина некорректности решения интегрального уравнения в теории преобразования временного сигнала?
14. Что такое передаточная функция?
15. Каковы требования к передаточной функции? Почему эти требования противоречивы?
16. Как свойства решения интегрального уравнения зависят от выбора передаточной функции?
17. Опишите шаги построения передаточной функции при помощи алгоритма Ландвебера.
18. Для чего служит алгоритм Ландвебера?
19. Каковы предельные случаи передаточной функции, построенной при помощи алгоритма Ландвебера?
20. Можно ли выбрать передаточную функцию так, чтобы одновременно улучшить точность решения и его устойчивость?

Литература: [3, 4, 6, 7].

Лекция 12

Обратные задачи для параболических уравнений

Параболические дифференциальные уравнения в частных производных. Уравнение теплопроводности. Обратные задачи, связанные с уравнением теплопроводности. Решение градиентными методами.

Напомним, квазилинейные дифференциальные уравнения в частных производных (ЧДУ) второго порядка для неизвестной функции $\psi(x, y)$ имеют вид

$$A \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + 2B \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} + C \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + F \left(\frac{\partial \psi}{\partial x}, \frac{\partial \psi}{\partial y}; \psi; x, y \right) = 0.$$

Здесь коэффициенты A , B и C – функции переменных (t, x) , функция F – произвольная, вообще говоря, функция своих переменных. Такие уравнения делятся на классы: эллиптические ($AC > B^2$), гиперболические ($AC < B^2$) и параболические ($AC = B^2$). Процесс распространения тепла в одномерной среде (тонкие стержни, нити) описывается параболическим уравнением вида

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(a(t, x) \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) + h(t, x), \quad (12.1)$$

где функция $a(t, x)$ задает теплопроводность среды, а функция $h(t, x)$ – источники тепла. В данной лекции мы рассмотрим обратную задачу для простейшего варианта уравнения (12.1):

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = a \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}. \quad (12.2)$$

Уравнение (12.2) описывает изменение температуры $\psi(t, x)$ с течением времени t в одномерной однородной среде без источников тепла. Коэффициент

a , как отмечалось выше, описывает теплопроводность среды. В нашем случае $a = \text{const}$, так что уравнение (12.2) может быть решено явно. В случае нетривиальной зависимости $a = a(t, x)$ решение уравнения (12.1) требует, вообще говоря, применения численных методов. Решения уравнения (12.2) рассматриваются в области

$$\Omega = [0, b] \times [0, \infty), \quad x \in [0, b], \quad t \in [0, \infty).$$

Мы рассмотрим следующую простейшую краевую задачу.

Найти решение уравнения (12.2) в области Ω , удовлетворяющее условиям:

$$\psi(0, x) = \varphi(x), \tag{12.3}$$

$$\varphi(0) = \varphi(b) = \varphi_0, \tag{12.4}$$

$$\psi(t, 0) = \psi(t, b) = \varphi_0. \tag{12.5}$$

В дальнейшем, не ограничивая общности, полагаем $\varphi_0 = 0$, сделав, если это не так, замену $\psi(t, x) \rightarrow \psi(t, x) - \varphi_0$.

Итак, мы рассматриваем следующую *прямую задачу*: найти в заданный момент времени $t = T$ функцию $\varphi_T(x) \equiv \psi(T, x)$, где $\psi(t, x)$ – решение уравнения (12.2), удовлетворяющее условиям (12.3)–(12.5). Функция $\varphi(x)$ считается заданной.

Обратная задача формулируется так: по заданной функции $\varphi_T(x)$ найти исходное распределение температуры $\varphi(x)$. Граничные условия (12.3)–(12.5) считаются выполненными.

Рассмотрим решение прямой задачи. Будем искать функцию $\psi(t, x)$ в виде

$$\psi(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t) \sin\left(\frac{\pi n x}{b}\right), \tag{12.6}$$

который диктуется требованием обращения функции $\psi(t, x)$ в ноль в точках $x = 0$ и $x = b$ и стандартным применением метода разделения переменных при решении уравнения (12.2). Подставляя (12.6) в (12.2), находим для коэффициентов $f_n(t)$:

$$\frac{df_n}{dt} = -a \left(\frac{\pi n}{b}\right)^2 f_n,$$

так что

$$f_n(t) = c_n \exp\left[-a \left(\frac{\pi n}{b}\right)^2 t\right], \quad c_n = \text{const}.$$

Константы c_n находим из условия $\psi(0, x) = \varphi(x)$, так что

$$c_n = \frac{2}{b} \int_0^b \varphi(y) \sin\left(\frac{\pi n y}{b}\right) dy.$$

В итоге получаем для решения:

$$\psi(t, x) = \int_0^b G(t, x; y) \varphi(y) dy, \quad (12.7)$$

где введено обозначение

$$G(t, x; y) = \frac{2}{b} \sum_{n=1}^{\infty} \exp\left[-a \left(\frac{\pi n}{b}\right)^2 t\right] \sin\left(\frac{\pi n x}{b}\right) \sin\left(\frac{\pi n y}{b}\right). \quad (12.8)$$

Функция $G(t, x; y)$ называется *функцией Грина* краевой задачи (12.2)–(12.5).

Рассмотрим теперь решение обратной задачи. В соответствии с полученными при решении прямой задачи результатами, ее формулировка такова: найти неизвестную функцию $\varphi(x)$ из уравнения

$$\varphi_T(x) = \int_0^b K(x, y) \varphi(y) dy, \quad (12.9)$$

в котором функции $\varphi_T(x)$ и $K(x, y) \equiv G(T, x; y)$ – ядро интегрального оператора \hat{K} – считаются известными.

Таким образом, задача имеет вид интегрального уравнения Фредгольма первого рода. Некорректность такой задачи мы обсуждали ранее. Далее мы составим алгоритм решения такой задачи методом подбора, выполнив минимизацию невязки градиентным методом.

1. В соответствии с данным методом, вначале необходимо выполнить ограничение множества, на котором ищется решение задачи, на компактное множество \mathcal{M} . Заметим, что изначально

$$\varphi(x) \in D_0 \subset L_2[0, b], \quad D_0 = \{\varphi(x) \mid \varphi(0) = \varphi(b) = 0\},$$

и множество D_0 компактным не является. Обоснованными являются следующие предположения:

- температура ограничена сверху некоторой константой: $\varphi(x) \leq \theta$;

- датчики, измеряющие температуру, имеют конечный размер, так что функцию $\varphi(x)$ можно считать постоянной в пределах некоторого интервала $\sigma \ll b$. Выбираем натуральное число $M = [b/\sigma] + 1$ и разбиваем интервал $[0, b]$ на M равных интервалов:

$$0 = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{M-1} < x_M = b.$$

Символом $[b/\sigma]$ мы обозначили целую часть числа $[b/\sigma]$. Предположение, что функция $\varphi(x)$ постоянна на каждом таком интервале, означает, что мы ищем не гладкую функцию φ , а ступенчатую:

$$\tilde{\varphi}(x) = \sum_i^M \varphi_i \chi_i(x), \quad 0 < \varphi_i \leq \theta,$$

где $\chi_i(x)$ – характеристическая функция полуинтервала $[x_{i-1}, x_i)$, $i = 1, \dots, M$.

В итоге функция $\tilde{\varphi}(x)$ определяется конечномерным вектором $\varphi \in E_M$, находящимся внутри шара с радиусом θ .

2. Выведем выражение для невязки на множестве E_M . Напомним выражение для невязки:

$$\Delta(\phi) = \frac{1}{2} \|\hat{K}\phi - \varphi_T\|^2 = \frac{1}{2} (\hat{K}\phi - \varphi_T, \hat{K}\phi - \varphi_T).$$

После редукции на компактное множество имеем:

$$\begin{aligned} \Phi(\varphi_1, \dots, \varphi_M) &= \Delta(\phi) \Big|_{u=\tilde{u}} = \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^M A_{ij} \varphi_i \varphi_j - \sum_{i=1}^M B_i \varphi_i + C, \end{aligned} \quad (12.10)$$

где

$$A_{ij} = (\hat{K}\chi_i, \hat{K}\chi_j), \quad B_i = (\hat{K}\chi_i, \varphi_T), \quad C = \frac{1}{2} \|\varphi_T\|^2.$$

3. Найдем выражение для градиента в общем виде. Согласно определению градиента, делая приращение $\phi \rightarrow \phi + \delta\phi$, находим:

$$\mathbf{g} = \text{grad } \Delta(\phi) = \hat{K}^+(\hat{K}\phi - \varphi_T).$$

В нашем случае ядро $K(x, y)$ оператора \hat{K} вещественно и симметрично, поэтому $\hat{K}^+ = \hat{K}$. После редукции на множество \mathcal{M} получаем:

$$\mathbf{g} = \mathbf{g}\Big|_{u=\tilde{u}} = (g_1, \dots, g_M),$$

где

$$g_i = \sum_{j=1}^M A_{ij}\varphi_j - B_i. \quad (12.11)$$

4. Вычисляем массивы $\{A_{ij}\}$, $\{B_i\}$, константу C .
5. Далее, используя формулы (12.10) и (12.11), выполняем итерационную процедуру так, как описано в лекции 8 (см. стр. 59).

Обратим внимание на следующее обстоятельство. Функция $\varphi_T(x)$ известна, как правило, с некоторой точностью δ . Нет также никакой гарантии, что данная функция принадлежит множеству $\hat{K}\mathcal{M}$. Поэтому, минимизируя невязку, мы находим для данной задачи не точное решение, а *квазирешение*.

Заметим, необходимые условия экстремума (8.3) в данной задаче запишутся так:

$$g_i = \sum_{j=1}^M A_{ij}\varphi_j - B_i = 0. \quad (12.12)$$

Таким образом, чтобы найти точку минимума функции $\Phi(\varphi_1, \dots, \varphi_M)$, здесь необходимо решить СЛАУ порядка M . Как отмечалось, при больших M это может быть проблематичным. Кроме этого, если матрица A_{ij} окажется плохо обусловленной³, то решение системы (12.12) потребует дополнительной регуляризации.

Задача, рассмотренная в данной лекции, относится к классу *ретроспективных обратных задач* – когда необходимо определить данные (функцию), отнесенные по времени к предшествующим моментам по сравнению с известными данными (функциями). В заключение отметим, что для уравнения (12.1) возможна формулировка обратных задач других типов. Так, существует класс *коэффициентных обратных задач*, когда по решению (или его элементам) необходимо определить неизвестные коэффициенты уравнения.

³ Понятие обусловленности матрицы мы рассмотрим в следующей лекции.

Вопросы для самоконтроля

1. Назовите типы (классификацию) квазилинейных ЧДУ второго порядка.
2. Какие квазилинейные ЧДУ второго порядка называются параболическими?
3. Запишите уравнение, которое описывает процесс передачи тепла в одномерной среде.
4. Сформулируйте краевую задачу для уравнения теплопроводности на отрезке $[0, b]$ с заданной начальной температурой и постоянными (равными) значениями температуры на границах отрезка.
5. Сформулируйте обратную задачу для уравнения теплопроводности на отрезке $[0, b]$ с заданной в момент времени T температурой и постоянными (равными) значениями температуры на границах отрезка.
6. Каким методом можно найти частные решения уравнения теплопроводности без источников с постоянными коэффициентами?
7. Что такое функция Грина для краевой задачи для уравнения теплопроводности на отрезке $[0, b]$ с заданной начальной температурой и постоянными (равными) значениями температуры на границах отрезка?
8. К какому интегральному уравнению сводится решение обратной задачи для уравнения теплопроводности на отрезке $[0, b]$ с заданной в момент времени T температурой и постоянными (равными) значениями температуры на границах отрезка?
9. Зачем необходимо ограничить возможное множество решений обратной задачи компактным множеством?
10. Какие предположения необходимо сделать, чтобы сделать ограничение на компакт множества решений обратной задачи для уравнения теплопроводности на отрезке $[0, b]$ с заданной в момент времени T температурой и постоянными (равными) значениями температуры на границах отрезка?
11. Что такое невязка при решении обратной задачи для уравнения теплопроводности?
12. В каком виде можно представить невязку при решении обратной задачи для уравнения теплопроводности?
13. Как вычисляется градиент невязки при решении обратной задачи для уравнения теплопроводности?
14. В каком виде можно представить градиент невязки при решении обратной задачи для уравнения теплопроводности?
15. Какие методы минимизации невязки вы знаете?
16. Какого типа обратные задачи для уравнения теплопроводности вы знаете?

Литература: [1, 2, 12].

Лекция 13

Некорректные задачи в конечномерных пространствах

Решение обратной задачи для уравнения теплопроводности посредством сведения ядра интегрального оператора к вырожденному. Особенности решения линейных задач в конечномерных евклидовых пространствах. Число обусловленности матрицы $\text{Cond}(A)$, его смысл. Решение СЛАУ при плохо обусловленных матрицах коэффициентов как пример некорректной задачи.

В этой лекции мы продолжим анализ обратной задачи для уравнения теплопроводности (12.2). В прошлой лекции мы проиллюстрировали на данном примере применение градиентных методов. Вместе с этим мы можем записать явное решение указанной задачи. Действительно, мы установили, что обратная (по времени) задача для одномерного уравнения теплопроводности сводится к интегральному уравнению Фредгольма первого рода (12.9) с ядром

$$K(x, y) = \frac{2}{b} \sum_{n=1}^{\infty} \exp \left[-a \left(\frac{\pi n}{b} \right)^2 T \right] \sin \left(\frac{\pi n x}{b} \right) \sin \left(\frac{\pi n y}{b} \right). \quad (13.1)$$

Сравнивая данную формулу с формулой (10.6), а также учитывая соотношение ортогональности

$$\int_0^b \sin \left(\frac{\pi n x}{b} \right) \sin \left(\frac{\pi m x}{b} \right) dx = \frac{b}{2} \delta_{mn},$$

находим, что ортонормированные собственные функции $\varphi_n(x)$ и собственные числа λ_n эрмитова интегрального оператора \hat{K} с ядром (13.1) суть

$$\varphi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{b}} \sin \left(\frac{\pi n x}{b} \right), \quad \lambda_n = \exp \left[-a \left(\frac{\pi n}{b} \right)^2 T \right].$$

Это означает, что, повторяя все те рассуждения, которые мы делали при выводе формулы (11.10), мы можем записать

$$\varphi(x) = \sum_{s=1}^{\infty} \Omega_s c_s \varphi_s(x), \quad c_i = \int_0^b \varphi_i(x) \varphi_T(x) dx. \quad (13.2)$$

Где, напомним, Ω_s – передаточная функция:

$$\Omega_s = \frac{1}{\lambda_s} = \exp \left[a \left(\frac{\pi n}{b} \right)^2 T \right].$$

Данное точное решение наглядно показывает некорректность в решении задачи: в силу экспоненциального роста коэффициентов Ω_s при $s \rightarrow \infty$ даже малые вариации величин c_s при больших значениях s приводят к значительным отклонениям в нахождении искомой функции φ . В этой связи, для того чтобы находить решение по формуле (13.2), необходимо использовать те или иные методы регуляризации передаточной функции. Можно, например, воспользоваться алгоритмом Ландвебера, который подробно рассматривался в лекции 11 на примере другой задачи (см. стр. 79).

Другой способ – сведение рассматриваемой задачи к конечномерной при помощи теоремы 10.2 (см. стр. 73). Явный вид (13.1) ядра $K(x, y)$ делает применение данной теоремы особенно наглядным. Действительно, ряд (13.1) сходится абсолютно и равномерно, так как мажорируется числовым рядом

$$(2/b) \sum_{n=1}^{\infty} \exp[-a(\pi n/b)^2 T].$$

Поэтому мы можем записать:

$$K(x, y) = K_N(x, y) + K_\epsilon(x, y), \quad \epsilon = \epsilon(N),$$

где

$$K_N(x, y) = \frac{2}{b} \sum_{n=1}^N \exp \left[-a \left(\frac{\pi n}{b} \right)^2 T \right] \sin \left(\frac{\pi n x}{b} \right) \sin \left(\frac{\pi n y}{b} \right) \quad (13.3)$$

и $K_\epsilon(x, y)$ – сумма остаточных членов ряда, начиная с номера $N+1$. Несложно показать, что выбором числа N всегда можно добиться, что

$$|K_\epsilon(x, y)| < \epsilon, \quad (13.4)$$

где ϵ – любое наперед заданное положительное число. Действительно, полагая для простоты $b = \pi$, имеем:

$$\begin{aligned} |K_\epsilon(x, y)| &\leq \sum_{n=N+1}^{\infty} e^{-aTn^2} = e^{-aTN^2} \sum_{n=N+1}^{\infty} e^{-aT(n-N)(n+N)} = \\ &= e^{-aTN^2} \sum_{k=1}^{\infty} e^{-aTk(k+2N)} \leq e^{-aTN^2} \sum_{k=1}^{\infty} e^{-aTk^2}. \end{aligned}$$

Величина $\sum_{k=1}^{\infty} e^{-aTk^2}$ конечна и от N не зависит, так что в итоге имеем оценку (13.4).

Искомую функцию $-\varphi(x)$ – всегда необходимо найти с какой-либо наперед заданной точностью. Это позволяет пренебречь⁴ в ядре слагаемыми $K_\epsilon(x, y)$ и свести исходную задачу к уравнению с вырожденным ядром. Такие уравнения, как мы обсуждали в прошлых лекциях, в итоге сводятся к СЛАУ. На практике мы, как правило, получаем СЛАУ с большим порядком N , решение которой, обратим внимание, может не обладать свойством устойчивости.

Рассмотрим некоторые проблемы, возникающие при нахождении решений СЛАУ $Ax = z$ высокого порядка. Здесь $A = A_{ij}$ – матрица размерности $N \times N$ (число N мы считаем достаточно большим – требующим численного решения рассматриваемой СЛАУ), x – искомый вектор N -мерного евклидова пространства E_N , z – некоторый заданный вектор данного пространства. На практике правая часть нам всегда известна с некоторой погрешностью $\delta z = (\delta z_1, \dots, \delta z_N)$, где z_i – компоненты вектора z . В качестве относительной погрешности обычно принимают величину $\epsilon_z = \|\delta z\|/\|z\|$. Элементы матрицы A , как правило, также заданы с некоторой (относительной) погрешностью $\epsilon_A = (\max_{i,j} |\delta A_{ij}|)/\|A\|$. При этом естественной (и практически востребованной) выглядит постановка задачи нахождения искомого вектора x с погрешностью $\epsilon_x \simeq \max(\epsilon_z, \epsilon_A)$. Для невырожденных матриц имеем: $x = A^{-1}z$. В чем же проблема? Она заключается в том, что на практике при больших N часто приходится иметь дело с «почти» вырожденными матрицами, т. е. такими матрицами A , для которых $\det A \simeq 0$. Однако тот факт, что определитель матрицы решаемой СЛАУ «почти» нулевой, не всегда означает, что погрешность ϵ_x будет значительно больше, чем величина $\max(\epsilon_z, \epsilon_A)$.

Мерой, определяющей отклонение величины ϵ_x от величин ϵ_z и ϵ_A , явля-

⁴ Мы не будем здесь подробно на этом останавливаться.

ется число обусловленности $\text{Cond}(A)$ матрицы A , которое определяется как

$$\text{Cond}(A) = \|A\| \cdot \|A^{-1}\|.$$

Пусть, например, $\delta A_{ij} = 0$. Из определения нормы имеем неравенства

$$\|z\| \leq \|A\| \cdot \|x\|, \quad \|\delta x\| \leq \|A^{-1}\| \cdot \|\delta z\|.$$

В итоге находим $\epsilon_x \leq \text{Cond}(A) \cdot \epsilon_z$. Пусть теперь $\delta z = 0$, $\delta A_{ij} \neq 0$. Имеем $z = Ax$, $z = (A + \delta A)(x + \delta x)$, откуда находим $\delta x = -A^{-1}\delta A(x + \delta x)$. Отсюда получаем, что

$$\epsilon_x \simeq \frac{\|\delta x\|}{\|x + \delta x\|} \leq \text{Cond}(A) \cdot \epsilon_A.$$

Матрицы, для которых $\text{Cond}(A) \gg 1$, называют *плохо обусловленными*.

Таким образом, мы видим, что плохо обусловленные матрицы коэффициентов приводят при решении СЛАУ к потере устойчивости. Это означает, что мы имеем здесь пример некорректной задачи. Решение таких задач есть всегда некоторый компромисс между устойчивостью (в данном случае) и точностью. Покажем это на примере решения СЛАУ, если (плохо обусловленная) невырожденная $N \times N$ матрица A является эрмитовой, т. е. такой, для элементов которой выполнено соотношение $A_{ij} = \overline{A_{ji}}$. Будем считать матрицу также положительно определенной, т. е. такой, что

$$(x, Ax) > 0, \quad \forall x \in E_N.$$

Известно, что СЧ λ_i , $i = 1, \dots, N$, такой матрицы вещественны и положительны, а собственные векторы w_i , $i = 1, \dots, N$, взаимно ортогональны.

Без ограничения общности можно считать, что $\|w_i\| = 1$, так что система собственных векторов w_i образует в пространстве E ортонормированный базис. Поэтому $\forall x \in E$ имеем $x = \sum_{i=1}^N c_i w_i$, где $c_i = (x, w_i)$. Подставляя данное разложение для векторов x и z в рассматриваемую СЛАУ $Ax = z$, имеем

$$\sum_{i=1}^N c_i \lambda_i w_i = \sum_{i=1}^N b_i w_i, \quad c_i = (x, w_i), \quad b_i = (z, w_i).$$

Используя свойства базиса w_i , находим: $c_i = b_i / \lambda_i$. Здесь мы наглядно видим, чем вызвана потеря устойчивости: наличием в спектре матрицы A малых СЧ. В этом случае малые погрешности в определении таких СЧ (напомним:

матрица A может быть задана приближенно) приводят к большим погрешностям соответствующих коэффициентов c_i в разложении искомого вектора x . С другой стороны, для матрицы рассматриваемого вида $\|A\| = \lambda_{\max}$, $\|A^{-1}\| = 1/\lambda_{\min}$, так что для числа обусловленности имеем формулу⁵

$$\text{Cond}(A) = \lambda_{\max}/\lambda_{\min}.$$

Один из способов решения проблемы устойчивости состоит в следующем. Рассмотрим вместо системы $Ax = z$ систему $(\alpha I + A)x = z$, где I – единичная матрица и α – некоторое положительное вещественное число. Интуитивно понятно, что при достаточно малых α новая система мало отличается от исходной. Действительно, для коэффициентов $c_i = (x, w_i)$ теперь имеем исправленное выражение $c_i = b_i/(\alpha + \lambda_i)$. Таким образом, малый параметр α оказывает влияние именно на малые (т. е. «плохие») СЧ, частично исправляя ситуацию. Выбор конкретного значения числа α зависит от задачи и определяет тот самый компромисс, о котором говорилось выше.

Вопросы для самоконтроля

1. Как записываются ортонормированные собственные функции интегрального оператора в обратной (по времени) задаче для уравнения теплопроводности?
2. Как записываются собственные числа интегрального оператора в обратной (по времени) задаче для уравнения теплопроводности?
3. Как записывается точное решение обратной (по времени) задачи для уравнения теплопроводности?
4. Как записывается передаточная функция обратной (по времени) задачи для уравнения теплопроводности?
5. Как передаточная функция демонстрирует факт некорректности обратной задачи для уравнения теплопроводности?
6. Какие способы регуляризации передаточной функции вы знаете?
7. Запишите передаточную функцию обратной задачи для уравнения теплопроводности, регуляризованную посредством алгоритма Ландвебера.
8. Как обратная задача для уравнения теплопроводности сводится к конечномерной?
9. Что влияет на размерность конечномерной задачи, к которой сводится обратная задача для уравнения теплопроводности?

⁵ Имеется в виду операторная норма матрицы.

10. Какие проблемы могут возникнуть при решении СЛАУ большого порядка?
11. Что такое число обусловленности матрицы?
12. Если определитель матрицы близок к нулю, всегда ли это означает, что матрица плохо обусловлена?
13. Какая матрица называется плохо обусловленной?
14. Как число обусловленности эрмитовой положительно определенной матрицы выражается через ее собственные значения?
15. Какую простейшую регуляризацию можно использовать при решении СЛАУ с плохо обусловленной эрмитовой положительно определенной матрицей?
16. Возможна ли такая регуляризация, при которой устойчивость и точность могут быть улучшены одновременно?

Литература: [4, 5, 12].

Лекция 14

Метод регуляризации: регуляризирующий оператор

Проблемы при решении обратных задач с неточными данными. Регуляризирующий оператор. Стабилизирующий функционал. Параметр регуляризации. Примеры.

Итак, мы рассматриваем задачу

$$\hat{A}u = f, \quad u \in U, \quad f \in F, \quad (14.1)$$

в которой оператор \hat{A} мы считаем некоторым линейным оператором, действующим из нормированного пространства U в нормированное пространство F . Напомним, что в прошлых лекциях (см. стр. 56–57) мы рассматривали некоторые алгоритмы ее решения в общем виде. Так, был рассмотрен алгоритм решения задачи, основанный на минимизации невязки. Как обсуждалось, такой алгоритм эффективен в том случае, если априорная информация позволяет предположить, что $u \in M \subset U$, где M – компактное множество. Однако так бывает не всегда. Даже в том случае, когда ограничение на компакт M сделать удастся, возможен вариант, когда правая часть $f \notin \hat{A}M$.

Пусть правая часть (14.1) – функция f – задана с некоторой заранее известной погрешностью δ . Это означает, что вместо «истинной» правой части f нам известна только функция f_δ , такая, что $\|f - f_\delta\| \leq \delta$. Как правило, выполняется неравенство $\|f\| \gg \delta$. Таким образом, мы фактически рассматриваем не уравнение (8.1), а уравнение

$$\hat{A}u = f_\delta, \quad u \in U, \quad f_\delta \in F. \quad (14.2)$$

Однако попытка найти решение данного уравнения, например методом минимизации невязки $\Delta(u) = (1/2)\|\hat{A}u - f_\delta\|^2$, может привести к неудовлетворительному результату. Это происходит потому, что множество Q_δ решений

(14.2) оказывается слишком широким и приводит, вообще говоря, к неустойчивости найденного решения при малых вариациях правой части в пределах заданной погрешности δ . Кроме этого, в некоторых задачах может отсутствовать априорная информация, позволяющая выделить из Q_δ компактное подмножество.

Ключевая идея заключается в следующем: поскольку правая часть известна не точно, то не имеет смысла искать точное решение уравнения (14.2). Имеет смысл найти некоторое приближенное решение u_α , согласованное по точности с заданной точностью δ функции f_δ . Это можно сделать, например, перейдя от исходного оператора \hat{A} к регуляризованному оператору \hat{A}_α , и рассмотреть задачу

$$\hat{A}_\alpha u_\alpha = f_\delta, \quad u \in U, \quad f_\delta \in F. \quad (14.3)$$

Критерии выбора оператора \hat{A}_α такие: во-первых, он должен обладать лучшими по отношению к корректности задачи свойствами, чем оператор \hat{A} (например, иметь непрерывный обратный оператор при $\alpha \neq 0$), и, во-вторых, в каком-либо смысле должно выполняться $\hat{A}_\alpha \rightarrow \hat{A}$ при $\alpha \rightarrow 0$. Параметр регуляризации $\alpha = \alpha(\delta) > 0$ выбирается так, что $\alpha \rightarrow 0$ при $\delta \rightarrow 0$. Пример такой регуляризации мы рассматривали в предыдущей лекции (см. стр. 92), когда изучали плохо обусловленные матрицы. В случае, когда матрица \hat{A} эрмитова и положительно определена, можно положить $\hat{A}_\alpha = \hat{A} + \alpha \hat{I}$, где \hat{I} – единичная матрица.

Так же можно поступить и в бесконечномерном случае, если $U = F$ – гильбертово пространство со скалярным произведением (\cdot, \cdot) , а оператор \hat{A} – самосопряжен и положительно определен. Известно, что СЧ λ_i , $i = 1, 2, \dots$, такого оператора вещественны и положительны, а СВ w_i , $i = 1, 2, \dots$, можно выбрать ортонормированными. Решение уравнения (14.2) представимо в виде

$$u = \hat{A}^{-1} f_\delta = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_i} (f_\delta, w_i) w_i. \quad (14.4)$$

При наличии малых значений СЧ λ_i решение не будет устойчивым. Выбирая $\hat{A}_\alpha = \hat{A} + \alpha \hat{I}$, находим

$$u = \hat{A}_\alpha^{-1} f_\delta \equiv \hat{\mathcal{R}}(\alpha) f_\delta = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_i + \alpha} (f_\delta, w_i) w_i.$$

Оператор $\hat{\mathcal{R}}(\alpha)$ называется регуляризирующим оператором, а выполненная регуляризация $\hat{A} \rightarrow \hat{A}_\alpha$ называется *упрощенной регуляризацией*.

Если $\hat{A} \neq \hat{A}^+$, нельзя говорить о положительной определенности оператора: для СЗ, вообще говоря, $\lambda_i \neq \bar{\lambda}_i$. В этом случае алгоритм действий для выполнения упрощенной регуляризации таков:

- переходим от исходной задачи $\hat{A}u = f$ к задаче

$$\hat{A}u = \mathcal{F}, \quad \hat{A} \equiv \hat{A}^+ \hat{A}, \quad \mathcal{F} \equiv \hat{A}^+ f;$$

- выполняем регуляризацию $\hat{A} \rightarrow \hat{A} + \alpha$.

Построение оператора $\hat{\mathcal{R}}(\alpha)$ в общем случае в той или иной форме составляет сущность метода регуляризации при решении задачи (14.3).

Прежде чем переходить к общему случаю, заметим, что, в силу неравенства треугольника (см. стр. 17), справедливо

$$\|(\hat{A} + \beta \hat{I})u - f_\delta\|^2 \leq \left(\|\hat{A}u - f_\delta\| + \beta \|u\| \right)^2 \leq 2 \left(\|\hat{A}u - f_\delta\|^2 + \beta^2 \|u\|^2 \right).$$

Таким образом, если невязка $\Delta(u)$ вычисляется для оператора \hat{A} , регуляризованного посредством упрощенной регуляризации $\hat{A} \rightarrow \hat{A} + \beta \hat{I}$, имеем:

$$\Delta(u) \leq \|\hat{A}u - f_\delta\|^2 + \beta^2 \|u\|^2.$$

В соответствии с *методом регуляризации А.Н. Тихонова*, для решения задачи (14.2) выполняется не минимизация невязки $\|\hat{A}u - f_\delta\|$, а минимизация *сглаживающего функционала*

$$J_\alpha(u) = \|\hat{A}u - f_\delta\|^2 + \alpha \|u\|^2, \quad (14.5)$$

который отличается от невязки $\Delta(u)$ наличием дополнительного слагаемого вида $\alpha \|u\|^2$. Функционал $\|u\|^2$ в данном случае играет роль *стабилизирующего функционала*. Такой подход можно рассматривать как решение задачи на условный экстремум с применением метода неопределенных множителей Лагранжа. Ее можно сформулировать так: ищется экстремум u_1 функционала $J_\alpha(u)$ на множестве Q_δ при условии

$$\|\hat{A}u_1 - f_\delta\| = \delta. \quad (14.6)$$

Согласно методу Лагранжа, в этом случае необходимо искать экстремум $u_1 = u_1(\alpha)$ функционала $J_\alpha(u)$, а неопределенный множитель Лагранжа α находить из условия (14.6).

Общее решение задачи о минимизации функционала (14.5) можно представить в форме

$$u_\alpha = \hat{\mathcal{R}}(\alpha) f_\delta. \quad (14.7)$$

Оператор $\hat{\mathcal{R}}(\alpha)$, полученный в результате той или иной процедуры регуляризации (не только в результате упрощенной, как рассматривалось выше), называют *регуляризующим оператором*. В общем случае необходимо также доказывать, что при найденном значении $\alpha = \alpha(\delta)$ решение будет сходиться к точному при $\delta \rightarrow 0$. Соответствующие доказательства могут быть найдены в приведенной в конце лекции литературе.

Рассмотрим пример.

Пример 14.1. Пусть оператор \hat{A} – самосопряжен и положительно определен. Тогда, как отмечалось, точное решение уравнения (14.2) представимо в форме (14.4). Пусть далее $v \in Q_\delta \subset U$. Вектор v представим в виде

$$v = \sum_{j=1}^{\infty} c_j w_j,$$

где w_j , напомним, ортонормированная система СФ оператора \hat{A} . В соответствии с формулой (14.5) имеем:

$$J(v) = \sum_{j=1}^{\infty} \left[(\lambda_j c_j - (f_\delta, w_j))^2 + \alpha c_j^2 \right].$$

Необходимые условия экстремума функционала $J(v)$ можно записать в виде

$$\frac{\partial J}{\partial c_j} = 2\lambda_j(\lambda_j c_j - (f_\delta, w_j)) + 2\alpha c_j = 0, \quad j = 1, 2, 3, \dots$$

Выражая отсюда коэффициенты c_j , получаем:

$$u_\alpha = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\lambda_i}{\lambda_i^2 + \alpha} (f_\delta, w_i) w_i. \quad (14.8)$$

Заметим, что

$$\frac{\partial^2 J}{\partial c_j \partial c_i} = 0 \quad (i \neq j), \quad \frac{\partial^2 J}{\partial c_j^2} > 0,$$

так что экстремаль (14.8) действительно реализует минимум⁶.

⁶ Достаточные условия экстремума функции многих переменных подробно изучаются в курсе математического анализа.

Параметр регуляризации $\alpha = \alpha(\delta)$ находим из условия

$$\phi(\alpha) \equiv \|\hat{A}u_\alpha - f_\delta\|^2 - \delta^2 = 0. \quad (14.9)$$

В сделанных предположениях, с учетом (14.8) функция $\phi(\alpha)$ имеет вид:

$$\phi(\alpha) = \alpha^2 \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{(\lambda_i^2 + \alpha)^2} (f_\delta, w_i)^2 - \delta^2. \quad (14.10)$$

Несложно установить свойства функции $\phi(\alpha)$:

$$\phi'(\alpha) > 0, \quad \alpha \in (0, \infty), \quad \phi(0) = -\delta^2 < 0, \quad \phi(\alpha) \rightarrow \|f_\delta\|^2 - \delta^2 > 0, \quad \alpha \rightarrow \infty.$$

Отсюда следует, что уравнение (14.9) имеет единственное решение, которое может быть найдено тем или иным численным методом.

Свойства функции $\alpha = \alpha(\delta)$ также устанавливаются из (14.10):

- 1) $\alpha(\delta) \rightarrow 0$ при $\delta \rightarrow 0$;
- 2) при малых α имеем $\delta/\alpha(\delta) \rightarrow \text{const}$, так что при $\delta \rightarrow 0$ выполняется

$$\frac{\delta^2}{\alpha(\delta)} \rightarrow 0. \quad (14.11)$$

Покажем, что найденное (регуляризованное) решение устойчиво. Действительно, в силу (14.8) находим:

$$\|\delta u_\alpha\|^2 = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\lambda_i^2}{(\lambda_i^2 + \alpha)^2} (\delta f_\delta, w_i)^2. \quad (14.12)$$

Поскольку

$$\frac{\lambda_i}{\lambda_i^2 + \alpha} = \frac{1}{\lambda_i + (\alpha/\lambda_i)} = \frac{1}{(\sqrt{\lambda_i} - \sqrt{(\alpha/\lambda_i)})^2 + 2\sqrt{\alpha}} \leq \frac{1}{2\sqrt{\alpha}},$$

получаем оценку вариации решения $\|\delta u_\alpha\|$ при вариации δf_δ правой части (14.2):

$$\|\delta u_\alpha\|^2 \leq \frac{1}{4\alpha} \sum_{i=1}^{\infty} (\delta f_\delta, w_i)^2 \leq \frac{\delta^2}{4\alpha}.$$

В силу (14.11) имеем $\|\delta u_\alpha\| \rightarrow 0$ при $\delta \rightarrow 0$, так что найденное решение устойчиво.

Вопросы для самоконтроля

1. В каких случаях решение обратной задачи методом минимизации невязки может привести к неудовлетворительному результату?
2. К каким проблемам приводит тот факт, что исходные данные при решении обратной задачи заданы приближенно?
3. Что такое упрощенная регуляризация?
4. Какими свойствами должен обладать оператор \hat{A} , чтобы в задаче $\hat{A}u = f$ можно было бы применить упрощенную регуляризацию?
5. Возможно ли применение упрощенной регуляризации, если оператор \hat{A} не эрмитов?
6. Дайте определение положительно определенного эрмитова оператора.
7. Возможно ли применение упрощенной регуляризации, если оператор \hat{A} не является положительно определенным?
8. Как необходимо модифицировать исходную задачу $\hat{A}u = f$ для применения метода упрощенной регуляризации, если оператор \hat{A} не является эрмитовым?
9. Что такое метод регуляризации Тихонова?
10. Что такое регуляризующий оператор?
11. Как метод регуляризации Тихонова связан с методом неопределенных множителей Лагранжа?
12. Из какого условия находится параметр регуляризации в методе регуляризации Тихонова?
13. Покажите на примере алгоритм нахождения параметра регуляризации в методе Тихонова.
14. Какими свойствами обладает параметр регуляризации при повышении точности задания правой части? Покажите на примере.

Литература: [1, 13, 14].

Лекция 15

Задачи компьютерной томографии. I

Постановка задач в томографии. Преобразование Радона. Явная реконструкция изображения по тени. Некорректность.

Как отмечалось во вводной лекции, термином «томография» в самом широком смысле объединены методы получения изображения внутренних областей непрозрачных тел. Рассмотрим математические аспекты таких методов. Напомним, интенсивности пучков излучения (рентгеновского, например) I_{in} и I_{out} на входе и выходе соответственно связаны законом Бугера – Бэра:

$$I_{out} = I_{in} \exp \left(- \int_a^b \mu(x) dx \right).$$

Таким образом, возникает задача о восстановлении коэффициента поглощения $\mu(x)$, несущего информацию о структуре объекта, по его интегралу – в данном случае измеримой величины $-\ln(I_{out}/I_{in})$. В итоге мы приходим к такому варианту формулировки математической задачи томографии: необходимо восстановить функцию $g(x, y)$, называемую изображением, по функции $\tilde{g}(R, \theta)$, называемой тенью. Тень связана с изображением преобразованием \hat{T} :

$$\tilde{g}(R, \theta) = \hat{T}g(x, y) \equiv \int_{L(R, \theta)} g(x, y) dl, \quad (15.1)$$

где интегрирование ведется по прямой $L(R, \theta)$, задаваемой уравнением

$$x \cos \theta + y \sin \theta = R, \quad R \in (-\infty, \infty), \quad \theta \in [0, \pi).$$

Мы предполагаем также, что функция $g(x, y)$ имеет компактный носитель в плоскости переменных (x, y) , а функция $\tilde{g}(R, \theta)$ – компактный носитель по переменной R .

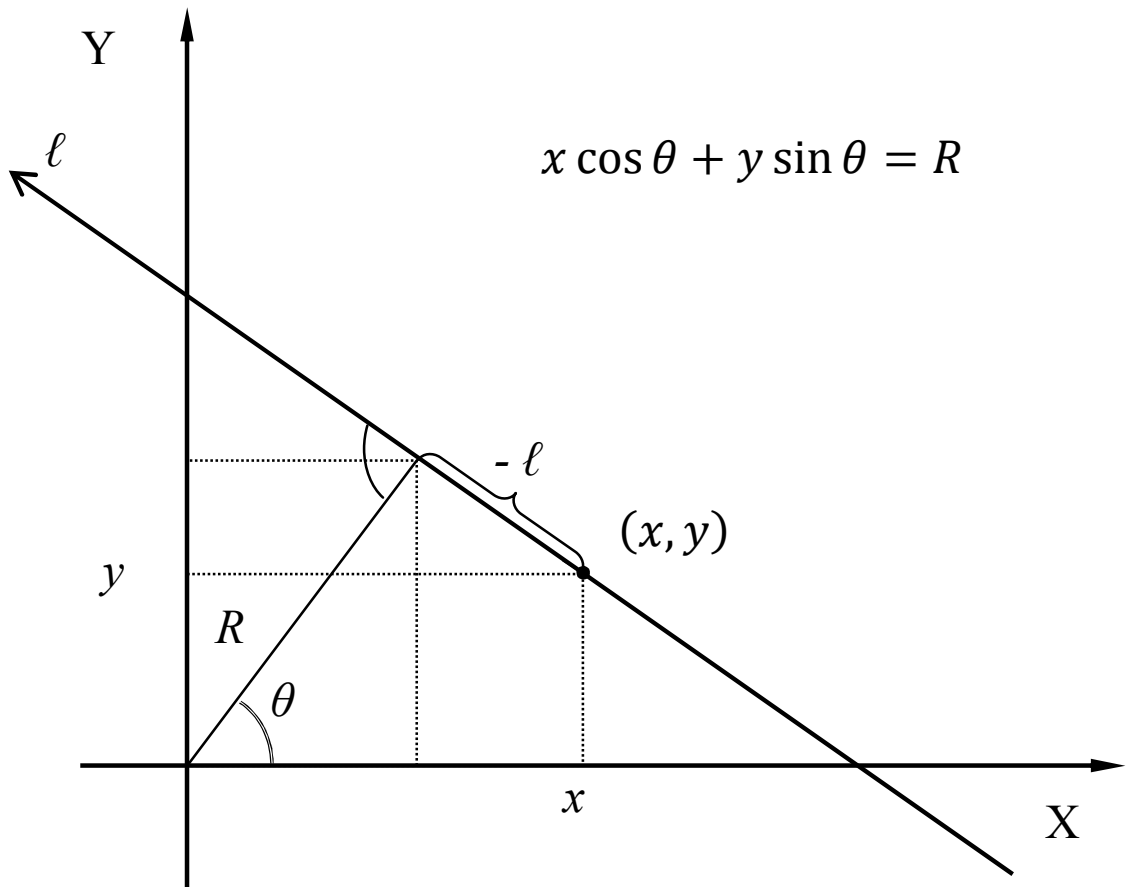


Рис. 4: Прямая, вдоль которой осуществляется сканирование изображения

Итак, мы имеем классическую обратную задачу вида (8.1):

$$\hat{T}g = \tilde{g}.$$

Построим оператор \hat{T}^{-1} , т. е. выведем явную формулу, определяющую изображение $g(x, y)$ по тени $\tilde{g}(R, \theta)$.

Рассмотрим преобразование Фурье функции $\tilde{g}(R, \theta)$ по переменной R . Далее мы будем обозначать Фурье-образы функций g и \tilde{g} заглавными латинскими буквами, G и \tilde{G} соответственно. С учетом того, что координаты точки (x, y) на прямой сканирования выражаются через параметры R и l (см. рис. 4) по формулам

$$\begin{aligned} x &= R \cos \theta - l \sin \theta, \\ y &= R \sin \theta + l \cos \theta, \end{aligned}$$

имеем:

$$\begin{aligned}\tilde{G}(\rho, \theta) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\rho R} \tilde{g}(R, \theta) dR = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\rho R} \left[\int_{L(R, \theta)} g(x, y) dl \right] dR = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\rho R} g(R \cos \theta - l \sin \theta, R \sin \theta + l \cos \theta) dR dl. \quad (15.2)\end{aligned}$$

Перейдем в последнем интеграле формулы (15.2) от переменных R, l к переменным u, v , таким, что

$$u = R \cos \theta - l \sin \theta, \quad v = R \sin \theta + l \cos \theta.$$

В этом случае $R = u \cos \theta + v \sin \theta$. Соответствующий якобиан преобразования здесь равен единице, поэтому в итоге получаем

$$\tilde{G}(\rho, \theta) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\rho(u \cos \theta + v \sin \theta)} g(u, v) du dv = G(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta). \quad (15.3)$$

Таким образом, мы установили простую связь между Фурье-образами изображения и тени. Напомним, что здесь $\rho \in (-\infty, \infty)$ и $\theta \in [0, \pi)$. Чтобы восстановить изображение, необходимо выполнить обратное преобразование Фурье. Для этого введем новые переменные:

$$\xi = \rho \cos \theta, \quad \eta = \rho \sin \theta.$$

Поскольку $\rho \in (-\infty, \infty)$ и $\theta \in [0, \pi)$, обратное преобразование выглядит так:

$$\rho = \operatorname{sgn}(\eta) \sqrt{\xi^2 + \eta^2}, \quad \theta = \arctan(\eta/\xi),$$

так что $\text{sgn}(\eta) = \text{sgn}(\rho)$. В итоге для изображения $g(x, y)$ находим:

$$\begin{aligned}
g(u, v) &= \frac{1}{4\pi^2} \iint_{-\infty}^{\infty} G(\xi, \eta) e^{i(u\xi + v\eta)} d\xi d\eta = \\
&= \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} d\rho \int_0^{\pi} d\theta |\rho| G(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) e^{i\rho(u \cos \theta + v \sin \theta)} = \\
&= \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} d\rho \int_0^{\pi} d\theta |\rho| \tilde{G}(\rho, \theta) e^{i\rho(u \cos \theta + v \sin \theta)} = \\
&= \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} d\rho \int_0^{\pi} d\theta \int_{-\infty}^{\infty} dR |\rho| \tilde{g}(R, \theta) e^{i\rho(u \cos \theta + v \sin \theta - R)}. \quad (15.4)
\end{aligned}$$

Таким образом, мы получили явный вид оператора \hat{T}^{-1} – оператора, восстанавливающего изображение по тени [15]. Запишем формулу (15.4) в несколько ином виде. Действительно, используя тот факт, что

$$\rho e^{-i\rho R} = i \frac{\partial}{\partial R} e^{-i\rho R},$$

а также предположение о компактности носителя тени, находим после интегрирования по частям:

$$g(u, v) = \frac{-i}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} d\rho \int_0^{\pi} d\theta \int_{-\infty}^{\infty} dR \text{sgn}(\rho) \frac{\partial}{\partial R} \tilde{g}(R, \theta) e^{i\rho(u \cos \theta + v \sin \theta - R)}.$$

Далее, используя формулу преобразования Фурье для функции $\text{sgn}(\rho)$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \text{sgn}(\rho) e^{i\rho x} d\rho = \mathcal{P} \frac{2i}{x},$$

выполняя, после интегрирования по переменной ρ , в интеграле по переменной R замену переменных

$$-(u \cos \theta + v \sin \theta) + R \longrightarrow R', \quad R' \rightarrow R,$$

получаем окончательное выражение:

$$g(u, v) = \frac{1}{2\pi^2} \int_0^\pi d\theta \int_{-\infty}^{\infty} dR \mathcal{P} \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} \tilde{g}(R - (u \cos \theta + v \sin \theta), \theta). \quad (15.5)$$

Символ \mathcal{P} говорит здесь о том, что несобственный интеграл по переменной R понимается в смысле главного значения Коши:

$$\int_{-\infty}^{\infty} dR \mathcal{P} \frac{1}{R} f(R) dR = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left(\int_{-\infty}^{-\epsilon} dR \frac{1}{R} f(R) dR + \int_{\epsilon}^{\infty} dR \frac{1}{R} f(R) dR \right).$$

Формула (15.5), так же, как и формула (15.4), представляющая явный вид оператора \hat{T}^{-1} , показывает, что данный оператор не является ограниченным. Поэтому задача не является корректной. Способы построения решения такой задачи мы рассмотрим в следующей лекции.

Вопросы для самоконтроля

1. Какую задачу решает компьютерная томография непрозрачных тел?
2. Сформулируйте закон Бугера – Бэра.
3. Что такое коэффициент поглощения?
4. Может ли коэффициент поглощения зависеть от координаты?
5. Сформулируйте математическую задачу компьютерной томографии.
6. Что при формулировке математической задачи компьютерной томографии называется тенью?
7. Что при формулировке математической задачи компьютерной томографии называется изображением?
8. Запишите уравнение, связывающее тень и изображение в задаче компьютерной томографии.
9. Как связаны Фурье-образы тени и изображения в задаче компьютерной томографии?
10. Имеет ли обратная задача компьютерной томографии явное решение?
11. По какой причине явное решение задачи компьютерной томографии не пригодно для восстановления изображения по тени?
12. Является ли оператор, восстанавливающий изображение по тени в задаче компьютерной томографии, ограниченным?

Литература: [1, 15–17].

Лекция 16

Задачи компьютерной томографии. II

Методы решения задач компьютерной томографии. Сведение задачи к интегральному уравнению. Алгоритмы восстановления изображения по тени.

В прошлой лекции было показано, что задача компьютерной томографии – восстановление изображения по тени – является некорректной, хотя может быть решена явно. В данной лекции мы рассмотрим способы построения решения такой задачи. Для этого мы сведем рассматриваемую задачу к интегральному уравнению. Введем оператор \hat{T}' :

$$\hat{T}'\tilde{g} = s(x, y) \equiv \int_0^\pi \tilde{g}(x \cos \theta + y \sin \theta, \theta) d\theta. \quad (16.1)$$

Заметим, что формулу (15.1) можно записать в виде

$$\tilde{g}(R, \theta) = \hat{T}g(x, y) = \iint_{-\infty}^{\infty} g(\xi, \eta) \delta(\xi \cos \theta - \eta \sin \theta - R) d\xi d\eta, \quad (16.2)$$

где $\delta(x)$ – δ -функция Дирака, определенная на функциях из пространства Шварца \mathcal{S} соотношением

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x - x_0) f(x) dx = f(x_0), \quad f \in \mathcal{S}.$$

δ -функция принадлежит к классу *обобщенных функций медленного роста*⁷. Подействуем оператором \hat{T}' на левую и правую части формулы (16.2). Имеем:

⁷ Изложение строгой теории таких функций выходит за рамки нашего курса.

$$\begin{aligned} \hat{T}'\hat{T}g(x, y) &\equiv \hat{K}g(x, y) = \\ &= \int_0^\pi \int_{-\infty}^\infty \int_{-\infty}^\infty g(\xi, \eta) \delta((\xi - x) \cos \theta - (\eta - y) \sin \theta) d\xi d\eta d\theta. \end{aligned} \quad (16.3)$$

Пусть дифференцируемая функция $F(x)$ имеет на интервале (a, b) единственный нуль x_0 первого порядка. Тогда, как известно из теории обобщенных функций, справедлива формула

$$\delta(F(x)) = \frac{1}{|F'(x_0)|} \delta(x - x_0), \quad x \in (a, b).$$

Применим данное правило к функции $F(\theta) = (\xi - x) \cos \theta - (\eta - y) \sin \theta$. Тогда после интегрирования по переменной θ получаем:

$$\hat{K}g(x, y) = \int_{-\infty}^\infty \int_{-\infty}^\infty \frac{g(\xi, \eta) d\xi d\eta}{\sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2}} = s(x, y). \quad (16.4)$$

Как мы уже отмечали в прошлых лекциях, задача о решении интегрального уравнения такого вида не является корректной. Рассмотрим решение данного уравнения и проблемы, которые могут при этом возникнуть.

Как известно, преобразование Фурье свертку функций отображает в произведение их Фурье-образов. Переходя в уравнении (16.4) к Фурье-образам, находим:

$$K(w_1, w_2)G(w_1, w_2) = S(w_1, w_2). \quad (16.5)$$

Здесь

$$K(w_1, w_2) = \int_{-\infty}^\infty \int_{-\infty}^\infty \frac{e^{-i(w_1x + w_2y)}}{\sqrt{x^2 + y^2}} dx dy = \frac{2\pi}{\sqrt{w_1^2 + w_2^2}}.$$

Отсюда, выполняя обратное преобразование Фурье, формально находим:

$$\begin{aligned} g(x, y) &= \frac{1}{4\pi^2} \iint_{-\infty}^{\infty} G(w_1, w_2) e^{i(xw_1 + yw_2)} dw_1 dw_2 = \\ &= \frac{1}{8\pi^3} \iint_{-\infty}^{\infty} \left(\sqrt{w_1^2 + w_2^2} \right) S(w_1, w_2) e^{i(xw_1 + yw_2)} dw_1 dw_2. \end{aligned} \quad (16.6)$$

Проблема заключается в том, что функция $(\sqrt{w_1^2 + w_2^2})S(w_1, w_2)$ может не принадлежать пространству $L_2(\mathbf{R}_2)$. Это происходит в том числе из-за того, что функция $s(x, y)$ известна не точно, а с некоторой погрешностью δ . Простейший способ регуляризовать выражение (16.6) – это ввести в подынтегральное выражение в правой части в качестве множителя некоторую функцию $f(\alpha; w_1, w_2)$, $\alpha \in [0, \infty)$, $(w_1, w_2) \in \mathbf{R}_2$, которая обладает следующими свойствами:

- 1) $0 \leq f(\alpha; w_1, w_2) \leq 1$;
- 2) $\forall \alpha \neq 0$ справедливо $f(\alpha; w_1, w_2) \in L_2(\mathbf{R}_2)$;
- 3) $\forall \alpha \neq 0$ справедливо

$$\left(\sqrt{w_1^2 + w_2^2} \right) S(w_1, w_2) f(\alpha; w_1, w_2) \in L_2(\mathbf{R}_2);$$

- 4) $\lim_{\alpha \rightarrow 0} f(\alpha; w_1, w_2) = 1$, причем сходимость к нулю равномерная;
- 5) $\lim_{\alpha \rightarrow \infty} f(\alpha; w_1, w_2) = 0$, причем сходимость к нулю равномерная на любом замкнутом ограниченном подмножестве $D \subset \mathbf{R}_2$, таком, что $0 \notin D$.

Такую функцию будем называть *стабилизирующим множителем*. Рассмотрим различные варианты выбора функции $f(\alpha; w_1, w_2)$.

Пример 16.1.

$$f(\alpha; w_1, w_2) = \exp(-\alpha(w_1^2 + w_2^2)).$$

Пример 16.2.

$$f(\alpha; w_1, w_2) = \begin{cases} 1, & |w_1^2 + w_2^2| \leq \frac{1}{\alpha}, \\ 0, & |w_1^2 + w_2^2| > \frac{1}{\alpha}. \end{cases}$$

Пример 16.3. Пусть стабилизирующий множитель имеет вид

$$f(\alpha; w_1, w_2) = \frac{1}{1 + \alpha(w_1^2 + w_2^2)(1 + (w_1^2 + w_2^2)^2)}.$$

В этом случае мы можем записать явное выражение для искомой функции $g(x, y)$ в форме

$$g(x, y) = \iint_{-\infty}^{\infty} L(x - \xi, y - \eta) s_\delta(\xi, \eta) d\xi d\eta, \quad (16.7)$$

где

$$L(x, y) = \frac{1}{(2\pi)^2} \iint_{-\infty}^{\infty} \frac{\sqrt{w_1^2 + w_2^2} e^{i(xw_1 + yw_2)}}{1 + \alpha(w_1^2 + w_2^2)(1 + (w_1^2 + w_2^2)^2)} dw_1 dw_2.$$

В правой части (16.7) мы учли тот факт, что известная функция $s(\xi, \eta)$ задана с некоторой точностью δ .

Таким образом, мы представили решение задачи (15.1) в регуляризованном виде

$$g_\alpha = \hat{\mathcal{R}}(\alpha) s_\delta. \quad (16.8)$$

Оператор $\hat{\mathcal{R}}(\alpha)$ может быть построен так, как описано выше, по функции $f(\alpha; w_1, w_2)$, в том числе одной из тех, что приведены в примерах. Функция $s_\delta(x, y)$ вычисляется по измеряемой тени \tilde{g} в соответствии с формулой (16.1). Подводя итог, приведем основные пункты алгоритма восстановления изображения по тени:

1) выбираем значение α_0 так, что при $\alpha = \alpha_0$ выполняется

$$\rho(\alpha) \equiv \Delta(\alpha) - \delta > 0;$$

2) вычисляем g_α при $\alpha = \alpha_0$ по формуле (16.8);

3) решаем уравнение $\rho(\alpha) = 0$ при помощи той или иной итерационной процедуры, вычисляя при каждой итерации функцию g_α .

Вопросы для самоконтроля

1. Почему явное аналитическое решение задачи компьютерной томографии не пригодно для практического применения?
2. К какому интегральному уравнению может быть сведена задача компьютерной томографии?
3. Как преобразование Фурье преобразует свертку двух функций?
4. Как определяется δ -функция Дирака?
5. Какие проблемы возникают при решении интегрального уравнения задачи компьютерной томографии?
6. Что такое стабилизирующий множитель в интегральном уравнении задачи компьютерной томографии?
7. Зачем нужен стабилизирующий множитель в интегральном уравнении задачи компьютерной томографии?
8. Приведите основные пункты алгоритма восстановления изображения по тени.

Литература: [1, 15–17].

Лекция 17*

Обратная задача Штурма – Лиувилля в пространстве $L_2[\mathbb{R}]$

Аналитические свойства решений Йоста и коэффициентов матрицы перехода. Обратная задача Штурма – Лиувилля на всей оси. Система интегральных уравнений для восстановления коэффициентной функции по данным рассеяния. Безотражательные «потенциалы».

В данной лекции мы рассмотрим способ аналитического решения обратной задачи Штурма – Лиувилля на всей вещественной оси, основанный на выводе системы сингулярных интегральных уравнений. Данный способ основан на изучении аналитических свойств в комплексной плоскости переменной k функций, введенных в лекции 6. Используя интегральную формулу Коши (6.5), можно записать замкнутую систему интегральных уравнений, решение которой и означает решение обратной задачи.

Для того чтобы записать данную систему, определим функции

$$\chi_-(x, k) = \psi(x, k) \exp(-ikx), \quad \chi_+(x, k) = \varphi(x, k) \exp(ikx),$$

где, напомним, функции $\psi(x, k)$ и $\varphi(x, k)$ – решения Йоста уравнения (6.1).

Аналитические свойства функций $\chi_{\pm}(x, k)$ наиболее просто можно установить, если записать *интегральные уравнения*, которым данные функции удовлетворяют. Такие интегральные уравнения будут учитывать как тот факт, что функции $\psi(x, k)$ и $\varphi(x, k)$ являются решениями дифференциального уравнения (6.1), так и тот факт, что эти функции удовлетворяют граничным условиям для решений Йоста. Выведем указанное уравнение на примере функции $\chi_-(x, k)$. Рассмотрим решение (*функцию Грина*) неоднородного уравнения

$$G''(x, k) + k^2 G(x, k) = \delta(x), \quad (17.1)$$

* Материал лекции является дополнительным. Как основной данный материал излагается при объеме курса 34 академических часа.

где $\delta(x)$ – дельта-функция Дирака. Напомним, данная функция относится к классу обобщенных функций медленного роста. Здесь мы используем тот факт, что для достаточно широкого класса дифференцируемых функций $f(x)$ выполняются свойства

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x-a)dx = f(a), \quad \theta'(x) = \delta(x), \quad (17.2)$$

где $\theta(x)$ – функция Хевисайда: $\theta(x) \equiv 1$ при $x \geq 0$ и $\theta(x) \equiv 0$ при $x < 0$. Символ ' означает обобщенную производную. Решение уравнения (17.1), удовлетворяющее условию $G(x, k) \equiv 0$ при $x > 0$, есть

$$G(x, k) = -\frac{1}{k}\theta(-x) \sin kx. \quad (17.3)$$

Таким образом, решение Йоста $\psi(x, k)$ удовлетворяет интегральному уравнению

$$\begin{aligned} \psi(x, k) &= e^{-ikx} + \int_{-\infty}^{\infty} G(x-y)u(y)\psi(y, k)dy = \\ &= e^{-ikx} - \frac{1}{k} \int_x^{\infty} \sin k(x-y)u(y)\psi(y, k)dy. \end{aligned}$$

Переходя к функции $\chi_-(x, k) = \psi(x, k) \exp(ikx)$, получаем уравнение

$$\chi_-(x, k) = 1 - \frac{1}{2ik} \int_x^{\infty} [e^{2ik(x-y)} - 1]u(y)\chi_-(y, k)dy. \quad (17.4)$$

Выполняя итерационную процедуру, мы можем найти функцию $\chi_-(x, k)$ в виде формального⁸ ряда

$$\begin{aligned} \chi_-(x, k) &= 1 - \frac{1}{2ik} \int_x^{\infty} [e^{2ik(x-y)} - 1]u(y)dy + \\ &+ \frac{1}{(2ik)^2} \int_x^{\infty} [e^{2ik(x-y)} - 1]u(y) \left(\int_y^{\infty} [e^{2ik(y-z)} - 1]u(z)dz \right) dy + \dots \end{aligned} \quad (17.5)$$

Отсюда видно, что если мы допускаем, что $k = k_1 + ik_2$, где k_1, k_2 – вещественные числа, то интегралы во всех слагаемых ряда (17.5) будут сходиться

⁸ Сходимость ряда мы здесь не исследуем.

при $k_2 \leq 0$ и расходятся при $k_2 > 0$. Поэтому функция $\chi_-(x, k)$ аналитически продолжается в нижнюю (\mathbb{C}^-) комплексную полуплоскость переменной k (и не может быть продолжена в верхнюю!). В силу определения функции $\chi_-(x, k)$ такое же утверждение об аналитичности справедливо для функции Йоста $\psi(x, k)$.

Из формулы (17.5) следует асимптотика функции $\chi_-(x, k)$ при $|k| \rightarrow \infty$:

$$\chi_-(x, k) = 1 + \frac{1}{2ik} \int_x^\infty u(y) dy + \mathcal{O}\left(\frac{1}{k^2}\right). \quad (17.6)$$

Аналогично можно показать, что функция $\chi_+(x, k) = \varphi(x, k) \exp(ikx)$ (и, следовательно, функция Йоста $\varphi(x, k)$) аналитически продолжается только в верхнюю (\mathbb{C}^+) комплексную полуплоскость переменной k .

Используя установленные аналитические свойства решений Йоста и формулу (6.2), можно установить аналитические свойства функции $a(k)$. Действительно, для вронскиана $W[\varphi, \bar{\psi}]$ имеем:

$$\begin{aligned} W[\varphi, \bar{\psi}] &= \varphi(\partial\bar{\psi}/\partial x) - (\partial\varphi/\partial x)\bar{\psi} = \\ &= (a(k)\psi - b(k)\bar{\psi})(\partial\bar{\psi}/\partial x) - (a(k)(\partial\psi/\partial x) - b(k)(\partial\bar{\psi}/\partial x))\bar{\psi} = 2ika(k). \end{aligned}$$

Отсюда следует аналитичность функции $a(k)$ в верхней комплексной полуплоскости \mathbb{C}^+ . Аналогично доказывается, что функция $b(k)$ не может быть аналитически продолжена с вещественной оси в комплексную плоскость.

Определим функцию

$$\Phi(x, k) = \begin{cases} \chi_+(x, k)/a(k), & \text{если } \operatorname{Im} k > 0, \\ \chi_-(x, k), & \text{если } \operatorname{Im} k < 0. \end{cases} \quad (17.7)$$

Поскольку функция $a(k)$ имеет простые нули, построенная функция $\Phi(x, k)$ имеет полюсы в \mathbb{C}^+ и аналитична в \mathbb{C}^- . Как следует из определения функций $\chi_+(x, k)$, $\chi_-(x, k)$ и формулы (6.2), функция $\Phi(x, k)$ имеет скачок на вещественной оси, равный $r(k)\bar{\chi}_-(x, k) \exp[2ikx]$. Заметим, что $\chi_\pm(x, k) \rightarrow 1$ при $|k| \rightarrow \infty$, так что функция $\Phi(x, k) - 1$ является убывающей во всей комплексной плоскости при $|k| \rightarrow \infty$. Пусть, например, $\operatorname{Im} k > 0$. Тогда в силу *интегральной формулы Коши* имеем:

1) если контур интегрирования проходит по вещественной оси от $-\infty$ до $+\infty$ (со стороны \mathbb{C}^+), огибает полюсы и замыкается при $|k| \rightarrow \infty$:

$$\Phi(x, k) - 1 = \sum_{j=1}^N \frac{\Omega_n(x)}{k - i\alpha_n} + \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\Phi(x, s) - 1}{s - k} ds.$$

Здесь мы ввели обозначение для вычетов данной функции в точках $k = i\kappa_n$:

$$\Omega_n(x) = \operatorname{Res}_{k=i\kappa_n} [\Phi(x, k) - 1];$$

2) если контур интегрирования проходит по вещественной оси от $+\infty$ до $-\infty$ (со стороны \mathbb{C}^-) и замыкается при $|k| \rightarrow \infty$:

$$0 = -\frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\Phi(x, s) - 1}{s - k} ds.$$

Отсюда находим

$$\Phi(x, k) - 1 = \sum_{j=1}^N \frac{\Omega_n(x)}{k - i\kappa_n} + \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{r(s)\bar{\chi}_-(x, s) \exp[2isx]}{s - k} ds. \quad (17.8)$$

Такую же формулу получаем в предположении $\operatorname{Im} k < 0$.

В силу определения функции $\Phi(x, k)$, для вычетов $\Omega_n(x)$ имеем:

$$\Omega_n(x) = \frac{\chi_+(x, i\kappa_n)}{a'(i\kappa_n)} = \frac{\varphi(x, i\kappa_n) \exp(-\kappa_n x)}{a'(i\kappa_n)}. \quad (17.9)$$

Возвращаясь к формуле (6.2) и учитывая тот факт, что $a(i\kappa_n) = 0$, делаем вывод, что $\varphi(x, i\kappa_n) \propto \bar{\psi}(x, -i\kappa_n)$. Сравнивая асимптотики СФ $\varphi(x)$ и функций $\varphi(x, i\kappa_n)$, $\psi(x, -i\kappa_n)$, находим:

$$\varphi(x, i\kappa_n) = b_n \bar{\psi}(x, -i\kappa_n) = b_n \psi(x, -i\kappa_n).$$

Здесь мы учли, что решения Йоста на мнимой оси вещественны (как это следует из их асимптотик). Продолжая с учетом данного соотношения формулу (17.9), получаем для вычетов:

$$\Omega_n(x) = \frac{b_n \chi_-(x, -i\kappa_n) \exp(-2\kappa_n x)}{a'(i\kappa_n)}.$$

Учитывая определение функции $\Phi(x, k)$, формулу (17.8), при $k = -i\kappa_n$ находим:

$$\begin{aligned} \Omega_n(x) = & \frac{b_n e^{-2\kappa_n x}}{a'(i\kappa_n)} \left\{ 1 + i \sum_{m=1}^N \frac{\Omega_m(x)}{\kappa_n + \kappa_m} + \right. \\ & \left. + \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{r(s)\bar{\chi}_-(x, s) e^{2isx}}{s + i\kappa_n} ds \right\}. \end{aligned} \quad (17.10)$$

Далее, устремляя комплексную переменную k в формуле (17.8) к вещественной оси в нижней полуплоскости \mathbb{C}^- , получаем уравнение

$$\chi_-(x, k) = 1 + \sum_{m=1}^N \frac{\Omega_m(x)}{k - i\kappa_m} + \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{r(s)\bar{\chi}_-(x, s)e^{2isx}}{s - k + i0} ds. \quad (17.11)$$

Можно показать, что система (17.10)–(17.11) однозначно разрешима.

Функция $u(x)$ восстанавливается по найденным из данной системы функциям $\Omega_n(x)$, $\chi_-(x, k)$. Действительно, используя простые формулы

$$\frac{1}{k - i\kappa_m} = \frac{1}{k} \left(1 + \frac{i\kappa_m}{k - i\kappa_m} \right), \quad \frac{1}{s - k + i0} = \frac{1}{k} \left(-1 + \frac{s}{s - k + i0} \right),$$

находим из (17.11) разложение функции $\chi_-(x, k)$ по степеням $1/k$:

$$\chi_-(x, k) = 1 + \frac{1}{k} \left(\sum_{m=1}^N \Omega_m(x) - \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} r(s)\bar{\chi}_-(x, s)e^{2isx} ds \right) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{k^2}\right). \quad (17.12)$$

Сравнивая формулы (17.12) и (17.6), получаем формулу, восстанавливающую коэффициентную функцию $u(x)$:

$$u(x) = \frac{d}{dx} \left(-2i \sum_{m=1}^N \Omega_m(x) + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} r(k)\bar{\chi}_-(x, k)e^{2ikx} dk \right). \quad (17.13)$$

«Потенциалы» – коэффициентные функции $u(x)$, – для которых $r(k) \equiv 0$, называют *безотражательными*. Очевидно, решение обратной задачи для таких потенциалов сводится к решению СЛАУ, к которому в случае $r(k) \equiv 0$ сводится интегральное уравнение (17.10).

Рассмотрим простые примеры безотражательных потенциалов.

Пример 17.1. $N = 1$. В этом случае данные рассеяния содержат две константы, κ_1 и b_1 . Система (17.10)–(17.11) сводится к уравнению

$$\Omega_1(x) = \frac{b_1 e^{-2\kappa_1 x}}{a'(i\kappa_1)} \left\{ 1 + i \frac{\Omega_1(x)}{2\kappa_1} \right\}.$$

В соответствии с формулой (6.9), в рассматриваемом случае

$$a(k) = \frac{k - i\kappa_1}{k + i\kappa_1}.$$

В итоге находим

$$u(x) = 4 \frac{d}{dx} \left(\frac{\kappa_1 b_1 e^{-2\kappa_1 x}}{1 + 2\kappa_1 b_1 e^{-2\kappa_1 x}} \right). \quad (17.14)$$

Обратим внимание, что функция под знаком производной в формуле (17.14) монотонно убывающая, так что всюду $u(x) < 0$.

Пример 17.2. $N = 2$. Данные рассеяния содержат четыре константы: СЧ κ_1, κ_2 и дополнительные константы b_1, b_2 . В данном случае

$$a(k) = \frac{(k - i\kappa_1)(k - i\kappa_2)}{(k + i\kappa_1)(k + i\kappa_2)},$$

так что уравнения (17.10) сводятся (при каждом x) к СЛАУ 2-го порядка относительно неизвестных $\Omega_1(x)$ и $\Omega_2(x)$:

$$\begin{aligned} \left[\frac{(\kappa_1 - \kappa_2)e^{2\kappa_1 x}}{2\kappa_1(\kappa_1 + \kappa_2)b_1} + \frac{1}{2\kappa_1} \right] \Omega_1(x) + \frac{1}{\kappa_1 + \kappa_2} \Omega_2(x) &= 1, \\ \frac{1}{\kappa_1 + \kappa_2} \Omega_1(x) + \left[\frac{1}{2\kappa_2} - \frac{(\kappa_1 - \kappa_2)e^{2\kappa_2 x}}{2\kappa_2(\kappa_1 + \kappa_2)b_2} \right] \Omega_2(x) &= 1. \end{aligned}$$

Так же, как и в случае спектральной задачи Штурма – Лиувилля на интервале, обратная задача является здесь некорректной.

Вопросы для самоконтроля

1. Дайте определение решений Йоста для уравнения Штурма – Лиувилля на всей вещественной оси.
2. Какие функции используются для изучения аналитических свойств решений Йоста?
3. Что такое функция Грина для ОДУ второго порядка с постоянными коэффициентами?
4. Запишите интегральное уравнение, которому удовлетворяет решение Йоста $\psi(x, k)$.
5. Запишите интегральное уравнение, которому удовлетворяет функция $\chi_-(x, k)$.
6. Какова асимптотика вспомогательных функций $\chi_{\pm}(x, k)$ при $x \rightarrow \pm\infty$?

7. Укажите область аналитичности функций $\chi_{\pm}(x, k)$.
8. Какова асимптотика вспомогательных функций $\chi_{\pm}(x, k)$ при $|k| \rightarrow \infty$ в области их аналитичности?
9. К какой системе уравнений сводится решение обратной задачи Штурма – Лиувилля в общем случае? Назовите тип системы.
10. Какие коэффициентные функции («потенциалы») называют безотражательными?
11. К какой системе сводится общая система сингулярных интегральных уравнений обратной задачи Штурма – Лиувилля для безотражательных «потенциалов»?
12. Приведите примеры простейших безотражательных «потенциалов».

Литература: [2, 9–11].

Практические занятия

Типовые задания и методические указания по выполнению и оформлению

Далее приведены типичные задания для выполнения на практических занятиях (частично), а также для самостоятельной внеаудиторной работы. В конце каждого задания указан раздел лекционного материала, в котором содержится алгоритм его выполнения. Указаны также требования к оформлению работы.

Задание Вариант Студент

- На интервале $x \in [-a, a]$ дана функция $V(x)$. Аппроксимировать данную функцию кусочно-постоянной функцией $\tilde{V}(x)$, считая, что $V(x)$ известна с относительной точностью ϵ_2 по норме пространства $L_p([-a, a])$.

Форма представления результатов (отчет по заданию)

(α) Распечатанный отчет (из файла в формате MS Word), в котором содержится следующая информация:

1. Название института.
2. Название кафедры.
3. Название дисциплины.
4. Ф. И. О. студента, номер группы.
5. Фраза «Задание 1, вариант ... (номер варианта)».
6. Данные варианта в формате $a = \dots, \epsilon_2 = \dots$ и т. д.

7. Наименование и версия ПО, которое использовалось при написании программы.
 8. Графики функций $V(x)$ и $\tilde{V}(x)$.
 9. Фраза «Условия задания требуют разбиения отрезка на m интервалов» (m – найденное вами в задаче число интервалов, на каждом из которых функция $\tilde{V}(x)$ постоянна).
- (β) Файл с компьютерной программой на языке Python 3.X, которая при запуске в результате работы выводит указанные пункты отчета. Параметр ϵ_2 должен задаваться пользовательским вводом. Все блоки программы должны быть снабжены **подробными комментариями**.

ВАЖНО! При устном отчете по заданию студент должен:

- a) знать определение нормированного пространства;
- b) приводить примеры нормированных пространств, в том числе функциональных;
- c) знать определения и понимать отличие абсолютной погрешности от относительной погрешности;
- d) продемонстрировать работу программы.

Теоретический материал: лекция 2.

Задание должно быть выполнено в течение 2–3 занятий.

Примеры данных к вариантам задания 1

Вариант

$$1a) \quad a = 3, \quad p = 2, \quad \epsilon_2 \simeq 2,30\%, \quad V(x) = 0,8(x^2 + 1)(x^2 - 9);$$

$$1b) \quad a = 3, \quad p = 1, \quad \epsilon_2 \simeq 1,10\%, \quad V(x) = 0,8(x^2 + 1)(x^2 - 9);$$

$$1c) \quad a = 3, \quad p = \infty, \quad \epsilon_2 \simeq 0,25\%, \quad V(x) = 0,8(x^2 + 1)(x^2 - 9);$$

$$2a) \quad a = 3, \quad p = 2, \quad \epsilon_2 \simeq 2,17\%, \quad V(x) = \begin{cases} -3 + \sqrt{1 - x^2}, & |x| < 1, \\ (3/8)(x^2 - 9), & 1 \leq |x| < 3; \end{cases}$$

$$2b) \quad a = 3, \quad p = 1, \quad \epsilon_2 \simeq 1,22\%, \quad V(x) = \begin{cases} -3 + \sqrt{1 - x^2}, & |x| < 1, \\ (3/8)(x^2 - 9), & 1 \leq |x| < 3; \end{cases}$$

$$2c) \quad a = 3, \quad p = \infty, \quad \epsilon_2 \simeq 0,12\%, \quad V(x) = \begin{cases} -3 + \sqrt{1 - x^2}, & |x| < 1, \\ (3/8)(x^2 - 9), & 1 \leq |x| < 3; \end{cases}$$

$$3a) \quad a = 4, \quad p = 2, \quad \epsilon_2 \simeq 1,23\%, \quad V(x) = \begin{cases} (3/4)x^2 - 6, & |x| < 2, \\ -3, & 2 \leq |x| < 4; \end{cases}$$

$$3b) \quad a = 4, \quad p = 1, \quad \epsilon_2 \simeq 0,75\%, \quad V(x) = \begin{cases} (3/4)x^2 - 6, & |x| < 2, \\ -3, & 2 \leq |x| < 4; \end{cases}$$

$$3c) \quad a = 4, \quad p = \infty, \quad \epsilon_2 \simeq 0,53\%, \quad V(x) = \begin{cases} (3/4)x^2 - 6, & |x| < 2, \\ -3, & 2 \leq |x| < 4; \end{cases}$$

$$4a) \quad a = 4, \quad p = 2, \quad \epsilon_2 \simeq 1,30\%, \quad V(x) = \begin{cases} -2 - \cos(\pi x/2), & |x| < 2, \\ (\cos(\pi x/2) - 1)/2, & 2 \leq |x| < 4; \end{cases}$$

$$4b) \quad a = 4, \quad p = 1, \quad \epsilon_2 \simeq 1,57\%, \quad V(x) = \begin{cases} -2 - \cos(\pi x/2), & |x| < 2, \\ (\cos(\pi x/2) - 1)/2, & 2 \leq |x| < 4; \end{cases}$$

$$4c) \quad a = 4, \quad p = \infty, \quad \epsilon_2 \simeq 0,76\%, \quad V(x) = \begin{cases} -2 - \cos(\pi x/2), & |x| < 2, \\ (\cos(\pi x/2) - 1)/2, & 2 \leq |x| < 4. \end{cases}$$

Задание

2

Вариант

Студент

- Найти с относительной точностью ϵ_1 спектр задачи Штурма – Лиувилля

$$-\frac{d^2\Psi}{dx^2} + V_0\Psi = \lambda\Psi$$

на интервале $x \in [-a, a]$. Здесь $V_0 = \min V(x)$, где $V(x)$ – функция из задания 1, а решение уравнения $\Psi = \Psi(x; \lambda)$ удовлетворяет граничным условиям:

$$\begin{aligned} A_- \Psi'(-a; \lambda) + B_- \Psi(-a; \lambda) &= 0, \\ A_+ \Psi'(a; \lambda) + B_+ \Psi(a; \lambda) &= 0. \end{aligned}$$

Приступить к данному заданию можно только после отчета по заданию 1.

Форма представления результатов (отчет по заданию)

(α) Распечатанный отчет (из файла в формате MS Word), в котором содержится следующая информация:

1. Название института.
2. Название кафедры.
3. Название дисциплины.
4. Ф. И. О. студента, номер группы.
5. Фраза «Задание 2, вариант ... (номер варианта)».
6. Данные варианта в формате $a = \dots, \epsilon_2 = \dots$ и т. д.
7. Наименование и версия ПО, которое использовалось.
8. $\lambda_1 = \dots; \alpha_1 = \dots;$ собственная функция $\Psi_1(x)$.
9. ...
10. $\lambda_N = \dots; \dots; \dots$ (число N определяется точностью вычислений).

(β) Файл с компьютерной программой на языке Python 3.X, которая при запуске в результате работы выводит указанные пункты отчета. Параметр ϵ_1 должен задаваться пользовательским вводом. Все

собственные функции $\Psi_i(x)$ выводить на графики необязательно; достаточно, чтобы программа предусматривала вывод любой функции $\Psi_n(x)$ при пользовательском вводе ее номера n . Все блоки программы должны быть снабжены **подробными комментариями**.

ВАЖНО! При устном отчете по заданию студент должен:

- a) знать и формулировать постановку спектральной задачи Штурма – Лиувилля на интервале;
- b) знать определения собственных функций и собственных чисел линейного (дифференциального) оператора;
- c) знать асимптотику спектральных данных оператора Штурма – Лиувилля на интервале;
- d) знать определения и понимать отличие абсолютной погрешности от относительной погрешности;
- e) продемонстрировать работу программы.

Теоретический материал: лекции 4–5.

Задание должно быть выполнено в течение 2–3 занятий.

Задание

3

Вариант

Студент

- Используя метод «стрельбы», найти с относительной точностью ϵ_1 (см. задание 2) собственные числа λ_i , собственные функции $\Psi_i(x)$ и нормировочные коэффициенты α_i собственных функций задачи Штурма – Ливилля

$$-\frac{d^2\Psi}{dx^2} + V(x)\Psi = \lambda\Psi$$

на интервале $x \in [-a, a]$. Здесь $V(x)$ – функция из задания 1, а решение уравнения $\Psi = \Psi(x; \lambda)$ удовлетворяет граничным условиям из задания 2. Считать, что коэффициентная функция $V(x)$ известна с относительной точностью ϵ_2 по норме пространства $L_p([-a, a])$. Параметры ϵ_2, p, a – см. задание 1.

Приступить к данному заданию можно только после принятых отчетов по заданиям 1, 2, с учетом результатов, полученных при их выполнении.

[!] Для **тестовой проверки** программы использовать результаты задания 2 (полученные без использования метода «стрельбы»), вводя в программу задания 3 постоянную коэффициентную функцию $V(x) = \text{const}$ из задания 2.

Форма представления результатов (отчет по заданию)

(α) Распечатанный отчет (из файла в формате MS Word), в котором содержится следующая информация:

1. Название института.
2. Название кафедры.
3. Название дисциплины.
4. Ф. И. О. студента, номер группы.
5. Фраза «Задание 3, вариант ... (номер варианта)».
6. Данные варианта в формате $a = \dots, \epsilon_2 = \dots$ и т. д.
7. Наименование и версия ПО, которое использовалось.
8. $\lambda_1 = \dots; \alpha_1 = \dots;$ собственная функция $\Psi_1(x)$.

9. $\lambda_2 = \dots$; $\alpha_2 = \dots$; собственная функция $\Psi_2(x)$.
 10. ...
 11. $\lambda_N = \dots$; ...; ... (число N определяется точностью вычислений).
 12. Код программы.
- (β) Файл с компьютерной программой на языке Python 3.X, которая при запуске в результате работы выводит указанные пункты отчета. Параметр ϵ_1 должен задаваться пользовательским вводом. Все собственные функции $\Psi_i(x)$ выводить на графики необязательно; достаточно, чтобы программа предусматривала вывод любой функции $\Psi_n(x)$ при пользовательском вводе ее номера n . Все блоки программы должны быть снабжены **подробными комментариями**.

ВАЖНО! При устном отчете по заданию студент должен:

- a) знать и формулировать постановку спектральной задачи Штурма – Лиувилля на интервале;
- b) знать определения собственных функций и собственных чисел линейного (дифференциального) оператора;
- c) знать основные этапы алгоритма «метод „стрельбы“»;
- d) знать определения и понимать отличие абсолютной погрешности от относительной погрешности;
- e) продемонстрировать работу программы.

Теоретический материал: лекции 4–5.

Задание должно быть выполнено в течение 3–4 занятий.

Задание

4

Вариант

Студент

- Найти поправки первого порядка $\lambda_1^{(1)}$ и $\Psi_1^{(1)}(x)$ по величине ε к собственному значению λ_1 и собственной функции $\Psi_1(x)$ спектра задачи Штурма – Лиувилля

$$-\frac{d^2\Psi}{dx^2} + u(x)\Psi = \lambda\Psi \quad (18.1)$$

на интервале $x \in [-a, a]$, обусловленные возмущением δV коэффициентной функции $u(x)$ вида $\delta V = \varepsilon f(x)$. Рассмотреть случаи:

- a) $u(x) = \min V(x)$;
- b) $u(x) = V(x)$.

Здесь $V(x)$ – функция из задания 1, а решение уравнения (18.1) удовлетворяет граничным условиям задания 2. При нахождении поправки $\Psi_1^{(1)}(x)$ учесть первые n СФ и СЗ (найденных в заданиях 2 и 3 для случаев a) и b) соответственно) .

Приступить к данному заданию можно только после принятых отчетов по заданиям 1, 2, 3, с учетом результатов, полученных при их выполнении.

Форма представления результатов (отчет по заданию)

(α) Распечатанный отчет (из файла в формате MS Word), в котором содержится следующая информация:

1. Название института.
2. Название кафедры.
3. Название дисциплины.
4. Ф. И. О. студента, номер группы.
5. Фраза «Задание 4, вариант ... (номер варианта)».
6. Данные варианта (функция $f(x)$), который был назначен преподавателем.
7. Наименование и версия ПО, которое использовалось.

8. Величина $\lambda_1^{(1)}$ и функция $\Psi_1^{(1)}(x)$ (график и аналитическое выражение) для случаев $a)$ и $b)$.

(β) Файл с компьютерной программой на языке Python 3.X, которая при запуске в результате работы выводит указанные пункты отчета. Все блоки программы должны быть снабжены **подробными комментариями**.

ВАЖНО! При устном отчете по заданию студент должен:

- a) знать и формулировать постановку спектральной задачи Штурма – Лиувилля на интервале;*
- b) знать определения собственных функций и собственных чисел линейного (дифференциального) оператора;*
- c) знать постановку задачи теории возмущений линейных операторов;*
- d) знать, как применяется теория возмущений при решении обратной задачи Штурма – Лиувилля градиентным методом;*
- e) продемонстрировать работу программы.*

Теоретический материал: лекции 4, 9.

Задание должно быть выполнено в течение 1–2 занятий.

Задание

5

Вариант

Студент

- Решить интегральное уравнение Фредгольма I рода

$$\int_{-1}^1 K(t, s)g(s)ds = f(t) \quad (18.2)$$

с ядром

$$K(t, s) = \sum_{n,m=1}^N a_{nm}e^{\sqrt{m}t+\sqrt{n}s} \sin(nt - ms)$$

и заданной правой частью $f(t)$, $t \in [-1, 1]$.

Метод решения – сведение уравнения (18.2) к СЛАУ.

- Найти число обусловленности $\text{Cond}(A)$ матрицы A СЛАУ. При необходимости выполнить упрощенную регуляризацию матрицы СЛАУ.

Форма представления результатов (отчет по заданию)

(α) Распечатанный отчет (из файла в формате MS Word), в котором содержится следующая информация:

1. Название института.
2. Название кафедры.
3. Название дисциплины.
4. Ф. И. О. студента, номер группы.
5. Фраза «Задание 5, вариант ... (номер варианта)».
6. Данные варианта (число N , коэффициенты a_{nm} и правая часть $f(t)$), который был назначен преподавателем.
7. Наименование и версия используемого ПО.
8. Явный вид СЛАУ, соответствующий уравнению (18.2) и конкретному варианту. Матрица A и правая часть СЛАУ должны быть вычислены с точностью 2–3 знаков после запятой.
9. Решение уравнения (18.2) (график и аналитическое выражение).

(β) Файл с компьютерной программой на языке Python 3.X, которая при запуске в результате работы выводит указанные пункты отчета. Все блоки программы должны быть снабжены **подробными комментариями**.

ВАЖНО! При устном отчете по заданию студент должен:

- a) знать формулировку теоремы «Альтернатива Фредгольма»;
- b) знать причину некорректности задачи решения интегрального уравнения Фредгольма I рода;
- c) знать определение числа обусловленности матрицы;
- d) знать метод упрощенной регуляризации при решении СЛАУ с плохо обусловленной матрицей;
- e) знать и приводить примеры норм матриц;
- f) продемонстрировать работу программы.

Теоретический материал: лекции 10, 13.

Задание должно быть выполнено в течение 2–3 занятий.

Наименование отчетных файлов всех заданий:

(α): Группа_Фамилия_№ задания.docx,

(β): Группа_Фамилия_№ задания.py

При указании группы указывается только ее номер, буквенный код не пишется!

Файлы отправляются преподавателю на указанный им электронный адрес. Коды программ могут быть подвергнуты дополнительной проверке, в том числе – на плагиат.

Библиографический список

1. Тихонов, А. Н. Методы решения некорректных задач : [учеб. пособие для вузов по специальности «Прикладная математика»] / А. Н. Тихонов, В. Я. Арсенин. – 2-е изд., перераб. и доп. – Москва : Наука, 1979. – 285 с.
2. Карчевский, М. М. Лекции по уравнениям математической физики: учеб. пособие / М. М. Карчевский. – Изд. 4-е, стер. – Санкт-Петербург [и др.] : Лань, 2023. – 163 с. – URL: e.lanbook.com/book/321200 (дата обращения: 11.01.2023). – Режим доступа: по подписке. – ISBN 978-5-507-46827-0.
3. Рид, М. Методы современной математической физики. Часть 1. Функциональный анализ / М. Рид, Б. Саймон ; пер. с англ. А. К. Погребкова [и др.] ; под ред. М. К. Поливанова. – Москва : Мир, 1977. – 357 с.
4. Филимоненкова, Н. В. Конспект лекций по функциональному анализу : учеб. пособие / Н. В. Филимоненкова. – Санкт-Петербург [и др.] : Лань, 2022. – 168 с. – URL: e.lanbook.com/book/212048 (дата обращения: 11.01.2023). – Режим доступа: по подписке. – ISBN 978-5-8114-1821-3.
5. Стренг, Г. Линейная алгебра и ее применения = Linear algebra and its applications / Г. Стренг ; пер. с англ. Ю. А. Кузнецова, Д. М. Фаге ; под ред. Г. И. Марчука. – Москва : Мир, 1980. – 454 с.
6. Реконструкция изображений / К. Рашфорт, Д. Юла, К. Хенсон [и др.] ; под ред. Г. Старка ; пер. с англ. Д. Б. Аратского [и др.] ; [рус. изд.] под ред. Б. С. Кругликова. – Москва : Мир, 1992. – 635 с. – ISBN 5-03-001869-7.
7. Сизиков, В. С. Прямые и обратные задачи восстановления изображений, спектроскопии и томографии с MatLab : [учебник] / В. С. Сизиков. – Санкт-Петербург [и др.] : Лань, 2022. – 410 с., 8 с. цв. ил. – URL: e.lanbook.com/book/210080 (дата обращения: 11.01.2023). – Режим доступа: по подписке. – ISBN 978-5-8114-2754-3.

8. Левитан, Б. М. Обратные задачи Штурма – Лиувилля / Б. М. Левитан. – Москва : Наука, 1984. – 240 с.
9. Метод обратной задачи рассеяния / В. Е. Захаров, С. В. Манаков, С. П. Новиков, Л. П. Питаевский // Теория солитонов : Метод обратной задачи / В. Е. Захаров, С. В. Манаков, С. П. Новиков, Л. П. Питаевский ; под ред. С. П. Новикова. – Москва, 1980. – Глава 1. – С. 20–111.
10. Привалов, И. И. Введение в теорию функций комплексного переменного : учебник / И. И. Привалов. – Изд. 16-е, стер. – Санкт-Петербург [и др.] : Лань, 2022. – 432 с. – URL: e.lanbook.com/book/193364 (дата обращения: 11.01.2023). – Режим доступа: по подписке. – ISBN 978-5-8114-9392-0.
11. Фаддеев, Л. Д. Лекции по квантовой механике для студентов-математиков / Л. Д. Фаддеев, О. А. Якубовский. – Ленинград : Издательство ЛГУ, 1980. – 200 с.
12. Алифанов, О. М. Экстремальные методы решения некорректных задач и их приложения к обратным задачам теплообмена / О. М. Алифанов, Е. А. Артюхин, С. В. Румянцев. – Москва : Наука, 1988. – 285, [1] с. – ISBN 5-02-013774-X.
13. Эльсгольц, Л. Э. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление : [учебник для физических специальностей университетов] / Л. Э. Эльсгольц. – 2-е изд., стер. – Москва : Наука, 1969. – 424 с. – (Курс высшей математики и математической физики).
14. Самарский, А. А. Численные методы решения обратных задач математической физики : [учеб. пособие] / А. А. Самарский, П. Н. Вабищевич. – Изд. 3-е. – Москва : URSS [и др.], 2009. – 478 с. – ISBN 978-5-382-00990-2.
15. Хелгасон, С. Преобразование Радона = The Radon transform / С. Хелгасон ; пер. с англ. А. Г. Сергеева ; под ред. Б. И. Завьялова. – Москва : Мир, 1983. – 150 с.
16. Тихонов, А. Н. Математические задачи компьютерной томографии / А. Н. Тихонов, В. Я. Арсенин, А. А. Тимонов. – Москва : Наука, 1987. – 159 с. – (Проблемы науки и технического прогресса).
17. Владимиров, В. С. Уравнения математической физики : [учеб. пособие] / В. С. Владимиров. – 3-е изд. – Москва : Наука, 1976. – 527 с.

18. Талалов, С. В. Об одном варианте решения обратной задачи Штурма – Лиувилля градиентными методами // Информационные технологии в моделировании и управлении: подходы, методы, решения : V Всероссийская научная конференция с международным участием, Тольятти, 20–22 апреля 2022 года : сборник материалов / Тольяттинский государственный университет ; отв. за вып. Е. В. Панюкова. – Тольятти, 2022. – С. 111–115. – URL: www.elibrary.ru/item.asp?id=49755539 (дата обращения: 11.12.2022). – Режим доступа: для зарегистрир. пользователей.