

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ  
федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение  
высшего образования  
«Тольяттинский государственный университет»

Институт инженерной подготовки

(наименование института полностью)

Кафедра «Высшая математика и математическое образование»

(наименование)

44.04.01 Педагогическое образование

(код и наименование направления подготовки)

Математическое образование

(направленность (профиль))

**ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА  
(МАГИСТЕРСКАЯ ДИССЕРТАЦИЯ)**

на тему «Компьютерные технологии при обучении теме «Многогранники»  
в курсе геометрии старших классов общеобразовательной школы»

Обучающийся

М.В. Брюхова

(Инициалы Фамилия)

(личная подпись)

Научный  
руководитель

канд. пед. наук, доцент, Е.С. Павлова

(ученая степень (при наличии), ученое звание (при наличии), Инициалы Фамилия)

Тольятти 2024

## Оглавление

Введение.....	3
Глава 1 Теоретические основы использования компьютерных технологий при обучении теме «Многогранники» в курсе геометрии старших классов общеобразовательной школы.....	8
1.1 Различные подходы к введению понятия многогранника и его свойств в курсе геометрии старших классов .....	8
1.2 Основные цели и направления использования компьютерных технологий в процессе обучения геометрии старших классов общеобразовательной школы .....	23
1.3 Особенности использования компьютерных программ «КОМПАС-3D LT» и «DG-геометрия» в курсе геометрии в старших классах образовательной школы при обучении теме «Многогранники» .....	31
Глава 2 Методические основы изучения многогранников в курсе геометрии старших классов общеобразовательной школы.....	36
2.1 Проектирование изучения темы «Многогранники» с использованием компьютерных технологий в курсе геометрии старших классов общеобразовательной школы .....	36
2.2 Элективный курс «Прямая призма».....	50
2.3 Педагогический эксперимент и его результаты .....	64
Заключение .....	73
Список используемой литературы и используемых источников.....	74

## Введение

Актуальность и научная значимость настоящего исследования. Геометрия является неотъемлемой частью курса математики в школе. В образовании курс геометрии, считается одним из самых сложных для понимания и изучения школьниками. Тема «Многогранники» является самой важной частью в изучении и анализе материала в старших классах. Многогранники «играют первостепенную роль в формировании у старшеклассников представлений о пространственных формах окружающего мира и способностей увидеть реальные объекты в их геометрических образах. Изучение многогранников весьма актуально как в качестве инструмента для развития пространственного мышления, так и в качестве предмета для глубокого изучения геометрических тел, имеющих общие свойства» [7].

В процессе изучения темы «Многогранники» ученики сталкиваются с тем, что им приходится изучать много новых понятий, решать огромное количество задач и из-за этого их теоретические и практические знания теряют мотивацию. Поэтому, педагогу нужно в обязательном порядке найти тот подход в изучении темы, который будет мотивировать старших школьников, давать возможность к самостоятельным действиям [15].

В течение одного курса изучаются такие элементы, как: прямые, плоскости, введение перпендикулярных прямых, плоскостей и т. д. Компьютерные технологии помогают в большей степени помочь старшему школьнику укрепить знания по геометрии. Также следует отметить, что благодаря компьютерным технологиям школьник может не только теоретически укрепить свои навыки и умения, но и научиться решать задачи с помощью инновационных технологий. Поэтому из областей, где компьютерные технологии могут быть эффективно использованы, является геометрия.

Тема многогранников и их значение в курсе геометрии отражена в трудах: И.М. Смирновой [46], А.Д. Александрова [1], М.В. Егуповой [22], С.М. Саакян [45] и другие.

Проблеме использования компьютерных технологий в процессе обучения математике учащихся общеобразовательной школы посвящены публикации В.А. Далингера [17], М.Н. Марюкова [32], Д.А. Федосьева [53] и других.

Таким образом, актуальность темы исследования обусловлена сложившимися противоречиями между требованиями ФГОС среднего (полного) образования и недостаточным уровнем развития наглядно - образного и логического мышления у школьников; необходимость качественного обучения геометрии школьников и недостаточной разработанностью методики организации при обучении теме «Многогранники» в курсе, геометрии старших классов общеобразовательной школы с использованием компьютерных технологий.

Указанное противоречие позволило сформулировать проблему диссертационного исследования: каковы методические особенности использования компьютерных технологий при обучении теме «Многогранники» в курсе геометрии старших классов общеобразовательной школы?»

Объект исследования: процесс обучения геометрии учащихся старших классов общеобразовательной школы.

Предмет исследования: применение компьютерных технологий в процессе изучения темы «Многогранники» в курсе геометрии старших классов общеобразовательной школы».

Цель исследования заключается в выявлении методических особенностей использования компьютерных технологий при обучении теме «Многогранники» в курсе геометрии старших классов общеобразовательной школы.

Гипотеза исследования: состоит в том, что обучение теме «Многогранники» в курсе геометрии старших классов общеобразовательной школы с применением компьютерных технологий способствует, качественному усвоению учебного материала.

Задачи исследования:

1. Выявить различные, подходы к введению понятия многогранника и его свойств в курсе геометрии старших классов.
2. Обосновать основные цели и направления использования компьютерных технологий, в процессе обучения геометрии старших классов общеобразовательной школы.
3. Показать особенности использования компьютерных программ «КОМПАС-3D LT» и «DG-геометрия» в курсе геометрии в старших классах образовательной школы при обучении теме «Многогранники».
4. Провести методический анализ темы «Прямая призма и спроектировать изучение темы прямая призма с использованием компьютерных технологий в курсе геометрии старших классов общеобразовательной школы.
5. Разработать программу элективного курса «Прямая призма», направленного на повышение качества предметных результатов школьников по теме.
6. Представить результаты педагогического эксперимента.

Теоретико-методологическую основу исследования составили ранее выполненные диссертации по теме исследования: А.В. Копниной [29], А.В. Горшковой [17], Т.В. Ходеевой [57] и других.

Базовыми для настоящего исследования явились также работы в области использования компьютерных технологий на уроках математики в школе Н.В. Апатовой [6], О.А. Богомоловой [7], М.В. Белинского [9], Ю.Ф. Нурғалиевой [39], И.В. Полотовского [41] и других.

Методы исследования, анализ научной и методической литературы по проблеме исследования, систематизация и обобщение полученных данных,

анализ и обобщение практического опыта учителей математики, педагогический эксперимент.

Основные этапы исследования:

- 1 этап (2021-2022 уч.г.): анализ ранее выполненных исследований по теме диссертации; анализ опыта работы школы по теме исследования;
- 2 этап (2022-2023 уч.г.): определение теоретических основ использования компьютерных технологий при обучении теме «Многогранники» в курсе геометрии старших классов общеобразовательной школы;
- 3 этап (2022-2023 уч.г.): определение методических аспектов использования компьютерных технологий при обучении теме «Многогранники» в курсе геометрии старших классов общеобразовательной школы;
- 4 этап (2023-2024 уч.г.): оформление диссертации, корректировка ранее представленного материалов и аппарата исследования, описание результатов педагогического эксперимента, формулирование выводов по главам, усвоению учебного материала.

Опытно-экспериментальная база исследования: КГУ «Соколовская средняя школа» Кызылжарский район, с. Соколовка, Республика Казахстан.

Научная новизна исследования: состоит в том, что в нем обоснованы методические рекомендации использования компьютерных технологий при обучении теме «Прямая призма» в курсе геометрии старших классов общеобразовательной школы.

Теоретическая значимость исследования состоит в раскрытии направлений использования компьютерных технологий в процессе обучения геометрии старших классов общеобразовательной школы; в описании методических особенностей применения различных компьютерных программ в решении задач стереометрии.

Практическую значимость исследования заключается в представлении системы задач, при решении которых используются различные компьютерные программы; разработке элективного курса по теме «Прямая призма».

Достоверность и обоснованность результатов исследования обеспечивались сочетанием теоретических и практических методов исследования, анализом педагогической практики.

Личное участие автора в организации и проведении исследования состоит в анализе и изучении основных компьютерных программ при изучении темы «Многогранники» в курсе геометрии старших классов; разработанной программе элективного курса «Прямая призма».

Апробация результатов исследования велась в течение всего исследования. Экспериментальная проверка предлагаемых методических рекомендаций была осуществлена в период производственных практик, в том числе преддипломной практики на базе кафедры «Высшая математика и математическое образование» Тольяттинского государственного университета. По теме исследования имеется 3 публикации [11], [12], [13].

На защиту выносятся:

1. Методические рекомендации по использованию основных компьютерных программ при изучении темы «Многогранники» в курсе геометрии старших классов.
2. Элективный курс «Прямая призма», направленный на повышение качества предметных результатов школьников по теме.
3. Методические материалы по проведенному исследованию, полученные результаты эксперимента и рекомендации к их проектированию.

Структура магистерской диссертации. Работа состоит из введения, двух глав, заключения, содержит 31 рисунок, 4 таблицы, список используемой литературы и используемых источников (71 источник). Основной текст работы изложен на 81 страницах.

# **Глава 1 Теоретические основы использования компьютерных технологий при обучении теме «Многогранники» в курсе геометрии старших классов общеобразовательной школы**

## **1.1 Различные подходы к введению понятия многогранника и его свойств в курсе геометрии старших классов**

Тема многогранников в школьной программе имеет большое значение в учебном процессе. Многогранники – это геометрические фигуры, ограниченные плоскими гранями. Работа с ними может быть очень разнообразной и интересной. Изучение многогранников позволяет развивать у учеников математические и аналитические навыки. Задачи с многогранниками помогает развитию логического мышления и творческого потенциала рассмотрим три аспекта изучения.

Первый аспект: изучение многогранников: широкое применение в повседневной жизни. Знание геометрических фигур, их свойств и характеристик позволяет лучше понимать окружающий мир. При проектировании архитектурных сооружений, создании дизайна или разработке товаров нужно работать с геометрическими фигурами, в том числе, с многогранниками. Анализировать и сравнивать различные объекты, умея работать с многогранниками, проще.

Второй аспект: изучение многогранников помогает развить математические навыки у учеников. Оно помогает углубить знания о геометрии и алгебре. Также, оно создает основу для изучения последующих математических тем в учебном плане. Работа с многогранными фигурами требует точности и умения применять математические методы для решения задач.

Третий аспект: изучение многогранников помогает развитию логического и пространственного мышления. Работа с трехмерными фигурами помогает детям визуализировать пространство, анализировать его

структуру. Эти навыки имеют важное значение не только в математике, но и в решении каждодневных задач.

Значит, тема многогранников в школьной программе важна для изучения. Она способствует углублению знаний по геометрии и математике. Решение задач с многогранниками помогает развитию логического и пространственного мышления. Поэтому изучение многогранников настолько важно для учебного плана по геометрии [15].

Далее исследуется свойство многогранников, их классификация, объемы и площади. Понятие «многогранник» — это достаточно сложное понятие, которое нужно объяснять не только с точки зрения геометрии, но и с логической точки зрения. Обычно все формулировки понятия, исходят из реальных примеров, которые встречаются в жизни. Сегодня существует два способа понимания термина «многогранник»:

- «многогранник как поверхность;
- многогранник как тело.

В практике преподавания одной из важнейших составляющих является обучение решению задач. Задачи используются не только в качестве основного средства для усвоения материала, но и способствуют развитию мышления и умение применять теоретические знания на практике.

В геометрии все задачи оказывают воздействие на:

- развитие мышления;
- самостоятельной мотивации к изучаемому предмету;
- сопоставление геометрических фигур с реальной действительностью.

Для развития логического мышления большее значение имеют задачи на построение, они имеют самый богатый материал для выработки у учащихся навыков логического мышления. При решении задач на построение учащиеся должны сами создать необходимую фигуру, нежели задачи на доказательство, где учащиеся имеют дело с определённой фигурой» [26].

Сегодня, тема «Многогранники», по нашему мнению, должна изучаться с помощью наглядного материала:

- словесное описание темы с применением показа рисунков на доске;
- показ объемных моделей;
- развёртка объемных моделей;
- изображение пирамиды, куба, шара, конуса, призма, цилиндра, возможны их реальные объёмные модели.

Наглядный материал, может быть, как сделан вручную, так и разработан компьютерной техникой. Объёмная модель, может быть выполнена из обычного картона. Зачастую в общеобразовательных школах, такой способ наглядного материала можно и встретить, но также сегодня в школах, где есть интерактивные доски, объёмные показывают на них. Рассмотрим их на рисунке 1.



Рисунок 1 – Виды многогранников

Модели, которые сделаны из стекла, в основном используются для того, чтобы показать сечение многогранника, они представлены на рисунке 2. По нашему мнению, такой наглядные материал, является успешным, но достаточно опасным.

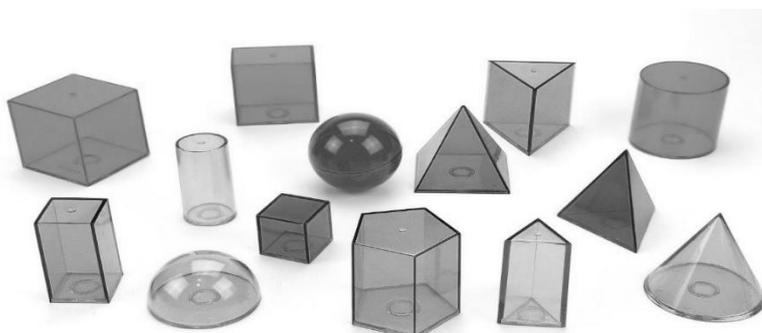


Рисунок 2 – Многогранники из стекла



Очень часто, педагоги для наглядного материала и большого усвоения темы, создают атмосферу, в которой ученики сами изготавливают проекции многогранников.

При решении задач, «связанных с построением изображений куба или прямоугольного параллелепипеда, учащиеся, воспользовавшись штампом, могут быстро получить в тетради правильный чертеж, что дает большую экономию времени. Естественно, применение штампов не должно привести к утрате учащимися навыков вычерчивания фигур. Поэтому учитель должен вначале научить учащихся изображать фигуры на плоскости, а затем применять штампы на уроке.

Также при изучении многогранников можно использовать различные рабочие и справочные таблицы.

Большие возможности воспитания самостоятельности и активности открываются при использовании тетрадей с печатной основой. В настоящий момент они все чаще появляются в школах. Тетради с печатной основой предназначаются для организации самостоятельной работы на этапе закрепления и повторения пройденного материала.

В тетрадях находятся задания, цель которых различна от рассуждения до обычных пропусков текста.

Нередко наглядные средства рассматривают лишь как временную опору при начальном усвоении знаний. Сторонники такой оценки роли наглядных средств полагают, что модели в этом случае приучают учащихся к очевидности и поэтому не способствуют развитию логического мышления. Выдвигается даже дидактическое правило: чем старше учащиеся, тем меньше моделей должно применяться в преподавании математики. Принять такую точку зрения и вытекающее из нее дидактическое правило нельзя, так как они несостоятельны. Правильно понимаемое применение наглядных средств не только уместно, но и необходимо на всех ступенях обучения» [42].

Но, существует так же новый способ изучения темы «Многогранники» в курсе геометрии, которым сегодня пользуется большинство учителей. Это способ внедрения в учебный процесс компьютерных технологий.

По мнению Н.В. Апатовой, «компьютерные технологии обучения – это процессы подготовки и передачи информации обучаемому, средством осуществления которых является, компьютер» [6].



Рисунок 5 – Компьютерные технологии

Компьютерные технологии, представленные на рисунке 5, относятся к новому пониманию наглядных примеров, за счёт которых идёт не только обучение и развитие, но экономия времени решения геометрических задач.

Образовательные компьютерные технологии облегчают обучение и восприятие информации учеников. Это обуславливается тем, что современные подростки, юноши и девушки запоминают, больше информации работая с инновационными системами. В курсе геометрии зачастую используются такие программы, как «КОМПАС-3D LT» и «DG-геометрия». Они помогают улучшить наглядность при демонстрации строения многогранника в плоскостях и пространстве, построить поверхности многогранника, решить геометрическую задачу, а также сэкономить время для запоминания [6].

На сегодняшний день существуют различные подходы к введению многогранника и его свойств в курсе геометрии старших классов. При этом у методистов остаются вопросы, связанные с особенностями включения данного материала.

В обучении геометрии школьникам необходимо уметь работать с многогранниками. Знание геометрических фигур необходимо для многих наук, таких как инженерия, физика, химия и математика. Знание многогранников – это важная часть развития логического мышления и способности к анализу [38].

Многогранники – это геометрические фигуры, которые ограничены плоскими гранями. Изучение свойств многогранников в курсе геометрии в старших классах позволяет лучше узнать о трехмерном пространстве и геометрических формах.

На рисунке 6 рассмотрены некоторые из основных свойств многогранников из школьного курса геометрии старших классов.

Понимание и усвоение перечисленных свойств помогает учащимся развить логическое мышление и понимание трехмерных форм. В случае успешного изучения темы, быстрого решения задач школьник развивает способность анализировать и классифицировать другие геометрические фигуры.

Многогранник – это геометрический объект, который в общем случае представляет собой многомерную фигуру в пространстве [4, с. 58].

Как отмечают авторы учебников геометрии Л.С. Атанасян, В.Ф. Бутузов и С.Б. Кадомцев, «для многогранника характерен набор плоских граней, которые могут быть правильными или неправильными и имеют форму треугольника, четырехугольника или более сложную геометрическую форму» [4, с. 60-61]. Изучение темы «Многогранники» в учебнике Л.С. Атанасяна предлагается следующим образом: «во-первых, перед изучением темы старшеклассники знакомятся с простейшими видами многогранников – это тетраэдром и параллелепипедом.

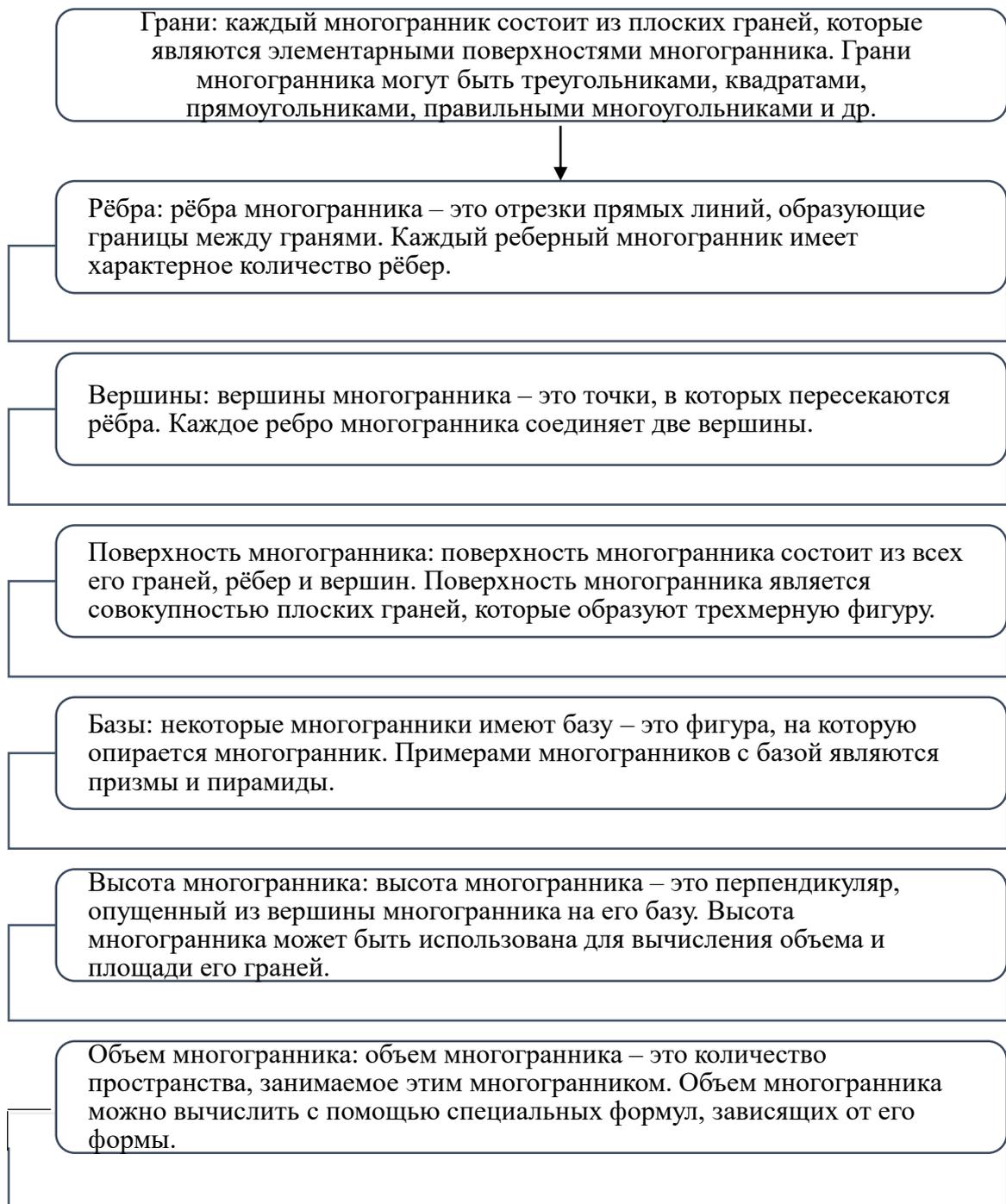


Рисунок 6 – Основные свойства многогранников

Стоит особенно отметить тот факт, что в учебнике нет точного определения многогранника, при этом приводится лишь некоторое пояснение. В качестве примечания отмечается, что строгое определение громоздко и трудно для понимания и применения.

Затем рассматривается определение геометрического тела, вводится ряд новых понятий:

- выпуклый многогранник;
- невыпуклый многогранник;
- призма;
- виды и свойства призмы» [4, с. 60].

По тому же принципу в учебнике представлен материал относительно понятия пирамиды и ее видов.

В качестве заключительной учебной информации по данной теме Л.С. Атанасян предлагает вниманию старшеклассников особенности понятия пропорциональности в пространстве и понятие правильного многогранника.

Следует отметить, что в учебнике Л.С. Атанасяна «многогранники представлены с опорой на наглядность, предметы окружающей действительности, а весь теоретический материал темы относится либо к призмам, либо к пирамидам. Также необходимо подчеркнуть, что учебник Л.С. Атанасяна предназначен для базового уровня изучения геометрии в старших классах» [2].

В свою очередь, учебник А.Д. Александрова, предназначенный для углубленного изучения основных понятий геометрии, насыщен не менее интересным теоретическим материалом, касающегося темы «Многогранники» [1, с. 90]. Более подробно выделим ключевые моменты:

- «многогранники предлагается изучать после круглых тел;
- при изучении многогранника и его элементов отслеживается связь с многоугольником;
- ключевой особенностью является введение двух определений призмы, причём доказываемая равносильность этих определений. Аналогично даётся другое определение пирамиде: как конус с многоугольником в основании. Понятие выпуклого многогранника излагается очень широко;

– в такой теме, как «Правильные многогранники» сначала представляются вниманию учащихся пять типов правильных многогранников, далее подробным процессом их построения доказывается, что все пять типов существуют и только после этого отмечается, что других правильных многогранников нет» [1].

А.Д. Александров «большое внимание уделил вопросу специфики представления учебного материала по теме «Многогранники», которые были представлены в учебнике «Элементарная геометрия» (1984) А.П. Киселева» [32] и учебном пособии по геометрии для 9-10-х классов «Геометрия» (1978) В.М. Клопского [33].

А.Д. Александров «обращает внимание на то, что определения понятия многогранника, представленные в учебниках А.П. Киселева, В.М. Клопского неравнозначны. Также исследователь отмечает однотипность рисунков многогранников в этих учебных пособиях.

Так, к примеру, в учебнике А.П. Киселева представлены модели только выпуклых многогранников» [32].

В свою очередь, «А.Д. Александров склонен считать данную тему центральной в курсе стереометрии, а поэтому необходимо особенно внимательно сочетать наглядные представления, рассмотрение реальных примеров и логическую точность формулировок» [3, с. 15].

Разнообразие определений многогранников в настоящих школьных учебниках, «входящих в Федеральный перечень, которые рекомендованы к обязательному использованию при реализации программ общего образования, показало разнообразные подходы к объему и описательным свойствам понятия многогранника» [54].

«Одна из целей математики, заключается в том, чтобы учащиеся могли решать математические задачи, включая способность понимать проблемы, проектировать математические модели, решать эти модели и интерпретировать решения. Целью учителя должна быть помощь учащимся понять и решить проблемы, поскольку большинство задач при изучении

математики связаны с проблемами в повседневной жизни. Решение проблем - это процесс применения ранее полученных знаний к новым и различным ситуациям. Учителя должны обеспечивать обучение, которое делает учащихся более активными и свободными в выражении идей для решения данных проблем. Учащиеся будут лучше понимать те знания, которые сформировали сами, и процесс обучения будет более оптимальным» [58].

В модели «проблемного» обучения существует четыре стадии, а именно:

- первая стадия исследования;
- вторая стадия фокусировки или введения концепций;
- третья стадия вызова;
- четвертая стадия применения.

«На первой стадии учитель направляет учащихся к обращению первоначальных знаний, идей или концепций, полученным из повседневного опыта или к знаниям, полученным на предыдущих уроках.

На второй стадии ученикам предоставляется возможность высказать свои идеи о возможном решении появившейся проблемы.

На третьей стадии учитель дает учащимся возможность сравнить свое мнение с мнением других учащихся и выразить превосходство своего решения.

На последней стадии учащимся предоставляется возможность протестировать идеи, которые они выдвинули для решения проблемы.

В этом учебном процессе учащиеся активно участвуют в обсуждении, поэтому эта модель «проблемного» обучения помогает в углублении понимания материала через социальное взаимодействие» [58].

Задачи на вычисление по разделу о пирамиде можно разделить на группы: «на построение и вычисление линейных углов для двугранных углов пирамиды, на вычисление линейных элементов пирамиды – ребер пирамиды, высоты пирамиды, апофемы правильной пирамиды, на построение и вычисление угла между боковыми ребрами и основанием пирамиды, на вычисление площади поверхности пирамиды (боковой и полной) [48].

Рассмотрим учебник И.М. Смирновой. «Данный учебник предназначен для преподавания геометрии 10-11х классах гуманитарного профиля. По сравнению с традиционным изложением в учебнике несколько сокращен теоретический материал, больше внимания уделяется вопросам исторического, мировоззренческого и прикладного характера. Данное учебное пособие предназначено для гуманитарного профиля. Здесь уменьшен теоретический материал, но рассматриваются также темы исторического, мировоззренческого и прикладного характера» [48].

Также как и в учебнике Л.С. Атанасяна «Геометрия 10-11 класс», рано вводится пространственные фигуры и многогранники. Рассматривается в п.3 «Основные пространственные фигуры». Основная цель - это познакомить учащихся с пространственными фигурами и моделями многогранников.

Здесь также изучается понятие многогранника как пространственной фигуры, поверхность которой состоит из конечного числа многоугольников, называемых гранями многогранника. Стороны этих многоугольников называются ребрами многогранника, а вершины многоугольников – вершинами многогранника» [2].

Особенностью учебника И.М Смирновой «является раннее введение пространственных фигур, в том числе многогранников. Цель - сформировать представления учащихся об основных понятиях стереометрии, ознакомить их с пространственными фигурами и моделированием многогранников.

В учебнике вводится понятие многогранника, как пространственной фигуры, которая состоит из определенного числа многоугольников, которые являются гранями многогранника. Стороны многоугольника -это ребра многогранника, вершины многоугольников - вершины многогранников.

Вводится понятие многогранника как пространственной фигуры, поверхность которой состоит из конечного числа многоугольников, называемых гранями многогранника. Стороны этих многоугольников называются ребрами многогранника, а вершины многоугольников - вершинами многогранника.

Школьникам показывают такие многогранники как:

- куб - многогранник, поверхность которого состоит из шести квадратов;
- параллелепипед - многогранник, поверхность которого состоит из шести параллелограммов;
- прямоугольный параллелепипед - параллелепипед, у которого грани – прямоугольники;
- призма - многогранник, поверхность которого состоит из двух равных многоугольников, называемых основаниями призмы, и параллелограммов, называемых боковыми гранями;
- прямая призма - призма, боковые грани которой - прямоугольники; правильная призма – прямая призма, основаниями которой являются правильные многоугольники;
- пирамида - многогранник, поверхность которого состоит из многоугольника, называемого основанием пирамиды, и треугольников с общей вершиной, называемых боковыми гранями пирамиды;
- правильная пирамида - пирамида, в основании которой правильный многоугольник, и все боковые ребра равны» [46].

В учебнике «показываются более сложные многогранники, в том числе правильные, полуправильные и звездчатые многогранники. Рассматривается несколько способов изготовления моделей многогранников из разверток и геометрического конструктора. Моделирование многогранников служит важным фактором развития, пространственных представлении учащихся [67].

Основная цель изучения многогранников - ознакомить учащихся с понятием выпуклости и свойствами выпуклых многогранников, рассмотреть теорему Эйлера и ее приложения к решению задач, сформировать представления о правильных, полуправильных и звездчатых многогранниках» [48].

«Среди пространственных фигур особое значение имеют «выпуклые фигуры, в частности, выпуклые многогранники. Данное понятие в учебнике вводится следующим образом: многогранник называется выпуклым, если он является выпуклой фигурой, то есть вместе с любыми двумя своими точками целиком содержит и соединяющий их отрезок. Далее рассматриваются свойства выпуклых многогранников». После изучения выпуклых многогранников рассматривается теорема Эйлера и ее приложения. В качестве таких приложений, задача о трех домиках и трех колодцах, проблема четырех красок вводится понятие графа.

Выпуклый многогранник называется правильным, если его гранями являются равные правильные многоугольники, и в каждой вершине сходится одинаковое число граней, выпуклый многогранник называется полуправильным, если его гранями являются правильные многоугольники (возможно, и с разным числом сторон), причем в каждой вершине сходится одинаковое число граней» [49].

Рассмотрев, все учебники по геометрии мы пришли к заключению и условно выделили три вида на восприятие и понимание содержания понятия «многогранник» [69].

Первый вид: в учебниках А.Ю. Калинина [31], А.Г. Мерзляк [36] и Е.В. Потоскуева [42] предлагается вниманию учащихся определение многогранника – «это геометрическое тело, граница (поверхность) которого есть объединение конечного числа многоугольников». В содержании данного понятия отмечаются отдельные описательные свойства и характеристики понятия «геометрическое тело». При этом дается определение, что «геометрическое тело» – это связная замкнутая фигура в пространстве, которой присущи следующие свойства:

- «у нее есть внутренние точки, и любые две из них можно соединить линией, состоящей из внутренних точек (связность);
- фигура содержит свою границу, и эта граница совпадает с границей множества всех внутренних точек фигуры» [34], [39], [45].

Второй вид: в рамках данного подхода также «предлагается эквивалентное определение понятию многогранника, что и в рамках первого подхода, т.е. многогранник описывается через «геометрическое тело». Однако, в учебниках, авторами которых являются Т.В. Ходеева [57], А.В. Погорелов [43], И.М. Смирнова [48] и И.Ф. Шарьгин [57], не представлены определения геометрического тела, а лишь дается описание наглядного представления».

Третий вид: определение многогранника представлено через совокупность конечного числа плоских многоугольников в трехмерном пространстве. При этом авторы учебника по геометрии для 10-11 классов Л.С. Атанасян, В.Ф. Бутузов и С.Б. Кадомцев выделяют следующие описательные свойства:

- «каждая сторона любого из многоугольников есть одновременно сторона другого (но только одного), называемого смежным с первым (по этой стороне);
- связность: от любого из многоугольников, составляющих многогранник, можно дойти до любого из них, переходя к смежному с ним, а от этого, в свою очередь, к смежному с ним, и т. д.» [4].

В ФГОС СОО в качестве освоение содержания учебной дисциплины «Математика» учащимися 10-11 классов приводятся следующие предметные результаты:

- «владение основными понятиями о плоских и пространственных геометрических фигурах, их основных свойствах;
- сформированность умения распознавать геометрические фигуры на чертежах, моделях и в реальном мире;
- применение изученных свойств геометрических фигур и формул для решения геометрических задач и задач с практическим содержанием» и др. [53].

Таким образом, опираясь на результаты приведенного теоретического анализа определений многогранника в школьных учебниках, целесообразно

отметить, что при любом имеющемся подходе к определению многогранника необходимо опираться на понятие связности. В процессе изучения темы «Многогранники» в старших классах большое внимание уделяется не столько основному понятию темы, сколько смежным с ним процессам, в том числе таким понятиям, как выпуклый и невыпуклый многогранник, призма, виды и свойства призмы, конус, пирамида и т. д.

## **1.2 Основные цели и направления использования компьютерных технологий в процессе обучения геометрии старших классов общеобразовательной школы**

Компьютерная технология может осуществляться в следующих трех вариантах:

- «как «проникающая» технология (применение компьютерного обучения по отдельным темам, разделам для отдельных дидактических задач);
- как основная, определяющая, наиболее значимая из используемых в данной технологии частей;
- как монотехнология (когда все обучение, все управление учебным процессом, включая все виды диагностики, мониторинг, опираются на применение компьютера)» [7].

Их преимущества непосредственно связаны с быстротой передачи информации и наглядности ее представления. Кроме того, они позволяют проводить интерактивную и индивидуальную работу.

Посредством компьютера и интернета осуществляется возможность проведения дистанционного обучения.

Среди наиболее популярных компьютерных технологий, которые могут использоваться для улучшения обучения, стоит отметить электронные учебники, разнообразные программы для работы с изображениями,

программы для создания презентаций, видеокурсы и видео лекции, широкое использование сети Интернет.

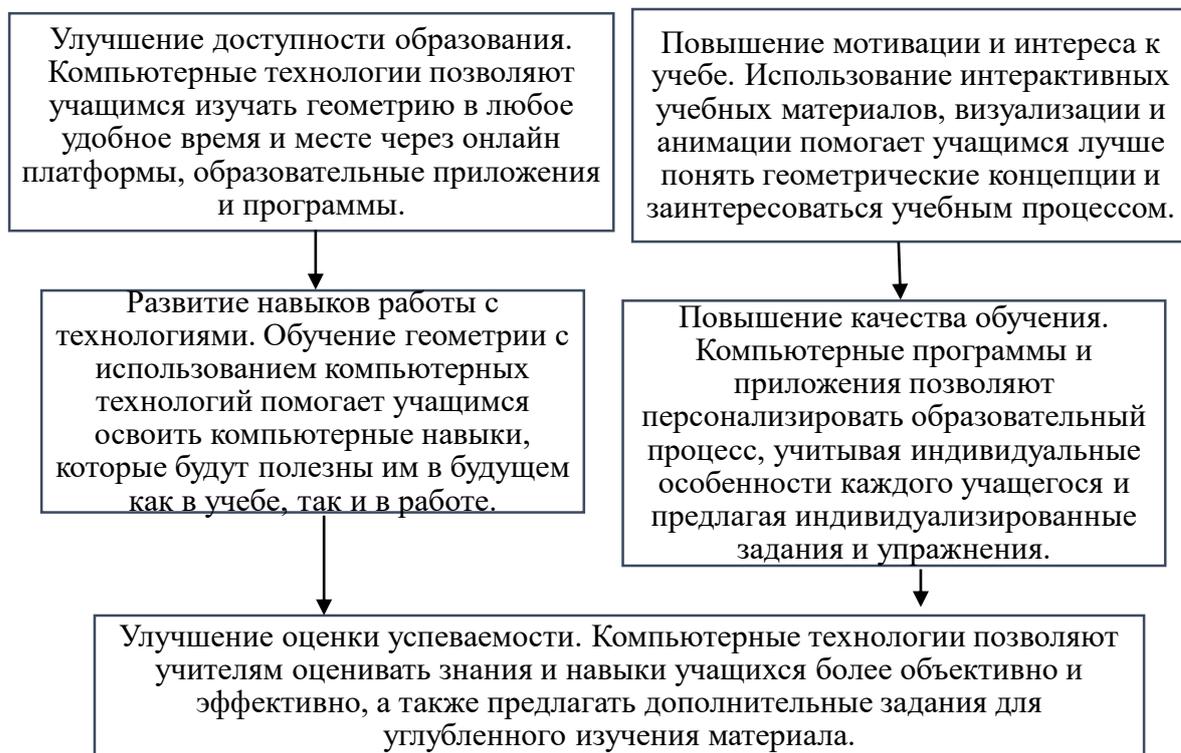


Рисунок 7 – Цели использования компьютерных технологий в процессе обучения геометрии.

Современные общеобразовательные школы г. Тольятти (СОШ №21, СОШ №66, СОШ №69 и др.) нацелены на работу по таким образовательным программам, которые позволяют выстраивать учебный процесс с активным использованием компьютерных технологий. Как показывает практика преподавания геометрии в старших классах, программы по данному учебному предмету включают в себя самые необходимые аспекты учебной работы в старших классах. Что касается непосредственно тем, раскрывающих суть и специфику многогранников и их свойства, то на уроках геометрии современные учителя используют активно разнообразные компьютерные программы[51].

Основные цели использования компьютерных технологий в процессе обучения геометрии показаны на рисунке 7.

Рассмотрим на рисунке 8, какие компьютерные технологии применяются в процессе обучения геометрии в старших классах.

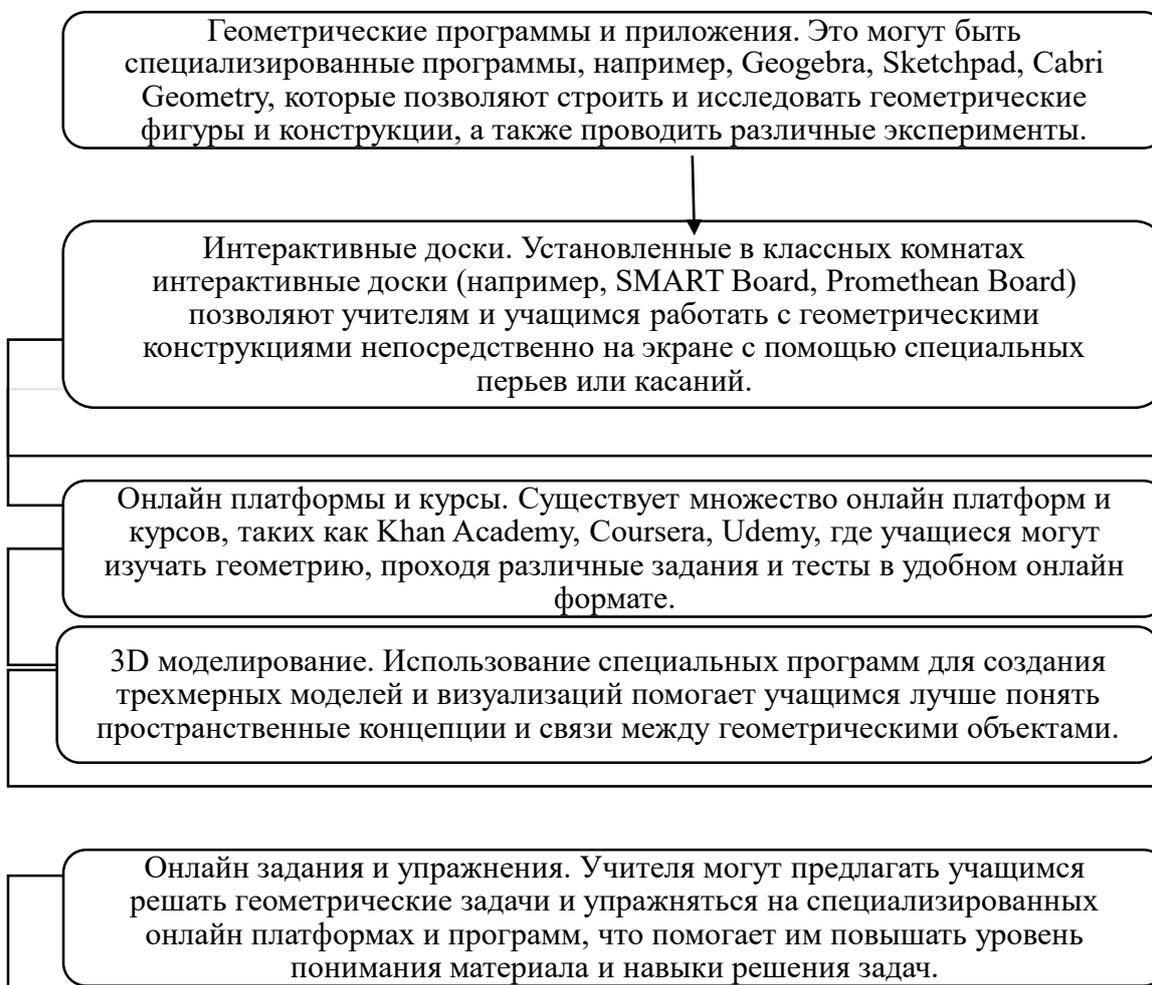


Рисунок 8 – Компьютерные технологии, применяемые в процессе обучения геометрии в старших классах

Современный мир становится все более цифровым. Именно поэтому в сфере образования компьютерные технологии играют все более важную роль.

«При обучении геометрии старших классов общеобразовательной школы все чаще и чаще используются компьютерные технологии.

Преимущество компьютерных технологии при обучении геометрии в старших классах рассмотрено на рисунке 9» [11].

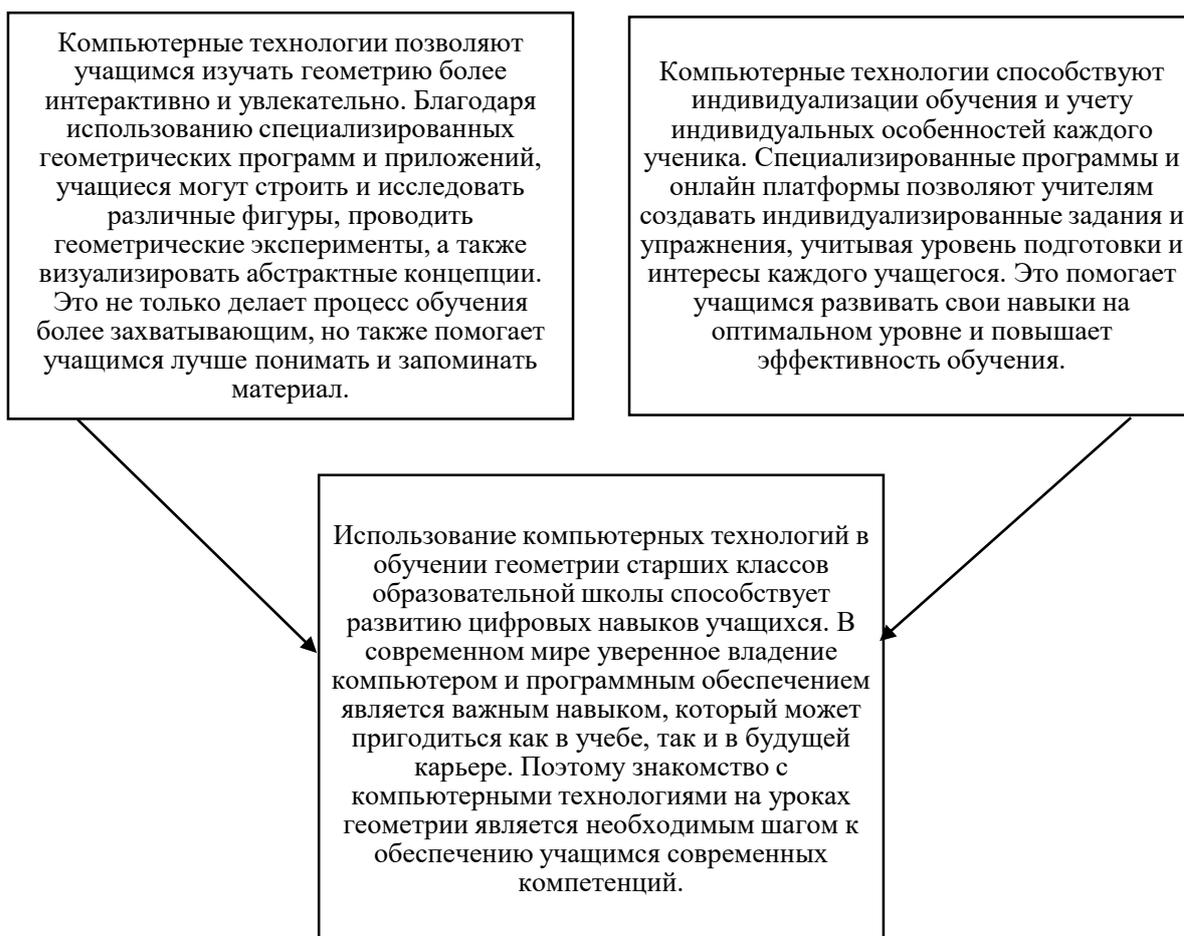


Рисунок 9 – Преимущество компьютерных технологии при обучении геометрии в старших классах

Можно сделать вывод, что использование компьютерных технологий в процессе обучения геометрии старших классов не только актуально и необходимо, но и очень эффективно. Компьютерные технологии помогают сделать обучение геометрии более интерактивным и эффективным. А еще оно помогает сделать обучение более индивидуальным.

При работе с интерактивными источниками и сайтами развиваются цифровые навыки учащихся. Поэтому внедрение компьютерных технологий в обучение геометрии очень важный шаг в современном образовании. Использование программ способствует улучшению качества образования в целом.

Современные программы позволяют моделировать многогранники и экспериментировать с ними в виртуальном пространстве. Программы для работы с многогранниками позволяют ученикам создавать, рисовать и вращать многогранники, таким образом, что их отображение становится более наглядным и понятным. Далее, ученик может проводить эксперименты с ними, изменяя параметры многогранников и наблюдая за изменениями [10].

Перечислим особенности программ для работы с многогранниками:

- вычисление *geometric boundary*;
- определение центра тяжести многогранника;
- генерация многогранников заданных размеров и форм;
- вращение вокруг любой оси;
- просмотр ребер, граней и вершин.

Ученик должен чувствовать свою ориентировку в многогранном пространстве, уметь работать с гранями, ребрами и вершинами многогранников. Для этого существует ряд методов применения компьютерных технологий в учебном процессе.

М.Н. Марюков [35] в диссертационном исследовании «Научно-методические основы использования компьютерных технологий при изучении геометрии в школе» (1998) предлагает активно использовать на уроках геометрии в старших классах возможности компьютера. При этом ключевое значение для ученого имеют демонстрация электронных схем, рисунков (макетов) фигур и т. д.

Г.Н. Гойибназарова «отмечает в статье «Использование современных ИКТ в обучении геометрии» (2018) отмечает, что с внедрением компьютера на уроках геометрии появляется необходимость добавления учебно-технологических умений и навыков: набирать текст в среде текстового редактора; выполнять основные операции над текстом в среде текстового редактора; сохранять информацию на диске, загружать его с диска, выводить на печать; строить изображения в среде графического редактора; создавать расчетную электронную таблицу в среде табличного процессора;

редактировать содержимое расчетной таблицы в среде табличного процессора; работать с гипертекстом, звуком, графикой в среде мультимедийных программ и т. д.» [16, с.52].

«Указанные умения являются сложными по своему составу и включают в себя ряд простых умений и навыков, формирование которых необходимо производить поэтапно. Как одним из первых этапов, предлагаем использование осуществления контроля знаний используя тестирующие программы. Как правило, источником тестов могут служить мультимедиа компакт диски с обучающими программами типа электронный учебник-справочник» [16].

Что касается непосредственно изучения темы «Многогранники» в старших классах, то наиболее практичными и эффективными методами являются:

- проведение интерактивных уроков, которые включают в себя эксперименты и симуляции в виртуальном пространстве, которые позволяют ученику ознакомиться с основными понятиями и свойствами многогранников.
- использование графических программ для создания и редактирования многогранников, которые позволяют визуально представить свойства формы, а также провести эксперименты с различными параметрами.
- применение компьютерных игр, объединяющих развлечение и обучение, при которых ученики могут опробовать себя на практике и проверить свои знания[61].

Все вышеперечисленные методы позволяют повысить эффективность обучения геометрии старшеклассников и улучшить качество представления материала[62].

В программе ФГОС СОО предусмотрены задачи и упражнения, которые могут быть решены с помощью использования компьютерных технологий, включая создание трехмерных моделей многогранников, представленных на

рисунке 10, визуализацию геометрических понятий и использование интерактивных заданий и тестов [53].

$$S_{m.б.} = \frac{\quad}{1 + \cos^2 \alpha}$$

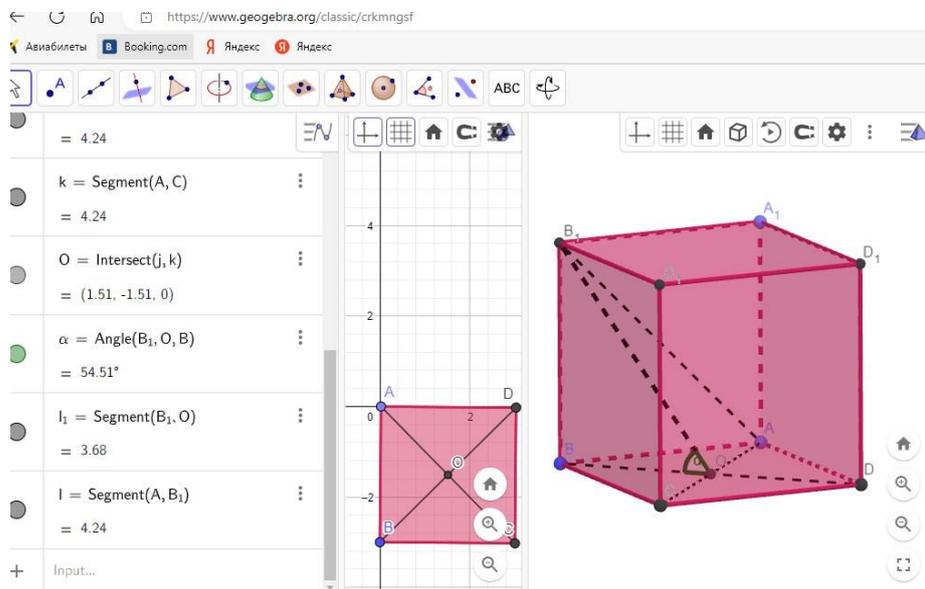


Рисунок 10 - Создание трехмерных моделей многогранников

Анализ учебников по геометрии позволяет выделить несколько авторов, чьи работы являются значимыми для развития обучения геометрии при использовании компьютерных технологий.

М.В. Белинский и А.А. Березин, «авторы учебника «Геометрия: с помощью компьютера (2018), предлагают вниманию старшеклассников задания и упражнения, стимулирующие использование программных средств для решения геометрических задач. В частности, авторы предлагают использовать программу GeoGebra для построения геометрических фигур и исследования их свойств. Учебник снабжен множеством иллюстраций и схем, что позволяет учащимся легко визуализировать геометрические понятия» [9].

Е.С. Калашникова и А.В. Копнина, авторы учебника «Геометрия: учебник для 10-11 классов общеобразовательных учреждений» (2016),

включили задания и упражнения, которые могут быть выполнены с использованием программных средств, таких как GeoGebra и SketchUp [20].

Авторы уделяют особое внимание использованию интерактивных заданий и тестов для более эффективного обучения. В учебнике также представлены теоретические материалы по геометрии, в том числе по «трехмерной геометрии» [34].

И.В. Полотовский и Е.С. Кальнин, «авторы статьи «Опыт использования компьютерной графики при обучении геометрии в школе» (2014), также активно рассматривают возможности использования программных средств для обучения геометрии. В частности, авторы предлагают использовать программу SketchUp для создания трехмерных моделей многогранников» [42].

А.В. Копнина в статье «Компьютерные технологии обучения многогранникам» (2019) предлагает использовать интерактивные задания и тесты для более эффективного обучения геометрии [29]. Автор также рассматривает программы GeoGebra и SketchUp и методы их применения в обучении многогранникам.

Д.А. Федосеев, М.Н. Шматова и А.В. Калашникова в статье «Развитие математического творчества через 3D-моделирование геометрических тел» (2018), рассматривают опыт работы студентов «Электронных вычислительных машин и информационных технологий» Московского государственного технического университета им. Н.Э. Баумана по созданию 3D-моделей многогранников. Авторы считают, что использование 3D-моделирования может стимулировать творческое мышление и повысить интерес к геометрии [55].

Отсюда делаем вывод, что учебники по геометрии, созданные с использованием компьютерных технологий, представляют собой новое поколение учебных пособий. Авторы учебников стараются объединить теоретические знания с реальной практикой, представляя материал на языке, понятном учащимся. Использование программных средств и интерактивных

форм обучения, «позволяет сделать процесс обучения более эффективным и интересным для учащихся».

Анализ научных статей и сборников, посвященных использованию компьютерных технологий в обучении геометрии, позволяет выделить несколько авторов, работа которых имеет значительный вклад в развитие данного направления. Общий анализ программы ФГОС, «учебников и научных статей позволяет сделать вывод, что включение компьютерных технологий в обучение геометрии старшеклассников оказывает положительное влияние на качество обучения и мотивацию учащихся» [54]. Сайты, к примеру Khan Academy, или же Geogebra, а также Mathigon помогает ученикам в интересной и игровой форме выучить тему по «Многогранникам» в курсе геометрии средней школы.

Таким образом, «использование компьютерных технологий в обучении многогранникам и геометрии в целом находится на стадии активного развития. Авторы научных статей и сборников предлагают различные подходы и методы» [11], включая создание 3D-моделей многогранников, использование интерактивных заданий и тестов, визуализацию геометрических понятий и введение виртуальных сред.

### **1.3 Особенности использования компьютерных программ «КОМПАС-3D LT» и «DG-геометрия» в курсе геометрии в старших классах образовательной школы при обучении теме «Многогранники»**

КОМПАС-3D LT – «это программное обеспечение, созданное для работы в сфере трехмерного моделирования» [28].

С помощью КОМПАС-3D LT Вы освоите трехмерное моделирование, научитесь строить чертежи на основе трехмерных моделей, сможете выполнять различные задания по черчению и компьютерной графике.

Программа «КОМПАС-3D» рассчитан на для учащихся старших классов (10-11 классах), «применяют данную программу в большинстве на

дополнительных занятиях и на кружковых занятиях или в рамках внеурочной деятельности по геометрии. Система трехмерного моделирования «КОМПАС», имеет прикладное и общеобразовательное значение, способствует развитию логического мышления учащихся, систематизации знаний при подготовке к выпускным экзаменам. Используются различные формы организации занятий, такие как лекция и семинар, групповая, индивидуальная деятельность учащихся» [22].

По мнению А.Г. Мерзляка «в основе коррекции базовых математических знаний учащихся за курс 10 – 11 классов совершенствовать математическую культуру и творческие способности учащихся. Расширение и углубление знаний, полученных при изучении курса алгебры.

Создание условий для формирования и развития у обучающихся навыков анализа и систематизации, полученных ранее знаний.

Программа «КОМПАС-3D» направлена на индивидуализацию обучения; удовлетворение образовательных потребностей школьников по геометрии. Формирование устойчивого интереса учащихся к предмету.

Обеспечение усвоения обучающимися наиболее общих приемов и способов решения задач. Развитие умений самостоятельно анализировать и решать задачи по образцу и в незнакомой ситуации.[70]

Формирование и развитие аналитического и логического мышления.

Расширение математического представления учащихся по определённым темам, включённым в программы вступительных экзаменов в другие типы учебных заведений.

Развитие коммуникативных и обще учебных навыков работы в группе, самостоятельной работы, умений вести дискуссию, аргументировать ответы и т.д.

Использование динамической геометрии DG повышает степень эмоциональной вовлеченности учащихся в занятия математикой, обеспечивает возможность постановки творческих задач и организации

проектной работы. Демонстрирует, как современные технологии эффективно применяются для моделирования и визуализации математических понятий».

С.М. Саакян, В.Ф. Бутузов «говорят что достоинствам DG можно отнести его динамические качества – мгновенное изменение всех зависимых построений при смене отдельных исходных параметров, а также возможность пошагового воспроизведения построения (как в прямом, так и в обратном порядке) [47].

Главные объекты геометрической среды, обеспечивающие функциональность DG, это точки и фигуры. Именно с их помощью практически обеспечиваются построения любой сложности достаточно ограниченным количеством основных инструментов [66].

DG – великолепный инструмент, который преобразует геометрические исследования в более наглядные и эффективные. Причем, темы для таких исследований неисчерпанные: это – каждая задача школьного учебника (если на задачу смотреть не как неизменную, а как на тему исследования), это решение каждой практической задачи при подготовке к ОГЭ в том числе» [56].

В.А. Далингер «занимался исследованиями в сфере применения компьютерных технологий в сфере образования, а именно на уроках алгебры и геометрии. В статье «Методические аспекты обучения учащихся решению задач в математических средах» автор рассматривает использование компьютерных сред Mathcad и Maple для решения различных математических задач.

Mathcad обладает чрезвычайной простотой интерфейса, которая сделала его одним из самых популярных среди обучающихся математическим пакетом. Математические выражения на экране компьютера представляются в общепринятой и знакомой нотации имеют такой же вид, как в книге, тетради, на доске. С ними можно выполнять численные или символьные операции, строить графики и т.п.

Система Maple в диалоговом режиме решает огромное число математических задач от простых расчетов и численного моделирования до

сложнейших аналитических преобразований и вычислений. Она имеет мощные графические средства, встроенный язык программирования, является справочником по практически всем разделам современной математики. Mathcad и Maple это среды для всех [59].

Так же в учебном пособии «Планиметрические задачи на построение», автор В.А. Далингер, рассматривает теоретические сведения, лежащие в основе решения задач на построение: геометрические места точек, преобразования плоскости, постановка задач на построение и основные методы их решения. Пособие снабжено большим числом решенных задач на построение, которые показывают как специфику использования основных методов решения задач на построение, так и специфику выполнения основных этапов решения этих задач (анализ, построение, доказательство, исследование)» [19].

В статье «Использование информационно-коммуникационных технологий в обучении геометрии», авторы Ю.Ф Нургалиева., М.Ю. Солощенко, «рассматриваются стремительное развитие информационно-коммуникационных технологий (ИКТ). Уже нельзя представить современного человека и практически во всех областях деятельности нельзя обойтись без их применения. Так и в области образования все шире и больше применяются ИКТ. В связи с чем, целью образования становится воспитание человека, адаптированного к новым условиям.

Уникальность применения ИКТ состоит в том, что их можно использовать на всех этапах процесса обучения: при объяснении нового материала; при закреплении и повторении; при итоговом контроле [68].

Уроки с использованием ИКТ имеют ряд преимуществ перед традиционными уроками. Использование компьютера на уроках математики позволяет более наглядно и доступно представить учебный материал, предоставляет возможность продемонстрировать явления или действия, которые в реальности увидеть невозможно, например, построение сечений в курсе стереометрии. Это, в свою очередь, стимулирует интерес ребёнка к

изучаемому предмету, повышается эффективность урока, а также повышается качество знаний» [39].

### Выводы по первой главе

В первой главе были получены следующие результаты:

- рассмотрены различные подходы к введению понятия многогранника и его свойств в курсе геометрии старших классов;
- определены основные цели и направления использования компьютерных технологий в процессе обучения геометрии старших классов общеобразовательной школы»;
- изучены особенности использования компьютерных программ «КОМПАС-3D LT» и «DG-геометрия» в курсе геометрии в старших классах образовательной школы при обучении теме «Многогранники».

## **Глава 2 Методические основы изучения многогранников в курсе геометрии старших классов общеобразовательной школы**

### **2.1 Проектирование изучения темы «Многогранники» с использованием компьютерных технологий в курсе геометрии старших классов общеобразовательной школы**

Для более полного изучения начнем с проектирования методических материалов по теме «Многогранники» в курсе геометрии. В старшей школе проектирование воспроизводится на основе компьютерных программ «КОМПАС-3D LT» и «DG-геометрия».

Поскольку компьютерные программы позволяют подробно и наглядно изучать многогранники, их особенности и т.д. Методическая основа изучения многогранников состоит в том, чтобы ученики старшей школы были заинтересованы в обучении, развивались познавательные способности, формировалось мышление и зрительная и слуховая память и образное мышление.

Достоинства применения компьютерных технологий в курсе геометрии позволяет быстро и доходчиво изображать данные задач, элементы фигуры, которые невозможно передать словами; вызывает интерес и делает разнообразным процесс передачи информации; усиливает воздействие выступления.

Практика показывает, что «внедрение компьютерных технологий повышает качество знаний и умений учеников, усвоенных во время занятий. Отбор материала для урока должен соответствовать принципам научности, доступности, наглядности. Сейчас наиболее интересными являются интерактивные занятия, созданные в программах «КОМПАС-3D LT» и «DG-геометрия» [71].

Методическая разработка урока математики по теме «Многогранники» с применением программ «КОМПАС-3D LT» и «DG-геометрия».

Тема: Многогранники.

Целью урока является процесс ознакомление учеников старшей школы с правильными многогранниками, их характеристиками в курсе геометрии с использованием компьютерных технологий.

Задачи:

1. Обучающие: ввести понятие правильного многогранника; рассмотреть свойства правильных многогранников.
2. Развивающие: формирование пространственных представлений учеников старшей школы, формирование умения обобщать, систематизировать, видеть закономерности, развитие монологической речи учеников.
3. Воспитательные: воспитание эстетического чувства, воспитание умения слушать, формирование интереса к предмету.

Оборудование: экран, проектор, компьютеры; документ-камера, доступ к Интернету; раздаточный материал: листы с заданиями, карты самооценки.

Материал: «Изучение темы «Прямая призма» в учебнике «Геометрия 10-11» под редакцией И.М. Смирновой»[48]. «Методические особенности изучения темы «Прямая призма» по учебнику «Геометрия 10-11» под редакцией А.В. Погорелова»[43].

Для учителя компьютерные технологии в процессе обучения математики учеников старшей школы «предоставляется возможность по-новому взглянуть на геометрию, рассмотреть её с точки зрения архитектуры, искусства, природы, гармонии. Посвятим наш урок теме, которую вы озвучите после выполнения первого задания по группам» [44].

Этап 1. Введение тему «Многогранники».

На данном этапе нужно изучить и закрепить все понятия и определения темы «Правильные многогранники».

Для повторения просматриваем презентацию по теме «Многогранники», созданную в программе PowerPoint, представленную на рисунке 11.

Многогранник называется правильным, если все его грани - равные правильные многоугольники.

К каждой вершине правильного многогранника сходится одно и то же число рёбер.

Сумма плоских углов при вершине правильных многогранников не больше пяти. Все двугранные углы при рёбрах и все многогранные углы при вершинах правильного многогранника равны.

Доказано, что правильных многогранников только 5 типов: четырёхгранник (тетраэдр), шестигранник или куб (гексаэдр), восьмигранник (октаэдр), двенадцатигранник (додекаэдр), двадцатигранник (икосаэдр).

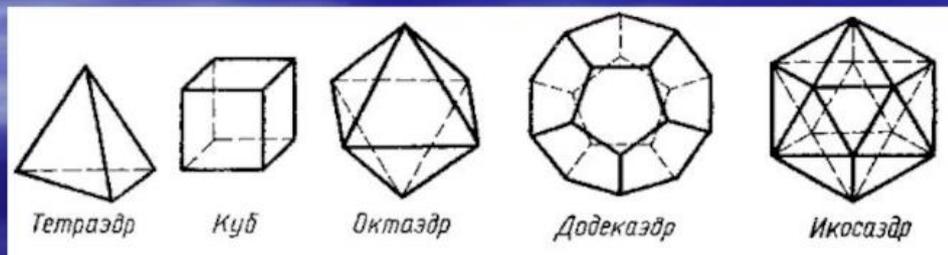


Рисунок 11 – Слайд из презентации по теме «Многогранники»

Преподаватель: У меня на столе фигура, которую вы знаете (тетраэдр).

Что вы можете о ней сказать: Тетраэдр (греч. τετραεδρον - четырёхгранник) простейший многогранник, гранями которого являются четыре треугольника. У тетраэдра 4 грани, 4 вершины и 6 рёбер.

Возьмите модели многогранников, представленные на рисунке 12, и опишите их последовательно один за другим по плану.

«Тетраэдр – правильный многогранник, составленный из 4 равносторонних треугольников.

Гексаэдр, или куб, – правильный многогранник, составленный из 6 квадратов.

Октаэдр – правильный многогранник, составленный из 8 равносторонних треугольников.

Додекаэдр – правильный многогранник, составленный из 12 правильных пятиугольников» [17].

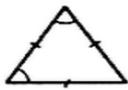
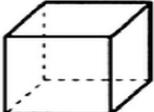
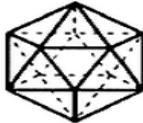
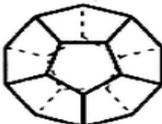
ПРАВИЛЬНЫЕ МНОГОГРАННИКИ					
№	Тип правильного многогранника	Вид грани	Число граней	Число вершин	Число ребер
1	<p>Правильный тетраэдр (четырёхгранник)</p> 		4	4	6
2	<p>Гексаэдр (шестигранник), куб</p> 		6	8	12
3	<p>Октаэдр (восьмигранник)</p> 		8	6	12
4	<p>Икосаэдр (двадцатигранник)</p> 		20	12	30
5	<p>Додекаэдр (двенадцатигранник)</p> 		12	20	30

Рисунок 12 – Правильные многогранники

Этап 2. Исторический.

Здесь нужно организовать поиск, сбор и изучение информации о правильных многогранниках.

По мнению Г.Н. Гойибназарова «в статье «Использование современных ИКТ в обучении геометрии» (2008), название “правильные” идет от античных времен, когда стремились найти гармонию, правильность, совершенство в природе и человеке. Так вот, оказывается, среди всех многогранников существуют особые многогранники, которые называются правильными.

(Показываю учащимся эти многогранники, но не называю их). Давайте попробуем вместе сформулировать определение правильного многогранника, сравнивая их с другими многогранниками. (Правильные многогранники – это многогранники, у которых все грани являются правильными, многоугольниками и они равны)» [16].

Провести частично-поисковую работу (определение видов правильных многогранников). В своей работе И.Е. Колошкина, Компьютерная графика : учебник и практикум для вузов(2021), задает вопросы, «Много ли существует видов правильных многогранников? Как установить количество видов правильных многогранников? (Все грани – правильные многоугольники; все многогранные углы должны быть равны, в каждую вершину должно сходиться одинаковое число ребер, граней, значит нужно установить, сколько граней может сходиться в одну вершину; должен существовать многогранный угол правильного многогранника, условие существования – сумма всех его плоских углов  $n\alpha$  меньше  $360^\circ$ » [27].

Задания по группам.

Перед вами на столе модели геометрических тел. Выполните следующие действия:

- отложите в коробку те модели, которые не являются моделями многогранников;
- уберите в коробку модели невыпуклых многогранников.

Ответьте на поставленные вопросы:

- что, называется многогранником;
- какие многогранники называют выпуклыми;
- оставьте на столе только модели правильных многогранников;
- какие многогранники называют правильными? (элемент опережающего обучения).

Этап 3. Исследовательский.

На этом этапе проводится исследование о наличии симметрии в природе, и обобщаются исследования.

Симметрия в пространстве.

“Симметрия...есть идея, с помощью которой человек веками пытался объяснить и создать порядок, красоту и совершенство”.

В планиметрии мы рассматривали фигуры, симметричные относительно точки и прямой. В стереометрии рассматривают симметрию относительно точки, прямой и плоскости, представленную на рисунке 13.



Рисунок 13 – Симметрия в пространстве и природе

Выполните задание. Возьмите для исследования объекты: овощ, фрукт, гриб, лист дерева, дерево, снежинку, птицу. Чтобы лучше рассмотреть детали некоторых объектов, приготовьте лупу.

Ответьте на вопросы. Обладают ли выбранные объекты симметрией? Если – нет, то почему? Если - да, то какой? Почему вы так решили?

Добавьте и исследуйте свой объект.

Исследование запишите по форме в таблицу 1.

Таблица 1 – Форма для заполнения

Объект	Вид симметрии	Опишите, в чем вы видите сходство частей симметрии, в чем – различие

Сделаем общие выводы:

1. Симметрична ли общая форма всех выбранных объектов?

Общая форма всех выбранных природных объектов симметрична. Симметрия наблюдается и у растений, и у животных, и у кристаллов.

2. Есть ли точное сходство в деталях?

Точного, или математического, сходства в деталях у исследуемых объектов не наблюдается. Симметрия объектов не абсолютна и содержит некоторую степень асимметрии. Нарушения симметрии проявляются в размере, расположении, окраске и строении отдельных частей исследуемых объектов.

3. Сделайте вывод о наличии симметрии в природе.

Симметрия присутствует в объектах живой и неживой природы, но она не абсолютна, то есть содержит некоторую степень асимметрии. В природе наиболее распространены два вида симметрии – лучевая (радиальная, осевая) и зеркальная (билатеральная).

Теперь проведем методический анализ теоретического и практического материала по теме «Прямая призма».

Базовые знания: понятие призмы и её элементов; понятия: прямая призма, наклонная призма, правильная призма, параллелепипед; свойства граней параллелепипеда, двугранных углов, диагоналей; понятие призмы; понятие прямой призмы; понятие многогранника; понятие куба; понятие параллелепипеда; понятие параллельности плоскостей.

Теоретический материал.

Так как определение призмы дается почти во всех учебниках, то целесообразно рассмотреть ее определение в каждом учебнике.

Рассмотрим с точки зрения этих требований определения призмы, которые даются в действующих учебниках геометрии 10-11 классов.

В учебнике геометрии Л.С. Атанасян «по поводу определения призмы» говорится следующее.

Рассмотрим два равных многоугольника  $A_1A_2\dots A_n$  и  $B_1B_2\dots B_n$ , расположенных в параллельных плоскостях  $\alpha$  и  $\beta$  так, что отрезки  $A_1B_1, A_2B_2, \dots, A_nB_n$ , соединяющие соответствующие вершины многоугольников, параллельны они изображены на рисунке 14.

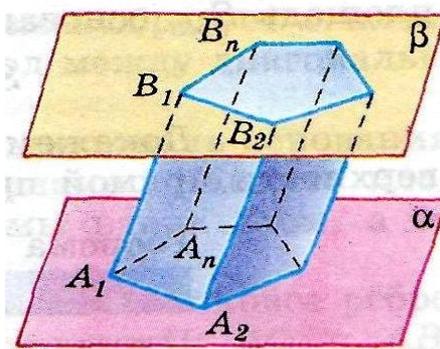


Рисунок 14 – Призма

Каждый из  $n$  четырехугольников  $A_1A_2B_2B_1, A_2A_3B_3B_2, \dots, A_nA_1B_1B_n$ , является параллелограммом, так как имеет попарно параллельные противоположные стороны. Например, в четырехугольнике  $A_1A_2B_2B_1$  стороны  $A_1A_2$  и  $B_1B_2$  параллельны по условию, а стороны  $A_1B_1$  и  $A_2B_2$  – по свойству параллельных плоскостей, пересеченных третьей плоскостью.

Многогранник, составленный из двух равных многоугольников  $A_1A_2\dots A_n$  и  $B_1B_2\dots B_n$ , расположенных в параллельных плоскостях, и  $n$  параллелограммов (1), называется призмой.

Призму с основаниями  $A_1A_2\dots A_n$  и  $B_1B_2\dots B_n$  обозначают  $A_1A_2\dots A_n B_1B_2\dots B_n$ .

Если боковые рёбра перпендикулярны к основаниям, то призма называется прямой» [3].

Приведённое определение призмы не вполне соответствует перечисленным выше требованиям.

Многогранник здесь понимается как поверхность, а многоугольник – как фигура, составленная из отрезков (сторон многоугольника). Таким образом, призма будет не многогранником, так как будет состоять только из отрезков (рёбер).

Использование обозначений в определении призмы нежелательно и вызывает много вопросов. В частности, неясно, можно ли использовать другие буквы в определении призмы, например, обозначить треугольную призму  $ABCA_1B_1C_1$  или нужно обязательно писать  $A_1A_2A_3B_1B_1B_3$ .

Кроме сказанного, такое определение призмы не согласуется с понятиями объёма и площади поверхности, так как эти понятия применимы к пространственным телам, а призма таковым в данном случае не является.

Приведённое определение призмы весьма затруднительно для воспроизведения учащимися. По нашим опросам школьники и даже учителя, работающие по учебнику [1], не могут сформулировать определение призмы.

В текст, относящийся к определению призмы, включено обоснование (доказательство) того, что четырёхугольники являются параллелограммами. Конечно, такое включение загромождает определение, что затрудняет его понимание.

Определение призмы использует понятие параллельности плоскостей. Следовательно, оно может быть дано только после изучения этого понятия.

Определение прямой призмы использует понятие перпендикулярности прямой и плоскости. Следовательно, оно может быть дано только после изучения этого понятия.

В результате определение призмы в этом учебнике появляется только в главе III, после того, как уже рассмотрено «взаимное расположение прямых и плоскостей в пространстве, параллельность и перпендикулярность, углы и

расстояния» в пространстве. Конечно, отсутствие понятия призмы существенно затрудняет изучение данных тем, снижает его эффективность, не способствует достижению результатов обучения.

Рассмотрим теперь учебник А.В. Погорелов «где даются следующие определения призмы.

Призмой называется многогранник, который состоит из двух плоских многоугольников, лежащих в разных плоскостях и совмещаемых параллельным переносом, и всех отрезков, соединяющих соответствующие точки этих многоугольников.

Призма называется прямой, если её боковые рёбра перпендикулярны основаниям.

Если основание призмы есть параллелограмм, то она называется параллелепипедом.

Прямой параллелепипед, у которого основанием является прямоугольник, называется прямоугольным параллелепипедом» [43].

Прямоугольный параллелепипед, у которого все рёбра равны, называется кубом.

Данное определение призмы соответствует требованиям 1 и 2.

В нём, в отличие от учебника [2], призма является телом, следовательно, можно говорить об её объёме и площади поверхности.

Помимо этого, определение призмы не содержит обозначений, является более коротким и удобным для запоминания.

Ещё одним достоинством этого определения является его конструктивность.

Однако, с точки зрения требования методической целесообразности, много вопросов вызывает расположение определения призмы в начале 11-го класса.

Учебный материал 10-го класса (взаимное расположение прямых и плоскостей в пространстве, параллельность и перпендикулярность, углы и расстояния в пространстве) рассматривается без привлечения призм. Конечно,

это существенно затрудняет изучение этих тем, снижает их наглядность, что, в конечном счёте, не способствует достижению результатов обучения.

Параллелепипед определяется как частный случай призмы. Это не согласуется с определением параллелограмма – плоского аналога параллелепипеда. У параллелограмма оснований и боковых сторон нет, а в предложенном определении у параллелепипеда имеются основания и боковые рёбра.

Аналогично, куб определяется как частный случай параллелепипеда. Это не согласуется с определением квадрата – плоского аналога куба. У квадрата оснований и боковых сторон нет, а у куба есть основания и боковые рёбра.

Обратимся к учебникам прошлых поколений и в качестве примера возьмём классический учебник А.П. Киселёва, «в нём даются следующие определения призмы.

Призмой называется многогранник, у которого две грани – равные многоугольники с соответственно параллельными сторонами, а все остальные грани – параллелограммы.

Призма называется прямой или наклонной, смотря по тому, будут ли её боковые рёбра перпендикулярны или наклонны к основаниям» [35].

«Параллелепипедом называют призму, у которой основаниями служат параллелограммы.

Прямоугольный параллелепипед, имеющий равные измерения, называется кубом.

Недостаток такого определения призмы хорошо известен. Под это определение, например, подходит многогранник, составленный из двух призм, представленный на рисунке 15, а также ромбододекаэдр на рисунке многогранник, гранями которого являются двенадцать ромбов. Форму этого многогранника имеет кристалл граната» [35]. Подробно этот интересный многогранник представлен в статье Смирновой И.М. Познакомьтесь: ромбододекаэдр [48].

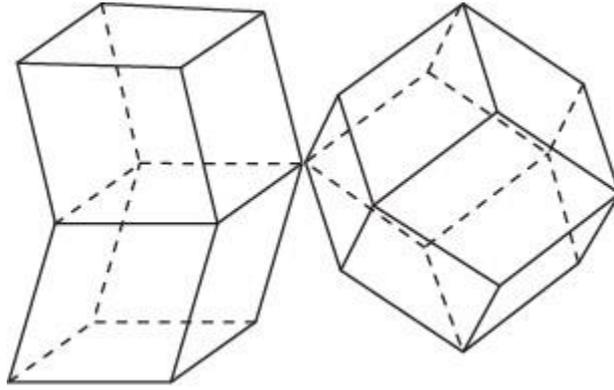


Рисунок 15 – Многогранники

В отличие от учебников Л.С. Атанасяна [2] и А.В. Погорелова [43], здесь в определении призмы не используется параллельность плоскостей и параллельного переноса, что позволяет рассматривать понятие призмы сразу после изучения параллельности прямых в пространстве.

Определение прямой призмы использует понятие перпендикулярности прямой и плоскости. Следовательно, оно может быть дано только после рассмотрения этого понятия.

Отметим, что определение параллелепипеда и куба имеют те же недостатки, что и в учебнике А.В. Погорелова [43].

Теперь представим определения куба, параллелепипеда, призмы и пирамиды, используемые в учебнике «и отвечающие, на наш взгляд, требованиям научности, доступности и методической целесообразности.

Предлагаемые определения не используют понятия параллельности и перпендикулярности прямых и плоскостей в пространстве.

Начнём с определения куба.

Кубом называется многогранник, поверхность которого состоит из шести квадратов, смотри рисунок 16.

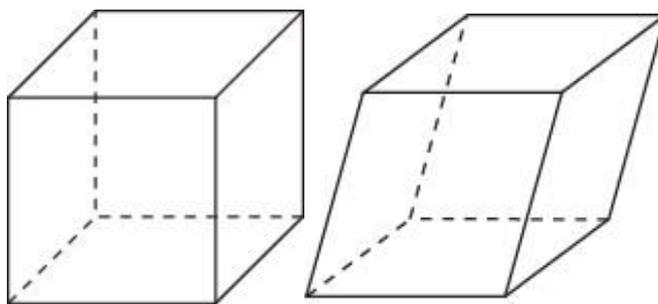


Рисунок 16 – Куб

Параллелепипед – многогранник, поверхность которого состоит из шести параллелограммов, представлен на рисунке 16.

Параллелепипед, у которого все грани – прямоугольники, называется прямоугольным, представлен на рисунке 17.

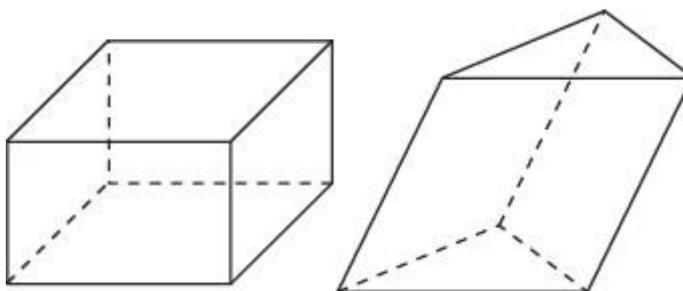


Рисунок 17 – Многогранники

Призмой называется многогранник, поверхность которого состоит из двух равных многоугольников, называемых основаниями призмы, и параллелограммов, имеющих общие стороны с каждым из оснований и называемых боковыми гранями призмы. Стороны боковых граней, не лежащие в основаниях, называются боковыми рёбрами призмы.

Призма, представленная на рисунке 18, боковыми гранями которой являются прямоугольники, называется прямой. В противном случае призма называется наклонной» [49].

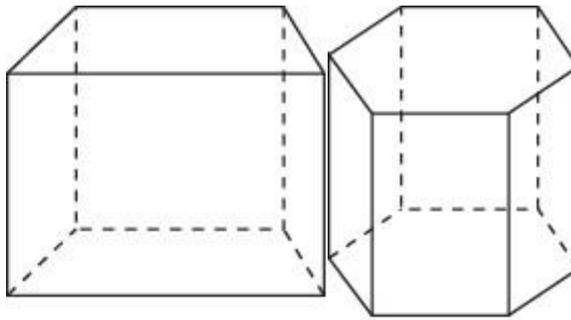


Рисунок 18 – Призма

Прямая призма, основаниями которой являются правильные многоугольники, называется правильной.

Например, в учебнике И.М. Смирновой, В.А. Смирнова [49] существование призм вытекает из конструктивного определения обобщённого цилиндра, которое даётся в 11-м классе. А именно, рассмотрим рисунок 19, где даны две параллельные плоскости  $\alpha$  и  $\pi$ , и прямую  $l$ , их пересекающую.

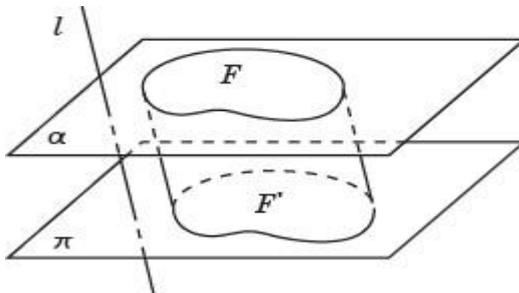


Рисунок 19 – Параллельные плоскости

«Пусть  $F$  – фигура, лежащая в плоскости  $\alpha$ ,  $F'$  – её параллельная проекция на плоскость  $\pi$  в направлении прямой  $l$ .

Фигура, образованная отрезками, соединяющими точки фигуры  $F$  с их параллельными проекциями, называется обобщённым цилиндром. Фигуры  $F$  и  $F'$  называются основаниями обобщённого цилиндра.

В случае, если прямая  $l$  перпендикулярна плоскости  $\pi$ , соответствующий обобщённый цилиндр называется прямым.

Ясно, что если фигура  $F$  – многоугольник, то обобщённый цилиндр является призмой, если  $F$  – круг, то прямой обобщённый цилиндр является обычным цилиндром» [49].

Понятия обобщённого цилиндра и обобщённого конуса используется в учебнике И.М. Смирнова, В.А. Смирнов «для вывода формул объёмов пространственных фигур.

Предложенный подход к определениям параллелепипеда, призмы через описание их граней позволяет ввести эти понятия в самом начале изучения стереометрии, использовать их для иллюстрации взаимного расположения прямых и плоскостей в пространстве, проведения дополнительных построений, доказательства параллельности и перпендикулярности прямых и плоскостей, решения задач на нахождения расстояний и углов в пространстве. Кроме этого, данный подход согласуется с определением правильных и полуправильных многогранников, является основой для изготовления моделей различных многогранников из развёрток и геометрического конструктора» [49].

«Самодельные модели многогранников служат средством конкретной наглядности – первой стадии, которая ведёт к абстрактной наглядности – чертежу. Модели могут быть использованы учителем для иллюстрации новых понятий, доказательств теорем, решения задач. Красиво сделанные модели являются украшением любого кабинета математики, рабочего уголка школьников» [49]. Всё это повышает наглядность изучения стереометрии, способствует достижению результатов обучения.

## **2.2 Элективный курс «Прямая призма»**

В ходе проведения исследования был разработан элективный курс «Прямая призма» для обучающихся 10-11 классов углубленного математического профиля с целью расширения и углубления математических знаний в количестве 17 часов.

Основной целью элективного курса является ознакомление обучающихся с методами исследования многогранников с использованием компьютерных технологий на примере прямой призмы.

Задачи элективного курса.

1. Изучить особенности многогранников.
2. Научить использовать геометрический софт для моделирования и расчета параметров прямой призмы[22].

Учебно-тематический план элективного курса составляет 17 часов и учебно-тематическое планирование, представлено в таблице 2.

Таблица 2 – Учебно-тематическое планирование

Содержание	Кол-во часов	Виды занятий
1. Введение в компьютерную геометрию.	2	Вводное занятие
2. Основы многогранников, прямая призма.	2	Лекция, тест
3. Программное обеспечение для работы с многогранниками, прямой призмой.	3	Лекция, тест
4. Практическое занятие: создание моделей прямой призмы.	3	Практическое занятие: семинар
5. Аналитический расчет параметров прямой призмы.	3	Лабораторная работа
6. Проектная работа по прямой призме.	3	Проекты

Ожидаемые результаты прохождения данного элективного курса. Обучающиеся смогут применять компьютерные программы для исследования геометрических фигур, в частности прямой призмы, и проводить самостоятельные исследования.

Рассмотрим краткое содержание элективного курса. Во введении описываются основы компьютерной геометрии и ее применение. В разделе об основах многогранников исследуются их виды, свойства и классификация. При изучении программного обеспечения осваиваются базовые навыки работы с программами для 3D-моделирования. На практических занятиях

студенты создают модели многогранников, исследуя их свойства. Аналитическое занятие посвящено изучению методов расчета параметров многогранников. В рамках проектной работы учащиеся самостоятельно исследуют многогранники и составляют отчеты.

Представим план одного занятия элективного курса.

Тема. Создание 3D-модели призмы [25].

Цели занятия.

- научить участников использовать специализированные программы для 3D моделирования;
- объяснить принципы моделирования многогранников на примере тетраэдра;
- развить пространственное мышление и навыки работы с программным обеспечением. [30].

Ход занятия:

- введение в тему (5 минут). Преподаватель объясняет цель урока. Кратко рассказывает о тетраэдре как о простейшем типе многогранника;
- демонстрация программы (15 минут). Преподаватель выбирает программное обеспечение для моделирования (например, Blender, SketchUp, Tinkercad и т.д.). Демонстрирует интерфейс и основные инструменты программы, которые будут использоваться для создания модели. Показывает пример создания простой 3D-модели тетраэдра [37];
- самостоятельная работа обучающихся (50 минут). Участники занятия переходят к практическому этапу и начинают создавать свою 3D-модель призмы, следуя инструкциям и рекомендациям преподавателя. Преподаватель оказывает индивидуальную помощь и отвечает на возникающие вопросы. Участники экспериментируют с различными инструментами программы, чтобы детализировать модель и придать ей реалистичный вид (текстуры, освещение и др.);
- обсуждение и анализ полученных моделей (15 минут).

По окончании работы участники представляют свои призмы. Вместе с преподавателем обсуждают сложности, с которыми столкнулись в процессе моделирования, и делятся опытом их решения. Преподаватель дает обратную связь и подчеркивает особенности и достоинства каждой работы. Обсуждение заключается кратким резюме о том, какие навыки участники занятия приобрели и как их можно применить в дальнейшем.

– рекомендуемая литература для учителя;

1. И. Б. Аббасов «Компьютерное моделирование в промышленном дизайне» / И. Б. Аббасов, М.: ДМК, 2022 [5].

2. И. М. Белова «Компьютерное моделирование» / И. М. Белова, М.: МГИУ, 2021 [10].

– рекомендуемая литература для обучающихся;

1. Р. В. Майер «Компьютерное моделирование: учебно-методическое пособие для студентов педагогических вузов» [Электронное учебное издание на компакт-диске], Глазов: Глазов. гос. пед. ин-т, 2019 [34].

2. И. В. Орлова Экономико-математические методы и модели: компьютерное моделирование: Учебное пособие / И. В. Орлова, В.А. Половников: Вузовский учебник, 2020. [40].

– практические работы оцениваются на основе технического исполнения и качества исследования [23].

Программа курса сосредоточена на развитии практических навыков и усилении исследовательского подхода в изучении геометрии.

Знания и умения, которые получают школьники, будут способствовать более глубокому пониманию тематики многогранников и могут быть использованы для дальнейшего развития в этой области. [18].

Представим содержания тем элективного курса.

Тема 1. Введение в компьютерную геометрию.

В результате рассмотрения темы учащиеся знакомятся с основными понятиями и применением компьютерной геометрии. Так же ученики

узнают роль компьютерной геометрии в различных областях, таких как архитектура, дизайн, анимация и инженерия.

План изучения темы:

1. Вступительная лекция о компьютерной геометрии, её истории и вкладе в развитие современных технологий.
2. Обсуждение примеров использования компьютерной геометрии в реальной жизни.
3. Введение в базовые математические концепции, необходимые для понимания компьютерной геометрии.
4. Демонстрация простых моделей и визуализаций с помощью компьютерной графики. [30].
5. Заключительное обсуждение и ответы на вопросы студентов.

Тема 2. Основы многогранников (прямой призмы)

В результате рассмотрения темы учащиеся познакомятся с понятием прямая призма и её свойствами и научатся классифицировать призмы и понимать их геометрические характеристики.

План изучения темы.

1. Теоретическая лекция о призме, включая определение, элементы (границы, рёбра, вершины) и виды (Платоновы тела, Архимедовы тела).
2. Интерактивная презентация с примерами различных призм и их геометрическими характеристиками.
3. Проведение практического упражнения на построение сеток призм с помощью бумаги и ножниц.
4. Обсуждение связи призмы с Эйлеровой характеристикой и другими топологическими свойствами.
5. Вопросы и ответы по теме «Прямая призма» [24].

Тема 3. Программное обеспечение для работы с многогранниками (прямой призмой).

При рассмотрении темы происходит знакомство с различными программами для компьютерного моделирования различных призм. Также

школьники учатся выполнять базовые операции создания и редактирования 3D-моделей.

План изучения темы.

1. Обзор популярных программ для работы с многогранниками (например, SketchUp, Blender, Tinkercad).
2. Демонстрация интерфейса и основных инструментов выбранной программы.
3. Пошаговое руководство по созданию простой 3D-модели прямой призмы.
4. Работа в парах или индивидуально над созданием собственной 3D-модели одной из призм.
5. Анализ и обсуждение проектов учащихся, обмен опытом и решением возникших проблем.
6. Заключительное оценивание выполненных работ и обратная связь от преподавателя.

Тема 4. Создание моделей прямых призм.

Происходит освоение навыков построения трехмерных геометрических фигур и происходит развитие пространственного воображения и мелкой моторики.

План изучения темы.

1. Обсуждение основных типов призм – правильных и неправильных, выпуклых и вогнутых.
2. Раздача шаблонов многогранников с разметкой для сгибания.
3. Разъяснение методики сборки многогранников из шаблонов.
4. Вырезание и склеивание многогранников из цветного картона.
5. Самостоятельная работа учащихся по созданию и окрашиванию моделей правильных призм.
6. Взаимная проверка и обсуждение полученных моделей.
7. Демонстрация и защита выполненных моделей перед классом.

Тема 5. Аналитический расчет параметров прямой призмы [8].

Во время занятий закрепляются знания по геометрии в части вычисления параметров различных призм.

План изучения темы.

1. Обзор необходимых формул и теоретических сведений
2. Раздача заданий на вычисление параметров прямой призмы (площадь поверхности, объем, количество граней, вершин и ребер).
3. Работа в парах или индивидуально над расчетными заданиями.
4. Совместное решение типовых задач на доске (с участием волонтеров из класса).
5. Проверка и анализ выполненных заданий с обсуждением типичных ошибок.

Тема 6. Проектная работа: исследование прямой призмы.

Иллюстрируется процесс применения теоретических знаний на практике и умение проводить научные исследования.

План изучения темы.

1. Подготовка к проекту:
  - выбор темы исследования (например, свойства определенного класса многогранников, взаимосвязь между параметрами и т.д.);
  - составление плана исследования;
  - сбор и изучение литературы по выбранной теме.
2. Исполнение проекта:
  - проведение экспериментов, наблюдений, расчетов;
  - создание моделей многогранников с целью экспериментальной проверки свойств; [21]
  - анализ результатов и выявление закономерностей.
3. Заключительный этап:
  - подготовка отчета или презентации по итогам проекта;
  - подготовка доклада для устного представления результатов исследования перед аудиторией;

- обсуждение проектов с преподавателем и другими учащимися, защита проектов.

Рассмотрим проект «Решение задач на прямую призму».

Цель проекта в систематизации и расширения знаний и умений, связанных с изучением прямой призмы через программу Geogebra».

Задачи проекта:

- построение прямой призмы в Geogebra;
- решение задачи на построение сечений в Geogebra;
- решение задачи типа ЕГЭ с помощью Geogebra [56].

План изучения темы.

### 1. Построение прямой призмы в Geogebra.

Рассмотрим решение задач с использованием компьютерных программ.

Пример 1. Построить в Geogebra прямую треугольную призму.

Решение: Отметим произвольно три точки и построим произвольный треугольник ABC, изображено на рисунке 20.

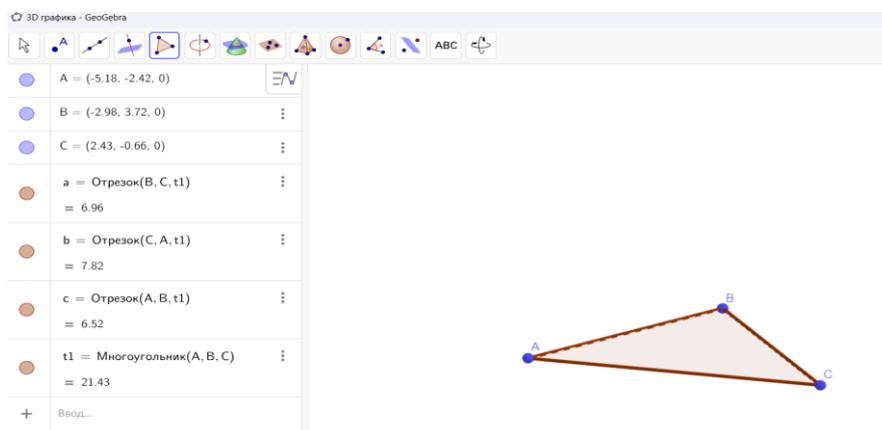


Рисунок 20 – Построенный треугольник

В верхнем правом углу выбираем значок пирамиды и нажимаем «Выдавить призму или цилиндр». Далее после нажатия этого пункта щелкаем по нашему треугольнику, на котором мы хотим построить призму (рисунок 21).

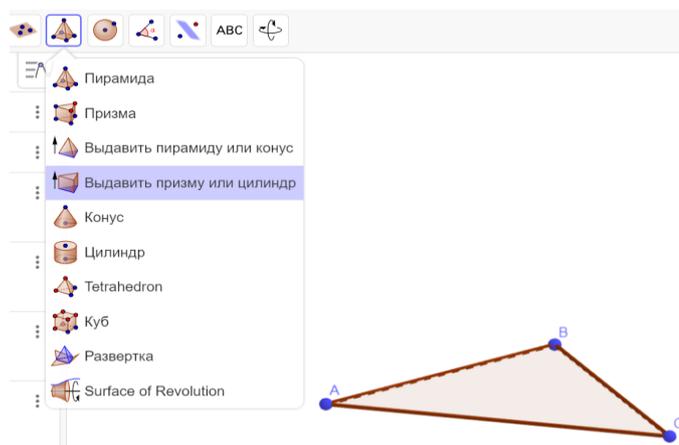


Рисунок 21 – Построенный треугольник

Далее нам предлагается вбить необходимую высоту призмы (рисунок 22):

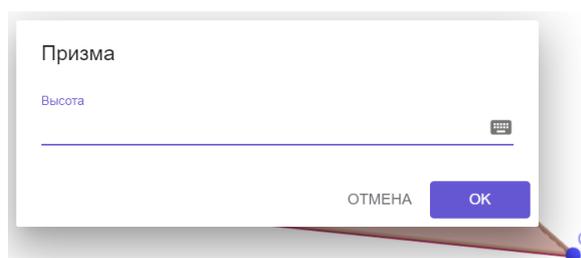


Рисунок 22 – Высота призмы

После этого мы получаем необходимую нам призму. Примечательно, что данная функция по умолчанию строит именно прямую призму. Вершины этой призмы можно переименовывать, раскрасить призму в различные цвета и работать с ней (рисунок 23).

Иные прямые призмы строятся аналогично. При этом в основании можно поместить равносторонний  $n$ -угольник (сделав призму правильной) или произвольный.

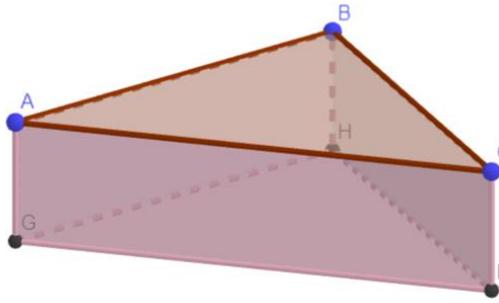


Рисунок 23 – Искомая призма

## 2. Задачи на построение сечений.

Особенно важная тема при изучении стереометрии в старших классах профильной школы – это тема «Построение сечений».

Сечением призмы является многоугольник вершины, которого расположены на ребрах, а стороны целиком лежат на гранях. Количество часов, выделяемых на изучение данной темы невелико, поэтому целесообразно предлагать учащимся решение некоторого количества задач на готовых чертежах для того, чтобы они могли сэкономить время на построение объемных фигур [68].

В то же время Geogebra выступает отличным ресурсом, который помогает быстро изображать необходимые пространственные фигуры, а также, что немаловажно, вращать их, рассматривая сечение с различных сторон. Приведем некоторые примеры решения подобных задач.

Задача 1. Построить сечение для прямоугольного параллелепипеда, проходящее через точки E, P, F. [11] (рисунок 24).

Решение: Используя инструмент «Плоскость по 3 точкам» соединим точки P, E, F – получим все следы секущей плоскости на грани параллелепипеда.

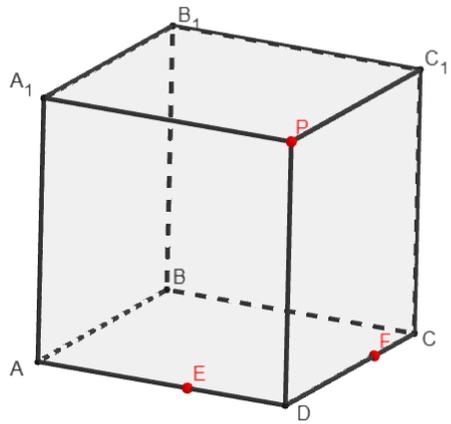
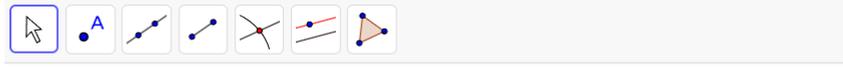


Рисунок 24 – Заданный параллелепипед

Сечение – треугольник (представлено на рисунке 25).

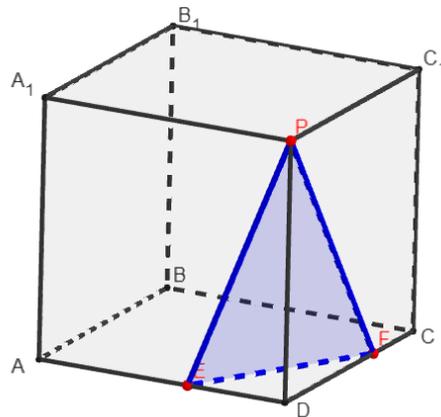


Рисунок 25 – Искомое сечение

Задача 2. Построить сечение параллелепипеда, проходящего через точки E, F, G (рисунок 26).

Решение.

Соединим точки F и E на верхней грани параллелепипеда  $A_1B_1C_1D_1$ . Соединим точки G и F. Построим прямую, параллельную прямой F, G, проходящую через точку F и зафиксируем точку H пересечения данной прямой с плоскостью  $AA_1D_1$ . Через точку H проведем прямую, параллельную FE.

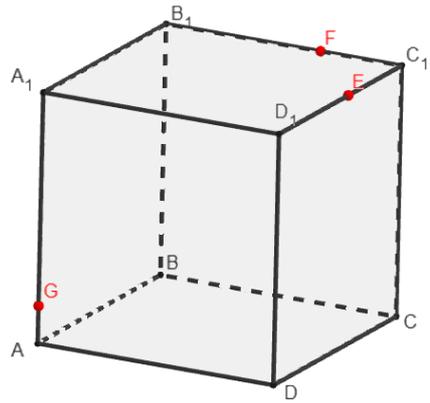
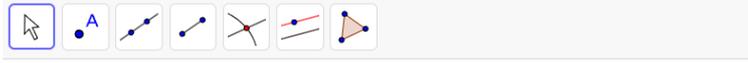


Рисунок 26 – Заданный параллелепипед

Зафиксируем точку пересечения этой прямой  $I$  с плоскостью  $AA_1B_1$ . Соединим плоскостью все полученные точки и получим сечение – пятиугольник  $EFHGI$ , подробное построение представлено на рисунках 27, 28.

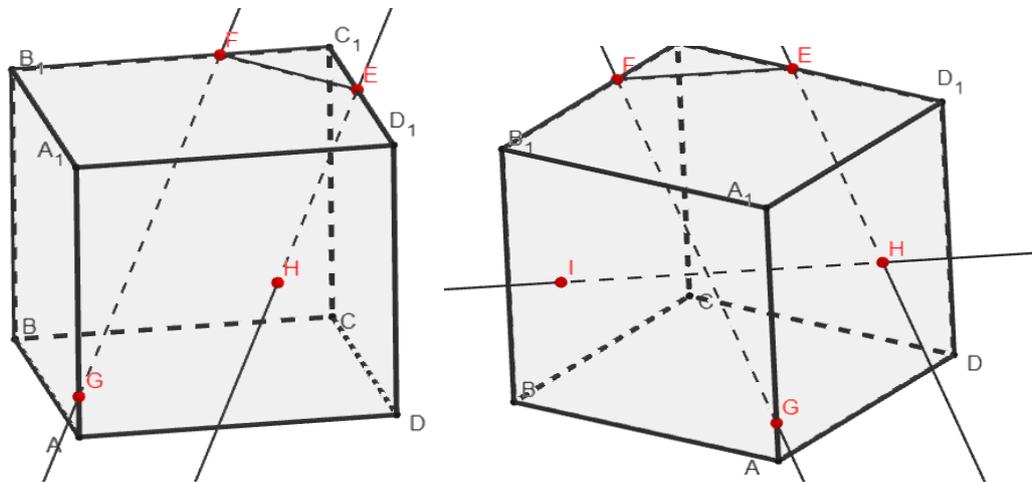


Рисунок 27 – Построение сечения

## 2. Задачи типа ЕГЭ.

Несомненное достоинство ресурса Geogebra состоит в том, что он играет большую роль при подготовке учащихся к сдаче Единого государственного экзамена по математике профильного уровня.

Рассмотрим некоторые задачи, взятые из сборника по подготовке к ЕГЭ-2024 под руководством И.В. Яценко [64].

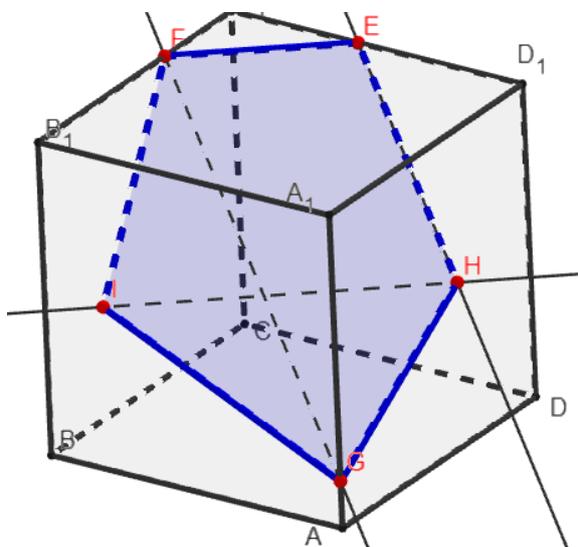


Рисунок 28 – Искомое сечение

Задача 3. Площадь боковой поверхности треугольной призмы равна 24. Через среднюю линию основания призмы проведена плоскость, параллельная боковому ребру. Найдите площадь боковой поверхности отсеченной треугольной призмы.

Решение. Изобразим данную призму и ее сечение средствами Geogebra. Для этого, не нарушая общности, положим нашу призму правильной, в основании которо лежит треугольник со стороной 4, а высота этой пирамиды равна 2 (рисунок 29).

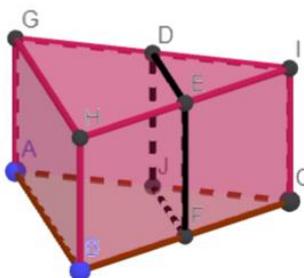


Рисунок 29 – Заданная призма

При помощи инструмента «Площадь» убедимся, что площадь боковой поверхности нашей призмы равна 24.

При помощи того же инструмента «Площадь» получаем ответ, что площадь боковой поверхности отсеченной треугольной призмы равна 12, что составило половину от изначальной площади. Меняя данные числовые параметры, можно убедиться, что все задачи решаются подобным образом.

Таким образом, можно сделать вывод о том, что очень многие задачи стереометрии в профильных классах могут быть решены при помощи использования ресурса Geogebra [63].

Удобство данного ресурса для решения стереометрических задач состоит прежде всего в том, что пространственные фигуры можно вращать, смотреть на них с различных удобных для себя ракурсов, что тренирует умение располагать фигуру на чертеже наиболее целесообразным для решения данной задачи способом [52].

При этом достоинства Geogebra при решении стереометрических задач состоит в том, что условия задач можно варьировать и решать задачу в общем виде, наблюдая за тем, как ответ на поставленный вопрос задачи влияет на численное значение в ответе.

При решении задач по теме «Прямая призма» в старших классах профильной школы целесообразно использование такого инструмента Geogebra как «Перпендикуляр» (для того чтобы боковые грани призмы были перпендикулярны основанию). В то же время инструмент «Выдавить призму» позволяет по любой имеющейся фигуре в основании призмы получить прямую призму необходимой высоты, задаваемой вручную. Для решения задач в курсе подготовки к ЕГЭ профильного уровня часто используется инструмент «Правильный многоугольник», поскольку сюжеты таких задач часто включают в себя призмы такого вида [45].

В целом, ресурс Geogebra можно смело признать новейшим и полезным ресурсом для решения стереометрических задач старших классов профильной школы.

### 2.3 Педагогический эксперимент и его результаты

Педагогический эксперимент проводился на базе КГУ "Соколовская средняя школа" Кызылжарского района среди учащихся 10 и 11 классов в 2022-2023 учебном году. В исследовании приняли участие 26 учеников средней образовательной школы в 11 – Б классе. Для точности результатов исследования количество учеников разделили на две группы: в экспериментальной группе было 13 человек, в контрольной группе 13 человек.

Диагностика, которая определяет уровень знаний по теме «Многогранники» с использованием компьютерных технологий в курсе геометрии старших классов, достаточно трудный процесс. Сложность его заключается в том, что для изучения правильных многогранников, развития навыка решения задач, недостаточно проведения одной методики. Целесообразно провести комплекс диагностических методик, соответствующих возрасту учеников старшей школы, который поможет выявить уровень развития самостоятельности, познавательный интерес, логику мышления, умения совмещать теоретические и практические знания.

Для того чтобы более точно описать процесс обучения по теме «Многогранники» с использованием компьютерных технологий в курсе, геометрии старших классов, «мы опираемся на следующие показатели самостоятельности:

- мотивационный критерий, то есть осознание познавательной потребности ученика старшей школы, а также отношение ученика не только к предмету, но и к процессу деятельности, стремления учащихся по собственному побуждению участвовать в деятельности;
- содержательно-операционный критерий, то есть наличие стремления ученика поделиться с другими (товарищами, учителем) новой, свежей

для него информацией, почерпнутой из каких-либо источников за пределами обучения;

– волевой критерий, например, когда мотивы, движущие учеником в процессе взаимоотношения с одноклассниками. Сюда же относятся готовность и стремление ученика к преодолению сложностей в процессе поиска информации;

– когнитивный критерий включает в себя объем знаний учеников старшей школы в выявлении уровней знаний в математике, а также полноту, прочность, осознанность, оценочное отношение к нему, словесные проявления, уровень знаний, умение оперировать терминами, формулами» [13].

На основе критериев и показателей, разработанных для проведения анализа результатов исследования, были определены три уровня эффективности изучения по теме «Многогранники» с использованием компьютерных технологий в курсе геометрии старших классов:

– высокий уровень: ученик активно участвует в занятии, задает вопросы, качественно выполняет задания. В случае проблемной ситуации или неудачи не проявляет агрессию, спокойно прорабатывает сложный момент в выполнении задания. Ученик крайне целеустремлен на уроке, проявляет инициативу в ответах на вопросы. В свободное или внеурочное время изучает образовательную литературу по необходимой тематике занятия, проявляет интерес к индивидуальным заданиям и проектам;

– средний уровень: ученик малоусидчив, проявляет активность на уроке, но не так целеустремленно. Задает вопросы в ходе занятия, но может сталкиваться с трудностями, что требует помощи педагога. Моментами учителю приходится вызывать ученика к доске, для вовлечения в процесс образования. Учащийся проявляет интерес к тематической литературе, активен при разборе заданий, и проявляет желание в получении индивидуальной формы работы;

– низкий уровень: ученик не активен в ходе занятия или внеурочной деятельности. Не проявляет интерес к изучаемой теме, не внимателен на уроке, часто задает вопросы педагогу и переспрашивает. Вовлечение в занятие не наблюдается, часто вызывает к себе повышенное внимание. Ученик сталкивается с трудностями и непониманием при выполнении заданий, что оказывает понижение успеваемости и эффективности обучения. Учащийся часто выполняет задания с помощью соседа по парте, или по принципу аналогии.

На основе этих показателей нами были подобраны методические пособия преподавания геометрии в старшей школе, позволяющие выявить наличие уровня знаний по теме «Многогранники», а также умение использовать компьютерные технологии в процессе обучения.

Первоначально для ознакомления учеников с темой «Многогранники» проводился анализ учебника по «Геометрии 10-11» под редакцией И.М. Смирновой. Для проведения самоконтроля, в параграфе №3 Пространственные фигуры, страница 12 – 14. Ученики выполняли задания для проведения самоконтроля (рисунок 30).

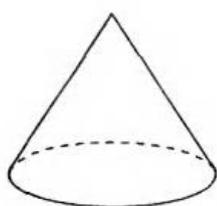


Рис. 20

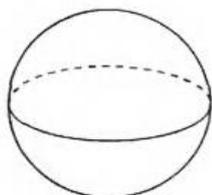


Рис. 21

### Упражнения

1. Изобразите:
  - а) параллелепипед;
  - б) четырехугольную призму;
  - в) четырехугольную пирамиду.
2. Верно ли, что плоскости, проходящие через вершины  $S, A, B$  и  $S, C, D$  пирамиды  $SABCD$ , пересекаются в одной точке  $S$ ?
3. Может ли призма иметь:
  - а) 9 вершин; б) 16 вершин?
4. Докажите, что число вершин произвольной призмы четно.
5. Существует ли призма, которая имеет:
  - а) 14 ребер; б) 15 ребер?
6. Докажите, что число ребер произвольной призмы делится на три.
7. Какой многоугольник лежит в основании призмы, которая имеет 15 ребер?
8. Призма имеет: а) 10 вершин; б) 18 ребер; в) 8 граней. Определите ее вид.

Рисунок 30 – Упражнения по разделу «Пространственные фигуры» в учебнике по «Геометрии 10-11» под редакцией И.М Смирновой.

В параграфе №4. Ученики изучали раздел «Моделирование многогранников». В данном разделе подробно изучали этапы построения фигуры, страница 15 - 18 (рисунок 31) [51].

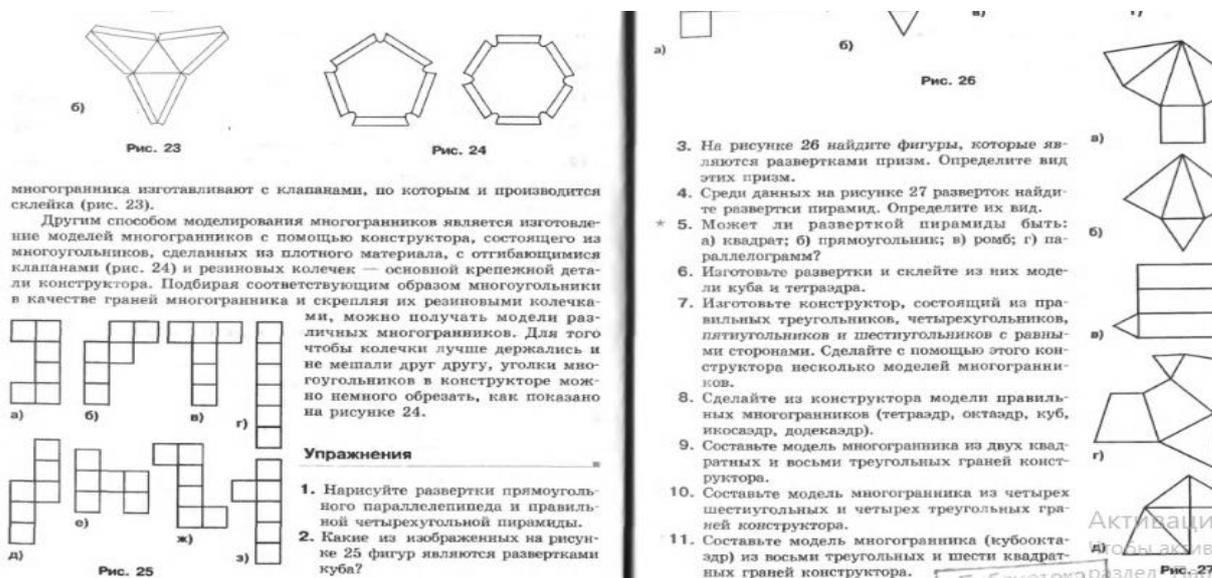


Рисунок 31 – Раздел «Моделирование многогранников» стр.15 – 18.

«На этапе изучения раздела «Моделирование многогранников» в процессе занятия ученики ознакомились с программой «Компас 3Д».

Моделирование многогранников служит важным фактором развития пространственных представлений учащихся. На уроках геометрии ученики использовали программу «КОМПАС-3D LT» для построения модели геометрической фигуры. В процессе создания фигуры, ученики выполняли задания направленные на развитие пространственного мышления. Например, нужно изобразить фигуру вращения, полученную в результате вращения отрезка вокруг оси» [13].

Таким образом, к началу непосредственного изучения темы «Многогранники» учащиеся уже знакомы (на доступном для них уровне) с традиционным материалом по этой теме. Появляется возможность расширить представления учащихся о многогранниках, рассмотрев с ними более подробно правильные, полуправильные и звездчатые многогранники.

Результаты изучения темы «Многогранники» представлены в таблице 3.

Таблица 3 – Результаты изучения темы в учебнике «Геометрия 10-11» под редакцией И.М Смирновой.

Уровни знаний	Экспериментальная группа, %	Контрольная группа, %
Базовый	17%	20%
Продвинутый	52%	49%
Высокий	30%	31%

Изучение темы «Многогранники» имела положительный и эффективный результат, посредством индивидуального подхода и организации со стороны учителя [50].

Изучение темы «Многогранники» на уроках в старшей школе выявила следующие уровни подготовки учащихся:

- высокий уровень: характерен всем группам присутствующих в исследовании и проведении методики. Но были и ученики – лидеры, которые активно участвовали во всех заданиях, вовлекали остальных учеников, оказывали помощь и сотрудничество педагогу, крайне редко испытывали трудности, но если это случалось, находили решение самостоятельно;
- средний уровень: ученики данного уровня, проявляли заинтересованность проведением методики. Но иногда испытывали трудности, и обращались к педагогу за помощью и дополнительными разъяснениями;
- низкий уровень: ученики не включались в деятельность, часто просили отлучиться с кабинета. Старались держаться в стороне, взаимодействовали только с просьбы и предлога педагога. Испытывали трудности в выполнении заданий, старались выполнять по принципу аналогии. Во время просьбы о помощи и вовлечения в деятельность от других учеников, проявляли агрессивный настрой.

Повторение учебного материала благоприятно влияет на отработку умений и навыков вычислительной деятельности. На основе полученных данных подготовки к изучению темы мы выявили три уровня:

- базовый: ученики с трудом отвечали на вопросы, в большинстве случаев требовали помощи или вспомогательных вопросов. Были ученики, которые отчетливо отказывались в проведении методики, отрицательно реагировали на сопровождение заданий и объяснение педагога;
- продвинутый: ученики отвечали на поставленные вопросы, активно описывали собственные способы решения и выдвигали гипотезы;
- высокий: ученики активно участвовали в беседе с педагогом, не требовали дополнительной помощи. В моменты затруднений самостоятельно находили ответ и ориентировались на личностный опыт.

Проведя исследование, мы подошли к третьему этапу – контрольному, завершающему. На данном этапе мы повторно проводим методические основы изучения многогранников в курсе геометрии старших школы, подводим итог и осуществляем математическим путем анализ данных. Для повторного применения заданий и упражнений в программе приняли участие 26 человек. Во время проведения и подготовки исследования, были выбраны задания по курсу геометрии, для выполнения которых необходимо прибегнуть к помощи инновационных технологий и средствам ИКТ.

Результаты методики представлены в таблице 4. На разных этапах использования учебников в процессе образовательной деятельности, задания усложнялись. С поставленными целями справились больше половины учащихся взятых в исследование. Но были и трудные моменты, которые требовали вмешательства или помощи от педагога.

Мы видим, что данная методика изучения темы имела положительный и эффективный результат, посредством индивидуального подхода и организации со стороны учителя.

Таблица 4 – Результаты изучения темы

Уровни	Констатирующий этап				Контрольный этап			
	Экспериментальная группа		Контрольная группа		Экспериментальная группа		Контрольная группа	
	чел	%	чел	%	чел	%	чел	%
Базовый	2	17%	3	20%	1	14%	2	22%
Продвинутый	8	52%	7	49%	8	55%	7	47%
Высокий	4	30%	4	31%	5	31%	5	31%

Методика произвела следующие уровни заинтересованности учеников в процессе образования инновационным и модульным технологиям:

- высокий уровень: на констатирующем уровне на низком уровне находилось в экспериментальной группе 17%, в контрольной 20%. После проведения контрольного этапа значения изменились, в экспериментальной группе 14 %, в контрольной группе 47%;
- средний уровень: на констатирующем уровне на низком уровне находилось в экспериментальной группе 52%, в контрольной 49%. После проведения контрольного этапа значения изменились, в экспериментальной группе 55 %, в контрольной группе 22%.
- низкий уровень: на констатирующем уровне на низком уровне находилось в экспериментальной группе 30%, в контрольной 31%. После проведения контрольного этапа значения изменились, в экспериментальной группе 31 %, в контрольной группе 31%.

Методика произвела следующие уровни заинтересованности учеников в процессе образования инновационным и модульным технологиям:

- высокий уровень: характерен всем группам присутствующих в исследовании и проведении методики. Но были и ученики – лидеры, которые активно участвовали во всех заданиях, вовлекали остальных учеников, оказывали помощь и сотрудничество педагогу, крайне редко испытывали трудности, но если это случалось, находили решение самостоятельно;

- средний уровень: ученики данного уровня, проявляли заинтересованность проведением методики. Но иногда испытывали трудности, и обращались к педагогу за помощью и дополнительными разъяснениями;
- низкий уровень: ученики не включались в деятельность, часто просили отлучиться с кабинета. Старались держаться в стороне, взаимодействовали только с просьбы и предлога педагога. Испытывали трудности в выполнении заданий, старались выполнять по принципу аналогии. Во время просьбы о помощи и вовлечения в деятельность от других учеников, проявляли агрессивный настрой.

Подобранная литература и программы «КОМПАС-3D LT» и «DG-геометрия» в курсе геометрии в старших классах образовательной школы при обучении теме «Многогранники» произвели следующие уровни заинтересованности учеников в процессе образования инновационным и модульным технологиям:

- высокий уровень: ученики активно участвовали во всех заданиях, вовлекали остальных учеников, оказывали помощь и сотрудничество педагогу, крайне редко испытывали трудности, но если это случалось, находили решение самостоятельно;
- средний уровень: ученики данного уровня, проявляли заинтересованность проведением методики;
- низкий уровень: ученики не включались в деятельность, часто просили отлучиться с кабинета. Старались держаться в стороне, взаимодействовали только с просьбы и предлога педагога.

Согласно полученным данным можно отметить, что «уровень изучения многогранников в курсе геометрии старших школы на констатирующем и контрольном этапе был приблизительно одинаковый; положительную динамику, возрастание уровня изучения многогранников в курсе геометрии старших школы в экспериментальной группе; значительное повышение изучения многогранников в курсе геометрии старших школы и контрольной

группе; повышение уровня изучения многогранников в курсе геометрии старших школы отмечалось в контрольной группе; повышение качества выполняемых математических работ обучающихся в экспериментальном классе, где была внедрена программа, направленная на изучения многогранников в курсе геометрии старших школы в процессе внеурочной урочной деятельности» [28]. Программа по изучению «КОМПАС-3D LT» и «DG-геометрия» в курсе геометрии в старших классах образовательной школы при обучении теме «Многогранники» доказала свою эффективность.

Анализ экспериментальных данных подтвердил, что проведённая работа дала возможность констатировать позитивную динамику качества знаний и умений обучающихся старших классов при постановке комплекса задач и их реализацию через внедрение комплекса занятий, направленных при изучении раздела многогранников в курсе геометрии старших школы. Данный вид работы имел положительную активность на изучение нового материала, отработки понятийного словаря учеников, формирование и развитие навыков у учеников 11 класса, а так же важнейшее влияние на становление педагога в профессиональной сфере и деятельности.

#### Выводы по второй главе

Получены следующие результаты:

- представлена методическая разработка урока математики по теме «Многогранники» с применением программ «КОМПАС-3D LT» и «DG-геометрия»;
- проведен методический анализ теоретического и практического материала по теме «Прямая призма»;
- разработана программа элективного курса «Прямая призма»;
- представлены результаты педагогического эксперимента.

## Заключение

Рассмотрены различные подходы к введению понятия многогранника и его свойств в курсе геометрии старших классов

Обоснованы основные цели и направления использования компьютерных технологий в процессе обучения геометрии старших классов общеобразовательной школы.

Показаны особенности использования компьютерных программ «КОМПАС-3D LT» и «DG-геометрия» в курсе геометрии в старших классах образовательной школы при обучении теме «Многогранники»

Проведен методический анализ темы «Прямая призма и спроектировано изучение темы прямая призма с использованием компьютерных технологий в курсе геометрии старших классов общеобразовательной школы.

Представлена методическая разработка урока математики по теме «Многогранники» с применением программ «КОМПАС-3D LT» и «DG-геометрия».

Разработана программа элективного курса «Прямая призма», направленная на повышение качества предметных результатов школьников по данной теме.

Представлены результаты педагогического эксперимента, которые свидетельствуют об эффективности использования компьютерных технологий в процессе обучения геометрии старших классов общеобразовательной школы с целью повышения уровня знаний обучающихся по геометрии и умения применять их при решении задач.

Цель и задачи экспериментального исследования выполнены в полной мере.

Гипотеза исследования соответствует содержанию магистерской работы.

## Список используемой литературы и используемых источников

1. Александров А.Д. Геометрия: учеб. для учащихся 11 кл. с углубл. изучением математики / А. Д. Александров, А. Л. Вернер, В. И. Рыжик. М.: Издательство «Просвещение», 2000. 278 с.
2. Атанасян Л.С. и др. Геометрия. 10-11 классы: учебник для общеобразовательных учреждений (базовый и углублённый уровни). М.: Просвещение, 2014. 415 с.
3. Александров А.Д. Что такое многогранник? / А. Д. Александров // Математика в школе. 1981. № 1. С. 8-16.
4. Атанасян Л.С., Бутузов В.Ф., Кадомцев С.Б. и др. Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия. Геометрия. 10-11 классы: учеб. для общеобразоват. организаций: базовый и углубл. уровня. – М.: Просвещение, 2014. 255 с.
5. Аббасов И. Б. Компьютерное моделирование в промышленном дизайне / И. Б. Аббасов, М.: ДМК, 2022. 150 с.
6. Апатова Н.В. Информационные технологии в школьном образовании. М., 1994.
7. Богомолова О.А. Роль информационно–коммуникационных технологий на уроках математики // О. Богомолова / Математика / Еженедельное учебно–методическое приложение к газете «Первое сентября». 2010. №22. С.5-8.
8. Богомолов Н. В. Геометрия : учебное пособие для среднего профессионального образования / Н. В. Богомолов. Москва : Издательство Юрайт, 2021. 108 с. — (Профессиональное образование). — ISBN 978–5–534–09528–9. — Текст : электронный // Образовательная платформа Юрайт [сайт]. — URL: <https://urait.ru/bcode/469826> (дата обращения: 25.09.2021).
9. Белинский М.В., Березин А.А. Геометрия: с помощью компьютера. М.: Просвещение, 2018. 297 с.

10. Белова И. М. Компьютерное моделирование / И. М. Белова, М.: МГИУ, 2021. 112 с.
11. Брюхова М.В. Компьютерные технологии при обучении теме «Многогранники в курсе геометрии старших классов общеобразовательной школы» [Электронный ресурс] // Вестник магистратуры. 2023. № 12-1 (146). С. 4-6. URL: [https://magisterjournal.ru/docs/VM147\\_1.pdf](https://magisterjournal.ru/docs/VM147_1.pdf) (дата обращения: 20.12.2023).
12. Брюхова М.В. Компьютерные технологии при обучении теме «Многогранники» в курсе геометрии старших классов общеобразовательной школы» [Электронный ресурс] // Вестник магистратуры. 2024. № 3-2 (150) С. 87-89. URL: [https://magisterjournal.ru/docs/VM150\\_2.pdf](https://magisterjournal.ru/docs/VM150_2.pdf) (дата обращения: 24.03.2024).
13. Брюхова М.В. Изучение многогранников в школьном курсе математики. [Электронный ресурс] // Вестник магистратуры. 2024. № 3-2 (150). С. 83-86. URL: [https://magisterjournal.ru/docs/VM150\\_2.pdf](https://magisterjournal.ru/docs/VM150_2.pdf) (дата обращения: 24.03.2024).
14. Веселовский С.Б. Дидактические материалы по геометрии для 11 класса. М.: Просвещение, 1998. 96 с.
15. Высоцкий И.Р. ОГЭ 2016 // Математика. 9 класс. Основной государственный экзамен. Типовые тестовые задания // И.Р. Высоцкий и др. 2016. 100 с.
16. Гойибназарова Г.Н. Использование современных ИКТ в обучении геометрии // Достижения науки и образования. 2018. № 12. С.52-53.
17. Горшкова А.В. Использование информационных технологий при изучении свойств круглых тел в условиях дифференцированного обучения геометрии в средней школе: дисс. канд. пед. наук. Орел: Орловский гос. ун-т // А.В. Горшкова. 2020. 206 с.
18. Геометрия. Профильный уровень: учебник для 10 класса / В.А. Гусев, Е.Д. Куланин, А.Г. Мякишев [и др.]. М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2010. 260 с.

19. Геометрия. 10-11 классы: учеб. для общеобразоват. учреждений: базовый и профил. уровни / Л. С. Атанасян, В. Ф. Бутузов, С. Б. Кадомцев [и др.]. 22-е изд. М.: Просвещение, 2013. 290 с.

20. Далингер В.А. Геометрия: стереометрические задачи на построение : учебное пособие для среднего профессионального образования / В. А. Далингер. — 2-е изд. Москва : Издательство Юрайт, 2021. 189 с. (Профессиональное образование). — ISBN 978-5-534-05735-5. — Текст : электронный // Образовательная платформа Юрайт [сайт]. — URL: <https://urait.ru/bcode/473295> (дата обращения: 25.09.2021).

21. Дубровский В.А. Учимся работать с «Математическим конструктором» // Математика / Ежедневное учебно-методическое приложение к газете «Первое сентября» // В. Дубровский. 2009. №13. С.2-48.

22. Епифанцева В.А. Использование цифровых образовательных ресурсов в учебном процессе в условиях реализации ФГОС нового поколения: опыт, проблемы / В.А. Епифанцева // Сборник статей 6-й Всероссийской научно-практической конференции. Белгород, 2019. 178 с.

23. Егупова М.В. Практические приложения математики в школе [Электронный ресурс] : учеб. пособие для студентов педагогических вузов / М.В. Егупова. Москва : Прометей, 2015. 248 с. ISBN 978-5-9906264-5-4. ЭБС IPRbooks.

24. Жафяров А.Ж. Профильное обучение математике старшеклассников [Электронный ресурс] : учеб.-дидакт. комплекс / А.Ж. Жафяров. Новосибирск : Сибир. унив. изд-во, 2017. С. 127-137. ЭБС IPRbooks. <http://www.iprbookshop.ru/65152.html>

Живая геометрия [Электронный ресурс]. –URL: <http://my-softblog.net/397-geogebra.html> / (дата обращения: 25.02.2023).

26. Зив Б.Г. Задачи по геометрии: Пособие для учащихся 7-11 кл. общеобразовательных учреждений. / Б.Г. Зив, В.М. Мейлер, А.Г. Баханский. М.: Просвещение, 2000. 180с.

27. Колошкина И. Е. Компьютерная графика : учебник и практикум для вузов / И. Е. Колошкина, В. А. Селезнев, С. А. Дмитроченко. — 3-е изд., испр. и доп. Москва : Издательство Юрайт, 2021. 233 с. (Высшее образование). — ISBN 978-5-534-12341-8. — Текст : электронный // Образовательная платформа Юрайт [сайт]. — URL: <https://urait.ru/bcode/470890> (дата обращения: 25.09.2022).
28. КОМПАС-3DLT [Электронный ресурс]. URL: <http://lt.kompas.ru/4you/> (дата обращения: 12.03.2024).
29. Копнина А.В. Компьютерные технологии обучения многогранникам // Образовательные технологии и общество. 2019. №1 (12). С.89-93.
30. Клековкин Г. А. Изображение геометрических фигур в параллельной проекции: учебное пособие для учащихся 10–11 классов / Г. А. Клековкин. Самара: СФ ГАОУ ВОМГПУ, 2016. 132 с
31. Калинин А.Ю. Геометрия. 10-11 классы / А. Ю. Калинин, Д. А. Терёшин. М.: МЦНМО, 2011. 308 с.
32. Киселев А.П. Элементарная геометрия / А. П. Киселев. М. Просвещение, 1984. 200 с.
33. Клопский В.М. Геометрия: учебное пособие для 9 и 10 классов средней школы / В. М. Клопский, З. А. Скопец, М. И. Ягодковский. – 4-е изд. М.: Просвещение, 1978. 235 с.
34. Калашникова Е.С., Копнина А.В. Геометрия: учебник для 10-11 классов общеобразовательных учреждений. М.: Просвещение, 2016. 310 с.
35. Марюков М.Н. Научно-методические основы использования компьютерных технологий при изучении геометрии в школе: дисс. доктор педагогических наук: 13.00.02 – Теория и методика обучения и воспитания (по областям и уровням образования). Брянск, 1998. 244 с.
36. Мерзляк А.Г. Математика : Геометрия. Базовый уровень. 10 класс / А. Г. Мерзляк, Д. А. Номировский, В. М. Поляков [и др.]. – 2-е изд. М.: Вентана-Граф; Росучебник, 2019. 196 с.

37. Майер Р. В. Компьютерное моделирование: учебно-методическое пособие для студентов педагогических вузов [Электронное учебное издание на компакт-диске], Глазов: Глазов. гос. пед. ин-т, 2019. 200 с.
38. Матяш Н.В. Инновационные педагогические технологии. Проектное обучение: учеб. пособие для студ. учреждений высш. проф. образования / Н.В. Матяш. — 2-е изд., доп. М.: Издательский центр «Академия», 2019. 250 с.
39. Нургалиева Ю.Ф., Солощенко М.Ю. Использование информационно-коммуникационных технологий в обучении геометрии // Международный студенческий научный вестник. 2015. № 6.; URL: <https://eduherald.ru/ru/article/view?id=13860> (дата обращения: 01.12.2023).
40. Орлова И.В. Экономико-математические методы и модели: компьютерное моделирование: Учебное пособие / И. В. Орлова, В. А. Половников, М.: Вузовский учебник, 2020. 250с.
41. Полотовский И.В., Кальнин Е.С. Опыт использования компьютерной графики при обучении геометрии в школе // Современные технологии в науке, образовании и производстве. 2014. №2. С.110-118.
42. Потоскуев Е.В. Геометрия 11 / Е. В. Потоскуев, Л. И. Звавич // Под ред. А. Р. Рязановского. – 2-е изд., испр. М.: Дрофа, 2004. 213 с.
43. Погорелов А.В. Геометрия. 10-11 классы: учеб. для общеобразоват. учреждений: базовый и профил. уровни / А. В. Погорелов. – 13-е изд. М.: Просвещение, 2014. 311 с.
44. Пометун О.И., Пироженко Л.В. // Современный урок. Интерактивные технологии обучения. Научно–методическое пособие // О.И. Пометун, Л.В. Пироженко. К. Издательство А.С.К., 2003. с 234.
45. Решу ЕГЭ. Образовательный портал для подготовки к экзаменам [Электронный ресурс]. URL: <http://math.reshuege.ru/> (дата обращения: 19.04.2024).

46. Смирнова И.М., Смирнов В.А. // Геометрия, 10-11 класс // Смирнова И.М., Смирнов В.А., 2008. М.: Мнемозина, 2010. с 300.
47. Саакян С.М. Изучение темы «Многогранники» в курсе 10 класса. / С.М. Саакян, В.Ф. Бутузов. // Математика в школе. 2008. № 2. С. 14-22.
48. Смирнова И.М. Геометрия. 10-11 класс: учеб. для учащихся общеобразоват. учреждений (базовый и профильный уровни). М.: Мнемозина, 2008. с 230.
49. Смирнова И. М., В. А. Смирнов. – 5-е изд., испр. и доп. – М.: Мнемозина, 2008. Смирнова И.М. Познакомьтесь: ромбододекаэдр // Математика в школе. 1996. № 1. С. 47-51.
50. Смирнова И.М., Смирнов В.А. Геометрия. 10 класс: учебник для общеобразовательных учреждений (базовый и углублённый уровни). М.: Мнемозина, 2015. с. 300.
51. Теплицкий И.О., Семериков С.О. //Развитие познавательной активности учеников старших классов в процессе изучения математики способами компьютерно–ориентированных систем обучения//Родная школа/ газета//И.О. Теплицкий, С.О. Семериков 2004. июнь С. 48–49.
52. Федосеев Д.А., Шматова М.Н., Калашникова А.В. Развитие математического творчества через 3D-моделирование геометрических тел // Математическое образование. 2018. №3. С.18-23.
53. Федеральный государственный образовательный стандарт среднего (полного) общего образования [Электронный ресурс]: Приказ Мин. образования и науки РФ от 17.05.2012 г. № 413 (с изменениями на 11 декабря 2020 г.). URL: <https://fgos.ru/fgos/fgos-soo/> (дата обращения: 07.09.2023).
54. Федеральный перечень учебников, рекомендованных к использованию при реализации программ общего образования. [Электронный ресурс]. URL: <http://fpu.edu.ru/fpu/> (дата обращения: 07.09.2023).
55. Федосеев Д.А., Шматова М.Н., Калашникова А.В. Развитие математического творчества через 3D-моделирование геометрических тел // Математическое образование. 2018. №3. С.18-23.

56. Федеральный институт педагогических измерений [Электронный ресурс]. URL: <https://fipi.ru/> (дата обращения: 19.04.2024).
57. Ходеева Т. Свойства многогранников. / Т. Ходеева. // Математика. 002. № 11. С. 10-15.
58. Гайсуркаева Х.М. Особенности организации различных видов самостоятельной учебно-познавательной деятельности учащихся при изучении математики // Вестник магистратуры. 2023. № 12-2 (146). С. 5-8.
59. Черткова, Е. А. Компьютерные технологии обучения : учебник для вузов / Е. А. Черткова. — 2-е изд., испр. и доп. Москва : Издательство Юрайт, 2021. 250 с. (Высшее образование). — ISBN 978-5-534-07491-8. — Текст : электронный // Образовательная платформа Юрайт [сайт]. — URL: <https://urait.ru/bcode/471256> (дата обращения: 25.09.2022).
60. Шарыгин И.Ф. Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия. Геометрия. Базовый уровень. 10-11 классы: учебник / И. Ф. Шарыгин. М.: Дрофа, 2013. 350 с.
61. Элективные курсы в профильном обучении: образовательная область «Математика» / Министерство образования РФ. – Национальный фонд подготовки кадров. М. : Вита-Пресс. 2004. 96 с.
62. Элементарная математика : Арифметика. Алгебра. Тригонометрия [Электронный ресурс] : задачник / авт.-сост. В.П. Краснощекова [и др.] ; Пермский гос. гуманит.-пед. ун-т. Пермь : ПГГПУ, 2014. 51 с. ISBN 978-5-86218-688-1. ЭБС IPRbooks.
63. Юнусова Э.С. Возможности обучающей программы динамическая геометрия DG: исследовательская работа / Э.С. Юнусова – «Вольновская школа» муниципального образования Джанкойского района–2016. 12 с.
64. Яценко И.В. Сборник для подготовки к ЕГЭ-2024. Профильный уровень. 36 вариантов.2012. 160 с.
65. <https://cyberleninka.ru/article/n/metodicheskie-aspekty-obucheniya-uchaschihsya-resheniyu-zadach-v-matematicheskikh-sredah> (дата обращения: 25.09.2022).

66. Negroponte N. Being Digital, First Vintage Books [Электронный ресурс](<http://governance40.com/wpcontent/uploads/2018/12/McholasNegroponte-Being-Digital-Vintage-2016.pdf>) (дата обращения: 20.12.2019).
67. Collins A., Halverson R. Rethinking Education in the Age of Technology: The Digital Revolution and Schooling. New York: Teachers College Press, 2019
68. L. Monin, “Overdetermined systems of equations on toric, spherical, and other algebraic varieties,” *Advances in Mathematics*, vol. 369, p. 107 147, Aug. 2020, issn: 0001-8708. doi:10.1016/j.aim.2020.107147.
69. Y. Len and H. Markwig, “Lifting tropical bitangents,” *J. Symb. Comput.*, vol. 96, no.pp. 122–152, Jan. 2020, issn: 0747-7171. doi: 10.1016/j.jsc.2019.02.01
70. E. Cattani and A. Dickenstein, “Non-splitting Flags, Iterated Circuits,  $\sigma$ -Matrices and Cayley Configurations,” *Vietnam J. Math.*, Apr. 2022, issn: 2305-2228. doi: 10.1007/s10013-022-00554-7.
71. Wathall, J.C. *Mathematics: Analysis and Approaches, Higher Level / J.C. Wathall, J. Harcet, R. Harrison, // Oxford IB Diploma Programme, - Oxford University Press, 2019 – 855 p.*