МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Тольяттинский государственный университет»

Институт общеинженерной подготовки
(наименование института полностью)

Кафедра «Высшая математика и математическое образование»
(наименование)

44.04.01 Педагогическое образование
(код и наименование направления подготовки)

Математическое образование
(направленность (профиль))

# ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА
# (МАГИСТЕРСКАЯ ДИССЕРТАЦИЯ)

на тему «Методика организации уроков геометрии с использованием пакета «Geogebra» в старших классах общеобразовательной школы»

| | | |
|---|---|---|
| Обучающийся | С.А. Букушкин<br>(Инициалы Фамилия) | (личная подпись) |
| Научный руководитель | канд. пед. наук, доцент, И.В. Антонова<br>(ученая степень (при наличии), ученое звание (при наличии), Инициалы Фамилия) | |

Тольятти 2024

## Оглавление

## Введение

Актуальность и научная значимость настоящего исследования. С каждым годом человечество развивается благодаря современным технологиям все стремительней. Они охватывают все больше сфер жизнедеятельности. В сферах, где было трудно представить применение современных технологий, идет бурный рост их освоения. Одной из таких сфер является педагогика и образование. В настоящее время в образовании современные технологии все шире используются не только при изучении информатики, но и других дисциплин, в том числе математики. Применение новых средств информационных технологий позволяет обучающимся не только более глубоко понять учебный материал, но и повышает у них мотивацию к обучению.

В школьном образовании геометрия занимает одну из ведущих ролей в обучении школьников, в приобретении ими знаний о фигурах и свойствах фигур, а также в применении их для решения геометрических задач. Геометрия всегда была трудной дисциплиной для ее понимания учениками. Если в алгебре всегда есть «готовые формулы» и методы решения определенных задач, то в геометрии ситуация другая. Успех в обучении геометрии зависит от умения учеников проводить анализ условия задачи, от правильного построения фигур. В настоящее время ученики теряют интерес к изучению геометрии. Помочь с решением данной проблемы могут информационные технологии.

В теории и методике обучения математике применение новых средств информационных технологий рассматривались в работах: В.А. Далингера [18]; Т.Ф. Сергеевой, М.В. Шабановой [44]; В.А. Смирнова, И.М. Смирновой [46]-[48]; Г.Б. Шабат [29]; [54] и других. Так, С.Г. Иванов, В.И. Рыжик в журнале «Математика в школе» [25] описывают возможности применения динамической геометрии, в частности программы Geogebra, и включения в образовательный процесс исследовательской деятельности для ослабления кризиса в школьном математическом образовании.

Имеются диссертационные исследованию по теме исследования.

В работе Т.С. Шириковой показана эффективность применения пакета «GeoGebra» при изучении теорем «не только в качестве средства, подводящего учащегося к открытию факта теоремы, но и в качестве средства предварительной проверки истинности гипотез и визуализации шагов доказательства» [57].

В исследовании М.А. Павловой представлена методика исследовательского обучения математике учащихся основной школы во внеурочное время с использованием систем динамической математики для формирования у них универсальных исследовательских действий математика-экспериментатора, где автор описывает методические особенности применения систем динамической геометрии (Cabry, 1986 г.; Живая математика, 1989 г.; GeoNexT, 1999 г.; GeoGebra, 2002 г.; Математический конструктор, 2006 г.; Geometry Expressions, 2008 г. и др.) во внеурочной деятельности школьников. Данные системы позволяют создавать динамические модели геометрических объектов и экспериментировать с ними для развития у обучающихся знаний об их свойствах [35, с. 4-6].

Вместе с этим, в последние годы выпущено немало научных статей и книг на русском языке, где отдельно рассматриваются различные методические аспекты использования пакета Geogebra [1], [21], [34] в образовательном процессе, но этого все еще недостаточно для полного освоения данной программы учителями и школьниками. Отдельно стоит отметить проблему освоения программы учителями, не владеющих информационными технологиями или вовсе не работавших с персональным компьютером.

В статье Ю.В. Абраменковой, О.В. Карлиной [1] описаны приемы применения данного пакета в ходе обучения школьников построению динамических и интерактивных чертежей при решении геометрических задач и доказательстве теорем.

В.А. Епифанцевой [21] указано, что при использовании данной программы в образовательном процессе учитель может рациональнее распределять учебное время на уроке, осуществлять дифференцированный подход к обучению школьников.

Таким образом, интерактивная геометрическая среда, в нашем случае пакет «Geogebra», позволяет не только эффективнее обучать геометрии, сделать процесс обучения более наглядным и увлекательным, но и организовывать исследовательскую деятельность обучающихся на уроках геометрии. Также пакет «Geogebra» помогает им решать геометрические задачи различной сложности, подводить школьников к открыгию фактов при изучении теорем, осуществлять предварительную проверку истинности гипотез и визуализацию шагов доказательства теорем. Основной проблемой применения данной среды является отсутствие или нехватка учебных пособий и выделенных методических основ обучения геометрии с помощью интерактивных геометрических сред, а также отсутствие в данной среде русского языка.

Таким образом, актуальность темы исследования обусловлена сложившимися к настоящему времени противоречием между необходимостью: внедрения интерактивных геометрических сред в процесс обучения геометрии учащихся общеобразовательной школы и недостаточной разработанностью методических основ организации уроков геометрии с их использованием.

Указанные противоречия позволили сформулировать проблему диссертационного исследования: каковы методические особенности организации уроков геометрии с использованием пакета «Geogebra» в старших классах общеобразовательной школы?

Объект исследования: процесс обучения геометрии в старших классах общеобразовательной школы.

Предмет исследования: методика организации уроков геометрии с использованием пакета «Geogebra» в 10-11 классах общеобразовательной школы.

Цель исследования заключается в выявлении методических особенностей организации уроков геометрии с использованием пакета «Geogebra» в старших классах общеобразовательной школы.

Гипотеза исследования основана на предположении о том, что если с учетом выявленных методических особенностей организации уроков геометрии в старших классах общеобразовательной школы с использованием пакета «Geogebra» разработать и внедрить методику организации данных уроков, то это будет способствовать повышению у обучающихся качества математической подготовки и познавательного интереса к изучению геометрии.

Задачи исследования:

1. Раскрыть роль интерактивных геометрических сред в обучении школьников геометрии в общеобразовательной школе.
2. Изучить возможности использования пакета «Geogebra» для организации уроков геометрии в 10-11 классах общеобразовательной школы.
3. Методические особенности организации уроков геометрии с использованием пакета «Geogebra» в старших классах общеобразовательной школы.
4. Описать методику организации уроков геометрии по теме «Конус» с использованием пакета «Geogebra» в общеобразовательной школе.
5. Составить систему задач по теме «Конусы» в рамках технологии развивающего обучения решению задач и информационных технологий.
6. Представить результаты педагогического эксперимента.

Для решения поставленных задач будут применяться следующие методы исследования: анализ научной и учебно-методической литературы;

изучение, наблюдение и обобщение школьной практики; проведение педагогического эксперимента.

Теоретико-методологическую основу данного исследования составляют работы Ю.В. Абраменковой [1], В.А. Гусева [16], В.А. Далингера [18], В.В. Сенчилова [45], Г.И. Саранцева [42], В.А. Смирнова, И.М. Смирновой [46], Н.Л. Стефановой, Н.С. Подходовой [49], Т.Ф. Сергеевой [44], Л.М Фридмана [53], Т.С. Шириковой [57].

Базовыми для настоящего исследования явились также работы Н.В. Андрафановой [4]; А.С. Аликина, Е.В. Иващенко [3]; И.А. Баландина, М.А. Гавриловой [7]; В.А. Далингера [18]; Е.Н. Дроновой [20]; В.А. Епифанцевой [21]; Р.А. Зиатдинова [23]; Ш.С. Зиядуллаевой [24]; Т.А. Ивановой [26]; О.И. Михоненко [32].

Основные этапы исследования:

- 1 семестр (2022/23 уч.год): анализ ранее выполненных исследований по теме диссертации, анализ применения интерактивных геометрических сред в общеобразовательной школе, анализ нормативных документов (стандартов, программ), анализ опыта работы школы (на основе изучения научно-методической литературы и практики работы в школе);
- 2 семестр (2022/23 уч.год): определение теоретических основ организации уроков геометрии с использованием пакета «Geogebra» в старших классах общеобразовательной школы;
- 3 семестр (2023/24 уч.год): разработка методики организации уроков геометрии по теме «Конус» с использованием пакета «Geogebra» в общеобразовательной школе; системы задач по теме «Конусы» в рамках технологии развивающего обучения решению задач и информационных технологий;
- 4 семестр (2023/24 уч.год): оформление диссертации, корректировка ранее представленного материала, уточнение аппарата исследования,

описание результатов экспериментальной работы, формулирование выводов.

Опытно-экспериментальная база исследования*:* МБУ «Школа № 20» г.о. Тольятти Самарской области.

Научная новизна исследования заключается в том, что в нем заключается в том, что проблема выявления методических особенностей организации уроков геометрии с использованием пакета «Geogebra» в старших классах общеобразовательной школы решается на основе методики организации уроков геометрии, включающей применение системы задач в рамках технологии развивающего обучения решению задач и информационных технологий, направленной на повышение качества математической подготовки и познавательного интереса к изучению геометрии.

Теоретическая значимость исследования заключается в выявлении роли интерактивных геометрических сред в обучении школьников геометрии в общеобразовательной школе; описании возможностей использования пакета «Geogebra» для организации уроков геометрии в старших классах; раскрытии методических особенностей организации уроков геометрии с его использованием пакета «Geogebra» в 10-11 классах.

Практическая значимость заключается в разработке методики организации уроков геометрии по теме «Конус» с использованием пакета «Geogebra» в общеобразовательной школе; системы задач по теме «Конусы» в рамках технологии развивающего обучения решению задач Т.А. Ивановой и информационных технологий.

Достоверность и обоснованность результатов исследования обеспечивались сочетанием теоретических и практических методов исследования, анализом педагогической практики.

Личное участие автора в организации и проведении исследования состоит в выявлении роли интерактивных геометрических сред в обучении школьников геометрии в школе; описании возможностей использования пакета «Geogebra» для организации уроков геометрии в старших классах; разработке методики организации уроков геометрии на примере темы «Конус» с использованием пакета «Geogebra»; системы задач по теме «Конусы» в рамках технологии развивающего обучения решению задач Т.А. Ивановой и информационных технологий.

Апробация результатов исследования велась в течение всего исследования, в том числе в период производственных практик на базе кафедры «Высшая математика и математическое образование» ТГУ. Его результаты были представлены на Всероссийской студенческой научно-практической междисциплинарной конференции «Молодежь. Наука. Общество» (Тольятти, декабрь 2022 г., диплом за 3 место); научно-практической конференции «Студенческие дни науки в ТГУ» (Тольятти, апрель 2022 г.; апрель 2024 г., диплом за 3 место).

Имеется 2 публикации [9], [10] по теме исследования.

На защиту выносятся:

- методика организации уроков геометрии по теме «Конус» с использованием пакета «Geogebra» в общеобразовательной школе;
- система задач по теме «Конусы» в рамках технологии развивающего обучения решению задач и информационных технологий.

Структура магистерской диссертации. Работа состоит из введения, двух глав, заключения, содержит 1 таблицу, 51 рисунок, список используемой литературы и используемых источников (63 источника). Основной текст работы изложен на 95 страницах.

# Глава 1 Теоретические основы организации уроков геометрии в старших классах общеобразовательной школы

## 1.1 Роль интерактивных геометрических сред в обучении школьников геометрии в общеобразовательной школе

Все сферы жизни не стоят на месте. Они развиваются, создают что-то новое, прогрессируют, а значит становятся лучше. Образование также шагает в будущее, а информационные технологии помогают в этом. Невозможно представить современного ребенка, который не умеет пользоваться информационными технологиями. Уже с ранних лет ребенок знает основную «базу» владения такими технологиями. А в процессе обучения в школе он повышает и укрепляет эти знания: учится работать с текстом, создавать графические рисунки и многое другое. Он раскрывает для себя новый способ получения знаний и информации, быстрый и удобный для себя. В настоящее время в образовании современные технологии все шире используются не только при изучении информатики, но и других дисциплин, в том числе математики. Большие изменения касаются именно такого учебного предмета как геометрия [8].

В статье В.В. Сенчилов отмечает, что значительное место в формировании личности отводится геометрии, которая является «дисциплиной, обладающей огромным гуманитарным и мировоззренческим потенциалом» [45]. Автор описывает возможности информационных и интерактивных технологий для «достижения высокого уровня подготовки учащихся с помощью приобретения ими фундаментальных знаний, развития пространственного воображения, стремления к самостоятельному изучению предмета и нового материала». Рассматривает проблему формирования пространственного воображения учащихся старших классов. Решением такой важной проблемы, по его мнению, является внедрение новых информационных технологий. Такой подход способствует формированию пространственных представлений учеников. Основная проблема при изучении стереометрии является проблема наглядности. Даже самые простые стереометрические фигуры, выполненные в тетради, содержат много ошибок. Работа в программах позволяет избежать их. Такая тенденция связана с распространением интерактивных геометрических сред.

Под интерактивными геометрическими средами в научно-методической литературе понимают:

- «программные средства, которые дают возможность строить геометрические объект, двигать их в разные стороны и помогают решать геометрические задачи» (В.В. Сенчилов [45]);
- «педагогические программные средства, позволяющее выполнять на компьютере различные геометрические построения, состоящие из базовых геометрических объектов и их комбинаций, а также задавать соотношения между этими объектами» (Т.Ф. Сергеева [44]);
- «педагогические программные средства, позволяющие выполнять геометрические построения на компьютере таким образом, что при изменении одного из геометрических объектов остальные также изменяются, сохраняя заданные между собой соотношения неизменными» (Т.С. Ширикова [57]).

Отметим, что Т.С. Ширикова дает таким средствам другое название, а именно системы динамической геометрии.

Рассмотрим основные функции интерактивных геометрических сред при обучении геометрии в общеобразовательной школе. Так, интерактивные геометрические среды:

- позволяют ученикам работать с геометрическими объектами, изменять их размеры и параметры, которые дают возможность видеть изменения объектов в реальном времени. Такой процесс обучения в несколько раз сокращает процесс понимания той или другой темы, дает школьникам возможность лучше понять тему, а также показывает связь между разными геометрическими объектами;

- имеют возможность создавать различные модели, решать сложные задачи, сокращая время на понимание определенной задачи, а также позволяют проводить разные эксперименты. Это дает возможность адаптировать учебный материал под каждого обучающегося и создать определенную уникальную ситуацию при решении задач;
- предоставляют возможность визуализировать любой геометрический объект и лучше объяснить учащимся его свойства. Ученики смогут лучше понять тему и овладеть математические понятиями, а также увидеть закономерности при решении задач;
- позволяют развивать умения и навыки при обучении геометрии и формировать определенные компетенции, развивают логическое и пространственное мышление, коммуникативные способности учащихся. В ходе их использования решение любых геометрических задач становится увлекательным и интересным процессом для школьника.

Ю.В. Абраменкова в статье отмечает, что «любая интерактивная геометрическая среда позволяет быстро и точно выполнять построения, строить модели на плоскости и в пространстве, а также проводить исследования с помощью ручного или автоматического изменения положения отдельных объектов или изменение численных значений параметров [1]».

При работе в интерактивных геометрических средах на уроках геометрии в общеобразовательной школе нами выявлены их плюсы и минусы. Опишем ряд преимуществ, которые были выявлены при работе с данными программами:

- основным преимуществом является наличие большого количества заданий и материалов, которые можно использовать с разными категориями обучающихся; каждому школьнику можно подобрать индивидуальные задания, разноуровневые задания, отличающихся разным уровнем сложности, а также дополнительные задания или указания к определенным типам упражнений для учеников с разным уровнем подготовки. Это даёт возможность сделать обучение индивидуальным и найти подход к каждому ученику и удержать его интерес к предмету с каждым разом повышая уровень сложности заданий;

- визуализация геометрических фигур вносит огромный вклад в обучение определенным темам, позволяет учащимся наглядно представить и увидеть форму, положение и изменение объекта в реальном времени и за короткий промежуток времени. Такой метод способствует лучшему изучению и пониманию учеником новой темы;
- повышение коммуникабельности ученика также является плюсом при работе с интерактивными геометрическими средами. Во время урока возможно совместное решение задач и коллективной работы учащихся. Учащиеся могут работать в парах или группах, предлагать различные идеи и способы решения задач, исследовать проблемы. Это способствует развитию коммуникативных навыков и обмену знаниями между учениками;
- ученики в реальном времени могут изменять размеры и свойства геометрического объекта для его исследования, нахождения определенных закономерностей и изучения теорем. Это способствует самостоятельному изучению тем, развитию у школьников абстрактного и аналитического мышления.

Кроме плюсов в интерактивных геометрических средах нами выявлены и недостатки, которые представлены ниже:

- основным недостатком является отсутствие технических ресурсов. Чтобы использовать интерактивные геометрические среды необходимо иметь компьютеры или другие программные средства, а также определенное программное обеспечение для них. Это создает большие проблемы каждой школе, где нет достаточных средств для обеспечения техническими ресурсами или имеет место недостаточная подготовка учителей в области информационных технологий. Молодое поколение учителей не столкнется с такой проблемой, что нельзя сказать о старшем их поколении. Для них это все становится в новинку и приносит огромные неудобства в познании нового;

- необходимо обучение интерактивным геометрическим средам. Учителям необходимо овладеть базовыми навыками работы с программами для успешного достижения учебных целей. Старшему поколению потребуется подготовка и обучение для быстрого использования той или иной программы;
- сокращение традиционных методов обучения геометрии также несёт определенные риски в образовании. Сильный «упор» на работу с интерактивными геометрическими средами влечет за собой риск исчезновения традиционного обучения. Важно найти баланс в обучении, чтобы использовать как традиционный подход, так и интерактивные геометрические среды в обучении.

Отметим, что на данный момент создано большое количество интерактивных геометрических сред с целью обучения геометрии в общеобразовательных школах. У каждой есть свои особенности, методы работы с программами.

В статье В.А. Далингера «Обучение учащихся доказательству теорем посредством систем динамической геометрии» перечислены основные системы динамической геометрии (DGS):

- «Математический конструктор,
- Живая математика,
- GeoGebra,
- Crocodile,
- GeoNext,
- Gabri Geometre,
- Cinderella,
- Geometr’s,
- Sketchpad» [18].

Автор выделяет основную особенность этих систем – возможность создавать и использовать для различных учебных целей в образовательных учреждениях динамических чертежей. Они могут применяться учителями для улучшения понимания обучающимися природы самого математического доказательства и улучшения навыков доказательства теорем.

В.А. Далингер описывает исторические аспекты внедрения систем динамической геометрии в школы в России и за рубежом: «DGS стали бурно развиваться с конца 1980-х годов и широко использоваться в обучении геометрии во Франции, США, Канаде, Австрии, Великобритании, Германии др. Основное внимание стало уделяться этапом подведения учащихся к открытию факта теоремы путем постановки перед школьниками исследовательской задачи, решаемой средствами DGS, и проверки истинности утверждения методом компьютерного эксперимента.

В рамках решения задач Федеральной целевой программой "Развитие единой образовательной информационной среды (2001-2005 годы)" была осуществлена разработка российской системы динамической геометрии "1С. Математический конструктор". Первая версия этой программы вышла в 2005 году. В этот же период (2000–2005 г.г.) в систему российского геометрического образования стали внедряться и другие системы динамической геометрии: Gabri, GeoGebra, GeoNext, Живая математика и др.» [18, с. 35–36].

Рассмотрим несколько более интересных и универсальных программ.

В статье Н.В. Десятниченко описана программа Cabri 3D. Автор пишет, что «Cabri 3D – виртуальный конструктор для поддержки школьного курса стереометрии, позволяющий быстро освоить технику выполнения геометрических построений в трехмерном пространстве и выполнять следующие операции:

- построение 2-мерных и 3-мерных фигур, как результат объединения фундаментальных геометрических объектов (точек, углов, сегментов, кругов, плоскостей, тел и т.д);

– измерение длины, углов, площадей и объемов фигур;

– наблюдение за эффектами динамических преобразований, таких как перемещение и масштабирование;

– показ объектов в перспективе;

– построение сечений геометрических тел» [19].

Н.В. Десятниченко описывает возможности учителя при использовании программы – создание действий, которые:

– моделируют реальные ситуации в задаче;

– создают учебные материалы и ресурсы;

– создают новые теоремы, а не просто их демонстрации как факта.

Опишем кратко интерактивную геометрическую среду – Cinderella.

А.С. Аликин, Е.В. Иващенко в статье отмечают, что программа Cinderella – «программа векторной графики. Может быть использована как для решения, так и для составления геометрических. задач. Программа основана на принципах проекционной геометрии и инвариантной теории» [3, с. 231]. Основными функциями данной программы являются: «интерактивная геометрия и анализ имеют место в области евклидовой геометрии, сферической геометрии» [3].

Н.В. Андрафанова, Д.С. Назарян в статье «Интерактивная геометрическая среда как средство развития познавательного интереса школьников» рассматривают примеры практических заданий для работы с интерактивной геометрической средой GEONExT, разработанной на кафедре математики и дидактики университета Байройт (Германия). Программа относится «к системам с открытым кодом, свободно распространяется, имеет русскоязычную версию» [5, с. 61].

На рисунке 1 приведено задание 2 (на проверку утверждения) исследовательского типа. Авторы пишут, что «в результате компьютерного эксперимента ученик должен доказать или опровергнуть сформулированное в задании утверждение экспериментальным путем» [5, с. 62-63].

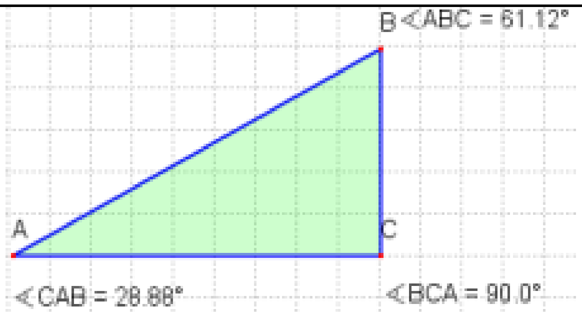
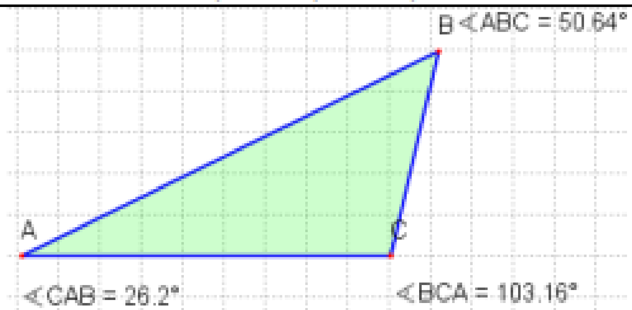
| Утверждение (гипотеза): *сумма углов любого треугольника равна 180°*. | |
|---|---|
| Задание.<br>1. Постройте остроугольный треугольник ABC.<br>2. Измерьте величины углов треугольника ABC.<br>3. Найдите сумму углов Δ ABC. | Результат выполнения задания. См. результат выполнения задания 1. |
| 4. Измените вид треугольника ABC на прямоугольный, перемещая вершину B инструментом Объекты → Двигать.<br>Как изменилась сумма углов этого треугольника?<br>∠ A = …<br>∠ B = …<br>∠ C = … | <br>∠ A = 28,88°<br>∠ B = 61,12°<br>∠ C = 90,0° (прямой угол) |
| ∠ A + ∠ B + ∠ C = | ∠ A + ∠ B + ∠ C = 28,88° + 61,12° + 90,0° = 180° |
| 5. Перемещая вершину B треугольника ABC, измените его вид на тупоугольный.<br>Изменилась ли сумма углов этого треугольника?<br>∠ A = ...<br>∠ B = ...<br>∠ C = ... | <br>∠ A = 26,2°<br>∠ B = 50,64°<br>∠ C = 103,16° (тупой угол) |
| ∠A +∠B +∠C =... | ∠ A + ∠ B + ∠ C = 26,2° + 50,64° + 103,16° = 180° |
| 6. Сделайте вывод о верности утверждения. | Вывод: *сумма углов любого треугольника равна 180°*. Утверждение верное. |

Рисунок 1 - Исследовательское задание на проверку утверждения

На рисунке 2 ниже приведено задание 3 (на получение нового утверждения). При выполнении данного задания ученик должен самостоятельно сформулировать утверждение.

Авторы отмечают, что «открытие свойства равнобедренного треугольника происходит при «передвижении» вершины B треугольника ABC, превращающего разносторонний треугольник в равнобедренный с отличительными для него свойствами» [5, с. 62].

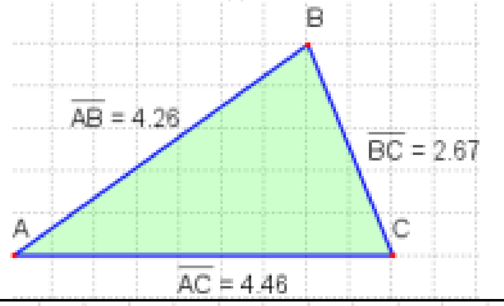
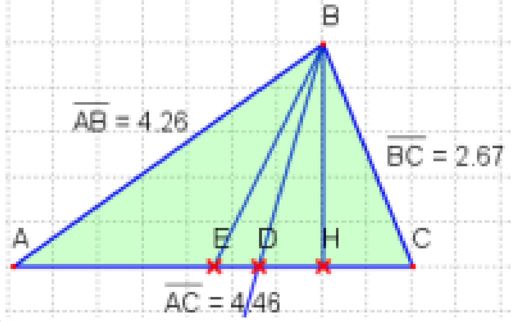
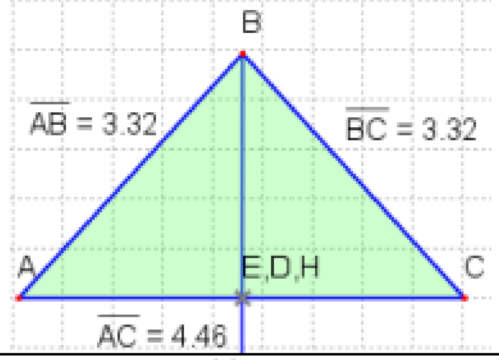
| Исследовать условия, при которых *высота, медиана и биссектриса треугольника совпадают.* | |
|---|---|
| Задание.<br>1. Постройте разносторонний треугольник ABC.<br>2. Измерьте длины сторон ΔABC, используя инструмент Объекты → Тексты и вычисления → Измерить расстояние.<br>AB = …<br>BC = …<br>AC = … | Результат выполнения задания.<br> |
| 3. Проведите из вершины B следующие линии, используя указанные инструменты:<br>*высоту*: Объекты → Линии → перпендикулярная линия;<br>*биссектрису*: Объекты → Линии → Биссектриса;<br>*медиану* Объекты → Точки → Средина (точка) и Объекты → Линии → Отрезок. | <br>BH – высота;<br>BD – биссектриса;<br>BE – медиана. |
| 4. Перемещайте вершину B до совпадения высоты, медианы и биссектрисы Δ ABC.<br><br>5. Как изменились длины сторон Δ ABC?<br>AB = …<br>BC = …<br>AC = … |  |
| 6. Сформулируйте условия, при которых высота, медиана и биссектриса треугольника совпадают. | Утверждение: *в равнобедренном треугольнике биссектриса, проведенная к основанию, является медианой и высотой.* |

Рисунок 2 - Задание на получение нового утверждения

Н.В. Андрафанова, Д.С. Назарян подчеркивается, что «учителя меняя роль школьника на уроке с «пассивного наблюдателя» до «активного исследователя», создает новые возможности формирования познавательного интереса у школьников» [5].

Самая универсальная и популярная в мире, бесплатно распространяемая интерактивная геометрическая среда – среда под названием Geogebra. Есть официальный иностранный сайт [60] об этой программе.

Р.А. Зиатдинов указывает, что данная среда «написана на языке программирования Java, переведена на 38 языков, включая русский, и доступна для платформ Windows, Linux и Mas OS; предназначена прежде всего для решения задач школьного курса геометрии, применяется также для демонстрации теорем» [23, с. 39].

Ю.В. Абраменкова пишет, что «основная идея данной программы заключается в интерактивном сочетании геометрического, алгебраического и числового представления. Программа позволяет создавать различные конструкции из точке, лучей, векторов, отрезков и прямых, которые можно динамически изменять заменой одного или нескольких параметров» [1]. Анализ работ показал, что в интернете есть примеры использования данной программы на уроках геометрии для решения задач повышенной сложности.

В.А. Далингер пишет, что «опыт учителей, использующих эту систему динамической геометрии, показывает, что она позволяет «переоткрывать» теоремы, строить динамические чертежи, соответствующие разным этапам доказательства теоремы, проводить компьютерные эксперименты» [18, с. 37]

Е.Н. Дронова, Д.С. Захарова утверждают, что необходимо качественное и правильное построение чертежей к задачам, это формирует у обучающихся графическую культуру и способствует правильному их решению.

Приведем пример решения задачи с использованием программы Geogebra при подготовке к ОГЭ на уроках геометрии из данной статьи.

Задача. «Точка H является основанием высоты BH (рисунок 3), проведенной из вершины прямого угла B прямоугольного треугольника ABC. Окружность с диаметром BH пересекает стороны AB и CB в точках P и K соответственно. Найдите BH, если PK = 15» [20, с. 28].

По мнению авторов, данный пример «позволяют продемонстрировать аккуратные, правильные чертежи, с помощью которых решение задачи находится очень быстро. Такие чертежи выступают мощным средством в борьбе с халатным отношением к построению чертежей на бумаге, которым нужно уделять большое внимание» [20, с. 28].

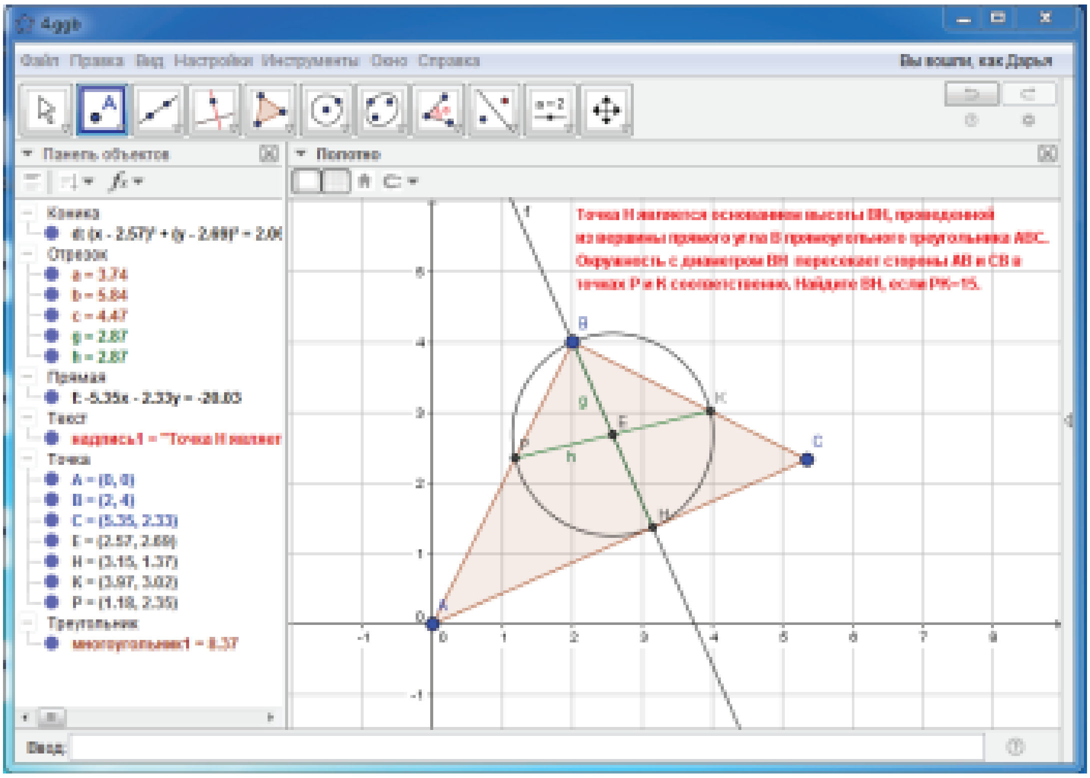



Рисунок 3 – К задаче из статьи Е.Н. Дронова и Д.С. Захарова

Е.Н. Дронова, Д.С. Захарова разработали инструкцию для построения чертежа к этой задаче, которая представлена на рисунке 4.

| № п/п | Инструменты | Комментарии к построению |
|---|---|---|
| 1 | | Отметьте точки A, B, C (угол B=90˚) |
| 2 | | Создайте прямоугольник по трем точкам ABC |
| 3 | | Проведите высоту BH с помощью инструмента «*Перпендикулярная прямая*» |
| 4 | | Постройте отрезок BH |
| 5 | | Отметьте середину отрезка BH |
| 6 | | Постройте окружность с центром в точке E и диаметром, равным BH |
| 7 | | Отметьте точки P и K как пересечение окружности и сторон AB и CB соответственно |
| 8 | | Постройте отрезок PK |
| Мы можем видеть на рисунке 3, что PK=BH (угол PBK=90˚ вписан в окружность, PK является диаметром), так как из условия задачи BH=15, то и PK=15. | | |

Рисунок 4 - Инструкция построения чертежа к задаче с помощью программы GeoGebra

Geogebra обладает простым внешним видом, который будет понятен каждому пользователю [4]; [8].

Вместе с этим, И.В. Роберт [41] в пособии приводит схему применения интерактивных сред в учебном процессе (рисунок 5), позволяющих школьнику активно взаимодействовать с носителем информации.

На основе анализа методической литературы можно выделить причины введения интерактивных геометрических сред в учебный процесс. Так, использование интерактивных геометрических сред:

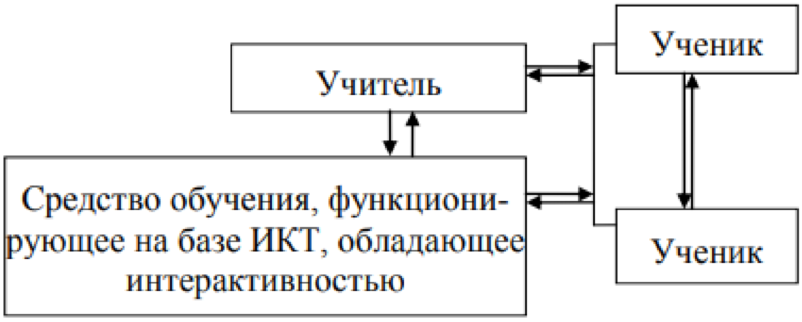



Рисунок 5 – Процесс обучения с использованием интерактивных средств

- дает возможность школам соблюдать требования ФГОС СОО в век информационных технологий и обеспечить учащимся доступ к технологиям, которые помогут им в реальной жизни и откроют новые профессии, которыми они будут заниматься в будущем;
- позволяет учащимся научится работать с компьютерными программами, проводить анализ и эксперименты при решении задач, а также самим создавать различные типы заданий;
- способствует повышению мотивации обучающихся к изучению геометрии в школе. Успех в обучении геометрии зависит от умения учеников проводить анализ условия задачи, от правильного построения фигур. В настоящее время ученики теряют интерес к изучению геометрии. Помочь с решением данной проблемы могут информационные технологии, при использовании которых процесс

решения задач становится интересным и увлекательным, что способствует лучшему пониманию учебных тем и усвоению материала;

- улучшение качества обучения геометрии. Взаимодействие с объектами и проведение экспериментов при решении задач, изучении учебного материала позволяет ученикам исследовать свойства геометрических фигур, доказательства теорем.

Таким образом, интерактивные геометрические среды играют немаловажную роль в изучении школьниками геометрии. Они способствуют лучшему пониманию материала, повышению мотивацию к ее изучению, развитию логического и пространственного мышления учащихся. Отметим, что для достижения максимальных успехов и результатов в обучении школьников геометрии необходимо держать баланс между использованием традиционных методов обучения и обучением с использованием интерактивных геометрических сред.

## 1.2 Возможности использования пакета «Geogebra» для организации уроков геометрии в 10-11 классах общеобразовательной школы

Интерактивная геометрическая среда Geogebra обладает немалым количеством функций и возможностей и имеет довольно обычный интерфейс, удобный и понятный для всех пользователей персонального компьютера, несмотря на уровень владения им.

По мнению Т.С. Шириковой, основными целями применения программы в учебном процессе являются:

- «формирование у обучающихся представлений об основных функциях доказательств;
- формирование у учащихся умений выдвигать гипотезы, их подтверждать или опровергать, самостоятельно обучаться во время работы» [57].

Р.А. Зиатдинов указывает, что «в программе Geogebra можно создавать всевозможные конструкции из точек, векторов, отрезков, прямых, строить графики элементарных функций, которые также возможно динамически изменять варьированием некоторого параметра, входящего в уравнение, а также строить перпендикулярные и параллельные заданной прямой линии, серединные перпендикуляры, биссектрисы углов, касательные, определять длины отрезков, площади многоугольников и т. д. Координаты точек могут быть введены вручную на панели объектов, а уравнения кривых, касательные – в строке ввода при помощи соответствующих команд» [23, с. 39].

А.С. Аликин, Е.В. Иващенко в статье отмечают, что у данной программы есть онлайн версия – Geogebra online: «после перехода на сайт www.geogebra.org, можно открыть программу GeoGebra в браузере для выполнения необходимых действий. … Даже не устанавливая программу GeoGebra на компьютер можно работать в этой программной среде, при наличии интернета» [3, с. 231].

Т.Ф. Юданов выделяет некоторые преимущества программы:

- за программу не надо ничего платить, она является бесплатной. Ею можно пользоваться как в школе, так и дома;
- происходит постоянное обновление программы и улучшение её функций;
- имеет большое количество языков, работает и на русском языке, что является огромным преимуществом для тех, кто не владеет иностранным языком;
- работать с программой можно на любой операционной системе;
- позволяет работать с матрицами, использовать построение 3D объектов в том числе и сечение фигур.

Автор отмечает, что «у программы богатые возможности работы с функциями (построение графиков, вычисление корней, экстремумов, интегралов и т.д) за счёт команд встроенного языка (который позволяет управлять и геометрическими построениями)» [58].

Разберем некоторые возможности пакета Geogebra в организации уроков геометрии в 10-11 классах общеобразовательной школы.

Geogebra имеет огромный функционал для создания различных геометрических объектов, а также может показать связь между геометрическими объектами. Преимущество учителя при работе с этой программой заключается в том, что он может строить различные геометрические фигуры, а также визуализировать их и лучше объяснить их свойства учащимся. Также в интерактивной геометрической среде возможно изменение параметров задачи в условии для закрепления материала и проведения исследования при решении задач. Такие возможности повышают интерес у учащихся к изучению геометрии, и они самостоятельно начинают анализировать задачу и решать её.

Также учитель может предложить ученикам исследовать геометрические фигуры и их свойства, что также повышает уровень знаний, умений и навыков и мотивацию у учащихся. Программа позволяет связывать несколько объектов и видеть их изменения при других значениях величин. Это помогает развить творческое мышление и способствует самостоятельному образованию школьников [4]; [8].

Кроме того, Geogebra позволяет проводить различные доказательства, а также доказывать теоремы. Учитель может предложить ученикам самим доказать теорему.

Также Geogebra помогает шире взглянуть школьникам на проблемы при доказательстве той или иной теоремы или решении задачи и более ясно понять саму ее суть. Для этого требуется активное их участие во время урока. Программа помогает не просто понять решение задач, но и найти общие закономерности в процессе ее решения и разделить их на несколько типов.

Также учащиеся могут создавать задания с помощью программы сами, подобрать задания под свой уровень владения дисциплиной. Кроме того, учителю можно создавать различные тесты и задания, чтобы проверить как учащиеся усвоили конкретный учебный материал.

Все эти возможности делают процесс изучения материала более интерактивным и интересным. Учитель может делиться своими заданиями или тестами с другими учителями. Это позволяет обмениваться опытом и использовать готовые учебные материалы.

Отметим, что в статье Ю.В. Абраменковой, О.В. Карлиной описаны приемы применения данного пакета в ходе обучения школьников построению динамических и интерактивных чертежей при решении геометрических задач и доказательстве теорем.

В статье В.А. Епифанцевой указано, что при использовании программы в образовательном процессе учитель может рациональнее распределять учебное время на уроке, осуществлять дифференцированный подход к обучению школьников [21].

Таким образом, в данном параграфе были показаны возможности использования геометрической среды «Geogebra» на уроках геометрии при решении задач, доказательстве теорем; осуществлении дифференцированного подхода к обучению школьников; выделены основные преимущества ее использования при создании разнообразных геометрических фигур, помощи учителям в проведении исследований в ходе решения задач, нахождении закономерностей в процессе их решения и делении задач на несколько типов.

### 1.3 Методические особенности организации уроков геометрии с использованием пакета «Geogebra» в старших классах общеобразовательной школы

Чтобы организовать урок геометрии с использованием пакета Geogebra в старших классах необходимо соблюдать некоторые методические особенности, без которых урок может пойти не по плану и лишь усугубит процесс получения знаний у учащихся. Соблюдая эти правила, получится эффективно использовать все функции программы и достичь поставленных целей перед уроком.

Рассмотрим методические особенности организации уроков геометрии с использованием пакета «Geogebra» в старших классах.

Т.С. Шириковой в своем диссертационном исследовании разработала методику обучения доказательству геометрических утверждений с использованием возможностей пакета GeoGebra. Так, методика автора включает следующие этапы обучения доказательству при работе с утверждениями:

- «этап обучения эмпирической проверке геометрических утверждений;
- этап обучения логическому контролю правильности алгоритма построения динамического чертежа для целей контрольного компьютерного эксперимента;
- этап обучения дедуктивному доказательству» [57, С. 23].

Ю.В. Абраменкова в статье [1, с. 67] пишет, что «на уроках геометрии при помощи интерактивной геометрической среды GeoGebra можно формировать у учащихся умения решать задачи, поскольку программа позволяет не только строить произвольные геометрические фигуры, но и фигуры с конкретными данными и параметрами. Например, с конкретными длинами сторон, величинами углов, периметром или площадью фигуры и т.п. При этом реализуются две цели: визуализация решения задачи и применение теорем или их следствий, которых нет в учебнике» [1].

Автор описывает на примерах из школьного курса геометрии динамические чертежи, доказывающие определенные утверждения.

Так, Ю.В. Абраменковой отмечается, что «разработанные с помощью программы GeoGebra динамические модели и чертежи можно использовать на уроках при:

- мотивации;
- изучении нового материала;
- закреплении решения задач.

При этом учитель может использовать как созданные заранее модели, так и вместе с учащимися пошагово их строить и исследовать. Также учащиеся могут самостоятельно на уроках (если есть возможность) или в рамках домашнего задания строить динамические чертежи, решать с их помощью задачи, «открывать» и доказывать теоремы, проводить компьютерные эксперименты» [1, с. 69].

В статье В.А. Епифанцевой [21, с. 255] указано, что при использовании программы в образовательном процессе учитель может рациональнее распределять учебное время на уроке, осуществлять дифференцированный подход к обучению школьников. Автор рекомендует использовать данную программу для организации самостоятельной работы обучаемых, также в процесс объяснения учебного материала.

На сайте В.А. Смирнова и И.М. Смирновой [48] представлены разработанные материалы по использованию программы "GeoGebra" для моделирования плоских и пространственных фигур при обучении школьников геометрии в школе.

В статье О.И. Михоненко [32] сравниваются традиционный способ решения задач при обучении теме «Сечение объемных тел» и способ с использованием программных сред «Математический конструктор» и Geogebra. Автор рассматривают пример организации обучения геометрии при решении задачи из учебника для 10-11-х классов Л.С. Атанасяна:

«Ребра тетраэдра равны 4. Определите, какая фигура получается в сечении, проходящем через середины четырех его ребер. Найдите площадь сечения» [6].

Этап 1. «Построение тетраэдра в программе Geogebra.

Для построения тетраэдра ученикам необходимо, используя инструмент «Тетраэдр», отметить две точки, расстояние между которыми равно 4.

Далее для работы с ним (рисунок 6) отключить изображение плоскости, осей координат» [32].

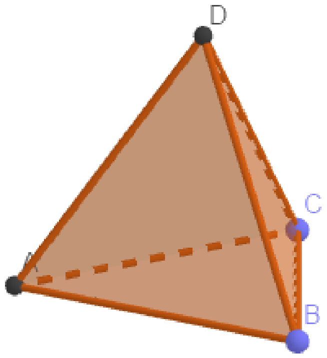



Рисунок 6 – Построение тетраэдра в программе «GeoGebra»

Этап 2. «Построение сечения.

Далее, чтобы построить сечение, ученики строят середины четырех ребер. Ими используется инструмент «Середина или центр», выбираются четыре ребра, в итоге школьники получают на чертеже точки – середины этих ребер. Затем они, выбирая инструмент «Плоскость», проводят плоскость через три любые точки, полученные до этого. Осуществляя вращение чертежа (рисунок 7), обучающиеся могут увидеть пересечение плоскости с разных сторон» [32].

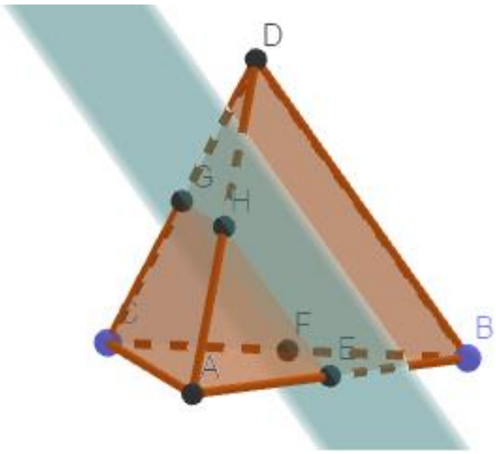



Рисунок 7 - Построение сечения тетраэдра в программе «GeoGebra»

«Затем старшеклассники, используя инструмент «Кривая пересечения», выбирают плоскость и данный тетраэдр, в итоге могут увидеть фигуру, полученную при сечении (рисунок 8). Изображение плоскости для удобства они могут убрать» [32].

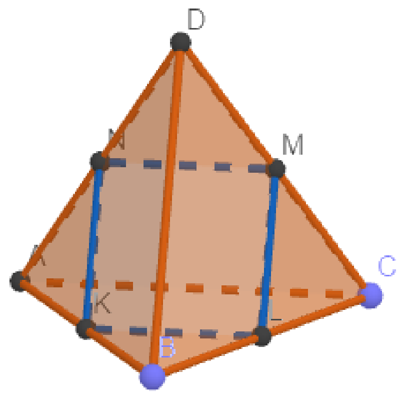



Рисунок 8 - Изображение фигуры, полученной в сечении,
в программе «GeoGebra»

Этап 3. «Определение фигуры, получившейся в сечении.

По получившемуся изображению фигуры, полученной в сечении, ученики могут предположить, что в сечении имеем квадрат.

Для проверки этой гипотезы школьники проверяют длины сторон, градусные меры углов фигуры, полученной в сечении.

С этой целью ими используется инструмент «Расстояние или длина»: они выбирают необходимые отрезки, получают определенные данные; также ими используется инструмент «Угол»: ими отмечаются на чертеже три точки угла, далее они получают величины углов (рисунок 9)» [32].

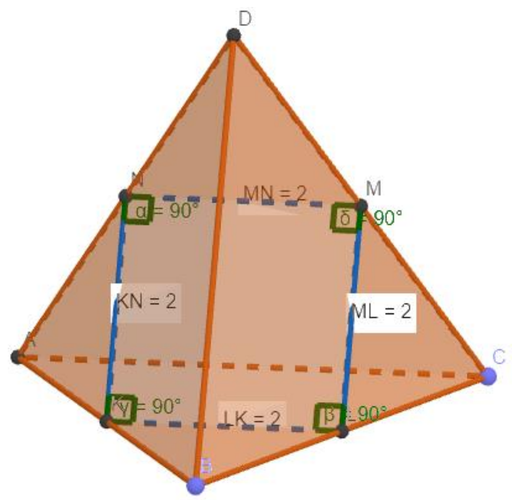



Рисунок 9 - Измерение длины сторон, градусных мер углов фигуры,
полученной в сечении в программе «GeoGebra»

«Выдвинутая гипотеза подтверждается, в сечении действительно получился квадрат.

Этап 4. Нахождение площади полученного сечения.

Школьники, используя инструмент «Площадь», выбрав многоугольник, вычисляют площади фигуры, полученной в сечении (рисунок 10)» [32].

Таким образом, задача решена. Площадь полученного сечения равна 4.

В результате исследования О.И. Михоненко приходит к выводу, что «организация процесса обучения геометрии с использованием компьютерных программ способствует достижению целого ряда предметных и метапредметных результатов» [32].

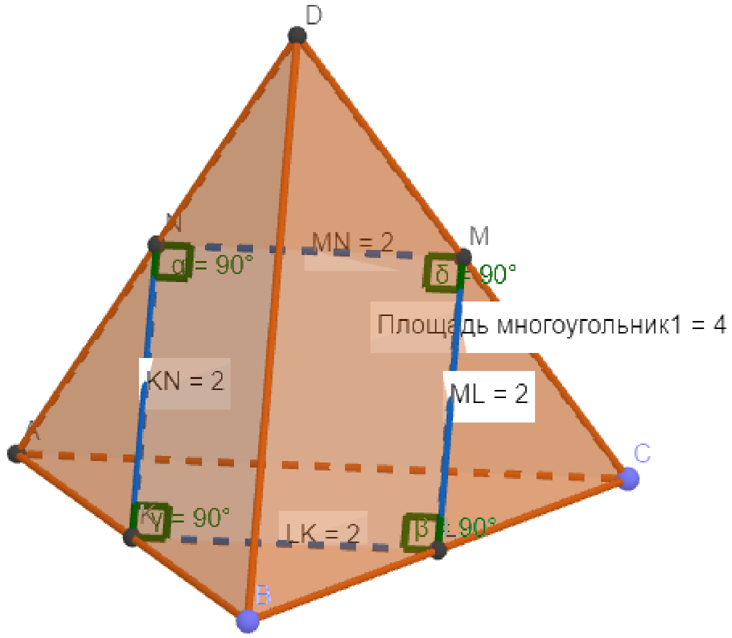



Рисунок 10 – Процесс нахождения площади фигуры, полученной в сечении, в программе «GeoGebra»

В целом, использование пакета «Geogebra» на уроках геометрии делает процесс получения знаний более интересным и увлекательным. Помогает развивать логическое мышление и визуализировать ситуации в реальной жизни [2]; [12].

В статье И.А. Баландина и М.А. Гавриловой [7] также говорится об использовании информационных и коммуникационных технологий (ИКТ) при организации обучения математике в старших классах. Авторы пришли к выводу, что «для достижения высоких результатов требуется рациональное внедрение средств ИКТ в современный урок математики. Приведена разработанная схема их внедрения в образовательный процесс старшей школы при изучении математики» [7] (рисунок 11).


Рисунок 11 – Схема внедрения средств ИКТ в школьный курс математики (10-11 классы)

Также авторами была рассмотрена проблема организации уроков в классах с гуманитарным наклоном. Отмечается, что «школьники в таких классах испытывают больше трудностей при работе с теоретическим учебным материалом. Учащиеся стремятся видеть конкретное его применение, а не обобщенные методы» [7]. Использование ИКТ в таких классах будет способствовать повышению мотивации у учащихся к исследовательской деятельности при изучении математики, развитию логического мышления и творческого потенциала. Выделены основные цели использования геометрических сред в гуманитарных классах. Авторы пришли к выводу, что использование различных ресурсов, «организация доступа к электронным библиотекам, стимулирование учащихся при изучении математики повышает интерес к учебе. Также на уроках необходимо показывать связь математики с другими науками, прежде всего, ведущими для выбранного профиля» [7].

В статье подробно рассматривается «реализация нескольких целей использования ИКТ с применением программы GeoGebra на фрагменте конкретного урока по геометрии 11 класс на тему: «Построение сечений»» [7].

Задача. «Дан параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$. На стороне $B_1C_1$ взята точка P, а на стороне DC – точка K. Построить сечение куба плоскостью $A_1PK$» [7].

«Учитель заранее перед началом урока готовит шаблон геометрической фигуры в интерактивной среде» [7] (рисунок 12).

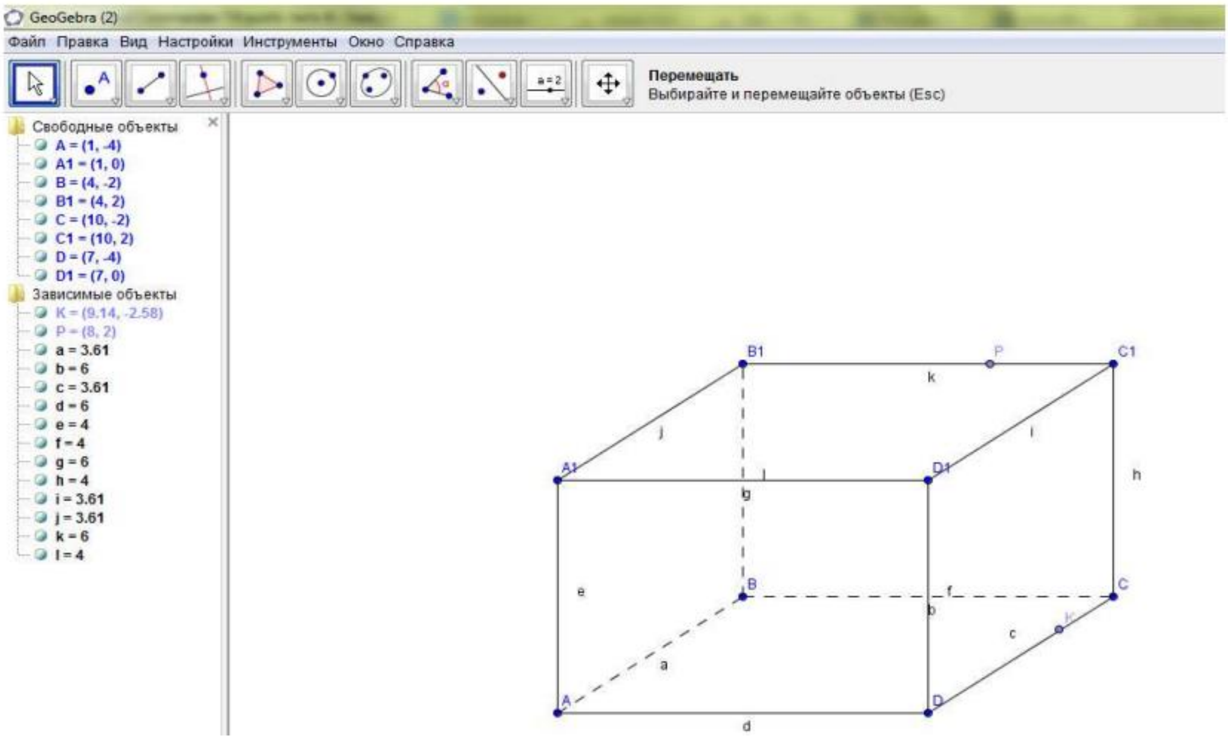



Рисунок 12 – Построение параллелепипеда в геометрической среде «GeoGebra»

Школьникам предлагается выполнить определенные построения.

Этап 1. «Учащиеся строят прямую $A_1P$ с помощью инструмента – «Прямая по двум точкам» (рисунок 13).

Данный инструмент использовать проще, чем работать с обычной линейкой» [7].

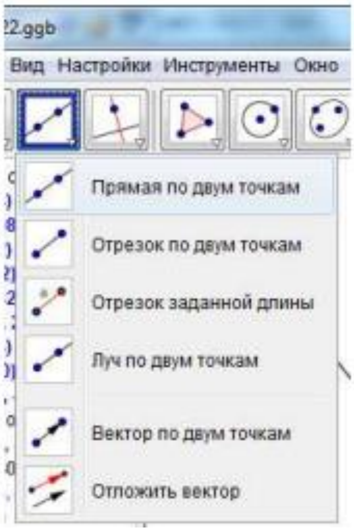



Рисунок 13 – Инструмент «Прямая по двум точкам» в программе GeoGebra

Этап 2. «Учащиеся строят прямую с помощью инструмента «Параллельная прямая», которая проходит через точку K, параллельно $A_1P$, и обозначают ее как точку E. Школьники соединяют эти точки с помощью инструмента «Прямая по двум точкам»» [7] (рисунок 14).

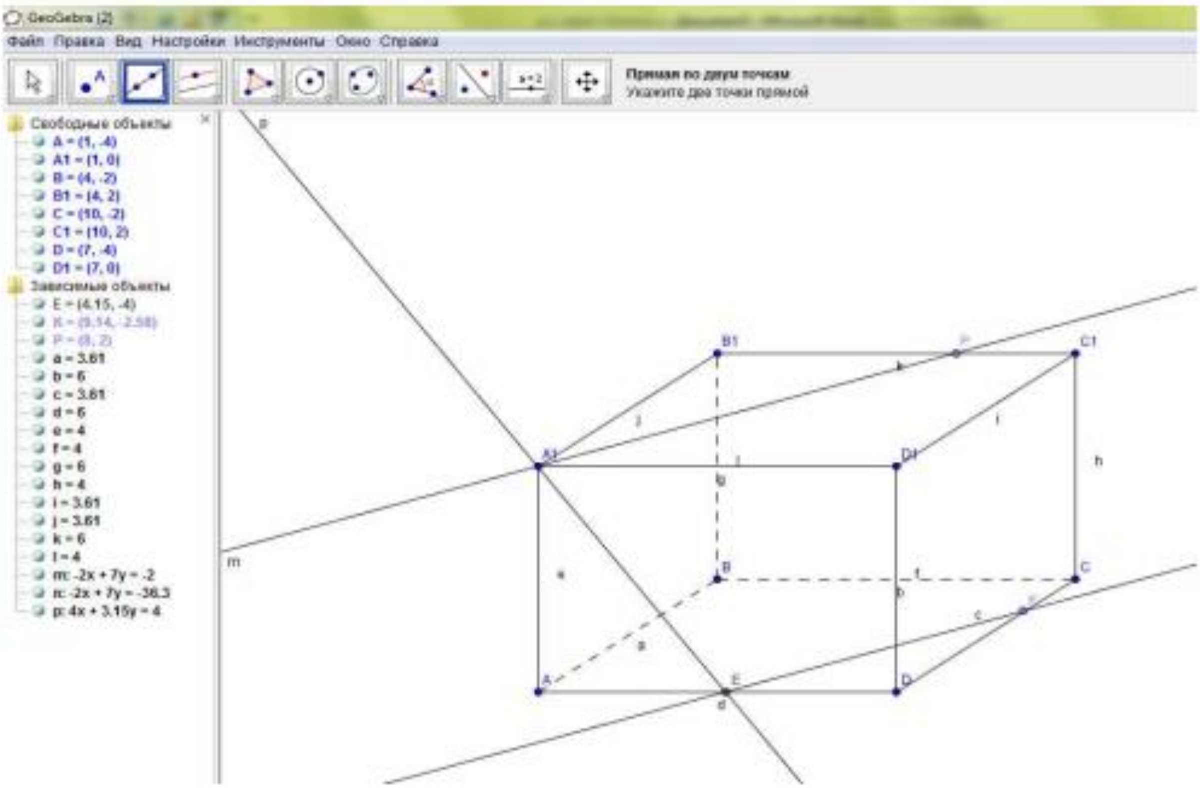



Рисунок 14 – Построение прямой $A_1P$ в программе GeoGebra

Этап 3. «Используя инструмент «Точка», школьники строят прямую через точку P, параллельно $A_1E$. Точка G – точка пересечения прямой с ребром CC1. Далее соединяют точки K и G. Получилось сечение $A_1EKGP$» [7] (рисунок 15).

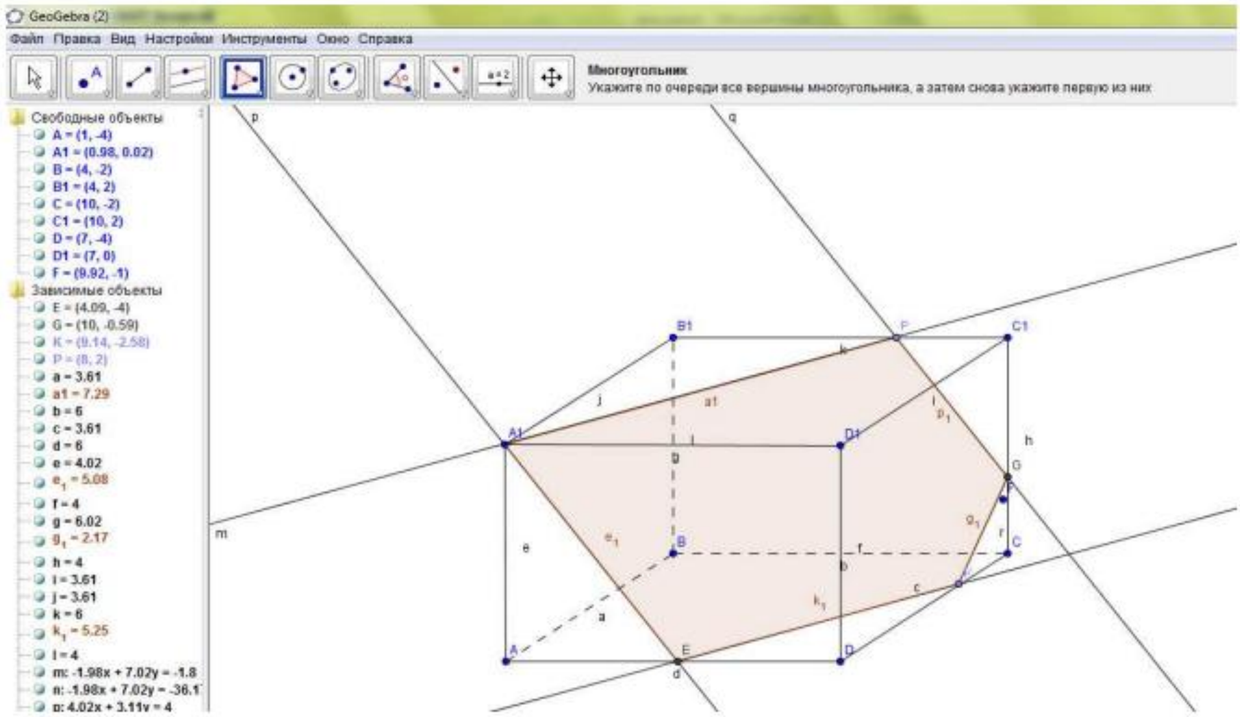


Рисунок 15 – Сечение многогранника в интерактивной среде Geogebra

Далее учитель «предлагает доказать правильность построения. Используя инструмент «Проигрыватель» демонстрируется сечение многогранника в динамике.

Этот фрагмент урока показал, что для школьника информация в интерактивной среде Geogebra воспринимается лучше и качественнее. Данная геометрическая среда помогает визуализировать фигуры и представить их в пространстве» [7].

Итак, по мнению И.А. Баландина и М.А. Гавриловой, использование интерактивной среды помогает более эффективно усваивать материал, повышает интерес к обучению, развивает навыки работы с электронными ресурсами.

В статье Ш.С. Зиядуллаевой [24] рассматриваются возможные подходы к преподаванию курса геометрии с использованием ИКТ на примере использования интерактивной геометрической среды «GeoGebra».

Автор приходит к выводу, что «без хорошо развитого пространственного воображения невозможно успешное изучение геометрического материала» [24].

Ш.С. Зиядуллаева рассматривают проблему перехода из плоскости в пространство при обучении старшеклассников геометрии в школе. Решить эту проблему рационально считается с помощью внедрения интерактивных геометрических сред. В статье рассматривается процесс построения многогранников в программе GeoGebra. Опишем его.

Этап 1. После открытия программы, выбирается построение элементов (точки, прямой и т.д.). Чтобы построить многогранник выбирается режим стереометрии (рисунок 16).

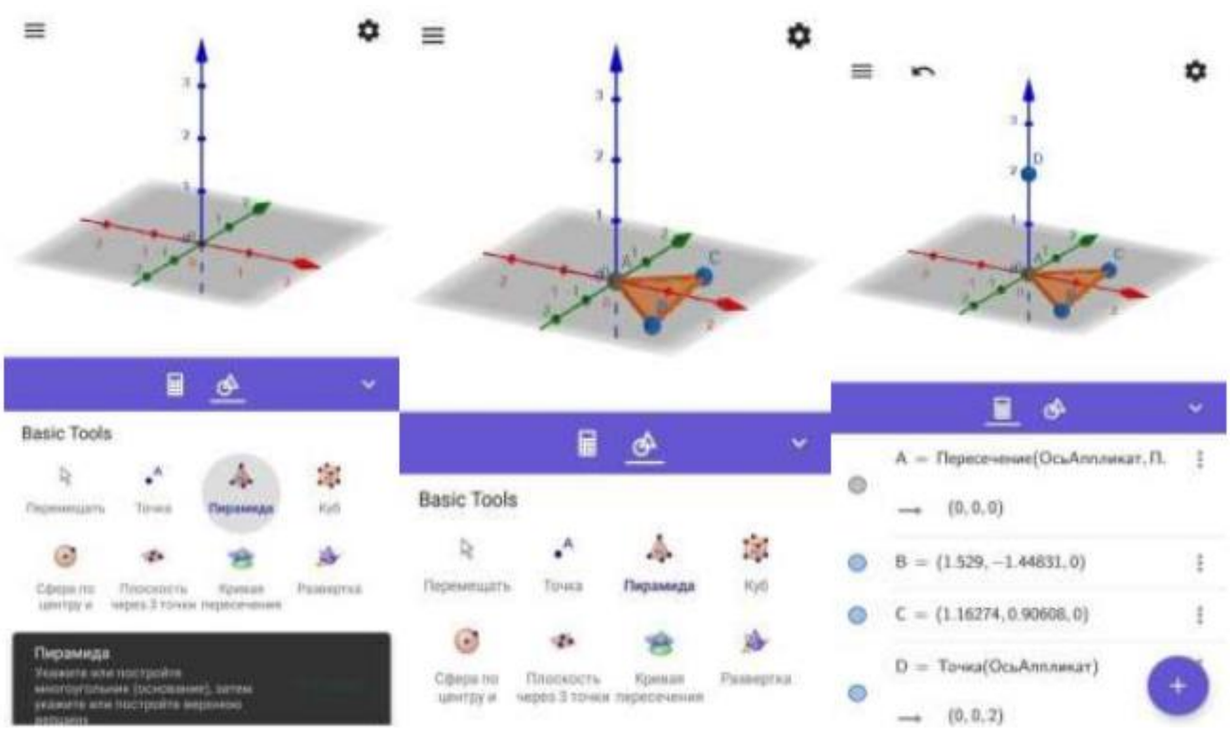



Рисунок 16 – Режим стереометрии при построении многогранников в системе координат

Этап 2. Необходимо задать координаты фигуры. «Это можно сделать двумя способами: первый - отметить вершины пирамиды на ПДСК (прямоугольная декартова система координат); второй - набрать вручную координаты в строке ввода» [24].

Этап 3. После ввода координат вершин на чертеже появляется пирамида (рисунок 17).

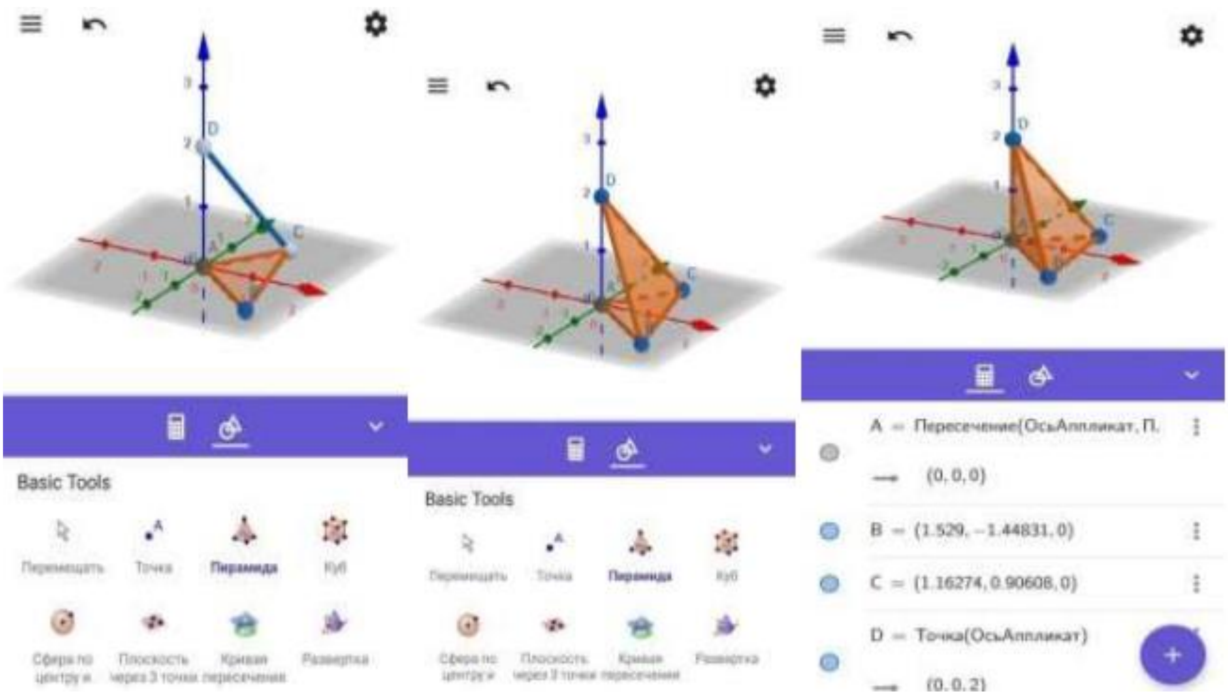



Рисунок 17 – Изображение многогранника в системе координат

В нижней части располагаются координаты точек. Теперь можно найти длины граней, площадь основания, высоту, площадь поверхности, объём многогранника и т.д.

Кроме того, методические аспекты обучение математике с использованием компьютерных программ в учебном процессе, в том числе пакета «GeoGebra», отражены в иностранной литературе [59], [61]-[63].

Таким образом, по мнению Ш.С. Зиядуллаевой, данный пример использования интерактивной геометрической среды «GeoGebra» показывает легкость и простоту использования данной программы, где можно строить геометрические фигуры, различные их сечения и решать задачи повышенной сложности. Использование геометрических сред повышает межпредметную связь и повышает интерес не только к математике, но и к информатике.

Выводы по первой главе

- раскрыта роль интерактивных геометрических сред в обучении школьников геометрии в общеобразовательной школе. Определено, что использование интерактивных геометрических сред помогает соблюдать требования ФГОС СОО и повышает мотивацию учащихся к изучению геометрии. Существует множество интерактивных геометрических сред, каждая с уникальными особенностями и методами работы. Использование интерактивных геометрических сред способствуют развитию коммуникативных навыков и обмена знаниями между учениками. Визуализация геометрических фигур вносит вклад в обучение и помогает ученикам лучше понимать новые темы. Однако, установлены и недостатки, такие как отсутствие технических ресурсов и необходимость обучения использованию программы.
- изучены возможности использования пакета «Geogebra» для организации уроков геометрии в 10-11 классах общеобразовательной школы. Так, программа GeoGebra обладает множеством функций и возможностей, удобным интерфейсом для пользователей персонального компьютера. Основной целью использования интерактивной геометрической среды – помощь учителям проводить исследования при решении задач и осуществлять дифференцированный подход к обучению школьников. Программа является бесплатной, работает на разных языках и операционных системах, имеет онлайн версию. GeoGebra позволяет создавать разнообразные конструкции из точек, геометрические фигуры. Основные цели применения программы в учебном процессе: формирование представлений об основных функциях

доказательств и обучению выдвижению гипотез. Приведены исторические аспекты внедрения систем динамической геометрии в школы в России и за рубежом;

– выявлены методические особенности организации уроков геометрии с использованием пакета «Geogebra» в старших классах общеобразовательной школы. Установлено, что начинать необходимо с планирования урока, определения его цели и задач, а также необходимо выбрать инструменты в программе «Geogebra» для дальнейшего использования на уроке. Необходимо создать задания с разным уровнем сложности, чтобы учащиеся могли работать своими силами и не пользовались дополнительными подсказками. Можно предоставлять ученикам дополнительные материалы для самостоятельной работы. Интерактивные геометрические среды помогают визуализировать геометрические фигуры, различные их сечения и решать задачи повышенной сложности, задачи исследовательского характера. Использование программы «Geogebra» повышает межпредметную связь и интерес к обучению математике и информатике.

# Глава 2 Методические основы организации уроков геометрии с использованием пакета «Geogebra» в старших классах общеобразовательной школы

## 2.1 Методика организации уроков геометрии по теме «Конус» с использованием пакета «Geogebra» в общеобразовательной школе

Изучение геометрии в современной школьной программе имеет огромное значение для формирования у учащихся целого ряда навыков и умений. Геометрия является не только одним из ключевых разделов математики, но и играет важную роль в развитии умения анализировать, логически мыслить и воображать фигуры в пространстве. Развитие пространственного мышления у учащихся играет важную роль. Понимание пространственных отношений, фигур и объектов в трехмерном пространстве является ключевым элементом в геометрии. Ученики, которые изучают геометрию, развивают умение представлять объекты в пространстве, что полезно во многих областях жизни, включая архитектуру, инженерное дело, дизайн, географию и другие сферы человеческой жизни. Геометрия также способствует развитию логического мышления у учеников. Решение геометрических задач требует умения анализировать информацию, выделять основные факты, формулировать гипотезы и строить логические цепочки в рассуждениях. Например, знание геометрии может помочь ученикам понять архитектурные конструкции, различные формы и фигуры в окружающем мире, а также использовать их в практико-ориентированных задачах. Это очень полезно для будущих профессионалов в области дизайна, строительства, инженерии и других технических специальностей. Также при изучении геометрии развивается критическое мышление. Учащиеся учатся анализировать и оценивать различные геометрические теории, проводить доказательства и обоснования, что помогает им развивать навыки критического мышления и развивает способность аргументировать свои высказывания. Эти навыки делают геометрию одним из ключевых элементом в современной школьной программе, обеспечивает ученикам фундаментальные знания и навыки, которые они будут применять в дальнейшем.

Изучении геометрии в стандартном виде, как изучали раньше, больше не приносит таких же хороших результатов. Для детей геометрия стала очень тяжелым и трудным предметом. Решить проблему помогает использование интерактивных геометрических средств. Этот инновационный инструмент предоставляет учащимся возможность визуализировать геометрические объекты, проводить эксперименты с ними и исследовать их свойства.

Рассмотрим основные возможности пакета «Geogebra» и его преимущества для учащихся при обучении теме «Конусы» в школе.

Самым главным преимуществом пакета «Geogebra» является визуализация геометрических объектов. Ученики могут создавать и изучать различные геометрические фигуры, представлять их в трехмерном пространстве, проводить исследования их свойств. Это позволяет учащимся лучше понять абстрактные геометрические концепции. Также учащиеся могут проводить эксперименты с объектами, менять параметры и смотреть как изменится фигура с разными значениями. Программа дает возможность проводить измерения углов, длин отрезков, площадей и объемов, а также анализ зависимостей между различными объектами, что способствует развитию аналитических и исследовательских навыков. Создание моделей реальных объектов помогает при решении практико-ориентированных задач. Это позволяет увидеть практическую пользу своих знаний, а также поможет применять навыки в реальных ситуациях. Также интерактивных геометрические среды помогают не только учащимся, но и учителям. С помощью этого инструмента можно создавать интерактивные уроки, задания и учебные материалы, которые будут использоваться для более эффективного обучения геометрии. Такие программы позволяют создавать индивидуальные образовательные программы, подстраиваться под каждого ученика и адаптировать их процесс обучения, который становится более интересным и увлекательным.

Применение пакета «Geogebra» при изучении конуса может быть очень разнообразным. Изучении конуса с помощью пакета «Geogebra» позволяет учащимся более подробно изучить свойства этой фигуры. «Geogebra» дает возможность создания трехмерных моделей конусов с возможностью вращения и масштабирования. Учащиеся могут наблюдать изменение формы конуса при изменении его параметров, таких как радиус основания, высота и угол наклона образующей. Также с помощью определенного инструмента возможно исследование параметров конуса, наблюдать, как изменения влияют на форму и свойства конуса. С помощью «Geogebra» учащиеся могут строить различные сечения конуса и изучать их свойства. Это включает в себя построение сечений плоскостью, проходящей через вершину или параллельной основанию, и анализ полученных кривых – окружности, эллипсы, параболы и гиперболы. «Geogebra» используется для создания исследовательских проектов, связанных с конусами. Возможно исследование различных типов конусов, изучение их применений в реальном мире, а также создание своих математических моделей и анализ их свойств. В целом, использование «Geogebra» при изучении конуса представляет собой мощный инструмент для изучения геометрии.

Опишем требования к знаниям, умениям навыкам учащихся по теме «Конусы» в соответствии с требованиями ФГОС среднего общего образования.

В стандарте по математике (профильный уровень) прописано, что учащиеся должны:

«знать/понимать:

– значение математической науки для решения задач, возникающих в теории и практике; широту и ограниченность применения математических методов к анализу и исследованию процессов и явлений в природе и обществе;

– значение идей, методов и результатов алгебры и математического анализа для построения моделей реальных процессов и ситуаций» [52];

уметь:

– «владеть понятиями: многогранник, сечение многогранника, куб, параллелепипед, призма, пирамида, фигура и поверхность вращения, цилиндр, конус, шар, сфера, сечения фигуры вращения, плоскость, касающаяся сферы, цилиндра, конуса, площадь поверхности пирамиды, призмы, конуса, цилиндра, площадь сферы, объем куба, прямоугольного параллелепипеда, пирамиды, призмы, цилиндра, конуса, шара;

– изображать многогранники и поверхности вращения, их сечения от руки, с помощью чертежных инструментов и электронных средств; распознавать симметрию в пространстве; распознавать правильные многогранники;

– распознавать на чертежах, моделях и в реальном мире геометрические фигуры;

– применять изученные свойства геометрических фигур и формул для решения геометрических задач и задач с практическим содержанием;

– строить конус и их сечения от руки, с помощью чертежных инструментов и электронных средств;

– решать задачи на вычисление объёма конуса, площади поверхности конуса;

– применять теоремы об отношениях объёмов при решении задач;

– применять интеграл для вычисления объёмов и поверхностей тел вращения;

– решать задачи на отношение объёмов и площадей поверхностей подобных фигур» [52].

В результате изучения темы «Конусы» ученик должен:

знать/понимать:

– формулировать определение конуса;

– формулировать и доказывать простейшие правила нахождения высоты конуса, площади поверхности конуса;

– знать формулу нахождения объёма конуса.

уметь:

– изображать конус и их сечения от руки;

– решение разные типы задач по теме «Конусы»;

– применять знания и умения в реальной жизни;

– решать задачи на нахождения объёма конуса.

Приведем основные цели и задачи изучения темы «Конусы» в школьном курсе геометрии.

Цель: «рассмотреть понятия конуса, усеченного конуса и их элементов, вывести формулы для вычисления площадей боковой и полной поверхностей конуса и для вычисления площади боковой поверхности усечённого конуса; вывести формулы для вычисления объема конуса и объема усечённого конуса» [56].

Задачи:

– ввести основные понятия, связанные с понятием конуса; рассмотреть виды сечений конуса различными плоскостями; рассмотреть конус как тело вращения;

– обучать построению конусов и их сечений;

– решать задачи на нахождение элементов конусов; показать связь между элементами конуса в процессе решения задач;

– применять понятие конуса в реальных жизненных ситуациях;

– развивать логическое мышление при решении задач на нахождение площади поверхности и объема конуса в нестандартной ситуации;

– развивать аккуратность и грамотность при построении конусов и их элементов, сечений конуса.

Теоретический и практический материал, рассматриваемый в теме «Конусы», способствует формированию понятия конуса; направлен на применение полученных умений и навыков по теме в реальном мире; способствует формированию познавательного интереса к изучению математики; дает возможность подготовиться к ЕГЭ по математике.

Для раскрытия методических аспектов организации уроков геометрии по теме «Конус» с использованием пакета «Geogebra» в общеобразовательной школе нами был проведен методический анализ теоретического и практического содержаний по теме «Конусы». Опишем его результаты.

Методический анализ темы.

Базовые знания:

– основные геометрические фигуры;

– свойства прямоугольного треугольника;

– свойства равнобедренного треугольника;

– признаки подобия треугольников;

– понятие радиуса, диаметра, длины окружности; понятие площади круга;

– основные тригонометрические функции;

– вычисление определенных интегралов с помощью формулы Ньютона –Лейбница;

– понятия площади и объёма.

– понятие развертки боковой поверхности.

Рассматриваемые сведения:

– понятие конуса; понятие развертки конуса;

– понятие кругового конуса;

– понятие прямого конуса;

– элементы конуса;

– свойства конуса;

– понятие осевого сечения конуса;

– теорема о сечении конуса плоскостью;

– понятие усеченного конуса и его элементов;

– «формулы для вычисления площади боковой и полной поверхности и объёма конуса;

– формулы для вычисления площади боковой поверхности и объёма усеченного конуса;

– решение основных типов задач на вычисление и доказательство, связанные с конусом и усечённым конусом, с вычислением его объёма» [56].

Теоретический материал.

Тема «Конусы» представлена в различных учебниках по геометрии в старших классах. Рассмотрим определения, которые дают авторы учебников, рекомендованных Министерством просвещения Российской Федерации.

В учебнике Л.С. Атанасяна понятие конуса вводится в 11 классе следующим образом: «Тело, ограниченное конической поверхностью и кругом с границей, называется конусом» [6].

На изучение темы «Конусы» отводится 4 часа. Также в 11 классе изучается тема «Объём конуса», на которую отводится 1 час. Темы «Понятие конуса», «Площадь поверхности конуса» и «Усеченный конус» рассматриваются в разделе номер два. Тема «Объем конуса» вводится в 81 параграфе шестой главы. Автор затрагивает понятие конуса и из каких элементов тело состоит. Также вводится формула нахождения площади поверхности конуса и рассказывается о усеченном конусе. Также дается формула нахождения объёма конуса.

В учебнике А.Г. Мерзляка определение конуса дается в 11 классе: «Окружность с центром О ограничивает круг. Тело, ограниченное этим кругом и конической поверхностью, называют конусом» [31].

На изучение темы на углубленном уровне отводится 9 часов. Из них 3 часа отводится на тему «Конус» в 9 параграфе, где автор рассматривает понятие конуса. Два часа отводится на изучение темы «Усеченный конус» в 10 параграфе, где автор определяет понятие усеченного конуса, дает определения основания и высоты усеченного конуса, а также приводит формулу нахождения площади боковой поверхности усеченного конуса. В 11 параграфе (3 часа) рассматривается тема «Комбинации конуса и пирамиды», где автор описывает комбинации тел. Также в 20 параграфе представлена тема «Объёмы тел вращения», где автор вводит формулу нахождения объёма конуса и объём усеченного конуса.

В учебнике А. В. Погорелова [37] в 11 классе также рассматривается тема «Конусы». На изучение темы отводится 5 часов. Два часа предусмотрено на изучение темы «Конус. Сечения конуса плоскостями» и два часа - на тему «Объём конуса». В них автор приводит определение конуса, а также даёт формулу нахождения объёма конуса.

В учебнике И.Ф. Шарыгина понятие конуса вводится в 10 классе таким образом: «В широком смысле под конусом понимают тело, поверхность которого получается следующим образом. Берётся произвольная замкнутая не самопересекающаяся плоская кривая и произвольная точка, не лежащая в одной плоскости с этой кривой» [55].

Для организации уроков геометрии по теме «Конусы» с использованием пакета «Geogebra» считаем целесообразным выбрать математический профиль.

Изучение конусов требует глубокого понимания геометрии, тригонометрии и стереометрии, что предполагает наличие у учащихся базовых знаний и навыков в этих областях математики. Это делает математический профиль идеальным выбором, поскольку он предоставляет необходимую базу для успешного освоения темы.

Во-вторых, конусы имеют широкое практическое применение в различных областях, таких как архитектура, дизайн, инженерия, медицина и технологии. Понимание их свойств и умение применять их в решении задач имеет важное практическое значение.

Математический профиль позволяет учащимся не только изучить теоретические аспекты конусов, но и научиться применять полученные знания на практике, что делает их более подготовленными к будущей профессиональной деятельности.

Также работа с конусами требует умения анализировать геометрические фигуры, выявлять закономерности и делать выводы. Это способствует развитию аналитического мышления и способности к решению сложных задач. Математический профиль предоставляет инструменты и методы, необходимые для выполнения таких задач, что делает его идеальным выбором для изучения темы "Конусы".

Наконец, изучение конусов закладывает фундамент для дальнейшего изучения более сложных тем в математике и смежных науках, таких как векторный анализ, дифференциальная геометрия и топология. Математический профиль предоставляет необходимую базу знаний и навыков, которые будут полезны при изучении этих тем в будущем.

Таким образом, выбор математического профиля для изучения темы "Конусы" обеспечивает глубокое понимание, развивает важные навыки и готовит учащихся к дальнейшему обучению и применению полученных знаний в различных областях, в том числе и в решении задач по геометрии в ЕГЭ.

Основным учебником геометрии математического профиля для организации уроков геометрии по теме «Конусы» с использованием пакета «Geogebra» считаем целесообразным выбрать учебник Л.С. Атанасяна, В. Ф. Бутузова, 10–11 класс.

Рассматриваемая тема относится к 4-й Главе «Цилиндр, конус и шар» и 5-й Главе «Объемы тел». В параграфе 2, пункте 40 ««Понятие конуса» приводится понятие конуса. Автором раскрываются понятие конуса, понятия основных элементов конуса: таких как, основание конуса, вершина конуса, образующая конуса, боковая поверхность конуса, ось конуса и высота конуса; основные свойства прямого кругового конуса. В пункте 41 показано изображение конуса на плоскости, вводятся понятия развертки его боковой поверхности, площади боковой и полной поверхности конуса, в пункте 42 приводится определение усечённого конуса, описываются понятия его элементов. Отметим, что в пункте 41 «Площадь поверхности конуса» и пункте 42 «Усеченный конус» выводятся формулы боковых поверхностей конуса и усеченного конуса» [14], а именно: автором доказывается, что «площадь боковой поверхности конуса равна произведению половины длины окружности основания на образующую» [6], а также что «площадь боковой поверхности усечённого конуса равна произведению полу суммы длин окружностей оснований на образующую» [6].

В пункте 59 «Объём конуса» вводится теорема нахождения объёма конуса, а именно что: «Объём конуса равен одной трети произведения площади основания на высоту» [6]. Также после доказательства теоремы автор выводит следствие.

Отметим, что на углубленном уровне на изучение параграфа 2 «Конус» отведено 4 часа, на изучение пункта 59 «Объем конуса» - 1 час.

В авторской программе отмечается, что в результате изучения темы учащиеся должны:

– «объяснять, что такое коническая поверхность, её образующие, вершина и ось, какое тело называется конусом и как называются его элементы, как получить конус путём вращения прямоугольного треугольника, изображать конус и его сечения плоскостью, проходящей через ось, и плоскостью, перпендикулярной к оси;

– объяснять, что принимается за площадь боковой поверхности конуса, и выводить формулы для вычисления площадей боковой и полной поверхностей конуса;

– объяснять, какое тело называется усечённым конусом и как его получить путём вращения прямоугольной формулу для трапеции, выводить вычисления площади боковой поверхности усечённого конуса;

– решать задачи на вычисление и доказательство, связанные с конусом и усечённым конусом» [14, с. 80];

– «выводить интегральную формулу для вычисления объёмов тел и доказывать с её помощью теоремы об объёме конуса;

– выводить формулы для вычисления объёма усечённого конуса; решать задачи, связанные с вычислением объёма конуса» [14, с. 82].

Таким образом, выбор учебника Л.С. Атанасяна, В. Ф. Бутузова [15] обоснован следующими причинами:

– учебник входит в федеральный перечень учебников, рекомендованных Министерством Просвещения Российской Федерации;

– в данном учебнике наиболее полно представлены основные типы задач на формирование понятия конуса: «задачи на нахождение его элементов: например, образующей конуса, высоты конуса; нахождение площади полной и боковой поверхности конуса; нахождение объема конуса, а также на доказательство утверждений, связанных с понятием сечения конуса и понятием площади сечения конуса; на формирование понятия усеченного конуса: задачи на нахождение его элементов; нахождение площади осевого сечения; полной и боковой поверхности усеченного конуса; нахождение объема усеченного конуса, а также практико-ориентированные задачи» [14].

– в учебнике наиболее полно раскрыто теоретическое и практическое содержание темы «Конусы».

Опишем результаты проведенного нами анализа практического опыта учителей по теме «Конусы», опубликованного в различных статьях, учебно-методических пособиях.

В статье И.Е. Прояевой, А.Д. Сафаровой «Об особенностях преподавания отдельных вопросов стереометрии в школьном курсе геометрии» [39] приведена методическая схема построения изображения конуса на уроках геометрии в школе для повышения качества усвоения материала.

В статье Л.Н. Курбатовой [28] раскрыты методические аспекты изучения площади поверхности тел вращения в российских школах в первой половине 20 века.

В статье Е.Н. Дронова [20] описаны возможности использование программы GeoGebra для решения геометрических задач основного государственного экзамена по математике.

В статье магистра А.А. Гавришко «Изучение темы «Объемы геометрических тел» в общеобразовательной школе» [13] рассматривается понятие объема геометрических тел, в том числе и понятие объема конуса. Приводятся рекомендации по решению разных типов задач по этой теме.

В статье магистра О.В. Стоговой «Отдельные аспекты методики обучения теме "Тела вращения" и решению задач на вычисление объемов круглых тел» [51] затрагиваются отдельные особенности методики обучения геометрии в старших классах по обучению теме «Конусы».

На сайте «Мультиурок» И.В. Петруниной представлен конспект открытого урока по теме «Конус» [36], где приведены задачи на нахождение площади поверхности конуса, высоты конуса.

На сайте «Первое сентября. Открытый урок» Л.Л. Гусева [17] приводит конспект урока закрепления учебного материала по теме «Объем конуса»; Л.В. Севергина [43] – конспект урока изучения нового материала по теме «Конус», где ее описана история развития представлений о конусе, подобраны задачи на нахождение элементов конуса; М.Н. Наумова [33] – конспект урока по теме «Конусы в нашей жизни» на закрепление понятия Конуса и его элементов, нахождение его площади поверхности; Еремина Л.А. [22] – презентацию на тему "Объемы тел", где выводится формула на нахождение объема конуса.

На сайте «Я учитель» также представлена методическая разработка по теме «Конус» от учителя математики Н.В. Иванченко [27], где описан урок изучения нового материала с применением информационных технологий на формирование понятия конуса.

На ЕГЭ также встречаются задачи по теме «Конус».

Так, по математике профильного уровня в задании №3 встречаются задачи на нахождение объема конуса, площади боковой поверхности, площади полной поверхности, нахождение угла между образующей конуса и плоскостью основания, нахождение образующей конуса, нахождение диаметра основания конуса, нахождение высоты конуса. На сайте «Решу ЕГЭ» [решу егэ] представлен материал для подготовки ЕГЭ по математике.

Таким образом, анализ статей [13]; [20]; [28]; [39]; [51] показывает заинтересованность учителей к данной теме.

Далее раскроем методику организации уроков геометрии по теме «Конус» с использованием пакета «Geogebra» в общеобразовательной школе.

На современном этапе образования геометрия начинает меняться, но все равно есть много проблем, которые нужно решить в школе. Современные методы преподавания геометрии стремятся сделать учебный процесс более интересным, доступным и подходящим для разнообразных обучающихся. Возникает вопрос, как же проводить урок с использованием пакета «GeoGebra»?

Во-первых, надо обратить особое внимание учителю на планирование уроков. Учитель должен выбрать необходимые инструменты в программе, которые он будет использовать при объяснении темы урока или исследовании задачи. Если цель урока – изучение конусов, то можно использовать функции программы для построения конусов различных размеров и форм, изменяя параметры в программе.

Важным фактором урока является введение и мотивация учащихся.

Положительным моментом пакета «Geogebra» является то, что можно дать задания с разным уровнем сложности каждому ученику. Необходимо создать задания с разным уровнем сложности, чтобы учащиеся могли работать своими силами и не пользовались дополнительными подсказками. Также можно предложить дополнительные материалы для самостоятельной работы ученикам.

Необходимо начать первый урок с краткой истории возникновения понятия конуса. Объяснить основные его свойства и дать определение. Затем уже объяснить цель урока или сформулировать её вместе с учащимися.

Определение конуса и его основных элементов представляет собой важный аспект изучения геометрии, который имеет широкое применение в различных областях науки.

Вершина конуса. Ключевой элемент, определяющий форму и свойства конуса. Вершина представляет собой точку, из которой исходят все линии, образующие боковую поверхность конуса (рисунок 18).

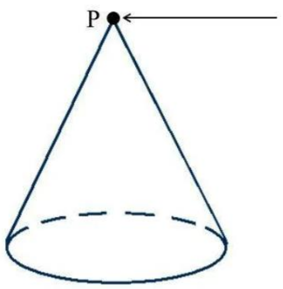



Рисунок 18 – Вершина P конуса

Важно отметить, что положение вершины конуса определяет его форму, а также влияет на его объем и площадь поверхности.

Основание конуса. Представляет круг или многоугольник, который лежит в плоскости, перпендикулярной к оси конуса (рисунок 19).


Рисунок 19 – Основание конуса

Радиус основания вместе с высотой конуса определяет его размер и геометрические характеристики. Основание конуса может быть как круглым, так и многоугольным, что дает возможность изучать различные типы конуса.

Образующая конуса. Образующая (рисунок 20) представляет собой отрезок, соединяющий вершину с любой точкой на окружности основания.

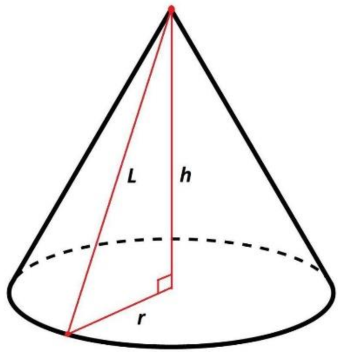



Рисунок 20 – Образующая (l) и высота конуса (h)

Длина образующей важна для определения формы конуса и вычисления площади его боковой поверхности.

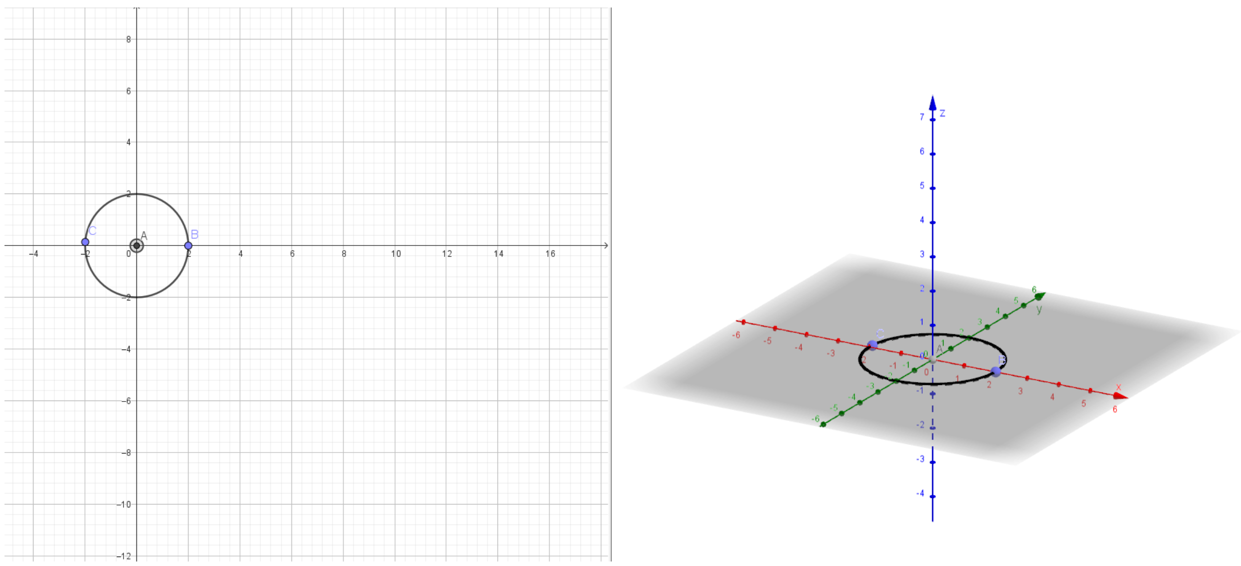


Рисунок 21 – Построение окружности

Изменение длины образующей приводит к изменению формы и размеров конуса.

Высота конуса.

Высота конуса – это кратчайшее расстояние от вершины до плоскости основания (рисунок 20). Является важным параметром при вычислении объема и площади поверхности конуса, определяет угол наклона боковой поверхности.

Кроме того, на первых уроках по теме можно разобрать также с учащимися процесс построения усеченного конуса в программе «Geogebra».

Рассмотрим пример его построения по этапам.

Этап 1: на полотне с помощью инструмента «Окружность по центру и точке» строим окружность.

На окружности поставим точку и анимируем её (рисунок 21).

Этап 2. Проводим прямую с помощью инструмента «Прямая» через OC.

Получаем диаметр AC данной окружности (рисунок 22).

На диаметре произвольно поставим точку D.

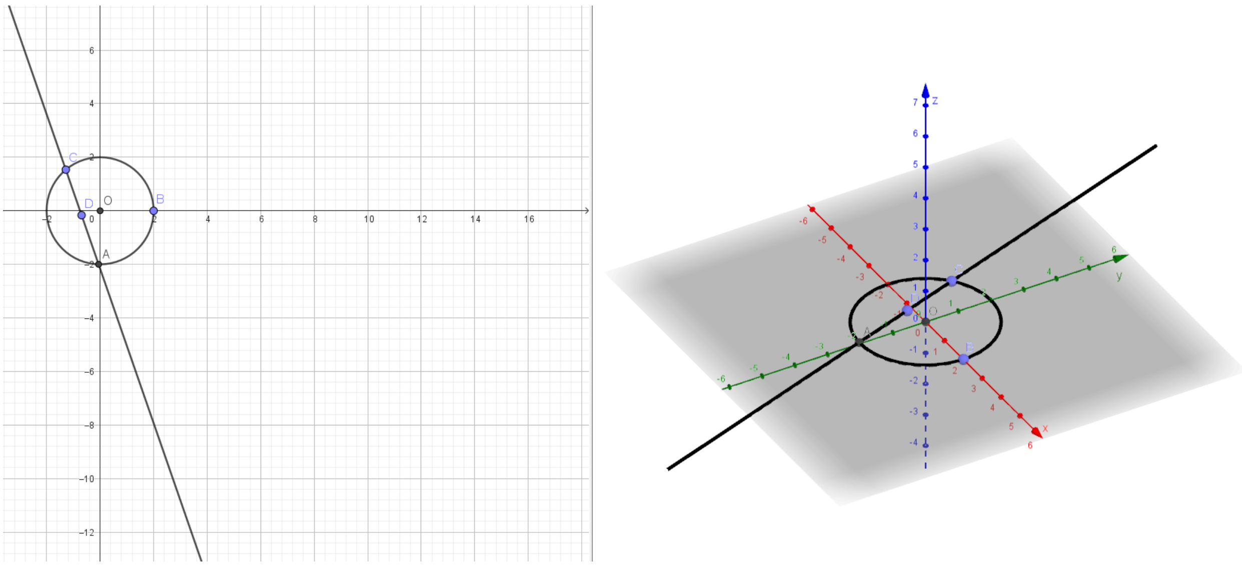


Рисунок 22 – Построение диаметра AC и точки D

Этап 3. Через точку D проведем прямую, параллельную оси z, с помощью инструмента «Параллельная прямая» (рисунок 23).

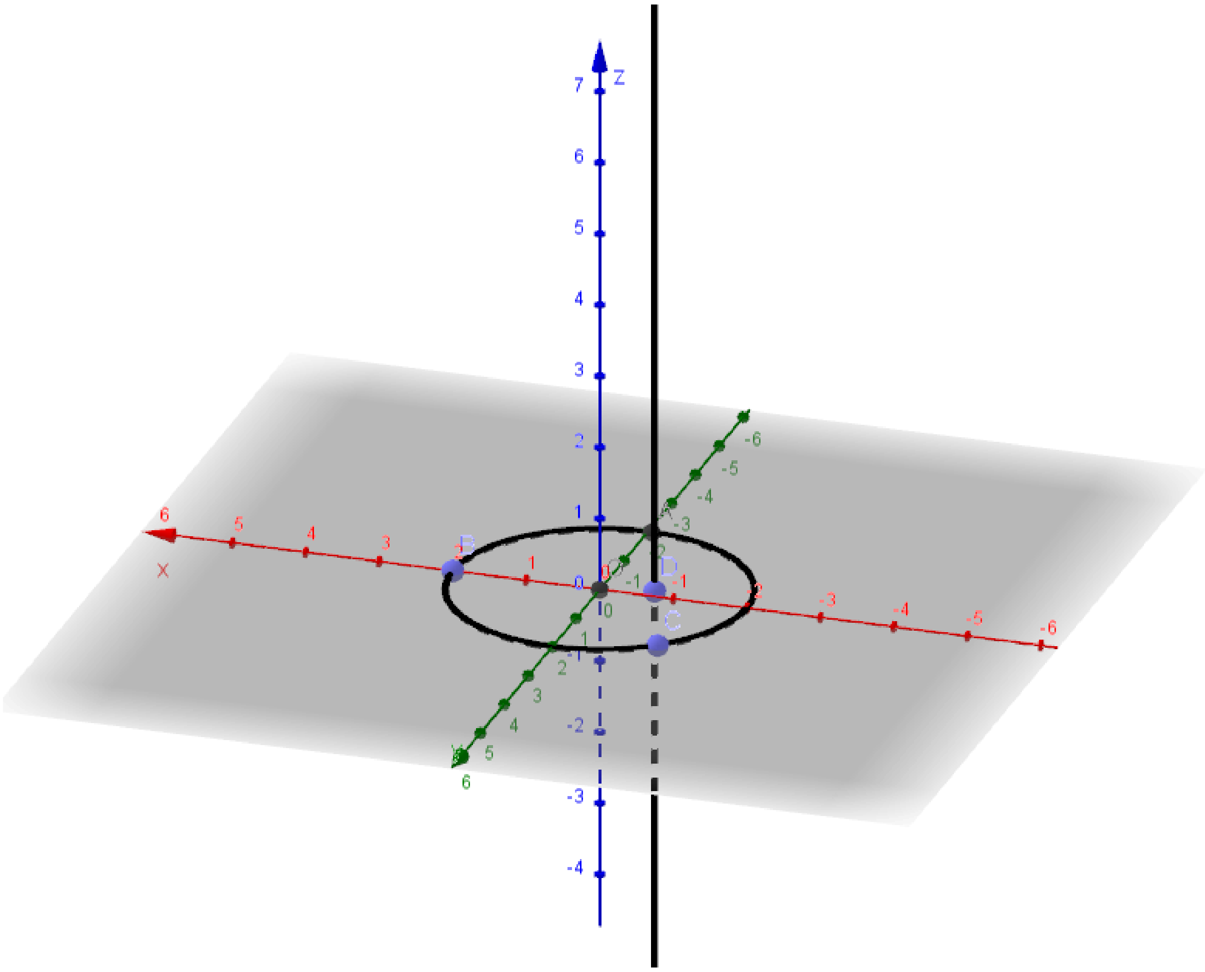


Рисунок 23 – Построение прямой, параллельной оси z

Этап 4. Проводим отрезок ОС.

На проведенной прямой отмечаем произвольную точку Е (рисунок 24).

Через точку Е проведем прямую параллельную отрезку ОС, с помощью инструмента «Параллельная прямая».

На оси z поставим точку $O_1$ (рисунок 25).

Этап 5. Проводим многоугольник через точки $CO_1OE$.

Проводим окружность по центру и точке Е, с помощью инструмента «Окружность по точке и оси» (рисунок 25).

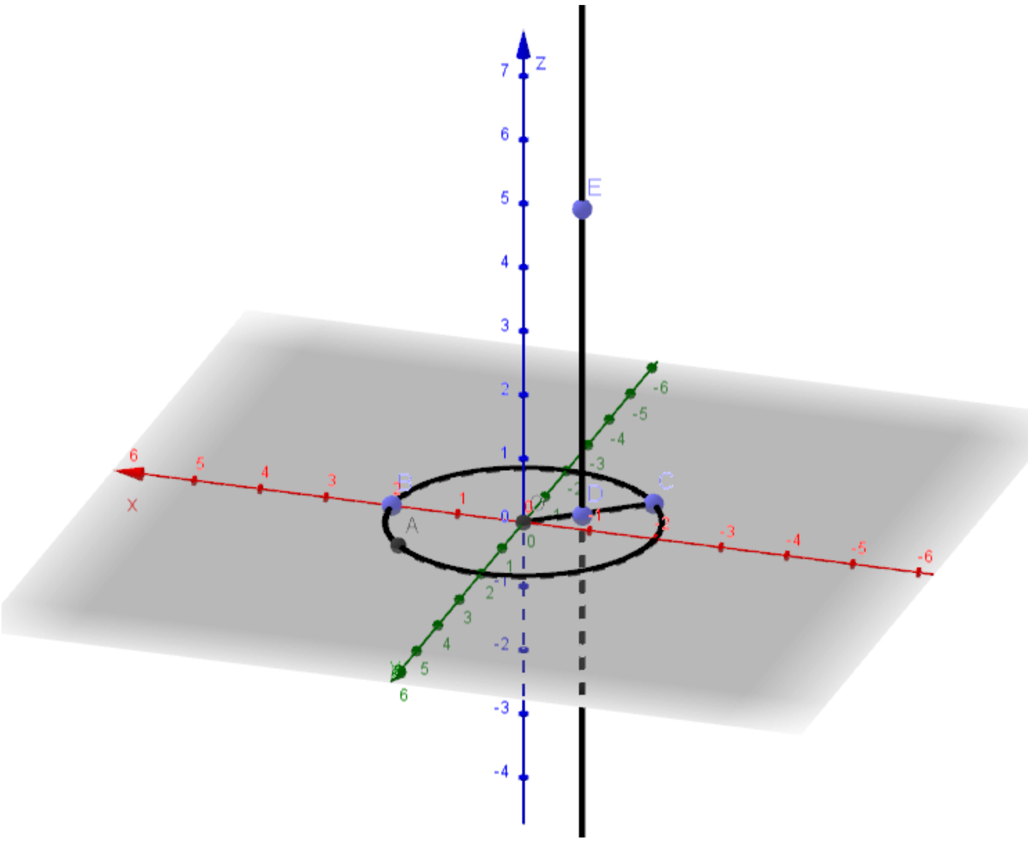



Рисунок 24 – Построение отрезка ОС и произвольной точки Е
на параллельной прямой

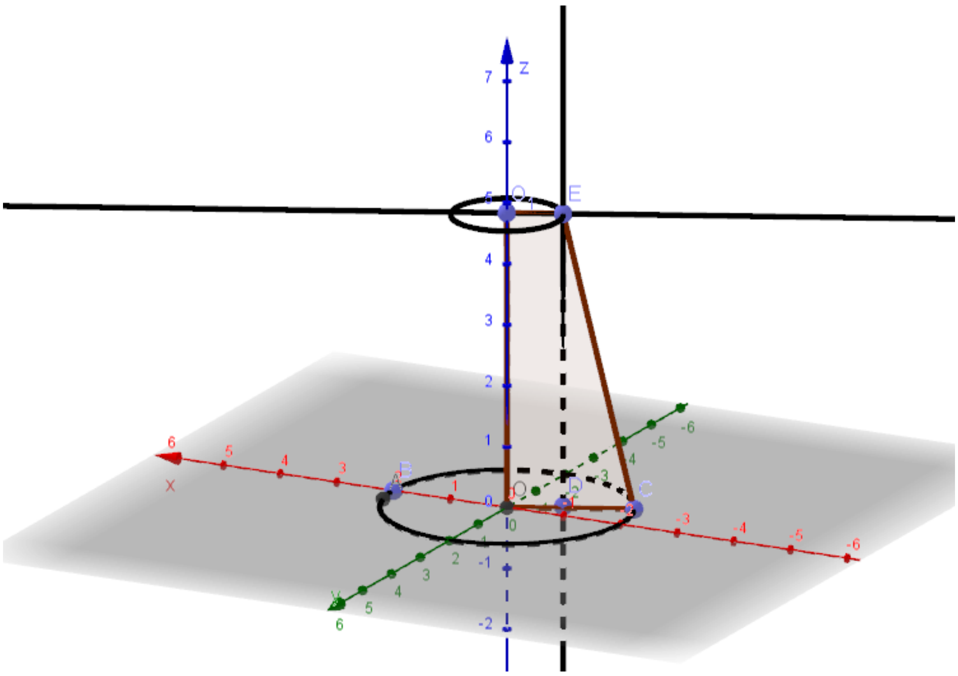



Рисунок 25 – Построение окружности

Этап 6. Далее заходим в свойства трапеции, меняем цвет и стиль. Далее убирается ось координат, две прямые. В свойстве оставляем след у четырехугольника (рисунок 26). Нажимаем кнопку «Вращать».

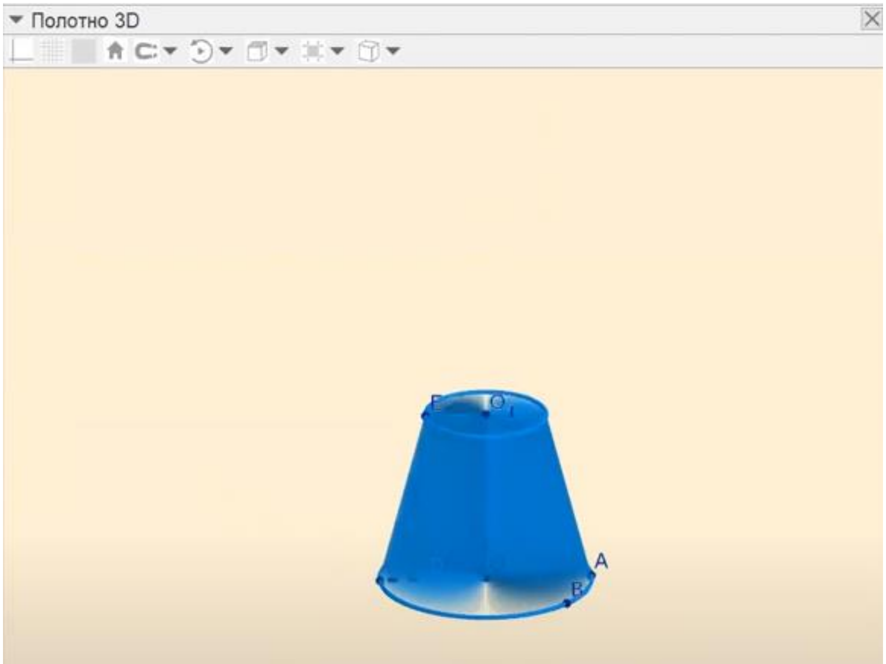



Рисунок 26 – Усеченный конус

Трапеция, вращаясь около оси $OO_1$, в пространстве описывает усеченный конус.

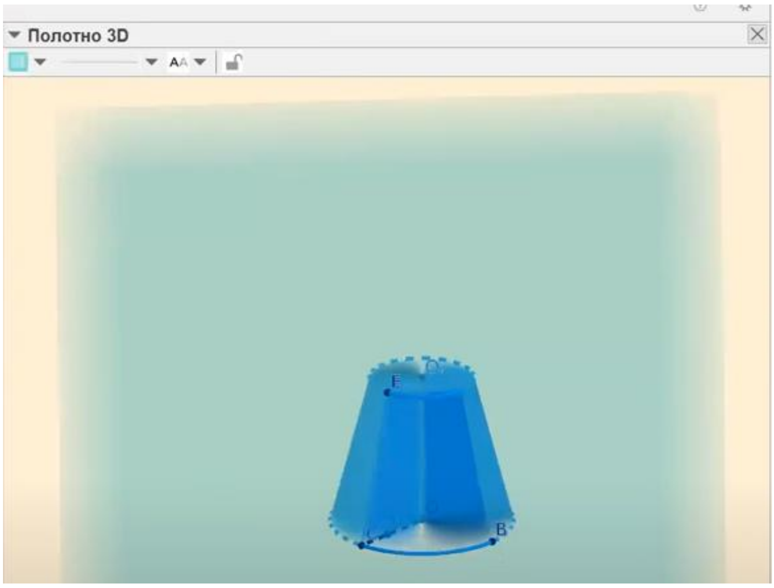



Рисунок 27– Сечение конуса

Далее проводим плоскость через три точки CFB с помощью инструмента «Плоскость через три точки» (рисунок 27).

Следующим этапом урока по теме «Конус» станет объяснение темы. Можно показать разные свойства и интересные задачи при помощи самого пакета «Geogebra», а дальше предложить им самим, к примеру, выяснить связь между радиусом основания и высотой конуса.

Необходимо визуализировать конусы. Можно на одном из уроков построить сечения конуса и провести наблюдения, как изменяются эти сечения при изменении угла.

Самым важным этапом урока является решение задач, связанных с конусом и его свойствам. Можно решить задачи на нахождения объема и площади поверхности конуса при определенных размерах.

После решения нескольких задач необходимо предоставить время учащимся на коллективное обсуждения. Дать возможность высказать свои впечатления и вопросы по теме урока.

Отметим, что геометрия играет важную роль в развитии пространственного воображения у учащихся. Умение представлять трехмерные объекты и их взаимосвязи является важным навыком не только для геометрических задач, но и для решения реальных проблем в различных областях жизни. Для многих учащихся геометрические понятия могут быть сложными и абстрактными. Учителям часто приходится сталкиваться с трудностью в объяснении абстрактных геометрических понятий.

Некоторые учащиеся могут испытывать трудности в видении практического применения геометрии в реальной жизни. Важно показывать им, какие навыки они приобретают, и как они могут использовать их в различных сферах.

В школах с ограниченными ресурсами может быть сложно обеспечить доступ к современным технологиям, таким как интерактивные доски и компьютерные программы, которые могут сделать процесс обучения более интересным и эффективным.

На современном этапе геометрия начинает меняться, но все равно есть много проблем, которые нужно решить. Современные методы преподавания геометрии стремятся сделать учебный процесс более интересным, доступным и подходящим для разнообразных обучающихся.

В статье А.А. Вендиной и О.И. Михоненко [11] рассматривается актуальный вопрос внедрения интерактивных геометрических сред в образовательный процесс. Авторы предлагают реализовать математический эксперимент на уроках стереометрии в 10–11 классах на примере конуса. Эксперимент состоит из четырех этапов.

Этап 1. Работа с основными понятиями.

«На данном этапе происходит основной анализ теоретического материала. Рассматриваются основные понятия из курса стереометрии и планиметрии, такие как, конус, образующая, сечение, параллельная прямая, окружность и т. д. Учащиеся также изучают или вспоминают компьютерные программы, в которых строят геометрические фигуры» [11].

Этап 2. Выдвижение гипотез.

«На данном этапе ученики предлагают и думают, какие могут получиться фигуры при пересечении конуса плоскостью» [11].

Этап 3. Проверка гипотез.

«На третьем этапе ученики проверяют свою гипотезу с помощью компьютерного моделирования, используя интерактивные геометрические среды. Если ученики сталкиваются с программой впервые, то учитель должен объяснить основные рекомендации при работе с интерактивными средами. Необходимо привести основные рекомендации при работе с пакетом «GeoGebra»» [11] (рисунок 28).

Также «учитель обсуждает с учениками математическую составляющую. В качестве примера можно привести координаты точек, которые позволят привести нужную секущую плоскость» [11].

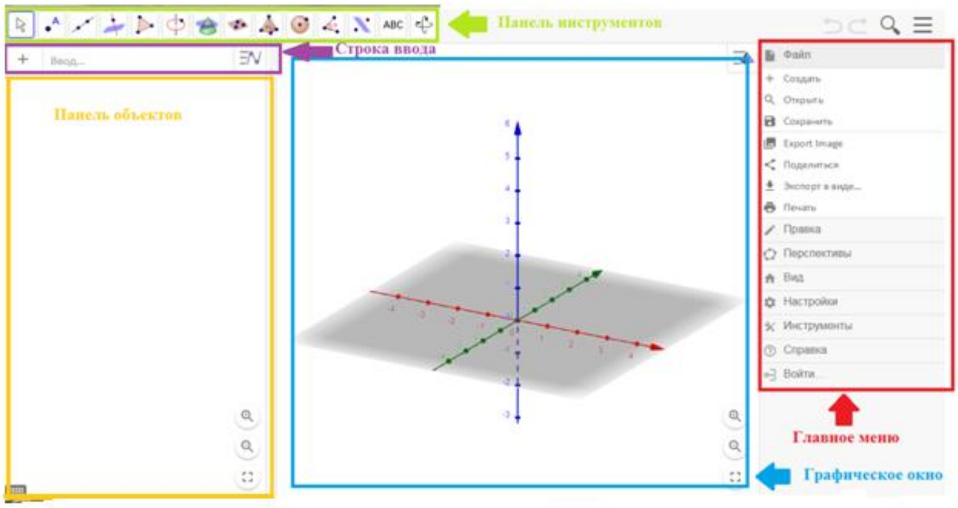



Рисунок 28 – Функции программы GeoGebra

«Для построения конуса используются инструменты: построение многогранников и тел вращения; построение плоскости; кривая пересечения; ползунок.

Чтобы построить конус необходимо зайти в панель инструментов и выбрать «Построение конуса». Определяем две точки: основание конуса и высоту конуса. После введения параметров указываем радиус конуса» [11] (рисунок 29).

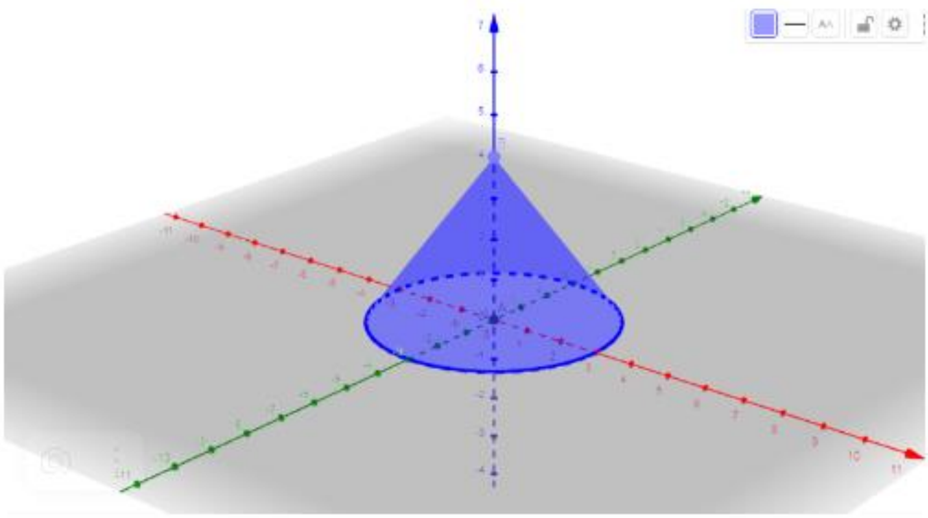


Рисунок 29 – Построение конуса в программе GeoGebra

Далее строится осевое сечение конуса. Выбираем инструмент построение плоскости и отмечаем три точки (рисунок 30).

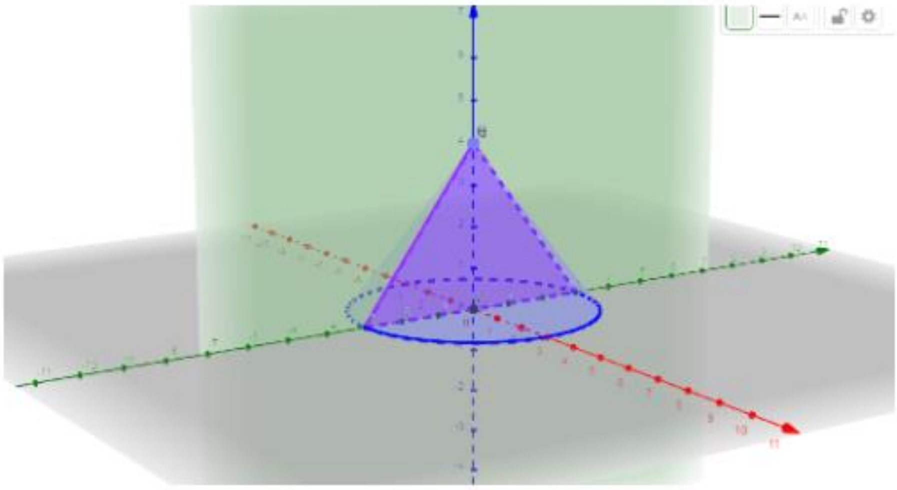


Рисунок 30 - Построение осевого сечения конуса

«Плоскость перпендикулярна основанию, а значит можно использовать инструмент «Перпендикулярная плоскость».

При использовании инструмента «Кривая пересечения», мы видим, что осевым сечением конуса является равнобедренный треугольник.

Используя инструмент «Ползунок», плоскость начинает перемещаться» [11] (рисунок 31).

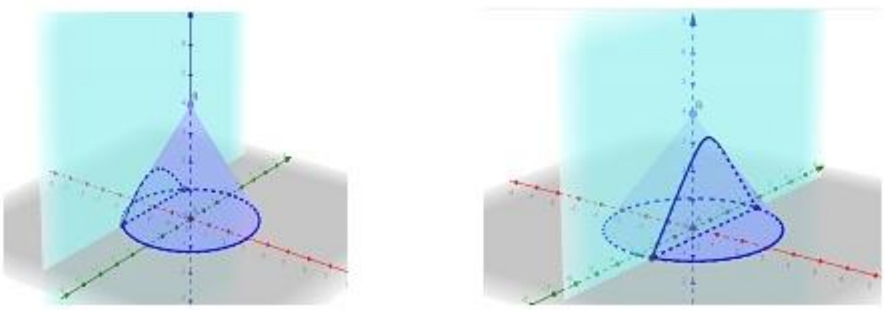


Рисунок 31 – Процесс движения плоскости

«Следующий этап эксперимента – проведение секущей плоскости так, чтобы она проходила через вершину конуса под разными углами (рисунок 32)» [11].

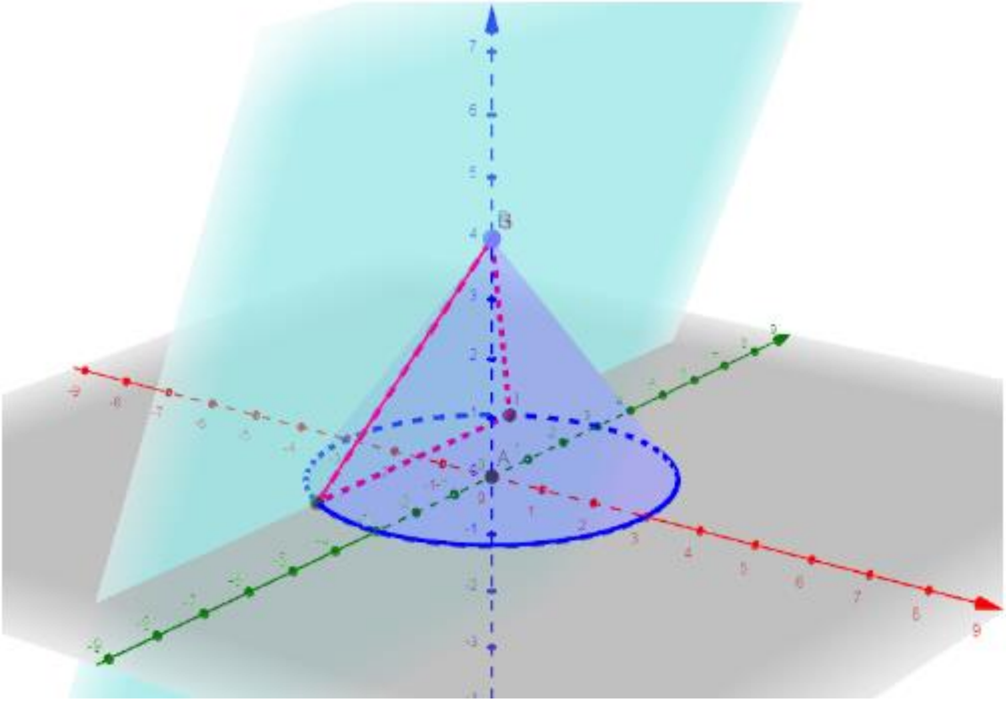


Рисунок 32 – Построение пересечения конуса плоскостью

«В данном случае сечение также имеет форму равнобедренного треугольника. Также ученики могут построить плоскость, параллельную основанию конуса. В сечении получается круг» [11] (рисунок 33).

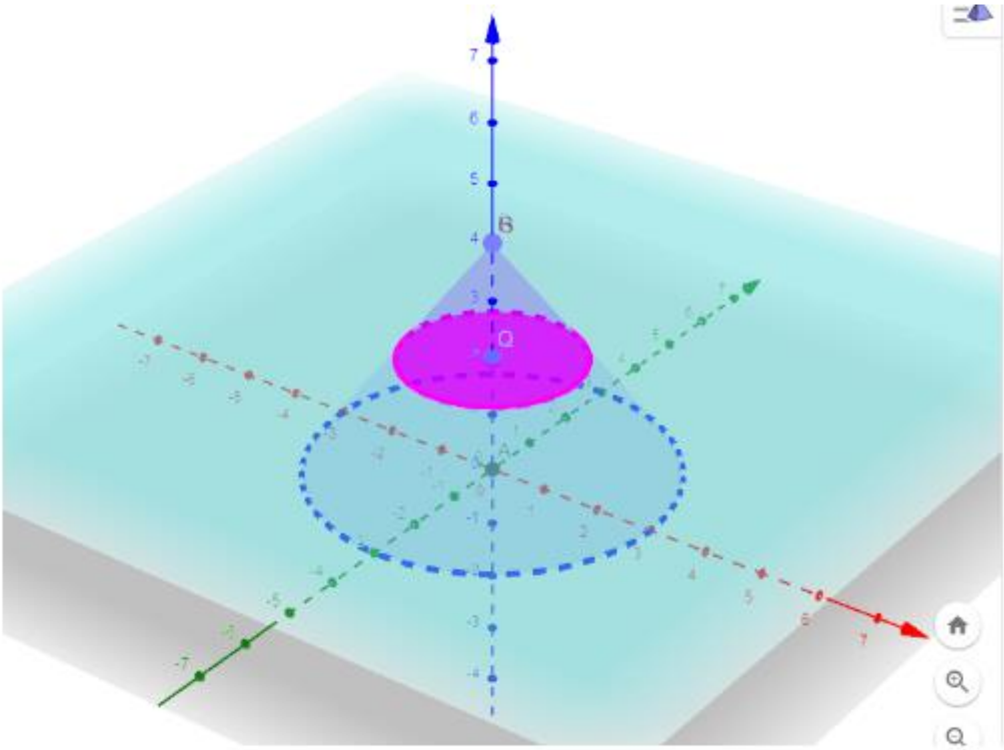


Рисунок 33 – Построение пересечения конуса плоскостью, параллельной основанию

«Круг в сечении получается только тогда, когда плоскость параллельна основанию. В остальных случаях получается эллипс» [11].

Этап 4. На четвертом этапе подводят итоги выполненной работы.

Приведем несколько примеров решения задач с использованием геометрический среды пакета «GeoGebra».

Задача 1. Построить конус с радиусом 3.

Для построения конуса используем инструмент «Cone». Выбираем инструмент и на оси z выбираем две точки (рисунок 34).

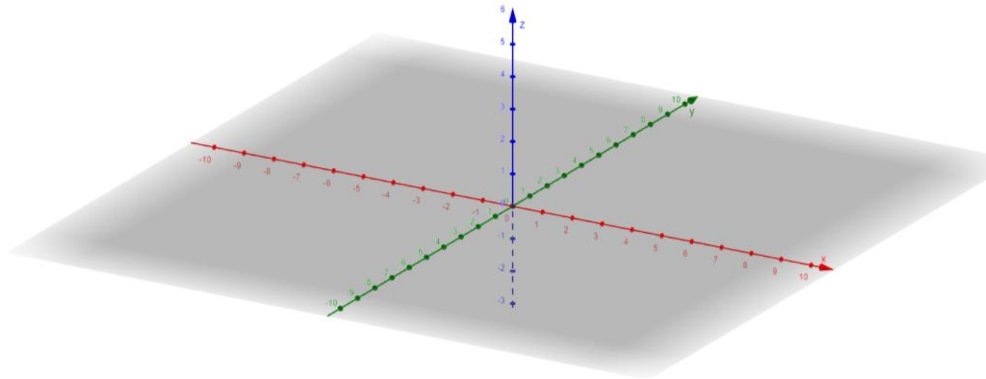


Рисунок 34 – Построение оси z, двух точек на ней

После чего появится окно с указанием радиуса. Указываем радиус (рисунок 35).

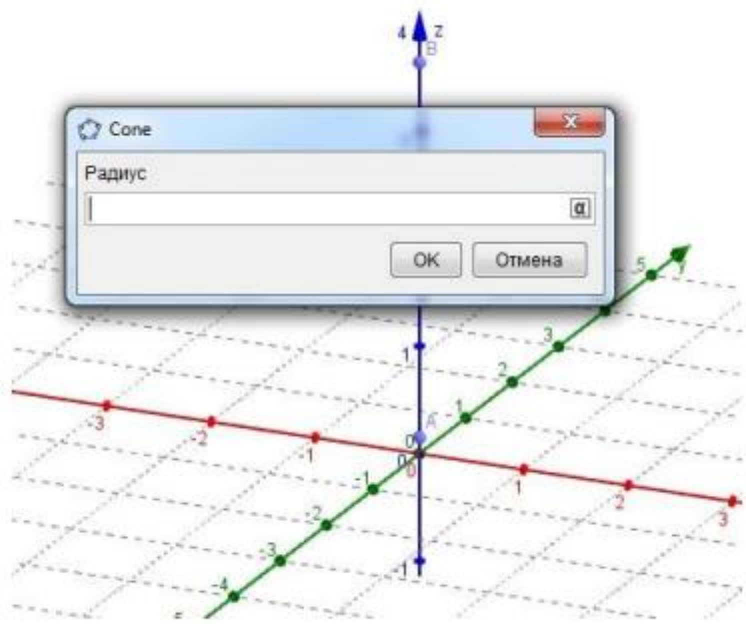



Рисунок 35 – Окно с указанием радиуса

Вводим значение радиуса и получается конус с данным радиусом (рисунок 36).

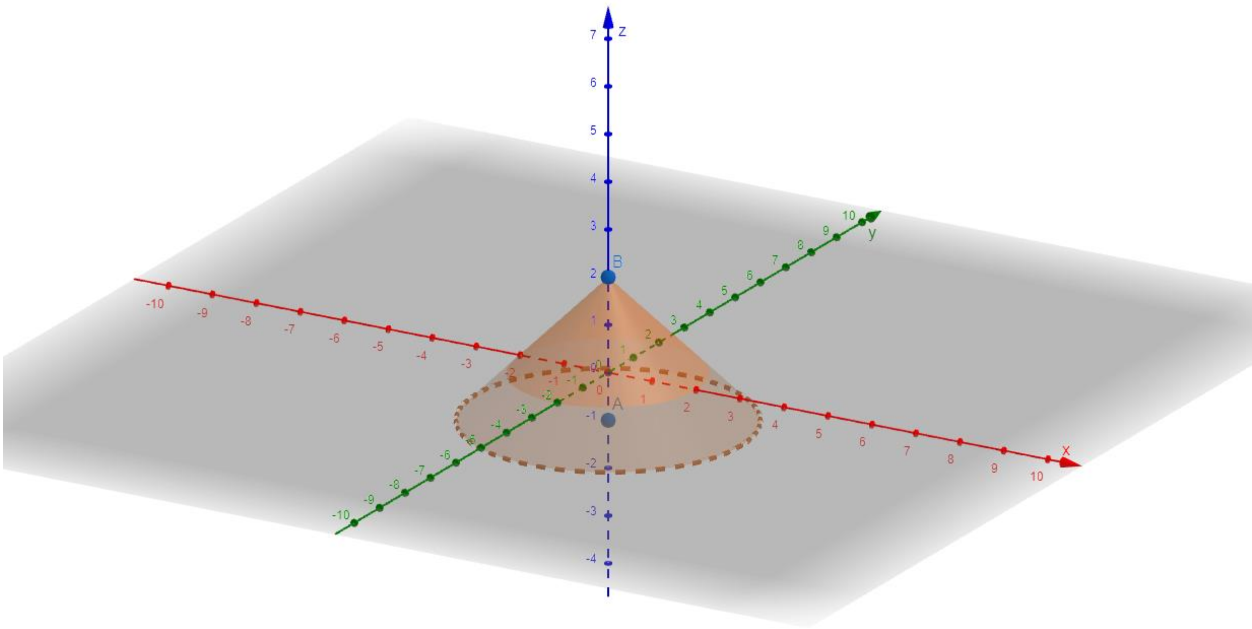



Рисунок 36 - Построение конуса с заданным радиусом

Таким образом, решена задача на построение конуса с радиусом 3.

При решении задач был использован инструмент «Cone», с указанием двух точек на оси z и указанием радиуса.

Задача 2. Построить конус, образующая которого равна диаметру основания.

Представим алгоритм построения:

Шаг 1. Открываем интерактивную геометрию среду GeoGebra и выбираем режим 3D Calculator.

Шаг 2. Строим окружность (инструмент «Окружность по точке и оси») с центром в начале координат и радиусом, равным отрезку, соединяющему произвольную точку A на оси Ox (рисунок 37).

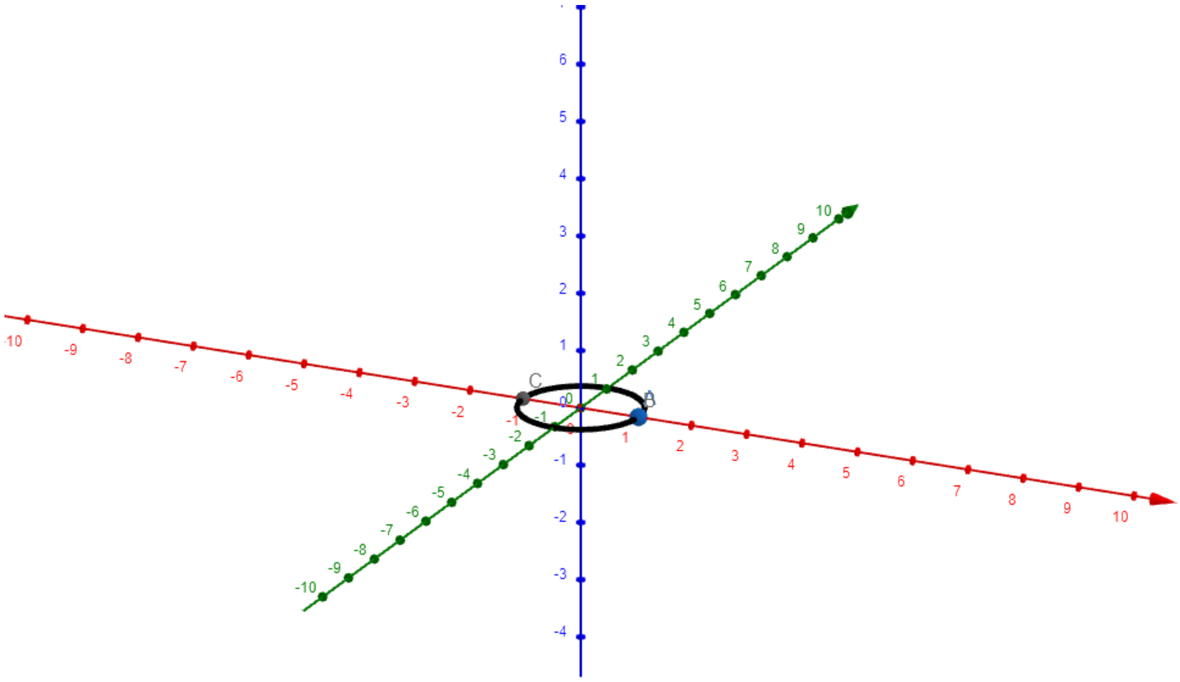


Рисунок 37 – Построение окружности с центром в начале координат

Шаг 3. Строим сферу с центром в точке А и радиусом, равным диаметру построенной окружности (рисунок 38).

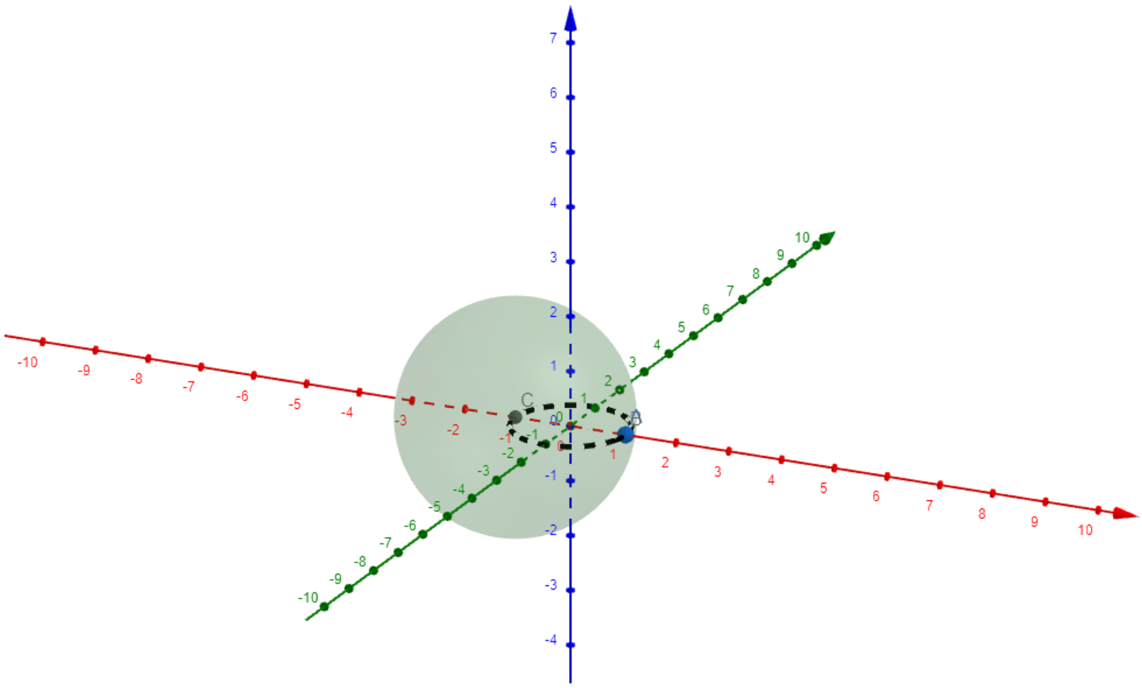


Рисунок 38- Построение сферы с центром в точке А и радиусом, равным диаметру построенной окружности

Шаг 4. Строим точку пересечения сферы и вертикальной оси координат – вершина E конуса (рисунок 39).

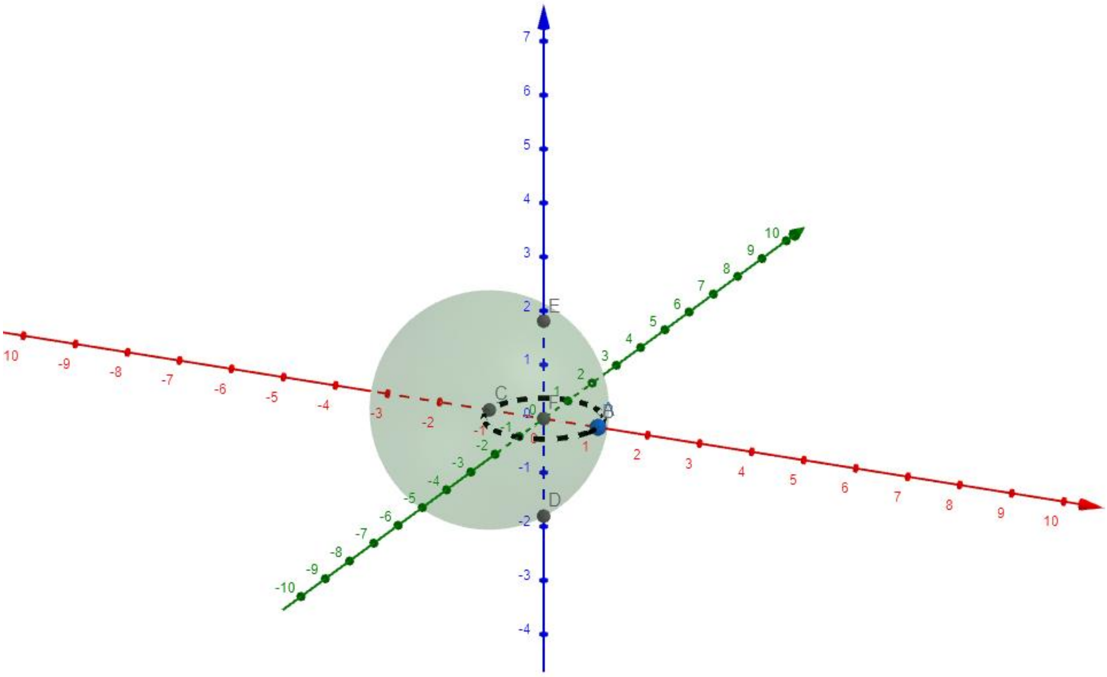



Рисунок 39 – Построение вершины E конуса

Шаг 5. Измеряем расстояние от центра окружности до точки A (инструмент «Расстояние или длина») (рисунок 40).

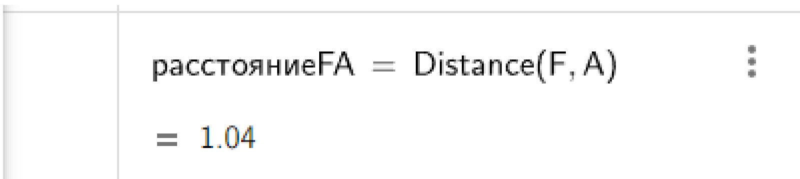



Рисунок 40 – Расстояние от центра окружности до точки A

Шаг 6. Строим конус (инструмент «Конус»). Нужно указать сначала точку – центр окружности в основании, затем точку – вершину конуса, затем в появившемся окне ввести радиус основания. Радиус основания измерен в предыдущем пункте, вводим его обозначение «расстояние FA» (рисунок 41).

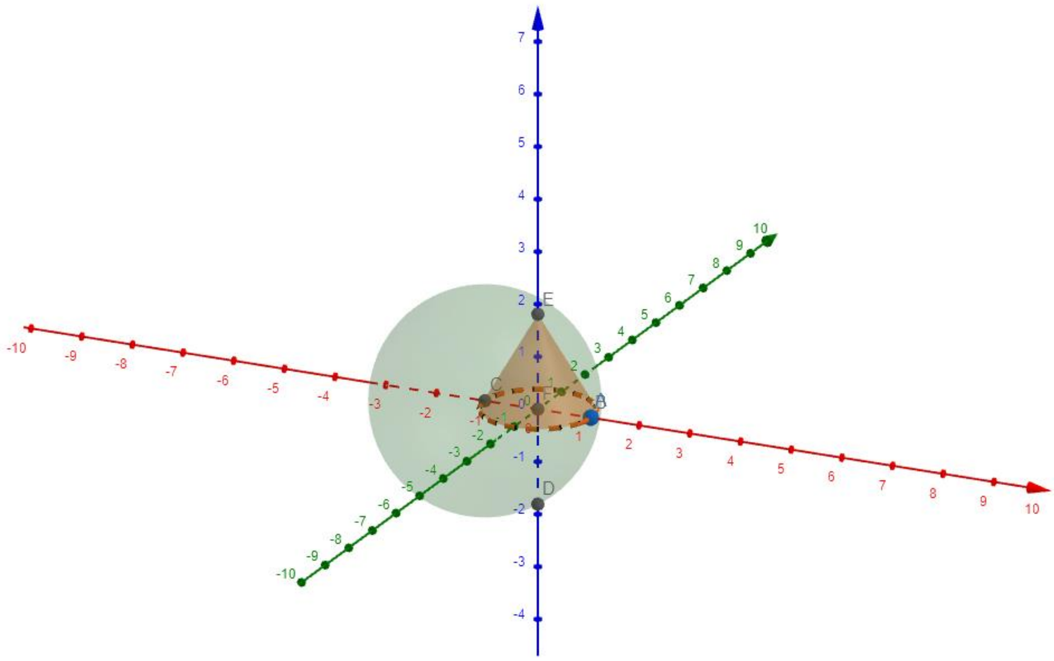


Рисунок 41 – Конус, образующая которого равна диаметру основания

Таким образом, в данном параграфе нами рассмотрена методика организации уроков геометрии по теме «Конусы» с использованием интерактивной геометрической среды «GeoGebra».

## 2.2 Система задач по теме «Конусы» в рамках технологии развивающего обучения решению задач и информационных технологий

Теоретические основы применения технологии обучения решению развивающих задач описаны в работах Т.А. Ивановой, Д. Пойа, Г.И. Саранцев, Л.М. Фридмана.

Для обучения школьников решению развивающих задач в теории и методике обучения математике считают целесообразным: 1) сочетать стандартные и нестандартные задачи (Л.М. Фридман [53]); 2) применять искусственные приемы, не рассматриваемые отдельно в школьном курсе математики; данные задачи «должны иметь посильные для учащихся трудности и предлагаться в процессе всего обучения, а не от случая к случаю»; (З.П. Матушкина [30]); 3) больше внимания уделять опыту самостоятельной работы школьников; методике решения задач (Д. Пойа [38]; Г.И. Саранцев [42]); 4) использовать «цепочку новой информации, которой может овладеть ученик в меру возможностей, потребностей и способностей», в основу ее построения надо положить: задачи, несущие новую информацию; задачи, которые не могут быть решены параллельно с изучаемым в классе теоретическим материалом» (В.А. Гусев [16]).

Применение технологии Т. А. Ивановой позволяет организовать новый способ познавательной деятельности обучающихся на уроках геометрии, более подробно разобрать материал, рассмотреть всевозможные виды решения задач по теме «Конусы».

Рассмотрим более подробно технологию Т.А. Ивановой.

Так, автором выделены «цели развивающего обучения решению задач, которое направлено на: развитие школьника, его осознанное отношение к математической деятельности, понимание математического содержания» [26]. Указано, что «в ходе решения нестандартных, проблемно-развивающих задач обучающиеся могут познакомиться с фактами, теоремами, идеями, методами и приемами» [26].

На основе этой технологии представим систему задач по теме «Конусы», составленную на основе технологии развивающего обучения решению задач Т.А. Ивановой. В основе этой технологии лежит концепция Л.С. Выготского о зоне ближайшего развития ученика. Автор описывает диагностируемые учебные цели на уровнях: «знание», «понимание», «применение» на основе таксономии целей обучения Б. Блума.

Отметим, что на уровне «применение правил» цель считается достигнутой, если ученик:

«а) выполняет действия по правилу;

б) применяет правило к решению конкретного цикла упражнений, соответствующих принципу полноты (если она содержит все виды заданий на данное правило, включая и особенные случаи);

в) обнаруживает ошибки в упражнениях с ловушками;

г) составляет краткий справочник с возможными ошибками» [26].

Отметим, что геометрия всегда была трудной дисциплиной для ее понимания учениками. Изучении геометрии в стандартном виде, как изучали раньше, больше не приносит таких же хороших результатов. Для детей геометрия стала очень тяжелым и трудным предметом. Решить проблему помогает использование интерактивных геометрических средств. Применение пакета «Geogebra» при изучении конуса может быть очень разнообразным и включать в себя множество интересных концепций. Изучении конуса с помощью пакета «Geogebra» позволяет учащимся более подробно изучить геометрические и математические аспекты этой фигуры. «Geogebra» дает возможность создания трехмерных моделей конусов с возможностью вращения и масштабирования. Учащиеся могут наблюдать изменение формы конуса при изменении его параметров, таких как радиус основания, высота и угол наклона образующей.

Кроме того, возможности технологии развивающего обучения решению задач Т.А. Ивановой и возможности обучению геометрии в общеобразовательной школе с использованием информационных технологий: интерактивных геометрических средств, пакета «Geogebra», можно реализовать на примере темы «Конусы» в общеобразовательной школе.

В рамках выпускной квалификационной работы приведем разработанную систему задач с решением по теме «Элементы конуса, площадь поверхности конуса, объём конуса» в рамках технологии развивающего обучения решению задач и информационных технологий.

Блок А. Задачи на выполнение действий по применению формулы.

Задача 1. Найдите объем конуса, если известна площадь его основания – 100,25 см$^2$ и высота – 7 см.

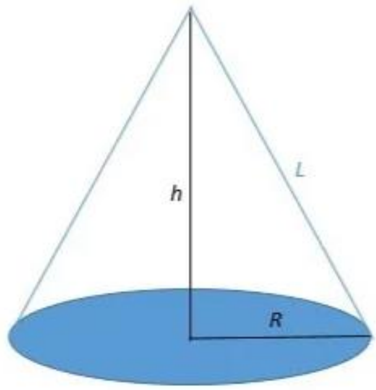



Рисунок 42 – К задачам 1-2

| Дано: | Решение: |
|---|---|
| конус; | Применим формулу нахождения объёма конуса |
| $S_{основания} = 100{,}25$ | (рисунок 1), подставив в нее заданные значения: |
| h = 7 см | $V = \frac{1}{3} \cdot h \cdot S_{основания}$. |
| Найти: | $V = \frac{1}{3} \cdot 7 \cdot 100{,}25 = 233\frac{11}{12}$ см$^3$. |
| $V_{конуса}$ -? | Ответ: V = $233\frac{11}{12}$ см$^3$ |

Задача 2. «Вычислите объем конуса с радиусом основания 3 см и высотой 6 см (рисунок 1)» [6].

Решим задачу.

| Дано: | Решение: |
|---|---|
| конус, | Подставим значения в формулу нахождения объёма |
| $R_{осн} = 3$ см | конуса: |
| h = 6 см | $V = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot h$ |
| Найти: | $V = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 9 \cdot 6 = 18\pi$ см$^3$ |
| $V_{конуса}$ -? | Ответ: $V = 18\pi$ см$^3$ |

Задача 3. «Радиус основания конуса 3 м, высота 4 м. Найдите образующую (рисунок 43)» [40].

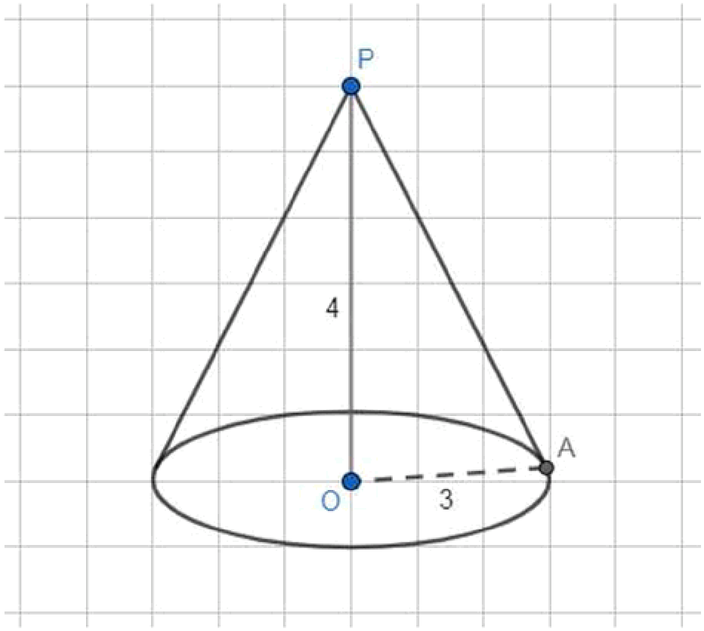



Рисунок 43 – К задаче 3

Решение. Пусть точка О – центр основания данного конуса, а А – точка на его окружности, тогда ОА = r = 3 м. Пусть точка В – вершина конуса, тогда $BO \perp OA$ и ВО = 4 м – высота конуса. Имеем, что в прямоугольном треугольнике ВОА:

$\mathrm{BA} = \sqrt{\mathrm{BO}^2 + \mathrm{OA}^2} = \sqrt{4^2 + 3^2} = \sqrt{2}5 = 5$ м – образующая конуса.

Ответ: 5 м.

Задача 4. «Образующая конуса l наклонена к плоскости основания под углом 30°. Найдите высоту (рисунок 44)» [40].

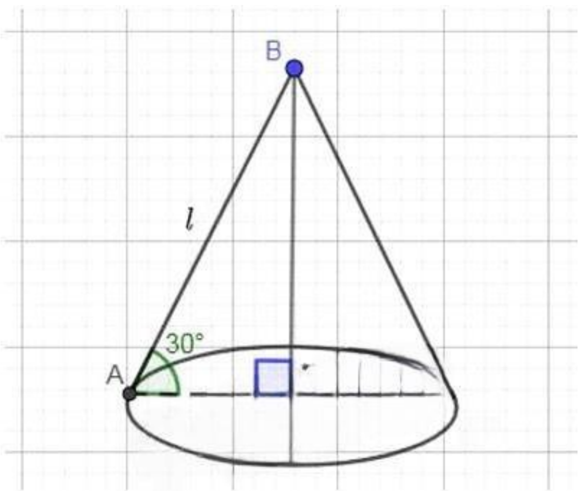



Рисунок 44 – К задаче 4

Решение. Пусть точка B – вершина конуса, точка A – лежит на окружности основания и O – центр основания. Тогда BO – высота конуса и BA = l – образующая; угол BAO = 30°. Имеем, что в прямоугольном треугольнике BOA: $BO = BA \cdot \sin 30^0 = \frac{1}{2}l$.

Ответ: $\frac{1}{2}l$.

Задача 5. «Радиус основания конуса равен 12, высота равна 16. Найдите площадь полной поверхности конуса, деленную на π» [40].

Решение. «Найдем образующую по теореме Пифагора: $l = \sqrt{h^2 + r^2} =$ $= 20$. Площадь полной поверхности конуса $S = \pi r^2 + l\pi r = 384$» [40].

Ответ: 384.

Задача 6. «Длина окружности основания конуса равна 7, образующая равна 2. Найдите площадь боковой поверхности конуса» [40].

Решение. Площадь боковой поверхности равна: $5 = \frac{1}{2} \cdot 7 \cdot 2 = 7$.

Ответ: 7.

Блок Б. Цикл упражнений на применение данной формулы.

Задания на нахождение площади полной и боковой поверхности конуса:

Задача 7. «Длина окружности основания конуса равна 3, а образующая равна 2. Найдите площадь боковой поверхности конуса» [40].

Решение. «Площадь боковой поверхности конуса равна $S = \pi Rl = \frac{1}{2}Cl$, где C – длина окружности основания, а l – образующая. Тогда:

$S = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 3 = 3$» [40].

Ответ: 3.

Задача 8. «Высота конуса равна 6, образующая равна 10. Найдите площадь его полной поверхности, деленную на π» [40].

Решение. «Площадь поверхности находится сложением $S_{осн}$ и $S_{бок}$.

Радиус основания находим по теореме Пифагора: $r = \sqrt{l^2 - h^2} = 8$.

Тогда площадь поверхности: $S = \pi r^2 + l\pi r = \pi r(L + r) = \pi \cdot 8 \cdot 18 =$ $= 144\pi$» [40].

Ответ: 144.

Задания на вычисления объема конуса и его элементов:

Задача 9. «Пусть h, г и V - соответственно высота, радиус основания и объем конуса (рисунок 1). Найдите: а) V, если h = 3 см, r = 1,5 см; б) h, если г = 4 см, $V = 48\pi$ см$^3$; в) r, если h = m, V = p» [6].

Решим задачу.

Дано:

r – радиус конуса

h – высота конуса

V – объём конуса

Найти:

а) h = 3 см, r = 1,5 см,

V - ?

б) r = 4 см, $v = 48 \cdot \pi$ см$^3$

h - ?

в) h = m, V = p, r - ?

Решение:

$V_{конуса} = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot h$

а) $V_{конуса} = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 1{,}5^2 \cdot 3 = 2{,}25 \cdot \pi$ см$^3$

б) $h_{конуса} = \frac{3 \cdot v_{конуса}}{\pi \cdot r^2} = \frac{3 \cdot 48 \cdot \pi}{\pi \cdot 4^2} = 9$ см

в) $r_{конуса} = \sqrt{\frac{3 \cdot v_{конуса}}{\pi \cdot h}} = \sqrt{\frac{3 \cdot p}{\pi \cdot m}}$.

Ответ: $2{,}25 \cdot \pi$ см$^3$; 9 см; $\sqrt{\frac{3 \cdot p}{\pi \cdot m}}$.

Задание на сравнение объемов конуса:

Задача 10. «Пусть есть два конуса с радиусами 5 см и 8 см, высотами 10 см и 6 см. Сравните их объемы» [6].

Решение: $V = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot h$.

Найдем объем первого конуса: $V = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 25 \cdot 10 = 83\frac{1}{3}$ см$^3$.

Найдем объём второго конуса: $V = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 64 \cdot 6$ = 128 см$^3$.

Объём первого конуса меньше объёма второго конуса.

Задание на изменение площади боковой поверхности конуса в зависимости от изменения радиуса и образующей:

Задача 11. «Во сколько раз увеличится площадь боковой поверхности конуса, если его образующая увеличится в 3 раза, а радиус основания останется прежним?» [40].

Решение. «Площадь боковой поверхности конуса равна $S = \frac{1}{2}lC$, где C – длина окружности основания, а l – образующая. При увеличении образующей в 3 раза площадь боковой поверхности конуса увеличится в 3 раза» [40].

Ответ: в 3 раза.

Задача 12. «Во сколько раз уменьшится площадь боковой поверхности конуса, если радиус его основания уменьшится в 1,5 раза, а образующая останется прежней?» [40].

Решение. «Площадь боковой поверхности конуса равна $S = \frac{1}{2}lC$, где C – длина окружности основания, а l – образующая. При уменьшении радиуса основания в 1,5 раза при неизменной величине образующей площадь боковой поверхности тоже уменьшится в 1,5 раза» [40].

Ответ: площадь боковой поверхности уменьшится в 1,5 раза.

Задания на изменения объема конуса в зависимости от изменения его высоты и радиуса:

Задача 13. Как изменится объем конуса, если радиус увеличится вдвое, а высота уменьшится наполовину?

Решение.

$$R_2 = 2R_1, h_2 = \frac{1}{2}h_1, \frac{V_2}{V_1} - ?$$

$$V_1 = \frac{1}{3} \cdot R_1^2 \cdot h_1; V_2 = \frac{1}{3} \cdot R_2^2 \cdot h_2$$

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{\frac{1}{3} \cdot R_2^2 \cdot h_2}{\frac{1}{3} \cdot R_1^2 \cdot h_1} = \frac{(2R_1)^2 \cdot \frac{1}{2}h_1}{R_1^2 \cdot h_1} = 2.$$

Если радиус конуса увеличится вдвое, а высота уменьшится наполовину, то объём конуса увеличится в 2 раза.

Ответ: объём конуса увеличится в 2 раза.

Задача 14. «Во сколько раз уменьшится объем конуса, если его высота уменьшится в 3 раза, а радиус основания останется прежним?» [40].

Решение:

$$\mathrm{R}_2 = \mathrm{R}_1, \mathrm{h}_2 = \frac{1}{3}\mathrm{h}_1, \frac{\mathrm{V}_2}{\mathrm{V}_1} - ?$$

$$\mathrm{V}_1 = \frac{1}{3} \cdot \mathrm{R}_1^2 \cdot \mathrm{h}_1; \quad \mathrm{V}_2 = \frac{1}{3} \cdot \mathrm{R}_2^2 \cdot \mathrm{h}_2$$

$$\frac{\mathrm{V}_2}{\mathrm{V}_1} = \frac{\frac{1}{3} \cdot \mathrm{R}_2^2 \cdot \mathrm{h}_2}{\frac{1}{3} \cdot \mathrm{R}_1^2 \cdot \mathrm{h}_1} = \frac{\frac{1}{3}\mathrm{h}_1}{\mathrm{h}_1} = 3.$$

При уменьшении высоты в 3 раза объём конуса также уменьшится в 3 раза.

Ответ: объём конуса уменьшится в 3 раза.

Задача 15. «Если увеличить все размеры конуса в 2 раза, во сколько раз увеличится его объем?» [6].

Решение:

$$\mathrm{R}_2 = 2\mathrm{R}_1, \mathrm{h}_2 = 2\mathrm{h}_1, \frac{\mathrm{V}_2}{\mathrm{V}_1} - ?$$

$$\mathrm{V}_1 = \frac{1}{3} \cdot \mathrm{R}_1^2 \cdot \mathrm{h}_1; \quad \mathrm{V}_2 = \frac{1}{3} \cdot \mathrm{R}_2^2 \cdot \mathrm{h}_2.$$

$$\frac{\mathrm{V}_2}{\mathrm{V}_1} = \frac{\frac{1}{3} \cdot \mathrm{R}_2^2 \cdot \mathrm{h}_2}{\frac{1}{3} \cdot \mathrm{R}_1^2 \cdot \mathrm{h}_1} = \frac{(2\mathrm{R}_1)^2 \cdot 2\mathrm{h}_1}{\mathrm{R}_1^2 \cdot \mathrm{h}_1} = 8.$$

Если все размеры конуса, включая радиус и высоту, увеличить в 2 раза, то объём увеличится в 8 раз.

Ответ: объём конуса увеличится в 8 раз.

Задачи на применение объема конуса в реальных жизненных ситуациях:

Задача 16. Вычислите объем воронки конусной формы, у которой диаметр основания 13 см, высота 12 см.

Решение: $V = \frac{1}{3} \cdot S \cdot h.$

$$V = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4}\pi \cdot d^2 \cdot h = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} \cdot \pi \cdot 169 \cdot 12 = 169\pi.$$

Ответ: $169\pi$.

Задача 17. «Куча щебня имеет коническую форму, радиус основания которой 2 м, а образующая 2,5 м. Найдите объем кучи щебня (рисунок 45)» [37].

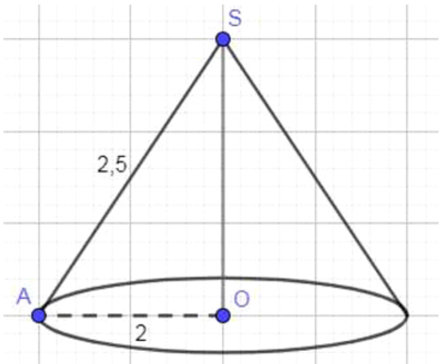



Рисунок 45 – К задаче 17

Решение:

1) Проведем высоту конуса SO, тогда точка O – центр основания (рисунок 45).

2) В треугольнике SOA – прямоугольном:

$$h = S0 = \sqrt{SA^2 - OA^2} = \sqrt{2{,}5^2 - 2^2} =$$
$$= \sqrt{2{,}25} = 1{,}5 \text{ м}.$$

3) Площадь основания конуса: $\mathrm{S} = \mathrm{p} \cdot \mathrm{R}^2 = 4\pi$ м$^2$.

4) $\mathrm{V} = \frac{1}{3} \cdot \mathrm{S}_{\text{осн}} \cdot \mathrm{h} = 2\pi$ м$^3$. Ответ: $2\pi$ м$^3$.

Задача 18. «Куча щебня имеет коническую форму (рисунок 3), радиус основания которой 2 м и образующая 3,5 м. 1 м$^3$ щебня весит 3 т. На один воз грузят 0,5 т. Сколько надо возов, чтобы перевезти щебень, уложенный в кучу? (рисунок 46)» [31].

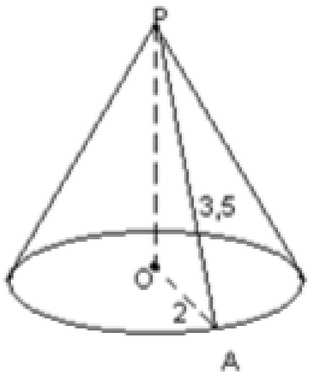



Рисунок 46 – К задаче 18

Решение. $V_{\text{конуса}} = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot h$. По теореме Пифагора $h = \sqrt{3{,}5^2 - 2^2} = \sqrt{8{,}25} = \frac{\sqrt{33}}{2}$ м, тогда $V = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 4 \cdot \frac{\sqrt{33}}{2} \approx 12$ м$^3$. Тогда: $12 \cdot 3 = 36$ т – в одной куче щебня; $36 : 0{,}5 = 72$ т воза потребуется.

Ответ: 72 воза.

Задача 19. «В сосуд, имеющий форму конуса, налили 25 мл жидкости до половины высоты сосуда. Сколько миллилитров жидкости нужно долить в сосуд, чтобы заполнить его доверху?» [6].

Решение.

«Меньший конус подобен большему с коэффициентом 0,5. Объёмы подобных тел относятся как куб коэффициента подобия. Поэтому объём большего конуса в 8 раз больше объёма меньшего конуса и равен 200 мл» [6]. Значит 200 – 25 = 175 мл жидкости.

Ответ: 175 мл.

Задача 20. «Коническая воронка объемом 16 л полностью заполнена жидкостью. Из нее вычерпали часть жидкости, при этом ее уровень снизился до половины высоты воронки. Сколько литров вычерпали?» [6].

Решение.

«Меньший конус подобен большему с коэффициентом 0,5. Объёмы подобных тел относятся как куб коэффициента подобия. Поэтому объём большего конуса в 8 раз больше объёма меньшего конуса и равен 2л. Значит вычерпали 16 – 2 = 14л» [6].

Ответ: 14 л.

Задачи на особые случаи:

Задача 21. Можно ли вычислить объем конуса, если $r = 0$?

Решение. Вычислить объем конуса, когда радиус основания равен нулю, невозможно. Формула для вычисления объёма конуса требует наличия ненулевого радиуса основания. Если радиус равен нулю, то конус фактически превращается в точку и понятие объём теряет смысл.

Задача 22. Можно ли вычислить объем конуса, если $h = 0$? Ответы обоснуйте.

Решение. Если $h = 0$, то конус превращается в точку, и понятие объёма теряет смысл.

Задача 23. «Коническая поверхность пересечена плоскостью. Какие фигуры могут получиться в сечении?» [50, с. 188–189].

Ответ. Окружность, эллипс, парабола, гипербола, две прямые, точка.

Задачи на применение формулы и связь с другими понятиями:

Задача 24. «Объем конуса равен 10. Через середину высоты параллельно основанию конуса проведено сечение, которое является основанием меньшего конуса с той же вершиной. Найдите объем меньшего конуса (рисунок 47)» [6].

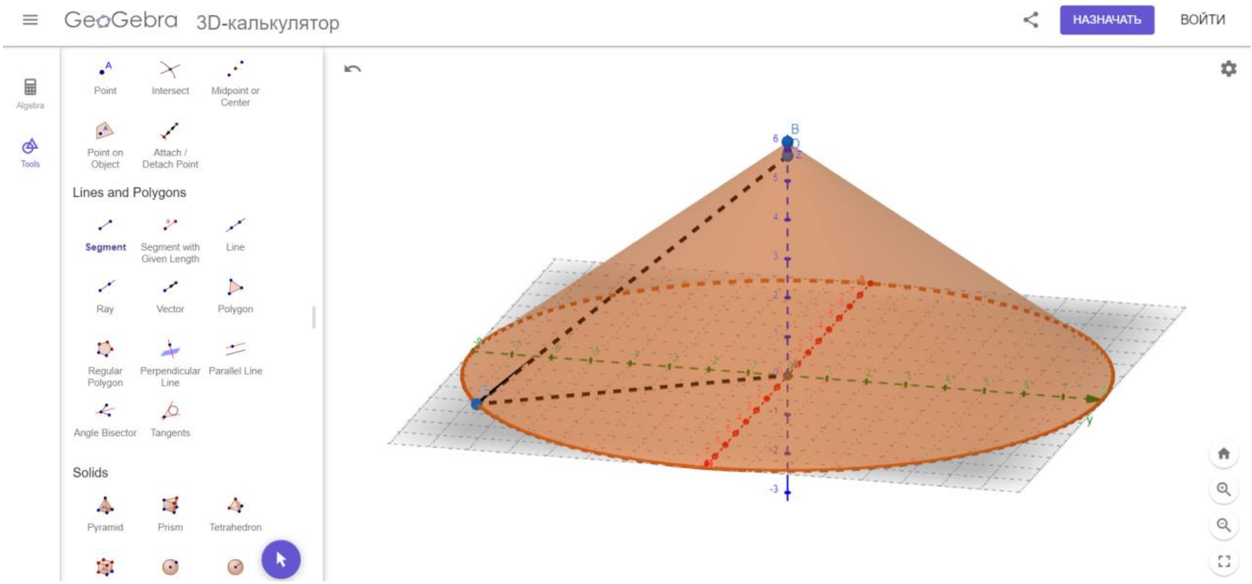



Рисунок 47 – К задаче 24

Решение. «Меньший конус подобен большему с коэффициентом 0,5. Объемы подобных тел относятся как куб коэффициента подобия. Поэтому объем меньшего конуса в восемь раз меньше объема большего конуса: $10 \cdot \frac{1}{8} =$ $= 1{,}25$» [6]. Ответ: 1,25.

Задача 25. «Высота конуса равна 6, образующая равна 10. Найдите его объем, деленный на π» [6].

Решение: по теореме Пифагора найдем, что радиус основания равен $\mathrm{r} =$ $= \sqrt{\mathrm{l}^2 - \mathrm{h}^2} = 8$. Тогда объём конуса, деленный на π: $\frac{\mathrm{v}}{\pi} = \frac{1}{3}\frac{\mathrm{Sh}}{\pi} = \frac{1}{3}\mathrm{r}^2\mathrm{h} = \frac{1}{3} \cdot 8^7 \cdot$ $\cdot\, 6 = 128$. Ответ: 128.

Задача 26. «Диаметр основания конуса равен 6, а угол при вершине осевого сечения равен 90°. Вычислите объем конуса, деленный на π» [6].

Решение. «В треугольнике, образованном радиусом основания *r*, высотой *h* и образующей конуса *l*, углы при образующей равны, поэтому высота конуса равна радиусу его основания: *h* = *r*. Тогда объем конуса вычисляется следующим образом» [6]:

$\frac{V}{\pi} = \frac{1}{3}\frac{Sh}{\pi} = \frac{1}{3}\frac{\pi r^2 h}{\pi} = \frac{1}{3} r^2 r = \frac{1}{3} \cdot 3^3 = 9.$ Ответ: 9.

Задача 27. «Жидкость, налитая в конический сосуд, имеющий 0,18 м высоты и 0,24 м в диаметре основания, переливается в цилиндрический сосуд, диаметр основания которого 0,10 м. Как высоко будет уровень жидкости в сосуде?» [31].

Решение.

Найдем объём жидкости в коническом сосуде:

$V = \frac{1}{3} \cdot S_1 \cdot h_1 = \frac{1}{3} \cdot S_1 \cdot h_1 = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} \pi d^2 \cdot h_1 = \frac{1}{12} \pi \cdot 0{,}24^2 \cdot 0{,}18 = 0{,}864\pi \cdot 10^{-3}$ м$^3$. Так как объем жидкости не изменился, то высота жидкости в цилиндре составит:

$h_2 = \frac{V}{\pi R_2^2} = \frac{0{,}864\pi \cdot 10^{-3}}{\pi \cdot \left(\frac{0{,}1}{2}\right)^2} \approx 0{,}35$ м. Ответ: 0,35 м.

Задачи на применение формулы объема конуса в нестандартной ситуации:

Задача 28. «Равносторонний треугольник вращается вокруг своей стороны а. Найдите объем тела вращения (рисунок 48)» [31].

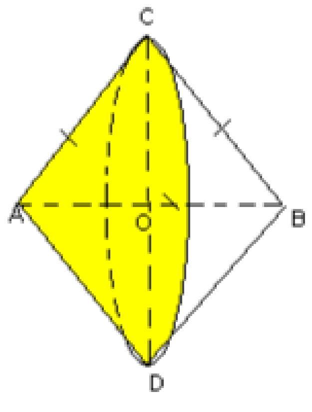



Рисунок 48 – К задаче 28

Решение.

Рассмотрим два конуса с радиусами оснований ОС и высотами ВО и АО.

Имеем: ВО = АО = 0,5а, $OC = \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

$V = 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot \frac{3a^2}{4} \cdot \frac{a}{2} = \frac{1}{4} \cdot \pi \cdot a^3.$

Ответ: $\frac{1}{4} \cdot \pi \cdot a^3$

Задача 29. В конусе через его вершину под углом $\varphi$ к плоскости основания проведена плоскость, отсекающая от окружности основания дугу $2\alpha$. Радиус основания конуса равен $\tau$. Найдите объем конуса (рисунок 49).

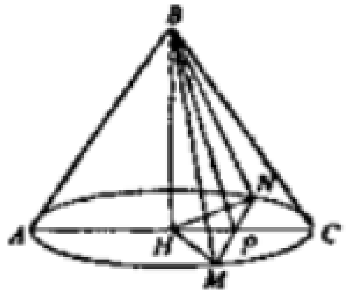



Рисунок 49 – К задаче 29

Решение. Из треугольника HPN: $HP = HN \cos\alpha = R\cos\alpha$. Из треугольника BHP:

$BH = HP \cdot tg\varphi = R\cos\alpha \cdot tg\,\varphi$

Значит $V_{конуса} = \pi \cdot \frac{BH}{3} \cdot R^2 = \frac{\pi R^3}{3}\cos\alpha\, tg\,\varphi$.

Ответ: $\frac{\pi R^3}{3}\cos\alpha\, tg\,\varphi$.

Задача 30. Рассмотрите конус, у которого ось не совпадает с высотой. Изменится ли формула объема такого конуса?

Решение.

Косой (наклонный) конус — это конус, у которого ось не перпендикулярна основанию. У такого конуса ось не совпадает с высотой. Объем любого конуса: $V = \frac{1}{3} \cdot S \cdot h$.

Ответ: не изменится.

Задача 31. «Две секущие плоскости перпендикулярны к оси конуса. Докажите, что площади сечений конуса этими плоскостями относятся как квадраты расстояний от вершины конуса до этих плоскостей (рисунок 50)» [6].

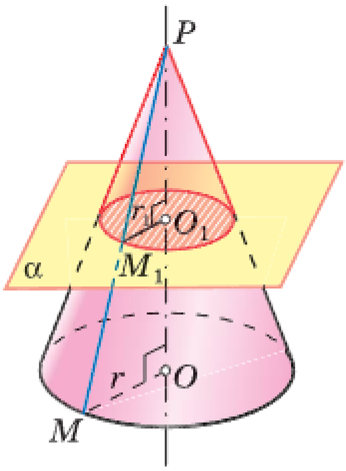



Рисунок 50 – К задаче 31

Доказательство.

Имеем $\frac{O_1M_1}{OM} = \frac{PO_1}{PO}$ или $\frac{r_1}{r_2} = \frac{PO_1}{PO}$.

$S_1 = \pi r_1^2$; $S_2 = \pi r_2^2$.

Тогда $\frac{r_1^2}{r_2^2} = \frac{PO_1^2}{PO^2}$; $\frac{\frac{S_1}{\pi}}{\frac{S_2}{\pi}} = \frac{PO_1^2}{PO^2}$.

Ответ: ч.т.д.

Задача 32. «На плоскости изображена окружность и две точки A и $B_1$, причём точка A лежит внутри окружности. Известно, что окружность является окружностью основания некоторого конуса, точка A лежит на основании этого конуса, а точка $B_1$ есть проекция точки B, лежащей в плоскости, проходящей через вершину конуса параллельно его основанию. Постройте проекцию (изображение) точки, в которой отрезок AB пересекает боковую поверхность конуса» [55].

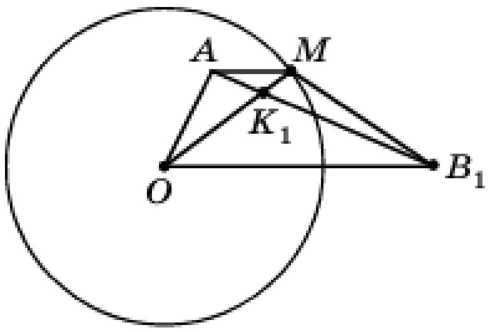



Рисунок 51 – К задаче 32

«Пусть O - центр основания конуса (рисунок 32). Плоскость, проходящая через вершину конуса и точки A и B, пересечет плоскость основания конуса по прямой, параллельной $OB_1$ (это следует из условия задачи). Проведя эту прямую, мы построим изображение OM образующей конуса, которую пересекает прямая AB ($OAMB_1$ - трапеция, AM - одно из оснований). Точка пересечения диагоналей этой трапеции (точка $K_1$) и является изображением нужной точки K» [56, с. 107].

Блок В. Найдите ошибку при вычислении объема конуса, допущенную Васей:

«Радиус основания конуса 5 см, высота конуса 8 см. Найти: объём конуса.

Ответ Васи: $V = \pi r^2 h = \pi * 5^2 * 8 = 200\pi$ см$^3$» [6].

Решение: ошибка заключается в том, что Вася использовал формулу для нахождения объёма цилиндра, а не конуса.

Блок Г. В краткий справочник с ошибками школьников могут быть выделены: неверное применение формулы; вычислительные ошибки; неверное применение единиц измерения величин; неверное применение основных понятий при нахождении объема конуса в различных ситуациях.

Отметим, что при обучении решению задач по теме «Конусы» используются информационные технологии: интерактивные геометрические средства - пакет «Geogebra».

Таким образом, описанная технология развивающего обучения решению задач направлена на развитие школьников, понимание ими математического содержания, а также развитие их логического мышления.

## 2.3 Педагогический эксперимент

В рамках констатирующего этапа педагогического эксперимента в октябре 2023 года было проведено анкетирование учащихся 10-11 классов МБУ «Школа №20» с целью выявления познавательного интереса к изучению геометрии и интереса к используемым при обучении геометрии технологиям.

В анкетировании приняли участие 46 человек из 10А и 10Б классов, а также 40 человек из 11А и 11Б классов. В анкете были отражены 10 вопросов.

Вопросы анкеты приведены в Приложении А.

Опишем результаты проведенного анкетирования школьников.

Ответы на отдельные вопросы анкеты приведены в таблице 1.

Таблица 1 – Результаты анкетирования школьников 10-11 классов МБУ «Школа №20» г. Тольятти

| Вопросы анкетирования | 10 класс (46 человек) | 11 класс (40 человек) |
|---|---|---|
| Уровень интереса к геометрии | 60% средний уровень | 45% средний уровень |
| Наиболее интересные темы по геометрии | Геометрические фигуры, фигуры в пространстве | |
| Опыт использования компьютерных программ | 35% использовали интерактивные программы | 45% использовали интерактивные программы |
| Используемые программы | GeoGebra, Desmos, AutoCADas | |
| Предпочтение методов обучения | 70% - методы с использованием компьютерных программ, 30% - традиционные методы | 80% - методы с использованием компьютерных программ, 20% - традиционные методы |
| Плюсы и минусы использования компьютерных программ | Плюсы – увеличение интерактивности и визуализации. Минусы – трудное усвоение новых компьютерных программ | |
| Связь с другими предметами | Физика, математика | |

Проведя анализ анкеты, можно сказать, что большинство учащихся на среднем уровне оценивают свой интерес к геометрии. Основная проблема, которую выделили учащиеся, является плохое понимание материала, который предлагается в учебнике. Самыми интересными темами выделили темы, связанные с геометрическими фигурами и их свойствами, алгоритмами решения геометрических задач. Все учащиеся считают, что геометрия имеет практическое применение, особенно в инженерии и графическом дизайне. Более 80% учащихся предпочитает на уроках использование информационных технологий, где применяются интерактивные доски и специальные программы. По мнению большинства из них, это делает процесс обучения геометрии более увлекательным и понятным. Основное предложение, которое написали учащиеся, это увеличение практико-ориентированных заданий и наличие проектов по геометрии, внедрение индивидуального обучения. Более 90% учащихся выделили трудность в понимании пространственных отношений. Все ученики считают, что геометрия имеет взаимосвязь с другими предметами, особенно с физикой.

На поисковом этапе эксперимента в 2022-2023 учебном году в 11 классах была осуществлена апробация разработанной методики организации уроков геометрии по теме «Конусы» с использованием пакета «Geogebra», разработана система задач по данной теме, описанные нами в параграфах 2.1 и 2.2.

Результаты исследования были апробированы на поисковом этапе эксперимента учителем математики МБУ «Школа №20» И.Н. Васиной.

Вместе с этим, по теме «Конусы» на поисковом этапе эксперимента была составлена итоговая самостоятельная работа, которая включала в себя:

- задачи на нахождение: элементов конуса; площади боковой поверхности конуса; площади боковой поверхности усеченного конуса; объема усеченного конуса;
- задачи на доказательство.

Приведем вариант самостоятельной работы по теме «Конусы».

Задача №1. «Высота конуса равна 15 см, а радиус основания равен 8 см. Найдите образующую конуса» [6]. Ответ: 17.

Задача №2. «Длина окружности основания конуса равна 3, образующая равна 2. Найдите площадь боковой поверхности конуса» [40]. Ответ: 3.

Задача №3. «Найдите площадь боковой поверхности усечённого конуса, если радиусы оснований равны 4 и 9, а высота - 12» [40]. Ответ: 169π.

Задача №4. «Радиусы оснований усечённого конуса равны 3 м и 6 м, а образующая равна 5 м. Найдите объём усеченного конуса» [6]. Ответ: 84π.

Задача №5. «Две секущие плоскости перпендикулярны к оси конуса. Докажите, что площади сечений конуса этими плоскостями относятся как квадраты расстояний от вершины конуса до этих плоскостей» [6].

Критерии оценки: задание 1 – 1 балл; задание 2 – 2 балла; задание 3 – 2 балла; задание 4 – 2 балла, задание 5 – 3 балла.

Отметка «5» выставлялась ученику за 9–10 баллов; отметка «4» - за 7–8 баллов; отметка «3» - за 5–6 баллов; отметка «2» - за 0–4 баллов.

В ходе самостоятельной работы проверялся уровень усвоения темы школьниками в результате применения технологии развивающего обучения решению задач Т.А. Ивановой, а также информационных технологий.

Кроме того, в ходе данного этапа эксперимента на всех уроках по теме «Конусы» ученикам предлагалось самостоятельно оценить уровень усвоения ими учебного материала в результате использования пакета «Geogebra».

## Выводы по второй главе

Геометрия играет важную роль в развитии пространственного воображения школьников. Изучение геометрии должно внести вклад в развитие их логического мышления, пространственных представлений и воображения.

Основные проблемы преподавания геометрии в школе включают недостаточное знание теории обучающимися, неумение построить чертеж и трудности в построении логических рассуждений. Современные методы преподавания геометрии стремятся сделать учебный процесс более интересным и доступным для разнообразных обучающихся.

При использовании пакета "GeoGebra" на уроках геометрии учителю важно начать с планирования урока и выбора необходимых инструментов в программе, которые будут использоваться им при объяснении темы урока или исследования задачи. В ходе уроков по теме «Конус» предлагать школьникам исследовательские задания на выявление связи между радиусом основания и высотой конуса, задание на построение сечения конуса и проведение наблюдения об изменении данных сечений при изменении угла. Важно проводить на уроках компьютерные эксперименты: например, дать задание на построение в пакете «GeoGebra» конуса, образующая которого равна диаметру основания; учить старшеклассников строить динамические чертежи.

## Заключение

Выделим основные выводы и полученные результаты проведенного исследования:

Раскрыта роль интерактивных геометрических сред в обучении школьников геометрии в общеобразовательной школе. Установлено, что внедрение новых информационных технологий способствует формированию пространственных представлений учеников. Работа в программах позволяет избежать много ошибок. Приведены основные функции интерактивных геометрических сред при обучении геометрии в общеобразовательной школе: позволяют ученикам работать с геометрическими объектами, изменять их размеры и параметры; имеют возможность создавать различные модели, решать сложные задачи, сокращая время на понимание определенной задачи; предоставляют возможность визуализировать любой геометрический объект и лучше объяснить учащимся его свойства; позволяют развивать умения и навыки при обучении геометрии и формировать определенные компетенции.

Показаны возможности использования пакета «Geogebra» для организации уроков геометрии в 10–11 классах общеобразовательной школы. Сделан вывод о том, что интерактивная геометрическая среда Geogebra обладает немалым количеством функций и возможностей и имеет довольно обычный интерфейс. Geogebra имеет огромный функционал для создания различных геометрических объектов, а также может показать связь между геометрическими объектами. Повышает интерес у учащихся к изучению геометрии. Geogebra помогает шире взглянуть школьникам на проблемы при доказательстве той или иной теоремы или решении задачи и более ясно понять саму ее суть. Для этого требуется активное их участие во время урока. Программа помогает не просто понять решение задач, но и найти общие закономерности в процессе ее решения и разделить их на несколько типов.

Выявлены методические особенности организации уроков геометрии с использованием пакета «Geogebra» в старших классах общеобразовательной школы. Установлено, что разработанные с помощью программы GeoGebra динамические модели и чертежи можно использовать на уроках при: мотивации; изучении нового материала; закреплении решения задач. Приведены некоторые виды задач на нахождения площади сечения.

Описана методика организации уроков геометрии по теме «Конус» с использованием пакета «Geogebra» в общеобразовательной школе. С помощью «Geogebra» учащиеся могут строить различные сечения конуса и изучать их свойства. Рассмотрены несколько задач по теме «Конус». Показан подробный алгоритм решения задач с помощью интерактивной геометрической среды «GeoGebra».

Разработана система задач по теме «Конусы» в рамках технологии развивающего обучения решению задач и информационных технологий. Деление задач было разделено на четыре блока. Первый блок содержит задачи на выполнение действий по применению формулы. Второй блок содержит задания на вычисления объёма конуса и его элементов; задание на построение конуса; задания на нахождение площади полной и боковой поверхности конуса; задания на сравнение объёмов конуса; задания на изменения объема конуса в зависимости от изменения его высоты и радиуса; задание на изменение площади боковой поверхности конуса в зависимости от изменения радиуса и образующей; задачи на применение объема конуса в реальных жизненных ситуациях; задачи на особые случаи; задачи на применение формулы и связь с другими понятиями; задачи на применение формулы объёма конуса в нестандартной ситуации. Третий блок содержит задачу на нахождение ошибок при решении задач. Четвертый блок состоит из составления краткого справочника.

Проведен констатирующий и поисковый этапы педагогического эксперимента на базе МБУ «Школа №20» г. Тольятти.

Таким образом, все поставленные в работе цели достигнуты.

## Список используемой литературы и используемых источников


1. Абраменкова Ю.В., Карлина О.В. Особенности применения интерактивной геометрической среды Geogebra при изучении геометрии в основной школе / Дидактика математики: проблемы и исследования. 2020. № 51. С. 61-69.

2. Александров А.Д. «О геометрии» // Математика в школе. 1980. № 3. с. 56-62.

3. Аликин А.С., Иващенко Е.В. Использование информационных технологий в процессе изучения геометрии в школе // Прикладные вопросы точных наук: материалы IV Международной научно-практической конференции студентов, аспирантов, преподавателей, посвящённой 75-летию Победы в Великой Отечественной войне. Армавир: Армавирский государственный педагогический университет, 2020. С.228-231.

4. Андрафанова Н.В., Назарян Д.С. Интерактивная геометрическая среда как средство компьютерной наглядности в обучении геометрии // Информационные технологии в обеспечении федеральных государственных образовательных стандартов: материалы международной научно-практической конференции, Елец: Елецкий государственный университет им. И.А. Бунина, 2014. С. 76-80.

5. Андрафанова Н.В., Назарян Д.С. Интерактивная геометрическая среда как средство развития познавательного интереса школьников // Проблемы и перспективы развития образования в России. 2014. №27. С. 59-65.

6. Атанасян Л.С. Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия. Геометрия. 10–11 классы: учеб. для общеобразоват. учреждений (базовый и углубленный уровни). 7 изд. / Л.С. Атанасян, В.Ф. Бутузов и др. М.: Просвещение, 2019. 288 с.

7. Баландин И.А., Гаврилова М.А. Рациональная интеграция средств ИКТ в современный урок математики на старшей ступени обучения // Современные проблемы науки и образования. 2013. № 6. С. 278.

8. Безумова О.Л. Обучение геометрии с использованием возможностей GeoGebra. Архангельск: КИРА, 2011. 140 с.

9. Букушкин С.А. Роль интерактивных геометрических сред в обучении школьников геометрии (на примере пакета GeoGebra) // Молодежь. Наука. Общество – 2022: Всероссийская студенческая научно-практическая междисциплинарная конференция, Тольятти, 19–23 декабря 2022 года: сборник студенческих работ / отв. за вып. С.Х. Петерайтис. Тольятти: Изд-во ТГУ, 2023. 1 оптический диск. С. 310-313.

10. Букушкин С.А. Технология развивающего обучения решению задач по теме «Объем конуса» // Эвристика и дидактика математики: материалы XIII Международной научно-методической дистанционной конференции-конкурса молодых ученых, аспирантов и студентов. Донецк: Изд-во ДонНУ, 2024. С. 59-61.

11. Вендина А.А., Михоненко О.И. Математический эксперимент в программе Geogebra как одно из средств интеграции уроков геометрии и информатики // Мир педагогики и психологии. 2019. № 5 (34). С. 39-48.

12. Волович М.Б. Наука обучать / Технология преподавания математики. М.: LINKA-PRESS, 1995. 280 с.

13. Гавришко А.А. Изучение темы «Объемы геометрических тел» в общеобразовательной школе /А.А. Гавришко // Математика и современность: материалы Международной заочной научно-практической конференции студентов и молодых ученых (30 октября – 10 ноября, 2017 г.). Луганск: Книта, 2018. С. 132–134.

14. Геометрия. Сборник примерных рабочих программ. 10–11 классы: учеб. пособие для общеобразоват. организаций: базовый и углубл. уровни / [сост. Т. А. Бурмистрова]. 4-е изд. М.: Просвещение, 2020. 159 с.

15. Геометрия. 10–11 классы: учеб. для общеобразоват. учреждений: базовый и профил. уровни / Л.С. Атанасян, В.Ф. Бутузов, С. Б. Кадомцев и др. 22-е изд. М.: Просвещение, 2013. 255 с.

16. Гусев В.А. Теория и методика обучения математике: психолого-педагогические основы. М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2014. 456 с.

17. Гусева Л.Л. Урок на решение задач по теме «Объем конуса» [Электронный ресурс]. URL: https://urok.1sept.ru/articles/568841 (дата обращения: 12.03.2024).

18. Далингер В.А. Обучение учащихся доказательству теорем посредством систем динамической геометрии // Инновационное развитие современной науки: сборник статей Международной научно-практической конференции. Уфа: Изд-во: Общество с ограниченной ответственностью «ОМЕГА САЙНС» (Уфа), 2014. С. 35-37.

19. Десятниченко Н.В. Использование программы Cabri 3D на уроках стереометрии: статья / ГБПОУ ВО «ВГПГК». 2017

20. Дронова Е. Н. Использование программы GeoGebra для решения геометрических задач основного государственного экзамена по математике / Е. Н. Дронова, Д. С. Захарова // Вестник Алтайского государственного педагогического университета. 2017. №31. С. 25–29.

21. Епифанцева В.А. Особенности использования системы Geogebra в процессе обучения // Общество: социология, психология, педагогика. 2020. № 12(80). С. 254-256.

22. Еремина Л.А. Презентация по геометрии на тему "Объемы тел" (11 класс) [Электронный ресурс]. URL: https://infourok.ru/prezentaciya_po_geometrii_na_temu_obyemy_tel_11_kla ss-413004.htm (дата обращения: 07.03.2023).

23. Зиатдинов Р.А. О возможностях использования интерактивной геометрической среды Geogebra 3.0 в учебном процессе // Системы компьютерной математики и их приложения: материалы 10-й международной конференции. Смоленск: изд-во СмолГУ, 2009. С. 39-40.

24. Зиядуллаева Ш. Развитие пространственного воображения школьников в курсе геометрии с помощью интерактивных средств // International Independent Scientific Journal. 2020. № 15-3. С. 30-33.

25. Иванов С.Г., Рыжик В.И. Компьютерный инструмент и кризис школьного математического образования // Математика в школе. 2024. № 1. С. 49-55.

26. Иванова Т. А. Теория и технология обучения математике в средней школе: Учебн. пос. для студентов математических специальностей педагогических вузов / Под ред. Т. А. Ивановой. 2-е изд. испр.и доп. Н. Новгород: НГПУ. 2009. 355 с.

27. Иванченко Н.В. Методическая разработка урока математики в 11 классе по теме "Конус" [Электронный ресурс]. URL: https://yauchitel.ru/load/blogi/metodicheskaja_razrabotka_uroka_matematiki_v_11_klasse_po_teme_konus/489-1-0-20666 (дата обращения: 16.03.2024).

28. Курбатова Л.Н. К вопросу о методике изучения площади поверхности тел вращения в российской школе в первой половине XX века //Математика и математическое моделирование: проблемы и перспективы. Международная научно-практическая конференция: Оренбург, 20 – 21 мая 2015 г.: сб. науч. статей. Оренбург: изд-во ОГПУ, 2015. С. 145 – 150.

29. Макарова П.С., Тесля О.Ю., Шабат Г.Б. Об обучении школьников геометрическому исследованию с применением динамических сред / Актуальные проблемы обучения математике и информатике в школе и вузе в свете идей Л.С. Выготского: материалы III Международной научной конференции. Редактор: М.В. Егупова, Л.И. Боженкова. М.: Изд-во: Издатель Захаров С.И. ("СерНа"), 2016. С. 316-320.

30. Матушкина З.П. Методика обучения решению задач: Учебное пособие. Курган: Изд-ва Курганского гос. ун-та, 2006. - 154 с.

31. Мерзляк А.Г., Номировский Д.А., Полонский В. Б., Якир М. С. Геометрия. 11 класс: учебное пособие под редакцией В.Е. Подольского. 2 изд. - М.: Издательский центр «Вентана-Граф». – 2019. – 205 с.

32. Михоненко О.И. Компьютерная поддержка при обучении геометрии в старшей школе // Мир педагогики и психологии. 2020. № 7 (48). С. 48-57.

33. Наумова М.Н. Урок геометрии по теме «Конусы в нашей жизни» [Электронный ресурс]. URL: https://urok.1sept.ru/articles/413311 (дата обращения: 02.04.2024).

34. Овсянникова Т.Л. Использование программы Geogebra при обучении геометрии будущих учителей математики // Мир педагогики и психологии. 2018. № 11(28). С. 92-99.

35. Павлова М.А. Исследовательское обучение математике учащихся основной школы во внеурочное время с использованием систем динамической геометрии: автореф. дис. ... канд. пед. наук: 13.00.02 / Елецкий государственный университет им. И.А. Бунина. Елец, 2017. 24 с.

36. Петрунина И.В Открытый урок по геометрии 11 класс «Конус» [Электронный ресурс]. URL: https://multiurok.ru/files/otkrytyi-urok-po-geometrii-11-klass-konus.html (дата обращения: 26.04.2024).

37. Погорелов А.В. Геометрия. 10-11 классы: учеб. для общеобразоват. учреждений: базовый и профил. Уровни / А.В.. Погорелов. 13-е изд. М.: Просвещение, 2014. 175 с.

38. Пойа Д. Как решать задачу. Пособие для учителей. Пер. с англ. / Под ред. Ю.М. Гайдука. 2-е изд. М.: Учпедгиз, 1961. 207 с.

39. Прояева И.В., Сафарова А.Д. Об особенностях преподавания отдельных вопросов стереометрии в школьном курсе геометрии // Мир науки, культуры, образования. 2017. №2(63). С. 53-56.

40. Решу ЕГЭ. Образовательный портал для подготовки к экзаменам [Электронный ресурс]. URL: https://math-ege.sdamgia.ru/ (дата обращения: 16.02.2024).

41. Роберт И.В. Информационные и коммуникационные технологии в образовании: учебно-методическое пособие для педагогических вузов / И.В. Роберт [и др.]. М.: Дрофа, 2008. 312 (Высшее педагогическое образование).

42. Саранцев Г.И. О методике обучения школьников поиску решения математических задач // В кн.: Преподавание алгебры и геометрии в школе. М.: Просвещение, 1982. С. 123-131.

43. Севергина Л.В. Открытый урок по теме «Конус» 11-й класс [Электронный ресурс]. URL: https://urok.1sept.ru/articles/415811 (дата обращения: 13.03.2024).

44. Сергеева Т.Ф. Основы динамической геометрии: монография / Т.Ф. Сергеева, М.В. Шабанова, С.И. Гроздев. М.: АСОУ, 2016. 152 с.

45. Сенчилов В.В. Применение интерактивных технологий при изучении курса геометрии в школе [Электронный ресурс] // Концепт. 2013. №10 (26). URL: https://cyberleninka.ru/article/n/primenenie-interaktivnyh-tehnologiy-pri-izuchenii-kursa-geometrii-v-shkole (дата обращения: 26.01.2023).

46. Смирнов В.А. Геометрия с GeoGebra. Планиметрия / В.А. Смирнов, И.М. Смирнова. М.: «Прометей», 2018. 206 с.

47. Смирнов В.А. Геометрия с GeoGebra. Стереометрия / В.А. Смирнов В.А., И.М. Смирнова. М.: «Прометей», 2018. 172 с.

48. Смирнов В.А., Смирнова И.М. Моделирование траекторий в компьютерной программе GeoGebra // Архимед: научно-методический сборник. Том Выпуск 16. Институт логики, когнитологии и развития личности. М.: Изд-во: ООО "МАКС Пресс", 2020. С. 109-117.

49. Стефанова Н.Л., Подходова Н.С., Орлов В.В., Орлова А.В., Методика и технология обучения математике. Курс лекций: пособие для вузов / под научн. ред. Н.Л. Стефановой, Н.С. Подходовой. 2-е изд, испр. М.: Дрофа, 2008. 415 с.

50. Стефанова Н.Л., Подходова Н.С., Орлов В.В., Орлова А.В., Методика и технология обучения математике. Лабораторный практикум: учеб. пособие для студентов матем. факультетов пед. университетов / под научн. ред. В.В. Орлова. М.: Дрофа, 2007. 320 с.

51. Стогова О.В. Отдельные аспекты методики обучения теме «Тела вращения» и решению задач на вычисление объемов круглых тел» // Вестник науки. Т. 2. № 11(32). 2020. с. 24-31.

52. Федеральный государственный образовательный стандарт среднего (полного) общего образования (утвержден приказом Минобрнауки

от 17 мая 2012 г. №413) URL: https://base.garant.ru/ (дата обращения: 16.03.2024).

53. Фридман Л.М. Теоретические основы методики обучения математике: учебн. пос. - изд. 3-е. М.: Книжный дом «Либроком», 2009. 248 с.

54. Шабат Г.Б. «Живая математика» и математический эксперимент // Философия, этика религоведение. №3. 2005. с. 10.

55. Шарыгин И.Ф. Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия. Геометрия. Базовый уровень. 10-11 классы : учебник / И.Ф. Шарыгин. М. : Дрофа, 2013. 236 с.

56. Шарыгин И.Ф Геометрия. 10 класс: методическое пособие к учебнику И.Ф. Шарыгина «Геометрия 10-11 класс» / И.Ф. Шарыгин, Д.И. Шарыгин. М.: Дрофа, 2002. 155 с.

57. Ширикова Т.С. Методика обучения учащихся основной школы доказательству теорем при изучении геометрии с использованием GeoGebra: автореф. дис. ... канд. пед. наук: 13.00.02 / Ярославский государственный педагогический университет им. К.Д. Ушинского. Ярославль, 2014. 24 с.

58. Юданов Т.Ф. Использование информационно-коммуникационных технологий на уроках геометрии в 10 классах [Электронный ресурс] // Вопросы науки и образования. 2018. №7 (19). URL: https://cyberleninka.ru/article/n/ispolzovanie-informatsionno-kommunikatsionnyh-tehnologiy-na-urokah-geometrii-v-10-klassah (дата обращения: 05.05.2024).

59. Bedada T., Machaba M. Investigation of student’s perception learning calculus with GeoGebra and cycle model [Text] // College of Natural and Computational Sciences, Department of Mathematics, Hosaena, ETHIOPIA, 2022. Volume 18 Issue 10.

60. GeoGebra: official site. URL: www.geogebra.org.

61. Lingefjard T., Ghosh J. Enhancing students mathematical thinking using applets [Text] // Strömstad Academy, Strömstad, SWEDEN, 2022. Volume 2. Issue 2.

62. Machisi E. Grade 11 Students' Reflections on their Euclidean Geometry Learning Experiences [Text] // University of South Africa, SOUTH AFRICA, 2021. Volume 17. Issue 2.

63. Shabanova, M.V., Lazarov. B. Detecting Math-and-ICT Competence // CSEDU 2014: Progeedings of the 6th International Conference on Computional Supported Education. Barcelona, Spain 1-3 April, 2014. Volume 2. P.153-158.

Приложение А

## Анкета для обучающихся 10–11 классов

Вопрос 1. Как вы оцениваете уровень своего интереса к изучению геометрии на текущем этапе обучения в школе?

а) высокий,

в) средний,

г) низкий.

Вопрос 2. Какие темы по геометрии вам наиболее интересны?

Вопрос 3. Предпочитаете ли вы традиционные уроки, где используется меловая доска и учебник, или уроки, где применяются компьютерные программы, интерактивные доски? Поясните ответ.

Вопрос 4. Считаете ли вы, что использование визуальных средств (плакатов, рисунков, диаграмм, моделей фигур, видеоматериалов, презентаций и т.д.) способствует более качественному изучению и пониманию учебного материала на уроках геометрии? (да, нет)

Вопрос 5. Какие плюсы и минусы использования компьютерных программ в обучении геометрии существуют, по вашему мнению?

Вопрос 6. Участвовали ли вы в проектах, выполняли практико-ориентированные или исследовательские задания по геометрии?

Вопрос 7. Считаете ли вы, что геометрия имеет практическое применение в реальной жизни? Если да, то в каких областях?

Вопрос 8. Как вы считаете, геометрия может быть связана с другими предметами, такими как физика, химия или биология в рамках образовательного процесса в школе?

Вопрос 9. Имели ли вы опыт использования компьютерных программ или приложений при решении задач по геометрии или выполнении исследовательских заданий, участии в проектах по геометрии? Если да, укажите, какие программы или приложения вы использовали (например, GeoGebra, Desmos, AutoCAD и т.д.).