МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Тольяттинский государственный университет»

Институт общеинженерной подготовки
(наименование института полностью)

Кафедра «Высшая математика и математическое образование»
(наименование)

44.04.01 Педагогическое образование
(код и наименование направления подготовки)

Математическое образование
(направленность (профиль))

ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА
(МАГИСТЕРСКАЯ ДИССЕРТАЦИЯ)

на тему «Дифференцированные задания по алгебре и началам математического анализа как средство индивидуализации обучения старшеклассников»

Обучающийся А.Ю. Смирнова
(Инициалы Фамилия) (личная подпись)

Научный руководитель канд. пед. наук, доцент Н.А. Демченкова
(ученая степень (при наличии), ученое звание (при наличии), Инициалы Фамилия)

Тольятти 2024

Оглавление

Введение

Актуальность и научная значимость исследования. Система образования в России развивается, опираясь на принципы системно-деятельностного подхода. Данный подход предполагает, что организация учебного процесса происходит с учетом индивидуальных особенностей обучающихся, а также развивает у обучающихся способность к непрерывному самообразованию.

Федеральный государственный образовательный стандарт (ФГОС) призван обеспечить «построение образовательной деятельности с учетом индивидуальных, возрастных, психологических, физиологических особенностей и здоровья обучающихся» [52, С. 3].

В условиях введения Федеральных государственных образовательных стандартов общего образования «эффективным механизмом обеспечения достижения каждым обучающимся планируемых результатов освоения основных образовательных программ становится индивидуализация обучения» [4, С. 123].

Результатом освоения образовательной программы является готовность учащихся к «самостоятельному планированию и осуществлению учебной деятельности» [52, С. 4]., так же к «участию в построении индивидуальной образовательной траектории» [52, С. 4].

Индивидуализация обучения – это «организация учебного процесса, при которой выбор способов, приемов, темпа обучения учитывает индивидуальные различия учащихся, уровень развития их способностей к учению» [34, С. 456].

Эффективным средством индивидуализации обучения алгебре и началам математического анализа являются дифференцированные задания, они предоставляют возможность учителям адаптировать учебный материал к индивидуальным запросам обучающихся, что способствует более глубокому и эффективному усвоению математических знаний. Эти задания позволяют учащимся выбирать уровень сложности и темп обучения, что, в свою очередь, мотивирует их к более активному участию в образовательном процессе.

Проблема индивидуализации обучения математике привлекает внимание авторов научных исследований.

В диссертации А.А. Прокофьева [37] разработана методика обучения математике, «способствующая повышению эффективности педагогического процесса, основанная на индивидуализации, дифференциации, определяющая современное качество образования и гарантирующая успешность обучения в школе» [37, С. 5].

В.М. Гольховой [8] в своей работе разработал «методику построения индивидуализированного дифференцированного очно-заочного обучения математике» [8, С.8].

Е.В. Рыбникова [41] в своем исследовании выявила и обосновала «комплекс педагогических условий и средств, обеспечивающих успешность дифференциации и индивидуализации процесса обучения естественно-научным предметам на основе знаний о когнитивно-стилевых особенностях школьников» [41, С.4].

В диссертации А.А. Терова [48] под индивидуализацией образования понимается «способ обеспечения каждому школьнику права и возможности на формирование собственных образовательных целей и задач, собственной образовательной траектории, придание осмысленности учебному действию за счёт возможности выбора типа действия, привнесения личных смыслов, заказа к своему обучению, видения своих учебных и образовательных перспектив» [48, С.4].

Н.В. Кузина предлагает реализовать «дифференцированное обучение, основанное на учете познавательных стилей обучающихся» [23, С. 6]. Автором разработаны «содержательный и процессуальный компоненты дифференцированного обучения математике на основе учета познавательных стилей обучающихся» [23, С. 8].

Т.П. Фисенко [54] рассматривает технологию смешанного обучения «в качестве педагогической технологии, способствующей реализацию идей индивидуализации и дифференциации при обучении математике» [54, С. 2].

В.И. Писаренко [35] подчеркивает, что «индивидуализация обучения подразумевает использование стилевого подхода в разработке и реализации учебного процесса. Сущность стилевого подхода состоит в учете стилевых особенностей обучаемых, поиске путей развития присущих им познавательных стилей, а так же расширении их стилевого репертуара» [46, С.3].

Я.В. Скибина выделяет «комплекс индивидуальных особенностей старшеклассников, подлежащих приоритетному учету и развитию на математических курсах по выбору» [44, С. 5].

Ю.Ю. Баранова дает определение индивидуализации обучения и рассматривает особенности «учащихся, которые, в первую очередь, учитываются при индивидуализации учебной работы» [4, С. 6].

Противоречие заключается в растущей потребности дифференциации и индивидуализации в образовательном процессе с одной стороны, и недостаточной разработанностью методических материалов и дифференцированных заданий как средства индивидуализации обучения старшеклассников, с другой.

Данное противоречие позволило сформулировать проблему диссертационного исследования: система дифференцированных заданий по алгебре и началам математического анализа как средство индивидуализации обучения старшеклассников.

Объект исследования: процесс обучения старшеклассников тригонометрическим уравнениям в курсе алгебры 10-11 классов общеобразовательной школы.

Предмет исследования: методика обучения тригонометрическим уравнениям в курсе алгебры 10-11 классах общеобразовательной школы.

Цель исследования – разработка методики обучения тригонометрическим уравнениям с применением системы дифференцированных заданий как средства индивидуализации обучения старшеклассников.

Гипотеза исследования заключается в разработке и внедрении системы дифференцированных заданий по теме «Тригонометрические уравнения» как средства индивидуализации обучения старшеклассников, которая повысит уровень результатов обучения математике учащихся профильного уровня.

Для достижения поставленной цели необходимо решить следующие задачи:

– рассмотреть понятия дифференцированного обучения и типологических групп учащихся;

– проанализировать понятие индивидуализации обучения математике, определить условия эффективности индивидуализации обучения математике в старших классах общеобразовательной школы;

– сформулировать методические рекомендации обучения тригонометрическим уравнениям по алгебре и началам математического анализа как средства индивидуализации обучения математике;

– разработать элективный курс по теме «Тригонометрические уравнения» для учащихся 10-11 классов профильного уровня обучения;

– разработать дифференцированные задания по теме: «Тригонометрические уравнения» и описать методику их реализации в современных условиях обучения математике;

– представить описание проведенного педагогического эксперимента.

Теоретико-методологической основой послужили теоретические основы, разработанные В.А. Гусевым [10], И.М. Осмоловской [32], [33], Ю.М. Колягиным [21], а также ключевые принципы и идеи, представленные в концепции уровневой дифференциации обучения математике, разработанной Р.А. Утеевой [51].

Базовыми для настоящего исследования послужили исследования, представленные в работах Ш.А. Алимова [1], Г.А. Атаманской [2], И.В. Глизбурга [7], Г.В. Дорофеева [12], А.П. Ершовой [15], А.Н. Колмогорова [20], А.Г. Мордковича [25], [26], Г.К. Муравина и О.В. Муравиной [28], С.М. Никольского [30], Н.А. Соколовой и др. которые разработали портал «СтатГрад» [46], а так же исследования И.В. Ященко [58].

Методы исследования: анализ психолого-педагогической, методической литературы по теме исследования; изучение и анализ состояния исследуемой проблемы в школьной практике; анализ собственного опыта работы в школе; педагогический эксперимент и обработка результатов эксперимента.

Основные этапы исследования:

– 1 этап (2022/23 уч. г.): анализ ранее выполненных исследований по теме диссертации; анализ школьных программ и учебников по математике, нормативных документов; анализ опыта работы школы по данной теме;

– 2 этап (2022/23 уч. г.): определение теоретических и методических основ исследования по теме диссертации;

– 3 этап (2023/24 уч. г.): подборка заданий для подготовки к профильному уровню ЕГЭ по математике; разработка системы дифференцированных заданий по алгебре и началам математического анализа при подготовке старшеклассников к профильному уровню ЕГЭ; разработка элективного курса по теме «Тригонометрические уравнения»;

– 4 этап (2023/24 уч. г.): оформление диссертации, корректировка ранее представленного материала, уточнение аппарата исследования, описание результатов экспериментальной работы, формулирование выводов по главам.

Опытно-экспериментальная база исследования: государственное бюджетное общеобразовательное учреждение города Москвы «Школа № 1504».

Научная новизна исследования заключается в предложенных методических рекомендациях обучения решению тригонометрическим уравнениям по алгебре как средства индивидуализации обучения старшеклассников.

Теоретическая значимость исследования заключается в предложенной методике, которая представлена в виде системы дифференцированных заданий по алгебре и началам математического анализа как средства индивидуализации обучения старшеклассников.

Практическая значимость исследования состоит в том, что система дифференцированных заданий по математике для старшеклассников, разработанная в ходе исследования, может быть использована учителями математики на практике для индивидуализации обучения своих учеников.

Достоверность и обоснованность результатов исследования гарантируются путем комбинированного использования теоретических аспектов и практических методов исследования, а также анализа педагогической практики.

Личное участие автора в организации и проведении исследования состоит в том, что автором были сформулированы методические рекомендации обучения решению тригонометрических уравнений как средство индивидуализации учащихся; представлена система дифференцированных заданий как средство индивидуализации обучения старшеклассников; разработан элективный курс по теме «Тригонометрические уравнения».

Апробация и внедрение результатов работы велись в течение всего исследования. Предложенные методические рекомендации были экспериментально проверены в период производственной практики (научно-исследовательской работы) и преддипломной практики, которые проходили на безе кафедры высшей математики и математического образования Тольяттинского государственного университета.

По теме исследования имеется две публикации [11], [45].

На защиту выносятся:

– методические рекомендации обучения тригонометрическим уравнениям по алгебре как средство индивидуализации обучения старшеклассников;

– дифференцированная система задач по теме «Тригонометрические уравнения»;

– элективный курс на тему «Тригонометрические уравнения».

Структура магистерской диссертации. Работа состоит из введения, двух глав, заключения, содержит 30 рисунков, 2 таблицы, список используемой литературы и используемых источников (64 источника). Основной текст работы изложен на 97 страницах.

Глава 1 Теоретические основы дифференцированных заданий по алгебре и началам математического анализа как средство индивидуализации обучения старшеклассников

1.1 Понятие дифференцированного обучения и типологических групп учащихся

«Ключевым аспектом развития современного школьного математического образования является ориентация на личность ученика» [11, С. 24]. В государственном образовательном стандарте приведен список «личностных характеристик выпускника («портрет выпускника школы»)» [36, С. 4], который должен достигнуть выпускник по окончании школы. Следовательно, обучение должно быть нацелено на индивидуальные потребности и особенности каждого учащегося.

Для эффективной организации учебного процесса необходимо применять индивидуализацию и дифференциацию обучения. Эти подходы способствуют созданию условий для максимального развития потенциала каждого обучающегося и формирования благоприятной образовательной атмосферы, а также помогают решать множество проблем, которые возникают в условиях классно-урочной формы обучения. «Дифференцированное обучение математике (дифференциация (от фр. differentiation, от лат. Differentia – разность, различие) – разделение, расчленение целого на нераздельные части, формы и ступени) – это создание групп обучающихся, различающихся по содержанию обучения, формам и уровню учебных требований к ним» [47, С. 161].

«Цель дифференциации в образовательном процессе заключается в формировании уникальных условий для полноценного раскрытия индивидуальных способностей, предпочтений и увлечений каждого учащегося; удовлетворение познавательных потребностей учащихся в процессе освоения учебного материала» [11, С. 24].

Вопрос внедрения дифференцированного обучения привлекает внимание специалистов в области образования и исследователей на протяжении длительного времени. Разнообразные подходы предлагают эксперты относительно определения и понимания сущности дифференцированного обучения.

И. Э. Унт [49] подразумевает дифференциацию как стратегию, которая учитывает индивидуальные особенности старшеклассников посредством их группировки на основе некоторых характеристик с целью обучения в группах. «Учащиеся группируются на основе конкретных особенностей для индивидуального обучения; в данном случае обучение часто осуществляется по различным учебным планам или программам» [49, С.53-192].

И. М. Чередов [55] представляет концепцию, которая охватывает «учебные планы и программы, а также процесс обучения, который включает в себя глубокое изучение индивидуальных особенностей учащихся, их классификацию по типологическим группам и организацию групповой работы над выполнением конкретных учебных задач, способствующих их умственному и моральному развитию» [55, С.11]. Автор подчеркивает: «дифференцированное обучение создает оптимальные условия для активной вовлеченности всех учащихся, обеспечивая продуктивное усвоение и переработку максимального объема информации» [55, С.13].

Взгляд И. М. Чередова [55] на дифференцированное обучение представляет собой более всесторонний и комплексный подход к организации учебного процесса. По его мнению, дифференциация не ограничивается простым применением различных учебных планов и программ. Автор предлагает не только учитывать индивидуальные особенности каждого ученика, но и активно использовать групповую деятельность для достижения общих образовательных целей. Этот подход позволяет более эффективно соотнести образовательный процесс с потребностями и уровнем развития каждого учащегося в рамках коллектива.

По мнению И. М. Чередова [55] процесс получения знаний – это «процесс обучения на уроке, включающий глубокий анализ индивидуальных особенностей учащихся, их классификацию по типологическим группам и организацию работы этих групп над выполнением конкретных учебных задач, способствующих их умственному и нравственному развитию» [55, С. 155].

Согласно точке зрения Г. В. Дорофеева [12], дифференциация в обучении является системой, в рамках которой «ученик, достигнув определенного минимума общеобразовательной подготовки, которая является общезначимой, и обеспечивает возможность адаптации в постоянно меняющихся условиях, получает право и гарантированную возможность акцентировать внимание на тех направлениях, которые наиболее соответствуют его склонностям» [12, С. 57].

И. М. Осмоловская [32] дает следующее определение дифференциации: «Дифференциация обучения – это организация учебного процесса, в которой учитываются индивидуально-типологические особенности личности (общие и специальные способности, уровень развития, интересы, физиологические свойства нервной системы и др.)» [32, С. 154].

Методика дифференцированного обучения, согласно данному подходу, включает в себя распределение учащихся на группы с учетом того, что для каждой группы отдельно определяется содержание образования, методы обучения и формы организации. Такой подход создает условия для максимального адаптивного воздействия на потребности и особенности каждого ученика в образовательном процессе.

В своей исследовательской работе «Теоретические основы организации учебной деятельности студентов при использовании дифференцированного подхода в обучении математике в средней школе» [51] Р. А. Утеева [51] выделяет пять форм дифференциации: внешняя, профильная, внутренняя, поисковая, непрерывная.

Для успешного достижения образовательных целей на уроках математики необходимо внедрять стратегию дифференциации на разных уровнях. Эта стратегия основывается на тщательном планировании учебных результатов, четкой формулировке базовой подготовки и создании разнообразных уровней усвоения материала. Применение дифференциации дает учащимся возможность самостоятельно регулировать уровень учебной нагрузки, выбирать сложность материала в соответствии с их индивидуальными потребностями, что способствует более эффективному процессу обучения.

В теории и методике обучения математике существуют различия и разнообразие точек зрения относительно числа уровней в системе уровневой дифференциации. Уровневая дифференциация, независимо от предложенной автором методики, предполагает разделение учащихся класса на типологические группы. «Типологическая группа – группа обучающихся, которые объединены одинаковым фактическим уровнем знаний и умений по математике и достигающие одинакового уровня их усвоения» [50, С. 88].

Элементы дидактической системы, такие как, цели, содержание, методы, формы обучения и результаты, адаптируются под потребности и способности типологической группы.

Основания для дифференциации могут включать в себя различные параметры, такие как уровень учебной подготовки, способности, интересы, стиль обучения и многие другие. «Эффективность дифференциации (индивидуализации) в обучении зависит от того, насколько удачно сформированы типологические группы школьников» [42, С. 224].

Оценка этой эффективности включает в себя адекватность основ для разделения учащихся на группы с учетом их математических способностей. Необходимо подчеркнуть: в области дидактики и методики предложено более двадцати критериев для формирования таких групп.

М. И. Башмаков [5] выделяет три уровня: базовый, основной и углубленный, основываясь на степени овладения учащимися конкретным объемом знаний.

Н. М. Рогановский [40] предлагает двухуровневую дифференциацию: первый уровень, охватывающий общекультурные знания, и второй уровень, ориентированный на более глубокое понимание материала.

Таким образом, уровневая дифференциация предполагает разделение учащихся в соответствии с их уровнем знаний, умений, навыков и других показателей. Количество уровней зависит от того, какие критерии разделения учащихся на группы автор определяет как ведущие.

Р. А. Утеева [51] при делении учащихся на типологические группы выделяет следующие оценочные признаки:

– «фактический уровень знаний и умений по предмету (теме, разделу, курсу);
– уровень их усвоения» [51, С. 45].

Модель уровневой дифференциации обучения математике Р.А. Утеевой [51] подразумевает деление класса на типологические группы: учащиеся группы А демонстрируют ясное понимание предмета, имеют большие познания в математике, умеют строить логические умозаключения в процессе решения задач; учащиеся группы В имеют достаточно хорошие познания в математике; успешно решают большинство заданий, но зачастую не способны предоставить логическое объяснение решения задачи. Учащиеся групп С и D, которые владеют удовлетворительным или ниже уровнем знаний по изучаемой теме, в нашем исследовании не принимают участия, т.к. системы задач предлагаются учащимся 10-11 классов профильного уровня обучения.

И. Э. Унт [49] предлагает формировать группы учащихся исходя из следящих параметров: «обучаемость, т.е. общие умственные способности (в том числе, креативность), а также специальные способности; учебные умения, обученность, которая состоит как из программных, так и внепрограммных знаний, умений и навыков, познавательные интересы (на фоне общей учебной мотивации)» [49, С. 53].

Фундамент дифференцированного обучения – внимательное отношение к ментальным особенностям учащихся, в том числе к таким деталям как: такие как память, внимание, воображение, мышление и образовательные способности. По причине обширного многообразия психологических особенностей учащихся возникает вопрос о том, какие из них следует приоритетно учитывать. Следует отметить, что особое внимание уделяется тем характеристикам обучающихся, которые имеют наибольшее воздействие на их учебные возможности и фиксируют итоговые достижения в обучении.

Ученые-педагоги предлагают множество классификаций этих индивидуальных особенностей, стремясь выделить ключевые аспекты, которые необходимо иметь в виду при организации образовательного процесса. Важно подчеркнуть, что подобный подход направлен на создание комфортной образовательной среды для максимально эффективного обучения, учитывая уникальные черты каждого учащегося.

Известный советский ученый Ю. К. Бабанский в своей книге «Избранные педагогические труды» [3] выделяет ряд критериев «для определения учебных возможностей обучающихся и последующего разделения их на группы:

– уровень развития психических процессов и свойств в мышлении, и, в первую очередь, умение выделять существенное в изучаемом, а также самостоятельность мышления учащихся;
– сформированность навыков и умений учебного труда и, прежде всего, умение рационально планировать учебную деятельность, осуществлять самоконтроль в учении и выполнять в должном темпе основные учебные действия;
– отношение к учению, ведущие интересы и склонности;
– идейно–нравственная воспитанность, осознание необходимости учебной дисциплины, настойчивость при выполнении учебных требований;
– работоспособность;

– образовательная подготовленность по ранее пройденному материалу».

Таким образом, критерии психологических особенностей играют ключевую роль в формировании типологических групп учащихся внутри класса, обеспечивая более персонализированный и успешный образовательный опыт для каждого ученика. Они позволяют выделить учеников с различными уровнями готовности к обучению. Понимание психологических особенностей помогает создать поддерживающую и включающую образовательную среду, где каждый ученик может чувствовать себя комфортно и успешно развиваться.

Рассмотрим критерии, которые выделяет Е С. Рабунский [38] при анализе обучающихся:

- уровень успеваемости;
- уровень познавательной самостоятельности;
- интересы (заинтересованность).

«Интересы, которые по принципу действенности можно условно подразделить на три уровня:

- нулевой уровень характеризуется отсутствием интереса к предмету, такие обучающиеся учатся, как правило, по принуждению;
- потенциальный интерес к предмету характеризуется обычно положительным отношением к учению, любознательностью, желанием и отдельными попытками преодолеть трудности в учебной деятельности;
- действенный интерес характеризуется осознанной устойчивой познавательной направленностью студента, основанной на глубокой потребности самостоятельно добывать знания, овладевать навыками, умениями» [14, С. 53].

Анализ этих особенностей позволяет выделить индивидуальные черты каждого обучающегося и адаптировать образовательный процесс, учитывая их уровень подготовки, готовность к самостоятельному обучению и интересы.

С точки зрения И. М. Осмоловской [32], дифференциация как метод включает три ключевых составляющих:

- учет индивидуальных особенностей учеников;
- группирование на основе этих особенностей;
- вариативность учебного процесса в группах.

Эти аспекты предоставляют возможность каждому преподавателю эффективно организовать обучение с участием учеников, имеющих разную успеваемость. Проведенный анализ теоретического и практического опыта, включая мировой опыт, помог автору разработать классификацию форм и видов дифференциации, а также раскрыть особенности каждой из них.

Автор рассматривает следующие критерии дифференциации:

- психофизиологические особенности личности;
- обученность;
- специальные способности;
- познавательные способности;
- интересы и склонности;
- профессиональные ориентации;
- этнокультурные особенности.

Дифференциация в образовании не только предоставляет возможность адаптировать учебный процесс к уникальным потребностям и уровням подготовки каждого учащегося, но также способствует активной вовлеченности всех учащихся в учебный процесс. Она создает оптимальные условия для усвоения и переработки полученной новой информации, обеспечивая более полное и эффективное обучение. Дифференциация играет важную роль в создании комфортной образовательной среды и является основой для индивидуализации обучения, что является ключевым фактором успешного образовательного процесса.

Итак, рассмотрим следующие определение, которое возьмем в качестве рабочего в дальнейшей работе: «Под типологической группой понимается группа учащихся, объединенных «одинаковым» фактическим уровнем знаний и умений по математике и достигших одного и того же уровня их усвоения» [51, С. 45].

Так же будем использовать следующее определение: «Дифференцированный подход к учащимся — это целенаправленное отношение учителя к учащимся с учетом их типологических особенностей, т.е. отношение к типологическим группам учащихся, проявляющееся в дифференциации заданий на различных этапах урока, при организации домашней и внеклассной работы по математике» [51, С.61].

1.2 Понятие дифференцированных заданий для учащихся средней школы

Дифференцированные задания играют ключевую роль в дифференциации обучения, они позволяют учителям адаптировать материал под разные уровни подготовки и потребности учащихся, что делает процесс обучения более эффективным. В последние годы, учителя всё чаще используют дифференцированные задания, чтобы привлечь внимание учеников и сделать уроки более интересными.

В методологии дифференцированного обучения Р. А. Утеевой [51], под дифференцированным заданием понимается «задание по определенной теме школьного курса математики, построенное с учетом особенностей типологической группы учащихся и выполняемое учащимися этой группы (коллективно в группе или индивидуально каждым)» [51, С.236].

В научном исследовании Р. А. Утеевой [51] выделены «основные приемы дифференциации заданий: усложнение числовых данных для учащихся групп А и В за счет введения дробных чисел (десятичных, обыкновенных, смешенных); усложнение вопросов и дополнительных заданий для учащихся групп А и В, углубляющих и расширяющих их знания и умения по теме; различные формулировки одной и той же по содержанию задачи; выполнение одного и того же задания на разных уровнях усвоения и обобщения учебного материала; решение одного и того же задания разными способами; решение одного и того же задания разными методами; выполнение одного и того же задания на разных уровнях проблемности» [51, С. 242].

Представленные выше методы позволяют учащимся использовать различные подходы к решению задач и развивать свои умения и навыки.

Г. И. Саранцев [42] предложил следующие виды дифференцированных заданий, охватывающих разнообразные формы учебной деятельности: «самостоятельные работы с множеством вариантов: ученикам предлагаются задания, позволяющие им работать над материалом самостоятельно с использованием различных вариантов; специальные задания на карточках: учебные задания представлены на отдельных карточках, снабжены четким планом решения; этот метод обеспечивает ясные указания, которые учитель может использовать для консультации учащихся. На уроке предполагается взаимодействие различных форм учебной деятельности» [11, С. 25], таких как: фронтальная, групповая, коллективная, индивидуальная. «Учитель посредством заданий обеспечивает переход от индивидуальной к коллективной деятельности. Очевидно, что это можно осуществить посредством многовариативных самостоятельных работ, переходя от их индивидуального выполнения к коллективному обсуждению, либо заданий с карточками» (Саранцев) [42, С. 211].

В учебном пособии «Методика преподавания математики в средней школе» [21] авторы рассматривают дифференцированные задания для самостоятельных работ как средство индивидуализации обучения математики. В рамках этого подхода задания классифицируются на три уровня сложности: базовый, углубленный, задачи повышенной трудности.

Исследуя особенности обучающихся, Н. В. Никаноркина [29] выделяет различные виды задач, учитывающих: формулировку, начальные данные, уровень усвоения материала, соотношение между воспроизведением и креативными процессами, методы анализа и синтеза в процессе их решения, а также цели использования на уроке, в её научном исследовании «разработана модель подготовки будущего учителя математики к использованию задач, как средства дифференциации обучения учащихся и представлены результаты педагогического эксперимента» [29, С.13].

В статье «Организация внеурочной самостоятельной деятельности по математике» (Морозов, Морозова) [27, С.97] описывается опыт применения дифференцированных заданий в виде тестов, поделенных на уровни сложности: базовый уровень сложности; повышенный уровень сложности, где задания представляют собой более сложные постановки задач, требующие глубокого понимания материала и активного использования математических концепций в творческом контексте; задания продвинутого уровня включают двух- и трехшаговые задачи, часто требующие применения олимпиадных и нестандартных методов, этот уровень задач предназначен для более глубокого и продвинутого освоения математических концепций и навыков. Разработанная методика представляет собой «собой комплекс тематических тестов различных уровней сложности по основным разделам школьной математики» [27, С. 99], которая развивает самостоятельность и практические умения.

В своей статье О. Н. Качесова [17] приводит примеры использования разноуровневых заданий на уроке, которые разработаны для трех групп учащихся. Приведены критерии каждой группы учащихся, на которые может быт поделен класс. Для дифференцированного контроля используются «уровневые задания, задания с выбором». Автор также отмечает, что «все учащиеся знают, как выполняется задание, и проверка обогащает знания учащихся второй и первой групп» [1, С. 200]. Такой метод позволяет реализовать главную идею в программе современного образования – личностно-ориентированный подход.

Г. А. Атаманская предлагает эффективную методику, в которой учащиеся класса делятся на три группы, отличающиеся по уровню сложности и направленности обучения. Рассмотрим задания для каждой группы учащихся.

«Базовая группа:

– учащиеся базовой группы выполняют основные виды типовых заданий по теме;

– задания направлены на формирование базовых навыков и понимания ключевых концепций.

Прикладная группа:

– обучающиеся прикладной группы решают задания прикладного характера, связанные с изучаемой темой;

– задания направлены на применение полученных знаний в практических сценариях.

Творческо-исследовательская группа:

– учащиеся творческо-исследовательской группы занимаются самостоятельным изучением учебного материала на 2-3 урока вперед;

– формируют дидактический, раздаточный и прикладной материал по теме;

– подбирают задачный материал и классифицируют его по уровню сложности;

– выполняют функции докладчиков, представляя свои результаты на уроке;

– осуществляют индивидуальную работу с теми, кто нуждается в дополнительной поддержке» [2].

Такой подход к организации учебного процесса не только учитывает индивидуальные особенности учащихся, но также стимулирует развитие творческого и исследовательского мышления. В результате, учащиеся с разным уровнем обучаемости находятся в подходящей для них образовательной среде, что способствует более эффективному обучению и разностороннему развитию.

1.3 Понятие индивидуализации обучения математике

Вопрос индивидуализации в обучении, включая математическое образование, «привлекает внимание многих ученых, педагогов и психологов. Существуют различные точки зрения относительно характера связи между дифференциацией и индивидуализацией обучения» [11, С. 25]. Некоторые исследователи, отождествляют дифференциацию с индивидуализацией, в то время как другие, например, И. Э Унт [49] рассматривает дифференциацию как включающую индивидуализацию как частный случай.

Есть также точки зрения, где дифференциация рассматривается как средство индивидуализации, а индивидуализация считается предельным вариантом дифференциации.

Как отмечает И. М. Осмоловская [33] в случае рассмотрения «термина индивидуализация, берутся индивидуальные, а в случае термина дифференциации – групповые особенности, дифференцированное обучение выступает как условие и средство индивидуализации, цель его – обучение каждого на уровне его возможностей и способностей, приспособление обучения к особенностям различных групп учащихся» [33, С.176].

Данные определения подчеркивают, что индивидуализация фокусируется на учете индивидуальных и личностных особенностей каждого ученика, в то время как дифференциация обозначает организацию учебного процесса с учетом доминирующих характеристик группы учащихся.

Очевидно, что важно различать понятия «дифференциация» и «индивидуализация». Можно сделать вывод, что индивидуализация представляет собой наиболее глубокую форму дифференциации, где учебный процесс строится с учетом уникальных особенностей каждого отдельного ученика, а не группы в целом.

В процессе эволюции педагогической теории и практики концепция индивидуализации обучения претерпела изменения.

«Под индивидуализацией понимается метод обучения, где методы, приемы и темп адаптируются к индивидуальным способностям учащихся с учетом их уровня развития. Этот подход реализуется в рамках групповой учебной деятельности и направлен на устранение несоответствия между реальными возможностями учащихся и требованиями учебных программ» [11].

Г. К. Селевко [43] рассматривает понятие индивидуализации обучения следующим образом: «Организация учебного процесса, при котором выбор способов, приемов, темпа обучения обусловливается индивидуальными особенностями учащихся» [43, С.102]. Стоит отметить, что «данная стратегия управления учебным процессом включает в себя «различные учебно-методические, психолого–педагогические и организационно–управленческие мероприятия» направленные на адаптацию учебного процесса к индивидуальным потребностям учащихся» [11, С.26].

«Тем не менее существует некоторая путаница в понимании терминов «индивидуализация» и «дифференциация». Некоторые авторы смешивают эти понятия, ассоциируя дифференциацию с образованием, а индивидуализацию с обучением. Другие считают, что индивидуализация представляет собой частный случай дифференциации, тогда как некоторые авторы предполагают, что дифференциация подчинена индивидуализации» [11, С. 25].

И. М. Чередов [55] считает, что: «с точки зрения дидактических соотношений следует понимать индивидуализацию обучения как принцип процесса обучения, а дифференцированное обучение на уроках – как конкретную форму организации обучения, представляющую оптимальные условия для реализации этого принципа в условиях классно-урочной системы» [55, С.19].

И. М. Осмоловская [32] считает, что «дифференцированное обучение – учет индивидуальных особенностей, присущих группам обучающихся, и организация вариативного учебного процесса в этих группах. Индивидуализация – это предельный вариант дифференциации, когда учебный процесс строится с учетом особенностей не групп, а каждого отдельно взятого ученика» [32, С. 99].

А. А. Кирсанов рассматривает индивидуализацию учебной деятельности как «систему воспитательных и дидактических средств, соответствующих целям деятельности и реальным познавательным возможностям коллектива класса, отдельных обучающихся и групп обучающихся, позволяющих обеспечить учебную деятельность обучаемого на уровне его потенциальных возможностей с учетом целей обучения» [18, С. 99].

Согласно вышеупомянутым авторским определениям терминов «индивидуальный подход» и «индивидуализация обучения», можно заключить, что индивидуальный подход представляет собой принцип обучения, тогда как индивидуализация обучения относится к особой организации учебного процесса в рамках класса (или группы), нацеленную на воплощение данного принципа.

«Технологии, направленные на индивидуализацию образовательного процесса, представляют собой динамичные системы, охватывающие аспекты учебной деятельности, включая постановку целей, формирование содержания, применение методов и использование образовательных средств» [11]. Основные задачи, стоящие перед индивидуализированным обучением, включают в себя сохранение и дальнейшее развитие индивидуальности каждого школьника, предотвращение неуспеваемости, формирование общеучебных умений, повышение мотивации и развитие личностных качеств (творческий потенциал, умение действовать самостоятельно).

Общие принципы индивидуализации имеют своей составной частью рассмотрение ее «как стратегии обучения, учитывающей индивидуальные особенности, понимание индивидуализации как неотъемлемого элемента формирования личности обучаемого, применение индивидуализированных методов по разным школьным курсам, синтез индивидуальной работы с другими формами деятельности для достижения максимального эффекта, а также ориентацию учебного процесса на индивидуальные темпы и стили обучения каждого ученика. Ключевой предпосылкой является анализ особенностей каждого школьника, включая его уровень обучаемости, учебные умения и познавательные интересы, что служит основой для успешной индивидуализации образовательного процесса. Эти изменения в подходах к индивидуализации обучения свидетельствуют о постоянной динамике в области педагогики, направленной на более эффективное удовлетворение потребностей каждого ученика в образовании» [11, С. 27].

Индивидуализация математического образования занимает важное место в современной отечественной педагогике, ставя своей целью адаптацию обучения к индивидуальным потребностям каждого ученика. Инновационные подходы, предложенные учеными И. Э. Унт [49], А. С. Границкой [9] и В. Д. Шадриковой [56], являются значимыми шагами в этом направлении.

«И. Э. Унт [49] разработала технологию индивидуализированного обучения, где акцент сделан на самостоятельную работу учащихся в школе и дома. В контексте математического образования это включает в себя создание индивидуальных математических заданий для самостоятельного выполнения, использование рабочих тетрадей и руководств к индивидуализированной самостоятельной работе. Данный подход помогает адаптировать материал к уровню понимания каждого ученика, обеспечивая оптимальное восприятие математических концепций.» [11, С. 27]

Адаптивная система обучения А. С. Границкой [9] предлагает нестандартный формат урока, где учитель выделяет значительную часть времени для индивидуальной работы с учащимися, «учитель не просто наблюдает за самостоятельной работой учащихся, а работает в это время с отдельными учащимися индивидуально» [9, С. 6].

В контексте математического образования это может включать в себя использование многоуровневых математических заданий с адаптацией, позволяющей каждому ученику двигаться вперед в соответствии с его собственными темпами и уровнем понимания материала.

В. Д. Шадриков рассматривает «систему объективных закономерностей, которые характеризуют индивидуальную деятельность, ее теоретические начала». В своей работе В. Д. Шадриков «предлагает индивидуально-ориентированный учебный план, основанный на идее разработки математических программ для шести уровней сложности. Этот подход позволяет адаптировать обучение к способностям каждого учащегося, предоставляя ему возможность выбирать уровень сложности математических задач в соответствии с его текущими возможностями»[56].

В целом, перечисленные технологии подчеркивают важность индивидуализации в обучении математике, обеспечивая гибкость, эффективность и персонализированный подход к ученикам с разным уровнем математической подготовки и интересов. Кроме того, описанные технологии индивидуализации в современной педагогике демонстрируют несколько общих особенностей, которые делают их важными и эффективными в контексте обучения:

– акцент на самостоятельной работе: все три технологии, разработанные И. Унт [49], А. С. Границкой [9] и В. Д. Шадрикова [56], подразумевают наличие активной самостоятельной работы учащихся в процессе обучения;
– индивидуальные задания и методы, которые адаптированы под индивидуальные потребности и уровень учащихся; использование персонализированных методов обеспечивает эффективность обучения для каждого ученика в соответствии с его уровнем подготовки и способностями;
– адаптивность и гибкость: технологии ориентированы на адаптивность, предоставляя гибкие методы работы и учет индивидуальных потребностей;
– интеграция индивидуальных и групповых аспектов: баланс между индивидуальным обучением и работой в учащихся в группе;

– многоуровневость и разнообразие уровней сложности: технологии В. Д. Шадрикова [56] выделяются многоуровневым подходом, предоставляя учащимся выбор уровня сложности в зависимости от их текущих способностей. Это позволяет эффективно охватывать различные уровни подготовки школьников.

Общие особенности этих технологий делают их важными инструментами для создания обучающей среды, которая способствует разностороннему и гибкому развитию учащихся, а также поддерживает индивидуализированный подход к обучению.

«Анализ психолого-педагогической литературы подчеркивает, что индивидуализация в образовании ориентирована на учет индивидуальных потребностей, способностей и характеристик каждого учащегося, тем самым индивидуализация обучения помогает создать благоприятные условия для успешного обучения каждого ученика, учитывая их уникальные потребности и характеристики» [11].

1.4 Условия эффективности индивидуализации обучения математике в старших классах

Индивидуализация обучения направлена на учет индивидуальных и личностных особенностей каждого ученика и подразумевает обучение, где методы, приемы и темп адаптируются к уникальным способностям детей с учетом их уровня развития. Данный подход может быть реализован в рамках группой учебной деятельности посредством уровневой дифференциации.

Уровневая дифференциация осуществляется в рамках одного класса и направлена на учёт типологических и индивидуальных особенностей учащихся. Она позволяет учителю адаптировать учебный процесс к различным способностям, интересам и потребностям учащихся. Такой подход способствует более эффективному обучению, поскольку каждый ученик может развиваться в соответствии с собственными возможностями и темпом.

На сегодняшний день, учителя и образовательные учреждения находятся в поиске эффективных методов внедрения уровневой дифференциации, чтобы обеспечить качественное обучение и поддержку для всех учащихся.

Условия необходимые для успешного осуществления уровневой дифференциации определяются авторами по-разному и зависят от предлагаемого подхода. Как было сказано ранее, ученые педагоги и эксперты в области образования используют различные походы относительно определения и понимания сущности дифференциации обучения в общем, и уровневой дифференциации, в частности; рассмотрим самые значимые из них из них.

Г. В. Дорофеев и др. предлагают следующую концепцию.: «...обучаясь в одном классе, по одной программе и учебнику, школьники могут усваивать материал на различных уровнях» [12, С. 15].

Предлагается два основных уровня: уровень обязательной подготовки и продвинутые уровни. Главным отличием данной концепции является то, что «ученик получает право и возможность выбирать глубину усвоения учебного материала, варьировать свою учебную нагрузку» [13, С. 161].

Перечислим ряд условий успешной реализации уровневой дифференциации, которые представляют собой основные принципы данной концепции:

– ясность и доступность целей: учащиеся должны четко понимать, какие цели ставятся перед ними на каждом уровне обучения и какие результаты ожидаются от них;

– разрыв между уровнями: уровень обучения должен значительно превышать уровень требований, чтобы учащиеся могли максимально раскрыть свой потенциал и продвигаться вперед;

– последовательность: учащиеся должны последовательно продвигаться по уровням, сохраняя структурированность обучающего процесса, чтобы обеспечить систематичное и целенаправленное развитие;

– контроль и оценка: оценка должна включать как проверку достижения обязательных результатов на уровне государственных стандартов, так и оценку усвоения материала на более высоких уровнях, чтобы учитывать разнообразие способностей и потребностей учащихся;

– добровольный выбор уровня: важно, чтобы выбор уровня усвоения материала и отчетность о достигнутом были основаны на добровольном выборе каждого ученика, это способствует их мотивации и ответственности за свой учебный процесс.

Соблюдение перечисленных условий, в соответствии с данной концепцией, помогает создать благоприятную образовательную среду, которая способствует развитию каждого ученика в соответствии с его потенциалом и потребностями.

Подход, описанный В.А. Гусевым [10], предполагает то, что внутренняя дифференциация совладает с уровневой и основывается на индивидуальных возможностях и потребностях каждого ученика. Для эффективной реализации такого подхода он предлагает следующие методы:

– создание последовательных цепочек информации: это означает структурирование учебного материала таким образом, чтобы он был доступен для учащихся на разных уровнях способностей. Это может включать предоставление различных методов представления фактов и использование дополнительных стимулирующих материалов, чтобы поддержать обучение математике;

– построение цепочек задач: Задачи должны быть спроектированы таким образом, чтобы они содержали новую информацию и стимулировали активное использование полученных знаний. Это может включать задания разной сложности и структуры, а также предоставление возможности для применения знаний в различных контекстах.

Эти подходы помогают учителям адаптировать обучение к индивидуальным потребностям и уровням подготовки каждого ученика, что способствует более эффективному обучению и развитию всех участников образовательного процесса.

По мнению В. А. Гусева [10], предложенная цепочка задач – основа подачи учебного материала, и представляет собой основу для построения всего обучающего процесса. Преимущество такого подхода заключается в том, что он обеспечивает систематичное и последовательное развитие ученика, позволяя ему постепенно углублять свое понимание материала и развивать навыки. Кроме того, такая структура задач способствует более глубокому усвоению материала и его применению в различных контекстах.

Концепция «уровня культуры и знаний» [6 С. 131], предложенная В. Г. Болтянским и Г. Д. Глейзером [6], предполагает три уровня оценки знаний: общекультурный, прикладной и творческий, что позволяет учителям судить не только об уровне усвоения учебного материала, но и определять уровень развития учеников.

Основные условия успешной дифференциации, выделенные авторами, подчеркивают важность предварительной работы учителя и акцентируют внимание на следующих аспектах:

- подготовительная работа учителя: это включает в себя выявление индивидуальных склонностей учеников, проведение дополнительной внеклассной работы по математике, а также реализацию индивидуального подхода к учащимся;
- выделение общекультурных знаний: это необходимо для обеспечения базового уровня образования, который является фундаментом для дальнейшего развития учеников.

Для реализации данной концепции, учитель должен определить ключевые знания и умения, которые необходимы для формирования общекультурного уровня современного человека, и обеспечить их усвоение всеми учениками.

Р. А. Утеева [51] выделяет следующие условия для успешной реализации уровневой дифференциации обучения:

– определение типологических групп учащихся: в классе выделяется четыре типологические группы А, В, С, Д;

– формирование рабочих групп двух видов: смешанного однородного состава;

– предоставление всего учебного материала на трех уровнях сложности: базовом, продвинутом и высоком для четырех типологических групп;

– выбор различных типов заданий для каждого уровня сложности по всем темам школьного курса математики;

– индивидуализировать обучение посредством интеграции в учебный процесс дифференцированных заданий;

– важно определить основную форму учебной деятельности, которая будет наиболее эффективной для усвоения нового материала, с учетом особенностей типологических групп;

– подготовка учителя и учащихся к внедрению групповых форм учебной деятельности в структуру урока, это включает в себя объяснение целей и правил работы в группе, обеспечение необходимых материалов и ресурсов, а также разработку стратегий сотрудничества и обмена информацией;

– применение дифференцированного и индивидуального подхода к типологическим группам в целом, так и к каждому ученику в частности;

– регулярная итоговая оценка: регулярное оценивание учебной деятельности позволяет учителю отслеживать прогресс каждой типологической группы и каждого учащегося, выявлять проблемные области и корректировать учебный процесс в соответствии с индивидуальными потребностями учеников.

Подводя итоги, можно отметить, что анализ различных концепций дифференциации обучения математике показал, что в их основное большое внимание уделяется выявлению факторов, необходимых для осуществления уровневой дифференциации, включая организационные, методические и педагогические аспекты, требуемые для успешной реализации данного подхода в образовательном процессе.

Выводы по первой главе:

– в первой главе рассмотрены базовые теоретические основы дифференцированных заданий по алгебре и началам математического анализа как средство индивидуализации обучения старшеклассников;
– проанализированы различные подходы к понятиям «дифференцированное обучение» и «индивидуализация обучения»;
– определено, что индивидуализация обучения означает метод, в котором методы, приемы и темп адаптируются к индивидуальным способностям учеников с учетом их уровня развития;
– показано, что дифференцированные задания являются эффективным инструментом реализации индивидуализации обучения в урочном процессе по математике;
– замечена нехватка методического обеспечения в виде дифференцированных заданий по алгебре и началам математического анализа;
– проанализированы исследовательские работы и статьи, в которых представлен практический опыт реализации индивидуализации обучения на уроках математики для старших классов;
– исследованы и проанализированы условия успешной индивидуализации обучения математике, выделенные авторами разных концепций.

Глава 2 Методические основы дифференцированных заданий по алгебре и началам математического анализа как средство индивидуализации обучения старшеклассников

2.1 Анализ школьных учебников с точки зрения исследуемой проблемы

Анализ учебников будет проводиться с учетом следующих критериев:

– содержание материала;

– количество учебных часов, предусмотренных для прохождения тематических разделов учебника;

– доступность и понятность излагаемого материла;

– как тема соотносится с материалами ЕГЭ.

С. М. Никольский и др. предлагают: «Алгебра и начала анализа. Учебник для 10 класса общеобразовательных учреждений» [30].

Глава третья в учебнике озаглавлена «Тригонометрические формулы и функции». Этот раздел поделен на пять отдельных параграфов. «В параграфах с 7-го по 11-й подробно изучаются свойства тригонометрических функций с числовым аргументом, а также основные формулы, связанные с ними. В заключительном 11-м параграфе рассматриваются методы решения тригонометрических уравнений и неравенств» [30].

«В этом учебнике предусмотрено 21 час на изучение раздела «Тригонометрические функции», 11 часов на раздел «Формулы тригонометрии» и 12 часов на раздел «Решение тригонометрических уравнений и неравенств». Недостаточное время, отведенное на изучение простейших тригонометрических уравнений, может привести к недостаточному усвоению материала, хотя именно эти уравнения лежат в основе решения более сложных тригонометрических уравнений. Далее рассмотрим решение ПТУ из данного учебника» [30].

Пример 1. $\cos = -\frac{\sqrt{3}}{2}$. «Решим уравнение $\cos = -\frac{\sqrt{3}}{2}$. Уравнение имеет две серии решений: $x_k = \arccos(-\frac{\sqrt{3}}{2}) + 2\pi k, k\epsilon Z$; $x_m = -\arccos(-\frac{\sqrt{3}}{2}) + 2\pi m, m\epsilon Z$. Так как $\arccos(-\frac{\sqrt{3}}{2}) = \frac{5\pi}{6}$, то эти две серии решений уравнения можно записать так: $x_k = \frac{5\pi}{6} + 2\pi k, k\epsilon Z$; $x_m = -\frac{5\pi}{6} + 2\pi m, m\epsilon Z$» [30].

Во второй главе начинается изучение тригонометрических функций. Вводится понятие поворота подвижного радиуса по часовой или против часовой стрелки с использованием окружности с центром в начале координат. В п 7.3 вводится понятие синуса и косинуса угла на единичной окружности как проекции на оси координат, однако эта окружность не используется для решения ПТУ.

Понятия арксинуса, арккосинуса, арктангенса и арккотангенса вводятся при помощи числовой окружности и поворота «подвижного вектора». Есть примеры использования числовой окружности для решения неравенств. Но не показано как использовать окружность для решения ПТУ.

При такой подачи материала могут оставаться непроработанными вопросы, связанные с понятием арксинуса, арккосинуса и арктангенса при решении ПТУ; моменты, которые связаны с множителем $(-1)^n$ для решения тригонометрического уравнения sin x = a и с добавлением периода при записи корней.

В параграфе 11.8 рассматривается метод введения вспомогательного угла для решения уравнения вида A sin x+B cos x = C, который используется в некоторых заданиях типа №13 из ЕГЭ.

Отметим также, что в данном учебнике совсем не рассматриваются задачи, в которых требуется осуществить отбор корней.

А. Г. Мерзляк и др. «Математика. Алгебра и начала математического анализа. Базовый уровень,10 класс» [24].

В четвертой главе учебника отводится разное количество времени на изучение различных тем. Например, на «Тригонометрические функции» отводится 12 часов, на «Формулы тригонометрии» - 16 часов, а на раздел «Решение тригонометрических уравнений» - 15 часов. Кроме того, в этой главе, в параграфе 28, представлено первое знакомство с ПТУ, а также описаны методы решения тригонометрических уравнений.

Простейшие тригонометрические уравнения предлагается решать при помощи графической интерпретации графиков тригонометрических функций. Такие графики имеют бесконечное множество решений. Разбирается пример на основе частного случая. На рисунке изображаются графики y= cos x и y=$\frac{1}{2}$ (рисунок 1).

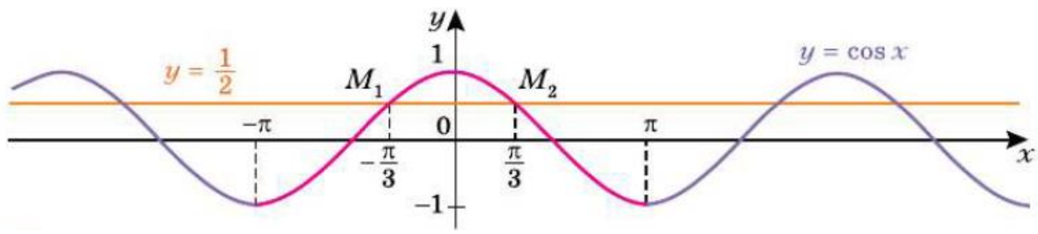

Рисунок 1 − Графическая интерпретация решения уравнения cos x=$\frac{1}{2}$

При таком подходе снимается проблема, относящаяся к осмыслению добавления периода при записи корней тригонометрических уравнений. График наглядно дает представление о бесконечном числе решений из-за периодичности функции И все же это способ менее информативен, чем решение с использованием окружности. Но все же он помогает осознать структуру формулы корней, понять роль коэффициента k в этой серии корней.

Далее предлагается ознакомиться с формулами корней ПТУ, приводятся формулы корней частных случаев.

Следует отметить, что в этом учебнике не решается проблема отбора корней уравнения на отрезке, то есть имеются задания, где просят отобрать корни, но не рассматриваются способы их решения. Уделяется внимание исследованию области допустимых значений, предлагается оформление решения задания через систему равносильных переходов. Такая информация полезна для подготовки к профильному ЕГЭ.

Пример 2. Решите уравнение $\frac{\cos^2 x - \cos x}{1 - \sin x} = 0$.

Решение. Перейдём к равносильной системе:

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} \cos x = 0, \\ \cos x = 1, \end{array}\right. \\ \sin x \neq 1; \end{cases} \qquad \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{2} + \pi k, \ \ k \in Z, \\ x = 2\pi n, \ \ n \in Z, \end{array}\right. \\ x \neq \frac{\pi}{2} + \pi l, l \in Z. \end{cases}$$

Очевидно, что при четных значениях k решение первого уравнения совокупности не удовлетворяют системе. При $k = 2m - 1, \ m \in Z$, получаем: $x = \frac{\pi}{2} + \pi(2m - 1) = -\frac{\pi}{2} + 2\pi m, m \in Z$. Ответ: $-\frac{\pi}{2} + 2\pi m, m \in Z; \ 2\pi n, n \in Z$.

В учебнике реализован принцип уровневой дифференциации. Выделяется четыре уровня сложности: простые, средней сложности, сложные задачи и задачи высокой сложности. К сложным задачам относятся комбинированные задания, в решения которых необходимо применять два-три метода. Задания высокой сложности содержат задания с параметром.

«А. Г. Мордкович и др. «Алгебра и начала математического анализа. 10 класс. В 2 частях: ч.1 учебник (базовый и углубленный уровни)» [25], а также «ч.2 задачник (базовый и углубленный уровни)» [26].

«В третьей главе учебника особое внимание уделяется разделу «Тригонометрические функции», на который отводится 23 часа. На изучение темы «Тригонометрические уравнения» выделяется 10 часов, а на раздел «Преобразование тригонометрических выражений» – 16 часов» [26].

«В конце каждого нового параграфа, посвященного тригонометрическим преобразованиям, приводится уравнение с использованием рассматриваемой формулы» [26] .

Простейшие тригонометрические уравнения предлагается решать, используя геометрическую модель – единичную окружностью на координатной плоскости.

Отмечается, что в учебнике «приводится обширный выбор задач разной сложности по теме «Тригонометрические уравнения», что способствует индивидуализированной работе с учениками на занятиях» [25]. Как уже упоминалось, учебник А. Г. Мордковича предлагает альтернативную структуру материала. «Основное его отличие от других изученных здесь учебников заключается в новом подходе к организации материала: функция - простейшие тригонометрические уравнения - преобразования + сложные уравнения» [25]. Эта методика обучать старшеклассников решать задачи осознанно, соответствуя принципу доступного изложения учебного материала.

В итоге можно отметить следующие особенности. В курсе алгебры на изучение тригонометрии традиционно уделяется более 30% учебного времени. Для многих старшеклассников тригонометрия — это очень сложный раздел математики, который включает в себя огромное множество формул для запоминания, однако такого отношения можно избежать, если правильно и вовремя ввести понятие ПТУ, объяснив решение с использованием окружности.

В задание под номером тринадцать ЕГЭ профильного уровня необходимо решить тригонометрическое уравнении и отобрать корни на отрезке. Задание проверяется экспертами и в случае правильного выполнения за него начисляется 2 первичных балла.

Для элективного курса рекомендован учебник А. Г. Мордковича [25]. Так как для решения решение ПТУ используется модель «числовая окружность на координатной плоскости». И в нем существует закономерность в изложении материала: начало берется от простых моделей основных элементарных функций осуществляется переход к изучению сложных моделей – уравнениям, которые впоследствии преобразуются в более простые при помощи формул. В этом учебнике также представлено использование перебора и геометрической интерпретацией на числовой прямой при отборе корней.

2.2 Методические рекомендации обучения тригонометрическим уравнениям по алгебре и началам математического анализа

«Тригонометрическими уравнениями обычно называют уравнения, в которых переменные содержатся под знаками тригонометрических функций. К их числу прежде всего относятся простейшие тригонометрический уравнения т.е. уравнения вида $\sin x = a, \cos x = a, \mathrm{tg} x = a,$ где a-действительное число» [57].

Первостепенно для того, чтобы научится решать тригонометрические уравнения, которые представлены в Едином государственном экзамене, учащимся необходимо освоить решение простейших тригонометрических уравнений.

Решение тригонометрических уравнений при помощи числовой окружности на координатной плоскости, является более наглядным и понятным. Именно этот способ рекомендуется в разработанном элективном курсе «Тригонометрические уравнения» [25, С. 208].

Пример 3. Решите уравнение: $\cos t = \frac{1}{2}$.

«Используем геометрическую модель − числовую окружность на координатной плоскости (рисунок 2).

Отметим на окружности точки М и Р с абсциссой $\frac{1}{2}$ (они лежат на прямой $x = \frac{1}{2}$).

Точка М соответствует числу $\frac{\pi}{3}$, а значит, всем числам вида $\frac{\pi}{3} + 2\pi k$.

Точка Р соответствует числу $-\frac{\pi}{3}$, следовательно, и всем числам вида $-\frac{\pi}{3} + 2\pi k$» [25, С. 208].

В итоге имеем серии: $t = \frac{\pi}{3} + 2\pi k$; $t = -\frac{\pi}{3} + 2\pi k$.

Обобщая, это можно записать так: $t = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi k,\ k \in Z$.

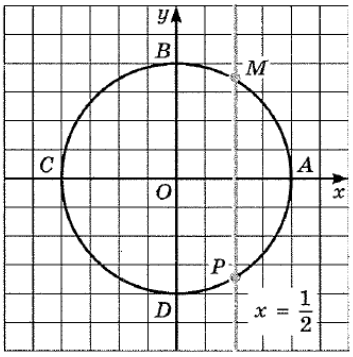

Рисунок 2 – Решение уравнения $\cos t = \frac{1}{2}$

Пример 4. Решите уравнение: $\sin t = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

«Используем геометрическую модель – числовую окружность на координатной плоскости (рисунок 3).

Отметим на окружности точки М и Р с ординатой $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ (они лежат на прямой $y = -\frac{\sqrt{2}}{2}$). Точка М соответствует числу $\frac{5\pi}{4}$, т.е., всем числам вида $\frac{5\pi}{4} + 2\pi k$. Точка Р соответствует числу $\frac{7\pi}{3}$, т.е. следовательно, и всем числам вида $\frac{7\pi}{3}, +2\pi k$» [25, С. 209].

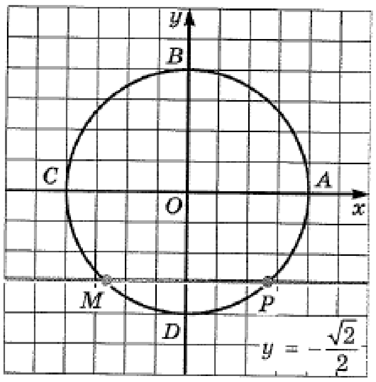

Рисунок 3 – Решение уравнения $\sin t = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

В итоге получаем две серии решений уравнений: $t = \frac{5\pi}{4} + 2\pi k$; $t = \frac{7\pi}{4} +$ $+2\pi k$; $k \in Z$.

Стоит отметить, что уравнения $\sin x = \alpha, \cos x = \alpha$ можно решать графическим методом. Но данный способ применим для конкретных значений α: $0, \pm 1, \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{\sqrt{2}}{2}, \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Далее рассмотрим методику решения уравнений «вида $\mathrm{T}(\mathrm{kx}+\mathrm{m}) = \mathrm{a}$, где T - знак какой-либо тригонометрической функции» [25, С. 210]. Рассмотрим решение таких уравнений при помощи окружности.

Пример 5. Решите уравнение: $\sin 2x = \frac{1}{2}$.

Решение. Введем новую переменную, пусть $2x = t$, откуда получаем $\sin t = \frac{1}{2}$.

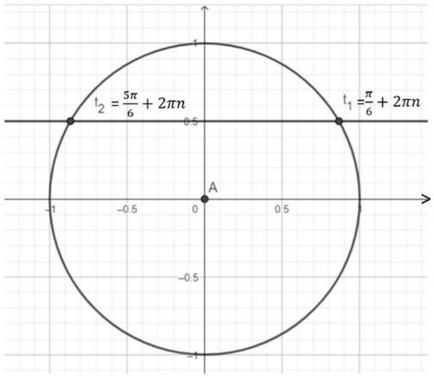

Рисунок 4 – Решение уравнения $\sin t = \frac{1}{2}$

$t_1 = \frac{\pi}{6} + 2\pi n$, n$\in z$; $t_2 = \frac{5\pi}{6} + 2\pi n$, n$\in z$ (рисунок 4);

Обратная замена:

$2x_1 = \frac{\pi}{6} + 2\pi n$, n$\in z$; $x_1 = \frac{\pi}{12} + \pi n$, n$\in Z$;

$2x_2 = \frac{5\pi}{6} + 2\pi n$, n$\in z$; $x_2 = \frac{5\pi}{12} + \pi n$, n$\in Z$.

Пример 6. Решите уравнение: $\cos\frac{2x}{3} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$;

Решение. Замена: пусть $\frac{2x}{3} = t$, тогда $\cos t = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ (рисунок 5);

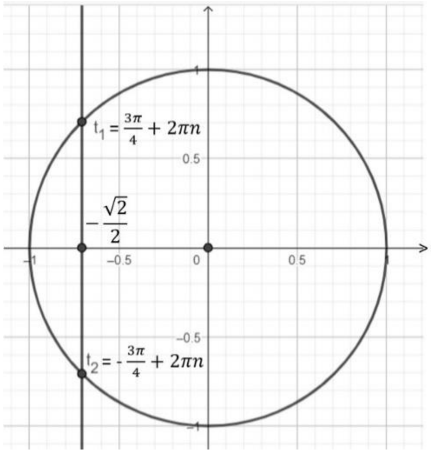

Рисунок 5 – Решение уравнения $\cos t = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

$t_1 = \frac{\pi}{4} + 2\pi n,\ n \in Z;$ $t_2 = -\frac{\pi}{4} + 2\pi n,\ n \in Z;$

Обратная замена:

$\frac{2x_1}{3} = \frac{\pi}{4} + 2\pi n\ ,\ n \in z;$ $x_1 = \frac{3\pi}{8} + 3\pi n\ ,\ n \in Z;$

$\frac{2\ \ x_2}{3} = -\frac{\pi}{4} + 2\pi n,\ n \in z;\ x_2 = -\frac{3\pi}{8} + 3\pi n,\ n \in Z.$

Пример 7. Решите уравнение: $tg\left(4x - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{3};$

Решение. Замена: пусть $\left(4x - \frac{\pi}{6}\right) = t$, тогда $tg\ t = \frac{\sqrt{3}}{3};$

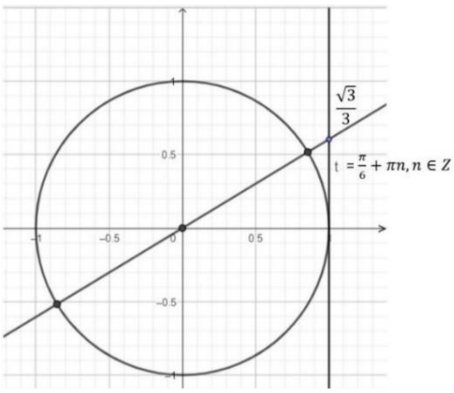

Рисунок 6 – Решение уравнения $tg\ t = \frac{\sqrt{3}}{3}$

$t = \frac{\pi}{6} + \pi n,\ n \in Z$ (рисунок 6).

Обратная замена: $4x - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{6} + \pi n\ ,$

$4x = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{6} + \pi n,\ 4x = \frac{\pi}{3} + \pi n, x = \frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{4}n,\ \ n \in Z.$

Обязательной темой для отработки старшеклассниками, обучающимся на профильном уровне, является тема отбора корней из найденной серии решений, принадлежащих заданному промежутку.

Г. К. Корянов предлагает следующие способы отбора коней: «арифметический и алгебраический способы отбора корней в тригонометрических уравнениях, геометрический и функционально-графический способы отбора корней в тригонометрических уравнениях» [22, С. 103].

Остановимся более подробно на геометрическом способе отбора корней, принадлежащих заданному промежутку.

«Тригонометрическую окружность удобно использовать при отборе корней на промежутке, длина которого не превосходит 2π, или в случае, когда значения обратных тригонометрических функций, входящих в серию решений, не являются табличными» [22, С. 29].

Пример 8. «Решить уравнение $|\cos x| = \sqrt{3}\sin x$.

Решение.

Данное уравнение равносильно системе:

$$\begin{cases} \pm\cos x = \sqrt{3\ \sin x} \\ \sin x \geq 0 \end{cases};$$

$$\begin{cases} \mathrm{tg}x = \pm\frac{\sqrt{3}}{3}; \\ \sin x \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \pm\frac{\pi}{6} + \pi n,\ n \in Z \\ \sin x \geq 0. \end{cases},$$

Так функции $\mathrm{tg}x$ и $\sin x$ имеют общий наименьший положительный период 2π, то отбор корней проведем на тригонометрическом круге (рисунок 7)» [22, С. 29].

Ответ: $x = \frac{\pi}{6} + 2\pi n, x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi n, n \in Z.$

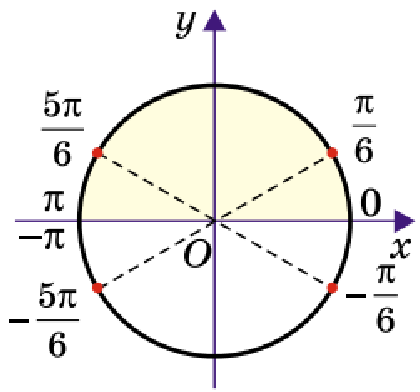

Рисунок 7 – Отбор корней на тригонометрическом круге.

Стоит отметить, что M. Bonato [59], D. Bresolin [60], F. Yua [64], M. Voskoglou [63], A. Teppo [62] сходятся во мнении, что при отборе корней на заданном множестве могут возникнуть затруднения в результате недопонимания понятия числовое множество.

Рассмотрим методы решения тригонометрических уравнений, которые изучаются в школьном курсе и являются обязательными для решения заданий Единого государственного экзамена продвинутого уровня.

Начнем с метода замены переменной, такой путь решения знаком старшеклассникам не первый год, и использовался ранее при решении уравнений разных типов. Продемонстрируем на примере, как этот метод применяется в тригонометрии:

Пример 9. «Решить уравнение $\cos^2 x - \sin^2 x - \cos x = 0$.

Решение. Воспользуемся там, что $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$. Тогда получаем:

$$\cos^2 x - (1 - \cos^2 x) - \cos x = 0;$$

$$2\cos^2 x - \cos x - 1 = 0;$$

Введем новую переменную: $z = \cos x$. Тогда уравнение примет вид $2z^2 - z - 1 = 0$, откуда находим: $z_1 = 0, z_2 = -\frac{1}{2}$, т. е. $\cos x = 1$, либо $\cos x = -\frac{1}{2}$» [25, С. 208].

Если $\cos x = 1$, то $x = 2\pi n$.

Решим уравнения: $\cos x = -\frac{1}{2}$.

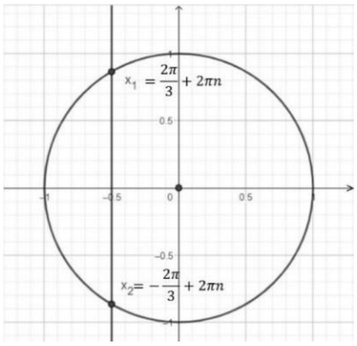

Рисунок 8 – Решение уравнения $\cos x = -\frac{1}{2}$

$x_1 = \frac{2\pi}{3} + 2\pi n$, n$\in Z$; $x_2 = -\frac{2\pi}{3} + 2\pi n$, n$\in Z$ (рисунок 8).

Ответ: $x = 2\pi n, x_2 = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi n$, n$\in Z$.

Теперь поговорим о методе разложения на множители. «Суть этого метода вам знакома: если уравнение $f(x) = 0$ удается преобразовать к виду $f_1(x) \times f_2(x) = 0$, то либо $f_1(x) = 0$, либо $f_2(x) = 0$. В подобных случаях обычно говорят так: задача сводится к решению совокупности уравнений: $f_1(x) = 0$; $f_2(x) = 0$.

Пример 10. Решить уравнение $2\sin x \cos 5x - \cos 5x = 0$.

Решение. Имеем: $\cos 5x(2\sin x - 1) = 0.$ Значит, приходим к совокупности уравнений: $\cos 5x = 0$; $\sin x = \frac{1}{2}$.

Решаем первое уравнение: $\cos 5x = 0$;

Пусть $5x = t$, тогда $\cos t = 0$» [25, С. 208].

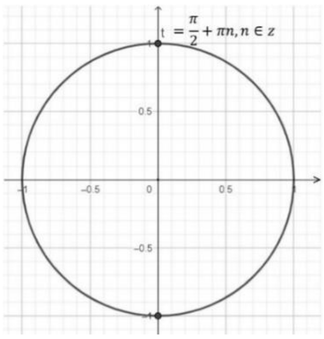

Рисунок 9 – Решение уравнения $\cos t = 0$

$t = \frac{\pi}{2} + \pi n$ (рисунок 9); $5x = \frac{\pi}{2} + \pi n$; $x = \frac{\pi}{10} + \frac{\pi}{5}n$.

Решаем второе уравнение: $\sin x = \frac{1}{2}$.

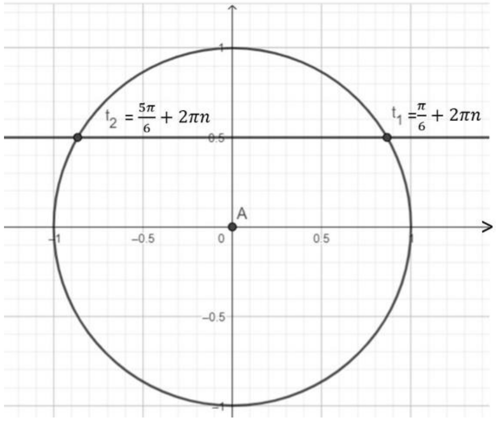

Рисунок 10 – Решение уравнения $\sin x = \frac{1}{2}$

$x_2 = \frac{\pi}{6} + 2\pi n$, n$\in Z$;

$x_3 = \frac{5\pi}{6} + 2\pi n$, n$\in Z$ (рисунок 10);

Ответ: $x_1 = \frac{\pi}{10} + \frac{\pi}{5}n$, $x_2 = \frac{\pi}{6} + 2\pi n$; $x_3 = \frac{5\pi}{6} + 2\pi n$, n$\in Z$.

Далее рассмотрим тригонометрические уравнения специального вида, которые имеют название – однородные тригонометрические уравнения.

«Определение. Уравнения вида $\alpha\sin x + b\cos x = 0$ называют однородными тригонометрическими уравнениями первой степени; уравнения вида $\alpha\sin^2 x + b\sin x\cos x + c\cos^2 x = 0$ называют однородными тригонометрическими уравнениями второй степени» [25, С. 209].

Пример 11. Выполните задание решив уравнение $2\sin x - 3\cos x = 0$.

Далее поделим обе части уравнения на $cosx$, но уточним. «Если $\cos x = 0$, то в силу уравнения имеем также $\cos x = 0$. Но это противоречит основному тригонометрическому тождеству $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, согласно которому синус и косинус не могут обращаться в нуль одновременно. Значит, для любого решения данного уравнения выполнимо неравенство $\cos x \neq 0$, и поэтому обе части уравнения можно разделить на cos x» [25, С. 212].

$\frac{2\sin x}{\cos x} - \frac{3\cos x}{\cos x} = \frac{0}{\cos x}$;

в результате получаем уравнения:

$2\,\mathrm{tg}\,x - 3 = 0;$

$\mathrm{tg}\,x = \frac{3}{2}.$

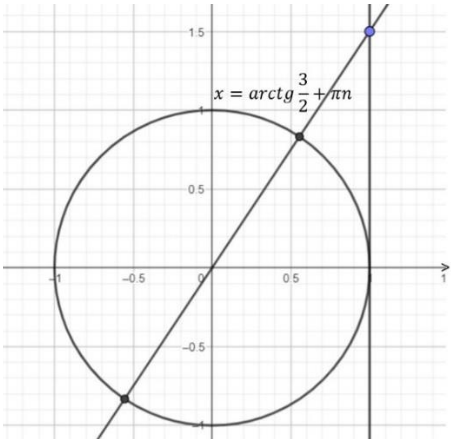

Рисунок 11 – Решение уравнения $\mathrm{tg}\,x = \frac{3}{2}$

$x = \mathrm{arctg}\,\dfrac{3}{2} + \pi n, n \in Z$ (рисунок 11).

Рассмотрим однородные тригонометрически уравнения второй степени. Существует алгоритм, по которому следует решать уравнения данного вида:

«Алгоритм решения уравнения $\alpha\sin^2 x + b\sin x\cos x + c\cos^2 x = 0$.

1. Посмотреть, есть ли в уравнении член $\alpha\sin^2 x$.

2. Если член $\alpha\sin^2 x$ в уравнении содержится (т.е. $\alpha \neq 0$), то уравнение решается делением обеих его частей на $\cos^2 x$ и последующим введением новой переменной $z = \mathrm{tg}\,x$.

3. Если член $\alpha\sin^2 x$ в уравнении не содержится (т. е. $\alpha = 0$), то уравнение решается методом разложения на множители: за скобки выносят cos x» [25, С. 209].

Теперь рассмотрим решение однородного тригонометрического уравнения второй степени на конкретном примере.

Пример 12. «Решите уравнение: $\sin^2 x + 3\sin x\cos x + 2\cos^2 x = 0$.

Решение. Разделив обе части уравнения почленно на $\cos^2 x$, получим: $z^2 - 3z + 2 = 0$; $z_1 = 1, z_2 = 2$. Значит, либо $\operatorname{tg} x = 1$, либо $\operatorname{tg} x = 2$. Из первого уравнения находим: решим уравнение $\operatorname{tg} x = 1$» [25, С. 211].

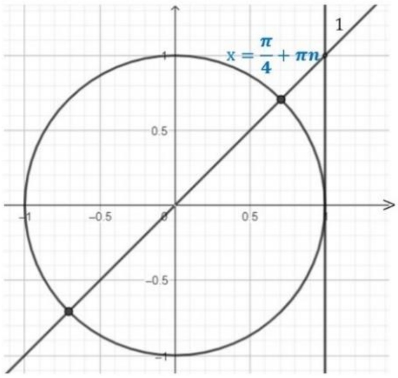

Рисунок 12 − Решение уравнения $\operatorname{tg} x = 1$

Получаем: $x = \frac{\pi}{4} + \pi n,\ n \in Z$ (рисунок 12).

Решим уравнение: $\operatorname{tg} x = 2$.

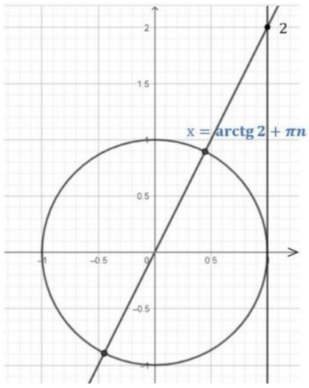

Рисунок 13 − Решение уравнения $\operatorname{tg} x = 2$

Получаем: $x = \operatorname{arctg}2 + \pi n$ (рисунок 13).

Ответ: $x = \frac{\pi}{4} + \pi n,\ n \in Z;\ x = \operatorname{arctg}2 + \pi n$.

Методику обучения решению тригонометрических уравнений, сводящимся к однородным тригонометрическим уравнениям, рассмотрим на конкретном примере:

Пример 13. $3\sin^2 3x - 2\sqrt{3}\sin 3x\cos 3x + 5\cos^2 3x = 2.$ Выделите те корни, которые принадлежат интервалу $(-\pi;\ \pi)$.

Решение.

«Нужно не только решить уравнение в общем виде, но и выбрать корни, принадлежащие заданному промежутку. Эти три дополнительные трудности мы сейчас и начнем преодолевать. С числом 2, содержащимся в правой части уравнения, поступим следующим образом. Известно, что $\sin^2 t + \cos^2 t = 1$ – это тождество верно для любого t. В частности, $\sin^2 3x + \cos^2 3x = 1$. Но тогда $2\sin^2 3x + 2\cos^2 3x = 2$. Заменив в правой части уравнения 2 на $2\sin^2 3x + 2\cos^2 3x$, получим:

$$3\sin^2 3x - 2\sqrt{3}\sin 3x\cos 3x + 5\sin^2 3x = 2\sin^2 3x + 2\cos^2 3x;$$

$$3\sin^2 3x - 2\sqrt{3}\sin 3x\cos 3x + 5\sin^2 3x - 2\sin^2 3x - 2\cos^2 3x = 0;$$

$$\sin^2 3x - 2\sqrt{3}\sin 3x\cos 3x + 3\cos^2 3x = 0.$$

Как видите, удалось преобразовать заданное уравнение в однородное тригонометрическое уравнение второй степени» [25, С. 213].

Далее почленно поделим уравнение на $\cos^2 3x$, получим:

$$\mathrm{tg}^2 3x - 2\sqrt{3}\,\mathrm{tg} 3x + 3 = 0.$$

Используем уже знакомый нам метод замены переменной и введем новую переменную: $z = \mathrm{tg}\,3x$;

Получим: $z^2 - 2\sqrt{3}z + 3 = 0$;

Заметим, что: $z^2 - 2\sqrt{3}z + 3 = (z - \sqrt{3})^2$;

Преобразуем: $(z - \sqrt{3})^2 = 0$;

Значит: $z = \sqrt{3}$;

То есть: $\mathrm{tg}\,3x = \sqrt{3}$;

$3x = \mathrm{arctg}\sqrt{3} + \pi n$;

$3x = \frac{\pi}{3} + \pi n$;

$x = \frac{\pi}{9} + \frac{\pi n}{3}.$

Дале приступим к отбору корней из найденной серии решений, принадлежащие интервалу $(-\pi;\ \pi)$.

В данном случае будем использовать метод двойного неравенства:

«Нам нужно найти такие значения x, которые содержатся в интервале $(-\pi;\ \pi)$. т. е. удовлетворяют двойному неравенству $-\pi < x < \pi$.

Поскольку $x = \frac{\pi}{9} + \frac{\pi n}{3}$, получаем неравенство $-\frac{10}{3} < n < \frac{8}{3}$» [25, С. 213].

В итоге получаем: $-\pi < \frac{\pi}{9} + \frac{\pi n}{3} < \pi$.

«Осталось выяснилось, какие целочисленные значения параметра n удовлетворяют последнему неравенству. Это $-3, -2, -1, 0, 1, 2$.

Значит, если перечисленные шесть значений подставить вместо n в формулу решений $x = \frac{\pi}{9} + \frac{\pi n}{3}$, то мы тем самым и выделим интересующие нас корни уравнения, принадлежащие заданному интервалу $(-\pi;\ \pi)$.

- если $n = -3$, то $x = \frac{\pi}{9} - \pi = -\frac{8\pi}{9}$;
- если $n = -2$, то $x = \frac{\pi}{9} - \frac{2\pi}{3} = -\frac{5\pi}{9}$;
- если $n = -1$, то $x = \frac{\pi}{9} - \frac{\pi}{3} = -\frac{2\pi}{9}$;
- если $n = 0$, то $x = \frac{\pi}{9} + 0 = \frac{\pi}{9}$;
- если $n = 1$, то $x = \frac{\pi}{9} + \frac{\pi}{3} = \frac{4\pi}{9}$;
- если $n = 2$, то $x = \frac{\pi}{9} + \frac{2\pi}{3} = \frac{7\pi}{9}$.

Ответ: $-\frac{8\pi}{9}; -\frac{5\pi}{9};\ -\frac{2\pi}{9}; \frac{\pi}{9};\ \frac{4\pi}{9};\ \frac{7\pi}{9}$» [25, С. 213].

Разрабатываемая система задач для элективного курса «Тригонометрические уравнения» ориентирована на учащихся 10-11 классов профильного уровня обучения.

Данный курс направлен на подготовку учащихся к выполнению заданий ЕГЭ на профильном уровне.

Всё вышеперечисленное обуславливает определённый уровень сложности и направленность задач, которые войдут в данную систему.

2.3 Дифференцированная система тригонометрических уравнений по алгебре и началам математического анализа

В данном параграфе рассмотрим методические особенности конструирования системы дифференцированных заданий по алгебре и началам математического анализа как средства индивидуализации обучения старшеклассников.

«Система задач — это совокупность упорядоченных и подобранных в соответствии с поставленной целью задач, действующих как одно целое, взаимосвязь и взаимодействие которых приводят к намеченному результату» [19, С. 17].

Необходимо выделить важные признаки системы задач: «наличие определенной цели, обеспечение получения ожидаемого результата, избирательность и упорядоченность элементов» [19, С. 17].

Г. И. Ковалева [19] выделяет следующие «требования к системе задач:

– к структуре системы (иерархичность, рациональность объема, нарастание сложности);
– к функционированию системы как единого целого (целевая достаточность, полнота, адекватность содержанию образования);
– к задачам как элементам системы (целевое назначение каждой задачи в системе задач, возможность осуществления индивидуального подхода)» [19, С. 17].

При конструировании системы задач необходимо соблюдать следующие правила: «правило доступности (соответствие уровню обученности, учет психологических особенностей возрастных групп), правило однотипности (подбор или составление однотипных задач в соответствии с закономерностью появления неверных ассоциаций, выделенных психологом П.А. Шеваревым), правило разнообразия (включение задач, разнообразных по форме, содержанию и способу решения), правило противопоставления (включение задач на сходные и взаимообратные понятия, задач, не имеющих решения, контрпримеров), правило учета целей (подбор задач в соответствии с целью использования системы, с целевым назначением каждой задачи в системе), правило полноты (соответствие системе знаний, умений и навыков, изучение которых предусмотрено), правило усложнения (расположение задач в системе), правило структурности (взаимоподчиненность подсистем), правило индивидуализации (учет индивидуальных характеристик учащихся)» [19, С. 18].

Применение системы индивидуализированных задач для подготовки учащихся к выполнению заданий ЕГЭ на профильном уровне способствует развитию теоретических и практических навыков, а также поощряет развитие проблемно-ориентированного мышления, самоорганизации и активизации творческой деятельности.

«Модель уровневой дифференциации обучения математике подразумевает деление класса на типологические группы. В данном исследовании, основываясь на работах Р.А. Утеевой [50, 51], предлагается разделить учащихся класса следующим образом: учащиеся группы А демонстрируют ясное понимание предмета, имеют большие познания в математике, умеют строить логические умозаключения в процессе решения задач; учащиеся группы В имеют достаточно хорошие познания в математике; успешно решают большинство заданий, но зачастую не способны предоставить логическое объяснение решения задачи. Учащиеся групп С и D, которые владеют удовлетворительным или ниже уровнем знаний по изучаемой теме, в нашем исследовании не принимают участия, т.к. системы задач предлагаются учащимся 10-11 классов профильного уровня обучения» [45].

Стоит отметить, что перед учащимся класса ставятся учебные цели сопоставимые с особенностями типологической группы, к которой они относятся. Уровневый компонент дифференциации обучения раскрывается через систему знаний и умений, где задания, которые необходимо усвоить каждой группе учащихся класса, соответствуют следующим уровням: базовый, продвинутый и высокий.

В данном параграфе, в качестве примера, рассмотрим некоторые системы заданий, состоящие из тригонометрических уравнений. Но для начала, стоит отметить, что для составления системы заданий необходимо соблюсти несколько требований. Так, Т. Л. Овсянникова [31] предъявляет к системе дифференцированных заданий следующие требования: «учебные задания должны быть направлены на формирование способов их решения и способствовать систематизации знаний; предложенные задания должны побуждать учащихся к элементам творческой деятельности; необходимо, чтобы предлагаемые задачи были выстроены по нарастающему уровню сложности; при решении задач учащимся необходимо обращаться к ранее изученным алгоритмам и сформированным способам деятельности; задания должны соответствовать трем уровням сложности» [31, С. 153].

Предложенные автором требования к системе дифференцированных задач нами применялись при разработке элективного курса по теме «Тригонометрические уравнения», ориентированном на учащихся типологических групп А и В. Курс состоит из шести модулей, разделенных на три уровня сложности: базовый, продвинутый, высокий.

В качестве примера рассмотрим систему заданий, вошедшую в элективный курс. Задания базового уровня сложности содержат уравнения, при решении которых используются основные тригонометрические формулы, формулы приведения, свойства четности и нечетности функций. При решении уравнений применяются алгебраические методы решения уравнений.

«Пример 14. Решите уравнение: $2\sin 2x + 2\sqrt{3}\sin x = 2\cos x + \sqrt{3}$,

Пример 15. Решите уравнение: $\mathrm{tg}x + \cos(\frac{3\pi}{2} - 2x) = 0$,

Пример 16. Решите уравнение:

$\sin 2x + 2\sin(-x) + \cos(-x) - 1 = 0$» [39].

В заданиях продвинутого уровня сложности содержатся уравнения с исследованием ОДЗ; применяется метод замены переменной.

Пример 17. Решите уравнение: $\frac{5\cos x+4}{4\operatorname{tg}x-3}=0$,

Пример 18. Решите уравнение: $8\sin^2\left(\frac{7\pi}{12}+x\right)-2\sqrt{3}\cos 2x=5$,

Пример 19. Решите уравнение: $\sin(2x+\frac{\pi}{6})=\cos x+\cos(x+\frac{\pi}{6})\sin x$.

В заданиях высокого уровня сложности предлагаются уравнения с исследованием ОДЗ; уравнения, содержащие под корнем тригонометрические функции; задания, для решения которых используются формулы понижения степени и метод замены: $t=\sin x+\cos x$.

Пример 20. Решите уравнение: $\sqrt{\cos^2x-\sin^2x}\,(\operatorname{tg}2x-1)=0$,

Пример 21. Решите уравнение: $\frac{5\cos 2x-3\cos x+1}{25\sin^2x-9}=0$,

Пример 22. Решите уравнение: $\frac{\cos^2x-2\cos x\cos 2x-1}{\sqrt{\sin x}}=0$,

Пример 23. Решите уравнение: $\sin 2x=3(\sin x+\cos x-1)$.

Задания высокого уровня сложности предназначены для учащихся группы А. Задания продвинутого уровня сложности ориентированы на учащихся группы В, для учащихся группы А являются обязательными. Задания базового уровня сложности являются обязательными к выполнению для обеих типологических групп учащихся.

2.4 Элективный курс по теме «Тригонометрические уравнения»

Программа элективного курса «Тригонометрические уравнения» предназначена для обучающихся 10-11 классов профильного уровня. Она направлена на углубление, систематизацию знаний и навыков обучающихся в области математики, в частности в теме тригонометрических уравнений.

Для успешного освоения программы ученикам необходимы стойкие знания по школьному курсу математики, пройденному в основной школе.

Разработанная программа составлена в соответствии с требованиями стандарта математического образования.

Занятия будут проводиться в форме лекций и практических занятий с использованием задач из Единого государственного экзамена, взятых из открытого банка заданий ФИПИ [53]. Кроме того, в рамках курса будет организовано выполнение контрольных работ для проверки знаний и умений учеников. Курс рассчитан на 17 академических часов.

Актуальность предлагаемой программы подтверждается следующим:

– материал, предлагаемый в программе, позволяет закрепить изученное на более высоком уровне;

– содержание данного элективного курса расширяет и дополняет знания, которые уже усвоены старшеклассниками;

– материал, включенный в программу, обеспечивает возможность углубить понимание изученного на более глубоком уровне;

– полученные на элективном курсе знания и навыки помогут при прохождении Единого государственного экзамена.

Цель данного курса заключается в расширении и углублении знаний учащихся в области решения тригонометрических уравнений, а также тригонометрических уравнений, содержащих другие функции.

Задачи курса включают в себя:

– увеличение уровня понимания тригонометрических уравнений и приемов их решения;

– развитие навыков коммуникации и общеучебных умений работы в группе, а также самостоятельности;

– демонстрация учащимся разнообразия тригонометрических уравнений и разнообразия методов их решения;

– изучение методов решения тригонометрических уравнений и развитие умения использовать эффективные способы при решении.

Уникальность данного курса заключается в том, что он дает возможность учащимся систематизировать методы решения тригонометрических уравнений и расширить понимание их решений.

Основное внимание в рамках элективного курса будет уделено разбору методов решения тригонометрических уравнений, которые либо не изучаются в основной программе, либо в школьном курсе им уделяется мало внимания.

Преимущество данного элективного курса заключается в том, что за относительно небольшое количество часов удается охватить большой объем материала, разобраться в различных типах уравнений и оптимальных способах их решений. Задания этого курса также обладают практической значимостью для учащихся, поскольку готовят к успешной сдаче Единого государственного экзамена.

Практические занятия, проводимые в рамках данного курса, способствуют укреплению теоретических основ и развитию математического образа мышления. Практические занятия в рамках курса способствуют закреплению теоретических знаний и развитию математических навыков, которые являются важными как в академической среде, так и в повседневной жизни. Учащиеся получат не только теоретическую базу, но и практические навыки, необходимые для успешного решения разнообразных математических задач.

Текущий контроль уровня усвоения материала осуществляется в результате выполнения учащимися заданий, часть которых выполняется в классе, а другая часть индивидуально или в группе. Завершающим этапом оценки эффективности данной образовательной программы является проведение итоговой контрольной работы.

Предложенные элективный курс состоит из семи модулей, поделенных на три уровня сложности: базовый, продвинутый, высокий.

В каждом модуле представлена тема отбора корней, однако в последнем модуле она повторяется на более высоком уровне.

Программа элективного курса рассчитана на 17 часов (1 ч. в неделю).

Приведем календарно-тематическое планирование по данному элективному курсу (таблица 1).

Таблица 1 − Календарно–тематическое планирование

Содержание темы	Кол-во часов
I. Отбор корней	4
1. Отбор корней производится при помощи тригонометрического круга.	2
2. Отбор корней при помощи двойного неравенства.	2
II. Учет ОДЗ при решении тригонометрических уравнений	2
III. Уравнения, для решения которых используются формулы сложения и понижения степени.	2
IV. Уравнения с модулем.	2
V. Уравнения смешанного типа.	6
1. Уравнения с показательной функцией.	3
2. Уравнения логарифмической функцией.	3
V. Итоговая контрольная	1

Рассмотрим содержание данного курса «Тригонометрические уравнения».

Отбор корней (4 ч.).

Основная цель прохождения данного раздела – рассмотреть способы отбора корней при помощи тригонометрического круга.

В результате прохождения данного раздела у учащихся не должно остаться недопонимания о том, что такое область допустимых значений, область определения функции и как исключаются посторонние корни.

Отбор корней при помощи тригонометрического круга.

Пример 24. «Дано уравнение $\cos\left(\frac{3\pi}{2}+2x\right)=\cos x$.

а) Решите уравнение.

б) Укажите корни уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{5\pi}{2};\ 4\pi\right]$.

Решение:

«Используем формулу приведение и синуса двойного угла» [39].

$$\sin 2x = \cos x \Leftrightarrow 2\sin x\cos x = \cos x \Leftrightarrow \cos x(2\sin x - 1) = 0.$$

$$\left[\begin{array}{l}\cos x = 0\\ \sin x = \dfrac{1}{2}\end{array}\right.;$$

$$\left[\begin{array}{c}x = \dfrac{\pi}{2} + \pi k,\\ x = \dfrac{\pi}{6} + 2\pi k, k \in Z;\\ x = \dfrac{5\pi}{6} + 2\pi k,\end{array}\right.$$

б) С помощью единичной окружности отберём корни на отрезке [$\frac{5\pi}{4}$; 4π]» [39].

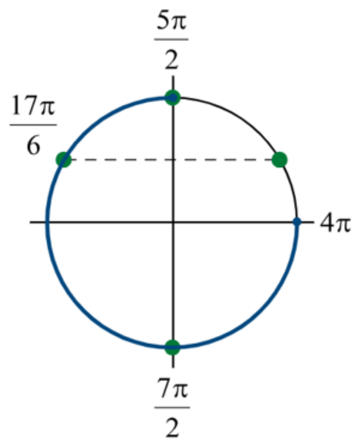

Рисунок 14 – Отбор корней при помощи единичной окружности

Получаем: $\frac{5\pi}{2}$; $\frac{17\pi}{6}$; $\frac{7\pi}{2}$ (рисунок 14).

Отбор корней при помощи двойного неравенства.

Пример 25. «а) Решите уравнение $\cos 3x\sin 3x = \cos\frac{\pi}{3}\cos\left(12x + \frac{3\pi}{2}\right)$.

б) Укажите корни уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{3\pi}{4};\ -\frac{\pi}{4}\right]$» [39].

Решим первую часть уравнения:

$$\cos 3x\sin 3x = \cos\frac{\pi}{3}\cos\left(12x + \frac{3\pi}{2}\right) \Leftrightarrow \frac{1}{2}\sin 6x = \frac{1}{2}\sin 12x.$$

$$\left[\begin{array}{c}6x = 12x + 2\pi k,\\ 6x = \pi - 12x + 2\pi k\end{array}\right.;$$

$$\left[\begin{array}{l} x = -\frac{\pi}{3}k, \\ 6x = \frac{\pi}{18} + \frac{\pi}{9}k, \end{array}\right. k \in Z.$$

А теперь проверим корни, принадлежащие отрезку $[-\frac{3\pi}{4}; -\frac{\pi}{4}]$ методом неравенств:

$$-\frac{3\pi}{4} \le -\frac{\pi}{3}k \le -\frac{\pi}{4} \Leftrightarrow -9 \le -4k \le -3 \Leftrightarrow k = 1; k = 2.$$

Подставив полученные значения k, получим $x = -\frac{2\pi}{3}$ и $x = -\frac{\pi}{3}$.

Следующий корень:

$$-\frac{3\pi}{4} \le \frac{\pi}{18} + \frac{\pi}{9}k \le -\frac{\pi}{4} \Leftrightarrow -27 \le 2 + 4k \le -9 \Leftrightarrow -29 \le 4k \le -11.$$

Получим ряд k: $k = -3;\ k = -4;\ k = -5;\ k = -6;\ k = -7.$

Подставим данные значения:

$$\mathrm{k} = -3\text{:}\ \frac{\pi}{18} - \frac{\pi}{3} = -\frac{5\pi}{18};$$

$$\mathrm{k} = -4\text{:}\ \frac{\pi}{18} - \frac{4\pi}{9} = -\frac{7\pi}{18};$$

$$\mathrm{k} = -5\text{:}\ \frac{\pi}{18} - \frac{5\pi}{9} = -\frac{9\pi}{18};$$

$$\mathrm{k} = -6\text{:}\ \frac{\pi}{18} - \frac{2\pi}{3} = -\frac{11\pi}{18};$$

$$\mathrm{k} = -7\text{:}\ \frac{\pi}{18} - \frac{7\pi}{9} = -\frac{13\pi}{18}.$$

Ответ: а) $\{\frac{\pi}{3}k, \frac{\pi}{18} + \frac{\pi}{9}k\}$, где $k \in Z$; б) $-\frac{5\pi}{18};\ -\frac{7\pi}{18};\ -\frac{9\pi}{18};\ -\frac{11\pi}{18};\ -\frac{13\pi}{18}.$

Учет ОДЗ при решении тригонометрических уравнений (2 ч.).

Главной целью является углубленное понимание понятия определения области допустимых значений. По завершении этого раздела студенты освоят навык исключения «лишних» корней из решений ввиду их несоответствия области определения или области значений тригонометрических и обратных тригонометрических функций.

Пример 26. Выполните. «а) Решите уравнение: $1 + \mathrm{ctg}2x = \frac{1}{\cos(\frac{3\pi}{2} - 2x)}$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $[-2\pi; -\frac{\pi}{2}]$» [39].

Необходимо решить уравнение и определить область допустимых значений, чтобы исключить посторонние корни:

Уравнения, для решения которых используются формулы сложения и понижения степени (2 ч.).

Основная цель – разобрать способы решения уравнений с применением формул сложения и понижения степени, выявить пробелы в знаниях учащихся, рассмотреть сложные задания номера 13 из Единого государственного экзамена.

Учащиеся должны овладеть разнообразными методиками решения тригонометрических уравнений и уметь применять формулы суммы и разности углов, а также формулы понижения и повышения степени.

После изучения данной темы студенты приобретают прочные навыки в решении тригонометрических уравнений, которые рассматриваются в этом разделе курса.

Пример 27. Выполните.

«а) Решите уравнение: $16\sin^4 x + 8\cos 2x - 7 = 0$. б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[0{,}5\pi; 2\pi]$» [39].

Для решения данного уравнения необходимо использовать формулу понижения степени.

Пример 28. Выполните задание.

а) Решите уравнение: $\sin x + 2\sin(2x + \frac{\pi}{6}) = \sqrt{3}\sin 2x + 1$. б) Определите, какие из его корней принадлежат отрезку $[-\frac{7\pi}{2};\ -2\pi]$.

Данное уравнение решается при помощи формулы сложения.

Пример 29. Выполните задание. а) Решите уравнение: $\sqrt{2}\sin 2x +$ $+4\cos^2(\frac{3\pi}{8} + x) = 2 + \sqrt{2}$. б) Определите, какие из его корней принадлежат отрезку $[\pi; \frac{5\pi}{2}]$.

Данное уравнение решается путем понижения степени и формулы сложения:

Пример 30. Решите уравнение: $2\sqrt{3}\sin^2 x + 2\sin x\cos x = \sqrt{3} + 1$.

Уравнение вида $A\sin x + B\cos x = C$. Метод введения вспомогательного угла.

Пример 31. Выполните задание. «а) Решите уравнение: $\sin(2x + \frac{\pi}{6}) =$ $= \cos x + \cos(x + \frac{\pi}{6})\sin x$. б) Найди все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[-5\pi; -\frac{7\pi}{2}]$» [39].

Данное уравнение решается при помощи формулы сложения и введения вспомогательного угла.

Уравнения с модулем (2 ч.).

Основная цель – рассмотреть способы решения тригонометрических уравнений с модулем и научиться использовать их при решении.

В процессе прохождения данного раздела, у учащихся сформируется устойчивое представление о том, как решаются тригонометрические уравнения с модулем.

Пример 32. Выполните задание. а) Решите уравнение: $|\cos x + \sin x| =$ $= \sqrt{2}\sin 2x$.

б) Найдите решения уравнения, принадлежащему отрезку [3;5].

Данное уравнение решается путем раскрытия модуля по определению.

Уравнения смешанного типа (4 ч.)

Основная цель – рассмотреть способы решения тригонометрических уравнений, содержащих показательную и логарифмическую функцию и научиться решать уравнения данного вида.

Учащиеся должны определять какой способ решения будет наиболее рациональным для предложенного тригонометрического уравнения.

В результате изучения данного раздела, у учащихся не должно остаться недопонимания по решению тригонометрических уравнений, разных типов, рассмотренных в этом разделе элективного курса.

Уравнения с показательной функцией.

Пример 33. Выполните задание. «а) Решите уравнение $9^{\sin x} + 9^{-\sin x} = \frac{10}{3}$. б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[-\frac{7\pi}{2}; -2\pi]$» [39].

Данное уравнение содержит показательную функцию и решается путем введения замены.

Пример 34. Выполните. «а) Решите уравнение $\frac{3^{\cos x}}{9^{\cos^2 x}} = 4^{2\cos^2 x - \cos x}$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[-\frac{3\pi}{2}; \frac{\pi}{6};]$» [39].

Данное тригонометрическое уравнение содержит показательную функцию с разными основаниями, для его решения необходимо осуществить переход к одному дробному основанию.

Пример 35. Выполните. «а) Решите уравнение $\frac{16^{\sin^2 x} - 4^{\sin x}}{\sqrt{\cos x} - 1} = 0$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[-\frac{3\pi}{4}; \pi]$» [39].

Тригонометрическое уравнение, решаемое с учётом область определения уравнения.

Уравнения с логарифмической функцией.

Пример 36. Выполните задание. «а) Решите уравнение: $2\log_3^2(2\cos x) - 5\log_3(2\cos x) + 2 = 0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[\pi; \frac{5\pi}{2}]$» [39].

Данное тригонометрическое уравнение содержит логарифмическую функцию, решается путем введения замены:

Пример 37. Выполните задание. «а) Решите уравнение: $\log_4(2^{2x} - -\sqrt{3}\cos x - \sin 2x) = x$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[\frac{\pi}{2}; -\frac{3\pi}{2}]$» [39].

Данное тригонометрическое уравнение содержит логарифмическую функцию. Решается при помощи использования основного логарифмического тождества.

Итоговая контрольная работа.

Цель – контроль усвоения пройденного материала на элективном курсе.

Учащиеся при решении заданий контрольной работы должны распознать вид уравнения и рациональный способ его решения.

Пример 38. «Выполните задание.

а) Решите уравнение $\cos(\frac{\pi}{3} + 2x) = \sqrt{2}\sin x$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[-5\pi; -4\pi]$» [39].

Пример 39. Выполните задание. а) Решите уравнение $\sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) =$

$= \cos x + \cos(x - \frac{\pi}{3})\sin x$.

«б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[-\frac{11\pi}{2}; -4\pi]$» [39].

Пример 40. Выполните задание. «а) Решите уравнение: $\frac{26\cos^2 x - 23\cos x + 5}{13\sin x - 12} = 0$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[-\frac{5\pi}{4}; -\pi]$» [39].

Пример 41. Выполните задание. «а) Решите уравнение: $\log_2(\cos x + +\sin 2x + 8) = 3$.

б) Найдите все корни, принадлежащие отрезку $[\frac{3\pi}{2}; 3\pi]$» [39].

Пример 42. Выполните задание.

«а) Решите уравнение: $\log_4(2^{2x} - \sqrt{3}\cos x - 6\sin^2 x) = x$.

б) Найдите все корни, принадлежащие отрезку $[\frac{5\pi}{2}; 4\pi]$» [39].

Список рекомендуемой литературы для учителя:

«Мерзляк А.Г., Номировский Д.А., Поляков М.В. Математика. Алгебра и начала математического анализа. Базовый уровень,10 класс./ А. Г. Мерзляк, Д. А. Номировский 2-е изд., стереотип. М.: Вентана-Граф, 2019 – 477 с.» [24].

«Мордкович А. Г., Семёнов П. В. Алгебра и начала математического анализа. 10 класс. В 2 частях: ч.1 учебник (базовый и углубленный уровни) / А. Г. Мордкович, П. В. Семенов. – Мнемозина М. 2020г.» [25].

«Мордкович А. Г., Семёнов П. В. Алгебра и начала математического анализа. 10 класс. В 2 частях: ч.2. задачник (базовый и углубленный уровни) / А. Г. Мордкович, П. В. Семенов. – Мнемозина М. 2020 г.» [26].

«Никольский С.М. Алгебра и начала математического анализа: Учебник для 10 класса образовательных учреждений: базовый и профильный уровни. ФГОС / С.М. Никольский, М.К. Потапов, Н.Н. Решетников, А.В. Шевкин. М.: Просвещение. 2016. 430 с.» [30].

Решу ЕГЭ Образовательный портал для подготовки к экзаменам http://math.reshuege.ru/ [39].

2.5 Дифференцированные задания по теме «Тригонометрические уравнения» и методика их реализации в современных условиях обучения математике

Задания с отбором корней.

Базовый уровень дифференцированных заданий.

Задания, где нужно решить тригонометрические уравнения и произвести отбор корней при помощи единичной окружности на координатной плоскости.

Пример 43. «а) Решите уравнение $2\sin 2x + 2\sqrt{3}\sin x = 2\cos + \sqrt{3}$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[-\pi; \frac{\pi}{2}]$.

Решение. а) Используем формулу синуса двойного угла, выносим за скобки: $4\sin x\cos x + 2\sqrt{3}\sin x = 2\cos + \sqrt{3} \Leftrightarrow (2\sin x - 1)\left(2\cos x + \sqrt{3}\right) = 0$,

$$\left[\begin{array}{l} \sin x = \frac{1}{2}, \\ \sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{6} + 2\pi k, \\ x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi k, \\ x = \pm\frac{5\pi}{6} + 2\pi k, k \in Z. \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{6} + 2\pi k, \\ x = -\frac{5\pi}{6} + 2\pi k, \\ x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi k, k \in Z. \end{array}\right.$$

б) Изображая корни на единичной окружности, находим, что отрезку $[-\pi; \frac{\pi}{2}]$ принадлежат корни $-\frac{5\pi}{6}$ и $\frac{\pi}{6}$ (рисунок 15)» [39].

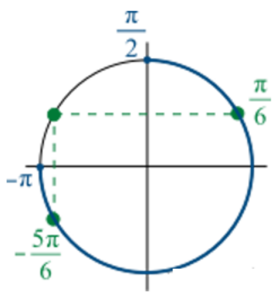

Рисунок 15 – Изображение решение на единичной окружности

Ответ: а) $\{\frac{\pi}{6} + 2\pi k,\ -\frac{5\pi}{6} + 2\pi k, \frac{5\pi}{6} + 2\pi k : k \in Z\}$; б) $-\frac{5\pi}{6}; \frac{\pi}{6}$.

Продвинутый уровень дифференцированных заданий:

При решении данного уравнения, отбор корней производится при помощи двойного неравенства.

Применение данного метода обусловлено тем, что корни уравнения содержат период не кратный 2π, что делает отбор корней при помощи круга затруднительным; а также применение метода двойного неравенства для отбора корней целесообразно, когда период в n раз больше 2π.

Пример 44. «а) Решите уравнение $\cos 3x\sin 3x = \cos\frac{\pi}{3}(12x + \frac{3\pi}{2})$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[-\frac{3\pi}{4}; -\frac{\pi}{4}]$.

Решение: а) Преобразуем выражение: $\cos 3x \sin 3x = \cos\frac{\pi}{3}(12x + \frac{3\pi}{2}) \Leftrightarrow$ $\frac{1}{2}\sin 6x = \frac{1}{2}\sin 12x \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 6x = 12x + 2\pi k, \\ 6x = \pi - 12x + 2\pi k \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\frac{\pi}{3}k, \\ x = \frac{\pi}{18} + \frac{\pi}{9}k, \end{array}\right. k \in Z.$

б) проверим корни на отрезке $[-\frac{3\pi}{4}; -\frac{\pi}{4}]$ методом неравенств:

$$-\frac{3\pi}{4} \le -\frac{\pi}{3}k + \frac{\pi}{9}k \le -\frac{\pi}{4} \Leftrightarrow -27 \le 2 + 4k \le -9 \Leftrightarrow -29 \le 4k \le -11.$$

Получаем ряд k:

$k = -3$: $\frac{\pi}{18} - \frac{\pi}{3} = -\frac{5\pi}{18}$;

$k = -4$: $\frac{\pi}{18} - \frac{4\pi}{9} = -\frac{7\pi}{18}$;

$k = -5$: $\frac{\pi}{18} - \frac{5\pi}{9} = -\frac{9\pi}{18}$;

$k = -6$: $\frac{\pi}{18} - \frac{2\pi}{3} = -\frac{11\pi}{18}$;

$k = -7$: $\frac{\pi}{18} - \frac{7\pi}{9} = -\frac{13\pi}{18}$.

Ответ: а) $\{\frac{\pi}{3}k, \frac{\pi}{18} + \frac{\pi}{9}k\}$ где $k \in Z$.

б) $-\frac{13\pi}{18}; -\frac{11\pi}{18}; -\frac{9\pi}{18}; -\frac{7\pi}{18}; -\frac{5\pi}{18}$» [39].

Высокий уровень дифференцированных заданий:

На данном уровне рассматриваются задания с объединением корней уравнений в серию. В заданиях базового и продвинутого уровня задача объединения корней в серию не ставится, можно записывать полученные серии, при чем используя для обозначения целочисленных параметров только одну букву. В заданиях высокого уровня необходимо отобрать общие решения в нескольких сериях решений. Это задания вида: $f(kx) \pm g(mx) = \pm 2$ или $f(kx) \times g(mx) = \pm 1$, где f и g − функции синус или косинус, k и m – фиксированные целые числа. При решении системы для записи решения нельзя использовать один целочисленный параметр, так как предстоит нахождение общего решения. При нахождении решения в двух сериях задача сводится к алгоритму Евклида и решению линейного уравнения с двумя неизвестными. Не редко получается, что все решения второй серии содержатся в первой.

Пример 45. «а) Решите уравнение $\sin\left(2x+\frac{2\pi}{3}\right)\cos\left(4x+\frac{\pi}{3}\right)-\cos2x=$ $=\frac{\sin^2 x}{\cos(-\frac{\pi}{3})}$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-2\pi;\frac{3\pi}{2}\right]$.

Решение:

а) Знаменатель правой части равен $\frac{1}{2}$. Представим уравнение как произведение синуса и косинуса, равное 1:

$$\sin\left(2x+\frac{2\pi}{3}\right)\cos\left(4x+\frac{\pi}{3}\right)-\cos2x=2\sin^2 x$$

$$\sin\left(2x+\frac{2\pi}{3}\right)\cos\left(4x+\frac{\pi}{3}\right)=1$$

Модули множителей не превосходят 1, поэтому возможны только два случая: оба множителя равны 1 или −1» [39].

$$\begin{cases}\sin\left(2x+\frac{2\pi}{3}\right)=1\\ \cos\left(4x+\frac{\pi}{3}\right)=1\end{cases};\ \text{или}\ \begin{cases}\sin\left(2x+\frac{2\pi}{3}\right)=-1\\ \cos\left(4x+\frac{\pi}{3}\right)=-1\end{cases};$$

«Первый случай:

$$\begin{cases}2x+\frac{2\pi}{3}=\frac{\pi}{2}+2\pi k\\ 4x+\frac{\pi}{3}=2\pi n\end{cases};\quad \begin{cases}2x=-\frac{\pi}{6}+2\pi k\\ 4x=-\frac{\pi}{3}+2\pi n\end{cases};\quad \begin{cases}x=-\frac{\pi}{12}+\pi k\\ x=-\frac{\pi}{3}+\frac{\pi n}{2}\end{cases};\quad k,n\in z$$

Решая полученную систему, находим: $x=-\frac{\pi}{12}+\pi k$, k$\in z$.

Второй случай:

$$\begin{cases}2x+\frac{2\pi}{3}=-\frac{\pi}{2}+2\pi k\\ 4x+\frac{\pi}{3}=\pi+2\pi n\end{cases};\quad \begin{cases}2x=-\frac{7\pi}{6}+2\pi k\\ 4x=\frac{2\pi}{3}+2\pi n\end{cases};\quad \begin{cases}x=-\frac{7\pi}{12}+\pi k\\ x=\frac{\pi}{6}+\frac{\pi n}{2}\end{cases};\ k,n\in \boldsymbol{z}$$

Эта система решений не имеет. Тем самым искомое решение $x = -\frac{\pi}{12} + \pi k$, k∈ z.

б) С помощью числовой окружности найдем корни уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-2\pi; \frac{3\pi}{2}\right]$ (рисунок 16)» [39].

$x_1 = -2\pi + \pi - \frac{\pi}{12} = -\frac{13\pi}{12}$;

$x_2 = -2\pi + 2\pi - \frac{\pi}{12} = -\frac{\pi}{12}$;

$x_3 = \frac{3\pi}{2} - \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{12} = \frac{11\pi}{12}$;

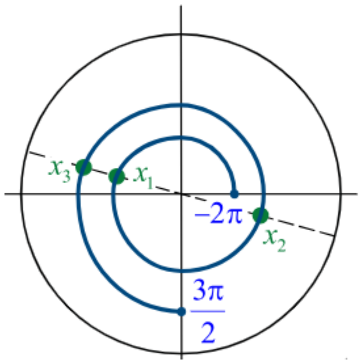

Рисунок 16 – Корни, принадлежащие отрезку $\left[-2\pi; \frac{3\pi}{2}\right]$

Ответ: а) $x = -\frac{\pi}{12} + \pi k$, k∈ z; б) $-\frac{13\pi}{12}$; $-\frac{\pi}{12}$; $\frac{11\pi}{12}$.

Задания, в которых необходимо учитывать область допустимых значений функции.

В этих заданиях необходимо учитывать ограничения ОДЗ, так как в результате решения могут получаться «посторонние» корни.

Базовый уровень дифференциации заданий.

Уравнения, которые можно схематично представить так:

$\frac{\mathrm{f(x)}}{\mathrm{g(x)}} = 0, \frac{\mathrm{f(x)}}{\sqrt{\mathrm{g(x)}}} = 0, \mathrm{f(x)} \times \sqrt{\mathrm{g(x)}} = 0.$

где f(x) и g(x)– тригонометрические функции.

В качестве примера приведем следующие уравнения:

$\frac{5\cos x + 4}{4\mathrm{tg}x - 3} = 0$; $\frac{(\sin x - 1)(2\cos x + 1)}{\sqrt{\mathrm{tg}x}} = 0.$

Рассмотрим уравнение с решением:

Пример 46. «а) Решите уравнение $(2\mathrm{sinx} + \sqrt{3}) \times \sqrt{\mathrm{cosx}} = 0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[\frac{3\pi}{2}; \frac{7\pi}{2}]$.

Решение:

$$\left(2\mathrm{sinx} + \sqrt{3}\right) \times \sqrt{\mathrm{cosx}} = 0;$$

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} \mathrm{cosx} = 0, \\ \mathrm{sinx} = -\frac{\sqrt{3}}{2}; \end{array}\right. \\ \mathrm{cosx} \geq 0 \end{cases}$$

$$\left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{2} + \pi k, \\ x = -\frac{\pi}{3} + 2\pi k, k \in Z. \end{array}\right.$$

Ответ: $\{\mathrm{x} = \frac{\pi}{2} + \pi\mathrm{k}, -\frac{\pi}{3} + 2\pi\mathrm{k}: \mathrm{k} \in \mathrm{Z}\}$» [39].

Продвинутый уровень дифференцированных заданий.

Один из способов повышения сложности заключается в увеличении количества функций, входящих в виде множителей числителя или знаменателя.

Рассмотрим уравнение, для решения которого необходимо исключить посторонние корни.

Пример 47. «а) Решите уравнение: $\frac{5\mathrm{cos2x} - 3\mathrm{cosx} + 1}{25\mathrm{sin}^2\mathrm{x} - 9} = 0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[\frac{7\pi}{2}; 5\pi]$.

Решение: а) Уравнение определено при $sinx \neq \frac{3}{5}$. При таких значениях переменной числитель должен быть равным нулю. Используя формулу косинуса двойного угла получаем» [39].

$$5\mathrm{cos2x} - 3\mathrm{cosx} + 1 = 0 \Leftrightarrow 10\mathrm{cos}^2\mathrm{x} - 3\mathrm{cosx} - 4 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \mathrm{cosx} = \frac{4}{5}, \\ \mathrm{cosx} = -\frac{1}{2}. \end{array}\right.$$

«Если $\cos x = \frac{4}{5}$ то в силу основного тригонометрического тождества $sinx = \pm\frac{3}{5}$. поэтому соответствующие значения переменной являются посторонними корнями.

Уравнение $\cos x = -\frac{1}{2}$ дает решения $x = \pm\frac{2\pi}{3}+2\pi k, k \in Z$.

б) Чтобы отобрать корни, рассмотрим каждую из серий отдельно. Имеем: $\frac{7\pi}{2} \le \frac{2\pi}{3} + 2\pi k \le 5\pi \Leftrightarrow \frac{7}{4} + \frac{1}{3} \le k \le \frac{5}{2} + \frac{1}{3} \Leftrightarrow 2\frac{1}{12} \le k \le 2\frac{5}{6}$. Найденному значению параметра соответствует решение: $\frac{2\pi}{3} + 4\pi = \frac{14\pi}{3}$» [39].

Ответ: $\{-\frac{2\pi}{3} + 2\pi k,\ \frac{2\pi}{3} + 2\pi k: k \in Z\}$; б) $\frac{14\pi}{3}$.

Высокий уровень дифференцированных заданий.

Усложнение за счет введения сложных функций $f(kx)$и $g(mx)$ вместо $f(x)$и $g(x)$, где $f(x)$и $g(x)-$ тригонометрические функции, а k и m — фиксированные целые числа. Приведем уравнение, чтобы наглядно показать данное усложнение: $\sqrt{\sin x \cos x}\,(\frac{1}{\mathrm{tg}2x} + 1) = 0$.

В данном ниже уравнение подкоренное выражение содержит косинус двойного угла. Обычно в заданиях раскрывается двойной угол, в этом же задании, наоборот, подкоренное выражение необходимо представить в виде двойного угла, и в дальнейшем нахождение ОДЗ делается по двойному углу.

Пример 48. «а) Решите уравнение: $\sqrt{\cos^2 x - \sin^2 x}(\mathrm{tg}2x - 1) = 0$.

Решение. Преобразуем уравнение:

$$\sqrt{\cos^2 x - \sin^2 x}(\mathrm{tg}2x - 1) = 0 \Leftrightarrow \sqrt{\cos 2x}(\mathrm{tg}2x - 1) = 0.$$

Первый множитель не может быть равен нулю, поскольку $cos2x$ — знаменатель tg2x. Тогда имеем:

$$\begin{cases} \mathrm{tg}2x - 1 = 0 \\ \cos 2x > 0 \end{cases}; \quad \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = \frac{\pi}{4} + \pi k, k \in Z \\ \cos 2x > 0 \end{cases};$$

$$x = \frac{\pi}{8} + \pi k, k \in Z.$$

($*$): Учитывая условие $\cos 2x > 0$ из решений, лежащих в 1 и 3 четвертях, выбираем решения, лежащие в 1 четверти (рисунок 17)» [39].

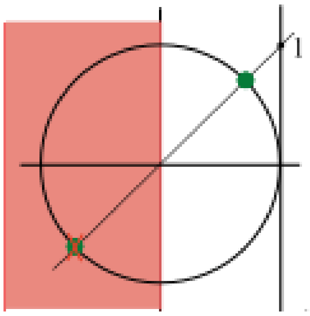

Рисунок17 – Изображение корней на единичной окружности

Ответ: $\{\frac{\pi}{8} + \pi k, k \in Z\}$.

Уравнения, для решения которых используются формулы сложения и понижения степени.

Базовый уровень дифференцированных заданий.

Пример 49. Для того, чтобы решить данное уравнение необходимо выполнить тригонометрические преобразования.

«а) Решите уравнение: $2\sin^2 x + \sqrt{2}\sin(x + \frac{\pi}{4}) = \cos x$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку$[-2\pi; -\frac{\pi}{2}]$.

Решение:

Выполним преобразования:

$2\sin^2 x + \sin x + \cos x = \cos x$;

$2\sin^2 x + \sin x = 0$;

$\sin x(2\sin x + 1) = 0$;

$$\left[\begin{array}{l} \sin x = 0 \\ \sin x = -\frac{1}{2}; \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} x = \pi k, \\ x = -\dfrac{\pi}{6} + 2\pi k, \\ x = -\dfrac{5\pi}{6} + 2\pi k, k \in Z. \end{array}\right.$$

Ответ: $\{\pi k, -\frac{\pi}{6} + 2\pi k; -\frac{5\pi}{6} + 2\pi k: k \in Z\}$» [39].

Продвинутый уровень дифференцированных заданий.

Пример 50. «а) Решите уравнение: $\sin(2x + \frac{\pi}{6}) = \cos x + \cos(x + \frac{\pi}{6})\sin x$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[-5\pi; \frac{7\pi}{2}]$.

Решение:

Запишем исходное уравнение в виде:

$$\sin\left(x + x + \frac{\pi}{6}\right) = \cos x + \cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right)\sin x;$$

$$\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = \cos x + \cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right)\sin x = \cos x + \cos(x + \frac{\pi}{6})\sin x;$$

$$\cos x(\sin(x + \frac{\pi}{6}) \ni -1) = 0.$$

Значит, $\cos x = 0$ или $\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$ =1, откуда $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$ илих $= \frac{\pi}{3} + \pi k, k \in Z$.

Ответ: $\frac{\pi}{2} + \pi k; \frac{\pi}{3} + \pi k, k \in Z$ » [39].

Высокий уровень дифференцированных заданий

Для решения данного типа уравнений необходимо использовать формулу понижения степени и формула сложения.

На начальном этапе использование формулы сложения не приведет к желаемому результату. В этом примере сначала надо использовать формулу понижения степени, только затем формулу сложения.

Пример 51. «а) Решите уравнение $8\sin^2(\frac{7\pi}{12} + x) - 2\sqrt{3}\cos 2x = 5$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[-\frac{7\pi}{2}; -\frac{5\pi}{2}]$.

Решение:

Заметим, что $\sin(\frac{7\pi}{12} + x) = \sin(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{12} + x) = \cos(\frac{\pi}{12} + x)$.

Преобразуем уравнение:

$$\sin\left(\frac{7\pi}{12} + x\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{12} + x\right) = \cos\left(\frac{\pi}{12} + x\right);$$

$$2\sqrt{3}\cos 2x - 2\sin 2x - 2\sqrt{3}\cos 2x = 1 \Leftrightarrow \ 2\sin 2x = -1 \Leftrightarrow \sin 2x = -\frac{1}{2}.$$

$$\left[\begin{array}{l} 2x = -\frac{\pi}{6} + 2\pi k, \\ 2x = -\frac{5\pi}{6} + 2\pi k. \end{array}\right. k \in Z.$$

б) С помощью числовой окружности отберём корни, принадлежащие отрезку $[-\frac{7\pi}{2}; -\frac{5\pi}{2}]$ (рисунок 18)» [39].

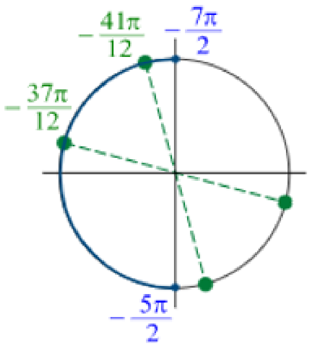

Рисунок 18 – Отбор корней при помощи числовой окружности

Ответ: $-\frac{5\pi}{6} + 2\pi k$; $-\frac{\pi}{6} + 2\pi k$, $k \in Z$.

Уравнения с модулем.

Для решения данного уравнения необходимо раскрыть модуль по определению.

Пример 52.

«а) Решите уравнение $|\cos x + \cos 3x| = -\cos 2x$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\pi; \frac{\pi}{2}\right]$.

Решение. а) Исходное уравнение имеет смысл только при $\cos 2x \leq 0$, тогда, используя формулу перехода от суммы в произведение, получим эквивалентные совокупности:

$$\left[\begin{array}{l} \cos x + \cos 3x = -\cos 2x \\ \cos x + \cos 3x = \cos 2x \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2\cos 2x \cdot \cos x + \cos 2x = 0 \\ 2\cos 2x \cdot \cos x + \cos 2x = 0 \end{array}\right.;$$

$$\left[\begin{array}{l}\cos 2x(2\cos x+1)=0\\ \cos 2x(2\cos x-1)=0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos 2x=0\\ \cos x=\frac{1}{2}\\ \cos x=-\frac{1}{2}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi k}{2}\\ x=-\frac{\pi}{3}+\pi k\\ x=\frac{\pi}{3}+\pi k, k\in z\end{array}\right.$$

Все найденные серии корней удовлетворяют условию $\cos 2x \leq 0$.

б) Отберем корни при помощи единичной окружности, получим: $-\frac{3\pi}{4}$; $-\frac{2\pi}{3}$; $-\frac{\pi}{3}$; $-\frac{\pi}{4}$; $\frac{\pi}{4}$; $\frac{\pi}{3}$ (рисунок 19)» [39].

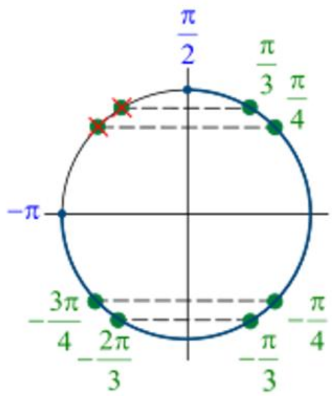

Рисунок 19 – Отбор коней, принадлежащих отрезку $[-\pi; \frac{\pi}{2}]$

Ответ: а) $x=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi k}{2}$; $x=-\frac{\pi}{3}+\pi k$; $x=\frac{\pi}{3}+\pi k$, $k\in z$; б) $-\frac{3\pi}{4}$; $-\frac{2\pi}{3}$; $-\frac{\pi}{3}$; $-\frac{\pi}{4}$; $\frac{\pi}{4}$; $\frac{\pi}{3}$.

Продвинутый уровень дифференцированных заданий

Эквивалентный переход с возведением в квадрат.

Пример 53. «а) Решите уравнение $|\cos x+\sin x|=\sqrt{2}\cdot\sin 2x$.

б) Найдите решения уравнения, принадлежащие отрезку [3; 5].

Решение. а) Возведем обе части уравнения в квадрат:

$|\cos x+\sin x|=\sqrt{2}\times\sin 2x$;

$$\begin{cases}\cos x+\sin x)^2=2\sin^2 2x\\ \sin\geq 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}1+\sin 2x=2\sin^2 2x\\ \sin\geq 0\end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases}\left[\begin{array}{l}\sin 2x = 1\\ \sin 2x = -\frac{1}{2}\end{array}\right.\\ \sin \geq 0\end{cases} \Leftrightarrow \sin 2x = 1 \Leftrightarrow 2x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + \pi k,\ k \in z.$$

б) Если то $k \leq 0$, то $x \leq \frac{\pi}{4} < 1$, поэтому при таких k решений на отрезке [3; 5] нет.

Если $k = 1$, то $x = \frac{5\pi}{4}$. Заметим, что $3 = \frac{12}{4} < \frac{5\pi}{4} < \frac{20}{4} = 5$, поэтому корень $\frac{5\pi}{4}$лежит на отрезке [3; 5].

Если $k \leq 2$, то $x \geq \frac{9\pi}{4} > 6$, поэтому при так*их k* решений на отрезке [3; 5] нет.

Ответ: $x = \frac{\pi}{4} + \pi k, \frac{5\pi}{4}$.

Высокий уровень дифференцированных заданий

Пример 54. Использование свойств модуля» [39].

$(\cos^2 x - \cos x)^2 = (\sin^2 x - \sin x)^2$;

$|\cos^2 x - \cos x| = |\sin^2 x - \sin x|$;

$$\left[\begin{array}{l}\cos^2 x - \cos x = \sin^2 x - \sin x\\ \cos^2 x - \cos x = -(\sin^2 x - \sin x)\end{array}\right.;$$

$$\left[\begin{array}{l}\cos^2 x - \sin^2 x = \cos x - \sin x\\ \cos^2 x + \sin^2 x = \cos x + \sin x\end{array}\right.;$$

$$\left[\begin{array}{l}\cos^2 x - \sin^2 x - \cos x + \sin x = 0\\ \cos x + \sin x = 1\end{array}\right.;$$

$$\left[\begin{array}{l}(\cos x - \sin x)(\cos x + \sin x - 1) = 0\\ \cos x + \sin x = 1\end{array}\right.;$$

$$\left[\begin{array}{l}\cos x - \sin x = 0\\ \cos x + \sin x = 1\\ \cos x + \sin x = -1\end{array}\right.;$$

$$\left[\begin{array}{l}x = \frac{\pi}{4} + \pi k\\ x = 2\pi k\\ x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in z\end{array}\right.;$$

Ответ: $x = \frac{\pi}{4} + \pi k$, $x = 2\pi k$, $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$, $k \in z$.

Тригонометрические уравнения, содержащие показательную и логарифмическую функции.

Базовый уровень сложности дифференцированных заданий.

Уравнения, содержащие показательную или логарифмическую функцию.

Пример 55. «а) Решите уравнение: $15^{\cos x} = 3^{\cos x} \cdot 5^{\sin x}$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[5\pi; \frac{13\pi}{2}\right]$.

Решение:

а) Преобразуем исходное уравнение: $3^{\cos x} \cdot 5^{\cos x} = 3^{\cos x} \cdot 5^{\sin x}$; $5^{\cos x} = 5^{\sin x}$; $\cos x = \sin x$; $\mathrm{tg}x = 1$. $x = \frac{\pi}{4} + \pi k, k \in z$.

б) С помощью числовой окружности отберем корни, принадлежащие отрезку $\left[5\pi; \frac{13\pi}{2}\right]$ (рисунок 20)» [39].

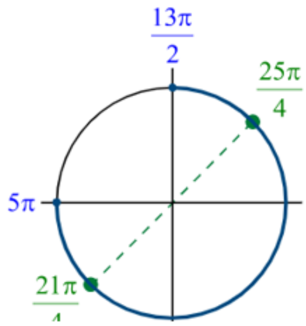

Рисунок 20 – Отбор коней принадлежащие отрезку $[-\pi; \frac{\pi}{2}]$

Получим числа: $\frac{21\pi}{4}; \frac{25\pi}{4}$.

Ответ: а) $x = \frac{\pi}{4} + \pi k, k \in z$; б) $\frac{21\pi}{4}; \frac{25\pi}{4}$.

Продвинутый уровень дифференциации заданий.

Логарифмические уравнения с учетом области допустимых значений.

Пример 56. «а) Решите уравнение $\frac{(\mathrm{tg}x + \sqrt{3})(\log_{13}(2\sin^2 x)}{(\log_{13}(\sqrt{2}\cos x)} = 0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{3\pi}{2}; \frac{5\pi}{2}\right]$.

Решение:

$$а)\begin{cases}\left[\begin{array}{l}tgx+\sqrt{3}=0\\ 2\sin^2x=1\end{array}\right.\\ \sqrt{2}\cos x\neq 1\\ \cos x>0\\ \sin x\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left[\begin{array}{l}tgx=-\sqrt{3}\\ \sin x=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}\end{array}\right.\\ \cos x\neq\pm\frac{\sqrt{2}}{2}\\ \cos x>0\\ \sin x\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\begin{cases}tgx=-\sqrt{3}\\ \cos x>0\end{cases}\Leftrightarrow\ x=-\frac{\pi}{3}+2\pi k, k\in z.$$

б) С помощью числовой окружности отберём корни, принадлежащие отрезку $\left[\frac{3\pi}{2};\frac{5\pi}{2}\right]$. Получим число $\frac{5\pi}{3}$ (рисунок 21)» [39].

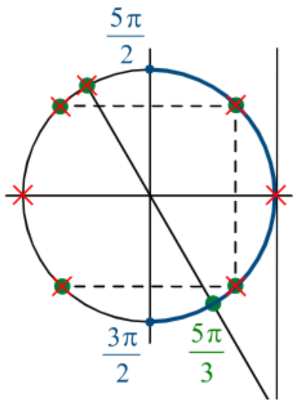

Рисунок 21 – Отбор коней принадлежащие отрезку $\left[\frac{3\pi}{2};\frac{5\pi}{2}\right]$

Ответ: а) $x=-\frac{\pi}{3}+2\pi k,\ k\in z$; б) $\frac{5\pi}{3}$.

Высокий уровень дифференцированных заданий.

В заданиях данного уровня раскрытие синуса двойного угла, использование методов преобразования суммы в произведение не приведут к решению. В этом примере необходимо увидеть формулу сложения, а затем использовать формулу преобразования из суммы в произведение.

Пример 57. «а) Решите уравнение $2\sin 2x-\cos x=\sqrt{3}\sin x$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[-2\pi;-\frac{\pi}{2}]$.

Решение**.** а) Преобразуем уравнение:

$$2\sin2x - \cos x = \sqrt{3}\sin x \Leftrightarrow \ \sin2x = \sin x \times \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\cos;$$

$$\Leftrightarrow 2\cos(\frac{3x}{2} + \frac{\pi}{12})\sin(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{12}) = 0.$$

$$\left[\begin{array}{l}\cos(\frac{3x}{2} + \frac{\pi}{12}) = 0 \\ \sin(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{12}) = 0\end{array}\right.; \quad \left[\begin{array}{l}\frac{3x}{2} + \frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{2} + \pi k \\ \frac{x}{2} + \frac{\pi}{12} = \pi k\end{array}\right.; \quad \left[\begin{array}{l}x = \frac{5\pi}{18} + \frac{2\pi k}{3} \\ x = \frac{\pi}{6} + 2\pi k\end{array}\right.;$$

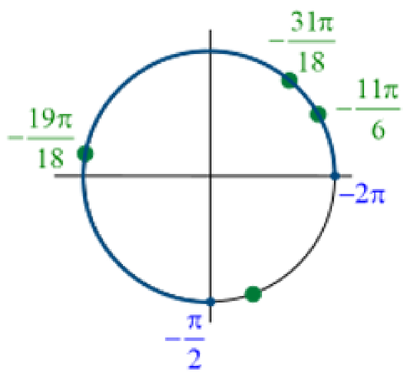

Рисунок 22 – Отбор коней принадлежащие отрезку $[-2\pi; -\frac{\pi}{2}]$

б) Отберём корни при помощи тригонометрической окружности

Подходят: $-\frac{11\pi}{6}; -\frac{19\pi}{18}; -\frac{31\pi}{18}$ » [39].

Ответ: а) $\{ x = \frac{5\pi}{18} + \frac{2\pi k}{3};\ x = \frac{\pi}{6} + 2\pi k\colon k \in Z\}$; б) $-\frac{11\pi}{6}; -\frac{19\pi}{18}; -\frac{31\pi}{18}$.

Дифференцированные задания по теме «Тригонометрические уравнения», с которыми необходимо ознакомиться в рамках элективного курса, могут быть преподнесены учащимся с помощью технологии интерактивных модулей LearningApps [61].

Выбор данной технологии обусловлен тем, что она способствует эффективной реализации таких дидактических принципов, как доступность, наглядность, сознательность, активность и т.д.

Использование компьютерных технологий «в процессе обучения позволяет за счет изменений в структуре, содержании и организации образовательного процесса более полно учитывать интересы, склонности и способности учащихся, а также создавать дополнительные стимулы к учебной деятельности обучающихся всех ступеней образования» [16, С. 4].

Информационные технологии, включая электронные средства, должны соответствовать педагогическим дидактическим условиям: научности, открытости, наглядности, системности, проблемности и целостности в представлении материала, осознанности, самодостаточности и динамичности обучения.

Уроки элективного курса должны проводиться максимально эффективно, поэтому очень актуален вопрос способов организации урока. Стоит отметить, применение наглядных учебных материалов, таких как графики, таблицы, изображения, инфографика, способствуют активизации мыслительной деятельности учащихся, поэтому их внедрение важно для развития интеллектуальной и познавательной активности учащихся. В преподавании математики электронные средства обучения возможно применять на всех этапах урока, включая объяснение нового материала, закрепление, повторение и контроль.

Интерактивные модули могут быть использованы учителем: как инструмент для оценки учебных способностей студентов, как средство обучения, источник информации, устройство для тренировок или инструмент контроля и оценки качества обучения.

В рамках разработанного элективного курса занятия будут проводиться с использованием ресурса LearningApps [61], который представляют собой конструктор интерактивных модулей− заданий. Этот инструмент обеспечивает простой и удобный способ создания электронных интерактивных упражнений для объяснения нового материала, его закрепления, тренировки и контроля. «Он позволяет создать свыше 15 разновидностей заданий, а также дать схемы ответов для каждого. Примеры: кроссворд, викторина, «Найди пару», заполнить пропуски, «Виселица», восстановить порядок и многие другие» [61].

Учитель может использовать различные модули для решения учебных задач на уроках математики. Рассмотрим несколько возможных вариантов их применения:

– закрепление теоретического и практического материала, а также проверка уровня знаний;

– организация конкурсов, где модули могут выступать в качестве основы для игры;

– стимулирование познавательной активности учеников;

– создание и редактирование упражнений с использованием предоставленных шаблонов;

– использование различных интеллектуальных интерактивных заданий.

Целесообразность использования сервиса LearningApps [61] при обучении математики в старших классах обосновывается тем, что этот сервис:

– позволяет сделать занятия более наглядными и интересными;

– помогает достичь глубокого понимания математических формул и методов;

– вовлекает пассивных учеников в активную деятельность на уроке;

– повышает мотивацию учеников к практическому освоению материала;

– содействует формированию информационной культуры учеников;

– активизирует познавательный интерес учащихся;

– позволяет реализовать личностно-ориентированный и дифференцированный подходы в обучении.

Далее рассмотрим задания по теме «Тригонометрические уравнения» спроектированные с помощью технологии интерактивных модулей LearningApps [61].

Задание 1. Установите соответствие между углами и точками, которые получаются поворотом точки (1; 0) вокруг начала координата на указанные углы (рисунок 23).

Цель этого задания состоит в том, чтобы подготовить учащихся к повторению решений простейших тригонометрических уравнений.

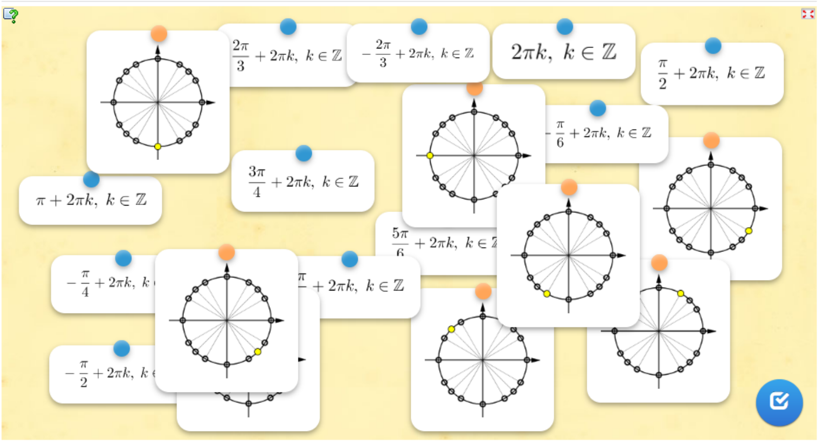

Рисунок 23 − Установите соответствие между углами и точками

Суть задания заключается в том, чтобы составить верную пару (единичная окружность с отмеченной точкой + углы, которые получаются поворотом точки (1; 0) вокруг начала координата на указанные углы), перемещать окна можно при помощи мыши. Учащиеся по желанию составляют верные пары, для этого они могут предварительно сделать некоторые записи в тетради.

Проверить ответы можно после заполнения таблицы нажатием галочки в нижнем правом углу. Если ответ дан верно то, то пара окон подсвечивается зеленым цветом, если не верно-красным (рисунок 24).

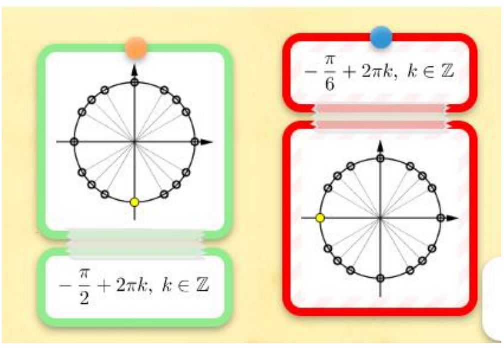

Рисунок 24 − Обозначение верного и неверного ответа

Задание 2. Установите соответствие между тригонометрическим уравнением и единичной окружностью с изображением его решения.

Цель этого задания в том, чтобы повторить решения простейших тригонометрических уравнений.

В этом задании необходимо создать пары (окно с синей точкой и окно с красной точкой), перемещая окна при помощи компьютерной мыши (рисунок 25).

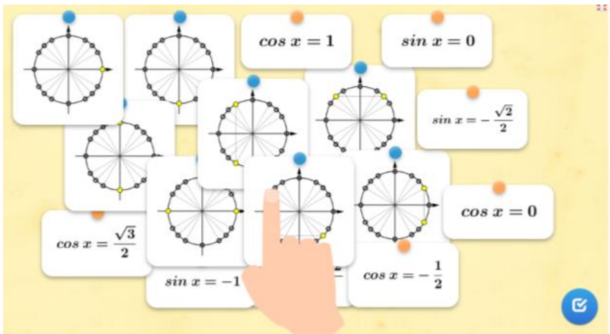

Рисунок 25 – Задание «Найдите пару»

Чтобы создать правильную пару, необходимо иметь перед глазами решение уравнения, поэтому сначала учащиеся выполняют решение в тетради. Представленные в задании уравнения:

1) $\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$; 2) $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$; 3) $\cos x = 0$; 4) $\sin x = 0$; 5) $\cos x = -\frac{1}{2}$; 6) $\cos x = 0$; 7) $\sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$; 8) $\cos x = -1$.

Далее учащиеся по желаю озвучивают составленные пары.

Проверить ответы можно после заполнения таблицы нажатием галочки в нижнем правом углу.

Задание 3. Установите соответствие между тригонометрическим уравнением и его решением.

Цель этого задания в том, чтобы повторить решения простейших тригонометрических уравнений.

Данное задание преследует такую же цель, как и предыдущее, но отличие состоит в том, что здесь нужно выбрать ответ, которой не содержит единичной окружности (рисунок 26).

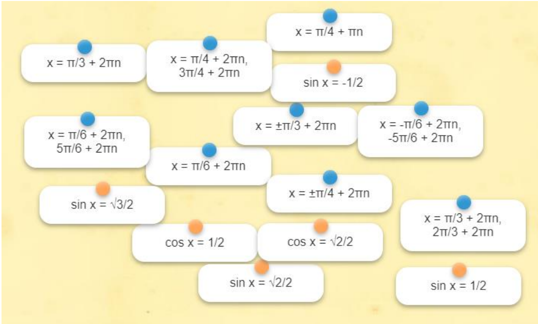

Рисунок 26 – Найди правильное решение

Так же, как в прошлом задании, чтобы создать правильную пару, необходимо иметь перед глазами решение уравнения, для этого необходимо решить уравнения: 1)$\cos x = \frac{1}{2}$; 2)$\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$; 3)$\sin x = \frac{1}{2}$; 4) $\sin x = -\frac{1}{2}$; 5) $\sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$. Кроме того, можно использовать записи, которые производились для решения Задания 2.

Далее учащиеся по желаю озвучивают составленные пары. Ответы проверяются автоматически: если, верно, то пара окон подсвечивается зеленым цветом, если не верно-красным.

Задание 4. Решите уравнение и выберите правильный ответ.

Цель этого задания в том, чтобы закрепить изученный способ решения тригонометрических уравнений вида $T(kx + m) = a$, где T - знак какой-либо тригонометрической функции.

Для выполнения этого задания необходимо решить уравнения в тетради, затем выбрать нужный вариант ответа на экране (рисунок 27).

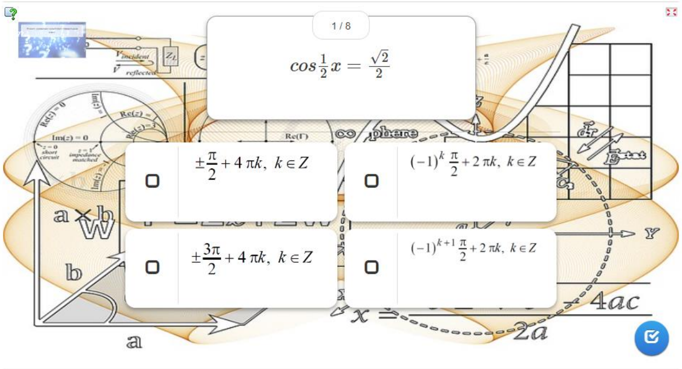

Рисунок 27 – Выберите правильный ответ (задание 4)

Затем желающий ученик озвучивает вариант решения, учитель выбирает нужное пустое окошко и нажимает на него. Проверить ответ можно нажатием галочки в нижнем правом углу.

Представленные в задании уравнения:

1)$\sin\frac{1}{2}x = \frac{\sqrt{2}}{2}$; 2)$tg\frac{x}{3} = -\sqrt{3}$; 3)$\sin 2x = -0{,}5$; 4)$tg4x + 1 = 0$; 5)$\sin 2x = 1$. 6)$\sin\frac{\pi x}{3}x = 0{,}5$; 7) $tg\frac{\pi x}{4}x = -1$; 8) $\sin\frac{\pi x}{6}x = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Задание 5. «Расставьте этапы решения тригонометрического уравнения в нужном порядке. И поясните, какие действия были выполнены на каждом этапе?»

В этом задании решается уравнение: $2\cos(\frac{\pi}{3} - 3x) - \sqrt{3} = 0$ и необходимо расставить действия в правильном порядке (рисунок 28).

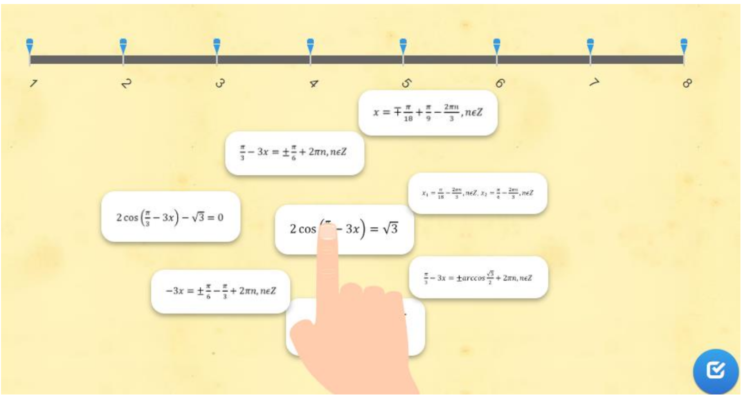

Рисунок 28 – Расставьте в правильном порядке.

Задание 6. «Составьте пары. Выберите правильный ответ для исходного уравнения (рисунок 29)».

В данном задании представлены следующие уравнения:

1) $\sin x = \frac{2}{3}$; 2)$\sin 6x = \frac{\pi}{3}$; 3)$\sin 2x = \frac{\sqrt{2}}{2}$;4) $\cos\frac{x}{3} = -\frac{1}{2}$; 5)$\mathrm{ctg}\left(-\frac{x}{2}\right) = 1$; 6)$\cos(-2x) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$; 7)$\cos(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{6}) = \sqrt{3}$; 8)$\sin 3x = 1$.

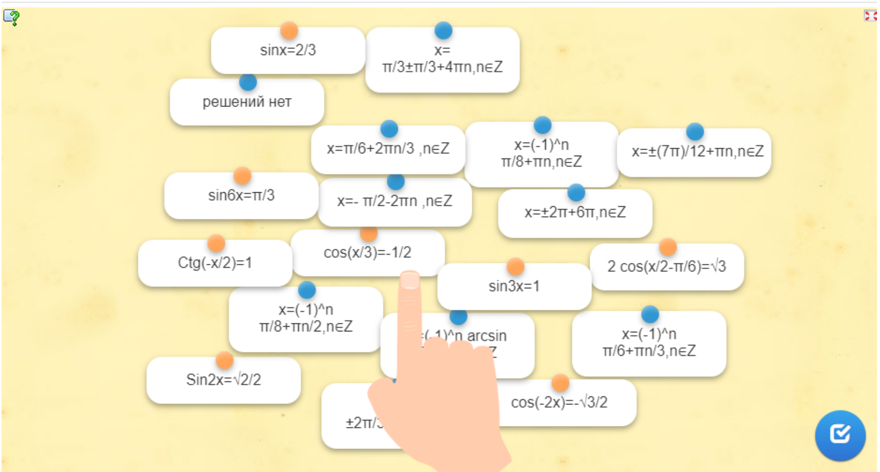

Рисунок 29 – Решите уравнения и найдите пару.

Задание 7. Решите тригонометрические уравнения методом замены.

Далее откроем и интерактивный модуль и составим пары (уравнение + ответ) на основе решенных уравнений (рисунок 30). Учащиеся по желанию озвучивают ответ.

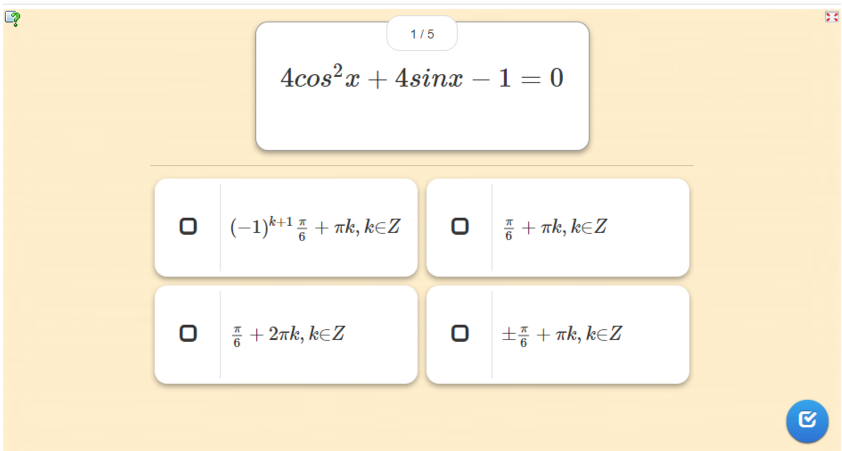

Рисунок 30 – Модуль решите методом замены

В задании представлены следующие уравнения:

1)$4\cos^2 x + 4\sin x - 1 = 0$; 2) $6\sin^2 x + 5\sin(\frac{\pi}{2} - x) - 2 = 0$;

3)$6\cos^2 x + 5\sqrt{2}\sin x + 5 = 0$; 4) $\frac{2}{tg^2 x} + \frac{7}{tg x} + 5 = 0$;

5) $4\sin^2(2x + \frac{\pi}{3}) - 1 = 0$.

2.6 Педагогический эксперимент и его результаты

Педагогический эксперимент был проведен на базе государственного бюджетного общеобразовательного учреждения города Москвы «Школа № 1504».

Для этого был выбран десятый класс, численностью двадцать пять человек математического профиля обучения.

Педагогический эксперимент состоял их трех этапов: констатирующего, обучающего, контролирующего.

Цель констатирующего этапа эксперимента − определить уровень сформированности умений решать тригонометрические уравнения, представленных в ЕГЭ профильного уровня, обладают учащиеся десятого класса профильного направления обучения.

Для оценки уровня знаний старшеклассников по теме «Тригонометрические уравнения» были выбраны задания, соответствующие требованиям ЕГЭ профильного уровня. Была проведена контрольная работа, длительностью 1 академический час, в рамках которой студентам предложили решить 5 задач. Ниже приведены уравнения, которые вошли в контрольную работу №1.

Контрольная работа №1.

«Пример 58.

а) Решите уравнение $\cos 2x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$.

б) Найдите корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $[-2\pi; -\pi]$.

Пример 59.

а) Решите уравнение $6\sin^2 x + 15\sin\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) - 12 = 0$.

б) Найдите корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $[-5\pi; \frac{-7\pi}{2}]$.

Пример 60.

а) Решите уравнение $(\cos x - 1)\left(\mathrm{tg}x + \sqrt{3}\right)\sqrt{\cos x} = 0$.

б) Найдите корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $[3\pi; \frac{9\pi}{2}]$.

Пример 61.

а) Решите уравнение $(2x^2 - 5x - 12)(2\cos x + 1) = 0$.

б) Найдите корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $[-\frac{\pi}{2}; \pi]$.

Пример 62.

а) Решите уравнение $\frac{2\sin^2 x - \sin x}{\log_7(\cos x)} = 0$.

б) Найдите корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $[-5\pi; -\frac{7\pi}{2}]$.» [39]

В процессе выполнения первой контрольной работы студенты выявили следующие особенности:

– затруднения при выборе корней в решении тригонометрических уравнений;

– недостаток опыта в решении уравнений с тригонометрическими, логарифмическими и показательными функциями;

– сложности в применении некоторых тригонометрических формул, в частности, формул сложения и понижения степени.

Анализ результатов первой контрольной работы показал необходимость систематической работы с учащимися по решению тригонометрических уравнений, входящих в экзаменационные задания по математике профильного уровня. Для этой цели был разработан и внедрен элективный курс «Тригонометрические уравнения» продолжительностью 17 часов, а также созданы методические и дидактические материалы. Таким образом, начался обучающий этап эксперимента.

Целью второго этапа эксперимента было тестирование разработанного элективного курса «Тригонометрические уравнения» и соответствующих методических и дидактических материалов, представленных во второй главе работы. На заключительном этапе эксперимента, контролирующем, после проведения всех занятий, была организована и проведена вторая контрольная работа. Задания второй контрольной работы аналогичны заданиям первой контрольной работы.

Результаты второй контрольной работы показали заметное увеличение количества правильных ответов по сравнению с первой контрольной работой (см. таблица 2).

Таблица 2 − Результаты контрольных работ

№ задания	Выполнение	
	Констатирующий этап	Контрольный этап
1	84 %	96 %
2	80 %	92 %
3	76 %	88 %
4	64 %	80 %
5	60 %	84 %

Данный факт подтверждает гипотезу исследования: разработка и внедрение системы дифференцированных заданий по алгебре и началам математического анализа как средство индивидуализации обучения старшеклассников повысит уровень результатов при прохождении единого государственного экзамена по математике профильного уровня.

Выводы по второй главе:

– произведен анализ учебников по алгебре и начал математического анализа для десятых классов с учетом содержания теоретического материала и задач;

– представлена методика работы с различными типами тригонометрических уравнений;

– описаны методические особенности обучения старшеклассников решению тригонометрических уравнений и отбору корней на заданных промежутках;

– разработана система задач по теме «Тригонометрические уравнения» с учетом отбора корней; при составлении задач выделены три уровня сложности: базовый, продвинутый и высокий;

– спроектирован элективный курс для десятых классов математического профиля по теме «Тригонометрические уравнения»;

– представлены результаты педагогического эксперимента и их анализ.

Заключение

Результаты и выводы, достигнутые в ходе решения задач, которые были поставлены в начале исследования:

– рассмотрены базовые теоретические основы дифференцированных заданий по алгебре и началам математического анализа как средство индивидуализации обучения старшеклассников, в результате чего;

– проанализированы различные подходы к понятиям «дифференцированное обучение» и «индивидуализация обучения»;

– определено, что индивидуализация обучения означает метод, в котором методы, приемы и темп адаптируются к индивидуальным способностям учеников с учетом их уровня развития;

– показано, что дифференцированные задания являются эффективным инструментом реализации индивидуализации обучения в урочном процессе по математике;

– замечена нехватка методического обеспечения в виде дифференцированных заданий по алгебре и началам математического анализа;

– представлены трактовки понятий: «дифференцированное бучение», «типологическая группа», «индивидуализация обучения», «дифференцированные задания»;

– проанализированы исследовательские работы и статьи, в которых представлен практический опыт реализации индивидуализации обучения на уроках математики для старших классов;

– исследованы и проанализированы условия успешной индивидуализации обучения математике, выделенные авторами разных концепций;

– произведен анализ учебников по алгебре и начал математического анализа для десятых классов с учетом содержания теоретического материала и задач;

– представлена методика работы с различными типами тригонометрических уравнений;

– описаны методические особенности обучения старшеклассников решению тригонометрических уравнений и отбору корней на заданных промежутках;

– разработана система задач по теме «Тригонометрические уравнения» с учетом отбора корней; при составлении задач выделены три уровня сложности: базовый, продвинутый и высокий;

– спроектирован элективный курс для десятых классов математического профиля по теме «Тригонометрические уравнения»;

– проведены все этапы педагогического эксперимента: констатирующий, обучающий, контролирующий. На обучающем этапе педагогического эксперимента была произведена апробация составленного элективного курса «Тригонометрические уравнения»; в курс вошли методические и дидактические материалы, представленные во второй главе данного исследования. Подводя итоги выполнения старшеклассниками контрольных работ на констатирующем и контролирующем этапах эксперимента, следует заметить большую разницу: учащиеся допустили намного больше ошибок решая первую контрольную работу, чем при решении второй контрольной работы. Все вышеперечисленное подтверждает гипотезу исследования, которая заключалась в следующем: разработка и внедрение системы дифференцированных заданий по алгебре и началам математического анализа как средство индивидуализации обучения старшеклассников повысит уровень результатов при прохождении единого государственного экзамена по математике профильного уровня.

Список используемой литературы и используемых источников

1. Алимов Ш.А. Колягин Ю.М., Ткачёва М.В. и др., Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия. Алгебра и начала математического анализа (базовый и углублённый уровни). 10-11 классы / М.: Просвещение, 2012. 264с.

2. Атаманская, Г.А. Организация уровневой дифференциации учащихся в процессе обучения математике /Г.А. Атаманская //Международный студенческий научный вестник. – 2014. – № 4. - С. 11.

3. Бабанский Ю.К. Избранные педагогические труды. М.: «Педагогика», 1989. 560 с.

4. Баранова Ю.Ю. Индивидуализация обучения: возможности и ресурсы в аспекте введения ФГОС ОО/ // Научно-теоретический журнал «Научное обеспечение системы повышения квалификации кадров». 2012 г. №1. С. 6-16.

5. Башмаков М.И. Уровень и профиль школьного математического образования /М.И. Башмаков //Математика в школе. 1993. №2. С. 8 − 9.

6. Болтянский В.Г., Глейзер Г.Д. К проблеме дифференциации школьного математического образования //Математика в школе. 1988. №2. С.13-17.

7. Глизбург, В.И. Алгебра и начала анализа. Контрольные работы для 10 класса общеобразовательных учреждений (профильный уровень) / В.И. Глизбург; под. ред. А.Г. Мордковича. – М.: Мнемозина, 2007. – 62 с.

8. Гольховой В.М. Индивидуализация учебной деятельности учащихся как основа дифференцированного обучения математике в условиях заочно-очных форм обучения (на примере Северо-Западной заочной математической школы при Санкт-Петербургском государственном университете) / В.М. Гольховой. М., 1997. 65с.

9. Границкая А.С. Научить думать и действовать. Адаптивная система обучения в школе. М : Просвещение, 1991. 213с.

10. Гусев В.А. Методические основы дифференцированного обучения математике в средней школе / В.А. Гусев : дис. …д-ра. пед. наук / В.А. Гусев. М., 1990. 364 с.

11. Демченкова Н.А., Смирнова А.Ю. Некоторые аспекты дифференциации и индивидуализации обучения математике // Эвристическое обучение математике: труды VI Международной научно-методической конференции (Донецк, 21–23 декабря 2023 г.); под общ. ред. проф. С.В. Беспаловой, проф. А.А. Русакова, проф. Е.И. Скафы. Донецк : Изд-во ДонГУ, 2023. С.24-29.

12. Дорофеев Г.В., Кузнецова Л.В., Суворова С.Б., Фирсов В.В. Дифференциация в обучении математике // Математика в школе. 1990. С.15–57.

13. Дьяченко В.К. Организационная структура учебного процесса и ее развитие. -М.: Педагогика, 1989.161 с.

14. Ермош Е.Н. Реализация дифференциации обучения в образовательном процессе // Актуальные проблемы современности: наука и общество1/2017. С. 53-58.

15. Ершова, А.П. Самостоятельные и контрольные работы по алгебре и началам анализа для 10-11 классов: Учеб. Пособие / А.П. Ершова, В.В. Голобородько – М.: Илекса. – 2002. – 176 с.

16. Карасев А.И. Электронно-образовательные контенты как средство обучения математике в школе: дис. ... /А. И. Карасев. Тольятти, 2018. С. 4-12.

17. Качесова О.Н. Дифференцированный подход на уроках математики // Информация и образование: границы коммуникаций INFO. 2018. №10 (18) С.200-203.

18. Кирсанов А.А. Индивидуализация учебной деятельности как педагогическая проблема. Казань: Издательство КГУ. 1982. 99с.

19. Ковалева Г. И. Методическая система обучения будущих учителей математики конструированию систем задач: дис. д-ра. пед. наук. М. 2012, С.17-18.

20. Колмогоров А.Н. Алгебра : учеб. для 10-11 кл. / авт. коллектив А. Н. Колмогоров, Ю.П. Абрамов . М.: Просвещение, 1993. 225 с.

21. Колягин Ю. М., Оганесян В.А, Саннинский В.Я., Луканкин Г.Л. Методика преподавания математики в средней школе. Общая методика: учеб. пособие для студентов физ.-мат. фак. пед.ин-тов. /М.: Просвещение, 1975. 257с.

22. Корянов А. Г., Прокофьев А. А., Материалы курса «Готовим к ЕГЭ хорошистов и отличников»: лекции 1–4. М.: Педагогический университет «Первое сентября», 2012. С.29-103.

23. Кузина Н.В. Дифференцированное обучение на основе учета познавательных стилей обучающихся. Елец: 2009. С. 6 − 9

24. Мерзляк А.Г., Номировский Д.А., Поляков М.В. Математика. Алгебра и начала математического анализа. Базовый уровень,10 класс / А.Г. Мерзляк, Д. А. Номировский. М.: Вентана-Граф, 2019, 477 с.

25. Мордкович А.Г., Семёнов П.В. Алгебра и начала математического анализа. 10 класс. В 2 частях: ч.1 учебник (базовый и углубленный уровни) / А. Г. Мордкович, П. В. Семенов. – Мнемозина М. 2020г. С.208 − 213.

26. Мордкович А.Г., Семёнов П.В. Алгебра и начала математического анализа. 10 класс. В 2 частях: ч.2. задачник (базовый и углубленный уровни) / А. Г. Мордкович, П. В. Семенов. Мнемозина М. 2020г. 201с.

27. Морозов, Е.А. Организация внеурочной самостоятельной деятельности по математике / Е.А. Морозов, А.В. Морозова, А.В. Новоселов // Проблемы современного образования. 2015. №3. С. 97-107.

28. Муравин Г. К., Муравина О. В. Математика. Алгебра и начала математического анализа, геометрия. Алгебра и начала математического анализа. 10 класс. Углубленный уровень: учеб. для общеобразоват. учеб. заведений/ М.: Дрофа, 2013. 320 с.

29. Никанoркина, Н.В. Подготовка будущего учителя математики к использованию задач как средства дифференциации обучения учащихся средней школы: дис. … канд. пед. наук / Н.В.Никанoркина. М., 2006. 212 с.

30. Никольский С.М. Алгебра и начала математического анализа.10 класс.: учеб. для общеобразоват. учреждений: базовый и профильный уровни / [С.М. Никольский, М.К. Потапов, Н.Н. Решетников, А.В. Шевкин]. 8-е изд. М.: Просвещение, 2009. 430 с.

31. Овсянникова, Т.Л. Дифференцированные учебные задания как средство систематизации знаний студентов при изучении аналитической геометрии: дис. … канд. пед. наук / Овсянникова Т.Л. – Орел, 1998. – 153 с.

32. Осмоловская И.М. Как организовать дифференцированное обучение. М., 2002. 99с.

33. Осмоловская И. М. Дифференциация процесса обучения в современной школе / И. М. Осмоловская. – М.: МПСИ; Воронеж: Модэк, 2004. – 176 с.

34. Педагогическая энциклопедия. т. 2.М.: Академкнига, 2004. 456 с.

35. Писаренко В. И. Индивидуализация, дифференциация и интеграция в инновационном обучении/ В.И. Писаренко // Перспективные информационные технологии и интеллектуальные системы.2006. №2. С. 103-106.

36. Приказ Министерства образования и науки РФ от 17 мая 2012 г. N 413 «Об утверждении федерального государственного образовательного стандарта среднего общего образования» (с изменениями и дополнениями).

37. Прокофьев А. А. Вариативные модели математического образования учащихся классов и школ технического профиля: автореф. дис…док. пед. наук / А.А. Прокофьев. Москва, 2005.С. 5-12.

38. Рабунский Е.С. Индивидуальный подход в процессе обучения школьников. М.: Педагогика, 1975.

39. Решу ЕГЭ Образовательный портал для подготовки к экзаменам http://math.reshuege.ru

40. Рогановский Н.М. Каким быть дифференцированному учебнику// Математика в школе. 1993. №3. С. 11-12.

41. Рыбникова Е.В. Дифференциация и индивидуализация обучения предметам естественно-научного цикла с учетом когнитивно‒стилевых особенностей обучающихся: автореф. дис…канд. пед. наук. Ярославль, 2008. 25с.

42. Саранцев, Г.И. Методика обучения математике в средней школе: Учеб. пособие для студентов мат. спец. пед. вузов и ун-тов /Г.И. Саранцев – М.: Просвещение, 2002. – 224с.

43. Селевко Г.К. Современные образовательные технологии// Учебное пособие. М.: Народное образование, 1998. 256 с.

44. Скибина Я.В. Проблема индивидуализации обучения в современных условиях // Научный журнал КубГАУ.2016. №123(09) С. 5-10.

45. Смирнова А.Ю., Демченкова Н.А. Система дифференцированных заданий как средство индивидуализации обучения старшеклассников по математике // XX Всероссийская с международным участием научно-практическая конференция «Артемовские чтения»: «Современное образование: научные подходы, опыт, проблемы, перспективы» (Пенза, 17-18 апреля 2024 г.) / Пенза: ПГПУ, 2024. С. 107-114.

46. Соколова Н.А., Барышенский Д.С., Белай Е.Н. Комплексная методика работы с обучающимися средствами портала «СтатГрад», обеспечивающая эффективную подготовку к ЕГЭ по математике // Кубанская школа. 2021. №1. С. 47-49.

47. Темербекова А. А., Чугунова И. В., Байгонакова Г. А. Т 32 Методика обучения математике: Учебное пособие. — СПб.: Издательство «Лань», 2015. — 512 с.: ил. — (Учебники для вузов. Специальная литература).

48. Теров А.А. Педагогические условия индивидуализации образовательного процесса в старших классах сельской школы: автореф. дис…канд. пед. Наук. Москва, 2010. С. 4-9.

49. Унт, И.Э. Индивидуализация и дифференциация обучения / И.Э. Унт – М.: Педагогика, 1990. – 192 с.

50. Утеева, Р.А. Дифференцированное обучение математике учащихся средней школы: Пособие по спецкурсу и спецсеминару для студентов математических специальностей педагогических вузов / Р.А. Утеева – М.: Прометей. – 1996. – 118 с.

51. Утеева Р.А. Теоретические основы организации учебной деятельности учащихся при дифференцированном обучении математике в средней школе: дис. … д-ра. пед. Наук. М. 1998. 242с.

52. Федеральный государственный образовательный стандарт среднего общего образования (утв. приказом Министерства образования и науки РФ от 17 мая 2012 г. № 413.С. 3− 34.

53. Федеральный институт педагогических измерений (ФИПИ).: http://fipi.ru

54. Фисенко Т.П. Реализация идей индивидуализации и дифференциации в условиях смешанного обучения математике обучающихся основной школы // Нижегородское образование. 2022. №5. С. 12-17.

55. Чередов И.М. Критерии проявления познавательной самостоятельности в образовательном процессе // Развитие познавательной активности и самостоятельности учащихся: материалы обл. конф. / Ом.гос. пед. ун-т, Лаб. эксперим. дидактики. Омск, 2003. 155с.

56. Шадриков В.Д. Психология деятельности и способности человека. М., 1996. 209с.

57. Яковлев И. В. информационный портал Math.Us// www.mathus.ru

58. Ященко И.В. Я сдам ЕГЭ! Математика. Модульный курс. Методика подготовки: учебное пособие / И.В. Ященко, С.А. Шестаков. М.: Просвещение. 2020. 384 с.

59. Bonato M., Fabbri S., Umilta` C., and Zorzi M. The Mental Representation of Numerical Fractions: Real or Integer [Text] / M. Bonato // Journal of Experimental Psychology: Human Perception and Performance. University of Oradea Publisher, 2007. PP. 1410-1419.

60. Bresolin D. Optimal decision procedures for MPNL over finite structures, the natural numbers, and the integers [Text] / D. Bresolin // Elsevier. University of Oradea Publisher, 2013. PP. 98-115.

61. LearningApps.org Система интерактивных модулей: LearningApps interactive learning modules / https://learningapps.org/

62. Teppo A. Visual representations as objects of analysis: the number line as an example / A. Teppo // Springer. University of Oradea Publisher, 2013. PP. 600-613.

63. Voskoglou M. and Kosyvas G. Analyzing students' difficulties in understanding real numbers / M. Voskoglou // Redimat. University of Oradea Publisher, 2012. PP. 301-336.

64. Yua F., Ko K. On logarithmic-space computable real numbers/ F. Yua // Elsevier. University of Oradea Publisher, 2012. PP. 712-714.