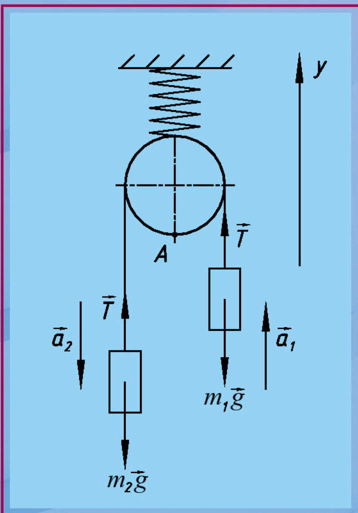
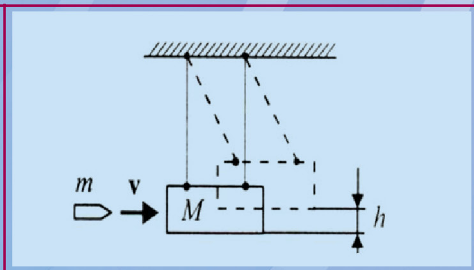
Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Тольяттинский государственный университет

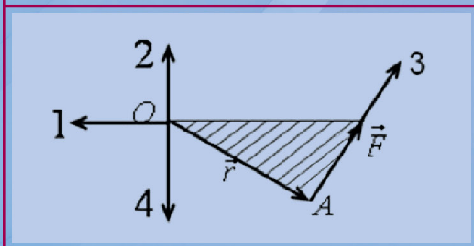
В.А. Сарафанова, С.Н. Потемкина

ОБЩАЯ И ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНАЯ ФИЗИКА. МЕХАНИКА

Практикум







ISBN 978-5-8259-1615-6

УДК 531(075.8)
ББК 22.2я73

Рецензенты:
канд. физ.-мат. наук, доцент, доцент кафедры «Цифровое управление процессами в АПК» Саратовского государственного университета генетики, биотехнологии и инженерии им. Н.И. Вавилова *А.В. Розанов*;
д-р физ.-мат. наук, профессор кафедры «Общая и теоретическая физика» Тольяттинского государственного университета *А.П. Воленко.*

Сарафанова, В.А. Общая и экспериментальная физика. Механика : практикум / В.А. Сарафанова, С.Н. Потемкина. – Тольятти : Изд-во ТГУ, 2024. – 1 оптический диск. – ISBN 978-5-8259-1615-6.

Практикум предназначен для студентов, обучающихся по направлению подготовки 44.03.05 «Педагогическое образование» направленности «Математика и физика» в Тольяттинском государственном университете.

Практикум по организации и проведению практических занятий по дисциплине «Общая и экспериментальная физика. Механика» содержит теоретический и практический материал, направлен на формирование у студентов знаний физических явлений, законов, методов расчета физических характеристик, а также умений применять полученные знания для решения качественных и количественных физических задач.

Текстовое электронное издание.

Рекомендовано к изданию научно-методическим советом Тольяттинского государственного университета.

Минимальные системные требования: IBM PC-совместимый компьютер: Windows XP/Vista/7/8/10; PIII 500 МГц или эквивалент; 128 Мб ОЗУ; SVGA; CD-ROM; Adobe Acrobat Reader; интернет-браузер.

Учебное издание

Сарафанова Валентина Александровна
Потемкина Светлана Николаевна

ОБЩАЯ И ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНАЯ ФИЗИКА. МЕХАНИКА

Редактор *Т.В. Антонова*
Технический редактор *Т.В. Антонова*
Компьютерная верстка: *Л.В. Сызганцева*
Художественное оформление,
компьютерное проектирование: *И.И. Шишкина*

В оформлении пособия использовано изображение
от freepik на сайте ru.freepik.com

Дата подписания к использованию 06.03.2024.
Объем издания 5,8 Мб.
Комплектация издания: компакт-диск, первичная упаковка.
Тираж 50 экз. Заказ № 1-34-23.

Издательство Тольяттинского государственного университета
445020, г. Тольятти, ул. Белорусская, 14,
тел. 8 (8482) 44-91-47, www.tltsu.ru

Содержание

ПРЕДИСЛОВИЕ

В практикуме «Общая и экспериментальная физика. Механика» рассматриваются разделы: «Классическая механика», «Элементы СТО» курса общей физики.

Цель пособия – оказать помощь студентам педагогических специальностей в изучении курса физики, организации их самостоятельной работы на практических занятиях и при обучении по индивидуальным образовательным траекториям.

Содержание практических занятий направлено на формирование у студентов знаний физических явлений, законов, формул, единиц измерения физических величин, различных методов расчета искомых величин, умений применять полученные знания для решения качественных и расчетных задач, графически представить физические явления и законы, анализировать их. Решение задач формирует навыки самостоятельного мышления.

В данном практикуме подобраны задания, предназначенные для организации аудиторной и внеаудиторной работы студентов и для самоконтроля при подготовке к итоговому тестированию.

Каждое практическое занятие по отдельно взятой теме содержит:
1) основные формулы и законы;
2) методические указания к решению задач по данной теме;
3) примеры решения задач разного уровня сложности;
4) задания для аудиторной и домашней работы;
5) задания для аудиторной самостоятельной работы.

Авторы выражают уверенность, что работа с данным практикумом окажет огромную пользу при изучении дисциплины «Общая и экспериментальная физика. Механика» и будет способствовать более глубокому изучению данного раздела физики.

ВВЕДЕНИЕ

Предлагаемая дисциплина «Общая и экспериментальная физика. Механика» предназначена для студентов, обучающихся по направлению подготовки 44.03.05 «Педагогическое образование» направленности «Математика и физика» и составлена с учетом требований Государственных образовательных стандартов по соответствующим направлениям подготовки. Эта дисциплина включает в себя панораму универсальных методов, законов и моделей, демонстрирует специфику рационального метода познания окружающего мира, сосредоточивает усилия на формировании у студентов общего физического мировоззрения и развитии физического мышления.

Физика является основой всего современного естествознания. В основании современной естественно-научной картины мира лежат физические принципы и концепции.

Приоритетами этой дисциплины являются:

- изучение основных физических явлений; овладение фундаментальными понятиями, законами и теориями классической и современной физики, а также методами физического исследования;
- овладение приемами и методами решения конкретных задач.

В данном практикуме при проведении учебных занятий преподавателями используются все атрибуты процесса научного познания (анализ и синтез, абстрагирование, идеализация, обобщения и ограничения, аналогия, моделирование, формализация, историческое и логическое; индукция и дедукция).

Цель и задачи изучения дисциплины

Цель: создание основ достаточно широкой теоретической подготовки в области физики, позволяющей будущим выпускникам ориентироваться в потоке научной и технической информации и обеспечивающей им возможность использования физических принципов в дальнейшей работе.

Задачи:

– формирование у студентов основ научного мышления, правильного понимания границ применимости различных физических понятий, законов, теорий и умения оценивать степень достоверности результатов, полученных с помощью экспериментальных или научных методов исследования;

– усвоение основных физических явлений и законов, методов физического мышления;

– выработка у студентов приемов владения основными методами решения и навыков их применения к решению конкретных физических задач.

Планируемые результаты обучения по дисциплине

После прохождения курса студент должен:

- *знать* фундаментальные законы природы и основные физические законы в области механики, методы теоретических и экспериментальных исследований;
- *уметь* применять физические методы и законы для решения физических задач;
- *владеть* основными методами решения конкретных физических задач.

На практических занятиях преподаватель знакомит студентов с различными методами решения физических задач, приводит примеры решения избранных задач, организует индивидуальную самостоятельную аудиторную работу студентов.

Практическое занятие 1
КИНЕМАТИКА ПОСТУПАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ

Учебные вопросы

1. Задача кинематики. Основные понятия: материальная точка, абсолютно твердое тело, механическая система, система отсчета, траектория.
2. Кинематические характеристики поступательного движения материальной точки: путь, перемещение, радиус-вектор, скорость, ускорение.
3. Кинематические уравнения поступательного движения.

Основные формулы и законы

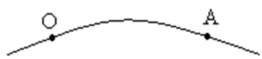
№	Название	Формула	Единица измерения	Направление вектора
1	Средняя скорость	$\vec{V}_{\text{ср}} = <\vec{V}> = \dfrac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$	м/с	$<\vec{V}> \uparrow\uparrow \Delta\vec{r}$
2	Мгновенная скорость	$\vec{V} = \dfrac{d\vec{r}}{dt} = \vec{r}'$	м/с	По касательной к траектории в сторону движения
3	Среднее ускорение	$<\vec{a}> = \dfrac{\Delta\vec{V}}{\Delta t}$	м/с^2	$<\vec{a}> \uparrow\uparrow \Delta\vec{V}$
4	Мгновенное ускорение	$\vec{a} = \dfrac{d\vec{V}}{dt} = \vec{V}' = \vec{r}''$	м/с^2	
5	Вектор и модуль полного ускорения	$\vec{a} = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n$ $\lvert\vec{a}\rvert = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2}$	м/с^2	
6	Модуль тангенциальной составляющей ускорения	$a_\tau = \dfrac{dV}{dt}$	м/с^2	$\vec{a}_\tau \parallel \vec{V}$
7	Модуль нормальной составляющей ускорения	$a_n = \dfrac{V^2}{R}$	м/с^2	$\vec{a}_n \perp \vec{V}$

№	Название	Формула	Единица измерения	Направление вектора
8	Путь равноускоренного прямолинейного движения	$S = \dfrac{V_2^2 - V_1^2}{2a}$	м	
9	Кинематические уравнения для равномерного прямолинейного движения	$\begin{cases} \vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{V}t \\ \vec{V} = \text{const} \\ \vec{a} = 0 \end{cases}$		
10	Кинематические уравнения для равноускоренного движения	$\begin{cases} \vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{V}_0 t + \dfrac{\vec{a}t^2}{2} \\ \vec{V} = \vec{V}_0 + \vec{a}t \\ \vec{a} = \text{const} \end{cases}$		
11	Кинематические уравнения для свободного падения ($g = 9{,}81$ м/с^2)	$\begin{cases} \vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{V}_0 t + \dfrac{\vec{g}t^2}{2} \\ \vec{V} = \vec{V}_0 + \vec{g}t \end{cases}$		

Задача кинематики – описать движение материальной точки и определить ее положение в любой момент времени.

Способы описания движения тела:

1. *Естественный способ (траекторный).*

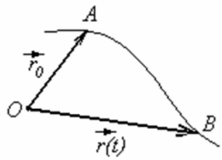


Этот способ применим, если известна траектория материальной точки. Положение тела определяется дуговой координатой l (расстояние вдоль траектории). Дуговая координата является функцией времени: $l = f(t)$.

2. *Координатный способ.*

С выбранным телом отсчета жестко связывают систему координат (x, y, z). Движение материальной точки можно описать системой уравнений: $x = f(t)$; $y = f(t)$; $z = f(t)$ Исключив зависимость от времени, получим уравнение траектории.

3. *Векторный способ.*



Положение материальной точки A задают радиус-вектором $\vec{r}$. Некоторую неподвижную точку O выбирают за начало отсчета и проводят из нее вектор в точку, где находится тело в данный момент времени. В процессе движения радиус-вектор изменяется и по величине и по направлению: $\vec{r} = \vec{r}(t)$.

В декартовой системе координат радиус-вектор можно представить в виде: $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$.

Вектор мгновенной линейной скорости:

$$\vec{V} = V_x\vec{i} + V_y\vec{j} + V_z\vec{k},$$

где $V_x = \dfrac{dx}{dt} = x'$, $V_y = \dfrac{dy}{dt} = y'$, $V_z = \dfrac{dz}{dt} = z'$ — проекции вектора скорости на координатные оси OX, OY, OZ.

Модуль скорости: $V = \left|\vec{V}\right| = \sqrt{V_x^2 + V_y^2 + V_z^2}$.

Для траекторного способа описания вектор и модуль скорости: $\vec{V} = \dfrac{dS}{dt}\vec{\tau}$, $V = \dfrac{dS}{dt} = S'$.

Вектор мгновенного ускорения:

$$\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k},$$

где $a_x = \dfrac{dV_x}{dt} = V_x' = x''$, $a_y = \dfrac{dV_y}{dt} = V_y' = y''$, $a_z = \dfrac{dV_z}{dt} = V_z' = z''$ — проекции вектора ускорения на координатные оси OX, OY, OZ.

Модуль ускорения: $a = \left|\vec{a}\right| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$.

Вектор ускорения можно разложить на две составляющие – тангенциальную и нормальную. Тогда вектор полного ускорения: $\vec{a} = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n$, его модуль $a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2}$.

Вектор средней скорости движения в интервале от t_1 до t_2:

$$<\vec{V}> = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{1}{t_2 - t_1}\int_{t_1}^{t_2}\vec{V}(t)dt,$$

где $\Delta\vec{r} = \int_{t_1}^{t_2}\vec{V}(t)dt$ – приращение радиус-вектора или вектор перемещения за промежуток времени от t_1 до t_2.

Классификация движения:

1) $\vec{a}_n = 0$ — прямолинейное движение (скорость не изменяется по направлению);
2) $\vec{a}_n \neq 0$ — криволинейное движение (скорость изменяется по направлению);
3) $a_n = \text{const}$ – движение по окружности – частный случай криволинейного движения;
4) $\vec{a}_\tau = 0$ — равномерное движение (скорость не изменяется по модулю);
5) $\vec{a}_\tau = \text{const}$ — равнопеременное движение (за равные промежутки времени модуль скорости изменяется на одну и ту же величину);
   $a_\tau = \text{const} > 0$ – равноускоренное движение;
   $a_\tau = \text{const} < 0$ – равнозамедленное движение;
6) $\vec{a}_\tau = 0$, $\vec{a}_n = 0$ — равномерное прямолинейное движение (или покой);
7) $\vec{a}_\tau = \text{const}$, $\vec{a}_n = 0$ – равнопеременное прямолинейное движение;
8) $a_\tau = 0$, $a_n = \text{const}$ – равномерное движение по окружности;
9) $a_\tau = \text{const}$, $a_n = \text{const}$ – равнопеременное движение по окружности.

Графическая иллюстрация кинематических законов движения.

1. Равномерное прямолинейное движение:

$$\begin{cases} \vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{V}t \\ \vec{V} = \text{const} \\ \vec{a} = 0 \end{cases} \text{ в проекции на ось } OX\text{: } \begin{cases} x = x_0 + V_x t \\ V_x = \text{const} \\ a_x = 0 \end{cases}$$

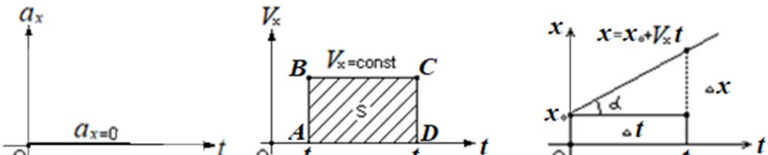


Рис. 1.1. Графики: *а* – зависимость проекции ускорения от времени; *б* – зависимость проекции скорости от времени; *в* – зависимость координаты *x* от времени при равномерном прямолинейном движении

Для прямолинейного однонаправленного движения модуль перемещения и есть пройденный путь $|\vec{l}| = S$. Кроме того, $|\vec{l}| = x - x_0$, значит $S = V_x t$.

По графику зависимости $V_x = f(t)$ (рис. 1.1, *б*) можно рассчитать путь, пройденный за промежуток времени $(t - t_0)$. Он равен площади фигуры *ABCD*, находящейся под графиком скорости. Это справедливо для любого вида движения.

Зависимость координаты точки от времени в равномерном движении – прямая линия, тангенс угла наклона которой к оси времени определяет модуль скорости точки $\mathrm{tg}\,\alpha = \dfrac{\Delta x}{\Delta t} = V$.

2. Равнопеременное прямолинейное движение:

$$\begin{cases} \vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{V}_0 t + \dfrac{\vec{a}t^2}{2} \\ \vec{V} = \vec{V}_0 + \vec{a}t \\ \vec{a} = \mathrm{const} \end{cases} \quad \text{в проекции на ось } OX\text{:} \quad \begin{cases} x = x_0 + V_{0x}t + \dfrac{at^2}{2} \\ V_x = V_{0x} + a_x t \\ a_x = \mathrm{const} \end{cases}$$

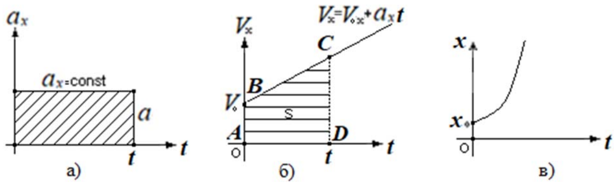


Рис. 1.2. Графики: *а* – зависимость проекции ускорения от времени; *б* – зависимость проекции скорости от времени; *в* – зависимость координаты *x* от времени при равнопеременном прямолинейном движении

По графику $a_x(t)$ можно судить об изменении модуля скорости: $\Delta V = V - V_0 = at$ – численно равно площади фигуры, ограниченной графиком ускорения и осью *t*.

На графике $V_x(t)$ – путь, пройденный точкой за время *t*, определяется как площадь фигуры *ABCD*, а тангенс угла наклона графика к оси времени есть ускорение точки.

Зависимость координаты от времени $x = x_0 + V_{0X}t + \dfrac{a_X t^2}{2}$ – квадратичная, график – ветвь параболы.

Методические указания

В кинематике не рассматриваются причины возникновения или изменения движения. Считается, что характер движения или законы движения известны.

Прямая основная задача кинематики заключается в нахождении любого параметра движения (координаты, радиуса кривизны траектории, скорости, ускорения) по известному закону движения.

Обратная задача кинематики состоит в определении закона движения по какому-либо известному параметру движения.

Если закон движения в задаче не задан в виде кинематического уравнения, то сначала надо выяснить, какой вид движения совершает данное тело. Для наиболее простых видов движения (равномерное прямолинейное, равнопеременное прямолинейное) вид этих уравнений приведен в разделе «Основные формулы и законы» (стр. 8–9).

Как правило, закон движения удобнее записывать в координатной форме.

Систему координат (обычно декартову) необходимо выбирать в зависимости от условий задачи, максимально упрощая вид кинематических уравнений в координатной форме. Следите за тем, чтобы правильно были определены проекции кинематических величин на выбранную ось координат.

Обратите внимание на то, что кинематическое уравнение в координатной форме содержит не путь, пройденный телом, а только его координаты.

При изменении направления движения тела пройденный путь продолжает увеличиваться, тогда как координата меняет характер своего изменения. Например, увеличение координаты после изменения направления движения сменяется на уменьшение координаты.

Путь, пройденный телом, может быть только положительным, а встреча двух тел означает равенство соответствующих координат этих тел в данный момент времени.

Более сложное криволинейное движение можно представить как совокупность составляющих движений вдоль выбранных осей координат – принцип разложения движения. Часто для составляющих движений получаются простые кинематические уравнения движения. Например, свободное движение тела с ускорением $\vec{g}$ можно представить как равномерное движение по оси X и равнопеременное движение с ускорением $\vec{g}$ вдоль оси Y.

Алгоритм решения задачи

1. Внимательно прочитайте условие задачи и кратко запишите его в системе единиц измерения СИ.

2. Сделайте краткий анализ условия задачи: охарактеризуйте движение тела (равномерное или равнопеременное, прямолинейное или криволинейное).

3. Выполните рисунок, поясняющий условие задачи. На рисунке укажите:

а) начальную координату тела, вектор скорости и вектор ускорения (не забывайте, что для равноускоренного движения $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{V}_0$, для равнозамедленного $\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{V}_0$);

б) систему отсчета, обозначив начало системы координат и направление координатных осей (выбор системы координат произволен, но выбирать ее необходимо в зависимости от условий задачи таким образом, чтобы математическое решение было упрощено).

4. На основании проведенного анализа запишите кинематические законы движения в векторной и координатной формах, при этом внимательно следите за знаками проекций векторов на соответствующие оси (по рисунку).

5. Решите полученную систему уравнений относительно искомой величины. Если число неизвестных больше числа уравнений, добавьте уравнения, связывающие неизвестные величины между собой.

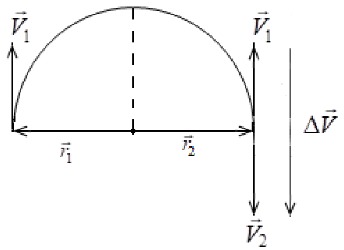
6. Проверьте размерность искомой величины.

7. Сделайте числовой расчет

8. Оцените разумность полученного результата.

Примеры решения задач

Пример 1.1. За промежуток времени Δt = 10,0 с точка прошла половину окружности радиуса R = 1,60 м. Вычислить за это время: а) среднюю путевую скорость $<V_n>$; б) модуль средней скорости $|<\vec{V}>|$.

Дано:	*Решение.*
$\Delta t = 10{,}0$ с $R = 1{,}60$ м $a_\tau = \text{const}$	
$<V_n> - ?$ $|<\vec{V}>| - ?$	

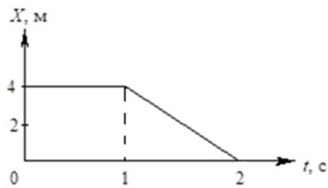
По определению средняя путевая скорость: $<V_n> = \dfrac{S}{\Delta t}$. Пройденный путь – половина длины окружности: $S = \pi R$. Тогда $<V_n> = \dfrac{\pi R}{\Delta t} = 0{,}50$ м/с.

По определению модуль средней скорости: $|<\vec{V}>| = \dfrac{|\Delta\vec{r}|}{\Delta t}$.

Модуль приращения радиуса-вектора $|\Delta\vec{r}| = |\vec{r}_2 - \vec{r}_1| = 2R$, следовательно $|<\vec{V}>| = \dfrac{2R}{\Delta t} = 0{,}32$ м/с.

Ответ: $<V_n>$ = 0,50 м/с; $|<\vec{V}>|$ = 0,32 м/с.

Пример 1.2. Тело движется прямолинейно вдоль оси OX. На графике показана зависимость координаты тела x от времени t. Чему равна средняя скорость движения тела на всем пути, пройденном за 2 с?



Дано:	*Решение.*
$\Delta t = 2$ с	По определению средняя скорость движения: $<V> = S / \Delta t$.
$<V> - ?$	

При прямолинейном однонаправленном движении пройденный путь можно найти из графика: $S = \Delta x = 6$ м – путь, пройденный точкой за интервал времени Δt = 2 с. Тогда $<V>$ = 3 м/с.

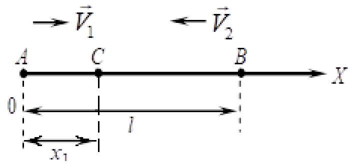
Ответ: $<V>$ = 3 м/с.

Пример 1.3. Два автомобиля одновременно выезжают из городов A и B, расстояние между которыми равно l, и движутся равномерно и прямолинейно по трассе со скоростями V_1 и V_2 навстречу друг другу. Через какое время t и на каком расстоянии S от города A они встретятся?

Дано:
l, V_1, V_2

$\langle V \rangle$ – ?
t – ?
S – ?

Решение.



В этой задаче удобно выбрать в качестве тела отсчета Землю.

Направим ось абсцисс по линии, соединяющей города A и B, в сторону города B, а начало отсчета поместим в точку A (см. рис.).

Условимся отсчитывать время от общего для обоих автомобилей момента начала движения. Тогда уравнения движения автомобилей (которые мы примем за материальные точки) будут иметь вид:

$$x_1 = x_{01} + V_{1x} t = x_{01} + \mathrm{V}_1 t,$$
$$x_1 = x_{02} - V_{2x} t = x_{02} - \mathrm{V}_2 t,$$

где x_1 и x_2 – координаты автомобилей в произвольный момент времени; $x_{01} = 0$, $x_{02} = l$ – начальные координаты автомобилей.

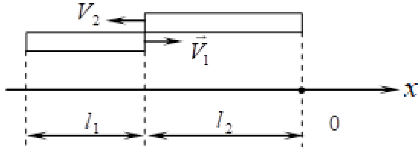
В точке C, в которой автомобили встретятся, координаты их будут одинаковыми: $x_1 = x_2$. Тогда

$$V_1 t = l - V_2 t\ ,\ t = \frac{l}{V_1 + V_2}.$$

Место встречи автомобилей находится на расстоянии $s = x_1$ или $s = x_2$ от города A, т. е. $s = \dfrac{V_1}{V_1 + V_2} l.$

Ответ: $t = \dfrac{l}{V_1 + V_2}$; $s = \dfrac{V_1}{V_1 + V_2} l.$

Пример 1.4. В течение какого времени скорый поезд длиной l_1, идущий со скоростью V_1, будет проходить мимо встречного товарного поезда длиной l_2, идущего со скоростью V_2 [11]?

Дано:	*Решение.*
l_1, l_2, V_1, V_2	
$t - ?$	

Началом встречи скорого и встречного товарного поездов следует считать тот момент времени $t_0 = 0$, в который координаты начал этих поездов одинаковы. Окончанием же встречи будем считать момент времени t, в который равны координаты их концов. Свяжем систему отсчета с одним из движущихся поездов, например с товарным. Направим ось в сторону движения скорого поезда, а начало координат совместим с концом товарного поезда (см. рис.). Очевидно, скорость скорого поезда относительно встречного товарного:

$$V_{\text{отн}} = V_1 + V_2.$$

Тогда если за начальный момент времени принять начало встречи, то закон движения конца скорого поезда $x = -x_0 + V_{\text{отн}}t$, где $x_0 = l_1 + l_2$ – начальная координата. Знак минус перед ней стоит потому, что x_0 отсчитывается влево от начала координат. В момент завершения обгона конец скорого поезда будет в начале выбранной системы координат, т. е. $x = 0$. Тогда для этого момента времени $-(l_1 + l_2) + (V_1 + V_2)t = 0$, откуда $t = \dfrac{l_1 + l_2}{V_1 + V_2}$.

Ответ: $t = \dfrac{l_1 + l_2}{V_1 + V_2}$.

Пример 1.5. Найти среднюю скорость тела в двух случаях: а) первую четверть времени оно двигалось со скоростью V_1, оставшееся время – со скоростью V_2; б) первую четверть пути оно двигалось со скоростью V_1, оставшуюся часть пути – со скоростью V_2.

Дано:	*Решение.*
V_1, V_2	Средняя скорость движения: $\langle V \rangle = S / t$, где S –
$\langle V \rangle - ?$	весь пройденный путь, t – все время движения.

а) Весь пройденный путь состоит из двух участков: $S = S_1 + S_2$, где $S_1 = V_1 \dfrac{1}{4} t$, $S_2 = V_2 \dfrac{3}{4} t$ – участки пути, пройденные телом за первую четверть времени и за оставшиеся три четверти времени соответственно. Следовательно, $S = V_1 \frac{1}{4} t + V_2 \frac{3}{4} t = \frac{t}{4}(V_1 + 3V_2)$. Подставляя в выражение средней скорости, получим: $< V >= \frac{1}{4}(V_1 + 3V_2)$.

б) Все время движения состоит из времени t_1 прохождения первой четверти пути и времени t_2 прохождения оставшейся части пути, то есть $t_1 = \frac{1}{4}\frac{S}{V_1}$, $t_2 = \frac{3}{4}\frac{S}{V_2}$. Значит, $t = \frac{S}{4V_1} + \frac{3S}{4V_2} = \frac{S(3V_1 + V_2)}{4V_1V_2}$. Подставляя в выражение средней скорости, получим: $< V >= \frac{4V_1V_2}{3V_1 + V_2}$.

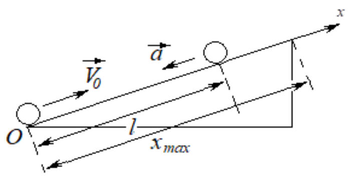
Ответ: а) $< V >= \frac{1}{4}(V_1 + 3V_2)$; б) $< V >= \frac{4V_1V_2}{3V_1 + V_2}$.

Пример 1.6. Вдоль наклонной доски пустили катиться снизу вверх шарик. На расстоянии l от начала пути шарик побывал дважды: через время t_1 и время t_2 после начала движения. Считая движение равнопеременным, определить его начальную скорость V_0, ускорение a и максимальное расстояние x_{max}, на которое шарик может откатиться вверх [11].

Дано:
l, t_1, t_2

V_0 – ?
a – ?
x_{max} – ?

Решение.



Если наклонную доску выбрать в качестве тела отсчета, а ось абсцисс выбрать так, как показано на рисунке, то зависимость координаты x шарика от времени записывается следующим образом: $x = x_0 + V_0 t - at^2/2$, где $x_0 = 0$. При $x = l$ имеем квадратное уравнение:

$$l = V_0 t - \frac{at^2}{2}, \qquad (1.1)$$

корнями которого являются заданные значения t_1 и t_2. Придадим уравнению (1.1) вид приведенного квадратного уравнения:

$$t^2 - \frac{2V_0}{a} t + \frac{2l}{a} = 0. \qquad (1.2)$$

Тогда в соответствии с теоремой Виета $t_1 + t_2 = 2V_0 / a$ и $t_1 t_2 = 2l / a$.

Из этих уравнений находим $a = 2l / t_1 t_2$, $V_0 = l(t_1 + t_2) / t_1 t_2$.

Шарик, двигаясь вверх, совершает равнозамедленное движение, следовательно, $(\vec{a})_x = -a$, в самой верхней точке его траектории скорость равна нулю $V = 0$. Тогда максимальное расстояние $x_{\max}$, на которое шарик может откатиться вверх, равно:

$$x_{\max} = \frac{V^2 - V_0^2}{-2a} = \frac{V_0^2}{2a} = \frac{l(t_1 + t_2)^2}{4 t_1 t_2}.$$

Ответ: $a = 2l / t_1 t_2$, $V_0 = l(t_1 + t_2) / t_1 t_2$, $x_{\max} = \dfrac{l(t_1 + t_2)^2}{4 t_1 t_2}$.

Пример 1.7. Пуля, летящая со скоростью V_0, попадает в деревянную преграду и проникает в нее на глубину l. Найти ускорение a и время движения пули t внутри преграды. Какова была ее скорость V_1 на глубине $l_1 < l$? На какой глубине l_2 скорость пули уменьшилась в n раз?

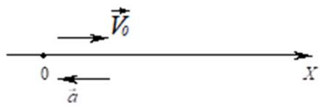
Дано:

V_0, l, $l_1 < l$, n

$a - ?$ $t - ?$

$V_1 - ?$ $l_2 - ?$

Решение.



Ось абсцисс направляем вдоль движения пули, а началом отсчета будем считать точку соприкосновения пули с преградой (см. рис.). Движение пули внутри преграды является равнозамедленным, поэтому $(\vec{a})_x = -a$.

Уравнения движения пули в проекции на ось $0X$:

$$x = x_0 + V_0 t = at^2 / 2, \tag{1.3}$$

$$V = V_0 - at. \tag{1.4}$$

Так как пуля движется вдоль прямой в одном направлении, то ее координата x и пройденный путь l равны в любой момент времени. Если начальная координата пули $x_0 = 0$, тогда уравнение (1.3) запишется так:

$$l = V_0 t - at^2 / 2. \tag{1.5}$$

В конце пути l скорость пули $V = 0$, поэтому уравнение (1.4) перепишется в виде

$$V_0 - at = 0. \qquad (1.6)$$

Решая совместно уравнения (1.5) и (1.6), находим: $t = 2l / V_0$, $a = V_0^2 / 2l$.

Для нахождения скорости V_1 пули на глубине l_1 воспользуемся формулой пути для равнозамедленного движения: $l_1 = \dfrac{V_1^2 - V_0^2}{-2a}$, откуда $V_1 = \sqrt{V_0^2 - 2al_1} = V_0\sqrt{1 - l_1/l}$.

Для глубины l_2, на которой начальная скорость пули уменьшилась в n раз, т. е. $V_2 = V_0 / n$, получим: $l_2 = \dfrac{V_2^2 - V_0^2}{-2a} = l\dfrac{n^2 - 1}{n^2}$.

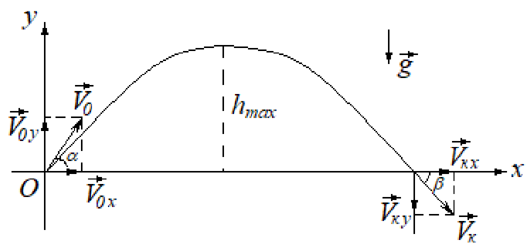
Ответ: $t = 2l/V_0$, $a = V_0^2/2l$; $V_1 = \sqrt{V_0^2 - 2al_1} = V_0\sqrt{1 - l_1/l}$; $l_2 = l\dfrac{n^2 - 1}{n^2}$.

Пример 1.8. Тело брошено под углом α к горизонту с начальной скоростью V_0. Найти: а) уравнение траектории движения тела; б) максимальную высоту подъема тела; в) время движения; г) дальность полета; д) величину и направление конечной скорости тела, если начальное и конечное положение тела находятся на одной горизонтали [9].

Дано:
α, V_0

$y(x)$ – ?
h_{max} – ?
t – ? S – ?
V_k – ? β – ?

Решение.



Начало системы координат XOY свяжем с положением тела в начальный момент времени. Тогда начальные радиус-вектор и координаты его будут равны нулю ($\vec{r}_0 = 0$, $x_0 = 0$, $y_0 = 0$). Направим оси системы координат как показано на рисунке. Поскольку векторы ускорения $\vec{g}$ и скорости $\vec{V}_0$ направлены под углом друг к другу, то движение будет происходить по криволинейной траектории.

Закон движения тела в векторной форме в этом случае запишем как:

$$\vec{r} = \vec{V}_0 t + \frac{\vec{g}t^2}{2}. \qquad (1.7)$$

Представим данное движение как суперпозицию двух простых движений по осям *OX* и *OY*. Для этого разложим вектор начальной скорости $\vec{V}_0$ и ускорение $\vec{g}$ на две составляющие: $\vec{V}_0 = \vec{V}_{0x} + \vec{V}_{0y}$, $\vec{g} = \vec{g}_x + \vec{g}_y$.

Проектируя уравнение (1.7) на оси *OX* и *OY*, видим, что в направлении *OX* тело движется равномерно и прямолинейно, так как в этом направлении проекция ускорения свободного падения $g_x = 0$. Законом движения тела по *OX* будет уравнение $x = V_{0x}t$, где $V_{0x} = V_0 \cos\alpha$ – проекция начальной скорости на ось *OX*. Тогда

$$x = V_0 \cos\alpha \cdot t. \qquad (1.8)$$

В направлении *OY* тело совершает равнопеременное движение с начальной скоростью $\vec{V}_{0y}$ и ускорением $\vec{g}$. Уравнение движения тела по *OY* будет иметь вид: $y = V_{0y}t - \frac{gt^2}{2}$, где $V_{0y} = V_0 \sin\alpha$ – проекция начальной скорости на ось *OY*. Следовательно,

$$y = V_0 \sin\alpha \cdot t - \frac{gt^2}{2}. \qquad (1.9)$$

а) Найдем уравнение траектории движения – зависимость $y(x)$. Для этого из (1.8) выразим время: $t = \frac{x}{V_0 \cos\alpha}$ и подставим его в (1.9). Получим

$$y = V_0 \sin\alpha \frac{x}{V_0 \cos\alpha} - \frac{g}{2}\frac{x^2}{V_0^2 \cos^2\alpha}.$$

Окончательно: $y = x \cdot \mathrm{tg}\alpha - \frac{g(1+\mathrm{tg}^2\alpha)}{2V_0^2}x^2$, так как зависимость $y(x)$ – квадратичная, то траектория движения – парабола.

б) Для максимальной точки подъема тело совершает по *OY* равнозамедленное движение. Значит,

$$y_{\max} = V_{0y}t_{\text{под}} - \frac{gt_{\text{под}}^2}{2}, \qquad (1.10)$$

где $t_{\text{под}}$ – время движения тела до $y_{\max}$.

Зная, что в точке $y_{\max}$ скорость тела по *OY* (V_y) равна нулю, найдем это время подъема:

$$V_y = V_{0y} - gt_{под} = 0 \Rightarrow t_{\text{под}} = \frac{V_0 \sin\alpha}{g}. \qquad (1.11)$$

Подставляя (1.11) в (1.10), получим

$$h_{\max} = y_{\max} = \frac{V_0^2 \sin^2\alpha}{2g}. \qquad (1.12)$$

в) Полное время полета t найдем из уравнения (1.10). Так как конечная координата тела по OY равна нулю, то

$$V_0 \sin\alpha \cdot t - \frac{gt^2}{2} = 0 \Rightarrow t = \frac{2V_0 \sin\alpha}{g}. \qquad (1.13)$$

г) Под дальностью полета следует понимать путь s, пройденный телом по горизонтали за полное время движения.

Из уравнения (1.7): $S = \Delta x = V_0 \cos\alpha \cdot t$.

Используя (1.13), получим $S = \dfrac{V_0 \cos\alpha \cdot 2V_0 \sin\alpha}{g} = \dfrac{V_0^2 \sin 2\alpha}{g}$.

д) Конечная скорость равна: $\vec{V}_{\text{к}} = \vec{V}_x + \vec{V}_y$.

Модуль конечной скорости по теореме Пифагора: $V_{\text{к}} = \sqrt{V_x^2 + V_y^2}$, где V_x и V_y – проекции мгновенной скорости $\vec{V}_{\text{к}}$ на соответствующие оси. Так как: $V_x = V_{0x} = V_0 \cos\alpha$

и $$V_y = V_{0y} - gt = V_0 \sin\alpha - g\frac{2V_0 \sin\alpha}{g} = -V_0 \sin\alpha, \text{ то}$$

$$V_{\text{к}} = \sqrt{V_0^2 \cos^2\alpha + V_0^2 \sin^2\alpha} = V_0.$$

Найти направление вектора – значит определить величину угла между этим вектором и горизонталью. Обозначим этот угол β.

Из рисунка: $\operatorname{tg}\beta = \left|\dfrac{V_y}{V_x}\right| = \left|\dfrac{V_0 \sin\alpha}{V_0 \cos\alpha}\right| = \operatorname{tg}\alpha$, $\beta = \alpha$.

Ответ: а) $y = x \cdot \operatorname{tg}\alpha - \dfrac{g}{2V_0^2}(1 + \operatorname{tg}^2\alpha)x^2$; б) $h_{\max} = \dfrac{V_0^2 \sin^2\alpha}{2g}$; в) $t = \dfrac{2V_0 \sin\alpha}{g}$; г) $S = \dfrac{V_0^2}{g}\sin 2\alpha$; д) $V_{\text{к}} = V_0$, $\beta = \alpha$.

Пример 1.9. Точка движется в плоскости XOY по закону: $x = bt$, $y = bt(1 - kt)$, где b и k – положительные константы, t – время. Найти: а) уравнение траектории точки $y(x)$; б) модуль скорости и модуль ускорения точки в зависимости от времени t.

Дано:	*Решение.*
$x = bt$; $y = bt(1 - kt)$; $b, k = \text{const}$ $b, k > 0$	Закон движения материальной точки задан. Необходимо решить прямую задачу кинематики, т. е. по известному закону движения определить параметры движения – модуль скорости и модуль ускорения, а также траекторию движения.
$y(x)$ – ? $\lvert\vec{V}(t)\rvert$ – ? $\lvert\vec{a}(t)\rvert$ – ?	Для нахождения траектории движения исключим из уравнений движения, заданных координатным способом, зависимость от времени.

$$\begin{cases} x = bt & (1.14) \\ y = bt(1 - kt) & (1.15) \end{cases}$$

Из уравнения (1.14) выразим время: $t = x / b$ и, подставив в уравнение (1.15), получим уравнение траектории: $y = x - kx^2 / b$.

Так как уравнения движения заданы координатным способом, то необходимо найти проекции вектора скорости на соответствующие координатные оси: V_x и V_y.

$$V_x = \frac{dx}{dt} = x' = b; \qquad V_y = \frac{dy}{dt} = y' = b - 2bkt.$$

Модуль вектора полной скорости:

$$V = \sqrt{(V_x)^2 + (V_y)^2} = b\sqrt{1 + (1 - 2kt)^2}.$$

Теперь по определению найдем модуль вектора полного ускорения:

$$\vec{a} = \vec{a}_x + \vec{a}_y = a_x\vec{i} + a_y\vec{j}.$$

Проекции ускорения:

$$a_x = \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dV_x}{dt} = 0; \quad a_y = \frac{d^2y}{dt^2} = \frac{dV_y}{dt} = -2kb.$$

Модуль ускорения:

$$a = \sqrt{(a_x)^2 + (a_y)^2} = |a_y| = 2kb = \text{const}.$$

Ответ: $y = x - kx^2 / b$; $V = b\sqrt{1 + (1 - 2kt)^2}$; $a = 2kb = \text{const}$.

Задачи для аудиторной и домашней работы

Задача 1.1. Радиус-вектор частицы с течением времени изменяется по закону: $\vec{r} = 3t^2\vec{i} + 4t^2\vec{j} + 7\vec{k}$ (м). Найти: 1) вектор перемещения и его модуль за первые 10 секунд движения; 2) вектор и модуль мгновенной скорости.

Задача 1.2. Радиус-вектор частицы изменяется со временем по закону: $\vec{r}(t) = 3t^2\vec{i} + 2t\vec{j} + 1\vec{k}$ (м). Найти: а) скорость $\vec{V}$ и ускорение $\vec{a}$ частицы; б) модуль скорости $|\vec{V}|$ в момент времени $t = 1$ с; в) путь S, пройденный частицей за 11-ю секунду движения.

Задача 1.3. Точка движется в плоскости XOY по закону: $x = bt$; $y = bt(1 - kt)$, где b, k – положительные константы, t – время движения. Найти: 1) уравнение траектории точки; 2) зависимость мгновенной скорости точки от времени.

Задача 1.4. Материальная точка движется в плоскости XOY согласно уравнениям: $x = 2 + 7t - 2t^2$ и $y = 2 - t + 0{,}2t^2$. Найти модули скорости и ускорения точки в момент времени $t = 5$ с [11].

Задача 1.5. Зависимость пройденного телом пути от времени задается уравнением: $S = At + Bt^2 + Ct^3$, где $A = 3$ м/с, $B = -2$ м/с^2, $C = 1$ м/с^3. Определить для тела в интервале времени от $t_1 = 1$ с до $t_2 = 4$ с: а) среднюю скорость; б) среднее ускорение.

Задача 1.6. Движение материальной точки задано уравнением $S = 4t + 0{,}05t^3$ (м). Определить скорость и ускорение точки в моменты времени $t_1 = 2$ с и $t_2 = 10$ с.

Задача 1.7. Частица движется со скоростью $\vec{V}(t) = 1\vec{i} + 2t\vec{j} + 3t^2\vec{k}$ (м/с). Найти: а) перемещение $\Delta\vec{r}$ частицы за первые 2 секунды ее движения; б) модуль скорости в момент времени $t = 2$ с.

Задача 1.8. Материальная точка движется прямолинейно с начальной скоростью 10 м/с и постоянным ускорением 5 м/с^2. Определить, во сколько раз путь, пройденный материальной точкой, будет отличаться от модуля ее перемещения спустя 4 с после начала отсчета времени. Нарисовать графики зависимости пройденного пути и модуля перемещения этой точки от времени [11].

Задача 1.9. Частица совершает прямолинейное движение вдоль оси OX. В начальной момент времени координаты частицы $x_0 = 0$. Проекция скорости меняется по закону $V_x = 10(1 - 0{,}2t)$ м/с. Получить кинематическое уравнение движения, нарисовать график зависимости $x(t)$. В какие моменты времени частица будет находиться на расстоянии 10 м от начала координат?

Задача 1.10. Велосипедист проехал первую половину пути со скоростью V_0 км/ч. Оставшуюся часть пути он половину времени двигался со скоростью V_1, а последний участок со скоростью V_2. Найти среднюю за все время движения скорость.

Задача **1.11.** С башни высотой $H = 25$ м горизонтально бросили камень со скоростью $V_0 = 15$ м/с. Найти: 1) время полета камня; 2) на каком расстоянии от основания башни он упадет на землю; 3) с какой скоростью он упадет на землю; 4) какой угол составит траектория камня с горизонтом в точке его падения на землю. Сопротивлением воздуха пренебречь [9].

Задача 1.12. Тело бросили со скоростью $V_0 = 20$ м/с под углом $\alpha = 30°$ к горизонту. Пренебрегая сопротивлением воздуха, определите: 1) время полета тела; 2) максимальную высоту подъема; 3) дальность полета (по горизонтали); 4) радиусы кривизны начала и вершины траектории; 5) уравнение траектории.

Задача 1.13. Тело, брошенное вертикально вверх, находилось на одной и той же высоте $H = 8{,}6$ м два раза с интервалом $\Delta t = 3$ с. Пренебрегая сопротивлением воздуха, вычислить начальную скорость движения брошенного тела.

Задача 1.14. Снаряд, выпущенный из орудия под углом $\alpha = 30°$ к горизонту, дважды был на одной и той же высоте H: спустя время $t_1 = 10$ с и $t_2 = 50$ с после выстрела. Определить начальную скорость снаряда и высоту его подъема H.

Задача 1.15. С балкона, находящегося на высоте 10 м от земли, вертикально вверх брошено тело с начальной скоростью 5 м/с. Определить время и скорость приземления тела. Нарисовать графики зависимости координаты тела от времени и проекции скорости тела от времени.

Задача 1.16. С балкона, находящегося на высоте 20 м от земли, первое тело бросили вертикально вверх со скоростью 10 м/с, второе просто уронили. Определить максимальное расстояние между телами. Нарисовать графики зависимости координаты от времени для первого и второго тела.

Задание 1.17. Поезд движется прямолинейно со скоростью $V_0 = 180$ км/ч. При экстренном торможении скорость поезда изменяется по закону $V = V_0 - At$, где $A = 1$ м/с^3. Каков тормозной путь поезда? Через какое время после начала торможения он остановится?

Задание 1.18. Две материальные точки движутся согласно уравнениям $x_1 = 4t + 8t^2 - 16t^3$ и $x_2 = 2t - 4t^2 + t^3$. В какой момент времени t ускорения этих точек будут одинаковым? Найти скорости V_1 и V_2 точек в этот момент времени [8].

Задание 1.19. Мяч брошен под углом 60° к горизонту со скоростью 20 м/с. Определить наибольшую высоту подъема и дальность полета, радиус кривизны траектории в наивысшей точке траектории.

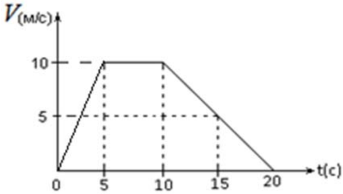
Задание 1.20. Прямолинейное движение материальной точки задано уравнением $x = at^2 + bt + c$, где $a = 2$ м/с^2, $b = -3$ м/с, $c = 4$ м. Определить скорость и ускорение точки в конце 3 с, а также путь, пройденный точкой за 5 с.

Задание 1.21. Материальная точка движется прямолинейно, уравнение движения: $x = 2 + 3t^2 + 0{,}01t^3$ (м). Каковы скорость и ускорение точки в момент времени $t_1 = 0$; $t_2 = 10$ с?

Задание 1.22. Зная уравнение движения материальной точки, записанное в системе СИ, $S = 2t^3 - t^2$, найти скорость и ускорение точки через 2 с после начала движения.

Самостоятельная аудиторная работа

Вариант 1.1

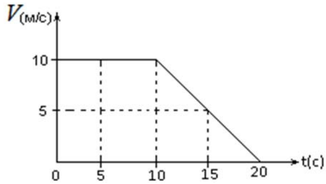


1. Кинематические уравнения движения материальной точки имеют вид: $x = 2t$; $y = t^3$. Определить модуль мгновенной скорости для момента времени $t = 2$ с.
2. Дан график зависимости $V = f(t)$. Построить график зависимости $S = f(t)$ и определить путь, пройденный за первые пятнадцать секунд движения.

Вариант 1.2

1. Кинематическое уравнение движения материальной точки имеет вид: $\vec{r} = t^3\vec{i} + 2t^2\vec{j}$ (м). Определить модуль мгновенной скорости для момента времени $t = 2$ с.
2. Зависимость пройденного материальной точкой пути от времени задана уравнением: $S = 2t + t^2$ (м). Построить график зависимости $V = f(t)$ в интервале времени от $t = 0$ до $t = 4$ с.

Вариант 1.3



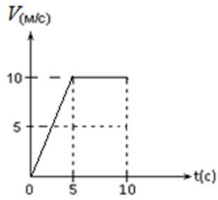
1. Зависимость пройденного материальной точкой пути от времени задана уравнением: $S = 6t + 2t^2 + t^3$ (м). Найти среднюю скорость за вторую секунду движения.
2. Дан график зависимости $V = f(t)$. Построить график зависимости $S = f(t)$ и определить путь, пройденный за первые десять секунд движения.

Вариант 1.4

1. Кинематическое уравнение движения материальной точки имеет вид: $\vec{r} = 2t^2\vec{i} + t^3\vec{j}$ (м). Определить модуль мгновенной скорости для момента времени $t = 2$ с.
2. Зависимость пройденного материальной точкой пути от времени задана уравнением: $S = 6t - 3t^2 + 2t^3$ (м). Построить график зависимости $V = f(t)$ в интервале времени от $t_1 = 0$ до $t_2 = 3$ с.

Вариант 1.5

1. Радиус-вектор материальной точки изменяется с течением времени по закону: $\vec{r} = 4t^2\vec{i} + 3t\vec{j} + 2\vec{k}$ (м). Определить для момента времени $t = 2$ с вектор и модуль скорости.
2. Дан график зависимости $V = f(t)$. Построить график зависимости $a = f(t)$ и определить путь за 10 с движения.



Вариант 1.6

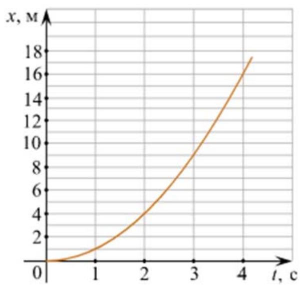
1. Кинематическое уравнение движения материальной точки имеет вид: $\vec{r} = t^3\vec{i} + 3t^2\vec{j} + 2\vec{k}$ (м). Определить модуль мгновенного ускорения для момента времени $t = 2$ с.
2. Зависимость пройденного материальной точкой пути от времени задана уравнением: $S = 3t - 2t^2$ (м). Построить график зависимости $a = f(t)$ в интервале времени от $t_1 = 0$ до $t_2 = 3$ с.

Вариант 1.7

1. Начальное значение скорости: $\vec{V}_0 = 2\vec{i} + 1\vec{j} + 4\vec{k}\left(\frac{\text{м}}{\text{с}}\right)$, конечное $\vec{V}_t = 3\vec{i} + 4\vec{j} + 5\vec{k}\left(\frac{\text{м}}{\text{с}}\right)$. Найти: 1) приращение вектора скорости; 2) модуль приращения вектора скорости; 3) приращение модуля вектора скорости.
2. Зависимость пройденного материальной точкой пути от времени задана уравнением: $S = -3t + 2t^2$ (м). Построить график зависимости скорости от времени $V = f(t)$ в интервале времени от $t_1 = 0$ до $t_2 = 3$ с.

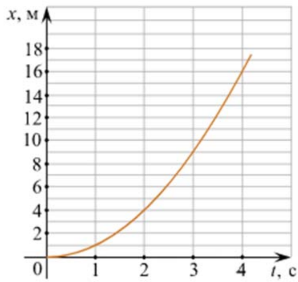
Вариант 1.8

1. Материальная точка движется прямолинейно. Уравнение движения имеет вид $S = 4t^3 - t^2 + 5t$ (м). Определить скорость и ускорение точки в конце 2 с.
2. Дан график зависимости координаты тела, движущегося равноускоренно из состояния покоя, от времени $x = f(t)$. Определить проекцию скорости тела в момент времени $t = 2$ с.



Вариант 1.9

1. Скорость материальной точки изменяется с течением времени по закону: $\vec{V} = 5t^2\vec{i} - 3t\vec{j} + 4\vec{k}$ (м). Определить для момента времени t = 2 с вектор и модуль ускорения.
2. Дан график зависимости координаты тела, движущегося равноускоренно из состояния покоя, от времени $x = f(t)$. Определить проекцию скорости тела в момент времени t = 4 с.



Вариант 1.10

1. Начальное значение ускорения: $\vec{a}_0 = 7\vec{i} + 3\vec{j} + 2\vec{k}\left(\frac{\text{м}}{\text{с}^2}\right)$, конечное $\vec{a}_t = 1\vec{i} + 6\vec{j} - 5\vec{k}\left(\frac{\text{м}}{\text{с}}\right)$. Найти: 1) приращение вектора ускорения; 2) модуль приращения вектора ускорения; 3) приращение модуля вектора ускорения.
2. Зависимость пройденного материальной точкой пути от времени задана уравнением: $S = 6 + 2t + t^2$ (м). Построить график зависимости $V = f(t)$ в интервале времени от $t = 0$ до $t = 4$ с.

Практическое занятие 2
КИНЕМАТИКА ВРАЩАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ

Учебные вопросы

1. Кинематические характеристики вращательного движения: угловое перемещение, угловая скорость, угловое ускорение.
2. Кинематические уравнения вращательного движения.
3. Связь линейных и угловых характеристик.

Основные формулы и законы

№	Название	Формула	Единица измерения	Направление вектора
1	Угловое перемещение	$\vec{\varphi}$	рад	Вдоль оси вращения по правилу буравчика
2	Средняя угловая скорость	$\langle\vec{\omega}\rangle = \dfrac{\Delta\vec{\varphi}}{\Delta t}$	рад/с	$<\vec{\omega}>\uparrow\uparrow\Delta\varphi$
3	Мгновенная угловая скорость	$\vec{\omega} = \dfrac{d\vec{\varphi}}{dt} = \vec{\varphi}'$	рад/с	Вдоль оси вращения по правилу буравчика
4	Среднее угловое ускорение	$\langle\vec{\varepsilon}\rangle = \dfrac{\Delta\vec{\omega}}{\Delta t}$	рад/с^2	$<\vec{\varepsilon}>\uparrow\uparrow\Delta\vec{\omega}$
5	Мгновенное угловое ускорение	$\vec{\varepsilon} = \dfrac{d\vec{\omega}}{dt} = \vec{\omega}' = \vec{\varphi}''$	рад/с^2	$\vec{\varepsilon} \parallel \Delta\vec{\omega}$
6	Период при равномерном вращении	$T = t / N$	с	
7	Линейная частота при равномерном вращении	$\nu = N / t$	Гц = 1/с	
8	Связь угловой скорости с периодом и частотой	$\omega = \dfrac{2\pi}{T} = 2\pi\nu$		
9	Связь между модулями линейной и угловой скорости	$V = \omega R$		

№	Название	Формула	Единица измерения	Направление вектора
10	Связь между модулями тангенциального и углового ускорения	$a_\tau = \varepsilon R$		
11	Связь между модулем нормального ускорения и угловой скоростью	$a_n = \omega^2 R$		
12	Кинематические уравнения равномерного вращательного движения	$\begin{cases} \varphi = \omega t \\ \omega = \mathrm{const} \end{cases}$		
13	Кинематические уравнения равнопеременного вращательного движения	$\begin{cases} \varphi = \omega_0 t + \frac{\varepsilon t^2}{2} \\ \omega = \omega_0 + \varepsilon t \\ \varepsilon = \mathrm{const} \end{cases}$		
14	Угол поворота	$\varphi = 2\pi N$	рад	
15	Угол поворота при равнопеременном вращательном движении	$\varphi = \frac{\omega_2^2 - \omega_1^2}{2\varepsilon}$	рад	

Методические указания к решению задач

При вращательном движении тела вокруг неподвижной оси векторы направлены по оси вращения. Эти векторы не имеют определенных точек приложения, они могут откладываться из любой точки оси вращения. Векторы, направления которых связываются с направлением вращения, называются псевдовекторами.

Если тело вращается и при этом движется поступательно, то такое движение называется плоским и его в общем случае можно представить как совокупность поступательного движения со скоростью $\vec{V}_0$ и вращательного движения вокруг выбранной оси с угловой скоростью $\vec{\omega}$.

Скорость поступательного движения $\vec{V}_0$ одинакова для всех точек тела и является также скоростью поступательного движения выбранной оси вращения. Линейная скорость движения любой точки тела:

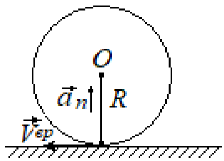
$$\vec{V} = \vec{V}_0 + \vec{V}', \qquad \vec{V}' = [\vec{\omega}, \vec{r}],$$

где $\vec{V}'$ – линейная скорость точки, обусловленная вращением тела; r – расстояние от оси вращения до данной точки. Такое представление движения твердого тела можно осуществить множеством способов, отличающихся значением $\vec{V}_0$ (выбором оси вращения) и $\vec{V}'$, но соответствующих одной и той же угловой скорости $\vec{\omega}$.

Примеры решения задач

Пример 2.1. Вагон движется равномерно с постоянной скоростью 54 км/ч относительно железной дороги. Найти период, частоту, угловую скорость и нормальное ускорение точки обода колеса, имеющего радиус 30 см, если между колесом и рельсом нет проскальзывания.

Дано:	*Решение.*
$V = 54\,\frac{\text{км}}{\text{ч}} = 15\,\frac{\text{м}}{\text{с}}$	
$R = 30$ см	
T – ? ν – ?	
ω – ? a_n – ?	



Переходим в подвижную систему отсчета, связанную с центром колеса вагона. Скорость равномерного движения

$$V = \frac{S}{t}. \qquad (2.1)$$

За время t, равное периоду, точка пройдет путь S, равный длине окружности обода колеса. Тогда формула (2.1) примет вид: $V = \frac{2\pi R}{T}$. Отсюда период $T = \frac{2\pi R}{V}$. Частота вращения: $\nu = \frac{1}{T}$.

Угловую скорость и нормальное ускорение находим по формулам:

$$V = \omega R \Rightarrow \omega = \frac{V}{R}; \; a_n = \frac{V^2}{R}.$$

Проверка размерности:

$$[T] = 1\,\frac{\text{м}\cdot\text{с}}{\text{м}} = 1\ \text{с}; \; [\omega] = 1\,\frac{\text{м}}{\text{м}\cdot\text{с}} = 1\ \text{с}^{-1}; \; [a_n] = 1\,\frac{\text{м}^2}{\text{с}^2\cdot\text{м}} = 1\,\frac{\text{м}}{\text{с}^2}.$$

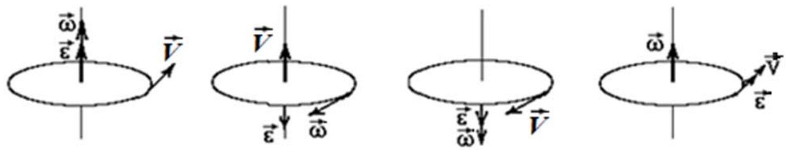
Расчет:

$$T = \frac{2 \cdot 3{,}14 \cdot 0{,}3}{15} = 0{,}125 \text{ с}; \; \nu = \frac{1}{0{,}125} = 8 \text{ с}^{-1}; \; \omega = \frac{15}{0{,}3} = 50 \; \frac{\text{рад}}{\text{с}};$$

$$a_n = \frac{15^2}{0{,}3} = 750 \; \frac{\text{м}}{\text{с}^2}.$$

Ответ: $T = 0{,}125$ с; $\nu = 8$ с$^{-1}$; $\omega = 50 \frac{\text{рад}}{\text{с}}$; $a_n = 750 \frac{\text{м}}{\text{с}^2}$.

Пример 2.2. Выбрать рисунок, указывающий верное направление векторов линейной скорости $\vec{V}$, угловой скорости $\vec{\omega}$ и углового ускорения $\vec{\varepsilon}$ материальной точки A при равноускоренном ее вращении по окружности против часовой стрелки.



1) 2) 3) 4)

Решение. По определению: вектор мгновенной скорости направлен по касательной к траектории движения в направлении движения. Следовательно, верное направление вектора мгновенной скорости указано на рис. 1 и 4.

Так как вращение по окружности равноускоренное и против часовой стрелки, векторы $\vec{\omega}$ и $\vec{\varepsilon}$ аксиальные и сонаправлены. Их направление подчиняется правилу правого винта. Тогда верное направление этих векторов правильно указано на рис. 1.

Следовательно, верно указаны направления трех векторов на рис. 1.

Ответ: рис. 1.

Пример 2.3. Нормальное ускорение точки, движущейся по окружности радиусом $r = 4$ м, задается уравнением $a_n = A + Bt + Ct^2$ ($A = 1$ м/с^2, $B = 6$ м/с^3, $C = 9$ м/с^4). Определите: 1) тангенциальное ускорение точки; 2) путь, пройденный точкой за время $t_1 = 5$ с после начала движения; 3) полное ускорение для момента времени $t_2 = 1$ с [10].

Дано:
$r = 4$ м
$a_n = A + Bt + Ct^2$
$A = 1$ м/с^2
$B = 6$ м/с^3
$C = 9$ м/с^4
$t_1 = 5$ с
$t_2 = 1$ с

---

a_τ – ?
S_1 – ? a_2 – ?

Решение. По условию задачи нормальное ускорение задано выражением: $a_n = A + Bt + Ct^2$.
По определению нормальное ускорение:

$$a_n = \frac{V^2}{r}.$$

Отсюда модуль скорости: $V = \sqrt{r \cdot a_n}$,

$$V = \sqrt{r\left(A + Bt + Ct^2\right)} = \sqrt{4\left(1 + 6t + 9t^2\right)} = 2(1 + 3t) = 2 + 6t.$$

Тангенциальное ускорение по определению:

$$a_\tau = \frac{dV}{dt}, \quad a_\tau = \frac{d}{dt}\left(2 + 6t\right) = 6 \ \ (\text{м/с}^2).$$

Путь, пройденный точкой за время $t_1 = 5$ с после начала движения:

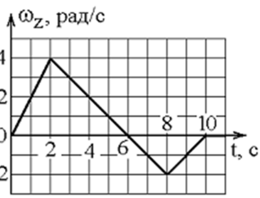
$$s_1 = \int_0^{t_1} V dt = \int_0^{t_1} \left(2 + 6t\right) dt = 2t_1 + 3t_1^2 = 2 \cdot 5 + 3 \cdot 5^2 = 85 \ \ (\text{м}).$$

Полное ускорение: $\vec{a} = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n$, модуль полного ускорения: $a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2}$. В момент времени $t_2 = 1$ с: $a_{\tau 2} = a_\tau$, $a_{n2} = \dfrac{V_2^2}{r} = \dfrac{\left(2 + 6t_2\right)^2}{r}$,

$$a_2 = \sqrt{a_{\tau 2}^2 + a_{n2}^2} = \sqrt{a_{\tau 2}^2 + \frac{\left(2 + 6t_2\right)^4}{r^2}} = 17{,}1 \, (\text{м/с}^2).$$

Ответ: 1) $a_\tau = 6$ м/с^2; 2) $S_1 = 85$ м; 3) $a_2 = 17{,}1$ м/с^2.

Пример 2.4. Твердое тело начинает вращаться вокруг оси Z с угловой скоростью, проекция которой изменяется со временем, как показано на графике. Определить величину среднего углового перемещения (в радианах) в промежутке времени от 4 до 8 с [11].



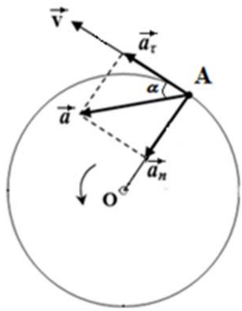
Решение. По определению $\vec{\omega} = \dfrac{d\vec{\varphi}}{dt}$. Отсюда $d\varphi = \omega_z dt$ и $\varphi = \int_{t_2}^{t_2} \omega_z dt$. Используя геометрический смысл интеграла, искомый угол поворота можно найти как площадь двух треугольников. При этом нужно учесть, что, во-первых, в момент времени $t = 6$ с происходит изменение направления вращения тела на противоположное и, во-вторых, площади треугольников равны. Поэтому угловое перемещение тела за рассматриваемый промежуток времени равно нулю [11].

Ответ: 0.

Пример 2.5. Угловая скорость тела изменяется по закону: $\omega = kt$. Найти закон изменения тангенса угла между векторами полного линейного ускорения и линейной скорости некоторой точки A этого тела.

Дано:	*Решение.*
$\omega = kt$	Предположим, что тело вращается вокруг
$\text{tg}\,\alpha = f(t) = ?$	неподвижной оси (т. O) против часовой стрелки.

Изобразим на рисунке векторы линейной скорости $\vec{V}$, тангенциального $\vec{a}_\tau$, нормального $\vec{a}_n$ и полного ускорений $\vec{a}$.



Так как угловая скорость с течением времени увеличивается, значит движение ускоренное, и вектор тангенциального ускорения сонаправлен с вектором линейной скорости, $\vec{a}_\tau \perp \vec{a}_n$. Из рисунка видно, что $\text{tg}\alpha = \dfrac{a_n}{a_\tau}$. Из формул связи нормального и тангенциального ускорений с угловой скоростью $a_n = \omega^2 R$ и $a_\tau = \varepsilon R = \dfrac{d\omega}{dt} R$ получим:

$$a_n = (kt)^2 R;\ a_\tau = \frac{d(kt)}{dt} R = kR;\ \text{tg}\,\alpha = \frac{k^2 t^2 R}{kR} = kt^2.$$

Ответ: $\text{tg}\,\alpha = kt^2$.

Пример 2.6. Твердое тело вращается вокруг неподвижной оси по закону: $\varphi = 6t - 2t^3$. Найти: 1) средние значения угловой скорости и углового ускорения за промежуток времени от $t = 0$ с до остановки; 2) угловое ускорение в момент остановки [6].

Дано:	*Решение.*
$\varphi = At - Bt^3$	По условию задачи тело через некоторый
$A = 6$ рад/с	промежуток времени останавливается, а так как
$B = 2$ рад/с^3	закон изменения $\varphi = f(t)$ задан, то можем найти
$\text{tg}\,\alpha = f(t) = ?$	закон изменения угловой скорости $\omega = f(t)$.

Учтем, что в момент остановки $\omega = 0$, найдем время движения до остановки. Зная определения $<\omega>$, $<\varepsilon>$, $\Delta\varphi$, Δt, ω, ответим на вопросы задачи.

По определению $\omega = \frac{d\varphi}{dt} = A - 3Bt^2$. Тогда $0 = A - 3Bt^2$, откуда $t_{\text{ост}} = \sqrt{\frac{A}{3B}}$ – время в момент остановки тела.

По определению $\langle\omega\rangle = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \frac{\varphi(t)-\varphi(0)}{(t-0)} = \frac{\varphi(t_{\text{ост}})}{t_{\text{ост}}}$, но $\varphi(t) = At - Bt^3$. Подставив $t_{\text{ост}} = \frac{A}{3B}$, получим $\langle\omega\rangle = \frac{2A}{3} = 4$ рад/с^2.

По определению $\langle\varepsilon\rangle = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{\omega(t)-\omega(0)}{(t)} = -3Bt$. Модуль среднего углового ускорения равен $3Bt$. Подставив $t_{\text{ост}}$, получим $\langle\varepsilon\rangle = \sqrt{3AB} =$ $= 6$ рад/с^2.

По определению $\varepsilon = \frac{d^2\varphi}{dt^2} = -6Bt$, тогда модуль ε в момент остановки $|\varepsilon| = 6Bt_{\text{ост}} = 12$ рад/с^2.

Задачи для аудиторной и домашней работы

Задача 2.1. Точка движется по окружности радиусом R согласно закону: $S = C$, где C – положительная константа. Как меняется с течением времени угол между скоростью и ускорением точки?

Задача 2.2. Частица брошена в точке O под углом α к горизонту с начальной скоростью V_0. Пренебрегая сопротивлением воздуха, найти радиус кривизны траектории в точке O.

Задача 2.3. Точка движется по окружности с ускорением a_τ. Как меняется угол между $\vec{a}$ и $\vec{V}$ с течением времени?

Задача 2.4. Материальная точка начинает двигаться по окружности радиусом $R = 0{,}10$ м с постоянным касательным ускорением $a_\tau = 0{,}4$ см/с^2. Через какой промежуток времени вектор ускорения $\vec{a}$ образует с вектором скорости $\vec{V}$ угол, равный $\alpha = 60°$ и $80°$? Какой путь за это время проходит точка?

Задача 2.5. Точка движется по окружности радиусом 10 см с постоянным тангенциальным ускорением a_τ. Найти нормальное ускорение a_n точки через $t = 20$ с после начала движения, если известно, что к концу пятого оборота после начала движения линейная скорость точки $V = 10$ см/с [9].

Задача 2.6. Точка движется по окружности радиусом 30 см с постоянным угловым ускорением. Найти тангенциальное ускорение a_τ точки, если известно, что за время $t = 4$ с она совершила три оборота и в конце третьего оборота ее нормальное ускорение $a_n = 2{,}7$ м/с [12]?

Задача 2.7. Зависимость пройденного телом пути по окружности радиусом 3 м задается уравнениями: 1) $S = At^2 + Bt$, 2) $S = Bt^2 + At$, где $A = 0{,}4$ м/с, $B = 0{,}1$ м/с^2. Определить для момента времени $t = 1$ с после начала движения: а) нормальное ускорение; б) тангенциальное ускорение; в) полное ускорение [10].

Задача 2.8. Колесо вращается вокруг неподвижной оси так, что угол его поворота зависит от времени как $\varphi = \beta t^2$, где $\beta = 0{,}20$ рад/с^2. Найти полное ускорение a точки A на ободе колеса в момент $t = 2{,}5$ с, если скорость точки A в этот момент $V = 0{,}65$ м/с [6].

Задача 2.9. Твердое тело начинает вращаться вокруг неподвижной оси с угловым ускорением $\varepsilon = At$, где $A = 2{,}0$ рад/с^3. Через сколько времени после начала вращения вектор полного ускорения произвольной точки тела будет составлять угол 60° с ее вектором линейной скорости [6]?

Задача 2.10. Колесо радиусом $R = 0{,}1$ м равномерно катится без скольжения по горизонтальной плоскости со скоростью $V_0 = 2$ м/с. Найти величину и направление векторов скорости V и ускорения a для двух точек обода колеса, расположенных в данный момент времени на противоположных концах горизонтального диаметра колеса.

Задача 2.11. Колесо радиуса $R = 10$ см катится без скольжения по горизонтальной плоскости так, что его центр движется с постоянным ускорением $a_0 = 2{,}5$ см/с^2. Найти величину скорости V и ускорения а верхней точки колеса через $t = 2$ с после начала движения.

Задача 2.12. Колесо радиуса $R = 0{,}1$ м равномерно катится без скольжения по горизонтальной плоскости со скоростью 2 м/с. Определить ускорение a верхней точки колеса и радиус кривизны траектории этой точки.

Задача 2.13. Точка движется по окружности радиусом 20 см с постоянным тангенциальным ускорением 5 см/с^2. Через какое время после начала движения нормальное ускорение будет равно тангенциальному [9]?

Задача 2.14. Диск вращается с угловым ускорением $\varepsilon = -2$ рад/с^2. Сколько оборотов сделает диск при изменении частоты вращения от $n_1 = 240$ мин$^{-1}$ до $n_2 = 90$ мин$^{-1}$? В течение какого времени это произойдет [8]?

Задача 2.15. Велосипедное колесо вращается с частотой $n = 5$ с$^{-1}$. Под действием сил трения оно остановилось через интервал времени $\Delta t = 1$ мин. Определить угловое ускорение ε и число оборотов N, которое колесо сделало за это время [8].

Задача 2.16. Якорь электродвигателя, имеющий частоту вращения $n = 50$ с$^{-1}$ после выключения тока, сделав $N = 628$ оборотов, остановился. Определить модуль углового ускорения якоря [10].

Задача 2.17. Колесо автомашины вращается равноускоренно. Сделав $N = 50$ полных оборотов, оно изменило частоту вращения с $n_1 = 4$ с$^{-1}$ до $n_2 = 6$ с$^{-1}$. Определить угловое ускорение колеса.

Задача 2.18. Тело вращается по закону: $\omega = 2 + 0{,}5t$ (рад). Найти полное число оборотов, совершаемых телом за 20 с после начала вращения.

Задача 2.19. Твердое тело вращается вокруг неподвижной оси по закону: $\varphi = at - bt^3$, где $a = 6{,}0$ рад/с, $b = 2{,}0$ рад/с^3. Найти: 1) средние значения угловой скорости и углового ускорения за промежуток времени от $t = 0$ до остановки; 2) угловое ускорение в момент остановки тела [6].

Задача 2.20. Найти радиус вращающегося колеса, если известно, что линейная скорость V_1 точки, лежащей на ободе, в 2,5 раза больше линейной скорости V_2 точки, лежащей на 5 см ближе к оси колеса [9].

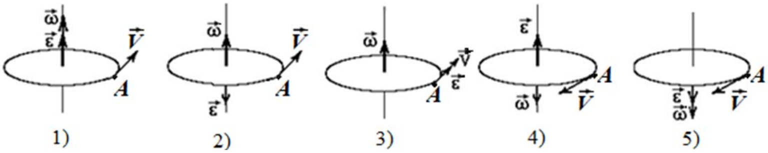
Задача 2.21. Точка движется по окружности радиусом $R = 4$ м. Закон ее движения выражается уравнением $S = A + Bt^2$, где $A = 8$ м, $B = 2$ м/с^2. Определить момент времени t, когда нормальное ускорение a_n точки равно 9 м/с^2. Найти скорость V, тангенциальное a_τ и полное a ускорения точки в тот же момент времени t [8].

Задача 2.22. Определить величины угловой и линейной скоростей точки поверхности Земли, обусловленные ее вращением вокруг оси на широте 45°.

Самостоятельная аудиторная работа

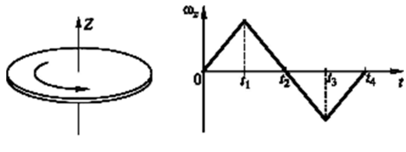
Вариант 2.1

1. Кинематическое уравнение движения материальной точки имеет вид: $\varphi = 2t^3 + 4t^2$ (рад). Определить мгновенную и угловую скорости для момента времени $t = 2$ с.
2. Выбрать рисунок, указывающий верное направление векторов линейной скорости $\vec{V}$, угловой скорости $\vec{\omega}$ и углового ускорения $\vec{\varepsilon}$ материальной точки A при равноускоренном ее вращении по окружности против часовой стрелки.



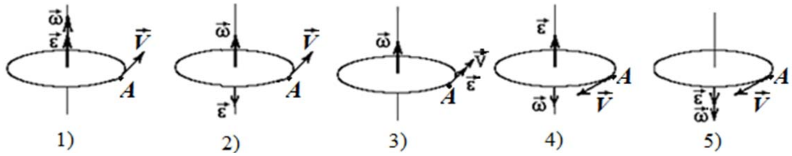
Вариант 2.2

1. Колесо радиусом $R = 0{,}1$ м вращается так, что его угловая скорость изменяется по закону: $\omega = 5t^4 + 4t$. Определите модуль нормальной составляющей ускорения точки, расположенной на ободе колеса, в момент времени $t = 1$ с.
2. Диск вращается вокруг своей оси, изменяя проекцию угловой скорости $\omega_z(t)$, как показано на рисунке. Указать интервалы времени, для которых вектор угловой скорости $\vec{\omega}$ и вектор углового ускорения $\vec{\varepsilon}$ направлены в одну сторону.



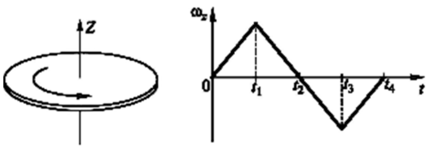
Вариант 2.3

1. Колесо радиусом $R = 0{,}1$ м вращается так, что его угловая скорость задана уравнением: $\omega = 5t^4 + 4t$. Определить модуль тангенциальной составляющей ускорения точки, расположенной на ободе колеса, в момент времени $t = 1$ с.
2. Выбрать рисунок, указывающий верное направление векторов линейной скорости $\vec{V}$, угловой скорости $\vec{\omega}$ и углового ускорения $\vec{\varepsilon}$ материальной точки A при равнозамедленном ее вращении по окружности против часовой стрелки.



Вариант 2.4

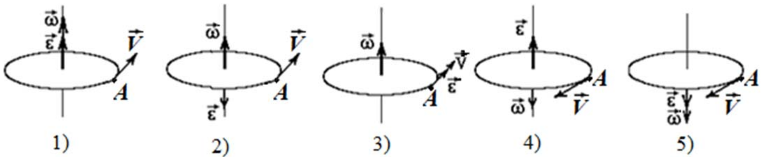
1. Колесо вращается вокруг неподвижной оси так, что угол его поворота меняется с течением времени по закону: $\varphi = bt^2$, где $b = 0{,}20$ рад/с^2. Найти полное ускорение точки, лежащей на ободе колеса, в момент времени $t = 2{,}5$ с, если ее линейная скорость в этот момент времени $V = 0{,}65$ м/с [6].



2. Диск вращается вокруг своей оси, изменяя проекцию угловой скорости $\omega_z(t)$, как показано на рисунке. Указать интервалы времени, для которых вектор угловой скорости $\vec{\omega}$ и вектор углового ускорения $\vec{\varepsilon}$ направлены в противоположные стороны.

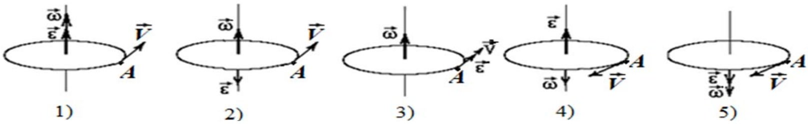
Вариант 2.5

1. Точка движется по окружности радиусом 20 см с постоянным тангенциальным ускорением 5 см/с^2. Через сколько времени после начала движения нормальное ускорение точки будет равно тангенциальному [9]?
2. Выбрать рисунок, указывающий верное направление векторов линейной скорости $\vec{V}$, угловой скорости $\vec{\omega}$ и углового ускорения $\vec{\varepsilon}$ материальной точки A при равноускоренном ее вращении по окружности по часовой стрелке.



Вариант 2.6

1. Сколько оборотов сделали колеса автомобиля после начала торможения до полной остановки, если в момент начала торможения автомобиль имел скорость 60 км/ч и остановился через 3 с после начала торможения? Диаметр колес $D = 0{,}7$ м. Чему равно среднее угловое ускорение колес при торможении?
2. Выбрать рисунок, указывающий верное направление векторов линейной скорости $\vec{V}$, угловой скорости $\vec{\omega}$ и углового ускорения $\vec{\varepsilon}$ материальной точки A при равнозамедленном ее вращении по окружности по часовой стрелке.



Практическое занятие 3
ДИНАМИКА ПОСТУПАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ

Учебные вопросы

1. Основная задача динамики. Понятие массы, силы, импульса.
2. Законы Ньютона, их использование при решении задач.
3. Силы, рассматриваемые в механике, их природа, законы, по которым они определяются.
4. Сложение сил. Результирующая сила.

Основные формулы и законы

№	Название	Формула	Единица измерения	Направление вектора
1	Импульс тела	$\vec{p} = m\vec{V}$	кг · м/с	$\vec{p} \uparrow\uparrow \vec{V}$
2	Импульс силы	$\vec{F} \cdot dt$	Н · с	
3	Первый закон Ньютона	Если $\sum \vec{F}_i = 0$, то $\vec{V}$ = const – тело движется равномерно и прямолинейно		
4	Второй закон Ньютона или основное уравнение динамики поступательного движения	$\vec{F} = m\vec{a}$ или $\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$		
5	Третий закон Ньютона	$\vec{F}_1 = -\vec{F}_2$, $F_1 = F_2$		
6	Сила гравитационного взаимодействия	$F = G\frac{m_1 m_2}{r^2}$		
7	Гравитационная постоянная	$G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$	м^3/(кг · с^2)	
8	Сила тяжести	$\vec{F}_{тяж} = m\vec{g}$		
9	Ускорение свободного падения вблизи поверхности Земли	$g = G\frac{M_з}{R^2}$; $g = 9{,}81$	м/с^2	

№	Название	Формула	Единица измерения	Направление вектора
10	Ускорение свободного падения на некоторой высоте от поверхности Земли	$g = G\dfrac{M_з}{(R+h)^2}$	м/с^2	
11	Сила упругости (k – коэффициент упругости, в случае пружины – жесткость, x – смещение от положения равновесия)	$F = -kx$	Н	
12	Сила трения скольжения (μ – коэффициент трения, N – сила нормального давления)	$F_{тр} = \mu N$	Н	
13	Сила сопротивления (k – коэффициент сопротивления, $\vec{V}$ – скорость тела)	$\vec{F}_{сопр} = -k\vec{V}$	Н	
14	Вес тела	$\vec{P} = -\vec{N}$, $P = N$	Н	
15	Вес тела, движущегося вместе с опорой	$\vec{P} = m(\vec{g} - \vec{a})$	Н	

Методические указания

Основной задачей динамики является определение механического состояния системы в заданный момент времени, если известны силы, действующие на систему, и начальные условия (положение и скорости материальных точек системы (тела) в начальный момент времени). Основное уравнение динамики поступательного движения (второй закон Ньютона) позволяет определить ускорение тела как функцию времени.

При использовании законов Ньютона особое внимание надо уделять анализу сил, действующих на рассматриваемое тело. При решении таких задач рисунок, как правило, определяет успех или неудачу решения, поэтому его выполнение обязательно. На рисунке расставляются все силы, действующие на тело или тела системы, с учетом их величины и направления. Третий закон Ньютона помогает правильно выполнить эту операцию. Если тело является материальной точкой, то все действующие силы приложены к этой точке. Если тело не является материальной точкой (например, брусок на наклонной плоскости), но по условию задачи известно, что тело совершает поступательное движение, то все действующие силы можно считать приложенными к центру масс тела. Отметим, что рисунок позволяет резко сократить словесное описание решения задачи.

Существуют определенные правила использования второго закона Ньютона при решении задач. Эти правила позволяют избежать многих ошибок и гарантировать успех при решении стандартных задач.

Сформулируем эти правила:

1. Сделать рисунок и расставить на нем все силы.
2. Записать второй закон Ньютона для рассматриваемого тела в векторной форме.
3. Выбрать координатные оси (при плоском движении оси x, y), на которые спроецировать векторное уравнение, получить систему скалярных уравнений.
4. Дополнить полученную систему уравнениями, вытекающими из условий задачи (например, кинематическими) и решить полученную систему уравнений.

Законы Ньютона справедливы только для инерциальных систем отсчета. Почти во всех рассматриваемых задачах систему отсчета, связанную с Землей, можно считать инерциальной, пренебрегая ее ускорением относительно системы неподвижных звезд.

При решении задачи в неинерциальной системе отсчета (иногда это бывает очень удобно делать) необходимо учитывать силы инерции $\vec{F}_{\text{ин}} = -m\vec{a}$, где $\vec{a}$ – ускорение неинерциальной системы отсчета.

При решении задачи на систему тел, связанных между собой, второй закон Ньютона целесообразно применять к каждому телу в отдельности, учитывая связь между координатными и кинематическими параметрами этих сил.

Примеры решения задач

Пример 3.1. На тело массой m = 2 кг, находящееся в начале координат и имеющее начальную скорость $\vec{V}_0 = 5\vec{i}$, действует сила $\vec{F} = 2\vec{i} + 4\vec{j}$. Определить ускорение, скорость и координаты тела через время t = 2 с движения из начального положения.

Дано: m = 2 кг $\vec{V}_0 = 5\vec{i}$ $\vec{F} = 2\vec{i} + 4\vec{j}$ t = 2 с	*Решение.* Поскольку начальная скорость $\vec{V}_0$ и сила $\vec{F}$, действующая на тело, лежат в плоскости (x, y), движение тела будет плоским, положение тела будет определяться двумя координатами – x и y.
a – ? V – ? x – ? y – ?	Ускорение тела: $\vec{a} = \dfrac{\vec{F}}{m} = \dfrac{2\vec{i} + 4\vec{j}}{2} = \vec{i} + 2\vec{j}$.

Проекции ускорения на координатные оси:

$$a_x = 1 \text{ м/с}^2,\ a_y = 2 \text{ м/с}^2.$$

Модуль ускорения:

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5} \text{ м/с}^2.$$

Движение тела равноускоренное $\vec{a} = \text{const}$.

Определим скорость тела как функцию времени:

$$\vec{V} = \vec{V}_0 + \int_0^t \vec{a} \cdot dt = 5\vec{i} + \int_0^t (\vec{i} + 2\vec{j})dt = 5\vec{i} + t\vec{i} + 2t\vec{j}.$$

В момент времени t = 2 с: $\vec{V} = 5\vec{i} + 2\vec{i} + 2 \cdot 2\vec{j} = 7\vec{i} + 4\vec{j}$.

Модуль скорости: $|\vec{V}| = \sqrt{V_x^2 + V_y^2} = \sqrt{7^2 + 4^2} = \sqrt{49 + 16} = \sqrt{65}$ м/с.

Определим вектор перемещения тела как функцию времени:

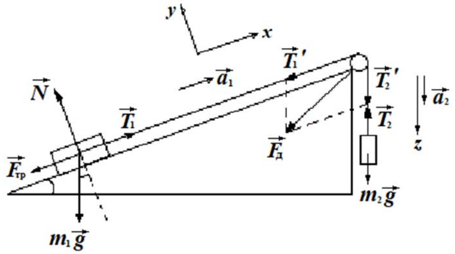
$$\vec{r} = \int_0^t \vec{V}dt = \int_0^t (5\vec{i} + t\vec{i} + 2t\vec{j})dt = 5t\vec{i} + \frac{t^2}{2}\vec{i} + t^2\vec{j}.$$

В момент времени t = 2 с: $\vec{r} = 10\vec{i} + 2\vec{i} + 4\vec{j} = 12\vec{i} + 4\vec{j}$ (м).

Координаты тела: $x = r_x$ = 12 м, $y = r_y$ = 4 м.

Ответ: $a = \sqrt{5}$ м/с²; $V = \sqrt{65}$ м/с; x = 12 м; y = 4 м.

Пример 3.2. На наклонной плоскости находится груз массой m_1 = 1 кг, связанный нерастяжимой, невесомой нитью, перекинутой через невесомый блок, с другим грузом массой m_2 = 2 кг. Первый груз скользит вверх по наклонной плоскости. Коэффициент трения μ = 0,2, угол наклона плоскости к горизонту α = 30°. Определить ускорение системы грузов, силу натяжения нити и силу давления на ось блока со стороны нити.

Дано:	*Решение.*
$m_1 = 1$ кг $m_2 = 2$ кг $\mu = 0{,}2$ $\alpha = 30°$	
a – ? T – ? $F_Д$ – ?	

Сделаем рисунок и обозначим на нем силы, действующие на грузы. На первый груз действует сила тяжести $m\vec{g}$, сила реакции опоры $\vec{N}$, сила натяжения нити $\vec{T}_1$ и сила трения $\vec{F}_{тр}$, направленная в сторону, противоположную скорости груза. На второй груз действует сила тяжести $m_2\vec{g}$ и сила натяжения нити $\vec{T}_2$.

Запишем уравнение второго закона Ньютона для первого и второго груза в векторной форме:

$$\begin{cases} m_1\vec{g} + \vec{N} + \vec{F}_{Тр} + \vec{T}_1 = m_1\vec{a}_1 \\ m_2\vec{g} + \vec{T}_2 = m_2\vec{a}_2 \end{cases}.$$

Спроецируем эти уравнения на выбранные координатные оси x, y, z. Оси x и z совпадают по направлению с ускорениями первого $\vec{a}_1$ и второго $\vec{a}_2$ грузов. Поскольку нить не растяжима, величины этих ускорений одинаковы:

$$|\vec{a}_1| = |\vec{a}_2| = a.$$

По условию задачи блок невесом, поэтому величины сил натяжения нити тоже одинаковы

$$|\vec{T}_1| = |\vec{T}_2| = T\ .$$

С учетом этого получим систему скалярных уравнений:

Оx: $-m_1 g \cdot \sin\alpha - F_{тр} + T = m_1 a$;

Оy: $-m_1 g \cdot \cos\alpha + N = 0$;

Oz: $m_2 g - T = m_2 a$.

Дополнительное уравнение, определяющее связь силы трения и силы реакции опоры

$$F_{тр} = \mu \cdot N.$$

Решая полученную систему уравнений, найдем величины a и T.

$$\begin{cases} -m_1 g\sin\alpha - \mu\cdot mg\cos\alpha + T = m_1 a \\ m_2 g - T = m_2 a \end{cases}.$$

Складываем правые и левые части уравнений

$$-m_1 g\sin\alpha - \mu\cdot mg\cos\alpha + T + m_2 g - T = a(m_1 + m_2).$$

Ускорение грузов:

$$a = \frac{m_2 g - m_1 g\sin\alpha - \mu\cdot m_1 g\cos\alpha}{m_1 + m_2} = g\frac{m_2 - m_1(\sin\alpha + \mu\cdot\cos\alpha)}{m_1 + m_2} = 4{,}3\ \text{м}/\text{с}^2.$$

Сила натяжения нити:

$$T = m_2 g - m_2 a = \frac{m_1 m_2 g(1 + \sin\alpha + \mu\cdot\cos\alpha)}{m_1 + m_2} = 11{,}3\ \text{Н}.$$

Сила давления $\vec{F}_{\text{Д}}$ на ось блока со стороны нити является результирующей двух сил $\vec{T}_1'$ и $\vec{T}_2'$, равных по величине силе T и направленных под углом $\beta = 90° - \alpha = 60°$ друг к другу. Используя правило параллелограмма, построим вектор $\vec{F}_{\text{Д}}$ и найдем величину этой силы:

$$\vec{F}_{\text{Д}} = \vec{T}_1' + \vec{T}_2'.$$

$$F_{\text{Д}} = T_1'\cdot\cos 30° + T_2'\cdot\cos 30° = 2T\cdot\cos 30° = 2T\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}T = 18\ \text{Н}.$$

Ответ: $a = 4{,}3$ м/с^2; $T = 11{,}3$ Н; $F_{\text{Д}} = 18$ Н.

Пример 3.3. Вагон массой $m = 20$ т движется равнозамедленно, имея начальную скорость $V_0 = 54$ км/ч и ускорение $a = -0{,}3$ м/с^2. Какая сила торможения F действует на вагон? Через какое время t вагон остановится? Какое расстояние s вагон пройдет до остановки [9]?

Дано:	*Решение.*
$m = 20$ т	Так как движение вагона равнозамедленное ($a < 0$),
$V_0 = 54$ км/ч	то в момент остановки вагона его скорость станет
$a = -0{,}3$ м/с^2	равной 0, поэтому ускорение вагона $a = \frac{V_0 - V_t}{t} = \frac{V_0}{t}$.
$s - ?$	

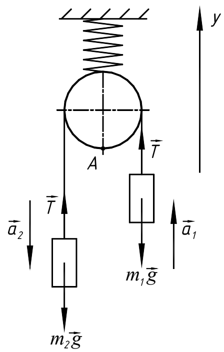
Найдем время движения вагона до остановки: $t = \frac{V_0}{a}$; $t = 50$ с.

Пройденный путь, с учетом того, что движение равнозамедленное, найдем по формуле: $s = V_0 t - \frac{at^2}{2}$; $s = 375$ м.

Ответ: $s = 375$ м.

Пример 3.4. К концам шнура, перекинутого через блок, подвешены грузы m_1 = 100 г и m_2 = 150 г. Найти ускорение грузов, силу натяжения нити T и показание F динамометра, на котором висит блок.

Дано: $m_1 = 100$ г $m_2 = 150$ г $g = 9{,}8$ м/с^2 ——— a – ? T – ? F – ?	*Решение*. Так как масса груза m_2 больше массы груза m_1, значит и ускорение $\vec{a}_2$ будет направлено вертикально вниз, а ускорение $\vec{a}_1$ будет направлено вертикально вверх. По модулю ускорения равны $a_1 = a_2 = a$. Для данной системы грузов составим систему уравнений.



В проекциях на выбранную ось y система уравнений имеет вид:

$$\begin{cases} m_1 a = -m_1 g + T \\ -m_2 a = -m_2 g + T \end{cases}.$$

Выразим ускорение:

$$a = \frac{m_2 - m_1}{m_2 + m_1} g = 2 \text{ м/с}^2.$$

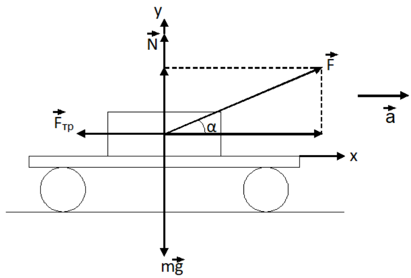
Определим силу натяжения нити:

$$T = \frac{2 m_2 m_1 g}{m_2 + m_1} = 1{,}2 \text{ Н}.$$

Так как силы натяжения нити одинаковы, и они нам известны, то показание динамометра равно $F = 2T \rightarrow F = 2{,}4$ Н.

Ответ: $a = 2$ м/с^2; $T = 1{,}2$ Н; $F = 2{,}4$ Н.

Пример 3.5. На тележке массой m_1 = 20 кг лежит груз массой m_2 = 5 кг. К грузу приложена сила F, сообщающая тележке с грузом ускорение a. Направление силы образует угол 30° с горизонтальным направлением. Каково максимальное значение этой силы, при которой груз не будет скользить по тележке? Коэффициент трения между грузом и тележкой μ = 0,2. Трением между тележкой и дорогой пренебречь. С каким ускорением будет двигаться тележка под действием этой силы?

Дано:	*Решение.*
$m_1 = 20$ кг $m_2 = 5$ кг $\alpha = 30°$ $\mu = 0{,}2$	
F_{max} – ? a – ?	

Уравнения движения в проекции на ось x и y:

$$\begin{cases} -F_{тр} + F\cos\alpha = 0 \\ N - m_2 g + F\sin\alpha = 0 \end{cases}.$$

Сила трения скольжения по определению:

$$F_{тр} = \mu N = \mu\left(m_2 g - F\sin\alpha\right).$$

Подставим в уравнение: $-\mu m_2 g - \mu F\sin\alpha + F\cos\alpha = 0$.

Выразим силу: $F\left(\mu\sin\alpha + \cos\alpha\right) = \mu m_2 g$; отсюда

$$F = \frac{\mu m_2 g}{\mu\sin\alpha + \cos\alpha} = \frac{0{,}2\cdot 5\cdot 9{,}8}{0{,}2\cdot\sin 30° + \cos 30°} = 10\,\text{Н}.$$

Воспользуемся вторым законом Ньютона для тележки, на которой расположен груз: $\left(m_1 + m_2\right)a = F\cos\alpha$.

Отсюда ускорение тележки:

$$a = \frac{\mu m_2 g\cos\alpha}{\left(m_1 + m_2\right)\left(\mu\sin\alpha + \cos\alpha\right)} = 0{,}35\,\text{м/с}^2.$$

Ответ: $F = 10$ Н, $a = 0{,}35$ м/с^2.

Пример 3.6. Невесомый блок укреплен в вершине двух наклонных плоскостей, составляющих с горизонтом углы $\beta = 45°$ и $\alpha = 30°$. Гири 1 и 2 одинаковой массы $m_1 = m_2 = 1$ кг соединены нитью, перекинутой через блок. Найти ускорение $\vec{a}$, с которым движутся гири, и модуль силы натяжения нити $\vec{T}$. Трением гирь о наклонные плоскости, а также трением в блоке пренебречь [9].

Дано:

$m_1 = m_2 = 1$ кг

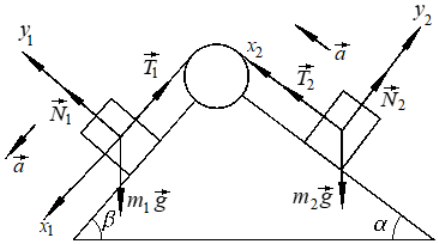
$\alpha = 30°$

$\beta = 45°$

T – ?

a – ?

Решение.



Изобразим все силы, действующие на тела 1 и 2. Запишем второй закон Ньютона сначала в векторной форме для каждого из тел, а затем в проекциях на координаты оси, получим систему двух уравнений с двумя неизвестными $\vec{a}$ и $\vec{T}$.

По условию задачи блок невесом, следовательно, $T_1 = T_2 = T$ (блок служит лишь для изменения направления движения нити). А нить нерастяжима, следовательно, $a_1 = a_2 = a$.

Тогда второй закон Ньютона для каждой из гирь, записанный в векторной форме, имеет вид

$$\begin{cases} m_1\vec{a} = m_1\vec{g} + \vec{N}_1 + \vec{T} \\ m_2\vec{a} = m_2\vec{g} + \vec{N}_2 + \vec{T} \end{cases}.$$

Будем считать, что гиря массой m_1 опускается по наклонной плоскости, а гиря массой m_2 – поднимается. Координатные оси x_1 и x_2 направим параллельно наклонным плоскостям в направлении движения гирь 1 и 2, а оси y_1 и y_2 – перпендикулярно осям x_1 и x_2. Тогда в проекциях на соответствующие координатные оси получим систему уравнений:

Ox_1: $m_1 a = m_1 g \sin\beta - T$;

Ox_2: $m_2 a = T - m_2 g \sin\alpha$.

Решив ее, получим формулы для расчета ускорения, с которым движутся гири, и модуль силы натяжения нити:

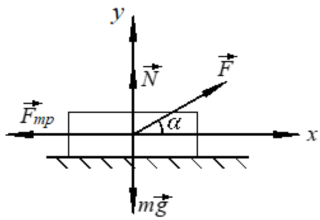
$$a = \frac{m_1 g(\sin\beta - \sin\alpha)}{m_1 - m_2} = \frac{g(\sin\beta - \sin\alpha)}{2},$$

$$T = \frac{mg(\sin\beta + \sin\alpha)}{2}.$$

Расчет дает значения: $a = 1{,}02$ м/с^2; $T = 5{,}9$ *Н*.

Ответ: $a = 1{,}02$ м/с^2; $T = 5{,}9$ Н.

Пример 3.7. Тело массой 4 кг движется по горизонтальной плоскости под действием силы 30 Н, направленный под углом 30° к горизонту. Коэффициент трения тела о плоскость 0,01. Найти ускорение тела.

Дано:	*Решение.*
$m = 4$ кг $F = 30$ Н $\alpha = 30°$ $\mu = 0{,}01$	
a – ?	

Изобразим силы, действующие на тело: силу реакции опоры $\vec{N}$, силу тяги $\vec{F}$, силу трения $\vec{F}_{тр}$, силу тяжести $m\vec{g}$. Запишем второй закон Ньютона в векторной форме, а затем в проекциях на вертикальную и горизонтальную координатные оси. Получим систему двух уравнений с двумя неизвестными: $\vec{a}$ и $\vec{N}$. Решив систему относительно $\vec{a}$, ответим на вопрос задачи.

Уравнение динамики (второй закон Ньютона) данного тела:

$$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{F}_{тр} + \vec{N} + \vec{F}.$$

Ось x направим горизонтально в сторону движения тела, а ось y – вертикально вверх. Запишем это уравнение в проекциях на оси x и y.

$$\begin{cases} ma = F\cos\alpha - F_{тр} \\ 0 = F\sin\alpha + N - mg \end{cases}$$

Выразим силу реакции опоры: $N = mg - F\sin\alpha$.

По определению сила трения скольжения:

$$F_{тр} = \mu N = \mu(mg - F\sin\alpha).$$

Тогда $ma = F\cos\alpha - \mu(mg - F\sin\alpha)$.

Выразим из этого уравнения ускорение:

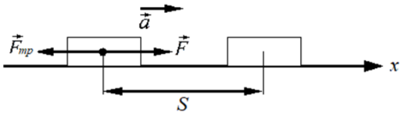
$$a = \frac{(F\cos\alpha - \mu mg + \mu F\sin\alpha)}{m} = \frac{F(\cos\alpha + \mu\sin\alpha) - \mu mg}{m}.$$

Проверка размерности: $[a]$ = Н/кг = (кг · м/с^2)/кг = м/с^2.

Числовой расчет: $a = \dfrac{30\cdot(0{,}867 + 0{,}01\cdot 0{,}5) - 0{,}01\cdot 4\cdot 9{,}81}{4} = 6{,}5$ м/с^2.

Ответ: $a = 6{,}5$ м/с^2.

Пример 3.8. Какую силу F надо приложить к вагону, стоящему на рельсах, чтобы вагон стал двигаться равноускоренно и за время t = 30 с прошел путь s = 11 м? Масса вагона m = 16 тонн. Во время движения на вагон действует сила трения $F_{тр}$, равная 0,05 действующей на него силы тяжести mg.

Дано:	*Решение.*
$t = 30$ с $s = 11$ м $m = 16 \cdot 10^3$ кг $F_{тр} = 0{,}05mg$	
F – ?	

По второму закону Ньютона в проекции на ось x: $F - F_{тр} = ma$, откуда

$$F = ma + F_{тр}.$$

Поскольку движение равноускоренное и $V_0 = 0$, то путь $S = \frac{at^2}{2}$, откуда ускорение $a = \frac{2S}{t^2}$. По условию $F_{тр} = 0{,}05mg$, тогда

$$F = m \cdot \frac{2S}{t^2} + 0{,}05mg.$$

Подставив числовые данные, получим F = 8,2 кН.

Ответ: F = 8,2 кН.

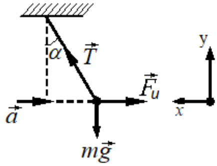
Пример 3.9. Тело массой m = 0,5 кг движется так, что зависимость пройденного телом пути s от времени t дается уравнением $s = A \sin \omega t$, где A = 5 см и $\omega = \pi$ рад/с. Найти силу F, действующую на тело через время $t = (^1/_6)$ с после начала движения.

Дано:	*Решение.* По второму закону Ньютона $F = ma$,
$m = 0{,}5$ кг $s = A \sin \omega t$ $A = 5$ см $\omega = \pi$ рад/с $t = (^1/_6)$ с	где $a = \frac{d^2 s}{dt^2}$. Первая производная $\frac{ds}{dt} = A\omega \cos \omega t$, вторая производная $\frac{d^2 s}{dt^2} = -A\omega^2 \sin \omega t = a$. Отсюда $F = -mA\omega^2 \sin \omega t$. Сделаем числовой расчет и получим F = –0,125 Н.
F – ?	

Ответ: F = –0,125 Н.

Пример 3.10. Шар на нити подвешен к потолку трамвайного вагона. Вагон тормозится, и его скорость за время $t = 3$ с равномерно уменьшается от $V_1 = 18$ км/ч до $V_2 = 6$ км/ч. На какой угол отклонится при этом нить с шаром [9]?

Дано:	*Решение.*
$t = 3$ с $V_1 = 18$ км/ч $V_2 = 6$ км/ч	
α – ?	



Рассмотрим положение шара относительно системы отсчета, связанной с потолком вагона. Поскольку вагон движется с ускорением, то система является неинерциальной.

Уравнение движения в векторной форме: $\vec{T} + m\vec{g} + \vec{F}_и = 0$, где $F_и = -ma$. Запишем это уравнение в проекциях на оси x и y:

$$T\sin\alpha = ma,$$

$$T\cos\alpha - mg = 0.$$

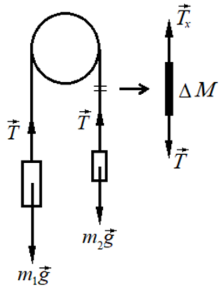
Разделим верхнее уравнение на нижнее и получим $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{a}{g}$, откуда $\alpha = \operatorname{arctg}\dfrac{a}{g}$ или, учитывая, что $a = \dfrac{\Delta V}{t}$, $\alpha = \operatorname{arctg}\dfrac{\Delta v}{gt}$.

Подставляя числовые данные, получим $\alpha = 6°30'$.

Ответ: $\alpha = 6°30'$.

Пример 3.11. Две гири с массами $m_1 = 2$ кг и $m_2 = 1$ кг соединены нитью и перекинуты через невесомый блок. Найти ускорение a, с которым движутся гири, и силу натяжения нити T. Трением в блоке пренебречь [9].

Дано:	*Решение.* Предположим, что нить невесома и нерастяжима. Выберем элемент нити Δm и запишем уравнение движения в проекции на ось y: $\Delta m \cdot a = T - T_x$.
$m_1 = 2$ кг $m_2 = 1$ кг	
a – ? T – ?	



Поскольку $\Delta m = 0$, то $T = T_x$, т. е. сила натяжения нити во всех точках ее одинакова. Ускорения движения грузов тоже одинаковы, так как из-за нерастяжимости нити за одно и то же время грузы проходят один путь, т. е. $S_1 = \frac{a_1 t^2}{2}$, $S_2 = \frac{a_2 t^2}{2}$; $S_1 = S_2$, следовательно, $a_1 = a_2$. Но направления векторов $\vec{a}_1$ и $\vec{a}_2$ противоположны.

Запишем второй закон Ньютона для первой и второй гири в проекциях на ось y:

$$\begin{cases} m_1 g - T = m_1 a \\ m_2 g - T = -m_2 a \end{cases}.$$

Вычтем из верхнего уравнения нижнее: $a(m_1 + m_2) = g(m_1 - m_2)$, отсюда ускорение $a = \frac{g(m_1 - m_2)}{m_1 + m_2}$.

Подставим ускорение в верхнее уравнение:

$$\frac{m_1 g (m_1 - m_2)}{(m_1 + m_2)} = m_1 g - T$$

и выразим силу натяжения нити

$$T = m_1 g \left(1 - \frac{(m_1 - m_2)}{(m_1 + m_2)} \right) = m_1 g \left(\frac{m_1 + m_2 - m_1 + m_2}{m_1 + m_2} \right) =$$

$$= m_1 g \left(\frac{2 m_2}{m_1 + m_2} \right) = \frac{2 g m_1 m_2}{m_1 + m_2}.$$

Подставляя числовые данные, получим: $T = 13$ Н, $a = 3{,}27$ м/с^2.

Ответ: $T = 13$ Н, $a = 3{,}27$ м/с^2.

Пример 3.12. Канат лежит на столе так, что часть его свешивается со стола и начинает скользить тогда, когда длина свешивающийся части составляет 1/4 его длины. Найти коэффициент трения k каната о стол [9].

Дано:	*Решение.* Обозначим силу тяжести, действующую на единицу длины каната, через $m_1 g$.
$l_1 = \frac{l}{4}$	Тогда сила тяжести свешивающейся части каната
$k - ?$	равна $\frac{m_1 g l}{4}$.

Эта сила тяжести уравновешивается силой трения $F_{тр}$, действующей на ту часть каната, которая лежит на столе: $F_{тр} = \frac{3 k m_1 g l}{4}$.

Таким образом, $\frac{m_1 gl}{4} = \frac{3km_1 gl}{4}$, откуда $k = 0{,}33$.

Ответ: $k = 0{,}33$.

Задачи для аудиторной и домашней работы

Задача 3.1. В установке известны: угол наклона плоскости с горизонтом α и коэффициент трения μ между телом m_1 и наклонной плоскостью. Блок и нить невесомы, нить нерастяжима, трения в блоке нет. Считая, что в начальный момент времени оба тела неподвижны, найти отношение масс m_2 / m_1, при котором тело m_2: а) начнет опускаться; б) начнет подниматься; в) будет оставаться в покое [6].

Задача 3.2. Канат лежит на столе так, что часть его свешивается со стола. Канат начинает скользить тогда, когда длина его свешивающейся части составляет 1/3 его длины. Найти коэффициент трения каната о стол.

Задача 3.3. Простейшая машина Атвуда, применяемая для изучения законов равноускоренного движения, представляет собой два груза с неравными массами m_1 и m_2 ($m_1 > m_2$), которые подвешены на легкой, нерастяжимой нити, перекинутой через невесомый блок. Пренебрегая трением в оси блока, найти: а) ускорение грузов; б) силу натяжения нити.

Задача 3.4. Частица массой m движется прямолинейно с ускорением $a = 6t$ м/с^2. Определить зависимость силы, действующей на частицу, от пройденного пути $F = F(S)$, если $V(0) = 0$, $x(0) = 0$.

Задача 3.5. Тело массой $m = 2$ кг движется прямолинейно по закону: $S = A - Bt + Ct^2 - Dt^3$, где $C = 2$ м/с^2; $D = 0{,}4$ м/с^3. Найти силу, действующую на тело, в конце первой секунды движения.

Задача 3.6. С вершины клина, длина которого $l = 2$ м и высота $h = 1$ м, начинает скользить небольшое тело. Коэффициент трения между телом и клином $\mu = 0{,}15$. Определите ускорение тела, время спуска и скорость тела у основания клина [10].

Задача 3.7. Невесомый блок укреплен в общей вершине двух наклонных плоскостей, составляющих с горизонтом угол $\alpha = 30°$ и $\beta = 45°$. Гири одинаковой массы $m_1 = m_2 = 1$ кг соединены нитью, перекинутой через блок. Найти ускорение a, с которым движутся гири, и силу натяжения нити T. Трением гирь о наклонные плоскости и трением в блоке пренебречь [9].

Задача 3.8. На шкив ротора электродвигателя намотан невесомый шнур. К концам шнура привязали груз массой 1 кг и предоставили ему возможность опускаться. Двигаясь равноускоренно, он за 5 с опустился на 2,5 м. Найти модуль силы натяжения шнура.

Задача 3.9. На концах нити, перекинутой через неподвижный блок, подвешены тела, каждое из которых имеет массу $m = 240$ г. Какую массу m_1 должен иметь добавочный груз, положенный на одно из тел, чтобы каждое из них прошло за время $t = 4$ с путь $S = 160$ см?

Задача 3.10. С вершины наклонной плоскости, длина которой $l = 10$ м и высота $h = 5$ м, начинает двигаться без начальной скорости тело. Какое время t будет продолжаться движение тела до основания наклонной плоскости, если коэффициент трения между телом и наклонной плоскостью $\mu = 0{,}2$? Какую скорость будет иметь тело у основания наклонной плоскости [11]?

Задача 3.11. На небольшое тело массы m, лежащее на гладкой горизонтальной плоскости в момент $t = 0$, начала действовать сила, зависящая от времени по закону: $F = bt$, где b – положительная константа. Направление этой силы все время составляет угол α с горизонтом. Найти: а) скорость тела в момент отрыва от плоскости; б) путь, пройденный телом к этому моменту [6].

Задача 3.12. Тело скользит по наклонной плоскости, составляющей с горизонтом угол 45°. Пройдя расстояние 36,4 см, тело приобретает скорость 2 м/с. Чему равен коэффициент трения тела о плоскость [9]?

Задача 3.13. Ящик массой 60 кг тянут равномерно по полу с помощью веревки, прикрепленной к ящику. Веревка образует угол 30° с полом. Коэффициент трения между ящиком и полом равен 0,4. Определить силу, под действием которой движется ящик.

Задача 3.14. Период обращения искусственного спутника вокруг Земли равен 2 часам. Считая орбиту спутника круговой, найти, на какой высоте над поверхностью Земли двигается спутник.

Задача 3.15. Радиус малой планеты 250 км, средняя плотность 3 г/см^3. Определить ускорение свободного падения на поверхности планеты.

Задача 3.16. Диск радиусом 40 см вращается вокруг вертикальной оси. На краю диска стоит кубок. Принимая коэффициент трения равным 0,4, найти, при каком числе оборотов в минуту кубок соскользнет с диска.

Задача 3.17. Акробат на мотоцикле описывает «мертвую петлю» радиусом 4 м. С какой наименьшей скоростью должен проезжать акробат верхнюю точку петли, чтобы не сорваться [8]?

Задача 3.18. Невесомый блок укреплен на вершине наклонной плоскости, составляющей с горизонтом угол 30°. Гири одинаковой массы 1 кг соединены нитью, перекинутой через блок. Первая гиря висит на нити, вторая находится на плоскости. Коэффициент трения гири о плоскости равен 0,1. Найти ускорение, с которым движутся гири, и силу натяжения нити.

Задача 3.19. Три грузика массой 0,02 кг каждый связаны двумя нитями и подвешены с помощью третьей нити к потолку лифта. Лифт поднимается вверх с ускорением 0,5 м/с^2. Найти силу натяжения каждой нити.

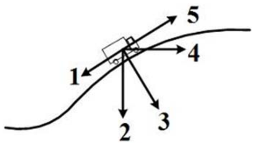
Задача 3.20. Материальная точка массой 1 кг, двигаясь равномерно, описывает четверть окружности радиуса 1,2 м в течение 2 с. Найти изменение импульса точки.

Задача 3.21. Невесомый блок укреплен на вершине наклонной плоскости, составляющей с горизонтом угол 30°. Грузы массой $m_1 = m_2 = 1$ кг соединены невесомой нерастяжимой нитью, перекинутой через блок. Найти ускорение, с которым движутся грузы, и силу натяжения нити. Трением в блоке и трением о наклонную плоскость пренебречь.

Самостоятельная аудиторная работа

Вариант 3.1

1. Под действием постоянной силы $F = 1$ Н тело движется прямолинейно так, что зависимость пройденного телом расстояния S от времени t дается уравнением: $S = A - Bt + Ct^2$. Найти массу тела, если постоянная $C = 1$ м/с^2 [9].
2. Указать, в каком направлении ориентирована равнодействующая всех сил, действующих на автомобиль, который спускается с горы по участку дуги с постоянной по величине скоростью.



Вариант 3.2

1. Частица массой m двигалась со скоростью $\vec{V}_1$. Затем в течение интервала времени τ на нее действовала постоянная сила, в результате чего частица стала двигаться со скоростью $\vec{V}_2$. Чему равна сила, действующая на частицу?
2. Тело равномерно скользит по наклонной плоскости с углом наклона α. Показать все силы, действующие на тело.

Вариант 3.3

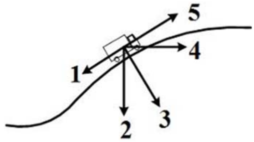
1. Колесо радиусом $R = 0{,}1$ м и массой 2 кг вращается так, что его угловая скорость изменяется по закону: $\omega = 5t^4 + 4t$. Определите модуль нормальной составляющей силы, действующей на колесо в момент времени $t = 1$ с.
2. Тело равноускоренно скользит по наклонной плоскости с углом наклона α. Показать все силы, действующие на тело.

Вариант 3.4

1. Гирька массой $m = 50$ г, привязанная к нити длиной $l = 25$ см, описывает в горизонтальной плоскости окружность. Частота вращения гирьки $n = 2$ об/с. Найти силу натяжения нити.
2. Простейшая машина Атвуда, применяемая для изучения законов равноускоренного движения, представляет собой 2 груза с неравными массами m_1 и m_2 ($m_1 > m_2$), которые подвешены на легкой нерастяжимой нити, перекинутой через невесомый блок. Пренебрегая трением в оси блока, показать силы, действующие на каждый из грузов.

Вариант 3.5

1. Тело массой m движется так, что зависимость пройденного пути от времени описывается уравнением $S = A\cos(\omega t)$ м, где A и ω – постоянные. Записать закон изменения силы $\vec{F}$ как функции от времени.
2. Указать, в каком направлении ориентирована равнодействующая всех сил, действующих на автомобиль, который поднимается в гору по участку дуги с постоянной по величине скоростью.

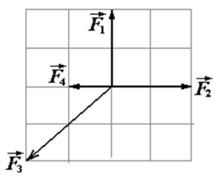


Вариант 3.6

1. Тело массой m движется в плоскости XOY по закону: $x = A\cos(\omega t)$; $y = B\sin(\omega t)$, где A, B, ω – положительные константы. Найти модуль силы, действующей на тело.
2. Материальная точка равноускоренно вращается по окружности радиуса R, лежащей в плоскости листа, против часовой стрелки. Показать на рисунке направления векторов нормальной, касательной и полной сил, действующих на эту точку.

Вариант 3.7

1. Две гири массой 1 кг и 2 кг соединены нитью, перекинутой через невесомый блок. Найти ускорения, с которыми движутся гири, и натяжение нити. Трением в блоке пренебречь [9].
2. Если на покоящееся тело будут действовать четыре силы, как показано на рисунке, то что произойдет: тело останется в покое или начнет двигаться (указать в каком направлении)?



Практическое занятие 4
РАБОТА. ЭНЕРГИЯ. ЗАКОНЫ СОХРАНЕНИЯ ИМПУЛЬСА И ЭНЕРГИИ

Учебные вопросы

1. Работа, мощность.
2. Механическая энергия. Закон сохранения механической энергии.
3. Импульс. Закон сохранения импульса.
4. Абсолютно упругий удар двух тел, абсолютно неупругий удар двух тел.

Основные формулы и законы

№	Название	Формула	Единица измерения	Направление вектора
1	Механическая работа	$dA = \vec{F} \cdot d\vec{r}$ $A_{12} = \int_1^2 dA = \int_1^2 \vec{F} \cdot d\vec{r}$ $A_{12} = \lvert\vec{F}\rvert \cdot \lvert\Delta\vec{r}\rvert \cdot \cos\alpha$	Дж	
2	Мощность	$P = \frac{dA}{dt}$ $P = \vec{F} \cdot \vec{\vartheta} = F_V V$	Вт	
3	Полная механическая энергия	$E = E_к + E_п$	Дж	
4	Кинетическая энергия	$E_k = m\frac{V^2}{2} = \frac{p^2}{2m}$	Дж	
5	Потенциальная энергия	$E_n = mgh$ $E_n = k\frac{x^2}{2}$	Дж	
6	Теорема о приращении кинетической энергии	$A_{12} = \Delta E_к = E_{k2} - E_{k1}$		

№	Название	Формула	Единица измерения	Направление вектора
7	Работа консервативных сил потенциального поля	$A^{\text{конс}} = E_{n1} - E_{n2}$		
8	Связь силы с потенциальной энергией	$\vec{F} = -\text{grad}E_n = -\left(\frac{\partial E_n}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial E_n}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial E_n}{\partial z}\vec{k}\right)$		
9	Закон сохранения механической энергии	если $\sum_i \vec{F}_i^{\text{внеш}} = 0$; $E = E_k + E_n = \text{const}$		
10	Импульс тела	$\vec{p} = m\vec{V}$	кг · м/с	$\vec{p} \uparrow\uparrow \vec{V}$
11	Суммарный импульс механической системы тел	$\vec{P} = \sum_i \vec{p}_i = \sum_i m_i \vec{V}_i$	кг · м/с	
12	Закон сохранения импульса	если $\sum_i \vec{F}_i^{\text{внеш}} = 0$, $\vec{P} = \sum_i \vec{p}_i = \text{const}$		
13	Абсолютно упругий удар шаров (ЗСИ, ЗСЭ)	$m_1\vec{V}_1 + m_2\vec{V}_2 = m_1\vec{V}_1' + m_2\vec{V}_2'$; $\frac{m_1V_1^2}{2} + \frac{m_2V_2^2}{2} = \frac{m_1V_1'^2}{2} + \frac{m_2V_2'^2}{2}$		
14	Абсолютно неупругий удар шаров (ЗСИ)	$m_1\vec{V}_1 + m_2\vec{V}_2 = (m_1 + m_2)\vec{V}_0$; $\frac{m_1V_1^2}{2} + \frac{m_2V_2^2}{2} = \frac{(m_1 + m_2)V_0^2}{2} + \Delta E$		
15	Радиус-вектор центра масс системы	$\vec{r}_C = \frac{\sum_i m_i \vec{r}}{\sum_i m_i}$; $x_C = \frac{\sum_i m_i x_i}{m_{\text{общ}}}$; $y_C = \frac{\sum_i m_i y_i}{m_{\text{общ}}}$	м	
16	Скорость движения центра масс	$\vec{V}_C = \frac{\sum_i m_i \vec{V}_i}{\sum_i m_i}$		
17	Суммарный импульс механической системы	$\vec{P}_C = m_{\text{общ}}\vec{V}_C = \sum_i m_i \vec{V}_i$		

Методические указания

Решение задач на механическое движение часто облегчается применением законов сохранения импульса и энергии системы тел. Особенно эффективным является использование законов сохранения в тех случаях, когда действующие силы не известны или меняются со временем сложным образом.

Рассмотрим методику решения таких задач.

Необходимо провести предварительный анализ задачи, определить характер действующих на систему сил (внешние или внутренние) и выбрать метод решения (с использованием второго закона Ньютона или законов сохранения энергии и импульса).

Сделать рисунок, на котором обозначить начальное 1 и конечное 2 состояния системы, определить состав системы, расставить силы и определить, какие из них являются внешними по отношению к системе.

Если система незамкнута, т. е. на нее действуют внешние силы, то справедливы уравнения:

$$E_2 - E_1 = A^{\text{внеш}}, \qquad \vec{p}_2 - \vec{p}_1 = \vec{F}^{\text{внеш}} \cdot \Delta t\,.$$

Если работа $A^{\text{внеш}}$ внешних сил или импульс внешних сил $\vec{F}^{\text{внеш}} \cdot \Delta t$ могут быть определены, то уравнения используются для решения задач.

Если система замкнута, т. е. на нее не действуют внешние силы, то справедливы законы сохранения:

$$E_1 = E_2 \quad \text{или} \quad E_{п1} + E_{к1} = E_{п2} + E_{к2},$$

$$\vec{P}_1 = \vec{P}_2 \quad \text{или} \quad \sum_{i=1}^{n} m_i \vec{V}_i = \sum_{i=1}^{n} m_i \vec{V}_i', \text{ т. е. } m_1\vec{V}_1 + m_2\vec{V}_2 = m_1\vec{V}_1' + m_2\vec{V}_2{}'\,.$$

Закон сохранения импульса можно использовать и в том случае, когда:

а) равнодействующая всех сил, действующих на систему (тело), равна нулю;

б) промежуток времени Δt, в течение которого на систему (тело) действуют внешние силы, мал ($\Delta t \to 0$), а равнодействующая $\vec{F}^{\text{внеш}}$ ограничена по величине (например, при взрыве, при резком столкновении).

Возможны случаи, когда импульс системы в целом не сохраняется, но сохраняется проекция импульса на некоторые направления (например, на ось x), т. е. $\Delta p_x = p_{2x} - p_{1x} = F_x^{\text{внеш}} \cdot \Delta t = 0$. Это возможно, если проекция равнодействующей всех внешних сил на ось x: $F_x^{\text{внеш}} = 0$, или промежуток времени Δt мал, а проекция $F_x^{\text{внеш}}$ ограничена по величине.

Следует помнить, что закон сохранения импульса – векторный закон. Записав его, необходимо спроецировать векторные уравнения на выбранные оси и далее работать со скалярными уравнениями.

Центр масс системы тел движется так, как двигалась бы материальная точка, масса которой равна массе системы, под действием равнодействующей всех внешних сил, действующих на систему (теорема о движении центра масс). Поэтому $\Delta\vec{p} = M \cdot \Delta\vec{V}_c = \vec{F}^{\text{внеш}} \cdot \Delta t$, и если система замкнута, то $\Delta\vec{V}_c = 0$, скорость $\vec{V}_c$ центра масс системы сохраняется неизменной. Использование сформулированной теоремы о движении центра масс позволяет иногда существенно упростить решение задачи.

Для характеристики действия силы на определенном участке траектории служит физическая величина, называемая механической работой. В общем случае механическая работа рассчитывается как криволинейный интеграл по траектории движения точки приложения силы. Чтобы привести интеграл к табличному виду, необходимо выразить проекцию силы F_s на направление перемещения и дифференциал dS через одну и ту же переменную. При этом необходимо правильно определить знак в соотношении между dS и дифференциалом новой переменной.

При решении задач надо помнить, что работа консервативных сил может быть определена как разность потенциальной энергии тела $A^{\text{конс}} = E_{n1} - E_{n2}$. Если эта энергия входит в полную механическую энергию системы, то соответствующие консервативные силы уже не считаются внешними силами.

Связь между потенциальной энергией и консервативной силой ($\vec{F}^{\text{конс}} = -gradE_n$ или $F_x = -\dfrac{\partial E_n}{\partial x}$; $F_y = -\dfrac{\partial E_n}{\partial y}$; $F_z = -\dfrac{\partial E_n}{\partial z}$) позволяет определять силу $\vec{F}$, если известна зависимость $E_n = f(x, y, z)$. Зачастую по виду этой зависимости легко определить характер движения тела в потенциальном поле. Например, тело, двигаясь в сторону возрастания потенциальной энергии, уменьшает свою скорость.

Примеры решения задач

***Пример* 4.1.** Шар массой m_1, движущийся горизонтально с некоторой скоростью V_1, столкнулся с неподвижным шаром массой m_2. Шары абсолютно упругие, удар прямой, центральный. Какую долю своей кинетической энергии первый шар передал второму?

Дано:	*Решение.* Доля энергии, переданной первым шаром второму, выразится соотношением:
m_1, m_2	$$\varepsilon = \frac{E_{к2}}{E_{к1}} = \frac{m_2 U_2^2}{m_1 V_1^2} = \frac{m_2}{m_1}\left(\frac{U_2}{V_1}\right)^2,$$
V_1, $V_2 = 0$	
$\varepsilon - ?$	

где $E_{к1}$, V_1 – кинетическая энергия и скорость первого шара до удара; $E_{к2}$ и U_2 – кинетическая энергия и скорость второго шара после удара.

Как видно из предложенной формулы, для определения доли энергии ε надо найти U_2. Согласно условию задачи, импульс системы двух шаров относительно горизонтального направления не изменяется и механическая энергия шаров в другие виды не переходит. Пользуясь этим, найдем:

$$m_1 V_1 = m_1 U_1 + m_2 U_2,$$

$$\frac{m_1 V_1^2}{2} = \frac{m_1 U_1^2}{2} + \frac{m_2 U_2^2}{2}.$$

Решим совместно эти уравнения и выразим U_2:

$$U_2 = \frac{2 m_1 V_1}{m_1 + m_2}.$$

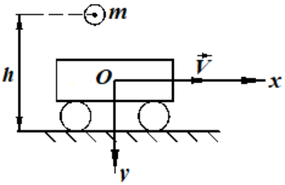
Подставим это выражение в первую формулу и получим:

$$\varepsilon = \frac{m_2}{m_1}\left[\frac{2 m_1 V_1}{V_1 (m_1 + m_2)}\right]^2 = \frac{4 m_1 m_2}{(m_1 + m_2)^2}.$$

Из найденного соотношения видно, что доля переданной энергии зависит только от масс сталкивающихся шаров.

Ответ: $\varepsilon = \dfrac{4 m_1 m_2}{(m_1 + m_2)^2}$.

Пример 4.2. Тележка с песком массой $M = 100$ кг движется прямолинейно и равномерно по горизонтальной плоскости со скоростью $V_0 = 3$ м/с. Шар массой $m = 20$ кг падает без начальной скорости с высоты $h = 10$ м и попадает в тележку с песком. Пренебрегая трением, определить скорость тел после взаимодействия.

Дано:	*Решение.*
$M = 100$ кг $m = 20$ кг $h = 10$ м $V_0 = 3$ м/с	
V – ?	

Рассматриваемая система состоит из двух тел: тележки и шара. Эта система не является замкнутой, так как на шар действует сила тяготения Земли, никакой другой внешней силой не уравновешенная. Поэтому закон сохранения импульса не выполняется. Но сила тяготения не имеет составляющей вдоль направления движения тележки, поэтому должна сохраняться проекция импульса на это направление.

Систему отсчета в задаче свяжем с поверхностью Земли, ось x направим вдоль направления движения тележки, а ось y – вертикально вниз. Будем считать, что ускорение Земли мало и связанную с ее поверхностью систему отсчета можно считать инерциальной.

Записав закон сохранения импульса в проекции на ось x, ответим на вопрос задачи.

Обозначим V_1 – скорость шара в момент падения; V – скорость движения системы тел (шар + тележка) после взаимодействия.

Тогда закон сохранения импульса в проекции на ось Ox запишем в виде:

$$Ox: \ mV_{1x} + MV_0 = (m + M)V.$$

Учитывая, что $V \perp Ox$, т. е. $V_{1x} = 0$, получаем: $V = \dfrac{MV_0}{m + M}$.

Проверка размерности: $[V]$ = (кг · м/с)/кг = м/с.

Числовой расчет: $V = \frac{100 \cdot 3}{120} = 2{,}5$ м/с.

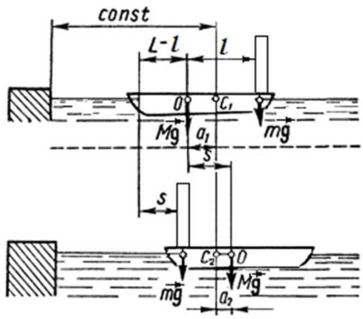
Из решения видно, что искомая скорость не зависит от высоты падения шара.

Ответ: $V = 2{,}5$ м/с.

Пример 4.3. На спокойной воде пруда перпендикулярно берегу и носом к нему стоит лодка массой M и длиной L, на корме стоит человек массой m. На какое расстояние s удалится лодка от берега, если человек перейдет с кормы на нос лодки? Силами трения и сопротивления пренебречь [8].

Дано: M, L, m s – ?	*Решение.* Систему «человек – лодка» относительно горизонтального направления можно рассматривать как замкнутую, на нее не действуют внешние силы или их действие компенсировано.

Согласно следствию из закона сохранения импульса, внутренние силы замкнутой системы тел не могут изменить положение центра масс системы. Применяя это следствие к системе «человек – лодка», можно считать, что при перемещении человека по лодке центр масс системы не изменит своего положения, т. е. останется на прежнем расстоянии от берега [8].



Пусть центр масс системы «человек – лодка» находится на вертикали, проходящей в начальный момент через точку C_1 лодки (см. рис.), а после перемещения лодки – через другую ее точку C_2. Так как эта вертикаль неподвижна относительно берега, то искомое перемещение s лодки относительно берега равно перемещению лодки относительно вертикали. А это последнее легко определить по перемещению центра масс O лодки. Как видно из рисунка, в начальный момент точка O находится на расстоянии a_1 слева от вертикали, а после перехода человека – на расстоянии a_2 справа от вертикали. Следовательно, искомое перемещение лодки $s = a_1 + a_2$ [8].

Для определения a_1 и a_2 воспользуемся тем, что относительно центра тяжести системы моменты сил тяжести лодки и человека должны быть равны.

Для точки C_1 имеем: $Mga_1 = mg(l - a_1)$, где l – первоначальное расстояние человека от центра тяжести лодки. Отсюда получим $a_1 = \dfrac{ml}{M + m}$. Для точки C_2 имеем: $Mga_2 = mg(L - l - a_2)$ откуда $a_2 = \dfrac{m(L-l)}{M+m}$ [8].

Подставим полученные выражения для a_1 и a_2 в формулу искомого перемещения:

$$s = \frac{ml}{M + m} + \frac{m(L - l)}{M + m} = \frac{mL}{M + m}.$$

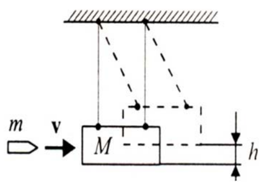
Ответ: $s = \dfrac{mL}{M + m}$.

Пример 4.4. Пуля массой m = 15 г, летящая с горизонтальной скоростью V = 0,5 км/с, попадает в баллистический маятник M = 6 кг и застревает в нем. Определите высоту h, на которую поднимется маятник, откачнувшись после удара.

Дано:
m = 15 г = $15 \cdot 10^{-3}$ кг
V = 0,5 км/с = 500 м/с
M = 6 кг

h – ?

Решение.



Рассматриваемая система состоит из двух тел: пули и баллистического маятника. Эта система не является замкнутой, так как на пулю действует сила тяготения Земли, никакой другой внешней силой не уравновешенная. Поэтому закон сохранения импульса не выполняется. Но сила тяготения не имеет составляющей вдоль направления движения маятника, поэтому должна сохраняться проекция импульса на направление движения.

Систему отсчета в задаче свяжем с поверхностью Земли, ось x направим вдоль направления движения маятника, а ось y – вертикально вниз. Будем считать, что ускорение Земли мало и связанную с ее поверхностью систему отсчета можно считать инерциальной.

Запишем закон сохранения импульса в проекции на ось x:

$$mV = (m + M)u,$$

отсюда скорость баллистического маятника с застрявшей пулей:

$$u = \frac{mV}{m + M}.$$

Воспользуемся законом сохранения энергии:

$$\frac{(m+M)u^2}{2} = (m+M)gh.$$

Выразим отсюда высоту, на которую поднимется маятник:

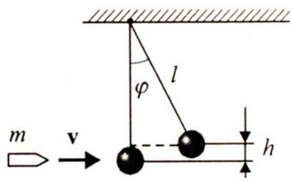
$$h = \frac{u^2}{2g} = \frac{(mV)^2}{2g(m+M)^2}.$$

Подставим числовые данные и получим: h = 7,9 см.

Ответ: h = 7,9 см.

Пример 4.5. Пуля массой m = 15 *г*, летящая с горизонтальной скоростью V = 200 м/с, попадает в баллистический маятник длиной l = 1 м и массой M = 1,5 кг и застревает в нем. Определите угол отклонения ϕ маятника [10].

Дано:	*Решение.*
V = 200 *м/с* m = 15 г = $15 \cdot 10^{-3}$ кг l = 1 *м* M = 1,5 *кг*	
ϕ – ?	



Введем обозначения: m, V – масса и скорость пули до удара, U – скорость системы «пуля – баллистический маятник» после удара. Так как система «пуля – баллистический маятник» замкнута, то выполняются законы сохранения импульса и энергии. Запишем их:

$$mV = (m + M)u,$$

$$\frac{(m+M)u^2}{2} = (m+M)gh.$$

Из первого уравнения выразим скорость U, подставим во второе, рассчитаем высоту:

$$u = \frac{mV}{m+M}, \qquad h = \frac{u^2}{2g} = \frac{(mV)^2}{2g(m+M)^2}.$$

Согласно теореме Пифагора:

$$\cos\varphi = \frac{l-h}{l} = 1 - \frac{(mV)^2}{2gl(m+M)^2}.$$

Тогда угол:

$$\varphi = \arccos\left[1 - \frac{(mV)^2}{2gl(m+M)^2}\right] = 37°.$$

Ответ: $\varphi = 37°$.

Пример 4.6. Человек массой m = 60 кг, бегущий со скоростью V_1 = 8 км/ч, догоняет тележку массой m_2 = 80 кг, движущуюся со скоростью V_2 = 2,9 км/ч, и вскакивает на нее. С какой скоростью U будет двигаться тележка? С какой скоростью U' будет двигаться тележка, если человек бежал ей навстречу [9]?

Дано:	*Решение.* Система «человек – тележка» замкнута в проекции на горизонтальную ось.
m = 60 кг V_1 = 8 км/ч m_2 = 80 кг V_2 = 2,9 км/ч	а) Человек догоняет тележку. По закону сохранения импульса: $m_1V_1 + m_2V_2 = (m_1 + m_2)U$, откуда $U = \frac{m_1V_1 + m_2V_2}{m_1 + m_2} = 5{,}14$ км/ч.
U, U' – ?	

б) Человек бежит навстречу тележке. По закону сохранения импульса: $m_1V_1 - m_2V_2 = (m_1 + m_2)U'$, откуда

$$U' = \frac{m_1V_1 - m_2V_2}{m_1 + m_2} = 1{,}71 \text{ км/ч}.$$

Ответ: U = 5,14 км/ч, U' = 1,71 км/ч.

Пример 4.7. Снаряд массой m_1 = 100 кг, летящий горизонтально вдоль железнодорожного пути со скоростью V_1 = 900 км/ч, попадает в вагон с песком, масса m_2 = 10 т и застревает в нем. Какую скорость U получит вагон, если: а) вагон стоит неподвижно; б) вагон движется со скоростью V_2 = 36 км/ч в том же направлении, что и снаряд; в) вагон движется со скоростью V_2 = 36 км/ч в направлении против движения снаряда? [9]

Дано:	*Решение:*
$m_1 = 100$ кг $V_1 = 900$ км/ч $= 250$ м/с $m_2 = 10$ т $= 10^4$ кг $V_2 = 36$ км/ч $= 10$ м/с	а) будем считать удар абсолютно неупругим, тогда в проекции на горизонтальную ось по закону сохранения импульса: $m_1V_1 = (m_1 + m_2)U$, откуда
U – ?	$U = \dfrac{m_1V_1}{m_1 + m_2} = 2{,}48$ м/с;

б) вагон движется в том же направлении, что и снаряд:

$$m_1V_1 + m_2V_2 = (m_1 + m_2)U,$$

отсюда $U = \dfrac{m_1V_1 + m_2V_2}{m_1 + m_2}$; $U = 12{,}38$ м/с;

в) вагон движется против движения снаряда:

$$m_1V_1 - m_2V_2 = (m_1 + m_2)U,$$

следовательно, $U = \dfrac{m_1V_1 - m_2V_2}{m_1 + m_2}$; $U = -7{,}43$ м/с, т. е. вагон продолжает двигаться в том же направлении, но с меньшей скоростью.

Ответ: а) $U = 2{,}48$ м/с, б) $U = 12{,}38$ м/с, в) $U = -7{,}43$ м/с.

Задачи для аудиторной и домашней работы

Задача 4.1. Насос выбрасывает струю воды диаметром $d = 2$ см со скоростью $V = 20$ м/с. Найти мощность N, развиваемую насосом.

Задача 4.2. Подвешенный на нити шарик массой $m = 200$ г отклоняют на угол $\alpha = 45°$. Определите силу напряжения нити в момент прохождения шариком положения равновесия.

Задача 4.3. Пуля массой $m = 12$ г, летящая с горизонтальной скоростью $V = 0{,}6$ км/с, попадает в мешок с песком массой $M = 10$ кг, висящий на длинной нити, и застревает в нем. Определите: 1) высоту, на которую поднимается мешок, отклонившись после удара; 2) долю кинетической энергии, израсходованной на пробивание песка.

Задача 4.4. Два шарика массами $m_1 = 9$ кг и $m_2 = 12$ кг подвешены на нитях длинной $1 = 1{,}5$ м. Первоначально шары соприкасаются между собой, затем меньший шар отклонили на угол $\alpha = 30°$ и отпустили. Считая удар неупругим, определите высоту h, на которую поднимутся оба шара после удара.

Задача 4.5. Орудие, жестко закрепленное на железнодорожной платформе, производит выстрел вдоль полотна железной дороги под углом 30° к линии горизонта. Определить скорость отката платформы, если снаряд вылетает со скоростью 480 м/с. Масса платформы с орудием и снарядами 18 т, масса снаряда 60 кг [11].

Задача 4.6. Конькобежец, стоя на коньках на льду, бросает камень массой 2,5 кг под углом 30° к горизонту со скоростью 10 м/с. Какова начальная скорость движения конькобежца, если его масса 60 кг. Перемещением конькобежца во время броска пренебречь [8].

Задача 4.7. Материальная точка массой 2 кг двигалась под действием некоторой силы согласно уравнению $x = A + Bt + Ct^2 + Dt^3$, где $A = 10$ м; $B = -2$ м/с; $C = 1$ м/с^2; $D = -0{,}2$ м/с^3. Найти мощность, затрачиваемую на движение точки в моменты времени $t_1 = 2$ с и $t_2 = 5$ с.

Задача 4.8. Тело массой $m = 1$ кг начинает двигаться под действием силы $\vec{F} = 2t\vec{i} + 3t^2\vec{j}$, где $\vec{i}$ и $\vec{j}$ – соответственно единичные векторы координатных осей x и y. Определите мощность $N(t)$, развиваемую силой в момент времени $t = 2$ с.

Задача 4.9. Какая работа должна быть совершена при поднятии с земли материалов для постройки цилиндрической дымоходной трубы высотой 40 м, наружным диаметром 3,0 м и внутренним диаметром 2,0 м? Плотность материала принять равной $\rho = 2{,}8 \cdot 10^3$ кг/м^3 [11].

Задача 4.10. Льдина площадью поперечного сечения 1 м^2 и высотой 0,4 м плавает в воде. Какую работу надо совершить, чтобы полностью погрузить льдину в воду? Плотность воды $\rho_в = 10^3$ кг/м^3, плотность льда $\rho_л = 900$ кг/м^3.

Задача 4.11. Груз массой 0,5 кг, привязанный к резиновому шнуру длиной 9,5 см, отклоняют на угол 90° и отпускают. Найти длину резинового шнура в момент прохождения грузом положения равновесия. Жесткость шнура $k = 1$ кН/м.

Задача 4.12. Конькобежец, стоя на льду, бросил вперед камень массой 5 кг и покатился назад со скоростью 1 м/с. Масса конькобежца 60 кг. Определить работу, совершенную конькобежцем при бросании камня [11].

Задача 4.13. В деревянный шар массой 8 кг, подвешенный на нити длиной 1,8 м, попадает горизонтально летящая пуля массой 4 г. С какой скоростью летела пуля, если нить с шаром и застрявшей в нем пулей отклонилась от вертикали на угол 3°? Размером шара пренебречь. Удар пули считать прямым, центральным [11].

Задача 4.14. Пуля попала в ящик с песком, подвешенный на шнурах, и застряла в нем. При этом шнуры отклонились на угол 20°. Определить скорость пули, если масса ее равна 9 г, масса ящика с песком 2 кг и длина каждого шнура 2,4 м.

Задача 4.15. Упругий шарик ударился о стенку со скоростью 1 м/с и отскочил от нее без потери скорости. До удара и после удара шарик двигался перпендикулярно стене. Масса шарика равна 100 г. Определить импульс, полученный стенкой.

Задача 4.16. Вычислить работу A, совершаемую при равноускоренном подъеме груза массой m = 100 кг на высоту h = 4 м за время 2 с [9].

Задача 4.17. Найти работу подъема груза по наклонной плоскости длиной 2 м, если масса груза равна 100 кг, угол наклона наклонной плоскости $\alpha = 30°$, коэффициент трения $\mu = 0{,}1$ и груз движется с ускорением $a = 0{,}1$ м/с^2 [8].

Задача 4.18. Вычислить работу A на пути S = 12 м, совершенную равномерно возрастающей силой, если начальное значение силы F_0 = 10 Н, а конечное F_t = 46 Н.

Задача 4.19. Под действием постоянной силы F вагонетка прошла путь S = 5 м и приобрела скорость V = 2 м/с. Определить работу этой силы, если масса вагонетки равна M = 400 кг, а коэффициент трения $\mu = 0{,}01$ [9].

Задача 4.20. Под действием постоянной силы $F = 400$ Н, направленной вертикально вверх, груз массой $m = 20$ кг был поднят на высоту $H = 15$ м. Какой потенциальной энергией будет обладать поднятый груз? Какую работу A совершит сила F?

Задача 4.21. Тело массой m, находящееся на вершине наклонной плоскости высотой H, соскальзывает вниз и, пройдя некоторый путь по горизонтальной поверхности, останавливается. Какую работу нужно совершить, чтобы втащить это тело на наклонную плоскость по тому же пути?

Задача 4.22. Конькобежец, разогнавшись до скорости V, въезжает на ледяную горку. На какую высоту H от начального уровня он поднимется, если горка составляет угол α с горизонтом, а коэффициент трения конькобежца о лед равен μ?

Задача 4.23. Шар массой $m_1 = 6$ кг налетает на другой, покоящийся шар массой $m_2 = 4$ кг. Импульс p_1 первого шара равен 5 кг · м/с. Удар шара прямой неупругий. Определить непосредственно после удара: 1) импульсы первого и второго шаров; 2) кинетические энергии первого и второго шаров [8].

Задача 4.24. В баллистический маятник $M = 5$ кг попала пуля массой $m = 10$ г и застряла в нем. Найти скорость пули, если маятник, отклонившись после удара, поднялся на высоту $h = 10$ см [8].

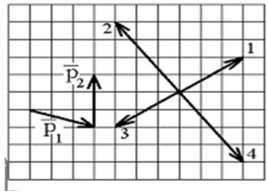
Задача 4.25. Два маленьких шарика массой по 10 г скреплены тонким невесомым стержнем длиной 20 см. Определить момент инерции системы относительно оси, перпендикулярной стержню и проходящей через центр масс [8].

Задача 4.26. Сколько времени будет скатываться без скольжения обруч с наклонной плоскости высотой 10 см и длиной 2 м?

Самостоятельная аудиторная работа

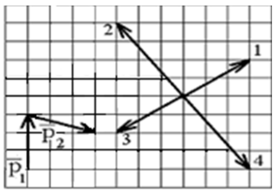
Вариант 4.1

1. Камень брошен под углом 60° к горизонту. Кинетическая энергия камня в начальный момент времени равна 20 Дж. Определить кинетическую и потенциальную энергию камня в высшей точке траектории.
2. Импульс тела $\vec{p}_1$ изменился под действием кратковременного удара и стал равным $\vec{p}_2$, как показано на рисунке. В каком направлении после удара направлен вектор $\Delta\vec{p}$?



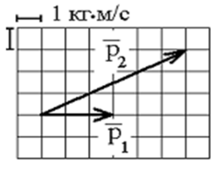
Вариант 4.2

1. Потенциальная энергия частицы в некотором силовом поле задана функцией $U = -x^2 - y^2 + z^2$. Определить работу потенциальной силы (в Дж) по перемещению частицы из точки B (1, 1, 1) в точку C (2, 2, 2).
2. Импульс тела $\vec{p}_1$ изменился под действием кратковременного удара и стал равным $\vec{p}_2$, как показано на рисунке. В каком направлении после удара направлен вектор $\Delta\vec{p}$?



Вариант 4.3

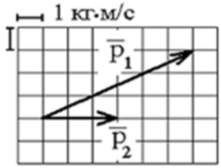
1. Мяч массой 100 г, летевший со скоростью 20 м/с, ударился о горизонтальную плоскость. Угол падения (угол между направлением скорости и перпендикуляром к плоскости) равен 60°. Найти приращение импульса, если удар абсолютно упругий, а угол падения равен углу отражения.
2. Теннисный мяч летел с импульсом $\vec{p}_1$ в горизонтальном направлении, когда теннисист произвел резкий удар по мячу, длившийся 0,1 с, а изменившийся импульс мяча стал равен $\vec{p}_2$. Какой величины сила действовала на мяч?



Вариант 4.4

1. Тело массой m движется на плоскости XOY по закону: $x = A\cos\omega t$; $y = D\sin\omega t$ (м), где A, D, ω – положительные константы. Определить модуль силы, действующей на тело.

2. Теннисный мяч летел с импульсом $\vec{p}_1$ в некотором направлении, когда теннисист произвел резкий удар по мячу, длившийся 0,2 с. В результате удара импульс мяча изменился и стал равен $\vec{p}_2$. Какой величины сила действовала на мяч?



Вариант 4.5

1. Частица массой m под действием некоторой силы движется по закону: $\vec{r} = Ct^2\vec{i} + Bt\vec{j}$ (м). Найти работу этой силы за интервал времени τ после начала ее действия.
2. Материальная точка вращается равнозамедленно по окружности радиуса R, лежащей в плоскости листа, по часовой стрелке. Показать на рисунке направления векторов мгновенного импульса и нормальной составляющей силы для материальной точки A, лежащей на окружности.

Вариант 4.6

1. Конькобежец, стоя на коньках на льду, бросает камень массой 2,5 кг под углом 30° к горизонту со скоростью 10 м/с. Какова начальная скорость движения конькобежца, если его масса 60 кг? Перемещением конькобежца во время броска пренебречь [8].
2. Материальная точка равноускоренно движется по окружности радиуса R, лежащей в плоскости листа, против часовой стрелки. Показать на рисунке направления векторов касательной составляющей силы и вектора мгновенного импульса для материальной точки A, лежащей на окружности.

Практическое занятие 5
ДИНАМИКА ВРАЩАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ

Учебные вопросы

1. Момент силы, момент импульса, момент инерции тела.
2. Основной закон динамики вращательного движения.
3. Закон сохранения момента импульса тела.
4. Работа, мощность, кинетическая энергия вращательного движения.

Основные формулы и законы

№	Название	Формула	Единица измерения	Направление вектора
1	Момент инерции материальной точки	$J = m_i r_i^2$	кг · м^2	
2	Момент инерции обруча, тонкостенного цилиндра относительно центра масс	$J_0 = mR^2$	кг · м^2	
3	Момент инерции однородного диска, сплошного цилиндра относительно центра масс	$J_д = \frac{1}{2} mR^2$	кг · м^2	
4	Момент инерции однородного тонкого стержня относительно центра масс	$J_{ст} = \frac{1}{12} ml^2$	кг · м^2	
5	Момент инерции однородного тонкого стержня относительно оси, проходящей через конец стержня, перпендикулярно ему	$J = \frac{1}{3} ml^2$	кг · м^2	
6	Момент инерции однородного шара относительно центра масс	$J_ш = \frac{2}{5} mR^2$	кг · м^2	

№	Название	Формула	Единица измерения	Направление вектора
7	Теорема Штейнера	$J_O = J_C + md^2$		
8	Момент силы относительно точки O	$\vec{M} = [\vec{r}, \vec{F}]$	Н · м	По правилу правого винта: $\vec{M}$ совпадает с направлением поступательного движения правого винта при его вращении от $\vec{r}$ к $\vec{F}$
9	Момент силы относительно оси вращения	$M_z = F_\tau l$	Н · м	
10	Момент импульса относительно точки O	$\vec{L} = [\vec{r}, \vec{p}]$	кг · м²/с	По правилу правого винта: $\vec{L}$ совпадает с направлением поступательного движения правого винта при его вращении от $\vec{r}$ к $\vec{p}$
11	Момент импульса относительно оси вращения	$L_z = pl$ $L_z = J_z\omega$	кг · м²/с	
12	Основной закон динамики вращательного движения	$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}$; $M_z = J_z \cdot \varepsilon$		
13	Кинетическая энергия вращательного движения	$W_k = \frac{J\omega^2}{2}$	Дж	
14	Кинетическая энергия плоского движения	$W_k = \frac{mV^2}{2} + \frac{J\omega^2}{2}$	Дж	
15	Работа при вращательном движении	$dA = M_z \cdot d\varphi$	Дж	
16	Закон сохранения момента импульса	$\sum \vec{F}_i^{\text{внеш}} = 0$, $L_z = \text{const}$ $J_1\omega_1 = J_2\omega_2$		

Методические указания

Методология решения задач динамики вращательного движения во многом сходна с методологией динамики поступательного движения. Мерой инертности тела при вращательном движении является момент инерции J, мерой силового воздействия – момент силы $\vec{M}$, движение вращающегося тела определяется угловым ускорением $\vec{\varepsilon}$.

Связь между этими величинами устанавливается основным уравнением динамики вращательного движения $M_z = J_z\varepsilon$, роль которого аналогична роли второго закона Ньютона в динамике поступательного движения. Соотношение между кинематическими и динамическими величинами, характеризующими поступательное и вращательное движение, похожи, что облегчает их запоминание.

В динамике вращательного движения тоже используются два основных метода решения задач – силовой, с использованием основного уравнения, и метод законов сохранения (законы сохранения импульса, энергии и момента импульса). Часто в состав системы входят тела, совершающие только вращательное движение, и тела, совершающие поступательное движение. Для первых записывается основной закон динамики вращательного движения, для вторых – основной закон динамики поступательного движения или второй закон Ньютона. Важно правильно определить силы, действующие на тела системы, моменты этих сил, определить соотношения между кинематическими характеристиками поступательного и вращательного движения частей системы.

При использовании законов сохранения следует обращать внимание на возможность применения того или иного закона. Плоское движение можно представить как совокупность поступательного движения и вращения вокруг воображаемой оси, проходящей через центр масс и перпендикулярной скорости центра масс. Следует помнить, что при сложном плоском движении кинетическая энергия тела складывается из кинетической энергии поступательного движения $E_{\text{к пост}} = \dfrac{mV_c^2}{2}$ и кинетической энергии вращательного движения $E_{\text{к вращ}} = \dfrac{J_z\omega^2}{2}$.

Примеры решения задач

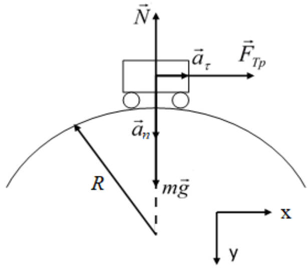
***Пример* 5.1.** Автомобиль движется по выпуклому мосту, имеющему форму дуги окружности радиусом 40 м. Какое максимальное ускорение в горизонтальном направлении может развить автомобиль в высшей точке моста, если его скорость в этой точке равна 50,4 км/ч? Коэффициент трения колес автомобиля о мост равен 0,57 [11].

Дано:
$R = 40$ м
$V = 50{,}4$ км/ч $= 14$ м/с
$\mu = 0{,}57$

---

a_τ – ?

Решение.



Силы, действующие на автомобиль, показаны на рисунке. Со стороны Земли на него действует сила тяжести $m\vec{g}$, со стороны моста – сила нормальной реакции $\vec{N}$ и сила трения $\vec{F}_{\text{тр}}$. Обратите внимание на направление силы трения. При вращении ведущих колес покрышка отталкивается от поверхности дороги, действуя на нее в сторону, противоположную движению машины.

По третьему закону Ньютона поверхность дороги действует на автомобиль в направлении движения. Для автомобиля движущей силой является сила трения сцепления (трения покоя), действующая на него со стороны полотна дороги.

Распространенной ошибкой является представление о том, что сила трения, действующая на колеса автомобиля, препятствует движению и направлена против движения. Препятствует движению сила сопротивления, обусловленная сопротивлением среды (воздуха), и сила трения качения, действующая на колеса автомобиля. При равномерном движении автомобиля сила тяги и сила трения, действующие на ведущие колеса, уравновешиваются результирующей силой сопротивления. В нашем случае силой сопротивления можно пренебречь. Воспользуемся вторым законом Ньютона:

$$\vec{N} + m\vec{g} + \vec{F}_{\text{Тр}} = m\vec{a},$$

где $\vec{a} = \vec{a}_n + \vec{a}_\tau$ – полное ускорение автомобиля, которое складывается из нормального ускорения $\vec{a}_n$ и тангенциального ускорения $\vec{a}_\tau$.

По условию задачи ускорение a_τ является максимальным, поэтому колеса находятся на грани пробуксовки и сила трения (напомним, сила трения покоя) имеет максимальное значение: $F_{тр} = \mu \cdot N$.

Спроецируем уравнение движения на выбранные координатные оси x, y:

$OX: \; F_{тр} = ma_x = ma_\tau;$

$OY: \; mg - N = ma_y = ma_n = m\dfrac{V^2}{R}.$

Решая эту систему уравнений, получим:

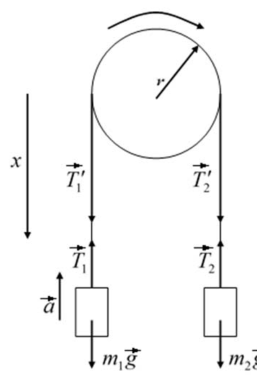
$$a_\tau = \frac{F_{тр}}{m} = \frac{\mu N}{m} = \frac{\mu\left(mg - m\dfrac{V^2}{R}\right)}{m} = \mu \cdot \left(g - \frac{V^2}{R}\right) = 2{,}8 \text{ м/с}^2.$$

Ответ: $a_\tau = 2{,}8$ м/с^2.

Пример 5.2. Через блок в виде сплошного диска, имеющего массу $m = 80$ г, перекинута тонкая гибкая нить, к концам которой подвешены грузы с массами $m_1 = 100$ г и $m_2 = 200$ г. Определить ускорение, с которым будут двигаться грузы, если их предоставить самим себе. Трением и массой нити пренебречь [9].

Дано:	Решение.
$m = 80$ г $= 0{,}08$ кг	Рассмотрим силы, действующие на каждый груз и на блок в отдельности. На каждый груз действуют две силы: сила тяжести и сила упругости (сила натяжения нити).
$m_1 = 100$ г $= 0{,}1$ кг	
$m_2 = 200$ г $= 0{,}2$ кг	
a – ?	

Направим ось x вертикально вниз и напишем для каждого груза уравнение движения (второй закон Ньютона) в проекциях на эту ось:



для первого груза: $m_1g - T_1 = -m_1a$;

для второго груза: $m_2g - T_2 = m_2a$.

Выразим отсюда силы натяжения:

$$T_1 = m_1g + m_1a;$$
$$T_2 = m_2g - m_2a.$$

Под действием моментов сил T_1' и T_2', действующих на блок, относительно оси z, перпендикулярной плоскости чертежа и направленной за чертеж, блок приобретает угловое ускорение ε.

Согласно основному уравнению динамики вращательного движения:

$$T_2'r - T_1'r = J_z\varepsilon .$$

Угловое ускорение выразим через линейное ускорение грузов: $\varepsilon = a / r$.

Блок считаем сплошным диском, следовательно момент инерции блока (сплошного диска) относительно оси z: $J_z = \frac{1}{2}mR^2$.

Согласно третьему закону Ньютона, с учетом невесомости нити $T_1' = T_1$, $T_2' = T_2$.

Подставим все выражения в уравнение динамики вращательного движения:

$$(m_2g - m_2a)r - (m_1g + m_1a)r = \frac{mR^2a}{2R}.$$

После сокращения на R и перегруппировки членов найдем ускорение:

$$a = \frac{(m_2 - m_1)}{(m_2 + m_1 + m/2)} \cdot g .$$

Эта формула позволяет массы m_1, m_2 и m выразить в граммах, как они даны в условии задачи, а ускорение – в единицах СИ. После подстановки числовых значений получим:

$$a = \frac{(200-100)\text{ г}}{(200+100+80/2)\text{ г}} \cdot 9{,}81\text{ м/с}^2 = 2{,}88\text{ м/с}^2.$$

Ответ: $a = 2{,}88$ м/с^2.

Пример 5.3. Маховик в виде сплошного диска радиусом $R = 0{,}2$ м и массой $m = 50$ кг раскручен до частоты вращения $n_1 = 480$ мин$^{-1}$ и предоставлен сам себе. Под действием сил трения маховик остановился через $t = 50$ с. Найти момент M сил трения [8].

Дано:	*Решение.*
$R = 0{,}2$ м	Для решения задачи воспользуемся основным уравнением динамики вращательного
$m = 50$ кг	
$n_1 = 480$ мин$^{-1}$ $= 8$ с$^{-1}$	движения в виде:
$n_t = 0$	$dL_z = M_z dt$,
$t = 50$ с	где dL_z – изменение проекции на ось z мо-
M – ?	мента импульса маховика, вращающегося

относительно оси z, совпадающей с геометрической осью маховика, за интервал времени dt; M_z – момент внешних сил (в данном случае момент сил трения), действующих на маховик относительно оси z. Момент сил трения можно считать не изменяющимся с течением времени ($M_z = \text{const}$), поэтому интегрирование уравнения динамики приводит к выражению:

$$\Delta L_z = M_z \Delta t.$$

При вращении твердого тела относительно неподвижной оси изменение проекции момента импульса можно представить в виде:

$$\Delta L_z = J_z \Delta\omega,$$

где J_z – момент инерции маховика относительно оси z; $\Delta\omega$ – изменение угловой скорости маховика.

Приравняем выражения для приращения момента импульса $M_z \Delta t = J_z \Delta\omega$, откуда

$$M_z = J_z \frac{\Delta\omega}{\Delta t}.$$

Момент инерции маховика в виде сплошного диска определяется по формуле

$$J_z = \frac{1}{2} m R^2.$$

Изменение угловой скорости выразим через конечную n_2 и начальную n_1 частоты вращения, пользуясь соотношением $\omega = 2\pi n$:

$$\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1 = 2\pi n_2 - 2\pi n_1 = 2\pi(n_2 - n_1).$$

Подставив в формулу момента силы выражения J_z и $\Delta\omega$, получим:

$$M_z = \frac{\pi m R^2 (n_2 - n_1)}{\Delta t}.$$

Проверим, дает ли расчетная формула единицу момента силы (Н · м). Для этого в правую часть формулы вместо символов величин подставим их единицы:

$$[M_z] = \frac{[m] \cdot [R^2] \cdot [n]}{[t]} = \frac{1\ \text{кг} \cdot 1\ \text{м}^2 \cdot \text{с}^{-1}}{1\ \text{с}} = 1\ \text{кг} \cdot \text{м} \cdot \text{с}^{-2} \cdot 1\ \text{м} = 1\ \text{Н} \cdot \text{м}.$$

Подставим в формулу числовые значения величин и произведем вычисления:

$$M_z = \frac{3{,}14 \cdot 50 \cdot (0{,}2)^2 (0 - 8)}{50} \approx 1\ \text{Н} \cdot \text{м}.$$

Знак минус показывает, что момент сил трения оказывает на маховик тормозящее действие.

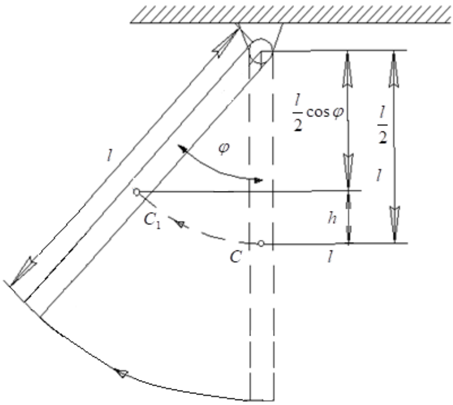
Ответ: $M_z = -1$ Н · м.

Пример 5.4. Стержень длиной $l = 1{,}5$ м и массой $M = 10$ кг может вращаться вокруг неподвижной оси, проходящей через верхний конец стержня. В середину стержня ударяет пуля массой $m = 10$ г, летящая в горизонтальном направлении со скоростью $V_0 = 500$ м/с, и застревает в стержне. На какой угол φ отклонится стержень после удара? [8]

Дано:
$l = 1{,}5$ м
$M = 10$ кг
$m = 10$ г $= 0{,}01$ кг
$V_0 = 500$ м/с

φ – ?

Решение.



Удар пули следует рассматривать как неупругий: после удара и пуля, и соответствующая точка стержня будут двигаться с одинаковыми скоростями.

Рассмотрим подробнее явления, происходящие при ударе. Сначала пуля, ударившись о стержень, за ничтожно малый промежуток времени приводит его в движение с некоторой угловой скоростью ω и сообщает ему некоторую кинетическую энергию:

$$T = \frac{J\omega^2}{2},$$

где J – момент инерции стержня относительно оси вращения.

Затем стержень поворачивается на некоторый угол, причем его центр тяжести поднимается на высоту: $h = \frac{l}{2}(1 - \cos\varphi)$.

В отклоненном положении стержень будет обладать потенциальной энергией

$$\Pi = Mg\frac{l}{2}(1-\cos\varphi).$$

Потенциальная энергия получена за счет кинетической энергии и равна ей по закону сохранения энергии: $T = \Pi$. Приравняем правые части этих выражений:

$$Mg\frac{l}{2}(1-\cos\varphi) = \frac{J\omega^2}{2},$$

отсюда $\cos\varphi = 1 - \frac{J\omega^2}{Mgl}$.

Если в эту формулу подставить выражение для момента инерции стержня $J = \frac{Ml^2}{3}$, то она примет вид

$$\cos\varphi = 1 - \frac{l\omega^2}{3g}.$$

Чтобы из этого выражения найти φ, необходимо предварительно определить числовое значение φ.

В момент удара на пулю и стержень действуют силы тяжести, линии действия которых проходят через ось вращения и направлены вертикально вниз. Моменты этих сил относительно оси вращения равны нулю. Поэтому при ударе пули о стержень будет справедлив закон сохранения момента импульса.

В начальный момент удара угловая скорость стержня $\omega_0 = 0$ и поэтому момент импульса стержня $L_{01} = J\omega_0 = 0$. Пуля коснулась стержня, имея линейную скорость V_0, и начала углубляться в стержень, сообщая ему угловое ускорение и участвуя во вращении стержня около оси.

В начальный момент удара импульс пули равен $L_{02} = mV_0r$, где r – расстояние точки попадания от оси вращения.

В конечный момент удара стержень имел угловую скорость ω, а пуля – линейную скорость V, равную линейной скорости точек стержня, находящихся на расстоянии r от оси вращения.

Так как $V = \omega r$, то конечный момент импульса пули:

$$L_2 = mVr = mr^2\omega.$$

Применим закон сохранения импульса и запишем уравнение

$$mV_0r = J\omega + mr^2\omega,$$

откуда угловая скорость

$$\omega = \frac{mV_0 r}{J + mr^2},$$

где $J = \dfrac{Ml^2}{3}$ – момент инерции системы «стержень – пуля». Учитывая, что $mr^2 << J$, а также что $r = \dfrac{l}{2}$, отсюда получим

$$\omega = \frac{mV_0 r}{\dfrac{Ml^2}{3} + mr^2}.$$

Вычислим угловую скорость:

$$\omega = \frac{0{,}01 \cdot 500 \cdot 0{,}75}{\frac{1}{3} \cdot 10 \cdot (1{,}5)^2 + 0{,}01 \cdot (0{,}75)^2} \text{рад/с} = 0{,}5 \text{ рад/с}.$$

Подставим числовые значения l и ω в выражение $\cos \varphi$, найдем

$$\cos\varphi = 1 - \frac{1{,}5 \cdot (0{,}5)^2}{3 \cdot 9{,}81} = 0{,}987, \ \varphi = 9°20'.$$

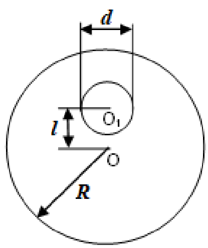
Ответ: $\varphi = 9°20'$.

Пример 5.5. В однородном диске массой m = 1 кг и радиусом R = 30 см вырезано круглое отверстие диаметром d = 20 см, центр которого находится на расстоянии l = 15 см от оси диска. Найти момент инерции J полученного тела относительно оси, проходящей перпендикулярно плоскости диска через его центр [8].

Дано:
m = 1 кг
R = 30 см = 0,3 м
d = 20 см = 0,2 м
l = 15 см = 0,15 м

J – ?

Решение.



Так как у диска вырезано отверстие, то по свойству аддитивности результирующий момент инерции будет равен:

$$J = J_1 - J_2,$$

где J_1 – момент инерции диска без отверстия; J_2 – момент инерции малого диска, вырезанного из большого.

Момент инерции сплошного диска радиуса R относительно оси O равен:

$$J_1 = \frac{m_1 R^2}{2}.$$

Малый диск диаметром d совершает вращение относительно оси, не проходящей через центр масс. Его момент инерции определяется по теореме Штейнера:

$$J_2 = \frac{m_2 d^2}{8} + m_2 (OO_1) = \frac{m_2 d^2}{8} + m_2 l^2.$$

Так как диск однородный, то запишем формулы массы большого сплошного диска m_1 и вырезанного малого диска m_2 как:

$$m_1 = \rho \pi R^2 h, \; m_2 = \rho \pi \frac{d^2}{4} h,$$

где ρ – плотность материала диска; h – высота диска.

Найдем отношение масс $\frac{m_2}{m_1} = \frac{d^2}{4R^2}$ и выразим массу малого диска через массу данного диска $m_2 = m_1 \frac{d^2}{4R^2}$.

С учетом этого выражения запишем момент инерции малого диска:

$$J_2 = \frac{m_1 d^2}{4R^2} \left(\frac{d^2}{8} + l^2 \right).$$

Результирующий момент инерции равен:

$$J = J_1 - J_2 = \frac{m_1 R^2}{2} - \frac{m_1 d^2}{4R^2} \left(\frac{d^2}{8} + l^2 \right).$$

Проверка единиц измерения: $[J]$ = кг · м^2.

Расчет: J = 0,025 – 0,003055 = 0,0419 кг · м^2.

Ответ: J = 0,0419 кг · м^2.

Пример 5.6. Горизонтальная платформа массой M вращается вокруг вертикальной оси, проходящей через центр платформы, делая n_1 оборотов в секунду. Человек массой m стоит при этом на краю платформы. С какой скоростью начнет вращаться платформа, если человек перейдет от края платформы к ее центру? Считать платформу круглым однородным диском, а человека – материальной точкой [9].

Дано:	*Решение.*
M	По закону сохранения момента импульса: $J_1\omega_1 = J_2\omega_2$,
m	где J_1, J_2 – моменты инерции системы в начальном
n_1	и конечном состояниях; ω_1, ω_2 – угловые скорости
ω_2 – ?	начального и конечного состояния системы.

Тогда конечная скорость: $\omega_2 = \dfrac{I_1\omega_1}{I_2}$.

Определим J_1, J_2, ω_1. Так как система состоит из двух тел: платформы и человека, то: $J_1 = J_{пл1} + J_{чел1}$, $J_2 = J_{пл2} + J_{чел2}$.

По условию задачи в первом состоянии человек, как точечная масса, находится на краю платформы. Пусть R – радиус платформы, тогда $J_1 = J_{пл} + mR^2$. Момент инерции платформы: $J_{пл} = \dfrac{MR^2}{2}$, так как платформа – круглый однородный диск.

Во втором состоянии человек, как точечная масса, находится в центре платформы и $J_{чел2} = 0$, тогда $J_2 = \dfrac{MR^2}{2}$.

Выразим угловую скорость в начальный момент времени через частоту $\omega_1 = 2\pi n_1$.

Подставим все выражения в исходную формулу и выразим угловую скорость в конечный момент времени:

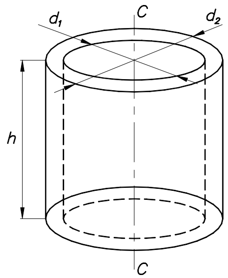
$$\omega_2 = \frac{\left(\dfrac{MR^2}{2} + mR^2\right)2\pi n_1}{\dfrac{MR^2}{2}} = \frac{\left(\dfrac{M}{2} + m\right)4\pi n_1}{M}.$$

Проверка размерностей: [ω] = (кг · рад/с)/кг = рад/с.

Ответ: $\omega_2 = \dfrac{\left(\dfrac{M}{2} + m\right)4\pi n_1}{M}$.

Пример 5.7. Вывести формулу для расчета момента инерции ротора относительно оси CC, проходящей через центр масс, если высота ротора h, внутренний диаметр d_1, внешний d_2, а плотность материала, из которого изготовлен ротор, равна ρ.

Дано:	*Решение.*
d_1	
d_2	
h	
ρ	
I_{CC} – ?	



По определению момент инерции сплошного тела: $J = \int \rho r^2 dV$.

Выберем в качестве элементарного объема dV тонкостенный цилиндр радиусом r, высотой h и толщиной стенки dr. Материал этого цилиндра лежит на расстоянии r от оси СС, а его объем $dV = 2\pi r dr h$. Весь объем ротора можно заполнить такими цилиндрами, изменяя их радиусы в диапазоне от R_1 до R_2.

Тогда искомый момент инерции:

$$I_{CC} = \int_{R_1}^{R_2} \rho r^2 2\pi r h \cdot dr = \rho 2\pi h \int_{R_1}^{R_2} r^3 \cdot dr,$$

так как ρ, π, h = const.

Вычисляя интеграл, получим:

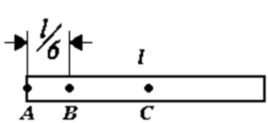
$$I_{CC} = \left.\frac{2\pi h \rho r^4}{4}\right|_{R_1}^{R_2} = \frac{\pi h \rho}{2}\left(R_2^4 - R_1^4\right) = \frac{\pi h \rho}{32}(d_2^4 - d_1^4).$$

Проверка: $[J]$ = м · (кг/м^3) · м^4 = кг · м^2.

Ответ: $I_{CC} = \frac{\pi h \rho}{32}(d_2^4 - d_1^4)$.

Пример 5.8. Определить момент инерции J тонкого однородного стержня длиной l = 50 см и массой m = 360 г относительно оси, перпендикулярной стержню и проходящей через: конец стержня и точку, отстоящую от конца стержня на 1/6 его длины [8].

Дано:	*Решение.*
l = 50 см = 0,5 м	
m = 360 г = 0,36 кг	
$AB = l/6$	
J_A – ? J_B – ?	



Так как ось вращения не проходит через центр масс, то для расчета применим теорему Штейнера: $J = J_C + ma^2$, где $J_C = \frac{1}{12}ml^2$ — момент инерции стержня относительно оси, проходящей через центр масс стержня, a — расстояние между осями. Тогда

$$J_A = \frac{1}{12}ml^2 + m\left(\frac{l}{2}\right)^2 = \frac{1}{3}ml^2,$$

$$J_B = \frac{1}{12}ml^2 + m\left(\frac{l}{2} - \frac{l}{6}\right)^2 = \frac{7}{36}ml^2.$$

Ответ: $J_A = 3 \cdot 10^{-2}$ кг · м^2; $J_B = 1{,}75 \cdot 10^{-2}$ кг · м^2.

Пример 5.9. Шар и сплошной цилиндр одинаковой массы, изготовленные из одного и того же материала, катятся без скольжения с одинаковой скоростью. Определить, во сколько раз кинетическая энергия шара меньше кинетической энергии сплошного цилиндра [10].

Дано:	*Решение.*
$m_1 = m_2 = m$ $V_1 = V_2 = V$	Шар и сплошной цилиндр выполняют плоское движение.
$\frac{T_2}{T_1}$ – ?	Рассчитаем для них значения энергии при плоском движении: $T = \frac{mV^2}{2} + \frac{J\omega^2}{2}$.

Заменим угловую скорость на линейную по формуле: $\omega = \frac{V}{R}$.

Момент инерции шара: $J_1 = \frac{2}{5}mR^2$, момент инерции цилиндра: $J_2 = \frac{1}{2}mR^2$.

Подставим в формулу кинетической энергии:

$$T_1 = \frac{mV^2}{2} + \frac{2}{5}mR^2 \cdot \frac{V^2}{2R^2} = \frac{7}{10}mV^2,$$

$$T_2 = \frac{mV^2}{2} + \frac{1}{2}mR^2 \cdot \frac{V^2}{2R^2} = \frac{3}{4}mV^2.$$

Отношение кинетической энергии сплошного цилиндра к кинетической энергии шара: $\frac{T_2}{T_1} = 1{,}07$.

Ответ: $\frac{T_2}{T_1} = 1{,}07$.

Пример 5.10. Шар радиусом $R = 10$ см и массой $m = 5$ кг вращается вокруг оси симметрии согласно уравнению $\varphi = A + Bt^2 + Ct^3$ ($B = 2$ рад/с^2, $C = -0{,}5$ рад/с^3). Определить момент сил M для $t = 3$ с [10].

Дано:
$R = 10$ см $= 0{,}1$ м
$m = 5$ кг
$\varphi = A + Bt^2 + Ct^3$
$B = 2$ рад/с^2
$C = -0{,}5$ рад/с^3
$t = 3$ с

M – ?

Решение.

Воспользуемся уравнением динамики вращательного движения: $M = J\varepsilon$.

Момент инерции шара: $J = \frac{2}{5}mR^2$.

Угловая скорость $\omega = \frac{d\varphi}{dt}$, $\omega = 2Bt + 3Ct^2$.

Угловое ускорение $\varepsilon = \frac{d\omega}{dt}$, $\varepsilon = 2B + 6Ct$.

Тогда момент силы: $M = \frac{2}{5}mR^2(2B + 6Ct)$.

Подставляя числовые значения, получим: $M = -0{,}1$ Н · м.

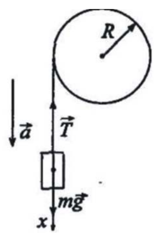
Ответ: $M = -0{,}1$ Н · м.

Пример 5.11. На барабан радиусом $R = 0{,}5$ м намотан шнур, к концу которого привязан груз массой $m = 10$ кг. Найти момент инерции J барабана, если известно, что груз опускается с ускорением $a = 2{,}04$ м/с^2.

Дано:
$R = 0{,}5$ м
$m = 10$ кг
а $= 2{,}04$ м/с^2

J – ?

Решение.



Сила натяжения шнура $\vec{T}$ создает вращающий момент $M = T \cdot R$.

С другой стороны, $M = J \cdot \varepsilon$.

Ускорение, с которым опускается груз, равно тангенциальному ускорению вращения барабана. Тогда $\varepsilon = \frac{a}{R}$.

Решая совместно эти уравнения получим: $J = \frac{TR^2}{a}$.

Силу натяжения шнура $\vec{T}$ найдем из второго закона Ньютона в проекциях на ось x: $mg - T = ma$, откуда $T = m(g - a)$.

Тогда момент инерции: $J = \frac{mR^2(g-a)}{a}$. Подставляя числовые значения получим: $J = 9{,}5$ кг · м^2.

Ответ: $J = 9{,}5$ кг · м^2.

Пример 5.12. Вентилятор вращается с частотой $n = 600$ об/мин. После выключения он начал вращаться равнозамедленно и, сделав $N = 50$ оборотов, остановился. Работа A сил торможения равна 31,4 Дж. Определить: 1) момент сил M торможения; 2) момент инерции J вентилятора [10].

Дано:	*Решение.*
$n = 600$ об/мин $= 10$ об/с $N = 50$ $A = 31{,}4$ Дж	Работа рассчитывается по формуле: $A = M\varphi$, где $\varphi = 2\pi N$ – угловое перемещение.
M – ? J – ?	Выразим отсюда момент сил: $M = \frac{A}{\varphi} = \frac{A}{2\pi N}$.

Момент инерции выразим из уравнения динамики вращательного движения: $M = J\varepsilon \to J = \frac{M}{\varepsilon}$.

Угловое ускорение по определению: $\varepsilon = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{\omega_0}{t}$.

Выразим угловую скорость через частоту вращения: $\omega_0 = 2\pi n$, тогда $\varepsilon = \frac{\omega_0}{t} = \frac{2\pi n}{t}$.

Угловое перемещение для равнозамедленного движения:

$$\varphi = \omega_0 t - \frac{\varepsilon t^2}{2} = \frac{\omega_0 t}{2},$$

отсюда время

$$t = \frac{2\varphi}{\omega_0} = \frac{2 \cdot 2\pi N}{2\pi n} = \frac{2N}{n}.$$

Подставим все в формулу момента инерции:

$$J = \frac{M}{\varepsilon} = \frac{MN}{\pi n^2}.$$

Подставляя числовые значения величин, получим:

$$M = -0{,}1 \text{ Н} \cdot \text{м};\ J = 1{,}59 \cdot 10^{-2} \text{ кг} \cdot \text{м}^2.$$

Ответ: $M = -0{,}1$ Н · м; $J = 1{,}59 \cdot 10^{-2}$ кг · м^2.

Задачи для аудиторной и домашней работы

Задача 5.1. Через неподвижный блок в виде сплошного цилиндра массой $m = 160$ г перекинута невесомая нерастяжимая нить, к концам которой прикреплены грузы массами $m_1 = 200$ г и $m_2 = 300$ г. Пренебрегая трением в оси блока определить: 1) ускорение движения грузов; 2) силы натяжения нитей T_1 и T_2.

Задача 5.2. Вал массой $m = 100$ кг и радиусом $R = 5$ см вращался с частотой $n = 8$ об/с. К цилиндрической поверхности вала прижали тормозную колодку с силой $F = 40$ Н, под действием которой вал остановился через $t = 10$ с. Определить величину коэффициента трения [8].

Задача 5.3. Через неподвижный блок, масса которого равномерно распределена по ободу, массой $m = 200$ г перекинут невесомый нерастяжимый шнур, к концам которого прикреплены грузы массами $m_1 = 300$ г и $m_2 = 500$ г. Пренебрегая трением в оси блока определить: 1) ускорение движения грузов; 2) силы натяжения нитей T_1 и T_2.

Задача 5.4. Шар массой $m = 10$ кг и радиусом $R = 20$ см вращается вокруг оси, проходящей через его центр, по закону: $\varphi = 4t^2 - t^3$ (рад). Найти закон изменения момента сил, действующих на шар. Определить величину момента сил для момента времени $t = 2$ с [8].

Задача 5.5. Цилиндр, расположенный горизонтально, может вращаться вокруг оси, совпадающей с осью цилиндра. Масса цилиндра $m_1 = 12$ кг. На цилиндр намотали шнур, к которому привязали гирю массой $m_2 = 1$ кг. С каким ускорением будет опускаться гиря? Какова сила натяжения шнура во время движения гири? [11]

Задача 5.6. Шар скатывается с наклонной плоскости высотой $h = 90$ см. Какую линейную скорость будет иметь центр шара в тот момент, когда шар скатится с наклонной плоскости? [11]

Задача 5.7. Платформа в виде диска вращается по инерции около вертикальной оси с частотой $n_1 = 14$ мин$^{-1}$. На краю платформы стоит человек. Когда человек перешел в центр платформы, частота возросла до $n_2 = 25$ мин$^{-1}$. Масса человека $m = 70$ кг. Определить массу платформы. Момент инерции человека рассчитывать как для материальной точки [8].

Задача 5.8. С какой наименьшей высоты H должен съехать велосипедист, чтобы по инерции (без трения) проехать дорожку, имеющую форму «мертвой петли» радиусом $R = 3$ м, и не оторваться от дорожки в верхней точке петли. Масса велосипедиста вместе с велосипедом $m = 75$ кг, причем на массу колес приходится $m_1 = 3$ кг. Колеса велосипеда считать обручами [9].

Задача 5.9. Маховое колесо, имеющее момент инерции 245 кг · м^2, вращается, делая 20 об/с. Через минуту, после того как на колесо перестал действовать вращающий момент, оно остановилось. Найти: 1) момент сил трения, 2) число оборотов, которое сделало колесо до полной остановки после прекращения действия сил.

Задача 5.10. Вентилятор вращается со скоростью, соответствующей 900 об/мин. После выключения вентилятор, вращаясь равнозамедленно, сделал до остановки 75 об. Работа сил торможения равна 44,4 Дж. Найти: 1) момент инерции вентилятора, 2) момент силы торможения [9].

Задача 5.11. Человек весом 600 Н находится на неподвижной платформе массой 100 кг. Какое число оборотов в минуту будет делать платформа, если человек будет двигаться по окружности радиусом 5 м вокруг оси вращения? Скорость движения человека относительно платформы равна 4 км/ч. Радиус платформы 10 м. Считать платформу однородным диском, а человека – материальной точкой [9].

Задача 5.12. На скамье Жуковского стоит человек и держит в руках стержень вертикально по оси скамьи. Скамья с человеком вращается с угловой скоростью $\omega_1 = 4$ рад/с. С какой угловой скоростью ω_2 будет вращаться скамья с человеком, если повернуть стержень так, чтобы он занял горизонтальное положение? Суммарный момент инерции человека и скамьи $J = 5$ кг · м^2. Длина стержня $l = 1{,}8$ м, масса $m = 6$ кг. Считать, что центр масс стержня с человеком находится на оси платформы [8].

Задача 5.13. На краю неподвижной скамьи Жуковского диаметром $D = 0{,}8$ м и массой $m_1 = 6$ кг стоит человек $m_2 = 60$ кг. С какой угловой скоростью ω начнет вращаться скамья, если человек поймает летящий на него мяч массой $m = 0{,}5$ кг? Траектория мяча горизонтальна и проходит на расстоянии $r = 0{,}4$ м от оси скамьи. Скорость мяча $V = 5$ м/с [8].

Задача 5.14. Шар массой $m = 1$ кг, катящийся без скольжения, ударяется о стенку и откатывается от нее. Скорость шара до удара о стенку $V_1 = 10$ см/с, после удара $V_2 = 8$ см/с. Найти количество тепла Q, выделившееся при ударе [9].

Задача 5.15. Найти кинетическую энергию велосипедиста, едущего со скоростью $V = 9$ км/ч. Вес велосипедиста вместе с велосипедом $P = 780$ Н, причем на вес колес приходится $P_1 = 30$ Н. Колеса велосипеда считать обручами [9].

Задача 5.16. Медный шар радиусом $R = 10$ см вращается со скоростью, соответствующей $n = 2$ об/с, вокруг оси, проходящей через его центр. Какую работу надо совершить, чтобы увеличить угловую скорость вращения шара вдвое? [9]

Задача 5.17. К ободу диска массой $m = 5$ кг приложена постоянная касательная сила $F = 20$ Н. Какую кинетическую энергию будет иметь диск через $\Delta t = 5$ с после начала действия силы?

Задача 5.18. Однородный стержень длиной $l = 1{,}0$ м может свободно вращаться вокруг горизонтальной оси, проходящей через один из его концов. В другой конец абсолютно неупруго ударяет пуля массой $m = 7$ г, летящая перпендикулярно стержню и его оси. Определить массу M стержня, если в результате попадания пули он отклонится на угол $\alpha = 60°$. Принять скорость пули $V = 360$ м/с.

Задача 5.19. Платформа в виде диска вращается по инерции около вертикальной оси с частотой $n_1 = 14$ мин$^{-1}$. На краю платформы стоит человек. Когда человек перешел в центр платформы, частота возросла до $n_2 = 25$ мин$^{-1}$. Масса человека $m = 70$ кг. Определить массу платформы. Момент инерции человека рассчитывать как для материальной точки [8].

Задача 5.20. При торможении диск остановился, сделав 10 оборотов от начала торможения до остановки. Определить момент силы торможения.

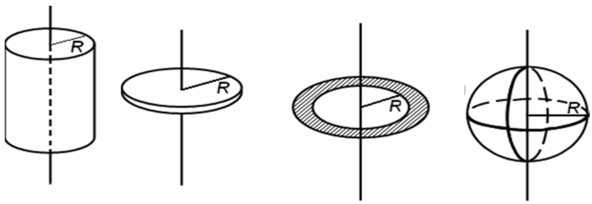
Задача 5.21. Маховое колесо, имеющее момент инерции $J = 245$ кг · м^2, вращается, делая 20 об/с. Через минуту, после того как на колесо перестал действовать вращающий момент, оно остановилось. Найти: 1) момент сил трения, 2) число оборотов, которое сделало колесо до полной остановки после прекращения действия сил.

Задача 5.22. На барабан массой $M = 9$ кг намотан невесомый шнур, к концу которого прикреплен груз массой $m = 2$ кг. Найти ускорение, с которым опускается груз. Барабан считать однородным цилиндром. Трением пренебречь [9].

Самостоятельная аудиторная работа

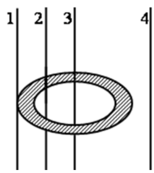
Вариант 5.1

1. Мальчик катит обруч по горизонтальной дороге со скоростью $V = 7{,}2$ км/ч. На какое расстояние может вкатиться обруч за счет его кинетической энергии на горку? Уклон горки равен 10 м на каждые 100 м пути [9].
2. Определить, какое тело (цилиндр, диск, обруч, шар), изображенное на рисунке, обладает максимальным моментом инерции J.



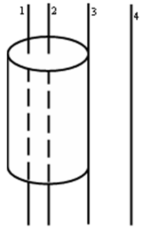
Вариант 5.2

1. Маховое колесо начинает вращаться с постоянным угловым ускорением $\varepsilon = 0{,}5$ рад/с^2 и через $t_1 = 15$ с после начала движения приобретает момент импульса, равный $L = 73{,}5$ кг · м^2/с. Найти кинетическую энергию колеса через $t_2 = 20$ с после начала вращения [9].
2. Определить, относительно какой оси обруч обладает минимальным моментом инерции.



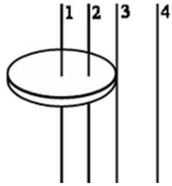
Вариант 5.3

1. Медный шар радиусом $R = 10$ см вращается со скоростью, соответствующей $n = 2$ об/с, вокруг оси, проходящей через его центр. Какую работу надо совершить, чтобы увеличить угловую скорость вращения шара вдвое? [9]
2. Определить, относительно какой оси цилиндр обладает максимальным моментом инерции.



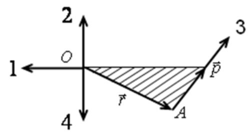
Вариант 5.4

1. Обруч, диск и шар, имеющие одинаковые массы m и радиусы R, катятся без скольжения с одинаковой линейной скоростью V по горизонтальной поверхности. Сравнить их кинетические энергии.
2. Определить, относительно какой оси диск обладает максимальным моментом инерции.



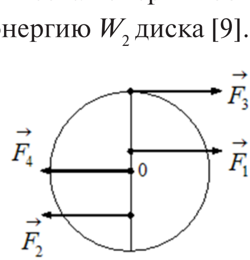
Вариант 5.5

1. Пуля массой 10 г летит со скоростью 800 м/с, вращаясь около продольной оси с частотой $n = 3000$ с$^{-1}$. Принимая пулю за цилиндрик диаметром $d = 8$ мм, определить полную кинетическую энергию пули [8].
2. Выбрать верное направление вектора момента импульса.



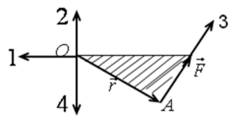
Вариант 5.6

1. Обруч и диск имеют одинаковую массу и катятся без скольжения с одинаковой линейной скоростью V. Кинетическая энергия обруча равна $W_1 = 4$ Дж. Найти кинетическую энергию W_2 диска [9].
2. Диск радиусом R может вращаться вокруг оси, перпендикулярной плоскости диска и проходящей через его центр (т. O). К нему прикладывают одну из сил ($\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$, $\vec{F}_3$ или $\vec{F}_4$), лежащих в плоскости диска и равных по модулю. Определить величину и направление вектора углового ускорения, сообщенного диску силой $\vec{F}_3$.



Вариант 5.7

1. Шар и сплошной цилиндр одинаковой массы, изготовленные из одного и того же материала, катятся без скольжения с одинаковой скоростью. Определить, во сколько раз кинетическая энергия шара меньше кинетической энергии сплошного цилиндра [10].
2. Выбрать верное направление вектора момента силы.



Практическое занятие 6
ЭЛЕМЕНТЫ СПЕЦИАЛЬНОЙ ТЕОРИИ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ (СТО)

Учебные вопросы

1. Преобразования Лоренца и следствия из них.
2. Релятивистский импульс.
3. Релятивистское уравнение динамики.
4. Полная и кинетическая энергия. Закон взаимосвязи массы и энергии.

Основные формулы и законы

№	Название	Формула	Единица измерения
1	Релятивистский импульс	$p = mV = \dfrac{m_0 V}{\sqrt{1-\beta^2}}$	кг · м/с
2	Релятивистская масса	$m = \dfrac{m_0}{\sqrt{1-\beta^2}}$	кг
3	Преобразования Лоренца	$\begin{cases} x = \dfrac{x' + Vt'}{\sqrt{1-\beta^2}}, \\ y = y', \\ z = z' \\ t = \dfrac{t' + \dfrac{Vx'}{c^2}}{\sqrt{1-\beta^2}} \end{cases}$; $\beta = \dfrac{V}{c}$	
4	Лоренцево сокращения длины	$l = l_0\sqrt{1-\beta^2}$	м
5	Длительность событий	$\Delta t_0 = \dfrac{\Delta t}{\sqrt{1-\beta^2}}$	с
6	Закон сложения скоростей	$u = \dfrac{u' + V}{1 + \dfrac{Vu'}{c^2}}, \quad u' = \dfrac{u - V}{1 - \dfrac{Vu}{c^2}}$	м/с

№	Название	Формула	Единица измерения
7	Релятивистское уравнение динамики частицы	$F = \frac{dp}{dt} = \frac{d\left(\frac{m_0 V}{\sqrt{1-\beta^2}}\right)}{dt}$	
8	Полная энергия релятивистской частицы	$E = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-\beta^2}} = mc^2$	Дж
9	Кинетическая энергия релятивистской частицы	$E_k = mc^2 - m_0 c^2$	Дж
10	Связь между энергией и импульсом релятивистской частицы	$p^2c^2 = E_k(E_k + 2m_0c^2)$; $E^2 - p^2c^2 = m_0c^4$	
11	Закон взаимосвязи массы и энергии	$E = mc^2$ $\Delta E = c^2 \Delta m$	

Методические указания

При рассмотрении элементов специальной теории относительности рассматриваются только инерциальные системы отсчета (ИСО). Во всех задачах принимается, что оси y, y' и z, z' сонаправлены, а подвижная система отсчета K' движется относительно общей оси x, x'.

Абсолютной скоростью тела в СТО называют скорость тела V относительно неподвижной системы координат – K; V' – скорость тела относительно подвижной системы координат – K' называют относительной скоростью, а скорость движения системы K' относительно системы K называют переносной – V_0.

Примеры решения задач

Пример 6.1. Стержень пролетает с постоянной скоростью мимо метки, неподвижной в системе отсчета K. Время пролета $\Delta t = 20$ нс в K-системе. В системе отсчета, связанной со стержнем, метка движется вдоль него в течение $\Delta t' = 25$ нс. Найти собственную длину стержня.

Дано:	*Решение.*
$\Delta t = 20$ нс $\Delta t' = 25$ нс	По определению собственной длиной стержня называется длина стержня, измеренная в системе
$l_0 - ?$	отсчета, связанной со стержнем.

Если наблюдатель находится в системе отсчета, связанной со стержнем, то для расчета собственной длины необходимо знать время движения системы, в которой находится стержень, и ее скорость движения, т. е. $l_0 = Vt'$. А чтобы найти скорость V, необходимо знать собственное время движения стержня (по условию задачи это – Δt) и время движения неподвижной системы отсчета (это – $\Delta t'$). Тогда из соотношения $\Delta t' = \dfrac{\Delta t}{\sqrt{1-\beta^2}}$ найдем скорость V и получим ответ на вопрос задачи.

Из соотношения $\Delta t' = \dfrac{\Delta t}{\sqrt{1-\beta^2}}$ получаем

$$\frac{V^2}{c^2} = 1 - \left(\frac{\Delta t}{\Delta t'}\right)^2; \; V = c\sqrt{1 - \left(\frac{\Delta t}{\Delta t'}\right)^2}.$$

Тогда $l_0 = V\Delta t' = c\Delta t'\sqrt{1 - \left(\dfrac{\Delta t}{\Delta t'}\right)^2}$.

Подставляя числовые данные, получим: $l_0 = 4{,}5$ м.

Ответ: $l_0 = 4{,}5$ м.

Пример 6.2. Электрон с массой покоя m_0 начинает двигаться под действием постоянной силы F. Как будут изменяться со временем его скорость и кинетическая энергия?

Дано:	*Решение.*
m_0, F	Скорость можно найти из выражения для реля-
$V - ?$ $E_k - ?$	тивистского импульса. А релятивистский импульс – из основного закона релятивистской динамики материальной точки.

Кинетическую энергию электрона найдем из релятивистского выражения для кинетической энергии.

По определению $p = mV$, где m – релятивистская масса. Отсюда $V = \dfrac{p}{m}$. Из основного уравнения релятивистской динамики материальной точки следует: $dp = F \cdot dt$. Интегрируя это выражение при $F = \text{const}$, получим $p = F \cdot t$.

Тогда
$$V=\frac{Ft\sqrt{1-V^2/c^2}}{m_0}=\frac{Ft\sqrt{1-p^2/c^2m^2}}{m_0}.$$

Преобразуем выражение, стоящее под знаком радикала, умножив и разделив его на c^2:
$$1-\left(\frac{p}{mc}\right)^2=\frac{m^2c^4-p^2c^2}{m^2c^4}.$$

Из соотношения между полной энергией и импульсом частицы:
$$m^2c^4-p^2c^2=m_0^2c^4.$$

Следовательно $\sqrt{1-\left(\dfrac{p}{cm}\right)^2}=\dfrac{m_0c}{\sqrt{m_0^2c^2+p^2}}.$

Подставив приведенные формулы в выражение скорости, получим
$$V=\frac{Ftc}{\sqrt{m_0c^2+F^2t^2}}.$$

По определению кинетическая энергия:
$$E_k=E-E_0=m_0c^2\left(\frac{1}{\sqrt{1-V^2/c^2}}-1\right).$$

Подставив значение скорости V, получим
$$E_k=m_0c^2\left(\frac{\sqrt{m_0c^2+F^2t^2}}{m_0c}-1\right).$$

Ответ: $V=\dfrac{Ftc}{\sqrt{m_0c^2+F^2t^2}}$, $E_k=m_0c^2\left(\dfrac{\sqrt{m_0c^2+F^2t^2}}{m_0c}-1\right).$

Пример 6.3. Частица с массой покоя m_0, движущаяся со скоростью $V=0{,}8\cdot c$, испытывает неупругое столкновение с покоящейся частицей равной массы. Найти массу покоя образовавшейся частицы.

Дано:	*Решение.*
$m_{01}=m_{02}=m_0$ $V_1=0{,}8$ с $V_2=0$	Массу покоя образовавшейся частицы определим из взаимной связи массы и энергии, а полную энергию образовавшейся частицы – из закона сохранения энергии. Еще необходимо воспользоваться законом сохранения импульса.
m'_0 – ?	

Запишем законы сохранения энергии и проекции импульса:

$$E_1 + E_2 = E', p_{1x} + p_{2x} = p'_x.$$

Используя релятивистские выражения энергии и импульса, получим:

$$\begin{cases} m_0c^2\left(\dfrac{1}{\sqrt{1-V_1^2/c^2}}+1\right)=\dfrac{m_0'c^2}{\sqrt{1-V^2/c^2}}, \\ \dfrac{m_0V_1}{\sqrt{1-V_1^2/c^2}}+0=\dfrac{m_0'V}{\sqrt{1-V^2/c^2}}. \end{cases}$$

Подставив в приведенные уравнения значение $V_1 = 0{,}8c$, получим:

$$\begin{cases} 8m_0c^2=\dfrac{3m_0'c^2}{\sqrt{1-V^2/c^2}}, \\ 4m_0c^2=\dfrac{3m_0'V}{\sqrt{1-V^2/c^2}}. \end{cases}$$

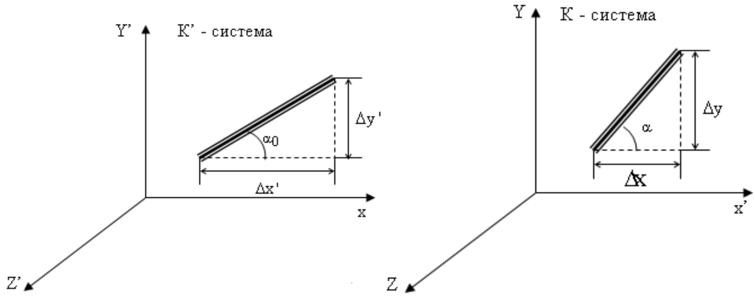
Поделим верхнее уравнение на нижнее, получим: $2c = c^2 / V$.

Отсюда $V = c / 2$. Подставив это значение в нижнее уравнение, получим $4m_0=\dfrac{3m_0'}{\sqrt{3}}$. Откуда $m_0'=\dfrac{\sqrt{3}}{4m_0}$.

Ответ: $m_0'=\dfrac{\sqrt{3}}{4m_0}$.

Пример 6.4. В лабораторной системе отсчета K движется стержень со скоростью $V = 0{,}8c$. По измерениям, произведенным в системе K', его длина оказалась $l = 10$ м, а угол α, который он составляет с осью x, 30°. Определить собственную длину l_0 стержня в K-системе, связанной со стержнем, и угол α_0, который он составляет с осью x'.

Дано:	*Решение.*
$V = 0{,}8c$ $\alpha = 30°$ $l = 10$ м	Пусть в K-системе стержень лежит в плоскости XOY, а в K' – в плоскости $X'OY'$.
l_0 – ? α_0 – ?	Тогда из рисунка видно, что $\mathrm{tg}\,\alpha=\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$, а $\mathrm{tg}\,\alpha_0=\dfrac{\Delta y'}{\Delta x'}$ и $l=\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}$, $l_0=\sqrt{\Delta x'^2+\Delta y'^2}$.



При переходе от системы K' к системе K размеры стержня в направлении оси Y не изменятся, а в направлении оси X будет наблюдаться лоренцево сокращение: $\Delta y = \Delta y'$; $\Delta x = \Delta x'\sqrt{1 - V^2/c^2}$. Тогда собственная длина стержня выразится соотношением:

$$l_0 = \sqrt{(\Delta y)^2 + \left(\Delta x\sqrt{1 - V^2/c^2}\right)^2} = \frac{\sqrt{l^2 - \beta^2(\Delta y)^2}}{\sqrt{1-\beta^2}}.$$

Но $\Delta y = l \sin\alpha$ (из рисунка), тогда $l_0 = l\,\dfrac{\sqrt{1 - \beta^2 \sin^2\alpha}}{\sqrt{1-\beta^2}}$.

Из равенства $\operatorname{tg}\alpha_0 = \dfrac{\Delta y'}{\Delta x'} = \operatorname{tg}\alpha\sqrt{1-\beta^2}$.

Отсюда $\alpha_0 = \operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg}\alpha\sqrt{1-\beta^2}\right)$.

Расчет: $l_0 = 15{,}3$ м; $\alpha_0 = 19{,}1°$.

Ответ: $l_0 = 15{,}3$ м; $\alpha_0 = 19{,}1°$.

Задачи для аудиторной и домашней работы

Задача 6.1. При какой скорости движения масса движущегося электрона вдвое больше массы покоя?

Задача 6.2. Фотонная ракета движется относительно Земли со скоростью $V = 0{,}6$ с. Во сколько раз замедляется ход времени в ракете с точки зрения земного наблюдателя?

Задача 6.3. Космический корабль летит со скоростью $V = 0{,}8c$ (c – скорость света в вакууме) в системе отсчета, связанной с некоторой планетой. Один из космонавтов медленно поворачивает метровый стержень из положения 1, перпендикулярного направлению движения корабля, в положение 2, параллельное направлению движения. Какова длина этого стержня с точки зрения другого космонавта?

Задача 6.4. Мюоны, рождаясь в верхних слоях атмосферы, при скорости $V = 0{,}995c$ пролетают до распада $L = 6$ км. Определите: 1) собственную длину пути, пройденную ими до распада; 2) время жизни мюона для наблюдателя на Земле; 3) собственное время жизни мюона.

Задача 6.5. Какую скорость должно иметь движущееся тело, чтобы его продольные размеры уменьшились в два раза?

Задача 6.6. Электрон движется со скоростью $V = 0{,}6c$. Определить релятивистский импульс электрона.

Задача 6.7. Вычислить энергию покоя: 1) электрона; 2) протона; 3) α-частицы. Ответ выразить в Дж и МэВ.

Задача 6.8. Кинетическая энергия электрона равна $W_k = 10$ МэВ. Во сколько раз его релятивистская масса больше массы покоя?

Задача 6.9. Солнце излучает ежеминутно энергию 6,5 кВт · ч. Считая излучение Солнца постоянным, найти, за какое время масса Солнца уменьшится в два раза [9].

Задача 6.10. Частица движется со скоростью $V = 0{,}5c$. Во сколько раз релятивистская масса частицы больше массы покоя?

Задача 6.11. Заряженная частица с массой покоя m_0 движется в однородном магнитном поле по окружности радиусом R равномерно со скоростью V. Найти релятивистское выражение модуля силы, действующей на частицу.

Задача 6.12. Электрон начинает движение в однородном электрическом поле с напряженностью $4 \cdot 10^6$ В/м. Найти скорость электрона через 10 нс после начала движения.

Самостоятельная аудиторная работа

Вариант 6.1

1. Какую скорость должно иметь движущееся тело, чтобы его продольные размеры уменьшились в 2 раза?
2. Собственное время жизни пиона $25 \cdot 10^{-3}$ с. Какое расстояние пройдет эта частица за время своей жизни при скорости движения $V = 0{,}8c$.

Вариант 6.2

1. При какой скорости частицы ее релятивистский импульс в 3 раза больше ньютоновского импульса?
2. Собственное время жизни некоторой нестабильной частицы $\Delta t_0 = 10$ нс. Найти путь, который пройдет эта частица до распада в лабораторной системе отсчета, где ее время жизни $\Delta t = 20$ нс [6].

Вариант 6.3

1. При какой скорости масса электрона увеличится в n раз?
2. Определить, какую ускоряющую разность потенциалов должен пройти протон, чтобы его скорость стала равной $0{,}9c$.

Вариант 6.4

1. Электрон летит со скоростью $V = 0{,}8c$. Определить кинетическую энергию электрона в мегаэлектрон-вольтах.
2. Мюоны, распадаясь в верхних слоях атмосферы, пролетают до распада $l = 6{,}0$ км при скорости $V = 0{,}995c$. Найти собственное время жизни этого мюона.

Вариант 6.5

1. Определить релятивистский импульс p и кинетическую энергию протона, движущегося со скоростью $V = 0{,}75c$.
2. Собственное время жизни мюонов 2 мкс. Какой путь они пройдут, с их точки зрения, при скорости $V = 0{,}9c$?

Вариант 6.6

1. Определить релятивистский импульс протона, если скорость его движения $V = 0{,}8c$.
2. Мюоны, распадаясь в верхних слоях атмосферы, пролетают до распада $l = 6{,}0$ км при скорости $V = 0{,}995c$. Найти собственную длину пути, пройденного мюоном до распада.

Практическое занятие 7
КОЛЛОКВИУМ ПО РАЗДЕЛУ «МЕХАНИКА»

Коллоквиум (лат. *colloquium* – разговор, беседа) – форма проверки и оценивания знаний учащихся в системе образования, преимущественно в вузах.

Коллоквиум представляет собой промежуточный мини-экзамен по изученному материалу. Он проводится один раз в семестр.

Цель коллоквиума – оценить текущий уровень знаний студентов. За коллоквиум студент получает максимальное количество рейтинговых баллов (РБ) 20. Коллоквиум оценивается значительно выше, чем отдельно взятое занятие.

Коллоквиум проводится по билетам, в которых содержится 10 вопросов.

Критерии оценки:

- 0 РБ выставляется студенту, правильно выполнившему <30 % заданий билета;
- 1–2 РБ выставляется студенту, правильно выполнившему 30–39 % заданий билета;
- 3–5 РБ выставляется студенту, правильно выполнившему 40–49 % заданий билета;
- 6–8 РБ выставляется студенту, правильно выполнившему 50–59 % заданий билета;
- 9–11 РБ выставляется студенту, правильно выполнившему 60–69 % заданий билета;
- 12–14 РБ выставляется студенту, правильно выполнившему 70–79 % заданий билета;
- 15–17 РБ выставляется студенту, правильно выполнившему 80–89 % заданий билета;
- 18–20 РБ выставляется студенту, правильно выполнившему 90–100 % заданий билета.

Практическое занятие 8
ПОДГОТОВКА К ИТОГОВОМУ ТЕСТИРОВАНИЮ

Результатом освоения студентом теоретического материала является итоговое тестирование, которое проводится по расписанию учебного семестра.

Критерии и нормы оценки

Семестр	Форма проведения промежуточной аттестации	Критерии и нормы оценки	
1	Экзамен (по накопительному рейтингу)	«Отлично»	Студент набрал 85–100 баллов по итогу изучения дисциплины в семестре
		«Хорошо»	Студент набрал 70–84 баллов по итогу изучения дисциплины в семестре
		«Удовлетворительно»	Студент набрал 55–69 баллов по итогу изучения дисциплины в семестре
		«Неудовлетворительно»	Студент набрал 0–54 баллов по итогу изучения дисциплины в семестре

Итоговый тест состоит из 50 заданий. В итоговом тесте имеются задания разных форм:
– с выбором одного верного ответа;
– с выбором нескольких верных ответов;
– на упорядочение ответов;
– на соответствие понятий;
– с открытой формой ответа.

Структура теста

1. Определения физических величин, формулировки законов и теорем – 10 заданий.
2. Единицы измерения физических величин – 10 заданий.
3. Формулы – 10 заданий.

4. Графические задачи – 10 заданий.
5. Расчетные задачи – 10 заданий.

Максимальный балл за итоговый тест – 100 баллов.

При подготовке к итоговому тестированию студенту необходимо самостоятельно повторить теоретический материал изучаемого курса, основные методы расчета физических величин, применяемых при решении задач этого курса, приемы решения графических задач, применяемые для ускорения решения. Для самопроверки подготовленности к итоговому тестированию студенту предлагается пройти тест-тренинг. Результаты прохождения студентами примерного теста обсуждаются с преподавателем, проблемные задания разбираются.

ТЕСТ-ТРЕНИНГ

Задание 1. Определения, формулировки

Мгновенная скорость тела – это:

1) скалярная физическая величина, которая находится как первая производная пути по времени, измеряется в м/с;
2) векторная физическая величина, равная первой производной радиус-вектора по времени, измеряется в м/с, направлена по касательной к данной точке траектории в сторону движения;
3) векторная физическая величина, равная отношению радиус-вектора ко времени, измеряется в м/с, направлена по радиус-вектору;
4) векторная физическая величина, равная отношению приращения радиус-вектора к промежутку времени, измеряется в м/с, направлена по приращению радиус-вектора $\Delta\vec{r}$.

Задание 2. Определения, формулировки

Первый закон Ньютона гласит:

1) ускорение, приобретаемое материальной точкой (телом), пропорционально вызывающей его силе, совпадает с нею по направлению и обратно пропорционально массе материальной точки (тела);
2) между любыми двумя материальными точками действует сила взаимного притяжения, прямо пропорциональная произведению масс этих точек и обратно пропорциональная квадрату расстояния между ними;
3) всякая материальная точка (тело) сохраняет состояние покоя или равномерного прямолинейного движения до тех пор, пока воздействие со стороны других тел не заставит ее изменить это состояние;
4) всякое действие материальных точек (тел) друг на друга носит характер взаимодействия; силы, с которыми действуют друг на друга материальные точки, всегда равны по модулю, противоположно направлены и действуют вдоль прямой, соединяющей эти точки.

Задание 3. Определения, формулировки

Теорема Штейнера гласит:

1) момент инерции тела J относительно любой оси вращения равен сумме момента его инерции J_c относительно параллельной оси, проходящей через центр масс тела, и произведения массы m тела на квадрат расстояния a между осями;
2) момент инерции тела J относительно любой оси вращения равен сумме момента его инерции J_c относительно параллельной оси, проходящей через центр масс тела, и произведения массы m тела на расстояние d между осями;
3) момент инерции тела J относительно любой оси вращения равен разности момента его инерции J_c относительно параллельной оси, проходящей через центр масс тела, и произведения массы m тела на квадрат расстояния d между осями;
4) момент инерции тела J относительно оси, проходящей через центр масс C тела, равен сумме момента инерции относительно произвольной параллельной оси и произведения массы m тела на квадрат расстояния d между осями.

Задание 4. Определения, формулировки

Принцип относительности Эйнштейна гласит:

1) уравнения, выражающие законы природы, инвариантны по отношению к преобразованиям Лоренца;
2) все законы природы не инвариантны по отношению к переходу от одной инерциальной системы отсчета к другой;
3) законы динамики одинаковы во всех инерциальных системах отсчета;
4) только законы механики инвариантны по отношению к переходу от одной инерциальной системы отсчета к другой.

Задание 5. Формулы

Кинетическая энергия вращательного движения твердого тела определяется соотношением:

1) $E_к = \dfrac{mV_c^2}{2}$; 2) $E_к = \dfrac{mV_c^2}{2} + \dfrac{I_z\omega^2}{2}$; 3) $E_к \dfrac{I_z\omega^2}{2}$; 4) $E_к = \dfrac{I_z\varepsilon^2}{2}$.

Задание 6. На соответствие понятий

Соответствие между физическими величинами и формулами, их выражающими:

1) момент инерции полого тонкостенного цилиндра относительно оси симметрии;
2) момент инерции сплошного цилиндра относительно оси симметрии;
3) момент инерции прямого тонкого стержня относительно оси, перпендикулярной стержню и проходящей через его центр;
4) момент инерции шара относительно оси, проходящей через центр масс.

1) $\frac{1}{3}ml^2$; 2) $\frac{1}{3}mR^2$; 3) $\frac{2}{5}mR^2$; 4) $\frac{1}{2}mR^2$; 5) mR^2; 6) $\frac{1}{12}ml^2$.

Задание 7. Единицы измерения

Единица измерения момента импульса L в системе единиц СИ:

1) кг · м/с; 2) кг · м²/с²; 3) кг · м²/с; 4) кг · м/с².

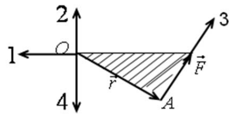
Задание 8. Единицы измерения

Единица измерения выражения, определяемого формулой $M_z \cdot d\varphi$:

1) Вт; 2) Н · м; 3) Дж; 4) Н/м.

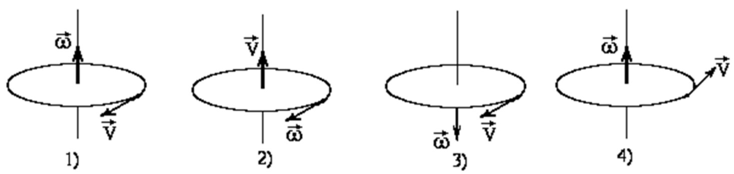
Задание 9. Направление вектора

Выбрать верное направление вектора момента силы:



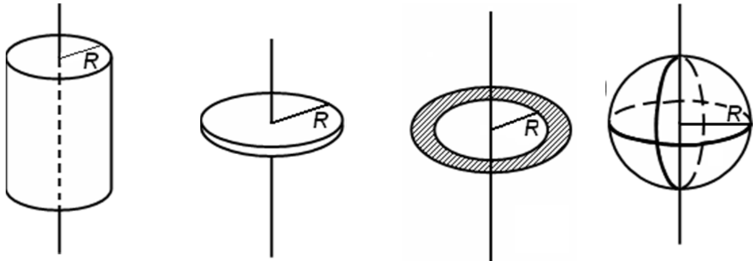
Задание 10. Направление вектора

Выбрать рисунок, указывающий верное направление векторов линейной скорости $\vec{V}$ и угловой скорости $\vec{\omega}$ материальной точки A при равномерном ее вращении по окружности по часовой стрелке.



Задание 11. Качественная задача

Минимальным моментом инерции *J* обладает тело, изображенное на рисунке:



1) цилиндр; 2) диск; 3) обруч; 4) шар.

Задание 12. Качественная задача

Горизонтальный диск вращается вокруг вертикальной оси, проходящей через его центр. Человек, стоящий на краю диска, начинает равномерно перемещаться к его центру. Угловая скорость вращения диска:

1) не будет изменяться;
2) будет увеличиваться;
3) будет уменьшаться;
4) не зависит от движения человека.

Задание 13. Формулы

Механическая работа в общем случае рассчитывается по формуле:

1) $A = FS\cos\alpha$; 2) $dA = \vec{F}d\vec{r}$; 3) $A = \int_1^2 F_S dS$; 4) $A = \int_1^2 F dS\cos\alpha$.

Задание 14. Формулы

Связь между угловой скоростью тела и частотой вращения тела выражается формулой:

1) $\omega = 2\pi\nu$; 2) $\nu = \dfrac{2\pi}{\omega}$; 3) $\nu = 2\pi\omega$; 4) $\omega = \dfrac{2\pi}{\nu}$.

Задание 15. Единицы измерения

Единица измерения механической энергии в системе единиц СИ:

1) Вт · с; 2) Вт; 3) Дж; 4) Н · м.

Задание 16. Единицы измерения

Единица измерения нормальной составляющей ускорения:
1) м/с^2; 2) м/с; 3) рад/с^2; 4) рад/с

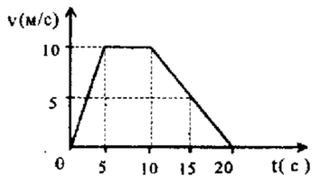
Задание 17. Направление вектора

Импульс $\vec{p}$ тела направлен:
1) по радиус-вектору $\vec{r}$;
2) по приращению радиус-вектора $\Delta\vec{r}$;
3) по вектору скорости $\vec{V}$;
4) по вектору ускорения $\vec{a}$.

Задание 18. Качественная задача

Определить тип движения, если $a_\tau = \text{const}$, $a_n \neq 0$.
1) равномерное криволинейное;
2) криволинейное движение с переменным ускорением;
3) криволинейное равнопеременное движение;
4) равномерное движение по окружности.

Задание 19. Качественная задача



Дан график зависимости скорости тела как функции от времени для прямолинейного движения. В промежутке времени от 5 до 20 с тело прошло путь:
1) 50 м; 2) 125 м;
3) 100 м/с; 4) 75 м.

Задание 20. Единицы измерения

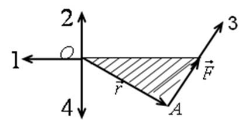
Единица измерения момента импульса L в системе единиц СИ:
1) кг · м/с; 2) кг · м^2/с^2; 3) кг · м^2/с; 4) кг · м/с^2.

Задание 21. Единицы измерения

Единица измерения выражения, определяемого формулой $M_z \cdot d\varphi$:
1) Вт; 2) Н · м; 3) Дж; 4) Н/м.

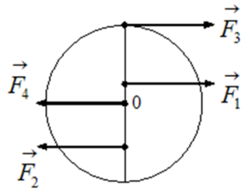
Задание 22. Определение направления вектора

Выбрать верное направление вектора момента силы.



Задание 23. Качественная задача

Диск может вращаться вокруг оси, перпендикулярной плоскости диска и проходящей через его центр (т. О). К нему прикладывают одну из сил ($\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$, $\vec{F}_3$ или $\vec{F}_4$), лежащих в плоскости диска и равных по модулю. Определить величину углового ускорения, сообщенного диску силой $\vec{F}_4$.



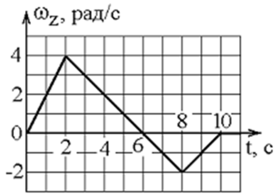
Задание 24. Качественная задача

Горизонтальный диск вращается вокруг вертикальной оси, проходящей через его центр. Человек, стоящий на краю диска, начинает равномерно перемещаться к его центру. Угловая скорость вращения диска:

1) не будет изменяться;
2) будет увеличиваться;
3) будет уменьшаться;
4) не зависит от движения человека.

Задание 25. Расчетная задача

Твердое тело начинает вращаться вокруг оси Z с угловой скоростью, проекция которой изменяется со временем, как показано на графике.



Определить величину углового ускорения тела в промежутке времени от 0 до 2 с.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Порядок организации балльно-рейтинговой системы оценки успеваемости студентов : утвержден решением ученого совета № 28 от 28 апреля 2022 года / Тольяттинский государственный университет. – Тольятти, 2022. – 14 с. – URL: old.tltsu.ru/upravlenie/educational-methodical-management/regulatory-documents-of-educational-process/28_Порядок_БРС.pdf (дата обращения: 10.10.2023).
2. Козел, С. М. Физика. 10–11 классы. Пособие для учащихся и абитуриентов. В 2 частях. Часть 1. Механика. Механические колебания и волны. Молекулярная физика и термодинамика / С. М. Козел. – Москва : Мнемозина, 2010. – 286, [1] с. – ISBN 978-5-346-01629-8.
3. Савельев, И. В. Курс общей физики. Учебное пособие. Том 1. Механика. Молекулярная физика / И. В. Савельев. – Изд. 16-е, стер. – Санкт-Петербург [и др.] : Лань, 2020. – 432 с. – (Классическая учебная литература по физике). – URL: e.lanbook.com/book/142380 (дата обращения: 10.10.2023). – Режим доступа: по подписке. – ISBN 978-5-8114-5539-3.
4. Савельев, И. В. Сборник вопросов и задач по общей физике / И. В. Савельев. – Изд. 11-е, стер. – Санкт-Петербург : Лань, 2023. – 288 с. – (Классическая учебная литература по физике). – URL: e.lanbook.com/book/297674 (дата обращения: 10.10.2023). – Режим доступа: по подписке. – ISBN 978-5-507-46106-6.
5. Открытая физика. Версия 2.6. Часть 2 / С. М. Козел, В. А. Орлов, А. Ф. Кавтрев [и др.]. – Москва : Новый диск, 2005. – 1 CD. – Загл. с титул. экрана. – ISBN 4607108472836.
6. Иродов, И. Е. Задачи по общей физике / И. Е. Иродов. – Изд. 19-е, стер. – Санкт-Петербург [и др.] : Лань, 2022. – 416 с. – (Классическая учебная литература по физике). – URL: e.lanbook.com/book/329834 (дата обращения: 10.10.2023). – Режим доступа: по подписке. – ISBN 978-5-507-45369-6.
7. Трофимова, Т. И. Курс физики : учеб. пособие для инженерно-технических специальностей вузов / Т. И. Трофимова. – 20-е изд., стер. – Москва : Академия, 2014. – 557, [1] с. – (Высшее профессиональное образование). – ISBN 978-5-4468-0627-0.

8. Чертов, А. Г. Задачник по физике : [учеб. пособие для студентов втузов] / А. Г.Чертов, А. А. Воробьев. – Москва : Интеграл-Пресс, 1997. – 543, [1] с. – ISBN 5-89602-001-5.
9. Волькенштейн, В. С. Сборник задач по общему курсу физики : для студентов технических вузов / В. С. Волькенштейн. – Изд. 3-е, испр. и доп. – Санкт-Петербург : Книжный мир, 2006. – 326 с. – ISBN 5-86457-2357-7.
10. Трофимова, Т. И. Сборник задач по курсу физики : учеб. пособие для студентов втузов / Т. И. Трофимова. – 2-е изд., стер. – Москва : Высшая школа, 1996. – 302, [1] с. – ISBN 5-06-003395-3.
11. Механика. Молекулярная физика и термодинамика : электрон. учеб.-метод. пособие / С. Н. Потемкина, В. А. Сарафанова, Н. В. Чиркунова [и др.] ; Тольяттинский государственный университет. – Тольятти : Издательство ТГУ, 2021. – 210 с. – URL: dspace.tltsu.ru/handle/123456789/20664 (дата обращения: 10.10.2023). – ISBN 978-5-8259-1572-2.
12. Физика : рабочая программа, метод. указания, задачи и варианты контрольных работ для студентов-заочников / Тольяттинский государственный университет ; [сост.: А. А. Викарчук, В. А. Сарафанова ; науч. ред. Д. Л. Мерсон]. – Тольятти : ТГУ, 2003. – 176 с. – ISBN 5-8259-0050-0.

1. Математические формулы

$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha \cdot \cos\beta \pm \cos\alpha \cdot \sin\beta$;

$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha \cdot \cos\alpha$;

$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta \mp \sin\alpha \cdot \sin\beta$;

$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$;

$\frac{d}{dx}\left(x^n\right) = nx^{n-1}$; $\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{1}{x^2}$; $\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x^n}\right) = -\frac{n}{x^{n+1}}$;

$\frac{d}{dx}\left(e^x\right) = e^x$; $\frac{d}{dx}(\ln x) = \frac{1}{x}$; $\frac{d}{dx}(\mathrm{tg}\, x) = \frac{1}{\cos^2 x}$;

$\frac{d}{dx}(\sin x) = \cos x$; $\frac{d}{dx}(\cos x) = -\sin x$; $\int u dv = uv - \int v du$;

$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} \quad (n \neq 1)$; $\int \frac{dx}{x} = \ln x$; $\int \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x}$;

$\int \sin x dx = -\cos x$; $\int \cos x dx = \sin x$; $\int e^x dx = e^x$;

$\int_0^\infty x^n e^{-x} dx = n!$; $\int_0^\infty x^n e^{-ax} dx = \frac{n!}{a^{n+1}}$; $\int_0^\infty x e^{-ax^2} dx = \frac{1}{2a}$;

$\int_0^\infty x^3 e^{-ax^2} dx = \frac{1}{2}a^{-2}$; $\int_0^\infty \frac{x dx}{e^x - 1} = \frac{\pi^2}{6}$; $\int_0^\infty \frac{x^3 dx}{e^x - 1} = \frac{\pi^4}{15}$.

2. Десятичные приставки к названиям единиц

Т – тера (10^{12})	д – деци (10^{-1})	н – нано (10^{-9})
Г – гига (10^{9})	с – санти (10^{-2})	п – пико (10^{-12})
М – мега (10^{6})	м – милли (10^{-3})	ф – фемто (10^{-15})
к – кило (10^{3})	мк – микро (10^{-6})	а – атто (10^{-18})

3. Внесистемные величины

1 час = 3600 с   1 сут = 86 400 с   1 год = 365,25 сут = $3{,}16 \cdot 10^7$ с

1° = $1{,}75 \cdot 10^{-2}$ рад   1′ = $2{,}91 \cdot 10^{-4}$ рад   1″ = $4{,}85 \cdot 10^{-6}$ рад

1 эВ = $1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Дж   1 мм рт. ст. = 133,3 Па

4. Основные физические постоянные

Атомная единица массы	1 а.е.м. = $1{,}66 \cdot 10^{-27}$ кг
Гравитационная постоянная	$G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ м³/(кг · с²)
Комптоновская длина волны электрона	$\lambda_c = 2{,}43 \cdot 10^{-12}$ м
Магнетон Бора	$\mu_B = 9{,}27 \cdot 10^{-24}$ Дж/Тл
Магнитная постоянная	$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ Гн/м
Масса покоя нейтрона	$m_n = 1{,}675 \cdot 10^{-27}$ кг
Масса покоя протона	$m_p = 1{,}672 \cdot 10^{-27}$ кг
Масса покоя электрона	$m_e = 9{,}11 \cdot 10^{-31}$ кг
Молярная газовая постоянная	$R = 8{,}31$ Дж/(К · моль)
Нормальное ускорение свободного падения	$g = 9{,}81$ м/с²
Первый боровский радиус	$a_0 = 5{,}29 \cdot 10^{-11}$ м
Постоянная Авогадро	$N_A = 6{,}02 \cdot 10^{23}$ моль⁻¹
Постоянная Больцмана	$k = 1{,}38 \cdot 10^{-23}$ Дж/К
Постоянная Вина	$b = 2{,}90 \cdot 10^{-3}$ м · К
Постоянная Планка	$h = 6{,}63 \cdot 10^{-34}$ Дж · с $\hbar = \frac{h}{2\pi} = 1{,}05 \cdot 10^{-34}$ Дж · с
Постоянная Ридберга	$R = R' \cdot c = 3{,}29 \cdot 10^{15}$ с⁻¹ $R' = 1{,}10 \cdot 10^{7}$ м⁻¹
Постоянная Стефана – Больцмана	$\sigma = 5{,}67 \cdot 10^{-8}$ Вт/(м² · К⁴)
Скорость света в вакууме	$c = 3{,}00 \cdot 10^{8}$ м/с
Удельный заряд электрона	$e/m_e = 1{,}76 \cdot 10^{11}$ Кл/кг
Электрическая постоянная	$\varepsilon_0 = 8{,}85 \cdot 10^{-12}$ Ф/м $k = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} = 9 \cdot 10^{9}$ м/Ф
Элементарный заряд	$e = 1{,}60 \cdot 10^{-19}$ Кл

5. Астрономические величины

Радиус Земли	$6{,}37 \cdot 10^6$ м
Масса Земли	$5{,}98 \cdot 10^{24}$ кг
Радиус Солнца	$6{,}95 \cdot 10^8$ м
Масса Солнца	$1{,}98 \cdot 10^{30}$ кг
Радиус Луны	$1{,}74 \cdot 10^6$ м
Масса Луны	$7{,}33 \cdot 10^{22}$ кг
Расстояние от центра Земли до центра Солнца	$1{,}49 \cdot 10^{11}$ м
Расстояние от центра Земли до центра Луны	$3{,}84 \cdot 10^8$ м

6. Плотность твердых тел ρ (кг/м^3)

Алюминий	$2{,}70 \cdot 10^3$
Вольфрам	$19{,}3 \cdot 10^3$
Железо (чугун, сталь)	$7{,}87 \cdot 10^3$
Золото	$19{,}3 \cdot 10^3$
Медь	$8{,}93 \cdot 10^3$
Никель	$8{,}80 \cdot 10^3$
Платина	$21{,}5 \cdot 10^3$
Свинец	$11{,}3 \cdot 10^3$
Серебро	$10{,}5 \cdot 10^3$
Уран	$18{,}7 \cdot 10^3$