

Министерство образования и науки Российской Федерации
Тольяттинский государственный университет
Институт машиностроения
Кафедра «Нанотехнологии, материаловедение и механика»

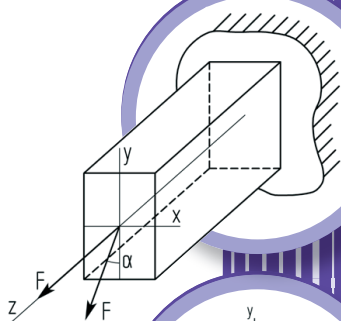
Т.Ф. Гаврилова, Е.П. Гордиенко, А.А. Разуваев

СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ

Практикум для студентов заочной формы обучения

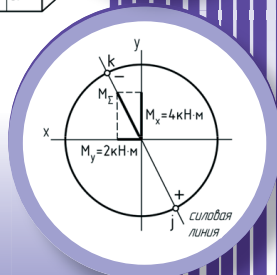
В двух частях

Часть 2



© ФГБОУ ВО «Тольяттинский
государственный университет», 2016

ISBN 978-5-8259-0945-5



УДК 539.3/6(075.8)
ББК 30.121я73

Рецензенты:

зам. директора АНО «ГАЦ СВР» *В.А. Печёнкина*;
д-р физ.-мат. наук, профессор Тольяттинского государственного
университета *Д.Л. Мерсона*.

Под общей редакцией доктора физико-математических наук,
профессора *Д.Л. Мерсона*.

Гаврилова, Т.Ф. Сопротивление материалов : практикум для студентов заочной формы обучения : в 2 ч. / Т.Ф. Гаврилова, Е.П. Гордиенко, А.А. Разуваев ; под общ. ред. Д.Л. Мерсона. – Тольятти : Изд-во ТГУ, 2016. – Ч. 2. – 1 оптический диск.

Вторая часть практикума содержит практические занятия по основным темам дисциплины «Сопротивление материалов», изучаемым во втором семестре: статически неопределимые системы, сложное сопротивление, устойчивость, выносливость, колебания и удар. В каждой теме изложен необходимый теоретический материал, выделены алгоритмы основных методов и расчетов, показано подробное решение типовой задачи, даны рекомендации по тренингу. В приложениях практикума приведены тестовый материал, ответы к тестам, задания для выполнения контрольных работ, необходимые справочные материалы.

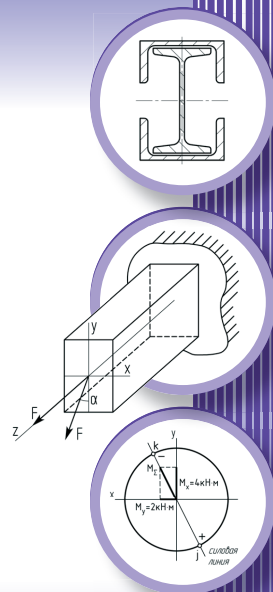
Деривативное электронное издание части 1 практикума вышло в 2016 году.

Практикум предназначен для студентов заочной формы обучения по направлениям подготовки бакалавров 141100.62 (13.03.03) «Энергетическое машиностроение», 150700.62 (15.03.01) «Машиностроение», 151900.62 (15.03.05) «Конструкторско-технологическое обеспечение машиностроительных производств», 190100.62 (23.03.02) «Наземные транспортно-технологические комплексы», 270800.62 (08.03.01) «Строительство» и другим в помощь при решении контрольных работ и изучении соответствующих тем дисциплины «Сопротивление материалов».

Деривативное текстовое электронное издание; в основе использовано печатное издание: Гаврилова Т.Ф., Гордиенко Е.П., Разуваев А.А. Сопротивление материалов : практикум : в 2 ч. Тольятти, Изд-во ТГУ, 2015. Ч. 2. 168 с.

Рекомендовано к изданию научно-методическим советом Тольяттинского государственного университета.

Минимальные системные требования: IBM PC-совместимый компьютер: Windows XP/Vista/7/8; ПИИ 500 МГц или эквивалент; 128 Мб ОЗУ; SVGA; Adobe Acrobat Reader.



Редактор *Т.Д. Савенкова*
Технический редактор *Н.П. Крюкова*
Компьютерная верстка: *Л.В. Сызганцева*
Художественное оформление,
компьютерное проектирование: *Г.В. Карасева*

Дата подписания к использованию 09.03.2016.

Объем издания 7 Мб.

Комплектация издания: компакт-диск, первичная упаковка.

Заказ № 1-27-15.

Издательство Тольяттинского государственного университета
445020, г. Тольятти, ул. Белорусская, 14,
тел. 8 (8482) 53-91-47, www.tltsu.ru

Содержание

Тема 1. РАСЧЕТ СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМЫХ СИСТЕМ МЕТОДОМ СИЛ	5
Тема 2. РАСЧЕТ НА ПРОЧНОСТЬ ПРИ КОСОМ ИЗГИБЕ. СЛУЧАИ ИСКЛЮЧЕНИЯ	22
Тема 3. РАСЧЕТ НА ПРОЧНОСТЬ ПРИ СОВМЕСТНОМ ДЕЙСТВИИ ИЗГИБА И РАСТЯЖЕНИЯ-СЖАТИЯ	32
Тема 4. РАСЧЕТ НА ПРОЧНОСТЬ ПРИ ИЗГИБЕ С РАСТЯЖЕНИЕМ-СЖАТИЕМ И КРУЧЕНИЕМ	41
Тема 5. РАСЧЕТ СЖАТЫХ СТОЕК НА УСТОЙЧИВОСТЬ	58
Тема 6. РАСЧЕТ НА УСТАЛОСТНУЮ ПРОЧНОСТЬ	71
Тема 7. РАСЧЕТ НА ПРОЧНОСТЬ ПОДМОТОРНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ С ОДНОЙ СТЕПЕНЬЮ СВОБОДЫ В УСЛОВИЯХ ВЫНУЖДЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ	78
Тема 8. РАСЧЕТ НА ПРОЧНОСТЬ И ЖЕСТКОСТЬ ЭЛЕМЕНТОВ КОНСТРУКЦИЙ В УСЛОВИЯХ УДАРА	89
Приложение 1	98
Приложение 2	141
Приложение 3	142
Приложение 4	160

Тема 1. РАСЧЕТ СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМЫХ СИСТЕМ МЕТОДОМ СИЛ

Цель занятия — научиться раскрывать статическую неопределимость систем методом сил.

Необходимые знания для достижения цели

1. Понятие статической неопределимости.
2. Определение степени статической неопределимости.
3. Алгоритм метода сил.

Теоретический материал



Какие системы называются статически неопределимыми?

Статически неопределимыми называются такие системы, у которых количество наложенных связей (или количество реактивных усилий) больше необходимого и достаточного числа уравнений статического равновесия.



Что такое степень статической неопределимости?

Разность между количеством реактивных усилий в системе и количеством уравнений статического равновесия называется *степенью статической неопределимости* s .



Какие проблемы возникают при расчете статически неопределимых систем?

Для построения эпюр внутренних силовых факторов с целью определения положения опасного сечения и расчета статически неопределимых систем на прочность и жесткость необходимо определить все реактивные усилия. Одних уравнений равновесия здесь для этого недостаточно. Нужны дополнительные условия.

Один из возможных способов получения таких условий предлагает *метод сил* — метод раскрытия статической неопределимости.



В чем заключается идея метода сил?

Основная идея метода сил заключается в том, чтобы заменить исходную статически неопределимую систему эквивалентной статически определимой. Для этого в заданной статически неопределимой системе отбрасывают «лишние» связи (чтобы она стала

статически определимой, но при этом оставалась кинематически неизменяемой) и заменяют их неизвестными реакциями. Реакции отброшенных связей (так называемые «лишние» неизвестные) определяют из условия эквивалентности двух систем: заданной статически неопределимой и полученной статически определимой. Условием эквивалентности является требование равенства нулю перемещений раскрепленных точек системы в направлении отброшенных связей.



Алгоритм метода сил

1. Определение степени статической неопределимости

Степень статической неопределимости s определяется по формуле

$$s = r - k,$$

где r – количество реактивных усилий в заданной системе; k – необходимое и достаточное количество уравнений статического равновесия.

2. Выбор основной системы

Чтобы получить основную систему, необходимо, во-первых, удалить всю заданную внешнюю нагрузку, во-вторых, отбросить лишние связи в опорах конструкции таким образом, чтобы она стала статически определимой, но оставалась при этом кинематически неизменяемой (неподвижной). Это можно сделать несколькими способами, поэтому *выбор основной системы неоднозначен*.

3. Образование эквивалентной системы

Эквивалентная система образуется из выбранной основной путем замены отброшенных связей их неизвестными реакциями и приложением заданной нагрузки. Реакции отброшенных связей в методе сил принимают за неизвестные и обозначают: X_1, X_2, \dots, X_n (для n раз статически неопределимой системы: $s = n$).

4. Запись условия эквивалентности

Условием эквивалентности двух систем (эквивалентной статически определимой и исходной статически неопределимой) является отсутствие перемещений раскрепленных точек эквивалентной системы по направлению отброшенных связей (т. е. в направлении действия «лишних» неизвестных).

Для n раз статически неопределимой системы условие эквивалентности в виде системы канонических уравнений метода сил (СКУМС) выглядит следующим образом:

$$\left\{ \begin{array}{l} \delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \delta_{13}X_3 + \dots + \delta_{1j}X_j + \dots + \delta_{1n}X_n + \delta_{1F} = 0 \\ \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \delta_{23}X_3 + \dots + \delta_{2j}X_j + \dots + \delta_{2n}X_n + \delta_{2F} = 0 \\ \dots\dots\dots \\ \delta_{i1}X_1 + \delta_{i2}X_2 + \delta_{i3}X_3 + \dots + \delta_{ij}X_j + \dots + \delta_{in}X_n + \delta_{iF} = 0 \\ \dots\dots\dots \\ \delta_{n1}X_1 + \delta_{n2}X_2 + \delta_{n3}X_3 + \dots + \delta_{nj}X_j + \dots + \delta_{nn}X_n + \delta_{nF} = 0 \end{array} \right. \quad (1.1)$$

Здесь коэффициенты δ_{ij} при неизвестных X_j называются единичными коэффициентами, а свободные члены $-\delta_{1F}, \dots, \delta_{iF}, \dots, \delta_{nF}$ — грузовыми коэффициентами. Физическая сущность всех коэффициентов — это перемещения соответствующих точек упругой системы, обозначенных первым индексом, от действия фактора либо единичного, либо грузового, обозначенного вторым индексом.

5. Определение коэффициентов системы канонических уравнений метода сил

5.1. Построение вспомогательных эпюр внутренних силовых факторов (ВСФ)

Для определения коэффициентов СКУМС на основной статически определимой системе строятся вспомогательные эпюры ВСФ — грузовая и единичные.

Грузовая эпюра строится на основной системе от действия внешней нагрузки.

Единичные эпюры строятся на основной системе от единичной безразмерной силы, приложенной к каждой точке, с которой снята связь, по направлению этой связи. То есть такие единичные силы совпадают по точкам приложения и по направлениям с неизвестными силами X_1, X_2, \dots, X_n , поэтому для удобства предлагается при построении единичных эпюр нагружать основную систему поочередно $X_j = 1$. *Количество единичных эпюр равно количеству лишних неизвестных и равно степени статической неопределимости исходной системы.*

Вполне понятно, что вид деформации системы определяет тип внутреннего силового фактора, эпюра которого строится: при

растяжении-сжатии – это продольная сила N , при кручении – это крутящий момент M_z , при изгибе определяющим внутренним силовым фактором является изгибающий момент M_x .

Определение коэффициентов производится путем «перемножения» соответствующих вспомогательных эпюр *методом Мора*.

5.2. Определение единичных коэффициентов СКУМС

Единичные коэффициенты δ_{ij} определяются путем «перемножения» i -й единичной эпюры на j -ю. Для случая деформации «изгиб»:

$$\delta_{ij} = \sum_k \int_{l_k} \frac{M_{xik} \cdot M_{xjk}}{(EI_x)_k} dz_k. \quad (1.2)$$

5.3. Определение грузовых коэффициентов СКУМС

Грузовые коэффициенты δ_{iF} определяются путем «перемножения» i -й единичной эпюры на грузовую:

$$\delta_{iF} = \sum_k \int_{l_k} \frac{M_{xik} \cdot M_{xFk}}{(EI_x)_k} dz_k \text{ (изгиб)}. \quad (1.3)$$

6. Решение СКУМС относительно неизвестных

Подставляя найденные единичные и грузовые коэффициенты в СКУМС (1.1) (получается система n линейных алгебраических уравнений), решают её относительно неизвестных X_1, X_2, \dots, X_n любым известным из курса математики методом.

7. Построение эпюр ВСФ

Эпюры внутренних силовых факторов исходной статически неопределимой системы строятся методом сечений по эквивалентной статически определимой системе с учетом заданной внешней нагрузки и найденных значений «лишних» неизвестных. Эти эпюры будем называть суммарными и отмечать индексом « Σ ».

8. Деформационная проверка правильности раскрытия статической неопределимости

Физический смысл проверки заключается в определении перемещения связанной точки, т. е. такой точки упругой системы, перемещение которой заранее известно и равно нулю. Например, перемещения раскрепленных точек эквивалентной системы в направлении отброшенных связей находятся путем «перемножения» по методу Мора соответствующей единичной эпюры на суммарную

эпюру ВСФ. Если полученные таким образом перемещения равны нулю, то статическая неопределимость раскрыта верно.

Итак, математическое выражение деформационной проверки имеет вид:

$$\delta_i = \sum_k \int_{l_k} \frac{M_{xik} \cdot M_{x\Sigma k}}{(EI_x)_k} dz_k = 0 \text{ (изгиб).}$$

Таким образом, после проведения деформационной проверки считается, что статическая неопределимость заданной системы раскрыта, после чего производится её расчет на прочность и жесткость.

 **Как рассчитать статически неопределимые системы на прочность и жесткость?**

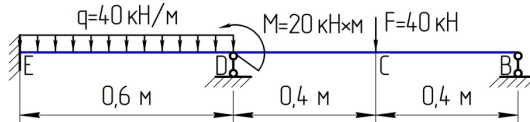
Расчет статически неопределимых систем на прочность и жесткость производится по суммарным эпюрам ВСФ аналогично расчету статически определимых систем с учетом действующего вида деформации (см. Т.Ф. Гаврилова, Е.П. Гордиенко, А.А. Разуваев. Сопротивление материалов : практикум : в 2 ч. Тольятти : Изд-во ТГУ, 2012. Ч. 1. 120 с. Далее – Практикум).



Пример решения задачи

Задача

Статически неопределимая балка постоянного поперечного сечения нагружена заданной системой поперечных сил и изгибающих моментов.



Материал балки – Ст3 с допускаемым напряжением $[\sigma] = 160 \text{ МПа}$ и модулем Юнга $E = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа}$.

Требуется раскрыть статическую неопределимость балки, подобрать из условия прочности размер двутаврового сечения и проверить выполнение условия жесткости, приняв $[\delta] = 0,8 \text{ мм}$.

Решение

1. *Определим степень статической неопределимости балки s .*

Для этого сначала найдем суммарное количество реактивных усилий в опорах балки. В жесткой заделке E их две (реактивный момент и вертикальная реактивная сила), в подвижных шарнирных опорах D и B – по одной вертикальной реактивной силе (см. Практикум, часть 1, стр. 55–56). Итого – 4 реактивных усилия.

Затем определим необходимое и достаточное количество уравнений статического равновесия. Для плоской балки с вертикальной нагрузкой количество уравнений равновесия равно двум (см. Практикум, часть 1, стр. 57–58).

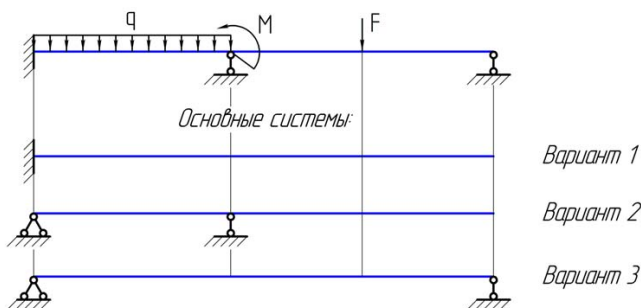
Таким образом, степень статической неопределимости балки равна:

$$s = 4 - 2 = 2,$$

т. е. данная балка дважды статически неопределима.

2. *Выберем основную систему.* Для этого нужно убрать с балки всю действующую нагрузку и отбросить лишние связи, чтобы она стала статически определимой, оставаясь при этом кинематически неизменяемой (т. е. неподвижной). К статически определимым балкам относятся балки с жестким защемлением и балки на двух шарнирных опорах, одна из которых шарнирно-неподвижная, а другая – шарнирно-подвижная (см. Практикум, часть 1, стр. 56).

Рассмотрим возможные варианты основных систем.



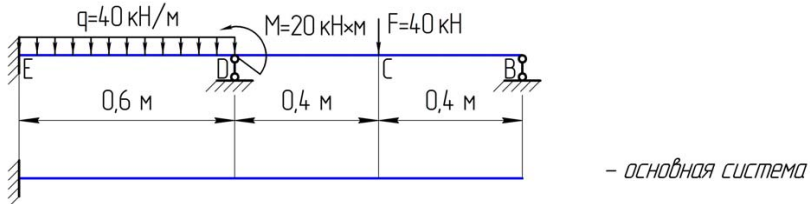
Любой из трех вариантов основных систем может быть использован для раскрытия статической неопределимости заданной балки. Который же из трех является наиболее рациональным?

Учитывая, что в процессе решения на основной системе неоднократно придется строить различные эпюры, можно считать, что основная система с жесткой заделкой (вариант 1) является наиболее рациональной (применяя метод сечений в направлении от свободного конца к заделке, нет необходимости определять в ней реактивные усилия).

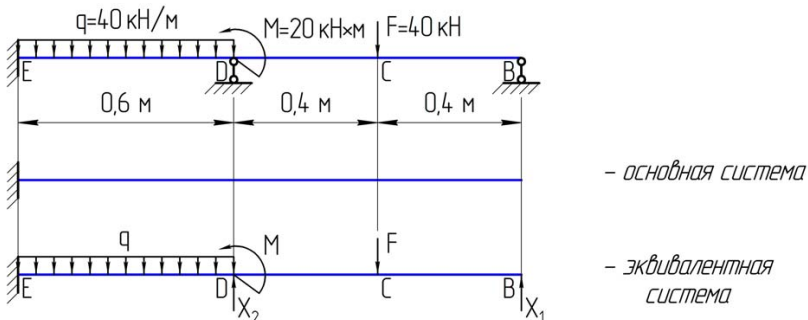
Рекомендация: если в исходной статически неопределимой системе есть хотя бы одна жесткая заделка, то при образовании основной системы эту заделку нужно оставить, а остальные опоры отбросить.

Внимание! Если в исходной статически неопределимой балке нет ни одной жесткой заделки, а только шарнирные опоры, то в качестве основной системы может служить только балка на двух шарнирных опорах, одна из которых шарнирно-неподвижная, а другая – шарнирно-подвижная.

Итак, для дальнейшего решения выбираем *первый вариант основной системы*:



3. *Образует эквивалентную систему* из выбранной основной. Для этого на основной системе показываем заданную внешнюю нагрузку и реакции отброшенных шарнирно-подвижных опор, обозначая их X_1 и X_2 :



Направления для X_1 и X_2 выбираем произвольно (вверх или вниз), а решение нам покажет, верны они или нет.

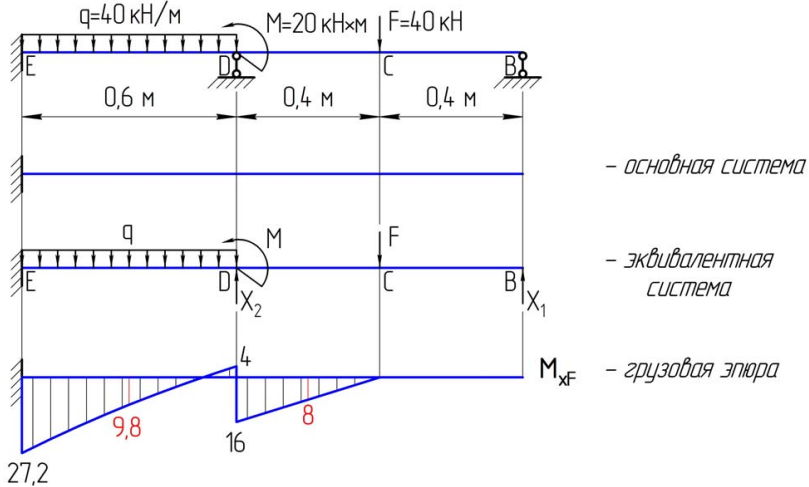
4. *Запишем условие эквивалентности* в виде системы канонических уравнений метода сил (СКУМС). Для дважды статически неопределимой системы оно имеет следующий вид:

$$\begin{cases} \delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \delta_{1F} = 0 \\ \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \delta_{2F} = 0. \end{cases}$$

5. *Определим коэффициенты СКУМС.*

5.1. *Построим вспомогательные эпюры* изгибающих моментов: грузовую и две единичные.

Построим *грузовую эпюру* изгибающих моментов M_{xF} . Она строится на основной системе только от действия заданной внешней нагрузки:



Здесь значения моментов в граничных сечениях балки определяются методом сечений в направлении от свободного края к заделке. Эпюра строится на сжатых волокнах (см. Практикум, часть 1, стр. 11–19).

Участок BC не нагружен, момент во всех сечениях равен нулю:

$$M_{xF}^B = M_{xF}^C = 0.$$

На участке CD прямолинейная зависимость, так как участок без распределенной нагрузки.

$$M_{xF}^D = -F \cdot CD = -40 \cdot 0,4 = -16 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

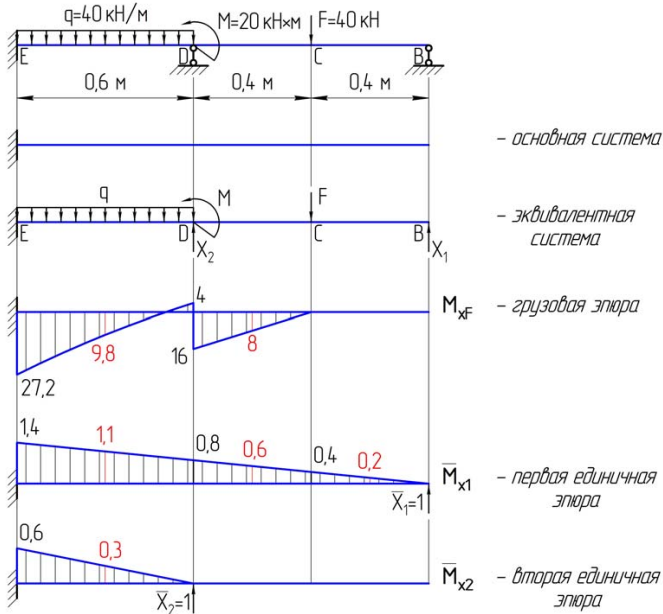
В сечении D приложен сосредоточенный момент, вызывающий на эюре скачок на величину момента $M = 20 \text{ кН}\cdot\text{м}$ в сторону его воздействия (вверх).

На участке DE парабола, так как участок с распределенной нагрузкой. Выпуклость параболы вверх (навстречу направлению распределенной нагрузки).

$$M_{xF}^E = -F \cdot CE + M - q \cdot DE \cdot \frac{DE}{2} = -40 \cdot 1 + 20 - 40 \cdot 0,6 \cdot 0,3 = -27,2 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

На грузовой эюре также показаны значения момента в средних сечениях каждого ненулевого участка. Эти значения нам потребуются при «перемножении» эюр по формуле Симпсона. Определяются они аналогично (предлагается получить эти значения самостоятельно).

Построим *единичные эюры* изгибающих моментов \bar{M}_{x_1} и \bar{M}_{x_2} . Единичные эюры строятся на основной системе от действия каждой «лишней» неизвестной, принятой равной безразмерной единице: $\bar{X}_1 = 1$ и $\bar{X}_2 = 1$.



Здесь значения единичных моментов в граничных и средних сечениях участков равны произведению единичной силы на соответствующее плечо (расстояние от точки приложения силы до соответствующего сечения).

5.2. Найдем *единичные коэффициенты* СКУМС.

Единичные коэффициенты δ_{ij} определяются путем «перемножения» соответствующих единичных эпюр методом Мора (см. Практикум, часть 1, стр. 41). Интеграл Мора при этом будем вычислять по формуле Симпсона (см. там же, стр. 42, формула (2)).

Коэффициент δ_{11} находим «перемножением» первой единичной эпюры \bar{M}_{x1} на \bar{M}_{x1} , т. е. умножаем её саму на себя (индексы коэффициента показывают, какая эпюра на какую «перемножается»). Участков перемножения три: *BC*, *CD* и *DE*.

$$\delta_{11} = \sum_{i=1}^3 \frac{l_i}{6EI_x} \left((\bar{M}_{x1i}^n)^2 + 4(\bar{M}_{x1i}^{cp})^2 + (\bar{M}_{x1i}^n)^2 \right) = \frac{1}{EI_x} \left[\frac{0,4}{6} (0 + 4 \cdot 0,2^2 + 0,4^2) + \frac{0,4}{6} (0,4^2 + 4 \cdot 0,6^2 + 0,8^2) + \frac{0,6}{6} (0,8^2 + 4 \cdot 1,1^2 + 1,4^2) \right] = \frac{0,915}{EI_x}.$$

Аналогично находим коэффициент δ_{12} «перемножением» первой единичной эпюры \bar{M}_{x1} на вторую \bar{M}_{x2} . Участок перемножения один – *DE*, так как на участках *BC* и *CD* эпюра \bar{M}_{x2} нулевая.

$$\delta_{12} = \sum_{i=1}^1 \frac{l_i}{6EI_x} \left(\bar{M}_{x1i}^n \cdot \bar{M}_{x2i}^n + 4\bar{M}_{x1i}^{cp} \cdot \bar{M}_{x2i}^{cp} + \bar{M}_{x1i}^n \cdot \bar{M}_{x2i}^n \right) = \frac{1}{EI_x} \left[\frac{0,6}{6} (0 + 4 \cdot 1,1 \cdot 0,3 + 1,4 \cdot 0,6) \right] = \frac{0,216}{EI_x}.$$

Очевидно, что симметричные коэффициенты равны между собой:

$$\delta_{21} = \delta_{12} = \frac{0,216}{EI_x}.$$

Коэффициент δ_{22} находим путем «перемножения» второй единичной эпюры \bar{M}_{x2} на саму себя. Участок «перемножения» один: *DE*.

$$\delta_{22} = \sum_{i=1}^1 \frac{l_i}{6EI_x} \left((\bar{M}_{x2i}^n)^2 + 4(\bar{M}_{x2i}^{cp})^2 + (\bar{M}_{x2i}^n)^2 \right) = \frac{1}{EI_x} \left[\frac{0,6}{6} (0 + 4 \cdot 0,3^2 + 0,6^2) \right] = \frac{0,072}{EI_x}.$$

5.3. Найдем грузовые коэффициенты СКУМС.

Грузовые коэффициенты δ_{iF} находятся путем «перемножения» соответствующей единичной эпюры \bar{M}_{xi} на грузовую M_{xF} . Найдем их методом Мора, также применяя формулу Симпсона.

$$\delta_{1F} = \sum_{i=1}^2 \frac{l_i}{6EI_x} (\bar{M}_{x1i}^n \cdot M_{xFi}^n + 4\bar{M}_{x1i}^{cp} \cdot M_{xFi}^{cp} + \bar{M}_{x1i}^n \cdot M_{xFi}^n) =$$

$$= \frac{1}{EI_x} \left[\frac{0,4}{6} (0 - 4 \cdot 8 \cdot 0,6 - 16 \cdot 0,8) + \frac{0,6}{6} (4 \cdot 0,8 - 4 \cdot 1,1 \cdot 9,8 - 27,2 \cdot 1,4) \right] = -\frac{9,933}{EI_x}.$$

$$\delta_{2F} = \sum_{i=1}^1 \frac{l_i}{6EI_x} (\bar{M}_{x2i}^n \cdot M_{xFi}^n + 4\bar{M}_{x2i}^{cp} \cdot M_{xFi}^{cp} + \bar{M}_{x2i}^n \cdot M_{xFi}^n) =$$

$$= \frac{1}{EI_x} \left[\frac{0,6}{6} (0 - 4 \cdot 0,3 \cdot 9,8 - 27,2 \cdot 0,6) \right] = -\frac{2,808}{EI_x}.$$

6. Подставим найденные коэффициенты в СКУМС и решим полученную систему двух линейных алгебраических уравнений относительно «лишних» неизвестных X_1 и X_2 .

$$\begin{cases} \frac{0,915}{EI_x} X_1 + \frac{0,216}{EI_x} X_2 - \frac{9,933}{EI_x} = 0 \\ \frac{0,216}{EI_x} X_1 + \frac{0,072}{EI_x} X_2 - \frac{2,808}{EI_x} = 0 \end{cases}$$

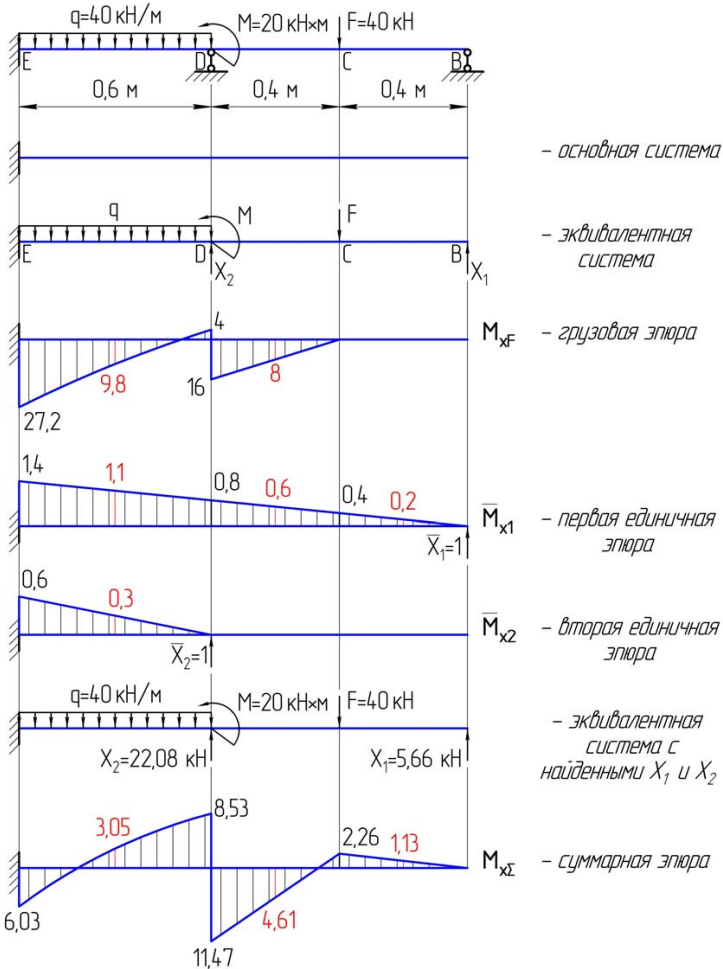
Отметим, что в каждом слагаемом обоих уравнений в знаменателе стоит величина EI_x — жесткость поперечного сечения балки. Следовательно, на эту величину оба уравнения можно сократить, тогда система принимает вид:

$$\begin{cases} 0,915X_1 + 0,216X_2 - 9,933 = 0 \\ 0,216X_1 + 0,072X_2 - 2,808 = 0. \end{cases}$$

В результате математического решения этой системы находим значения «лишних» неизвестных: $X_1 = 5,66$ кН, $X_2 = 22,08$ кН. Оба значения получились положительными, следовательно, мы угадали истинное направление этих усилий.

Внимание! 🤖 Если значение «лишней» неизвестной получается отрицательным, значит, нужно изменить её направление на эквивалентной системе на противоположное.

7. Построим суммарную эпюру изгибающих моментов $M_{x\Sigma}$. Суммарная эпюра строится на основной системе с учетом действия заданной нагрузки и найденных значений «лишних» неизвестных.



Определим значения моментов в граничных сечениях суммарной эпюры:

$$M_{x\Sigma}^B = 0, \quad M_{x\Sigma}^C = X_1 \cdot BC = 5,66 \cdot 0,4 = 2,26 \text{ кН}\cdot\text{м},$$

$$M_{x\Sigma}^D = X_1 \cdot BD - F \cdot CD = 5,66 \cdot 0,8 - 40 \cdot 0,4 = -11,47 \text{ кН}\cdot\text{м} \text{ (до скачка),}$$

$$M_{x\Sigma}^D = X_1 \cdot BD - F \cdot CD + M = 5,66 \cdot 0,8 - 40 \cdot 0,4 + 20 = 8,53 \text{ кН}\cdot\text{м} \text{ (после скачка),}$$

$$M_{x\Sigma}^E = X_1 \cdot BE - F \cdot CE + M + X_2 \cdot DE - q \cdot DE \cdot \frac{DE}{2} =$$

$$= 5,66 \cdot 1,4 - 40 \cdot 1 + 20 + 22,08 \cdot 0,6 - 40 \cdot 0,6 \cdot 0,3 = -6,03 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

На суммарной эпюре $M_{x\Sigma}$ показаны также значения моментов в средних сечениях участков. Они находятся аналогично методом сечений (предлагается получить эти значения самостоятельно).

8. Сделаем *деформационную проверку*. Убедимся, что вертикальные перемещения раскрепленных точек эквивалентной системы δ_B и δ_D равны нулю. Для нахождения этих перемещений методом Мора необходимо каждую единичную эпюру \bar{M}_{x1} и \bar{M}_{x2} «умножить» на суммарную $M_{x\Sigma}$. Учитывая, что значения X_1 и X_2 были найдены неточно (с учетом округления), точного нуля в деформационной проверке мы не получим. Допустимая погрешность решения – не более 3 %.

Для сечения B :

$$\delta_B = \sum_{i=1}^3 \frac{l_i}{6EI_x} (\bar{M}_{x1i}^n \cdot M_{x\Sigma i}^n + 4\bar{M}_{x1i}^{cp} \cdot M_{x\Sigma i}^{cp} + \bar{M}_{x1i}^n \cdot M_{x\Sigma i}^n) =$$

$$= \frac{1}{EI_x} \left[\frac{0,4}{6} (0 + 4 \cdot 1,13 \cdot 0,2 + 2,26 \cdot 0,4) + \frac{0,4}{6} (2,26 \cdot 0,4 - 4 \cdot 4,61 \cdot 0,6 - 11,47 \cdot 0,8) + \right.$$

$$\left. + \frac{0,6}{6} (8,53 \cdot 0,8 + 4 \cdot 3,05 \cdot 1,1 - 6,03 \cdot 1,4) \right] = \frac{1}{EI_x} (0,1205 - 1,2891 + 1,1802) =$$

$$= \frac{1}{EI_x} (1,3007 - 1,2891) = \frac{0,0116}{EI_x}.$$

Для определения точности решения необходимо сгруппировать значения с разными знаками (что сделано в последней строке) и оценить погрешность вычислений в процентах по отношению к положительной составляющей:

$$\Delta \% = \left| \frac{1,3007 - 1,2891}{1,3007} \right| \cdot 100 \% = \frac{0,0116}{1,3007} \cdot 100 \% = 0,9 \%,$$

что допустимо.

Для сечения D :

$$\delta_D = \sum_{i=1}^1 \frac{l_i}{6EI_x} (\bar{M}_{x2i}^n \cdot M_{x\Sigma i}^n + 4\bar{M}_{x2i}^{cp} \cdot M_{x\Sigma i}^{cp} + \bar{M}_{x2i}^n \cdot M_{x\Sigma i}^n) =$$

$$= \frac{1}{EI_x} \left[\frac{0,6}{6} (0 + 4 \cdot 0,3 \cdot 3,05 - 0,6 \cdot 6,03) \right] = \frac{1}{EI_x} \left[\frac{0,6}{6} (3,660 - 3,618) \right].$$

$$\Delta \% = \left| \frac{3,660 - 3,618}{3,660} \right| \cdot 100\% = \left| \frac{0,042}{3,660} \right| \cdot 100\% = 1,1\%,$$

что тоже допустимо.

Таким образом, статическая неопределимость балки раскрыта верно.

9. Подберем из условия прочности размер двутаврового сечения балки (см. Практикум, часть 1, стр. 37). Определим по суммарной эпюре $M_{x\Sigma}$ положение опасного сечения. Сечение D наиболее опасно, так как в этом сечении наибольший изгибающий момент:

$$|M_{x\max}| = |M_{x\Sigma}^D| = 11,47 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Заданная балка изготовлена из пластичного материала, следовательно, условие прочности имеет вид (см. Практикум, часть 1, стр. 35):

$$\sigma_{\max} = \frac{|M_x|_{\max}}{W_x} \leq [\sigma].$$

Найдем из условия прочности допускаемую величину момента сопротивления:

$$[W_x] = \frac{|M_x|_{\max}}{[\sigma]} = \frac{11,47 \cdot 10^3}{160 \cdot 10^6} = 71,7 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3 = 71,7 \text{ см}^3.$$

Таким образом, двутавровое сечение балки должно иметь величину момента сопротивления не меньшую, чем $71,7 \text{ см}^3$. По сортаменту прокатной стали (ГОСТ 8239-89) подберем подходящий номер двутавра (прил. 4, табл. 4.1). Подходит двутавр № 14, у которого осевой момент сопротивления $W_x = 81,7 \text{ см}^3$, а осевой момент инерции $I_x = 572 \text{ см}^4$.

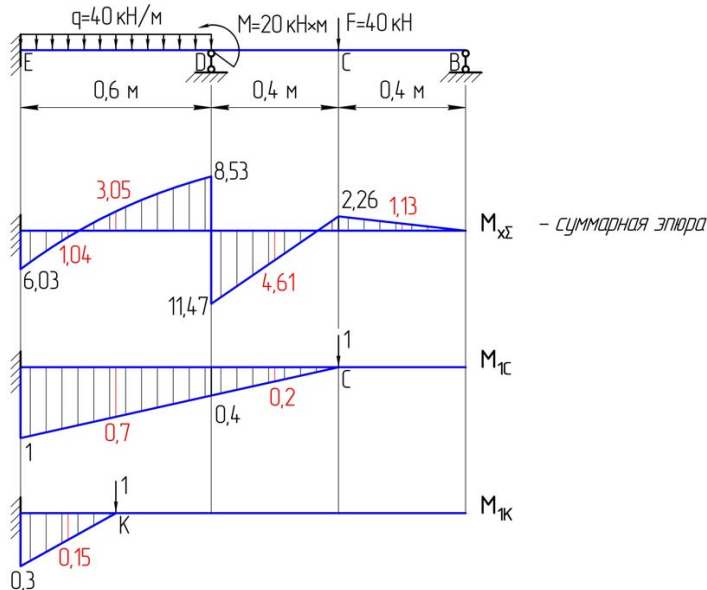
10. Определим перемещения (прогибы) некоторых незакрепленных сечений балки, изобразим приближенный вид её изогнутой оси и проверим выполнение условия жесткости (см. Практикум, часть 1, стр. 40).

При расчете на жесткость балки используем поперечное сечение, которое подобрали из условия прочности, — двутавр № 14 с осевым моментом инерции $I_x = 572 \text{ см}^4 = 572 \cdot 10^{-8} \text{ м}^4$.

Перемещения обычно определяют в двух-трех незакрепленных граничных сечениях балки, однако в заданной балке такое граничное сечение единственное — C . Тогда в качестве второго сечения можно взять середину самого длинного участка. Мы возьмем сечение K — середину участка ED .

Определим методом Мора перемещения в сечениях C и K . Для этого построим две единичные эпюры M_{1C} и M_{1K} , приложив поочередно в каждом сечении по единичной силе.

Внимание! 🗨️ Единичные эпюры здесь строятся на *выбранной основной системе*.



Перемещение δ_C найдем путем «умножения» единичной эпюры M_{1C} на суммарную эпюру $M_{x\Sigma}$:

$$\begin{aligned} \delta_C &= \sum_{i=1}^2 \frac{l_i}{6EI_x} (M_{1Ci}^n \cdot M_{x\Sigma i}^n + 4M_{1Ci}^{cp} \cdot M_{x\Sigma i}^{cp} + M_{1Ci}^n \cdot M_{x\Sigma i}^n) = \\ &= \frac{1}{EI_x} \left[\frac{0,4}{6} (0 + 4 \cdot 0,2 \cdot 4,61 + 0,4 \cdot 11,47) + \frac{0,6}{6} (-0,4 \cdot 8,53 - 4 \cdot 0,7 \cdot 3,05 + 1 \cdot 6,03) \right] = \\ &= \frac{-0,041 \cdot 10^3}{2 \cdot 10^{11} \cdot 572 \cdot 10^{-8}} = -0,000036 \text{ м} = -0,036 \text{ мм}. \end{aligned}$$

Знак « \rightarrow » здесь говорит о том, что истинное перемещение сечения C противоположно выбранному направлению единичной силы на эпюре M_{1C} . Следовательно, сечение C балки перемещается вверх на 0,036 мм.

Перемещение δ_K найдем путем «перемножения» единичной эпюры M_{1K} на суммарную эпюру $M_{x\Sigma}$:

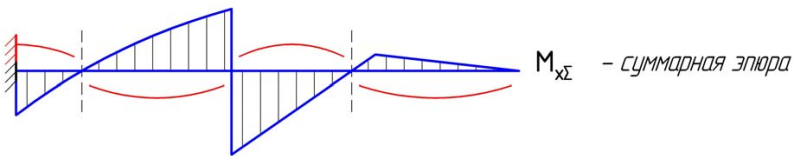
$$\delta_K = \sum_{i=1}^1 \frac{l_i}{6EI_x} (M_{1Ki}^n \cdot M_{x\Sigma i}^n + 4M_{1Ki}^{cp} \cdot M_{x\Sigma i}^{cp} + M_{1Ki}^n \cdot M_{x\Sigma i}^n) =$$

$$= \frac{1}{EI_x} \left[\frac{0,3}{6} (0 + 4 \cdot 0,15 \cdot 1,04 + 0,3 \cdot 6,03) \right] = \frac{0,122 \cdot 10^3}{2 \cdot 10^{11} \cdot 572 \cdot 10^{-8}} = 0,000106 \text{ м} \approx 0,11 \text{ мм}.$$

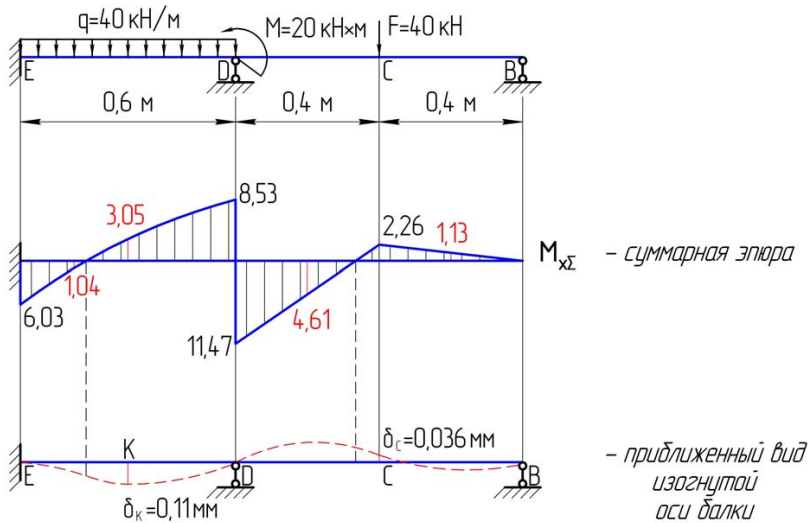
Направление перемещения сечения K совпадает с выбранным направлением единичной силы на эпюре M_{1K} . Следовательно, сечение K балки смещается вниз на 0,11 мм.

Изобразим приближенный вид изогнутой оси балки, учитывая следующие условия.

- Закрепленные сечения B , D и E балки не смещаются (остаются на месте).
- Сечение C смещается вверх на 0,036 мм, а сечение K вниз на 0,11 мм.
- Изогнутая ось балки от жесткой заделки E отходит с нулевым углом поворота.
- Направление выпуклости изогнутой оси определяется по суммарной эпюре $M_{x\Sigma}$. Учитывая, что эпюра моментов строится на сжатых волокнах, получаем, что на участках, где суммарная эпюра расположена ниже оси, выпуклость изогнутой оси балки направлена вверх. Соответственно, там, где $M_{x\Sigma}$ расположена выше оси, балка изгибается выпуклостью вниз.



Учитывая все вышеизложенное, изображаем приближенный вид изогнутой оси балки.



Очевидно, что максимальный прогиб балки, если и отличается от прогиба в сечении K , то весьма незначителен.

Принимаем $\delta_{\max} = |\delta_K| = 0,11 \text{ мм}$.

Проверим выполнение условия жесткости:

$\delta_{\max} = |\delta_K| = 0,11 \text{ мм} \leq [\delta] = 0,8 \text{ мм}$ – условие жесткости выполняется.

Задача решена. 🧡👋



Потренируемся?

- Пройти тестовый тренинг (прил. 1, тесты к теме 1).
- Решить задачу 1.1 из контрольной работы № 1 (прил. 3).

Тема 2. РАСЧЕТ НА ПРОЧНОСТЬ ПРИ КОСОМ ИЗГИБЕ. СЛУЧАИ ИСКЛЮЧЕНИЯ

Цель занятия — научиться оценивать прочность конструкции, находящейся в условиях косоугольного изгиба. Знать случаи исключения и уметь делать прочностные расчеты для них.

Необходимые знания для достижения цели

1. Определение косоугольного изгиба как вида деформации.
2. Формула для определения нормальных напряжений в случае косоугольного изгиба.
3. Приемы определения положения силовой и нейтральной линий, а также опасных точек в сечении при косоугольном изгибе.
4. Как различить косоугольный изгиб и случаи исключения?

Теоретический материал

Случай косоугольного изгиба



Что такое косоугольный изгиб?

Косоугольным изгибом называется такой вид деформации, при котором силовая линия не совпадает ни с одной из главных центральных осей сечения.



Что такое силовая линия?

Силовая линия — это след плоскости действия изгибающего момента.



Что такое главные центральные оси сечения?

Это оси, проходящие через центр тяжести поперечного сечения, относительно которых центробежный момент инерции равен 0. Что-то опять сложно и непонятно! Ведь надо знать, что такое центробежный момент инерции 🤔! В простых случаях поперечных сечений, если хотя бы одна из осей координат сечения является осью симметрии, а вторая проходит через центр тяжести, такая система координат всегда главная.



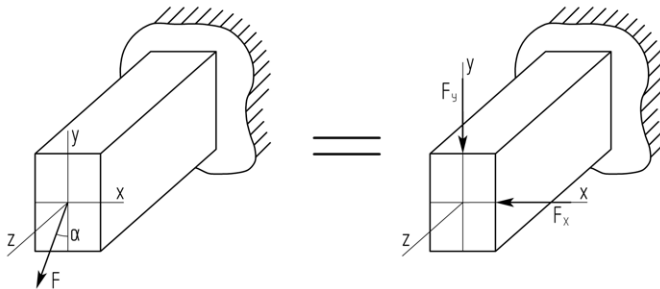
Почему необходимо знать об этом виде деформации и уметь делать расчеты на прочность?

Дело в том, что косоугольный изгиб достаточно часто встречается в реальных конструкциях и он опаснее прямого. Поэтому, если условия

работы элемента конструкции приводят к возникновению именно косого изгиба, абсолютно очевидно, что надо уметь корректно оценивать прочность, учитывая особенности данного вида деформации.

Чтобы научиться оценивать прочность в случае косого изгиба, надо знать следующее. 🤖

1. Косой изгиб можно представить как сумму двух прямых изгибов:



2. Напряжения при косом изгибе в любой произвольной точке поперечного сечения определяются как алгебраическая сумма нормальных напряжений от каждого изгибающего момента, создающего прямой изгиб:

$$\sigma_{\Sigma} = \sigma(M_X) + \sigma(M_Y) = \frac{M_X \cdot y}{I_X} + \frac{M_Y \cdot x}{I_Y},$$

где x и y – координаты точки сечения, в которой определяют величину напряжения σ_{Σ} ; I_X и I_Y – главные осевые моменты инерции поперечного сечения. Для заданной формы сечения формулы для них можно найти в справочнике.

3. Для определения положения опасных точек сечения надо знать положение нейтральной линии, которая не перпендикулярна силовой (в отличие от прямого изгиба) и проходит через четверти, противоположные тем, через которые проходит силовая линия. Точки сечения, наиболее удаленные от нейтральной линии, – опасные точки. Для прямоугольного сечения и форм сечений на основе прямоугольника (двутавр, швеллер) это всегда угловые точки, находящиеся в силовых четвертях, т. е. в четвертях, через которые проходит силовая линия.

4. Определить положение опасных точек можно также, используя прием простановки знаков нормальных напряжений в четвертях сечения от каждого из прямых изгибов относительно осей x и y , из которых состоит косоугольный изгиб. Опасные точки находятся в четвертях сечения с одинаковыми знаками напряжений и максимально удалены от нейтральной линии и главных центральных осей сечения.

5. Условие прочности для косоугольного изгиба:

$$\sigma_{\Sigma \text{MAX}} = \sigma(M_X) + \sigma(M_Y) = \frac{M_X^{\text{MAX}} \cdot y_{\text{max}}}{I_X} + \frac{M_Y^{\text{MAX}} \cdot x_{\text{max}}}{I_Y} \leq [\sigma].$$

6. Для элементов конструкций с симметричными формами профилей, изготовленных из пластичных материалов, можно использовать «зеркальную» формулу:

$$\sigma_{\Sigma \text{MAX}} = \frac{M_X^{\text{MAX}}}{W_X} + \frac{M_Y^{\text{MAX}}}{W_Y} \leq [\sigma].$$



Алгоритм расчета на прочность при косом изгибе

1. Определение положения опасного сечения на элементе конструкции по эпюрам внутренних моментов M_X и M_Y , построенных от действия внешних нагрузок.

2. Определение положения силовой линии в опасном сечении. Для этого необходимо в плоскости сечения по осям x и y отложить в масштабе ординаты внутренних моментов (M_X по оси y , а M_Y по оси x) в сторону, соответствующую положению ординат на эпюрах изгибающих моментов в опасном сечении. Ордината суммарного момента, построенная как геометрическая сумма ординат моментов M_X и M_Y , $M_{\Sigma} = \sqrt{M_X^2 + M_Y^2}$ определяет положение силовой линии.

3. Определение положения опасных точек в опасном сечении. Для сечения прямоугольной формы и подобных ему (двутавр, швеллер) опасные точки – это угловые точки в силовых четвертях. Они равноопасны, так как находятся на одинаковых расстояниях от главных центральных осей сечения.

4. Запись условия прочности для опасных точек и его решение согласно поставленной задаче:

$$\sigma_{\Sigma \text{MAX}} = \sigma(M_X) + \sigma(M_Y) = \frac{M_X^{\text{MAX}} \cdot y_{\text{max}}}{I_X} + \frac{M_Y^{\text{MAX}} \cdot x_{\text{max}}}{I_Y} \leq [\sigma].$$

Для прямоугольного сечения можно воспользоваться «зеркальной» формулой, чтобы определить нормальные напряжения от каждого изгибающего момента, создающего прямой изгиб:

$$\sigma_{\Sigma \text{MAX}} = \sigma(M_X) + \sigma(M_Y) = \frac{M_X^{\text{MAX}}}{W_X} + \frac{M_Y^{\text{MAX}}}{W_Y} \leq [\sigma],$$

где W_X и W_Y – моменты сопротивления поперечного сечения относительно соответствующих главных центральных осей.

Случаи исключения

Имеются формы поперечных сечений, для которых кривой изгиб невозможен, у них любая пара центральных осей является главной. И как бы ни проходила силовая линия, она всегда совпадет с главной центральной осью. Это такие профили, как круг и все правильные многоугольники, например, равносторонний треугольник, квадрат и т. д. Для этих форм профилей изгиб всегда прямой. Нейтральная линия, соответственно, перпендикулярна силовой линии.



Как же быть в таком случае?

◆ Если элемент конструкции нагружен одной нагрузкой, под углом к осям заданной системы координат, то расчет напряжений ведется по формуле прямого изгиба от максимального момента, созданного этой нагрузкой. Линия действия нагрузки является силовой линией, а нейтральная линия проходит перпендикулярно силовой. Опасные точки находятся на максимальном расстоянии от нейтральной линии, напряжения в них определяются по формуле:

$$\sigma_{\text{MAX}} = \frac{M_{\text{MAX}} \cdot y_{\text{MAX}}}{I_X}. \text{ Для круглого профиля эти точки находятся}$$

на пересечении силовой линии с контуром сечения, и напряжения

в них можно определить по зеркальной формуле $\sigma_{\text{max}} = \frac{M_{\text{MAX}}}{W_{\text{oc}}}$, где

$$W_{\text{oc}} = \frac{\pi \cdot d^3}{32}, \text{ } d \text{ – диаметр круглого профиля.}$$

◆ Если элемент конструкции нагружен силами, векторы которых лежат в двух взаимно перпендикулярных плоскостях, то в опасном сечении по осям сечения x и y откладываются величины ординат внутренних изгибающих моментов (M_x по оси y , а M_y по оси x) в сторону, соответствующую положению ординат на эпюрах изгибающих моментов в соответствующем сечении. Находится

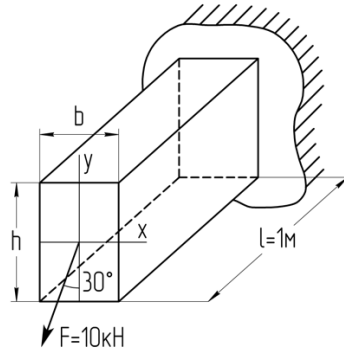
величина и положение ординаты суммарного внутреннего момента $M_{\Sigma} = \sqrt{M_x^2 + M_y^2}$, который и определяет положение силовой линии. Далее нахождение опасных точек и напряжений в них производится аналогично предыдущему случаю.



Примеры решения задач

Задача 1

Консольный стержень прямоугольного сечения на свободном конце нагружен сосредоточенной силой $F = 10$ кН, вектор которой проходит через центр тяжести сечения под углом 30° к вертикальной оси y . Длина стержня $l = 1$ м, а соотношение сторон прямоугольного сечения $\frac{h}{b} = 2$. Стержень изготовлен из Ст3 с допускаемым напряжением $[\sigma] = 160$ МПа.



Требуется

1. Определить из условия прочности по допускаемым напряжениям величину характерного размера прямоугольного сечения $[b]$.
2. Заменяв прямоугольное сечение стержня круглым, определить величину диаметра круглого сечения $[d]$ из условия прочности.
3. Сравнить металлозатраты стержней прямоугольного и круглого поперечных сечений.

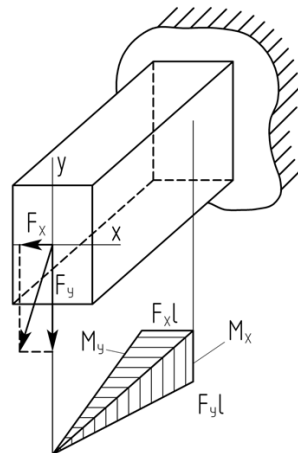
Решение

1. Определим положение опасного сечения. Для этого спроектируем силу F на главные центральные оси X и Y поперечного сечения:

$$F_x = F \cdot \sin 30^\circ = 5 \text{ кН};$$

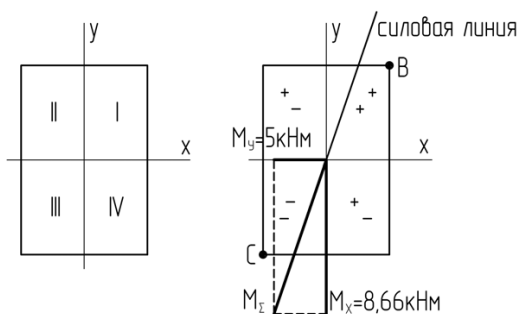
$$F_y = F \cdot \cos 30^\circ = 10 \cdot 0,866 = 8,66 \text{ кН}.$$

Затем от каждой из этих сил построим эпюры изгибающих моментов на одной базе M_y и M_x соответственно.



Опасное сечение будет в заделке, т. е. в том сечении, где моменты достигают своего максимального значения.

2. Определим положение силовой линии в опасном сечении. Для этого изобразим сечение, в плоскости которого отложим в масштабе значения изгибающих моментов M_y и M_x в ту же сторону, что на эпюрах соответствующих моментов: M_y отложим влево, а M_x отложим вниз. Так как эпюры построены на сжатых волокнах, то сжаты левые волокна стержня относительно оси «y» от действия момента M_y , соответственно, там поставим знаки «-» во II и III четвертях сечения, а в противоположных I и IV знаки «+» (нумерацию четвертей прямоугольника см. ниже). Также сжаты нижние волокна стержня относительно оси «x» от момента M_x , соответственно, поставим знаки «-» нормального напряжения в III и IV четвертях, а в верхних – I и II четвертях знаки «+». Тогда ордината суммарного момента пройдет через I и III четверти и определит положение силовой линии. В этих же четвертях совпадают знаки нормальных напряжений от изгибающих моментов M_x и M_y :



3. Определим положение опасных точек в опасном сечении. Это будут угловые точки в силовых четвертях, т. е. точки «В» и «С». Точки являются равноопасными, так как величины напряжений в них будут одинаковыми по абсолютной величине. В точке «С» – угловой точке третьей четверти с двумя знаками «-» нормальных напряжений от двух прямых изгибов возникает максимальное сжимающее напряжение. Противоположная ей точка «В» попала в область растяжения (два знака «+» от прямых изгибов), и напряжение в ней будет положительным: $\sigma_B^{\text{MAX}} = -\sigma_C^{\text{MAX}}$.

4. Запишем условие прочности для опасных точек и определим из его решения величину размера поперечного сечения:

$$\sigma_B^{\text{MAX}} = -\sigma_C^{\text{MAX}} = \sigma_B^{\text{MAX}}(M_X) + \sigma_C^{\text{MAX}}(M_Y) = \frac{M_X}{W_X} + \frac{M_Y}{W_Y} \leq [\sigma].$$

Предварительно выразим моменты сопротивления поперечного сечения через характерный размер b .

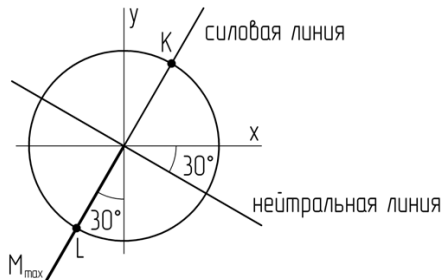
$$W_X = \frac{b \cdot h^2}{6} = \frac{b \cdot (2b^2)}{6} = \frac{2b^3}{3}; \quad W_Y = \frac{h \cdot b^2}{6} = \frac{2b \cdot b^2}{6} = \frac{b^3}{3}.$$

После подстановки численного значения изгибающих моментов в сечении заделки и выражений для моментов сопротивления через размер b получим: $\frac{8,66 \cdot 3}{2 \cdot b^3} + \frac{5 \cdot 3}{b^3} = \frac{27,99}{b^3} \leq [\sigma]$, откуда

$$[b] = \sqrt[3]{\frac{27,99 \text{ кН} \cdot \text{м}}{160 \cdot 10^3 \text{ кН/м}^2}} = 0,0559 \text{ м}.$$

5. Для определения диаметра круглого сечения для данного стержня вычислим внутренний изгибающий момент в заделке:

$M_{\text{MAX}} = F \cdot \ell = 10 \text{ кНм}$. В плоскости опасного сечения проведем ординату максимального момента под углом 30° к оси y и продлим ее до пересечения с контуром сечения. Это и будет силовой линией. Нейтральная линия проходит перпендикулярно



силовой линией. Опасные точки будут расположены на максимальном расстоянии от нейтральной линии. Это точки «К» и «L», находящиеся на концах диаметра, совпадающего с силовой линией. Направление вектора внешней силы F указывает на сжатую зону, т. е. половина сечения выше нейтральной линии растянута и точка «К» испытывает положительные напряжения, точка «L» – отрицательные.

6. Запишем условие прочности по формуле прямого изгиба:

$$\sigma_{\text{MAX}_K} = -\sigma_{\text{MAX}_L} = \frac{M_{\text{MAX}} \cdot y_{\text{MAX}}}{I_X} = \frac{M_{\text{MAX}}}{W_X} \leq [\sigma].$$

Для круглого сечения момент сопротивления через диаметр определяется так:

$$W_X = \frac{\pi \cdot d^3}{32}.$$

Подставив в условие прочности значение момента и выражение для W_X , получим:

$$\frac{10 \cdot 32}{\pi \cdot d^3} \leq 160 \cdot 10^3, \text{ откуда } [d] = \sqrt[3]{\frac{10 \cdot 32}{\pi \cdot 160 \cdot 10^3}} = 0,086 \text{ м.}$$

7. Сравним стержни прямоугольного и круглого сечений по металлозатратам. Для этого определим площади сечений:

$$A_{\text{прям-ка}} = 2 \cdot b^2 = 2 \cdot 0,0559^2 = 0,00625 \text{ м}^2;$$

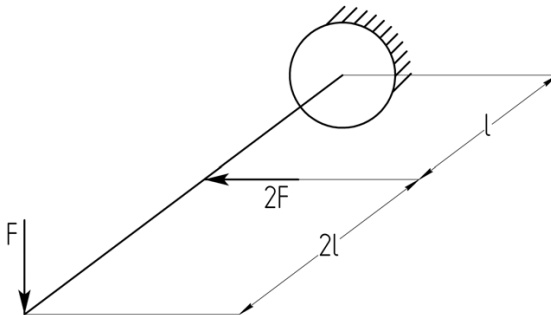
$$A_{\text{круга}} = \frac{\pi \cdot d^2}{4} = \frac{3,14 \cdot 0,086^2}{4} = 0,0058 \text{ м}^2,$$

т. е. для случая косоугольного изгиба (прямоугольный профиль) требуется большее по площади сечение, что указывает на более опасный характер этого вида деформации для данных исходных условий.

Задача решена. 🙌

Задача 2

Стержень консольного типа нагружен двумя силами: величиной F в вертикальной плоскости и величиной $2F$ в горизонтальной плоскости. Параметр длины $l = 1$ м. Изготовлен стержень из Ст3 с допускаемым напряжением $[\sigma] = 160$ МПа.



Требуется

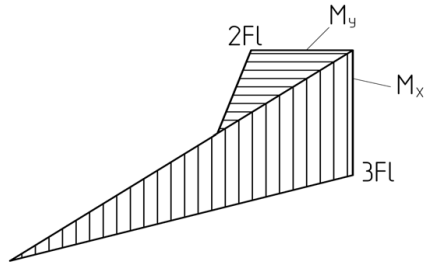
1. Определить грузоподъемность стержня $[F]$ из условия прочности по допускаемому напряжению для прямоугольного сечения с соотношением сторон $\frac{h}{b} = 1,5$ и величиной $b = 8 \cdot 10^{-2}$ м.

2. Определить грузоподъемность стержня $[F]$ из условия прочности по допускаемому напряжению для круглого сечения, равного по площади прямоугольному профилю.

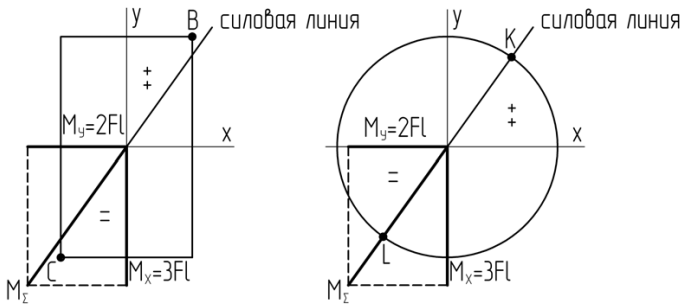
Решение

1. Определим положение опасного сечения, для чего построим эпюры изгибающих моментов M_y и M_x на одной базе.

Из эпюр видно, что опасное сечение находится в заделке с моментами $M_x = 3Fl$ и $M_y = 2Fl$.



2. Определим положение силовой линии в плоскости прямоугольного и круглого сечений. Для этого с сохранением масштаба перенесем ординаты изгибающих моментов с эпюр M_x и M_y в опасном сечении в плоскость прямоугольного и круглого сечений и определим величину и направление ординаты суммарного момента $M_\Sigma = \sqrt{M_x^2 + M_y^2}$ как геометрическую сумму моментов M_x и M_y .



3. Определим положение опасных точек в опасном сечении. В прямоугольном сечении опасными будут угловые точки «В» и «С» в силовых четвертях, а в круглом сечении точки «К» и «L» на концах диаметра, совпадающего с силовой линией.

4. Запишем условие прочности для опасных точек прямоугольного профиля и определим из его решения величину грузоподъемности $[F]$:

$$\sigma_B^{\text{MAX}} = -\sigma_C^{\text{MAX}} = \sigma_B^{\text{MAX}}(M_X) + \sigma_C^{\text{MAX}}(M_Y) = \frac{M_X}{W_X} + \frac{M_Y}{W_Y} \leq [\sigma].$$

Предварительно выразим моменты сопротивления через характерный размер b поперечного сечения:

$$W_X = \frac{b \cdot h^2}{6} = \frac{b \cdot (1,5b^2)}{6} = \frac{3b^3}{8}; \quad W_Y = \frac{h \cdot b^2}{6} = \frac{1,5b \cdot b^2}{6} = \frac{b^3}{4}.$$

После подстановки численного значения изгибающих моментов в сечении заделки и выражений для моментов сопротивления через размер b получим:

$$\frac{3 \cdot F\ell \cdot 8}{3 \cdot b^3} + \frac{2F\ell \cdot 4}{b^3} = \frac{16F\ell}{b^3} \leq [\sigma],$$

откуда

$$[F] = \frac{b^3 \cdot [\sigma]}{16 \cdot \ell} = \frac{(8 \cdot 10^{-2})^3 \cdot 160 \cdot 10^3}{16 \cdot 1} = 5,12 \text{ кН}.$$

5. Для круглого сечения определим из условия равенства площадей прямоугольного и круглого сечений величину диаметра:

$$A_{\text{прям-ка}} = A_{\text{круга}} \rightarrow 1,5b^2 = \frac{\pi \cdot d^2}{4} \rightarrow d = b \cdot \sqrt{\frac{1,5 \cdot 4}{3,14}} = 11,06 \text{ см}.$$

6. Для опасных точек круглого сечения «К» и «L» запишем условие прочности:

$$\sigma_K^{\text{MAX}} = -\sigma_L^{\text{MAX}} = \frac{M_{\Sigma}^{\text{MAX}}}{W_X} \leq [\sigma],$$

где $M_{\Sigma}^{\text{MAX}} = \sqrt{(M_X^{\text{MAX}})^2 + (M_Y^{\text{MAX}})^2} = \sqrt{(3Fl)^2 + (2Fl)^2} = 3,6Fl.$

Подставив в условие прочности, получим:

$$\frac{3,6Fl \cdot 32}{\pi \cdot d^3} \leq 160 \cdot 10^3,$$

откуда

$$[F] = \frac{\pi \cdot d^3 \cdot 160 \cdot 10^3}{3,6 \cdot 1 \cdot 32} = \frac{3,14 \cdot (11,06 \cdot 10^{-2})^3 \cdot 16 \cdot 10^4}{3,6 \cdot 1 \cdot 32} = 5,89 \text{ кН}.$$

Задача решена. 



Потренируемся?

- Пройти тестовый тренинг ([прил. 1, тесты к теме 2](#)).

Тема 3. РАСЧЕТ НА ПРОЧНОСТЬ ПРИ СОВМЕСТНОМ ДЕЙСТВИИ ИЗГИБА И РАСТЯЖЕНИЯ-СЖАТИЯ

Цель занятия – научиться оценивать прочность конструкции, находящейся в условиях совместного действия изгиба и растяжения-сжатия; понимать особенности этого вида деформации и учитывать их в расчетной практике.

Необходимые знания для достижения цели

1. Что такое косою изгиб с растяжением-сжатием?
2. Формулы для определения нормальных напряжений от изгибающих моментов и внутренней продольной силы.
3. Принцип алгебраического сложения одностипных напряжений, возникающих от разных внутренних силовых факторов.

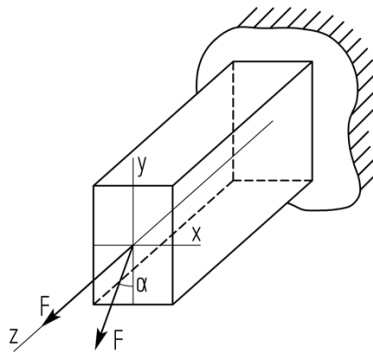
Теоретический материал

Случай косою изгиба с растяжением-сжатием



Что такое косою изгиб с растяжением-сжатием?

Совокупность косою изгиба, при котором силовая линия не совпадает ни с одной из главных центральных осей сечения, с одновременным силовым воздействием в направлении продольной оси элемента конструкции приводит к данному случаю деформации. Например:



Чтобы научиться оценивать прочность в случае косою изгиба с растяжением-сжатием, надо знать! 🤔

1. Оценка напряжений в опасной точке элемента конструкции ведется отдельно от каждого внутреннего силового фактора, возникающего при данном виде деформации.

2. Поскольку присутствует кривой изгиб, то в первую очередь определяют положение опасных точек от кривой изгиба.

3. В зависимости от того, что добавляется к кривой изгибу (деформация растяжения или сжатия), в опасные точки от действия изгибающих моментов будет добавляться соответственно положительное или отрицательное напряжение от продольной силы.

4. Условие прочности при кривой изгибе с растяжением-сжатием имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} \sigma_{\Sigma \text{MAX}} &= \sigma(M_X) + \sigma(M_Y) + \sigma(N) = \\ &= \pm \frac{M_X^{\text{MAX}} \cdot y_{\text{max}}}{I_X} \pm \frac{M_Y^{\text{MAX}} \cdot x_{\text{max}}}{I_Y} \pm \frac{N}{A} \leq [\sigma] \end{aligned} \quad (3.1)$$

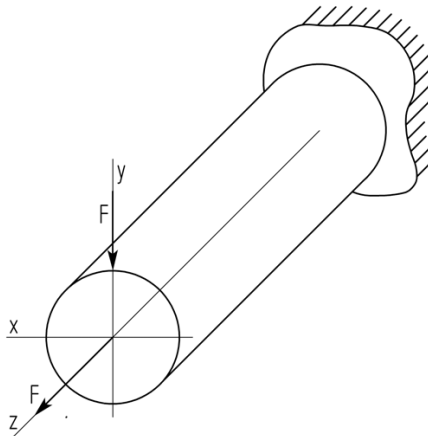
5. Если материал элемента конструкции пластичный, т. е. имеет одинаковые пределы текучести при растяжении и сжатии, то расчет напряжений в опасной точке сжатой зоны ведется по модулю.

Случай прямого изгиба с растяжением-сжатием



Что такое прямой изгиб с растяжением-сжатием?

Совокупность прямого изгиба, при котором силовая линия совпадает с одной из главных центральных осей сечения, с одновременным силовым воздействием в направлении продольной оси элемента конструкции приводит к данному случаю деформации. Например:



Чтобы научиться оценивать прочность в случае прямого изгиба с растяжением-сжатием, надо знать! 🤖

1. По сути, это частный случай косоугольного изгиба с растяжением-сжатием. Если косоугольный изгиб представить как два прямых, то в данном случае присутствует один из изгибающих моментов M_x или M_y . Поэтому все методические приемы оценки прочности остаются такими же, как и для случая косоугольного изгиба с растяжением-сжатием.

2. Условие прочности для прямого изгиба с растяжением-сжатием имеет вид в зависимости от особенностей нагружения и формы сечения:

◇ при наличии внутреннего изгибающего момента M_x и продольной силы N

$$\sigma_{\Sigma \text{MAX}} = \sigma(M_x) + \sigma(N) = \pm \frac{M_x^{\text{MAX}} \cdot y_{\text{max}}}{I_x} \pm \frac{N}{A} \leq [\sigma]; \quad (3.2)$$

◇ при наличии внутреннего изгибающего момента M_y и продольной силы N

$$\sigma_{\Sigma \text{MAX}} = \sigma(M_y) + \sigma(N) = \pm \frac{M_y^{\text{MAX}} \cdot x_{\text{max}}}{I_y} \pm \frac{N}{A} \leq [\sigma]; \quad (3.3)$$

◇ при наличии моментов M_x и M_y , но для форм сечений, исключая косоугольный изгиб (круг и правильные многоугольники):

$$\sigma_{\Sigma \text{MAX}} = \sigma(M_{\Sigma}) + \sigma(N) = \pm \frac{M_{\Sigma}^{\text{MAX}}}{W_{oc}} \pm \frac{N}{A} \leq [\sigma], \quad (3.4)$$

где $M_{\Sigma} = \sqrt{M_x^2 + M_y^2}$; W_{oc} – осевой момент сопротивления поперечного сечения относительно оси изгиба (нейтральной линии).



Алгоритм расчета на прочность при косоугольном (прямом) изгибе с растяжением-сжатием

1. Определение положения опасного сечения на элементе конструкции по эпюрам (эпюре) изгибающих моментов.

2. Определение положения опасной точки в опасном сечении.

2.1. При наличии двух прямых изгибов нужно построить силовую линию в плоскости опасного сечения. Как построить силовую линию, подробно описано в теме 2 (второй пункт алгоритма). В случае прямоугольного сечения, двутавра или швеллера опасными от изгибающих моментов будут угловые точки в силовых четвертях.

Для круглого сечения опасные точки будут на пересечении силовой линии с контуром сечения. Одна из опасных точек от изгиба будет испытывать растягивающее нормальное напряжение со знаком «+», а противоположная точка – сжимающее нормальное напряжение со знаком «-». В каждую из опасных точек от изгиба надо приписать знак нормального напряжения от продольной силы N : в случае растяжения «+» или «-» в случае сжатия. Точка, в которой знаки нормальных напряжений совпадут, будет опасной точкой сечения.

2.2. При наличии одного внутреннего изгибающего момента силовой линией является та ось поперечного сечения, с которой совпадает ордината изгибающего момента. Ось, перпендикулярная силовой, является нейтральной. Точки, максимально отстоящие от нейтральной линии, являются опасными от изгиба. Те точки, которые находятся в зоне сжатия, испытывают нормальное напряжение со знаком «-», а противоположные в зоне растяжения – со знаком «+». Осталось только добавить знаки нормальных напряжений от действия продольной силы. Опасными будут те точки, в которых совпадут знаки напряжений.

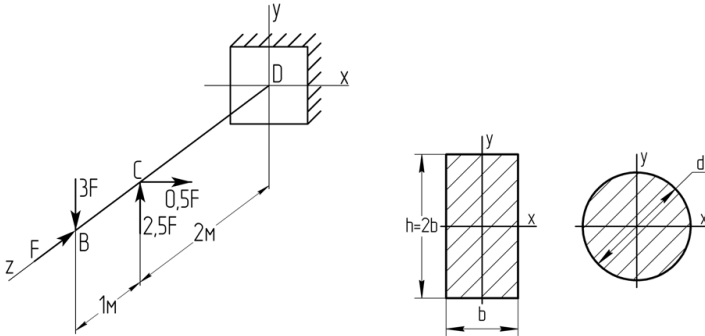
3. Запись одного из условий прочности (3.1)–(3.4) и его решение в соответствии с поставленной задачей. При реализации этого пункта алгоритма чаще всего напряжением от действия продольной силы пренебрегают. Во-первых, потому, что оно гораздо меньше по сравнению с напряжением, возникающим от изгибающего момента, и, во-вторых, включает величину характерного размера в квадрате, а напряжение от изгибающего момента – в кубе, что затрудняет, например, решение задачи об определении величины характерного размера поперечного сечения. После определения величины характерного размера по составляющей напряжения от изгиба проводят проверку прочности с учетом напряжения от действия продольной силы. Если процент перенапряжения не превышает пяти, принимают найденные величины в качестве действительных. В противном случае их изменяют методом подбора.



Пример решения задачи

Задача

Консольная балка нагружена силами, создающими изгиб в двух взаимно перпендикулярных плоскостях, и сжимающей силой, приложенной к свободному концу. Материал балки Ст3 с допускаемым напряжением $[\sigma] = 160 \text{ МПа}$.



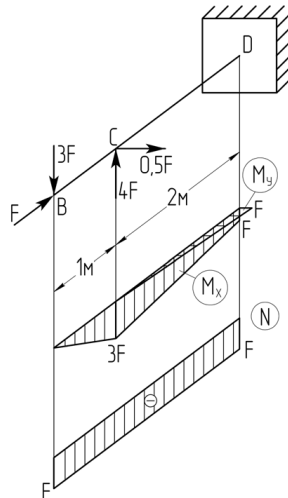
Требуется. Определить величину допускаемой силы $[F]$ для двух случаев поперечного сечения: прямоугольного с отношением сторон $h/b = 2$ при $b = 4 \cdot 10^{-2} \text{ м}$ и круглого с диаметром $d = 6 \cdot 10^{-2} \text{ м}$.

Решение

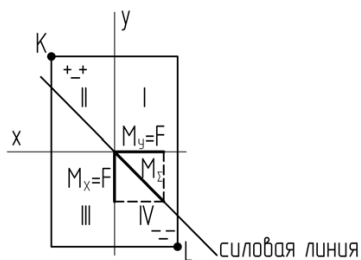
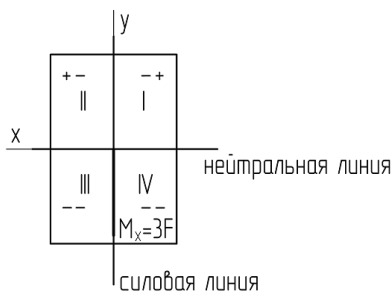
Для прямоугольного сечения

1. Определим положение опасного сечения на балке. Для этого построим эпюры изгибающих моментов M_x , M_y и продольной силы N .

Из эпюр изгибающих моментов видно, что предположительно опасными могут быть два сечения: «С» и «D». Сечение «С» испытывает прямой поперечный изгиб со сжатием, а сечение «D» – косой поперечный изгиб со сжатием. Какое сечение более опасно в данном случае, мы сможем сказать только после определения величин напряжений в опасных точках каждого сечения.



2. Определим положение опасных точек в сечениях «С» и «D». Для этого в плоскости каждого сечения отложим ординаты внутренних изгибающих моментов и установим положение силовой линии. В сечении «С» силовая линия совпадает с осью «у», а ось «х» является нейтральной от действия момента M_x . Опасными являются точки верхней и нижней сторон сечения. Нижние волокна испытывают напряжение сжатия (на это указывает ордината момента в соответствии с эпюрой моментов), поэтому в области нижних волокон мы ставим знак «-», а в области верхних «+», так как они испытывают напряжение растяжения. Добавляя к каждому знаку напряжений от действия изгибающего момента знак «-» от действия сжимающей продольной силы, видим, что опасными являются нижние волокна сечения.



Добавляя к каждому знаку напряжений от действия изгибающего момента знак «-» от действия сжимающей продольной силы, видим, что опасными являются нижние волокна сечения.

В сечении «D» силовая линия определяется по положению ординаты суммарного момента и пересекает II и IV четверти поперечного сечения.

Опасными от изгиба будут угловые точки «K» и «L». Положение ординаты суммарного изгибающего момента указывает на то, что точка «L» испытывает напряжение сжатия, и рядом с ней мы ставим два знака «-» от действия M_x и M_y , а рядом с точкой «K» два знака «+», так как в ней возникают напряжения растяжения. Добавляя к каждому знаку напряжений от действия изгибающих моментов знак «-» от действия сжимающей продольной силы, видим, что опаснее будет точка «L».

3. Определим величины напряжений от изгибающих моментов в опасных точках сечений «С» и «D».

Для сечения «С»:

$$\sigma_{\max}^C(M_X) = \frac{M_X}{W_X},$$

где $M_X = 3F$, а $W_X = \frac{b \cdot h^2}{6}$. Заменяя h на $2b$, получим: $W_X = \frac{2 \cdot b^3}{3}$, тогда:

$$\sigma_{\max}^C(M_X) = -\frac{3F \cdot 3}{2 \cdot b^3} = -\frac{4,5 \cdot F}{b^3}.$$

Для сечения «D»:

$$\sigma_{\max}^L = -\frac{M_X}{W_X} - \frac{M_Y}{W_Y},$$

где $M_X = F$, $M_Y = F$, $W_Y = \frac{h \cdot b^2}{6} = \frac{2 \cdot b \cdot b^2}{6} = \frac{b^3}{3}$. Тогда

$$\sigma_{\max}^L = -\frac{M_X}{W_X} - \frac{M_Y}{W_Y} = -\frac{F \cdot 3}{2 \cdot b^3} - \frac{F \cdot 3}{b^3} = -\frac{4,5 \cdot F}{b^3}.$$

Из сравнения максимальных напряжений в опасном волокне сечения «С» и в опасной точке сечения «D» очевидно, что сечения равноопасны. Определим величину допускаемой силы из условия прочности по составляющей от изгибающего момента, беря ее по модулю:

$$\frac{4,5 \cdot F}{b^3} \leq [\sigma] \rightarrow [F] = \frac{b^3 \cdot [\sigma]}{4,5}.$$

Подставив значения $b = 4 \cdot 10^{-2}$ м и $[\sigma] = 160 \cdot 10^3$ кПа, получим:

$$[F] = \frac{(4 \cdot 10^{-2})^3 \cdot 160 \cdot 10^3}{4,5} = 2,28 \text{ кН}.$$

Проведем проверку прочности в опасных точках сечения «С» и «D» с учетом составляющей напряжения от действия продольной силы $|\sigma| = \frac{N}{A} = \frac{F}{2b^2}$.

$$\begin{aligned} \sigma_{\max} &= \frac{4,5 \cdot [F]}{b^3} + \frac{[F]}{2b^2} = \frac{4,5 \cdot 2,28 \cdot 10^{-3}}{(4 \cdot 10^{-2})^3} + \frac{2,28 \cdot 10^{-3}}{2 \cdot (4 \cdot 10^{-2})^2} = \\ &= 160,3125 \text{ МПа} + 0,7125 \text{ МПа} = 161,025 \text{ МПа}. \end{aligned}$$

Процент перегруза составляет: $\frac{1,025 \text{ МПа}}{160 \text{ МПа}} \times 100\% = 0,64\% < 5\%$ — допускаемого процента перегруза.

Для круглого сечения

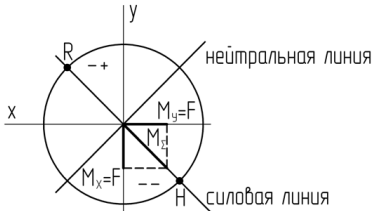
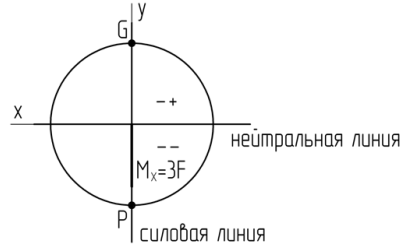
1. Определим положение опасного сечения на балке. Этот пункт уже выполнен для данной балки в случае прямоугольного сечения. Для круглого профиля это также сечения «С» и «D». Только в отли-

чие от прямоугольного в сечении «D» возникает прямой пространственный изгиб со сжатием.

2. Определим положение опасных точек в сечении «C» и «D».

В сечении «C» силовая линия совпадает с осью «y», нейтральная — с осью «x».

Опасными являются точки «G» и «P» на пересечении силовой линии с контуром круглого сечения, находящиеся на максимальном расстоянии от нейтральной линии. Нижняя точка «P» испытывает напряжение сжатия, и около нее мы поставим знак «-» (объяснение аналогичное, что и для прямоугольного профиля). Верхняя точка «G» попала в область растяжения, и около нее мы поставим знак «+». Добавляя знак «-» от напряжений, возникающих под действием сжимающей продольной силы, получаем максимальное по модулю напряжение в точке «P».



Для нахождения опасной точки в сечении «D» необходимо определить положение силовой линии по положению ординаты суммарного момента. Для этого ординаты внутренних моментов M_x и M_y откладываем в ту же сторону, что и на эпюрах соответствующих моментов. В силу равенства моментов M_x и M_y ордината суммарного момента, а значит, и силовая линия пройдет под углом 45° через II и IV четверти поперечного сечения.

Опасными от изгиба будут точки «R» и «H» — точки пересечения силовой линии с контуром круга. Нейтральная линия пройдет перпендикулярно силовой, разделив плоскость сечения на область растяжения (в нее попала точка «R») и область сжатия (в нее попала точка «H»). Около точки «R» поставим знак «+», а около точки «H» — знак «-». Добавляя к каждой точке по знаку «-» нормального напряжения от действия сжимающей продольной силы, делаем вывод о том, что опасной точкой сечения «D» является точка «H».

3. Определим напряжения в опасных точках сечений «С» и «D», чтобы выявить, какая из них опаснее. При этом определим в этих точках только составляющую напряжения от изгиба, отбросив слабое от действия продольной силы.

$$\sigma_{\max}^P \approx \frac{M_X}{W_X},$$

где $M_X = 3F$, $W_X = \frac{\pi \cdot d^3}{32}$.

Подставив эти выражения в формулу для напряжения, получим:

$$\sigma_{\max}^P \approx \frac{3 \cdot F \cdot 32}{\pi \cdot d^3} = \frac{96 \cdot F}{\pi \cdot d^3}.$$

$$\sigma_{\max}^H \approx \frac{M_\Sigma}{W_X},$$

где $M_\Sigma = \sqrt{M_X^2 + M_Y^2}$, $M_X = F$, $M_Y = F$, тогда $M_\Sigma = F \cdot \sqrt{2}$,

$$\sigma_{\max}^H \approx \frac{F \cdot \sqrt{2} \cdot 32}{\pi \cdot d^3} \approx \frac{45,25 \cdot F}{\pi \cdot d^3}.$$

Сравнивая напряжения в точках «Р» и «Н», приходим к выводу, что самой опасной точкой на балке круглого сечения является точка «Р», из условия прочности в которой определим величину допускаемой нагрузки:

$$\sigma_{\max}^P \approx \frac{96 \cdot F}{\pi \cdot d^3} \leq [\sigma] \rightarrow [F] = \frac{\pi \cdot d^3 \cdot [\sigma]}{96} = \frac{3,14 \cdot (6 \times 10^{-2})^3 \cdot 160 \times 10^3}{96} = 1,13 \text{ кН}.$$

Определим напряжение в опасной точке «Р» с учетом напряжения от действия продольной силы $|\sigma| = \frac{N}{A} = \frac{F \cdot 4}{\pi \cdot d^2}$:

$$\begin{aligned} \sigma_{\max}^P &= \frac{96 \cdot F}{\pi \cdot d^3} + \frac{F \cdot 4}{\pi \cdot d^2} = \frac{96 \cdot 1,13 \cdot 10^{-3}}{3,14 \cdot (6 \times 10^{-2})^3} + \frac{1,13 \cdot 4 \cdot 10^{-3}}{3,14 \cdot (6 \times 10^{-2})^2} = \\ &= 159,94 \text{ МПа} + 0,4 \text{ МПа} = 160,34 \text{ МПа}. \end{aligned}$$

Процент перегруза составляет: $\frac{0,34}{160} \times 100\% = 0,21\% \ll 5\%$ допускаемого перегруза.

Задача решена. 🙌😊



Потренируемся?

- Пройти тестовый тренинг ([прил. 1, тесты к теме 3](#)).

Тема 4. РАСЧЕТ НА ПРОЧНОСТЬ ПРИ ИЗГИБЕ С РАСТЯЖЕНИЕМ-СЖАТИЕМ И КРУЧЕНИЕМ

Цель занятия – научиться оценивать прочность конструкции, работающей в условиях изгиба с растяжением-сжатием и кручением.

Необходимые знания для достижения цели

1. Особенности построения эпюр внутренних силовых факторов для рам.
2. Рациональное расположение прямоугольного сечения при изгибе.
3. Положение опасных точек в сечениях круглой и прямоугольной формы, испытывающих изгиб с кручением и растяжением-сжатием, а также формулы для расчета нормальных и касательных напряжений в этих точках.
4. Понятие эквивалентного напряжения и формулы для его определения для пластичных материалов.
5. Алгоритм расчета на прочность при изгибе с кручением и растяжением-сжатием.

Теоретический материал



Какие эпюры необходимы для расчета на прочность при изгибе с кручением и растяжением-сжатием?

В общем случае нагружения в поперечных сечениях конструкции возникают все шесть внутренних силовых факторов: продольная сила N , поперечные силы Q_x и Q_y , изгибающие моменты M_x и M_y , крутящий момент M_z . Однако при расчете на прочность влиянием поперечных сил, как правило, пренебрегают. Это связано с тем, что касательные напряжения от крутящего момента обычно существенно больше, чем от поперечных сил. Таким образом, необходимость в эпюрах поперечных сил отпадает.



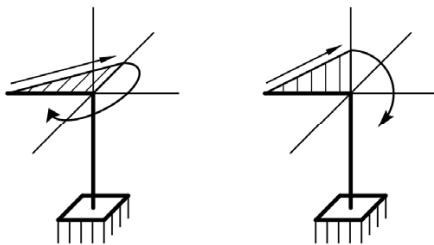
Как строятся эпюры для конструкций, состоящих из нескольких стержней?


Конструкции, состоящие из нескольких стержней (элементов), жестко соединенных друг с другом, называются *рамами*.

Для рам эпюры внутренних силовых факторов строятся, как и для балок, в направлении от одного конца конструкции к другому по участкам. При прохождении узловой точки, в которой соединяются два или более стержня, необходимо:

а) перенести с пройденного стержня внешние силовые факторы в начало следующего стержня параллельно самим себе;

б) перенести внутренние моменты, полученные в конце пройденного стержня, в начало следующего стержня. При переносе изгибающих моментов момент будет действовать в плоскости соответствующей эпюры, а его направление как бы продолжает движение вдоль линии эпюры, например:



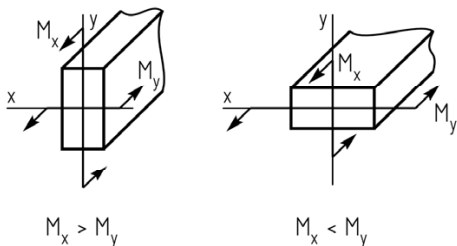
 **Как выбрать рациональное расположение прямоугольного поперечного сечения?**


При косом изгибе возникает проблема рационального расположения сечения.

Чтобы повысить прочность элемента конструкции, целесообразно располагать его сечение таким образом, чтобы ось, относительно которой момент сопротивления наибольший, совпадала с осью, относительно которой возникает наибольший внутренний изгибающий момент для этого элемента конструкции.

А если объяснить проще? 

Для прямоугольного сечения сказанное означает, что длинные стороны сечения должны быть параллельны плоскости, в которой действует наибольший внутренний изгибающий момент.

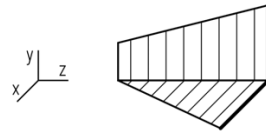


 **Так много эюр! Как определить, где находится опасное сечение?**

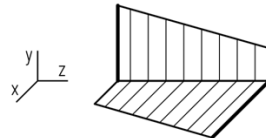
Положение опасного сечения в случае изгиба с кручением и растяжением-сжатием определяется по эюрам изгибающих моментов M_x и M_y . Это связано с тем, что значения продольной силы N и крутящего момента M_z в большинстве случаев не меняются по длине элемента конструкции, тогда как значения изгибающих моментов обычно существенно изменяются.


Возможны два варианта изменения изгибающих моментов по длине стержня.

1. Если моменты M_x и M_y достигают максимального значения в одном и том же сечении, то именно это сечение является опасным.



2. Если максимальные значения моментов M_x и M_y приходятся на разные сечения, то при расчете на прочность нужно рассматривать оба сечения, если форма поперечного сечения прямоугольная, а для круглой формы опасным считается то сечение, где максимальным является суммарный момент $M_\Sigma = \sqrt{M_x^2 + M_y^2}$.



 **Как влияет крутящий момент на положение опасной точки в поперечном сечении? Как вычисляются напряжения в опасных точках?**

Круглое поперечное сечение

Для элементов круглого сечения добавление кручения к изгибу или изгибу с растяжением-сжатием не влияет на положение в сечении опасной точки. Это связано с тем, что касательные напряжения от крутящего момента во всех точках контура круглого сечения одинаковы и являются наибольшими по величине.

Нормальное и касательное напряжение в опасной точке круглого сечения при изгибе с кручением и растяжением-сжатием определяют по формулам:

$$\sigma = \frac{|N|}{A} + \frac{M_\Sigma}{W_x}, \quad \tau = \frac{M_z}{W_p}, \quad (4.1)$$

где полярный момент сопротивления $W_p = \frac{\pi d^3}{16}$.

Прямоугольное поперечное сечение

При кручении стержня прямоугольного сечения касательное напряжение неодинаково в разных точках его контура. Оно достигает максимальных значений по серединам сторон сечения и равно нулю в вершинах. Поэтому при расчете на прочность в случае изгиба с кручением и растяжением-сжатием стержней прямоугольного сечения рассматривают в качестве возможных опасных три точки:

а) угловая точка, в которой возникают нормальные напряжения одного знака от изгиба и растяжения-сжатия, а касательные напряжения равны нулю:

$$\sigma = \frac{|N|}{A} + \frac{M_x}{W_x} + \frac{M_y}{W_y}; \quad (4.2)$$

б) две точки по серединам длин сторон прямоугольника в той же четверти, что и опасная угловая.

Нормальные напряжения в этих точках определяются по формулам:

– в точке на оси x

$$\sigma = \frac{|N|}{A} + \frac{M_y}{W_y}; \quad (4.3)$$

– в точке на оси y

$$\sigma = \frac{|N|}{A} + \frac{M_x}{W_x}. \quad (4.4)$$

Касательные напряжения:


– посередине длинной стороны

$$\tau_{\max} = \frac{M_z}{W_k}; \quad (4.5)$$

– посередине короткой стороны

$$\tau'_{\max} = \gamma \tau_{\max}. \quad (4.6)$$

В последних двух формулах момент сопротивления кручению $W_k = \beta \cdot b^3$, где b – длина короткой стороны сечения, а β и γ – коэффициенты, зависящие от соотношения длин сторон прямоугольника (прил. 4, табл. 4.5).


 **Как быть, если поперечное сечение прямоугольное, а изгиб возникает только в одной плоскости (прямой изгиб)?**

В данном случае – при сочетании прямого изгиба с растяжением-сжатием и кручением – потенциально опасными являются две точки:

а) точка на пересечении силовой линии с контуром сечения с той стороны, где нормальные напряжения от изгиба и от растяжения-сжатия одного знака;

б) две равноопасные точки, лежащие посередине сторон, параллельных силовой линии.

Напряжения в этих точках определяются по формулам (4.3–4.6).

 **Как записать условие прочности для точки, в которой возникает и нормальное, и касательное напряжение?**

Если в какой-либо точке поперечного сечения стержня одновременно возникают как нормальные, так и касательные напряжения, то это является признаком того, что данная точка находится в *плоском напряженном состоянии*.

Для расчета на прочность в условиях плоского напряженного состояния используются теории предельного состояния, также называемые теориями или гипотезами прочности.

Теории предельного состояния высказывают предположения (гипотезы) об условиях перехода материала конструкции в предельное состояние, при котором конструкция теряет несущую способность. Рассматриваются два вида предельных состояний: хрупкое разрушение и возникновение чрезмерных необратимых (пластических) деформаций. Так как механизмы этих двух процессов различаются, единой теории предельного состояния, применимой ко всем материалам, быть не может.

Любая теория предельного состояния позволяет заменить сложное напряженное состояние эквивалентным ему по степени опасности одноосным растяжением. Нормальное напряжение $\sigma_{\text{эКВ}}$, соответствующее такому одноосному растяжению, называется *эквивалентным напряжением*. Это дает возможность составить условие прочности в виде:

$$\sigma_{\text{эКВ}} = f(\sigma, \tau) \leq [\sigma]_p,$$

где σ и τ – нормальное и касательное напряжение в исследуемой точке поперечного сечения стержня; $f(\sigma, \tau)$ – некоторая функция σ и τ , задаваемая теорией предельного состояния; $[\sigma]_p$ – допускаемое напряжение материала при одноосном растяжении.



Какие теории предельного состояния используются для пластичных материалов и как при этом найти эквивалентное напряжение?

Для расчета на прочность стержней из пластичных материалов считаются одинаково приемлемыми III и IV теории прочности, однако IV теория лучше согласуется с экспериментальными данными.

Эквивалентное напряжение по III теории прочности (теории наибольших касательных напряжений) вычисляется по формуле:

$$\sigma_{\text{ЭКВ}}^{\text{III}} = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}. \quad (4.7)$$

Эквивалентное напряжение по IV (энергетической) теории прочности вычисляется по следующей формуле:

$$\sigma_{\text{ЭКВ}}^{\text{IV}} = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2}. \quad (4.8)$$



Алгоритм расчета на прочность при изгибе с кручением и растяжением-сжатием

1. Определение положения опасного сечения на элементе конструкции по эпюрам изгибающих моментов.

2. Определение положения опасных точек в опасном сечении. Для этого сначала нужно найти положение опасной точки только от действия изгиба с растяжением-сжатием (см. тему 3, алгоритм расчета на прочность, пункт 2).

♦ В случае круглого сечения именно эта точка является опасной и при добавлении кручения.

♦ В случае прямоугольного сечения наряду с угловой опасной точкой необходимо рассмотреть также еще две точки, расположенные по серединам длин сторон прямоугольника в той же четверти, что и найденная угловая точка. В каждой из трех точек нужно посчитать расчетные напряжения по соответствующим формулам (4.2)–(4.8). Наиболее опасной из трех точек будет та, в которой наибольшее расчетное напряжение.

3. Запись условия прочности для опасной точки и его решение согласно поставленной задаче.

В условии прочности наибольшее расчетное напряжение, возникающее в опасной точке опасного сечения, сравнивается с допускаемым напряжением:

$$\sigma_{\text{max}} \leq [\sigma].$$

Полученное неравенство решается согласно поставленной задаче.

Если выполняется проектный расчет, то напряжением от продольной силы N на первом этапе пренебрегают. После определения размеров сечения выполняют проверку на прочность для опасной точки с учетом продольной силы. Если перенапряжение не превышает 5 % от величины допускаемого напряжения, то принимают подобранные размеры. Если это условие не выполняется, то размеры сечения увеличивают и повторяют проверку.

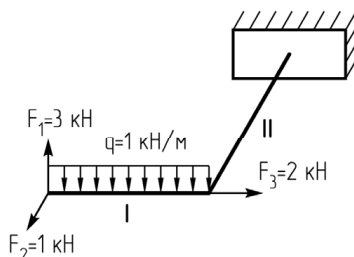


Пример решения задачи

Задача

Консольная рама из двух элементов одинаковой длины ($l = 2$ м) нагружена пространственной системой сил. Материал рамы – сталь марки Ст3 с допускаемым напряжением $[\sigma] = 160$ МПа.

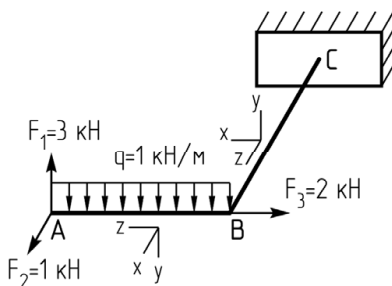
Требуется подобрать для рамы из условия прочности размеры двух видов поперечного сечения: круглого с диаметром d и прямоугольного с соотношением длин сторон $h/b = 2$. Определить, какое сечение является более эффективным с точки зрения расхода материала.



Решение

1. Построим эпюры продольной силы N , изгибающих M_x , M_y и крутящих моментов M_z .

Введем для каждого стержня систему координат. При этом ось z всегда направляется вдоль оси стержня, а оси x и y являются главными центральными осями поперечного сечения.



В качестве базы для построения эпюр используем конфигурацию рамы, которую вычерчиваем в любом удобном месте.

Элемент I (AB)

Продольная сила

В начале элемента (сечение A) нет силы, действующей вдоль оси z , поэтому $N = 0$.

Изгибающий момент в плоскости yz

В этой плоскости на элемент I действуют сосредоточенная сила F_1 и равномерно распределенная нагрузка q . Наличие распределенной нагрузки говорит о том, что эпюра изгибающих моментов M_x должна иметь вид параболы с выпуклостью, направленной вверх (навстречу действию нагрузки). Строим эту параболу по двум точкам.

В начале элемента отсутствует сосредоточенный внешний момент, поэтому $M_x^A = 0$.

Вычисляем величину изгибающего момента в конце элемента: $M_x^B = F_1 \cdot l - q \cdot l \cdot 0,5l = 3 \cdot 2 - 1 \cdot 2 \cdot 1 = 4 \text{ кН}\cdot\text{м}$ (сжаты верхние волокна).

Изгибающий момент в плоскости xz

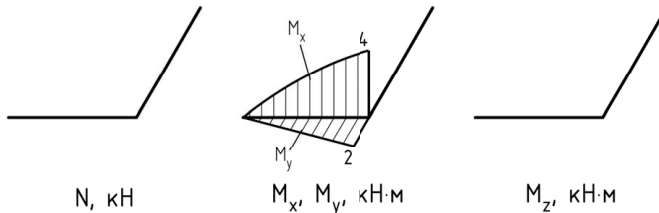
В этой плоскости на элемент I действует сосредоточенная сила F_2 . Так как распределенной нагрузки нет, эпюра изгибающих моментов M_y должна быть прямолинейной. Строим эту прямую по двум точкам.

В начале элемента отсутствует сосредоточенный внешний момент, поэтому $M_y^A = 0$.

Вычисляем величину изгибающего момента в конце элемента: $M_y^B = F_2 \cdot l = 1 \cdot 2 = 2 \text{ кН}\cdot\text{м}$ (сжаты передние волокна).

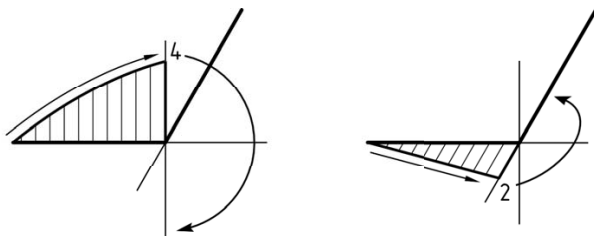
Крутящий момент

На элемент I не действуют моменты относительно оси z , поэтому $M_z = 0$.

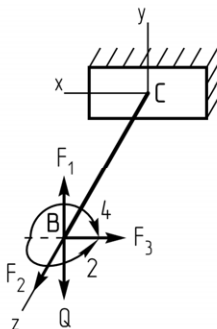


Элемент II (BC)

Отсечем и отбросим элемент I рамы. К оставшемуся элементу II в сечении B прикладываем силы, перенося их с элемента I (при этом распределенная нагрузка заменяется равнодействующей силой $Q = q \cdot l = 2 \text{ кН}$). Кроме того, в сечении B прикладываем моменты, полученные в конце элемента I. Их величину и направление устанавливаем по эпюрам M_x и M_y . Моменты действуют в той же плоскости, в которой находится соответствующая эпюра, а их направление как бы продолжает движение вдоль линии эпюры:



Получаем следующую расчетную схему для элемента II:



Продольная сила

Действующая вдоль оси z сила F_2 растягивает элемент II, поэтому возникающая продольная сила положительна и равна по величине $N = F_2 = 1 \text{ кН}$. На эпюре изображаем прямоугольник с ординатой 1 кН, откладывая ее от базы в любом направлении. В поле эпюры указываем знак «+».

Изгибающий момент в плоскости yz

В данной плоскости на элемент II действуют сосредоточенные силы F_1 и Q . По отсутствию распределенной нагрузки определяем, что эпюра M_x должна быть прямолинейной.

В начале элемента в данной плоскости нет сосредоточенного момента, поэтому $M_x^B = 0$.

В конце элемента: $M_x^C = F_1 \cdot l - Q \cdot l = 3 \cdot 2 - 2 \cdot 2 = 2 \text{ кН}\cdot\text{м}$ (сжаты верхние волокна).

Изгибающий момент в плоскости xz

В этой плоскости на элемент II действует сосредоточенный момент $2 \text{ кН}\cdot\text{м}$ и сила F_3 . Распределенная нагрузка отсутствует, поэтому эпюра M_y имеет вид прямой линии.

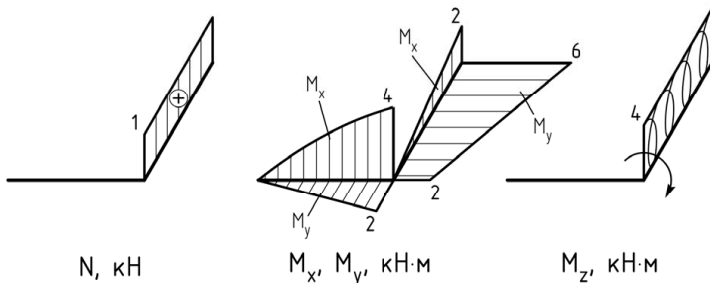
В начале элемента действует момент $2 \text{ кН}\cdot\text{м}$, сжимающий правые волокна, то есть $M_y^B = 2 \text{ кН}\cdot\text{м}$.

В конце элемента: $M_y^C = 2 + F_3 \cdot l = 2 + 2 \cdot 2 = 6 \text{ кН}\cdot\text{м}$ (сжаты правые волокна).

Крутящий момент

Действующий по часовой стрелке относительно оси z момент $4 \text{ кН}\cdot\text{м}$ приводит к возникновению в поперечных сечениях элемента II крутящего момента $M_z = 4 \text{ кН}\cdot\text{м}$.

В окончательном виде эпюры внутренних силовых факторов выглядят следующим образом:



2. Определение размеров круглого сечения

По эпюрам внутренних силовых факторов видно – элемент II является более нагруженным по сравнению с элементом I: здесь больше величины изгибающих моментов M_x и M_y и, кроме того, имеются крутящий момент M_z и продольная сила N . Поэтому для выполнения проектного расчета выбираем элемент II.

2.1. Расчет на прочность для элемента II (BC)

2.1.1. Определяем положение опасного сечения.

Из эпюр изгибающих моментов видно, что для элемента II наибольшие значения моментов M_x (2 кН·м) и M_y (6 кН·м) возникают в одном и том же сечении – сечении С. Оно и является опасным.

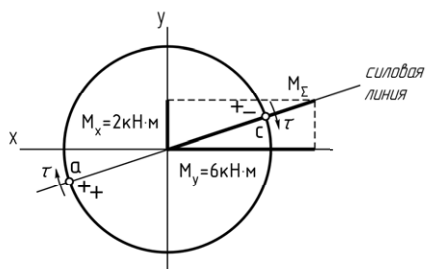
2.1.2. Определяем положение опасной точки в опасном сечении.

Сначала найдем положение силовой линии в опасном сечении. Для этого изобразим сечение и от его центра отложим ординаты изгибающих моментов M_x и M_y с соблюдением масштаба и в ту же сторону, что и на эпюрах. Геометрическая сумма ординат M_x и M_y дает ординату суммарного изгибающего момента M_Σ , которая и определяет положение силовой линии.

Опасными от действия изгиба будут точки пересечения силовой линии с контуром круга a и c . То, что ордината M_Σ отложена в сторону точки c , означает, что эта точка испытывает напряжение сжатия. Ставим рядом с ней знак «-». Противоположная ей точка a испытывает напряжение растяжения, и рядом с ней ставим знак «+».

Добавим около каждой точки по знаку «+» от действия растягивающей продольной силы N . В точке a получаем два знака «+», из чего делаем вывод, что эта точка опаснее, чем точка c .

Поскольку возникающие от крутящего момента M_z касательные напряжения τ в точках a и c одинаковы, именно точка a и является опасной при совместном действии изгиба с растяжением и кручением.



2.1.3. Составляем и решаем условие прочности для опасной точки.

По теореме Пифагора вычисляем величину суммарного изгибающего момента:

$$M_\Sigma = \sqrt{M_x^2 + M_y^2} = \sqrt{2^2 + 6^2} = 6,32 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Определяем напряжения в опасной точке, пренебрегая влиянием продольной силы N :

$$\sigma_a = \frac{M_\Sigma}{W_x} = \frac{32M_\Sigma}{\pi d^3} = \frac{32 \cdot 6,32}{3,14 \cdot d^3} = \frac{64,4 \text{ кН} \cdot \text{м}}{d^3};$$

$$\tau_a = \frac{M_z}{W_\rho} = \frac{16M_z}{\pi d^3} = \frac{16 \cdot 4}{3,14 \cdot d^3} = \frac{20,4 \text{ кН} \cdot \text{м}}{d^3}.$$

Чтобы оценить степень опасности состояния материала в точке a , вычисляем эквивалентное напряжение. Так как сталь Ст3 является пластичным материалом, то следует выбрать III или IV теорию предельного состояния. Воспользуемся более точной IV теорией:

$$\sigma_{\text{ЭКВа}}^{\text{IV}} = \sqrt{\sigma_a^2 + 3\tau_a^2} = \frac{\sqrt{64,4^2 + 3 \cdot 20,4^2}}{d^3} = \frac{73,5 \text{ кН} \cdot \text{м}}{d^3}.$$

Из условия прочности: $\sigma_{\text{ЭКВа}}^{\text{IV}} = \frac{73,5 \text{ кН} \cdot \text{м}}{d^3} \leq [\sigma]$ – выражаем и вычисляем минимально необходимое значение диаметра сечения:

$$[d] = \sqrt[3]{\frac{73,5 \text{ кН} \cdot \text{м}}{[\sigma]}} = \sqrt[3]{\frac{73,5 \text{ кН} \cdot \text{м}}{160 \cdot 10^3 \text{ кПа}}} = 0,077 \text{ м} = 77 \text{ мм}.$$

Выполним проверку на прочность для опасной точки с учетом продольной силы N :

$$\begin{aligned} \sigma_a &= \frac{M_\Sigma}{W_x} + \frac{|N|}{A} = \frac{64,4}{d^3} + \frac{4|N|}{\pi d^2} = \\ &= \frac{64,4 \cdot 10^3 \text{ Н} \cdot \text{м}}{(0,077 \text{ м})^3} + \frac{4 \cdot 1 \cdot 10^3 \text{ Н}}{3,14 \cdot (0,077 \text{ м})^2} = 141,3 \text{ МПа}, \end{aligned}$$

$$\tau_a = \frac{20,4 \text{ кН} \cdot \text{м}}{d^3} = \frac{20,4 \cdot 10^3 \text{ Н} \cdot \text{м}}{(0,077 \text{ м})^3} = 44,7 \text{ МПа},$$

$$\sigma_{\text{ЭКВа}}^{\text{IV}} = \sqrt{\sigma_a^2 + 3\tau_a^2} = \sqrt{141,3^2 + 3 \cdot 44,7^2} = 161,1 \text{ МПа}.$$

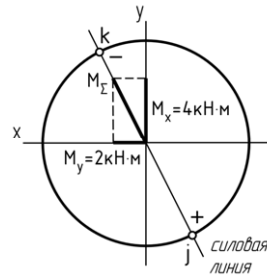
Это больше, чем допускаемое напряжение $[\sigma] = 160 \text{ МПа}$. Перегруз составляет $\frac{161,1 - 160}{160} \cdot 100\% = 0,7\%$, что не превышает 5%. Такой перегруз считается допустимым, и увеличивать диаметр сечения нет необходимости.

2.2. Проверка на прочность для элемента I (AB)

Проверим, можно ли использовать для элемента I сечение, подобранное для элемента II.

2.2.1. Из эпюр внутренних силовых факторов видно, что опасным для элемента I является сечение B, испытывающее прямой пространственный изгиб.

2.2.2. В плоскости круглого сечения откладываем ординаты изгибающих моментов M_x и M_y для сечения B по тем же направлениям, что и на эпюре. Вдоль ординаты суммарного момента проводим силовую линию. Так как для элемента I продольная сила N отсутствует, опасными являются точки пересечения силовой линии с контуром сечения j и k .



2.2.3. Вычисляем величину напряжения в опасных точках:

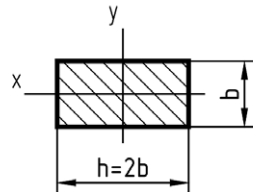
$$\begin{aligned} \sigma_{\max} = \sigma_j = -\sigma_k &= \frac{M_{\Sigma}}{W_x} = \frac{32 \cdot \sqrt{M_x^2 + M_y^2}}{\pi \cdot d^3} = \\ &= \frac{32 \cdot \sqrt{4^2 + 2^2} \cdot 10^3 \text{ Н} \cdot \text{м}}{3,14 \cdot (0,077 \text{ м})^3} = 99,8 \text{ МПа} \end{aligned}$$

Это меньше, чем допускаемое напряжение, так что увеличивать размеры сечения не нужно.

3. Определение размеров прямоугольного сечения

Определим предварительно рациональное расположение сечения и его геометрические характеристики.

Наибольший изгибающий момент для рамы в целом возникает на элементе II (6 кН·м). Ордината этого момента отложена на эпюре вдоль оси x элемента II, поэтому выгодно расположить прямоугольное сечение таким образом, чтобы его длинные стороны были параллельны этой оси (большей стороной вдоль большего изгибающего момента).



Выразим геометрические характеристики сечения через его характерный размер b . Так как $h = 2b$, то площадь сечения $A = b \cdot h = 2b^2$, а осевые моменты сопротивления для выбранного расположения сечения:

$$W_x = \frac{h \cdot b^2}{6} = \frac{2b \cdot b^2}{6} = 0,333b^3;$$

$$W_y = \frac{b \cdot h^2}{6} = \frac{b \cdot (2b)^2}{6} = 0,667b^3.$$

По табл. 4.5 прил. 4 определяем значения коэффициентов β и γ для отношения $h/b = 2$: $\beta = 0,493$, $\gamma = 0,795$.

Момент сопротивления сечения при кручении $W_k = \beta \cdot b^3 = 0,493b^3$.

Как и в случае круглого сечения, сначала подбираем размеры сечения для элемента II, а затем проверяем, подходит ли это сечение для элемента I.

3.1. Расчет на прочность для элемента II (BC)

3.1.1. Определяем положение опасного сечения.

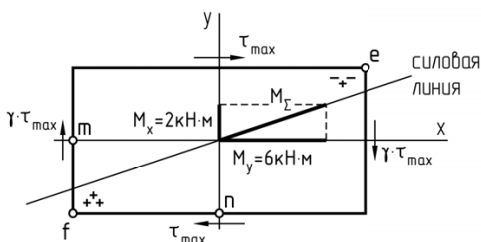
Как и в случае стержня круглого сечения, опасным является сечение C, поскольку здесь максимальны значения изгибающих моментов M_x и M_y .

3.1.2. Определяем положение опасных точек в опасном сечении.

Найдем опасные точки от действия изгиба. Для этого в плоскости сечения отложим ординаты внутренних изгибающих моментов M_x и M_y и установим положение силовой линии. Силовая линия совпадает с ординатой суммарного момента M_Σ . Опасными от изгиба будут вершины прямоугольника e и f , находящиеся в тех четвертях, через которые проходит силовая линия.

По положению ординаты суммарного изгибающего момента определяем, что в точке e возникает напряжение сжатия, ставим рядом с ней два знака «-». Точка f испытывает напряжение растяжения, и около неё ставим два знака «+». Добавив к каждой группе знаков знак «+» от действия растягивающей продольной силы N , видим, что более опасной является точка f .

Проставим также векторы касательных напряжений в точках по середине сторон прямоугольника. Они направлены вдоль контура сечения по часовой стрелке относительно его центра (так же, как и



крутящий момент M_z). Из этих четырех точек выберем для расчета две, находящиеся в той же четверти, что и точка f (точки m и n).

Опасной является одна из трех точек: f , m или n .

3.1.3. Составляем и решаем условие прочности.

Найдем расчетные напряжения в опасных точках, пренебрегая влиянием продольной силы N .

В угловой точке f :

$$\sigma_f = \frac{M_x}{W_x} + \frac{M_y}{W_y} = \frac{2}{0,333b^3} + \frac{6}{0,667b^3} = \frac{6,0}{b^3} + \frac{9,0}{b^3} = \frac{15 \text{ кН} \cdot \text{м}}{b^3}, \quad \tau_f = 0.$$

Точка n лежит на оси y , поэтому нормальное напряжение в ней возникает только от действия момента M_x :

$$\sigma_n = \frac{M_x}{W_x} = \frac{6 \text{ кН} \cdot \text{м}}{b^3}.$$

Касательное напряжение в точке n является максимальным, так как она находится посередине длинной стороны сечения:

$$\tau_n = \tau_{\max} = \frac{M_z}{W_k} = \frac{4 \text{ кН} \cdot \text{м}}{0,493b^3} = \frac{8,11 \text{ кН} \cdot \text{м}}{b^3}.$$

Эквивалентное напряжение для точки n (по IV теории предельного состояния):

$$\sigma_{\text{ЭКВn}}^{\text{IV}} = \sqrt{\sigma_n^2 + 3\tau_n^2} = \frac{\sqrt{6^2 + 3 \cdot 8,11^2}}{b^3} = \frac{15,3 \text{ кН} \cdot \text{м}}{b^3}.$$

В точке m нормальное напряжение определяется только моментом M_y (поскольку она лежит на оси x), а касательное напряжение равно произведению τ_{\max} на коэффициент γ (в силу того, что эта точка находится посередине короткой стороны сечения):

$$\sigma_m = \frac{M_y}{W_y} = \frac{9 \text{ кН} \cdot \text{м}}{b^3}, \quad \tau_m = \gamma \cdot \tau_{\max} = 0,795 \cdot \frac{8,11}{b^3} = \frac{6,45 \text{ кН} \cdot \text{м}}{b^3}.$$

Эквивалентное напряжение для точки m :

$$\sigma_{\text{ЭКВm}}^{\text{IV}} = \sqrt{\sigma_m^2 + 3\tau_m^2} = \frac{\sqrt{9^2 + 3 \cdot 6,45^2}}{b^3} = \frac{14,3 \text{ кН} \cdot \text{м}}{b^3}.$$

В условие прочности подставляем большее из рассчитанных напряжений:

$$\sigma_{\max} = \max\{\sigma_f, \sigma_{\text{ЭКВn}}^{\text{IV}}, \sigma_{\text{ЭКВm}}^{\text{IV}}\} = \frac{15,3 \text{ кН} \cdot \text{м}}{b^3} \leq [\sigma],$$

откуда находим минимально необходимые размеры сечения:

$$[b] = \sqrt[3]{\frac{15,3 \text{ кН} \cdot \text{м}}{[\sigma]}} = \sqrt[3]{\frac{15,3 \text{ кН} \cdot \text{м}}{160 \cdot 10^3 \text{ кПа}}} = 0,046 \text{ м} = 46 \text{ мм},$$

$$[h] = 2 \cdot b = 2 \cdot 46 \text{ мм} = 92 \text{ мм}.$$

Опасной является точка с максимальным расчетным напряжением – точка n . Выполняем для нее проверку на прочность с учетом продольной силы N .

$$\sigma_n = \frac{M_x}{W_x} + \frac{|N|}{A} = \frac{6 \text{ кН} \cdot \text{м}}{b^3} + \frac{1 \text{ кН}}{2b^2} = \frac{6 \cdot 10^3 \text{ Н} \cdot \text{м}}{(0,046 \text{ м})^3} + \frac{1 \cdot 10^3 \text{ Н}}{2 \cdot (0,046 \text{ м})^2} = 61,9 \text{ МПа},$$

$$\tau_n = \frac{8,11 \text{ кН} \cdot \text{м}}{b^3} = \frac{8,11 \cdot 10^3 \text{ Н} \cdot \text{м}}{(0,046 \text{ м})^3} = 83,3 \text{ МПа},$$

$$\sigma_{\text{ЭКВ}}^{\text{IV}} = \sqrt{\sigma_n^2 + 3\tau_n^2} = \sqrt{61,9^2 + 3 \cdot 83,3^2} = 157,0 \text{ МПа}.$$

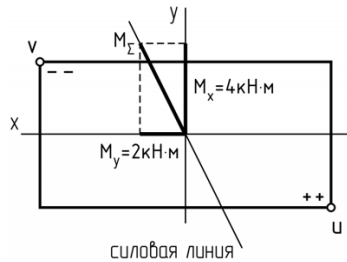
Полученное значение меньше допускаемого напряжения $[\sigma] = 160 \text{ МПа}$, так что условие прочности выполняется.

3.2. Проверка на прочность для элемента I (AB)

3.2.1. Для данного элемента опасным является сечение B . Вид деформации – косой изгиб.

3.2.2. Изображаем схему сечения.

От его центра тяжести откладываем в масштабе ординаты изгибающих моментов M_x и M_y в тех же направлениях, что и на эпюре для сечения B . Геометрическая сумма этих ординат дает ординату суммарного изгибающего момента, продлевая которую



получим силовую линию. Так как продольная сила N для элемента I отсутствует, опасными являются угловые точки в четвертях, через которые проходит силовая линия. Это точки u и v .

3.2.3. Вычисляем величину напряжения в опасных точках:

$$\begin{aligned} \sigma_{\max} = \sigma_u = -\sigma_v &= \frac{M_x}{W_x} + \frac{M_y}{W_y} = \frac{4 \text{ кН} \cdot \text{м}}{0,333b^3} + \frac{2 \text{ кН} \cdot \text{м}}{0,667b^3} = \frac{15,0 \text{ кН} \cdot \text{м}}{b^3} = \\ &= \frac{15 \cdot 10^3 \text{ Н} \cdot \text{м}}{(0,046 \text{ м})^3} = 154,1 \text{ МПа}. \end{aligned}$$

Это меньше, чем допустимое напряжение $[\sigma] = 160$ МПа, то есть условие прочности выполняется.

4. Сравним стержни круглого и прямоугольного сечения по металлозатратам. Для этого определим площади сечений:

$$A_{\text{круга}} = \frac{\pi \cdot d^2}{4} = \frac{3,14 \cdot (77 \text{ мм})^2}{4} = 4654 \text{ мм}^2,$$

$$A_{\text{прямо-ка}} = b \cdot h = 46 \text{ мм} \cdot 92 \text{ мм} = 4232 \text{ мм}^2,$$

то есть в данном случае прямоугольное сечение, обладая меньшей площадью, является более эффективным с точки зрения расхода материала.

Задача решена. 

 **Что делать, если условие прочности в пункте 2.2.3 или 3.2.3 не выполняется?**

В этом случае размеры сечения (d или b и h) нужно увеличить в $\sqrt[3]{\frac{\sigma_{\text{max}}}{[\sigma]}}$ раз и повторить проверку.



Потренируемся?

- Пройти тестовый тренинг ([прил. 1](#), [тесты к теме 4](#)).
- Решить задачу 1.2 из контрольной работы № 1 ([прил. 3](#)).

Тема 5. РАСЧЕТ СЖАТЫХ СТОЕК НА УСТОЙЧИВОСТЬ

Цель занятия — научиться рассчитывать для сжатых стоек при условии сохранения устойчивости их формы упругого равновесия размеры поперечного сечения заданной формы, величину допускаемой нагрузки, величину критической силы и коэффициент запаса.

Необходимые знания для достижения цели

1. Что такое устойчивость деформируемых упругих систем?
2. Что такое критическая сила, критическое напряжение и коэффициент запаса устойчивости?
3. Что такое коэффициент приведения длины?
4. Что такое гибкость упругой системы?
5. Как зависит критическое напряжение от гибкости упругой системы?
6. Что такое коэффициент продольного изгиба (коэффициент снижения основного допускаемого напряжения) и как с его использованием проводить расчет на устойчивость?

Теоретический материал



Что такое устойчивость деформируемых упругих систем?

Устойчивостью называется свойство деформируемых упругих систем сохранять заданную форму упругого равновесия под внешним воздействием.

В качестве деформируемой упругой системы мы будем рассматривать центрально сжатую стойку. Например:





Что такое критическая сила, критическое напряжение и коэффициент запаса устойчивости?

Величина силы, при которой происходит отклонение от первоначально заданной формы упругого равновесия, называется критической. Для центрально сжатых стоек это сила, при которой происходит отклонение от прямолинейной формы вследствие изгиба.

Формула Эйлера для критической силы выведена для случая упругого деформирования, т. е. для напряжений, не превышающих предела пропорциональности $\sigma_{\text{пц}}$ (справочная величина для данного материала стойки).

Формула Эйлера для критической силы имеет вид:

$$F_{\text{крит}} = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot I_{\text{min}}}{(\mu \cdot \ell)^2}.$$

Здесь I_{min} — момент инерции поперечного сечения стойки относительно оси наименьшей жесткости (т. е. оси, относительно которой изогнуть стойку легче); E — модуль упругости первого рода (модуль Юнга, справочная величина); $\mu \cdot \ell$ — приведенная длина стойки, равная произведению длины стойки на коэффициент приведения длины (см. ниже).

Напряжение, возникающее в материале стойки под действием критической силы, называется критическим напряжением. Формула Эйлера для критического напряжения имеет вид:

$$\sigma_{\text{крит}} = \frac{F_{\text{крит}}}{A},$$

где A — площадь поперечного сечения стойки.

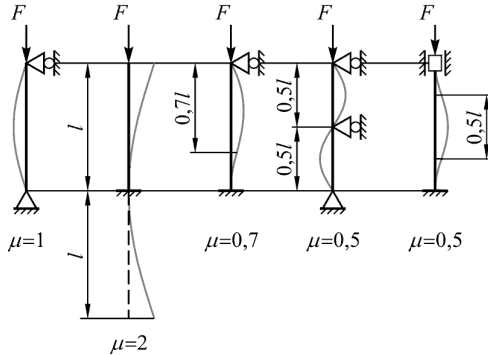
Коэффициентом запаса по устойчивости называется число, показывающее, во сколько раз величина критической силы отличается от действующей нагрузки:

$$n_{\text{у}} = \frac{F_{\text{крит}}}{F}.$$



Что такое коэффициент приведения длины?

Коэффициент приведения длины μ показывает, какую часть длины стойки с данными условиями закрепления занимает одна полуволна синусоиды при потере устойчивости прямолинейной формы. Например:



И так далее.



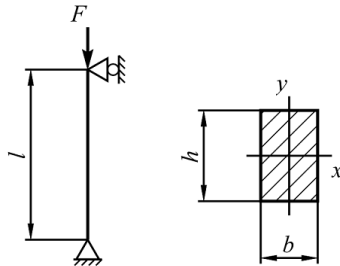
Что такое гибкость упругой системы?


Гибкостью называется величина, равная

$$\lambda = \frac{\mu \cdot \ell}{i_{\min}}$$

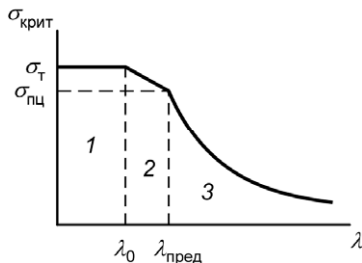
где $\mu \cdot \ell$ – приведенная длина стойки; $i_{\min} = \sqrt{\frac{I_{\min}}{A}}$ – радиус инерции поперечного сечения относительно оси наименьшей жесткости.

Например, если стойка прямоугольного сечения, то i_{\min} – это i_y :



 **Как зависит критическое напряжение от гибкости упругой системы?**

Для этого надо знать график зависимости $\sigma_{\text{крит}}(\lambda)$:



где 1 – зона малой гибкости; 2 – зона средней гибкости (зона Ясинского); 3 – зона большой гибкости (зона Эйлера).

В области большой гибкости ($\lambda \geq \lambda_{\text{пред}}$) критическое напряжение определяется по формуле Эйлера:


$$\sigma_{\text{крит}} = \frac{\pi^2}{\lambda^2} E.$$

В области средней гибкости ($\lambda_0 < \lambda < \lambda_{\text{пред}}$) критическое напряжение определяется по формуле Ф. Ясинского:

$$\sigma_{\text{крит}} = a - b \cdot \lambda \text{ (для сталей).}$$

Коэффициенты a , b , λ_0 и $\lambda_{\text{пред}}$ зависят от марки материала, их можно найти в справочных таблицах.

В области малой гибкости ($\lambda \leq \lambda_0$) расчет на устойчивость производить не имеет смысла, и расчет ведут на прочность при сжатии.

 **Что такое коэффициент продольного изгиба (коэффициент снижения основного допускаемого напряжения) и как с его использованием проводят расчет на устойчивость?**

Коэффициент продольного изгиба φ – это коэффициент снижения основного допускаемого напряжения материала при сжатии для расчета стержней на устойчивость, то есть:

$$[\sigma]_y = \varphi \cdot [\sigma]_c.$$

Коэффициент φ может принимать значения $0 < \varphi \leq 1$ и является табличной функцией, зависящей от гибкости стойки и марки материала. Из условия $[\sigma]_y = \varphi \cdot [\sigma]_c$ можно получить расчетные форму-

лы для определения размера поперечного сечения заданной формы при известной величине силы F :

$$[A] = \frac{F}{\varphi \cdot [\sigma]_C}$$

или для определения величины допускаемой нагрузки при известной величине размеров поперечного сечения:

$$[F] = \varphi \cdot A \cdot [\sigma]_C$$



Алгоритм расчета размеров сечения заданной формы с использованием коэффициента φ (проектировочный расчет), если известны величина нагрузки, условия закрепления и марка материала

Данный вид расчета проводится методом последовательных приближений (итерационным методом).

1. Выразить величину площади поперечного сечения A , радиуса инерции относительно оси наименьшей жесткости i_{\min} через характерный размер сечения.
2. На первой итерации $i = 1$ задать начальное значение коэффициента продольного изгиба. Обычно берут среднее из интервала его значений, т. е. $\varphi_i = 0,5$ или $0,6$.
3. При первом значении φ_i определить значение площади поперечного сечения:

$$[A]_i = \frac{F}{\varphi_i \cdot [\sigma]_C}.$$

4. Определить величину характерного размера сечения через полученную площадь и вычислить минимальный радиус инерции.
5. Определить максимальную гибкость стойки:

$$\lambda_{\max} = \frac{\mu \cdot \ell}{i_{\min}}.$$

6. По величине найденной гибкости и марке материала в справочной таблице найти уточненный коэффициент φ'_i .
7. Сравнить φ_i и φ'_i . Если расхождение между коэффициентами существенное (% расхождения $> 3\%$), то необходимо определить их среднеарифметическое значение $\frac{\varphi_i + \varphi'_i}{2}$, которое используют на следующей итерации $i = i + 1$, повторяя расчет с пункта 3.

8. Выход из итерационного процесса произвести либо при близком значении φ_i и φ'_i , либо по проценту расхождения между расчетным (действующим) напряжением в конце i -итерации $\sigma_i = \frac{F}{\varphi'_i \cdot [A]_i}$ и допускаемым напряжением $[\sigma]_c$, который не должен превышать 3 %:

$$\%_{\text{погр}} = \frac{\sigma_i - [\sigma]_c}{[\sigma]_c} \cdot 100\% \leq 3\%.$$



Алгоритм расчета величины допускаемой нагрузки с использованием коэффициента φ (расчет на грузоподъемность), если известны геометрические размеры стойки, марка материала и способ закрепления

1. Определить максимальную гибкость стойки по формуле

$$\lambda_{\max} = \frac{\mu \cdot \ell}{i_{\min}},$$

предварительно вычислив значение радиуса инерции с использованием формулы

$$i_{\min} = \sqrt{\frac{I_{\min}}{A}}$$

или, если сечение представляет собой прокатный профиль, взяв его значение из таблиц сортамента.

2. По таблице коэффициента φ в соответствии с маркой материала и величиной гибкости выписать значение коэффициента.
3. Применить формулу $[F] = \varphi \cdot A \cdot [\sigma]_c$.
4. Выписать из справочной таблицы (если нет в условии задачи) значения λ_0 и $\lambda_{\text{пред}}$ и путем сравнения расчетной величины λ_{\max} с λ_0 и $\lambda_{\text{пред}}$ определить, к какой зоне графика $\sigma_{\text{крит}}(\lambda)$ относится данная стойка.
5. Если $\lambda_{\max} \geq \lambda_{\text{пред}}$, величину критической силы определяем по формуле Эйлера

$$F_{\text{крит}} = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot I_{\min}}{(\mu \cdot \ell)^2}.$$

6. Если $\lambda_0 < \lambda_{\max} \leq \lambda_{\text{пред}}$, то величину критической силы рассчитываем по формуле Ясинского

$$F_{\text{крит}} = A \cdot \sigma_{\text{крит}} = A \cdot (a - b \cdot \lambda_{\max}),$$

для которой коэффициенты a и b берем из справочных таблиц в соответствии с маркой материала.

7. Если $\lambda_{\max} \leq \lambda_0$, то значение критической силы принимает смысл значения силы, при которой начинаются массовые пластические деформации, т. е. $\sigma_{\text{крит}}$ достигает уровня предела текучести σ_T , а $F_{\text{крит}} = F_T = \sigma_T \cdot A$.



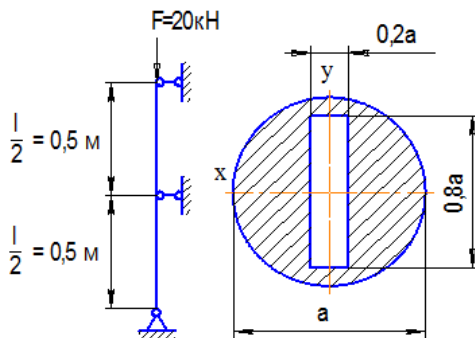
Примеры решения задач

Задача 1

Стойка длиной $l = 1$ м с шарнирно опертыми концами и промежуточной шарнирной опорой посередине сжимается силой $F = 20$ кН.

Требуется:

- во-первых – подобрать величину размера « a » поперечного сечения стойки с использованием коэффициента продольного изгиба φ , обеспечив ее устойчивость, если допускаемое напряжение на сжатие $[\sigma]_c = 160$ МПа;
- во-вторых – для спроектированной стойки определить величину критической силы и коэффициент запаса устойчивости.



Решение

Во-первых – определим допускаемую величину характерного размера поперечного сечения стойки.

Данная задача относится к классу проектировочных и решается методом последовательных приближений.

1. Выразим необходимые для расчета геометрические характеристики поперечного сечения через характерный размер « a ». Моменты инерции:

$$I_x = I_x^{\text{круга}} - I_x^{\text{прямо-ка}} = \frac{\pi \cdot a^4}{64} - \frac{(0,2a) \cdot (0,8a)^3}{12} =$$

$$= 0,0490625a^4 - 0,00853a^4 = 0,0404a^4;$$

$$I_y = I_y^{\text{круга}} - I_y^{\text{прямо-ка}} = \frac{\pi \cdot a^4}{64} - \frac{(0,8a) \cdot (0,2a)^3}{12} =$$

$$= 0,0490625a^4 - 0,0005333a^4 = 0,0485a^4.$$

Из этих результатов видно, что ось x является осью наименьшей жесткости, и поэтому выразим через « a » радиус инерции относительно оси x :

$$i_x = \sqrt{\frac{I_x}{A}},$$

где A – площадь поперечного сечения:

$$A = A^{\text{круга}} - A^{\text{прямо-ка}} = \frac{\pi \cdot a^2}{4} - 0,2a \cdot 0,8a = 0,785a^2 - 0,16a^2 = 0,625a^2.$$

Тогда

$$i_x = \sqrt{\frac{I_x}{A}} = \sqrt{\frac{0,0404a^4}{0,625a^2}} = 0,254a.$$

2. Итерация № 1. Зададим первое значение коэффициента продольного изгиба $\varphi_1 = 0,5$.

3. Определим допускаемую величину площади поперечного сечения

$$[A]_1 = \frac{F}{\varphi_1 \cdot [\sigma]_C} = \frac{20 \text{ кН}}{0,5 \cdot 160 \cdot 10^3 \text{ кН/м}^2} = 0,25 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2.$$

4. Определим характерный размер

$$[a_1] = \sqrt{\frac{[A]_1}{0,625}} = \sqrt{\frac{0,25 \cdot 10^{-3}}{0,625}} = 2 \cdot 10^{-2} \text{ м}$$

и минимальный радиус инерции

$$i_{\min_1} = i_{x_1} = 0,254a = 0,508 \cdot 10^{-2} \text{ м}.$$

5. Определим максимальную гибкость стойки

$$\lambda_{\max_1} = \frac{\mu \cdot \ell}{i_{\min_1}} = \frac{0,5 \cdot 1 \text{ м}}{0,508 \cdot 10^{-2} \text{ м}} = 98,4.$$

6. Из таблицы коэффициентов продольного изгиба (прил. 4, табл. 4.6) по найденной гибкости и марке материала выпишем уточ-

ненный коэффициент φ'_1 . Полученная гибкость попала по таблице в интервал значений 90–100. Фрагмент таблицы для Ст3:

λ	φ
90	0,69
100	0,6

Для определения значения φ'_1 проведем линейную интерполяцию:

$$\varphi'_1 = 0,69 - \frac{0,69 - 0,6}{10} \cdot 8,4 = 0,6144.$$

7. Сравним значения φ_1 и φ'_1 , т. е. значение 0,5 и 0,6144. Расхождение в десятых долях считается существенным и составляет

$$\%_{\text{расхождения}} = \frac{0,6144 - 0,5}{0,6144} \cdot 100\% = 18,6\%,$$

что требует продолжения расчета (приближения). Для этого подготовим для следующей итерации коэффициент

$$\varphi_2 = \frac{\varphi'_1 + \varphi_1}{2} = \frac{0,6144 + 0,5}{2} = 0,5572$$

и перейдем к расчету на второй итерации, начиная с пункта 3 алгоритма.

Итерация № 2

$$[A]_2 = \frac{F}{\varphi_2 \cdot [\sigma]_C} = \frac{20 \text{ кН}}{0,5572 \cdot 160 \cdot 10^3 \text{ кН/м}^2} = 0,224 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2;$$

$$[a]_2 = \sqrt{\frac{[A]_2}{0,625}} = \sqrt{\frac{0,224 \cdot 10^{-3}}{0,625}} = 1,89 \cdot 10^{-2} \text{ м};$$

$$i_{\min_2} = i_{x_2} = 0,254 \cdot [a]_2 = 0,48 \cdot 10^{-2} \text{ м};$$

$$\lambda_{\max_2} = \frac{\mu \cdot \ell}{i_{\min_2}} = \frac{0,5 \cdot 1 \text{ м}}{0,48 \cdot 10^{-2} \text{ м}} = 104.$$

Гибкость попала в интервал значений 100–110. Фрагмент таблицы для этого интервала (прил. 4, табл. 4.6):

λ	φ
100	0,6
110	0,52

И вновь проведем линейную интерполяцию для определения φ'_2 :

$$\varphi'_2 = 0,6 - \frac{0,6 - 0,52}{10} \cdot 4 = 0,568.$$

Оценим % расхождения между φ'_2 и φ_2 :

$$\%_{\text{расхождения}} = \frac{0,568 - 0,5572}{0,568} \cdot 100\% = 1,9\% < 3\%,$$

и это уже небольшое расхождение, позволяющее выйти из итерационного процесса.

8. Определим процент погрешности между расчетным (действующим) напряжением в конце 2-й итерации

$$\sigma_2 = \frac{F}{\varphi'_2 \cdot [A]_2} = \frac{20 \text{ кН}}{0,568 \cdot 0,224 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2} = 157,2 \text{ МПа}$$

и допускаемым напряжением $[\sigma]$:

$$\%_{\text{погр}} = \frac{\sigma_2 - [\sigma]_c}{[\sigma]_c} \cdot 100\% = \frac{|157,2 - 160|}{160} \cdot 100\% = 1,75\% < 3\%,$$

т. е. подбор размера поперечного сечения стойки закончен.

Во-вторых – определим величину критической силы и коэффициент запаса по устойчивости.

Для определения величины критической силы узнаем, к какому типу относится данная стойка: малой, средней или большой гибкости. С этой целью сравним значение гибкости на последней итерации $\lambda_{\text{max}_2} = 104$ с предельными значениями для Ст3 $\lambda_0 = 61$ и $\lambda_{\text{пред}} = 100$. Так как $\lambda_{\text{max}_2} = 104 > \lambda_{\text{пред}} = 100$, значит, спроектированная стойка обладает большой гибкостью, и расчет критической силы произведем по формуле Эйлера:

$$F_{\text{крит}} = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot I_{\text{min}}}{(\mu \cdot \ell)^2} = \frac{3,14^2 \cdot 2 \times 10^8 \text{ кН/м}^2 \cdot 0,0404 \cdot [a]_2^4}{(0,5 \cdot 1 \text{ м})^2} = 40,66 \text{ кН}.$$

Коэффициент запаса по устойчивости

$$n_{\text{У}} = \frac{F_{\text{крит}}}{F} = \frac{40,66 \text{ кН}}{20 \text{ кН}} = 2,033.$$

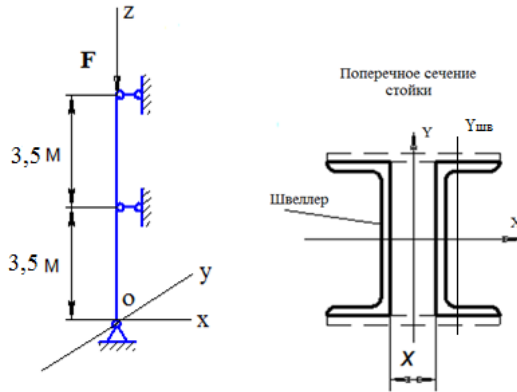
Задача решена. 

Задача 2

Стойка, имеющая поперечное сечение в виде двух швеллеров № 12, нагружена осевой сжимающей нагрузкой F . Материал стойки Ст2 с $[\sigma] = 140$ МПа. Условия закрепления одинаковы в плоскостях xoz и yoz .

Требуется определить:

- 1) расстояние « X » между ветвями стойки, обеспечивающее равноустойчивость конструкции;
- 2) величину допускаемой нагрузки, используя коэффициент продольного изгиба;
- 3) величину критической силы и коэффициент запаса устойчивости.

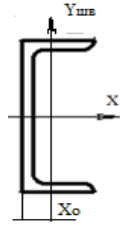


Решение

1. Для определения расстояния X , при котором стойка будет равноустойчивой, запишем условие равноустойчивости: $\lambda_x = \lambda_y$. Из равенства гибкостей следует, что

$$\frac{\mu \ell}{i_x} = \frac{\mu \ell}{i_y} \rightarrow i_x = i_y \rightarrow \sqrt{\frac{I_x}{A}} = \sqrt{\frac{I_y}{A}} \rightarrow I_x = I_y,$$

т. е. приводит в данном случае к равенству моментов инерции. Выпишем из таблицы сортамента прокатных профилей моменты инерции швеллера № 12 относительно его главных центральных осей, площадь и расстояние x_0 (прил. 4, табл. 4.2):



$$\begin{aligned}
 I_x &= 304 \text{ см}^4, \\
 I_{y_{шв}} &= 31,2 \text{ см}^4, \\
 A_{шв} &= 13,3 \text{ см}^2, \\
 x_0 &= 1,54 \text{ см}.
 \end{aligned}$$

Так как ось $Y_{шв}$ отстоит от оси Y на расстояние $\frac{X}{2} + x_0$, то момент инерции

$$I_y = I_{y_{шв}} + \left(\frac{X}{2} + x_0 \right)^2 \cdot A_{шв}.$$

Из условия равноустойчивости $I_x = I_y$ определим расстояние X :

$$\begin{aligned}
 304 &= 31,2 + \left(\frac{X}{2} + 1,54 \right)^2 \cdot 13,2 \rightarrow \left(\frac{X}{2} + 1,54 \right) = \sqrt{\frac{304 - 31,2}{13,2}} = 4,53 \text{ см} \rightarrow \\
 &\rightarrow X = 2(4,53 - 1,54) = 5,98 \text{ см}.
 \end{aligned}$$

2. Определим величину допускаемой нагрузки. Для этого вычислим гибкость стойки. Так как конструкция равноустойчива, то $\lambda_x = \lambda_y$. Определим $\lambda_x = \frac{\mu \ell}{i_x}$, где μ – коэффициент приведения длины. Для данных условий закрепления $\mu = 0,5$. Радиус инерции из таблицы сортамента для швеллера № 12 равен: $i_x = 4,78$ см. Тогда

$$\lambda_x = \frac{0,5 \cdot 700 \text{ см}}{4,78 \text{ см}} = 73,22.$$

По таблице коэффициентов продольного изгиба (прил. 4, табл. 4.6) определим величину φ в соответствии с гибкостью и маркой материала. Гибкость попала в интервал значений 70–80. Фрагмент таблицы для этого интервала:

λ	φ
70	0,81
80	0,75

Определим коэффициент φ для значения гибкости $\lambda_x = 73,22$ путем линейной интерполяции:

$$\varphi = 0,81 - \frac{0,81 - 0,75}{10} \cdot 3,22 \approx 0,79.$$

Применим формулу для вычисления допустимой нагрузки:

$$[F] = \varphi \cdot A \cdot [\sigma]_C = 0,79 \cdot 2 \cdot 13,3 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2 \cdot 140 \cdot 10^3 \text{ кН/м}^2 = 294,2 \text{ кН}.$$

3. Определим величину критической силы. Для этого из справочника выпишем значения λ_0 и $\lambda_{\text{пред}}$ для Ст2: $\lambda_0 = 60$, $\lambda_{\text{пред}} = 105$. Гибкость стойки $\lambda_x = 73,22$ попала в интервал между λ_0 и $\lambda_{\text{пред}}$, следовательно, стойка относится к области средней гибкости. Величина критической силы рассчитывается по формуле Ясинского:

$$F_{\text{крит}} = A \cdot \sigma_{\text{крит}} = A \cdot (a - b \cdot \lambda_{\text{max}}).$$

Коэффициенты a и b – справочные величины. Для Ст2 $a = 245$ МПа, $b = 0,67$ МПа. Тогда

$$\begin{aligned} F_{\text{крит}} &= A \cdot \sigma_{\text{крит}} = A \cdot (a - b \cdot \lambda_{\text{max}}) = \\ &= 2 \cdot 13,3 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2 \cdot (245 \text{ МПа} - 0,67 \text{ МПа} \cdot 73,22) \cdot 10^3 = 521,2 \text{ кН}. \end{aligned}$$

Определим коэффициент запаса устойчивости:

$$n_y = \frac{F_{\text{крит}}}{[F]} = \frac{521,2}{294,2} = 1,77.$$

Задача решена. 



Потренируемся?

- Пройти тестовый тренинг (прил. 1, тесты к теме 5).
- Решить задачу 2.1 из контрольной работы № 2 (прил. 3).

Тема 6. РАСЧЕТ НА УСТАЛОСТНУЮ ПРОЧНОСТЬ

Цели занятия – научиться рассчитывать основные характеристики циклов переменных напряжений и коэффициенты запаса усталостной прочности как для отдельных типов напряжений (нормальных и касательных), так и при их совместном действии; научиться давать вероятностную оценку действующего механизма разрушения.

Необходимые знания для достижения цели

1. Что такое усталость и выносливость материала?
2. Какие существуют характеристики циклов переменных напряжений и как они определяются?
3. Что такое предел выносливости?
4. В чем заключается особенность оценки усталостной прочности?
5. Что такое диаграмма предельных амплитуд и каково ее назначение?
6. Что такое коэффициент запаса усталостной прочности и как он определяется по нормальным и касательным напряжениям и при их совместном действии?

Теоретический материал



Что такое усталость и выносливость материала?

Усталостью называется процесс постепенного накопления повреждений в материале элемента конструкции при воздействии повторно-переменных нагрузок, приводящий к возникновению усталостных трещин и разрушению.

Выносливость – это способность материала сопротивляться усталостному разрушению.



Какие существуют характеристики циклов переменных напряжений и как они определяются?

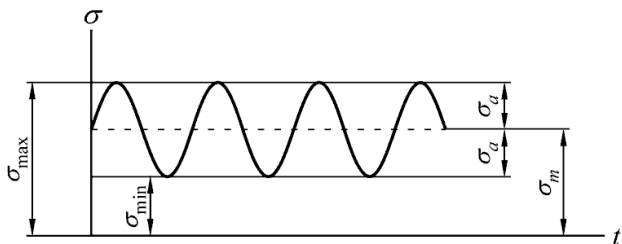
Цикл напряжений принято изображать в виде синусоиды.

К основным характеристикам цикла переменного напряжения относятся:

- 1) максимальное σ_{\max} и минимальное σ_{\min} напряжение цикла;
- 2) среднее напряжение цикла $\sigma_m = \frac{\sigma_{\max} + \sigma_{\min}}{2}$;

3) амплитудное напряжение цикла $\sigma_a = \frac{\sigma_{\max} - \sigma_{\min}}{2}$;

4) коэффициент асимметрии $R_\sigma = \frac{\sigma_{\min}}{\sigma_{\max}}$. Если $\sigma_{\min} = -\sigma_{\max}$, то $R_\sigma = -1$ и цикл называется *симметричным*.



Что такое предел выносливости?

Предел выносливости – это наибольшее значение напряжения, при котором образцы не разрушаются при любом, сколь угодно большом числе циклов нагружения; входит в число механических характеристик материала.

В большинстве случаев предел выносливости определяется при воздействии симметричного цикла напряжения и обозначается σ_{-1} .

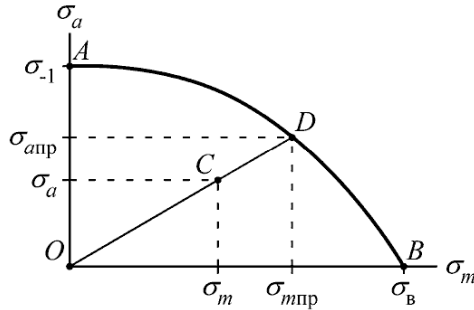
В чем заключается особенность оценки усталостной прочности?

Оценка усталостной прочности заключается в определении коэффициента запаса усталостной прочности n_y и последующем его сравнении с нормативным значением $[n_y]$:

$$n_y \geq [n_y].$$

Что такое диаграмма предельных амплитуд и каково ее название?

Диаграмма предельных амплитуд – это график, построенный в координатах $\sigma_a - \sigma_m$ на основании экспериментальных данных, полученных при разных значениях коэффициента асимметрии путем проведения усталостных испытаний. Таким образом, для каждого значения среднего напряжения величина амплитудного напряжения на графике является предельной, так как $\sigma_m + \sigma_a = \sigma_R$, где σ_R – предел выносливости для данного цикла с коэффициентом асимметрии R_σ .



И зачем нам эта диаграмма 🤔?

Эта диаграмма служит для определения допустимой области значений режимов нагружения детали из данной марки материала (область под кривой предельных амплитуд АВ) и определения коэффициента запаса усталостной прочности 🧐.

🧐 **Что такое коэффициент запаса усталостной прочности и как он определяется по нормальным и касательным напряжениям и при их совместном действии?**

Коэффициент запаса усталостной прочности определяется из диаграммы предельных амплитуд как отношение отрезков OD к OC, где точка C – рабочая точка цикла – наносится на основании характеристик рабочего цикла детали σ_a и σ_m . Коэффициенты запаса усталостной прочности при изгибе (по нормальным напряжениям σ) и при кручении (по касательным напряжениям τ) с учетом факторов, влияющих на предел выносливости детали, таких как:

- 1) наличие конструктивных концентраторов напряжений в виде галтелей, шпоночных канавок, отверстий, проточек и т. д.;
- 2) качество обработки поверхности детали;
- 3) размер детали (масштабный фактор, учитывающий различие в размерах образца и детали),

определяются по следующим формулам соответственно:

$$n_{\sigma} = \frac{\sigma_{-1}}{\sigma_a \cdot \frac{K_{\sigma}}{K_F \cdot K_{d\sigma}} + \sigma_m \cdot \Psi_{\sigma}} \quad \text{и} \quad n_{\tau} = \frac{\tau_{-1}}{\tau_a \cdot \frac{K_{\tau}}{K_F \cdot K_{d\tau}} + \tau_m \cdot \Psi_{\tau}},$$

где σ_{-1} и τ_{-1} – пределы выносливости по нормальным и касательным напряжениям (справочные величины для данной марки материала);

K_σ и K_τ – коэффициенты, учитывающие концентрацию напряжений соответственно по нормальным и касательным напряжениям, зависят от типа концентратора, его размеров и марки материала (справочные данные); K_F – коэффициент, учитывающий качество обработки поверхности детали (справочная величина); $K_{d\sigma}$ и $K_{d\tau}$ – коэффициенты, учитывающие масштабный фактор соответственно по нормальным и касательным напряжениям (справочные данные); ψ_σ и ψ_τ – коэффициенты, учитывающие чувствительность материала к асимметрии цикла нагружения соответственно по нормальным и касательным напряжениям (справочные данные).

Если исследуемая деталь испытывает совместное действие изгиба и кручения, то коэффициент запаса усталостной прочности определяется по формуле Гафа – Полларда, куда входят коэффициенты запаса, определенные отдельно по касательным и нормальным напряжениям:

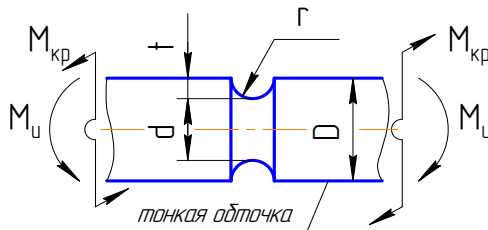
$$n_y = \frac{n_\sigma \cdot n_\tau}{\sqrt{n_\sigma^2 + n_\tau^2}}.$$



Пример расчета

Задача

Участок вала с концентратором напряжений в виде выточки подвергается совместному действию изгиба и кручения. Значение изгибающего момента изменяется в диапазоне: $M_{и}^{\max} = 0,8$ кН·м, $M_{и}^{\min} = -0,8$ кН·м, крутящего момента – в диапазоне: $M_{кр}^{\max} = 2$ кН·м, $M_{кр}^{\min} = 0$. Значения геометрических размеров вала: $D = 55$ мм, $d = 50$ мм, $r = 2$ мм, $t = \frac{D-d}{2}$. Вал изготовлен из стали 40ХН с механическими характеристиками: $\sigma_B = 1000$ МПа, $\sigma_T = 800$ МПа, $\sigma_{-1} = 400$ МПа, $\tau_T = 390$ МПа, $\tau_{-1} = 240$ МПа.



Требуется:

- 1) определить характеристики циклов нормальных и касательных напряжений, возникающих в опасном сечении участка вала;
- 2) определить по справочным таблицам коэффициенты, влияющие на предел выносливости по нормальным и касательным напряжениям;
- 3) определить коэффициенты запаса усталостной прочности по нормальным и касательным напряжениям, используя соответствующие формулы;
- 4) определить коэффициент запаса усталостной прочности по формуле Гафа – Полларда и коэффициент запаса по текучести. Сделать выводы о наиболее вероятном механизме разрушения.

Решение

1. Определим характеристики циклов нормальных и касательных напряжений, возникающих в опасном сечении участка вала, которым является сечение выточки диаметром d .

Характеристики цикла нормальных напряжений:

$$R_{\sigma} = \frac{M_{и}^{\min}}{M_{и}^{\max}} = \frac{-0,8 \text{ кНм}}{0,8 \text{ кНм}} = -1 \rightarrow \text{симметричный тип цикла};$$

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{и}^{\max}}{W_x} = \frac{M_{и}^{\max} \cdot 32}{\pi \cdot d^3} = \frac{0,8 \text{ кНм} \cdot 32}{3,14 \cdot 5^3 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3} = 65,2 \text{ МПа};$$

$$\sigma_{\min} = R_{\sigma} \sigma_{\max} = -65,2 \text{ МПа};$$

$$\sigma_a = \frac{\sigma_{\max} - \sigma_{\min}}{2} = 65,2 \text{ МПа}; \quad \sigma_m = \frac{\sigma_{\max} + \sigma_{\min}}{2} = 0.$$

Характеристики цикла касательных напряжений:

$$R_{\tau} = \frac{\tau_{\max}}{\tau_{\min}} = \frac{M_{кр}^{\min}}{M_{кр}^{\max}} = \frac{0}{2 \text{ кНм}} = 0 \rightarrow \text{отнулевой, или пульсационный, тип цикла};$$

$$\tau_{\max} = \frac{M_{кр}^{\max}}{W_{\rho}} = \frac{M_{кр}^{\max} \cdot 16}{\pi \cdot d^3} = \frac{2 \text{ кНм} \cdot 16}{3,14 \cdot 5^3 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3} = 81,5 \text{ МПа};$$

$$\tau_{\min} = R_{\tau} \tau_{\max} = 0;$$

$$\tau_a = \tau_m = \frac{\tau_{\max}}{2} = 40,75 \text{ МПа}.$$

2. Определим по справочным таблицам коэффициенты, влияющие на предел выносливости по нормальным и касательным напряжениям (прил. 4, табл. 4.10, 4.11, 4.14, 4.15 и 4.16).

$$K_{\sigma} = 2,26 \quad K_{\tau} = 1,48 \quad \left(\frac{D}{d} = 1,1; \frac{r}{d} = 0,04; \frac{t}{r} = 1,25 \right);$$

$$K_{d\sigma} = 0,7 \quad K_{d\tau} = 0,7 \quad K_F = 0,81 \quad \psi_{\sigma} = 0,1 \quad \psi_{\tau} = 0,05.$$

3. Определим коэффициенты запаса усталостной прочности по нормальным и касательным напряжениям, используя соответствующие формулы.

$$n_{\sigma} = \frac{\sigma_{-1}}{\frac{K_{\sigma}}{K_{d\sigma}K_F}\sigma_a + \psi_{\sigma}\sigma_m} = \frac{400 \text{ МПа}}{\frac{2,26}{0,7 \cdot 0,81} \cdot 65,2 \text{ МПа} + 0,1 \cdot 0} = 1,54;$$

$$n_{\tau} = \frac{\tau_{-1}}{\frac{K_{\tau}}{K_{d\tau}K_F}\tau_a + \psi_{\tau}\tau_m} = \frac{240 \text{ МПа}}{\frac{1,48}{0,7 \cdot 0,81} \cdot 40,75 \text{ МПа} + 0,05 \cdot 40,75 \text{ МПа}} = 2,21.$$

4. Определим коэффициент запаса усталостной прочности по формуле Гафа – Полларда и коэффициент запаса по текучести, на основании которых сделаем выводы о наиболее вероятном механизме разрушения.

Поскольку вал работает при повторно-переменном изгибе и кручении, то оценка запаса усталостной прочности производится по формуле Гафа – Полларда:

$$n_y = \frac{n_{\sigma} \cdot n_{\tau}}{\sqrt{(n_{\sigma}^2 + n_{\tau}^2)}} = \frac{1,54 \cdot 2,21}{\sqrt{(1,54^2 + 2,21^2)}} = 1,26.$$

Коэффициент запаса по текучести определим по формуле:

$$n_T = \frac{\sigma_T}{\sigma_{\text{ЭКВ}}^{\text{max}}},$$

где $\sigma_{\text{ЭКВ}}^{\text{max}}$ – максимальное эквивалентное напряжение определим по четвертой теории предельного состояния:


$$\sigma_{\text{ЭКВ}}^{\text{max IV}} = \sqrt{\sigma_{\text{max}}^2 + 3 \cdot \tau_{\text{max}}^2} = \sqrt{65,2^2 + 3 \cdot 81,5^2} = 155,49 \text{ МПа},$$

$$\text{тогда } n_T = \frac{\sigma_T}{\sigma_{\text{ЭКВ}}^{\text{max IV}}} = \frac{800 \text{ МПа}}{155,49 \text{ МПа}} = 5,14.$$

Сравнивая полученные коэффициенты:

$$n_y = 1,26 < n_T = 5,14,$$

можно сделать вывод, что в материале рассматриваемого вала при данных режимах нагружения механизм развития усталостных трещин работает интенсивнее, чем механизм развития пластической деформации.

Задача решена. 



Потренируемся?

- Пройти тестовый тренинг ([прил. 1](#), [тесты к теме 6](#)).
- Решить задачу 2.2 из контрольной работы № 2 ([прил. 3](#)).

Тема 7. РАСЧЕТ НА ПРОЧНОСТЬ ПОДМОТОРНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ С ОДНОЙ СТЕПЕНЬЮ СВОБОДЫ В УСЛОВИЯХ ВЫНУЖДЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ

Цель занятия — научиться рассчитывать на прочность элементы упругих конструкций с одной степенью свободы в условиях вынужденных колебаний.

Необходимые знания для достижения цели

1. Понятие и основные виды динамического нагружения.
2. Общий подход к расчету на прочность и жесткость при динамическом нагружении.
3. Основные сведения из теории колебаний:
 - понятие числа степеней свободы упругой системы;
 - классификация механических колебаний по причинам, их вызывающим, и по виду деформации;
 - коэффициент динамичности для вынужденных колебаний без учета сил сопротивления;
 - понятие резонанса.
4. Алгоритм расчета на прочность при вынужденных колебаниях упругих систем с одной степенью свободы.

Теоретический материал



Какое нагружение называется динамическим?

Эффект приложения нагрузки в большой степени зависит от скорости её изменения во времени. В связи с этим принято различать *статические* и *динамические* нагрузки.

Нагрузка постоянная или очень медленно изменяющаяся во времени, когда скоростями и ускорениями изменения нагрузки можно пренебречь, называется *статической*. Расчет на прочность и жесткость при статическом нагружении был изучен в предыдущих разделах дисциплины «Сопротивление материалов».

Нагрузку, быстро изменяющуюся во времени, называют *динамической*.

К основным видам динамического нагружения относятся следующие: инерционное действие нагрузки (при равноускоренном движении), вибрационное действие нагрузки (при колебательных движениях), ударное действие нагрузки.

Понятно, что изменение напряжения от динамического нагружения сильнее, чем от соответствующего статического. Простой пример: сравним два состояния подмоторной рамы с установленным на ней автомобильным двигателем — когда двигатель выключен и когда он включен. Очевидно, что во втором случае усилия, напряжения и деформации, возникающие в материале рамы, будут гораздо больше, чем в первом.

 **Как рассчитать на прочность и жесткость конструкцию, испытывающую динамическое действие нагрузки?**

Какой бы вид динамического нагружения ни испытывала конструкция, подход к расчету на прочность и жесткость в данном случае единый.

♦ Данный вид динамической нагрузки заменяют соответствующей статической (прикладывая в той же точке, в том же направлении, но статически) и производят статический расчет на прочность и жесткость.

♦ Учитывая вид динамического нагружения и используя соответствующие законы физики и теоретической механики, определяют *коэффициент динамичности* — число, показывающее, во сколько раз значение некоторого динамического фактора (усилия, напряжения или перемещения) больше соответствующего статического значения этого фактора.

♦ Записывают условие прочности и условие жесткости с учетом статического расчета и найденного коэффициента динамичности:
— условие прочности

$$\sigma_{д\ max} = K_d \cdot \sigma_{ст\ max} \leq [\sigma];$$

— условие жесткости

$$\delta_{д\ max} = K_d \cdot \delta_{ст\ max} \leq [\delta],$$

где K_d — коэффициент динамичности; $\sigma_{ст\ max}$, $\sigma_{д\ max}$ — максимальные статическое и динамическое напряжения; $\delta_{ст\ max}$, $\delta_{д\ max}$ — максимальные статическое и динамическое перемещения.

♦ Условие прочности и условие жесткости решаются в соответствии с поставленной задачей.

В данной теме рассматривается работа элементов упругих конструкций в условиях вынужденных колебаний. Очень часто на кон-

струкции монтируют различного рода энергоустановки, которые во включенном состоянии совершают колебательные движения, передающиеся на всю конструкцию. Расчет на прочность таких конструкций производится по вышеописанному алгоритму с учетом колебательного движения. Теория колебаний изучается в соответствующем разделе дисциплины «Физика». Что нам нужно знать из теории колебаний? 🤔

🤔 **Что называется числом степеней свободы упругой системы?**

Первое, что важно знать при исследовании колебательных движений упругих систем, — *число степеней свободы*, т. е. число независимых переменных, необходимых и достаточных для описания состояния системы в любой момент времени. Проще говоря, число степеней свободы равно числу сосредоточенных масс, расположенных на невесомой упругой системе.


В курсе «Сопроотивление материалов» рассматриваются только простейшие упругие системы с одной степенью свободы (с одной сосредоточенной массой).

🤔 **Как различают механические колебания по причинам, их вызывающим?**


Различают следующие типы колебаний:

- 1) *свободные (собственные)* — колебания, возникающие вследствие начального отклонения системы от положения равновесия и происходящие только под действием сил упругости системы (например, колебания груза, подвешенного на пружине);
- 2) *вынужденные* — колебания, происходящие под действием внешних периодически изменяющихся сил (например, вибрации подмоторной рамы при включенном двигателе);
- 3) *параметрические* — колебания, в процессе которых периодически изменяются параметры системы (например, при вращении несбалансированного автомобильного колеса, при потере устойчивости стержня под действием пульсирующей нагрузки);
- 4) *автоколебания* — колебания, возбуждаемые внешними силами, характер воздействия которых определяется самим колебательным процессом (например, колебания деформируемых тел в потоке жидкости или газа — флаттер).

С прочностной точки зрения наибольший интерес представляют вынужденные колебания, при которых действие периодически изменяющихся сил приводит к возникновению периодически изменяющихся напряжений.

 **Как различают механические колебания по виду деформации, возникающей в упругой системе в процессе колебаний?**

Колебания классифицируют также по виду деформации. Так, для стержней различают *продольные* (растяжение-сжатие), *поперечные* (изгиб) и *крутильные* (кручение) колебания.

 **Как определить коэффициент динамичности при вынужденных колебаниях упругой системы с одной степенью свободы?**

При вынужденных колебаниях коэффициент динамичности принято называть *коэффициентом усиления колебаний* и обозначать β .

Коэффициент динамичности (коэффициент усиления колебаний) при вынужденных колебаниях упругих систем с одной степенью свободы без учета сил сопротивления равен:

$$K_d = \beta = \frac{1}{\left| 1 - \frac{\Omega^2}{\omega^2} \right|}, \quad (7.1)$$

где Ω — частота вынужденных колебаний, определяется параметрами работы энергоустановки; ω — частота собственных колебаний упругой системы, определяется по формуле

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{\delta_{11} m}}. \quad (7.2)$$

Здесь m — масса колеблющегося груза (например, двигателя); δ_{11} — *податливость* упругой системы, является единичным статическим перемещением сечения, к которому приложена сила веса груза, в направлении колебательного движения. Определяется это единичное перемещение методом Мора.

 **Что такое явление резонанса?**

Если частота вынуждающей силы Ω приближается по значению к частоте собственных колебаний ω , то согласно формуле (7.1) коэффициент динамичности $K_d \rightarrow \infty$. Амплитуда колебаний при этом резко возрастает, а значит, резко возрастает и амплитуда изменения

напряжений, что приводит к разрушению конструкции. Это явление называется *резонансом*.



Алгоритм расчета на прочность при вынужденных колебаниях упругих систем с одной степенью свободы

1. Решение статической задачи

- Динамическую возмущающую силу $F_0 \sin \Omega t$ заменяем статической, равной её амплитудному значению F_0 .
- Строим эпюру ВСФ от действия F_0 согласно виду деформации и определяем положение опасного сечения.
- Находим максимальное статическое напряжение $\sigma_{\text{ст max}}(F_0)$.

2. Определение коэффициента динамичности (коэффициента усиления колебаний)

- Находим податливость упругой системы δ_{11} методом Мора.
- Вычисляем частоту собственных колебаний ω по формуле (7.2).
- Определяем частоту вынужденных колебаний Ω , исходя из условий работы энергоустановки.
- Вычисляем коэффициент динамичности (коэффициент усиления колебаний) по формуле (7.1).

3. Запись условия прочности

- Если вес колеблющейся массы $F = mg$ не участвует в колебательном движении, т. е. направлен перпендикулярно направлению движения, то условие прочности имеет вид:

$$\sigma_{\text{д max}}(F_0 \sin \Omega t) = \beta \cdot \sigma_{\text{ст max}}(F_0) \leq [\sigma]. \quad (7.3)$$

- Если направление силы тяжести колеблющейся массы совпадает с направлением колебательного движения, то эта статическая сила $F = mg$ также участвует в нагружении упругой системы, но не усиливается коэффициентом динамичности. В этом случае конструкция испытывает комбинированное нагружение – и статическое, и динамическое. Тогда, согласно принципу независимости действия сил, максимальное напряжение, возникающее в конструкции, равно:

$$\sigma_{\text{max}} = \sigma_{\text{ст max}}(F) + \sigma_{\text{д max}}(F_0 \sin \Omega t).$$

Учитывая формулу (7.3), получим окончательное выражение для условия прочности:

$$\sigma_{\max} = \sigma_{\text{ст max}}(F) + \beta \cdot \sigma_{\text{ст max}}(F_0) \leq [\sigma]. \quad (7.4)$$

4. Решение условия прочности согласно поставленной задаче

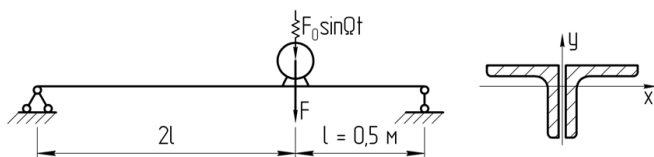
- Найденные значения параметров подставляются в условие прочности – формулу (7.3) или (7.4), которое решается согласно поставленной задаче, т. е. производится либо поверочный расчет, либо проектировочный, либо расчет на грузоподъемность.



Пример решения задачи

Задача

На двухопорной балке, изготовленной из двух равнобоких уголков № 4, установлен электродвигатель, вес которого $F = 0,4$ кН. Число оборотов электродвигателя $N = 500$ об/мин, амплитудное значение центробежной силы, возникающей при вращении ротора, $F_0 = 0,05$ кН. Произвести проверочный расчет на прочность подмоторной балки и определить значение l , при котором возможно наступление резонанса. Сопротивлением среды пренебречь. Допускаемое напряжение $[\sigma]$ принять равным 160 МПа.



Решение

Прежде чем приступить к решению задачи, разберемся, что происходит с упругой балкой при заданном нагружении.

До установки двигателя балка находилась в *прямолинейном* равновесном состоянии:

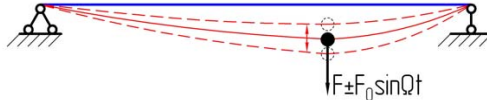


После установки двигателя (в выключенном режиме), который можно рассматривать как сосредоточенную массу, балка принимает новое – *изогнутое* равновесное состояние:



При этом на балку действует *статическая* нагрузка – вес двигателя $F = mg$.

При включенном двигателе к его весу добавляется действие *динамической* вибрационной возмущающей силы $F_0 \sin \Omega t$, которая по своей природе является центробежной силой, возникающей при вращении ротора от его неуравновешенной части. Эта сила вызывает *вынужденные колебания* всей упругой системы вокруг изогнутого равновесного состояния:



Направление колебательного движения перпендикулярно осевой линии балки, поэтому колебания являются *поперечными*. Вид возникающей при этом деформации балки – *прямой поперечный изгиб*.

Таким образом, *расчетная схема балки представляет собой упругую систему с одной степенью свободы, воспринимающую поперечные вынужденные колебания*.

Так как вес сосредоточенной массы (двигателя) F по направлению совпадает с направлением колебательного движения, то, согласно пункту 3 приведенного выше алгоритма («Запись условия прочности»), *условие прочности* для нашей балки будет иметь вид (7.4):

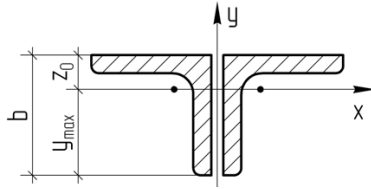
$$\sigma_{\max} = \sigma_{\text{ст max}}(F) + \beta \cdot \sigma_{\text{ст max}}(F_0) \leq [\sigma].$$

Выполнение этого условия нам и нужно будет проверить.

Приступим наконец к непосредственному решению задачи.

1. Определим геометрические характеристики поперечного сечения балки: осевой момент инерции I_x и осевой момент сопротивления W_x , которые нам потребуются при прочностном расчете.

Поперечное сечение сложное – состоит из двух равнобоких уголков № 4:



Оси x и y – главные центральные оси сечения, причем ось y – силовая линия, а ось x – нейтральная линия. По сортаменту (прил. 4, табл. 4.3) для одного равнобокого уголка № 4 находим: $b = 4$ см, $I_x^{(1)} = 3,55$ см⁴, $z_0 = 1,09$ см.

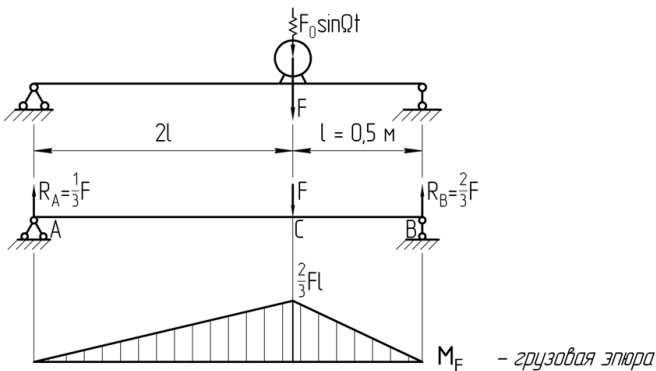
По теореме о суммировании моментов инерции (см. Практикум, часть 1, стр. 27) осевой момент инерции всего сложного сечения равен:

$$I_x = 2 \cdot I_x^{(1)} = 2 \cdot 3,55 = 7,1 \text{ см}^4.$$

Осевой момент сопротивления W_x находим по определению (см. Практикум, часть 1, стр. 34):

$$W_x = \frac{I_x}{y_{\max}} = \frac{I_x}{b - z_0} = \frac{7,1}{4 - 1,09} = 2,44 \text{ см}^3.$$

2. Найдем максимальное статическое напряжение $\sigma_{\text{ст max}} (F)$ от статического действия силы, равной весу двигателя $F = mg$. Для этого построим грузовую эпюру изгибающих моментов M_F (балка испытывает прямой изгиб) и определим положение опасного сечения.



Максимальный изгибающий момент $M_{F \max} = \frac{2}{3}Fl$ возникает в сечении C , следовательно, сечение C наиболее опасно. Тогда

$$\sigma_{\text{ст max}}(F) = \frac{M_{F \max}}{W_x} = \frac{2Fl}{3W_x} = \frac{2 \cdot 400 \text{ Н} \cdot 0,5 \text{ м}}{3 \cdot 2,44 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3} = 54,65 \cdot 10^6 \text{ Па} = 54,65 \text{ МПа}.$$

Таким образом, при выключенном двигателе максимальное напряжение возникает в сечении C балки и равно 54,65 МПа.

3. Найдем максимальное статическое напряжение $\sigma_{\text{ст max}}(F_0)$ от статического действия силы F_0 , равной амплитудному значению вынуждающей динамической силы $F_0 \sin \Omega t$. Рассуждения здесь аналогичные, как и в пункте 2, единственное отличие в том, что вместо силы F в сечении C прикладывается сила F_0 . Эпюра изгибающих моментов M_{F_0} будет пропорциональна грузовой эпюре M_F , а максимальный изгибающий момент $M_{F_0 \max} = \frac{2}{3}F_0l$. Тогда

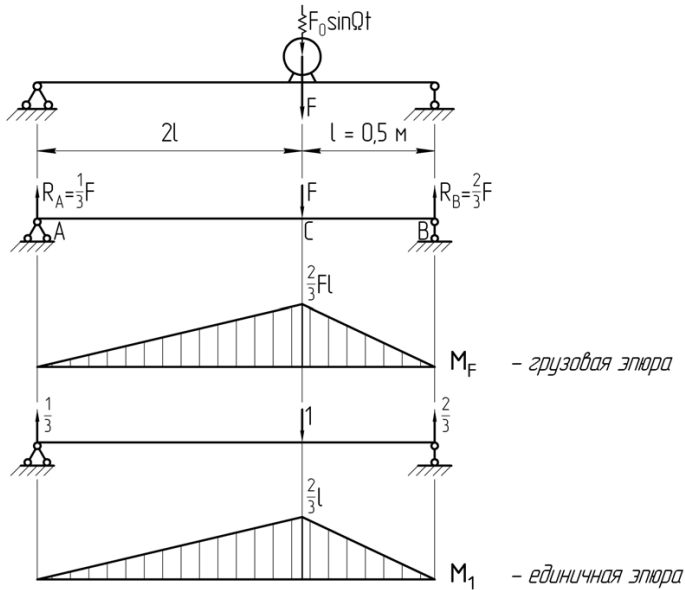
$$\sigma_{\text{ст max}}(F_0) = \frac{M_{F_0 \max}}{W_x} = \frac{2F_0l}{3W_x} = \frac{2 \cdot 50 \text{ Н} \cdot 0,5 \text{ м}}{3 \cdot 2,44 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3} = 6,83 \cdot 10^6 \text{ Па} = 6,83 \text{ МПа}.$$

4. Найдем коэффициент усиления колебаний β .

4.1. Определим податливость упругой системы δ_{11} . Учитывая, что это единичное перемещение, определим его методом Мора. Для этого приложим в точке C в направлении колебательного движения единичную безразмерную сосредоточенную силу и построим единичную эпюру изгибающих моментов M_1 . Очевидно, что она тоже будет пропорциональна грузовой эпюре M_F с коэффициентом пропорциональности F . «Перемножив» единичную эпюру M_1 саму на себя, получим искомую величину δ_{11} .

Единичная эпюра имеет два участка — AC и CB . Применяя формулу Симпсона на каждом участке, получим:

$$\begin{aligned} \delta_{11} &= \sum_{i=1}^2 \frac{l_i}{6EI_x} \left((M_{li}^n)^2 + 4(M_{li}^{\text{cp}})^2 + (M_{li}^n)^2 \right) = \\ &= \frac{1}{EI_x} \left[\frac{2l}{6} \left(0 + 4 \cdot \left(\frac{l}{3} \right)^2 + \left(\frac{2l}{3} \right)^2 \right) + \frac{l}{6} \left(\left(\frac{2l}{3} \right)^2 + 4 \cdot \left(\frac{l}{3} \right)^2 + 0 \right) \right] = \frac{4 \cdot l^3}{9EI_x}. \end{aligned} \quad (7.5)$$



4.2. Вычислим частоту собственных колебаний ω по формуле (7.2), учитывая, что масса двигателя $m = \frac{F}{g}$, и принимая $g \approx 10 \text{ м/сек}^2$:

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{\delta_{11}m}} = \sqrt{\frac{9EI_x \cdot g}{4l^3 \cdot F}} = \sqrt{\frac{9 \cdot 2 \cdot 10^{11} \cdot 7,1 \cdot 10^{-8} \cdot 10}{4 \cdot 0,5^3 \cdot 400}} = 79,94 \text{ сек}^{-1}.$$

4.3. Вычислим частоту вынужденных колебаний Ω по заданному числу оборотов электродвигателя N :

$$\Omega = 2\pi \cdot N = \frac{2\pi \cdot 500 \text{ (об/мин)}}{60 \text{ сек}} = 52,33 \text{ сек}^{-1}.$$

4.4. Коэффициент усиления колебаний β найдем по формуле (7.1):

$$\beta = \frac{1}{\left|1 - \frac{\Omega^2}{\omega^2}\right|} = \frac{1}{\left|1 - \frac{52,33^2}{79,94^2}\right|} = 1,75.$$

5. Проверим выполнение условия прочности.

Подставим найденные значения всех величин в условие прочности и проверим его выполнение.

$$\sigma_{\max} = \sigma_{\text{стmax}}(F) + \beta \cdot \sigma_{\text{стmax}}(F_0) = 54,65 + 1,75 \cdot 6,83 = 66,6 \text{ МПа}.$$

Таким образом, $\sigma_{\max} = 66,6 \text{ МПа} \leq [\sigma] = 160 \text{ МПа}$, следовательно, условие прочности выполняется.

6. Определим значение параметра длины балки l_p , при котором возможно наступление резонанса.

Условие резонанса, как отмечалось выше, – это равенство частот вынужденных и собственных колебаний упругой системы: $\Omega = \omega$. Частота вынужденных колебаний Ω не зависит от значения параметра l , а частота собственных колебаний ω связана с параметром l полученной ранее зависимостью (7.5):

$$\omega = \sqrt{\frac{9EI_x \cdot g}{4l^3 \cdot F}}.$$

Подставим это выражение в условие резонанса:

$$\Omega = \sqrt{\frac{9EI_x \cdot g}{4l_p^3 \cdot F}}.$$

Возведем обе части равенства в квадрат и выразим параметр l_p :

$$\Omega^2 = \frac{9EI_x \cdot g}{4l_p^3 \cdot F} \rightarrow l_p = \sqrt[3]{\frac{9EI_x \cdot g}{4F \cdot \Omega^2}} = \sqrt[3]{\frac{9 \cdot 2 \cdot 10^{11} \cdot 7,1 \cdot 10^{-8} \cdot 10}{4 \cdot 400 \cdot 52,33^2}} = 0,66 \text{ м}.$$

Таким образом, при $l_p = 0,66 \text{ м}$ в заданной конструкции будет наблюдаться явление резонанса, что может привести к её разрушению.

Внимание! 🙄 При проектировании подобных конструкций следует избегать резонансных значений её параметров.

Задача решена. 🙌



Потренируемся?

- Пройти тестовый тренинг ([прил. 1](#), [тесты к теме 7](#)).

Тема 8. РАСЧЕТ НА ПРОЧНОСТЬ И ЖЕСТКОСТЬ ЭЛЕМЕНТОВ КОНСТРУКЦИЙ В УСЛОВИЯХ УДАРА

Цель занятия – научиться рассчитывать на прочность и жесткость элементы конструкций в условиях ударного нагружения.

Необходимые знания для достижения цели

1. Понятие удара как вида динамического нагружения.
2. Общий подход к расчету на прочность и жесткость при динамическом нагружении.
3. Основные допущения теории удара.
4. Определение коэффициента динамичности при ударе.
5. Алгоритм расчета на прочность и жесткость при ударе.

Теоретический материал



Что такое удар?

Ударом называется взаимодействие тел, при котором силы взаимодействия резко нарастают или ослабевают за короткий промежуток времени. Удар возникает, например, при забивании свай, при ковке, при заклинивании подшипника у вращающегося вала и т. д.

Удар относится к *динамическим видам нагружения*, а значит, здесь сохраняется общий подход к расчету на прочность и жесткость при динамическом нагружении, рассмотренный в предыдущей теме. Таким образом, расчет состоит из трех основных частей:

- 1) решение статической задачи;
- 2) определение коэффициента динамичности;
- 3) запись условия прочности и условия жесткости и их решение согласно поставленной задаче.



Какие основные допущения принимаются в теории удара?

В курсе «Сопротивление материалов» в теории ударного нагружения принимаются некоторые допущения, которые позволяют просто, но в то же время с достаточной точностью определить все прочностные и деформационные параметры ударяемой конструкции.

1. Ударяющее тело считается абсолютно жестким.
2. Материал ударяемого тела линейно упругий (следует закону Гука).
3. Ударяемое тело имеет одну степень свободы.

4. Удар неупругий, т. е. ударяющее тело после удара не отскакивает, а движется совместно с ударяемым телом.
5. Кинетическая энергия ударяющего тела полностью переходит в потенциальную энергию деформации ударяемого тела, т. е. можно пренебречь контактными явлениями.
6. Деформация мгновенно распространяется по ударяемой системе, и все ее точки начинают движение одновременно, т. е. можно пренебречь волновыми явлениями.

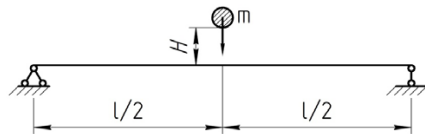
  **Какие виды удара различают по виду деформации?**

В зависимости от вида деформации, возникающей в ударяемой конструкции, различают *продольный* удар (растяжение-сжатие), *поперечный* удар (изгиб), *скручивающий* удар (кручение).

  **Как определить коэффициент динамичности при ударе?**

Учитывая принятые допущения, физические законы сохранения импульса и сохранения энергии, находят динамическое перемещение точки удара конструкции δ_d . Решая статическую задачу, т. е. прикладывая в точке удара и в его направлении статическую силу, равную весу ударяющего тела, определяют статическое перемещение данного сечения $\delta_{ст*}$. Коэффициент динамичности находят как отношение динамического перемещения к статическому. Для различных частных случаев удара соответствующие формулы для коэффициента динамичности можно найти в учебниках по сопротивлению материалов.

В данной теме в качестве примера мы рассмотрим вертикальный поперечный удар, возникающий при свободном падении с высоты H абсолютно жесткого тела массой m на упругую невесомую балку.



Для данного случая удара коэффициент динамичности определяется по следующей формуле:

$$K_d = 1 + \sqrt{1 + \frac{2H}{mg\delta_{11}}} = 1 + \sqrt{1 + \frac{2H}{\delta_{ст*}}}, \quad (8.1)$$

где H – высота падения; m – масса абсолютно жесткого падающего тела; g – ускорение свободного падения; δ_{11} – податливость упругой

балки, или, как мы его называли, единичное перемещение ударяемого сечения, следовательно величина $mg \delta_{11}$ равна статическому перемещению ударяемого сечения $\delta_{ст*}$.

Если высота падения $H \gg \delta_{ст*}$ (что чаще всего в реальных случаях и бывает), то в формуле (8.1) единицами можно пренебречь, тогда коэффициент динамичности можно вычислить по более простой формуле:

$$K_d = \sqrt{\frac{2H}{mg\delta_{11}}} = \sqrt{\frac{2H}{\delta_{ст*}}}. \quad (8.2)$$



Алгоритм расчета на прочность и жесткость при поперечном ударе

1. Решение статической прочностной задачи

- В точке удара балки в направлении удара прикладываем статическую силу, равную весу падающего тела $F = mg$.
- Строим грузовую эпюру изгибающих моментов M_F от действия силы F и определяем положение опасного сечения.
- Определяем максимальное статическое напряжение $\sigma_{ст\max}$.

2. Определение коэффициента динамичности

- В точке удара балки в направлении удара прикладываем статическую единичную безразмерную силу и строим единичную эпюру изгибающих моментов M_1 .
- Находим податливость упругой системы δ_{11} методом Мора.
- Определяем коэффициент динамичности по формуле (8.1) или (8.2).

3. Запись условия прочности при ударе:

$$\sigma_{д\max} = K_d \cdot \sigma_{ст\max} \leq [\sigma]. \quad (8.3)$$

4. Решение условия прочности согласно поставленной задаче

- Подставляем найденные значения K_d и $\sigma_{ст\max}$ в условие прочности (8.3) и решаем его согласно поставленной задаче.

5. Решение статической деформационной задачи

- Учитывая условия закрепления балки и вид грузовой эпюры изгибающих моментов M_F , изображаем приближенный вид изогнутой оси балки и определяем положение сечения балки с максимальным прогибом.
- Определяем $\delta_{ст\max}$ методом Мора.

6. Запись условия жесткости при ударе и проверка его выполнения

- Записываем условие жесткости при ударе:

$$\delta_{\text{д max}} = K_{\text{д}} \cdot \delta_{\text{ст max}} \leq [\delta]. \quad (8.4)$$

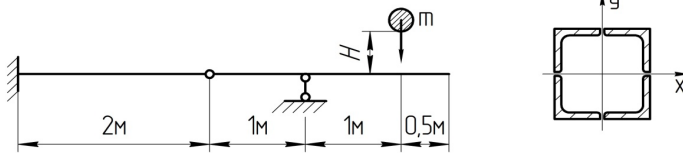
- Подставляем найденные значения $K_{\text{д}}$ и $\delta_{\text{ст max}}$ в условие жесткости (8.4) и проверяем его выполнение.



Пример решения задачи

Задача

На заданную балку с высоты $H = 0,5$ м свободно падает абсолютно жесткое тело массой m . Поперечное сечение балки составное – состоит из четырех стальных равнобоких уголков № 10, сваренных между собой. Определить допустимую величину массы падающего тела $[m]$, при которой будет обеспечена прочность балки, если $[\sigma] = 160$ МПа, $E = 2 \cdot 10^5$ МПа. Проверить выполнение условия жесткости, приняв $[\delta] = 3$ мм. Массой балки пренебречь.



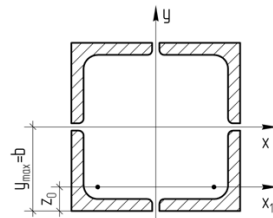
Решение

1. Определим геометрические характеристики поперечного сечения балки: осевой момент инерции I_x и осевой момент сопротивления W_x , которые нам потребуются при прочностном и деформационном расчетах.

Поперечное сечение балки сложное – состоит из четырех равнобоких уголков № 10.

Оси x и y – главные центральные оси сечения, причем ось y – силовая линия, а ось x – нейтральная линия.

По сортаменту (прил. 4, табл. 4.3) для одного равнобокого уголка № 10 находим: сторону уголка $b = 10$ см, момент инерции относительно оси x_1 $I_{x_1}^{(1)} = 122$ см⁴, площадь $A_1 = 12,8$ см², расстояние от центра тяжести до стороны уголка $z_0 = 2,68$ см.



Применяя теорему о суммировании моментов инерции и теорему о параллельном переносе осей (см. Практикум, часть 1, стр. 27–29), найдем осевой момент инерции всего сложного сечения:

$$I_x = 4 \cdot [I_{x_1}^{(1)} + (b - z_0)^2 \cdot A_1] = 4 \cdot [122 + (10 - 2,68)^2 \cdot 12,8] = 3231,4 \text{ см}^4 = 3231,4 \cdot 10^{-8} \text{ м}^4.$$

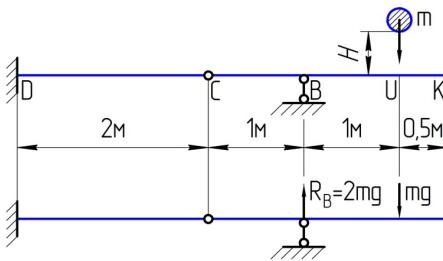
Осевой момент сопротивления W_x находим по определению (см. Практикум, часть 1, стр. 34):

$$W_x = \frac{I_x}{y_{\max}} = \frac{I_x}{b} = \frac{3231,4}{10} = 323,14 \text{ см}^3 = 323,14 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3.$$

2. Решим статическую прочностную часть задачи.

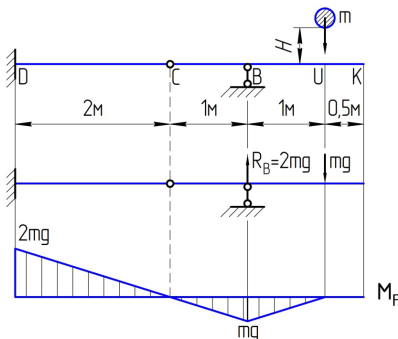
2.1. Приложим к балке в точке удара «У» (в направлении удара) статическую силу, равную весу падающего тела: $F = mg$. При этом в подвижной опоре «В» возникает реактивная сила R_B , которая определяется из моментного уравнения равновесия, записанного относительно врезанного шарнира «С» для правой части балки:

$$\sum M_C^{\text{справа}} = 0 \rightarrow F \cdot CU - R_B \cdot CB = 0 \rightarrow R_B = F \cdot \frac{CU}{CB} = mg \cdot \frac{2}{1} = 2mg.$$



– статическое нагружение

2.2. Построим грузовую эпюру изгибающих моментов M_F от действия силы F и определим положение опасного сечения балки. Эпюру строим в направлении от свободного края к жесткой заделке методом сечений с учетом действия силы F и реакции R_B .



– статическое нагружение

M_F – грузовая эпюра

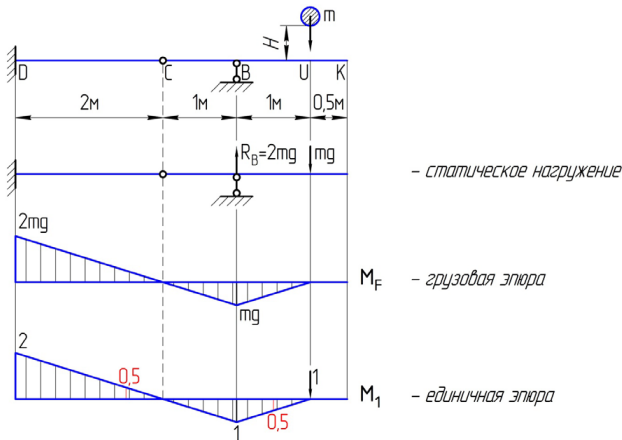
Опасное сечение балки – сечение «D», где возникает максимальный момент $M_{\max} = 2mg$.

2.3. Определим максимальное статическое напряжение $\sigma_{\text{ст max}}$ в долях массы m . Примем при этом ускорение свободного падения $g \approx 10 \text{ м/сек}^2$.

$$\sigma_{\text{ст max}} = \frac{M_{\max}}{W_x} = \frac{2mg}{W_x} = \frac{2m \cdot 10}{323,14 \cdot 10^{-6}} = 0,0619m \cdot 10^6 \text{ (Па)} = 0,0619m \text{ (МПа)}.$$

3. Определим коэффициент динамичности K_d по формуле (8.2). Для этого нам нужно знать податливость упругой системы δ_{11} .

3.1. Для определения податливости системы δ_{11} построим единичную эпюру изгибающих моментов M_1 от действия единичной силы, приложенной в точке удара «U». Очевидно, что эпюра M_1 будет отличаться от грузовой эпюры M_F лишь тем, что значения моментов в соответствующих сечениях будут в mg раз меньше.



3.2. Определим податливость упругой балки δ_{11} методом Мора, «умножив» единичную эпюру M_1 саму на себя. Будем использовать при этом формулу Симпсона. Участков перемножения два: UB и BD.

$$\delta_{11} = \sum_{i=1}^2 \frac{l_i}{6EI_x} \left((\overline{M}_{li}^n)^2 + 4(\overline{M}_{li}^{cp})^2 + (\overline{M}_{li}^n)^2 \right) =$$

$$= \frac{1}{EI_x} \left[\frac{1}{6} (0 + 4 \cdot 0,5^2 + 1^2) + \frac{3}{6} (1^2 + 4 \cdot 0,5^2 + 2^2) \right] = \frac{3,33}{EI_x}.$$

3.3. Найдем теперь коэффициент динамичности в долях параметра m , используя формулу (8.2).

$$K_d = \sqrt{\frac{2H}{mg\delta_{11}}} = \sqrt{\frac{2H \cdot EI_x}{mg \cdot 3,33}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 0,5 \cdot 2 \cdot 10^{11} \cdot 3231,4 \cdot 10^{-8}}{m \cdot 10 \cdot 3,33}} = \frac{440,5}{\sqrt{m}}.$$

4. Запишем условие прочности при ударе (8.3):

$$\sigma_{d \max} = K_d \cdot \sigma_{ст \max} \leq [\sigma].$$

5. Подставим в условие прочности значение $[\sigma]$ и выражения для K_d и $\sigma_{ст \max}$ в долях параметра m :

$$0,0619m \cdot \frac{440,5}{\sqrt{m}} \leq 160.$$

Если в неравенстве оставить только знак равенства, то значение параметра массы m будет максимально допустимым $[m]$. Решим полученное таким образом уравнение относительно $[m]$.

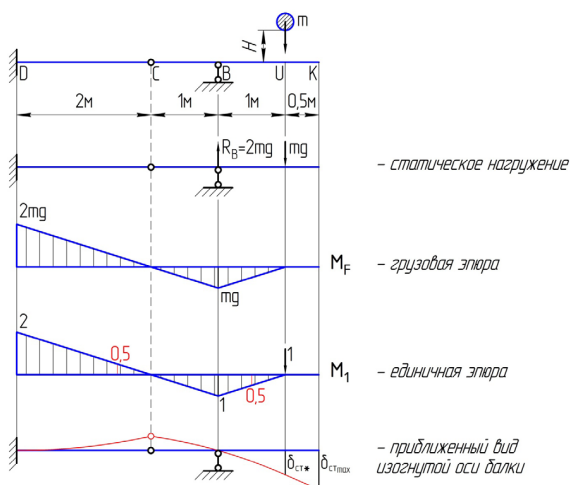
$$\sqrt{[m]} = \frac{160}{0,0619 \cdot 440,5} = 5,87\sqrt{\text{кг}} \rightarrow [m] = 5,87^2 = 34,4 \text{ кг}.$$

Таким образом, чтобы не нарушилось условие прочности, на балку с высоты $H = 0,5$ м может упасть тело массой не более 34,4 кг. Численное значение коэффициента динамичности при этом равно

$$K_d = \frac{440,5}{\sqrt{m}} = \frac{440,5}{5,87} = 75.$$

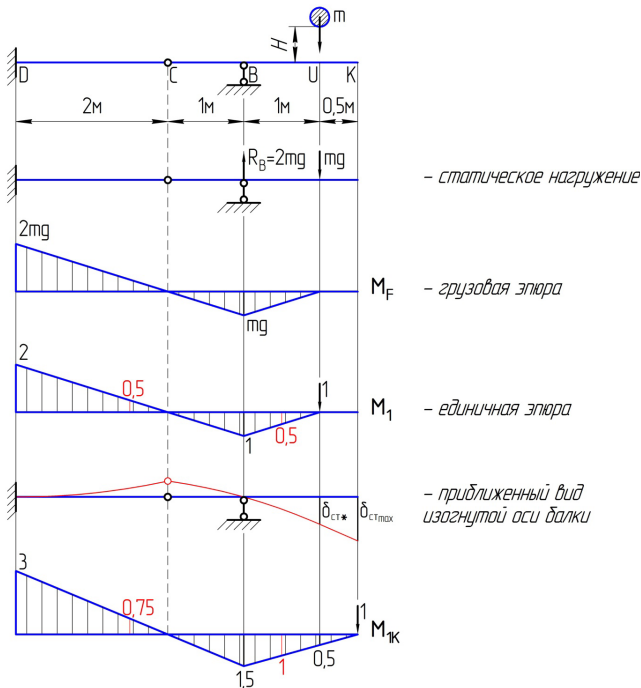
6. Решим статическую деформационную часть задачи.

6.1. Определим, в каком сечении балки возникает максимальный статический прогиб $\delta_{ст \max}$. Для этого изобразим приближенный вид изогнутой оси балки, учитывая условия её закрепления и вид грузовой эпюры (подробные пояснения – в теме 1).



Очевидно, что максимальное статическое перемещение $\delta_{\text{ст max}}$ возникает в сечении «К».

6.2. Определим $\delta_{\text{ст max}}$ методом Мора. Для этого необходимо в сечении «К» приложить единичную безразмерную силу и построить от её действия единичную эпюру изгибающих моментов M_{1K} .



«Умножив» единичную эпюру M_{1K} на грузовую M_F , согласно методу Мора, получим искомое перемещение $\delta_{\text{ст max}}$. Применяем при этом простейшую формулу Симпсона. Участков перемножения два: UB и BD.

$$\delta_{\text{ст max}} = \sum_{i=1}^2 \frac{l_i}{6EI_x} (M_{1Ki}^n \cdot M_{Fi}^n + 4M_{1Ki}^{cp} \cdot M_{Fi}^{cp} + M_{1Ki}^n \cdot M_{Fi}^n). \quad (8.5)$$

Давайте подумаем 🤔, как проще можно посчитать эту величину. На рисунке видно, что грузовая эпюра M_F пропорциональна единичной эпюре M_1 . Коэффициентом пропорциональности является величина mg . Тогда при вычислении $\delta_{\text{ст max}}$ по формуле (8.5) грузовую эпюру M_F можно заменить на единичную эпюру M_1 , а коэффициент пропорциональности mg вынести за скобку:

$$\begin{aligned} \delta_{\text{ст max}} &= \sum_{i=1}^2 \frac{mg \cdot l_i}{6EI_x} (M_{1Ki}^n \cdot M_{li}^n + 4M_{1Ki}^{\text{cp}} \cdot M_{li}^{\text{cp}} + M_{1Ki}^n \cdot M_{li}^n) = \\ &= \frac{mg}{EI_x} \left[\frac{1}{6} (0 + 4 \cdot 1 \cdot 0,5 + 1,5 \cdot 1) + \frac{3}{6} (1,5 \cdot 1 + 4 \cdot 0,75 \cdot 0,5 + 3 \cdot 2) \right] = \\ &= \frac{5,08 \cdot mg}{EI_x} = \frac{5,08 \cdot 34,4 \cdot 10}{2 \cdot 10^{11} \cdot 3231,4 \cdot 10^{-8}} = 0,27 \cdot 10^{-3} \text{ м} = 0,27 \text{ мм}. \end{aligned}$$

При статическом нагружении балки максимальное статическое перемещение возникает в сечении «К» и равно 0,27 мм.

7. Запишем условие жесткости при ударе и проверим его выполнение.

Условие жесткости при ударе имеет вид (8.4):

$$\delta_{\text{д max}} = K_{\text{д}} \cdot \delta_{\text{ст max}} \leq [\delta].$$

Подставим в него значение $[\delta]$, найденные значения $K_{\text{д}}$ и $\delta_{\text{ст max}}$ и проверим его выполнение.

$$\delta_{\text{д max}} = K_{\text{д}} \cdot \delta_{\text{ст max}} = 75 \cdot 0,27 \text{ мм} = 20,25 \text{ мм} > [\delta] = 3 \text{ мм},$$

следовательно, условие жесткости не выполняется.

Задача решена. 



Потренируемся?

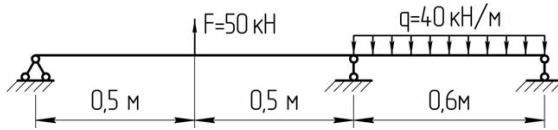
- Пройти тестовый тренинг (прил. 1, тест к теме 8).
- Решить задачу 2.3 из контрольной работы № 2 (прил. 3).

Тестовый материал

Тема 1

Вариант 1

Задана статически неопределимая балка:



1. Чему равна степень статической неопределимости балки s ?

- 1) $s = 1$
- 2) $s = 2$
- 3) $s = 3$
- 4) $s = 4$

2. Выберите правильную основную систему для заданной балки.

- 1)
- 2)
- 3)
- 4)

3. Укажите эквивалентную систему, соответствующую выбранной основной.

- 1)
- 2)
- 3)
- 4)

4. Укажите правильное условие эквивалентности для заданной балки.

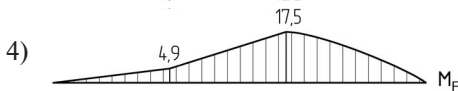
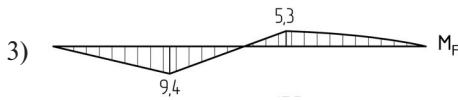
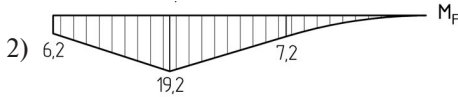
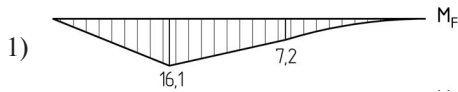
$$1) \begin{cases} \delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \delta_{13}X_3 + \delta_{14}X_4 + \delta_{1F} = 0 \\ \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \delta_{23}X_3 + \delta_{24}X_4 + \delta_{2F} = 0 \\ \delta_{31}X_1 + \delta_{32}X_2 + \delta_{33}X_3 + \delta_{34}X_4 + \delta_{3F} = 0 \\ \delta_{41}X_1 + \delta_{42}X_2 + \delta_{43}X_3 + \delta_{44}X_4 + \delta_{4F} = 0 \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} \delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \delta_{1F} = 0 \\ \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \delta_{2F} = 0 \end{cases}$$

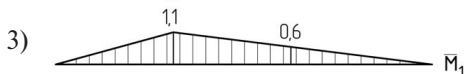
$$3) \begin{cases} \delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \delta_{13}X_3 + \delta_{1F} = 0 \\ \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \delta_{23}X_3 + \delta_{2F} = 0 \\ \delta_{31}X_1 + \delta_{32}X_2 + \delta_{33}X_3 + \delta_{3F} = 0 \end{cases}$$

$$4) \delta_{11} \cdot X_1 + \delta_{1F} = 0$$

5. Какая грузовая эпюра изгибающих моментов M_F соответствует выбранной основной системе?



6. Какая единичная эпюра изгибающих моментов \bar{M}_1 соответствует правильной эквивалентной системе заданной балки?



7. Чему равны коэффициенты канонического уравнения метода

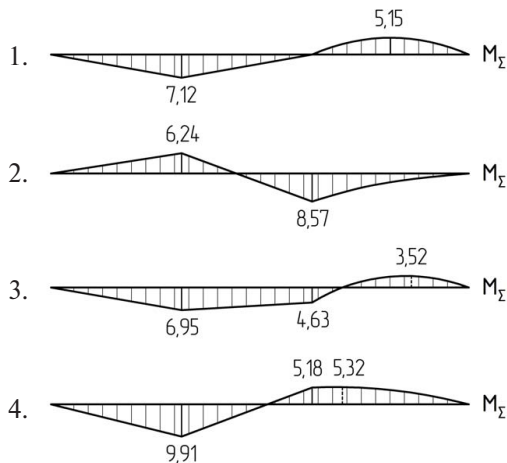
сил δ_{11} и δ_{1F} ?

- 1) $\delta_{11} = 1,365$ $\delta_{1F} = -10,628$
- 2) $\delta_{11} = 0,192$ $\delta_{1F} = -3,963$
- 3) $\delta_{11} = 0,535$ $\delta_{1F} = -1,547$
- 4) $\delta_{11} = 0,933$ $\delta_{1F} = 8,212$

8. Чему равна «лишняя неизвестная» X_1 ?

- 1) $X_1 = -28,42$ кН
- 2) $X_1 = -32,12$ кН
- 3) $X_1 = 15,28$ кН
- 4) $X_1 = 20,64$ кН

9. Укажите правильную суммарную эпюру изгибающих моментов M_{Σ} .

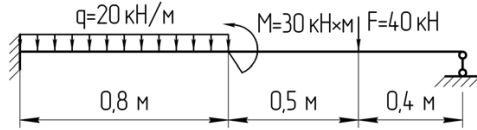


10. Чему равно значение $|M_{x^{\max}}|$ в опасном сечении балки?

- 1) $|M_{x^{\max}}| = 6,95$ кНм
- 2) $|M_{x^{\max}}| = 7,12$ кНм
- 3) $|M_{x^{\max}}| = 9,91$ кНм
- 4) $|M_{x^{\max}}| = 8,57$ кНм

Вариант 2

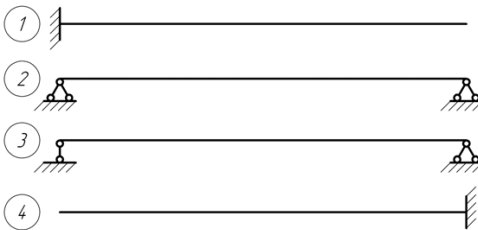
Задана статически неопределимая балка:



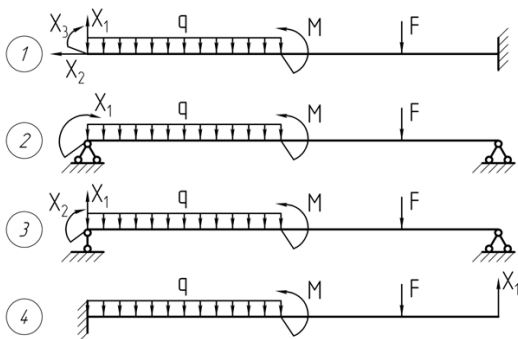
1. Чему равна степень статической неопределимости балки s ?

- 1) $s = 1$
- 2) $s = 2$
- 3) $s = 3$
- 4) $s = 4$

2. Выберите правильную основную систему для заданной балки.



3. Укажите эквивалентную систему, соответствующую выбранной основной.



4. Укажите правильное условие эквивалентности для заданной балки.

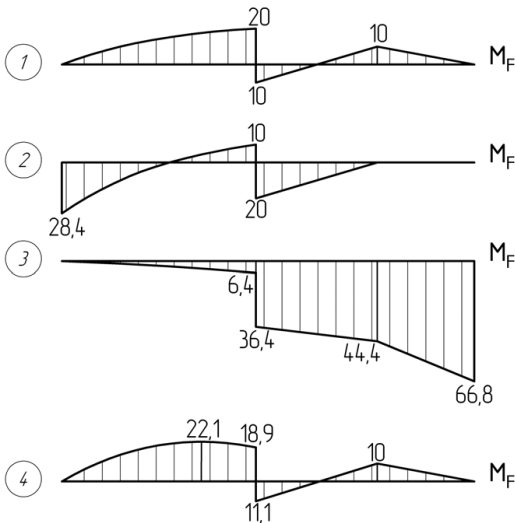
$$1) \begin{cases} \delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \delta_{13}X_3 + \delta_{14}X_4 + \delta_{1F} = 0 \\ \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \delta_{23}X_3 + \delta_{24}X_4 + \delta_{2F} = 0 \\ \delta_{31}X_1 + \delta_{32}X_2 + \delta_{33}X_3 + \delta_{34}X_4 + \delta_{3F} = 0 \\ \delta_{41}X_1 + \delta_{42}X_2 + \delta_{43}X_3 + \delta_{44}X_4 + \delta_{4F} = 0 \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} \delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \delta_{1F} = 0 \\ \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \delta_{2F} = 0 \end{cases}$$

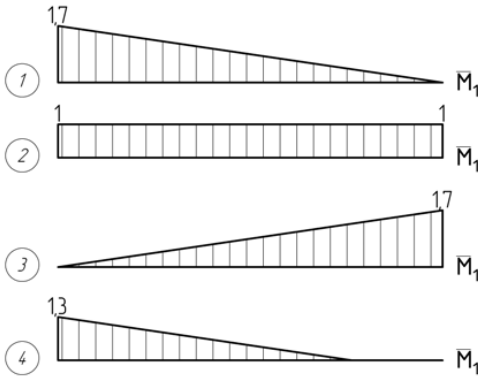
$$3) \begin{cases} \delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \delta_{13}X_3 + \delta_{1F} = 0 \\ \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \delta_{23}X_3 + \delta_{2F} = 0 \\ \delta_{31}X_1 + \delta_{32}X_2 + \delta_{33}X_3 + \delta_{3F} = 0 \end{cases}$$

$$4) \delta_{11} \cdot X_1 + \delta_{1F} = 0$$

5. Какая грузовая эпюра изгибающих моментов M_F соответствует выбранной основной системе?



6. Какая единичная эпюра изгибающих моментов \bar{M}_1 соответствует правильной эквивалентной системе заданной балки?



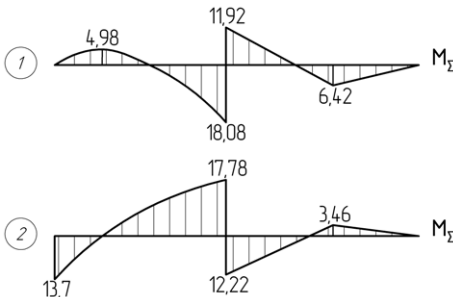
7. Чему равны коэффициенты канонического уравнения метода сил δ_{11} и δ_{1F} ?

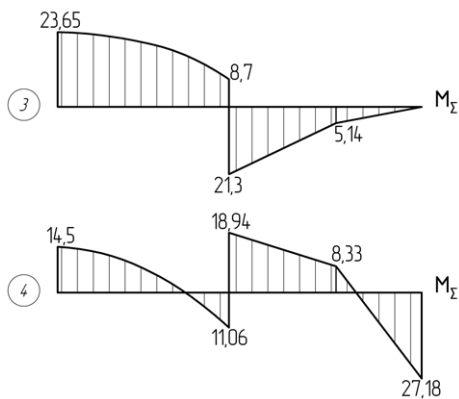
- 1) $\delta_{11} = 1,365$ $\delta_{1F} = -10,628$
- 2) $\delta_{11} = 0,192$ $\delta_{1F} = -3,963$
- 3) $\delta_{11} = 1,638$ $\delta_{1F} = -14,173$
- 4) $\delta_{11} = 0,933$ $\delta_{1F} = 8,212$

8. Чему равна «лишняя неизвестная» X_1 ?

- 1) $X_1 = -16,32$ кН
- 2) $X_1 = 20,64$ кН
- 3) $X_1 = 8,65$ кН
- 4) $X_1 = -4,86$ кН

9. Укажите правильную суммарную эпюру изгибающих моментов M_Σ .





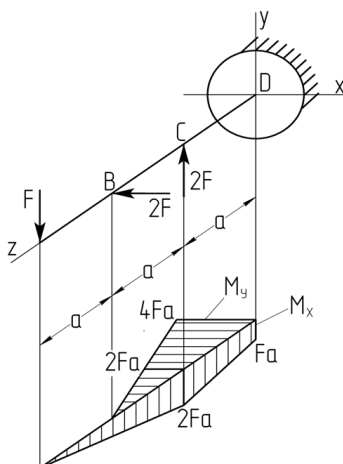
10. Чему равно значение $|M_x|_{\max}$ в опасном сечении балки?

- 1) $|M_x|_{\max} = 23,65$ кНм
- 2) $|M_x|_{\max} = 18,08$ кНм
- 3) $|M_x|_{\max} = 27,18$ кНм
- 4) $|M_x|_{\max} = 17,78$ кНм

Тема 2

Вариант 1

Для данного консольного стержня, нагруженного сосредоточенными силами в двух взаимно перпендикулярных плоскостях, решить следующие задачи:

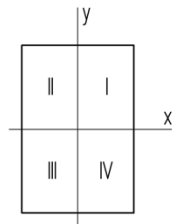


1. Определить положение опасного сечения на данной балке для случая круглого профиля.

- 1) «В»
- 2) «С»
- 3) «D»
- 4) сечения «С» и «D» равноопасны

2. Через какие четверти прямоугольного сечения «D» проходит силовая линия?

- 1) I и III
- 2) II и IV
- 3) I и IV
- 4) II и III

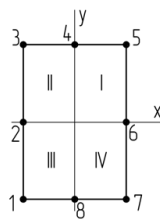


3. Через какие четверти прямоугольного сечения «D» проходит нейтральная линия?

- 1) I и III
- 2) II и IV
- 3) I и IV
- 4) II и III

4. Какие точки прямоугольного сечения «D» опасны?

- 1) 1 и 5
- 2) 3 и 7
- 3) 2 и 6
- 4) 4 и 8



5. Какое из выражений для напряжения, возникающего в точке «1» прямоугольного сечения «D», верно?

- 1) $\sigma_{(1)} = \frac{M_X^{\max}}{W_X} + \frac{M_Y^{\max}}{W_Y}$
- 2) $\sigma_{(1)} = -\frac{M_X^{\max}}{W_X} - \frac{M_Y^{\max}}{W_Y}$

$$3) \sigma_{(I)} = -\frac{M_X^{\max}}{W_X} + \frac{M_Y^{\max}}{W_Y}$$

$$4) \sigma_{(I)} = \frac{M_X^{\max}}{W_X} - \frac{M_Y^{\max}}{W_Y}$$

6. Для случая круглого поперечного сечения данного стержня диаметром d какое из приведенных условий прочности верно?

$$1) \frac{5 \cdot Fa \cdot 16}{\pi \cdot d^3} \leq [\sigma]$$

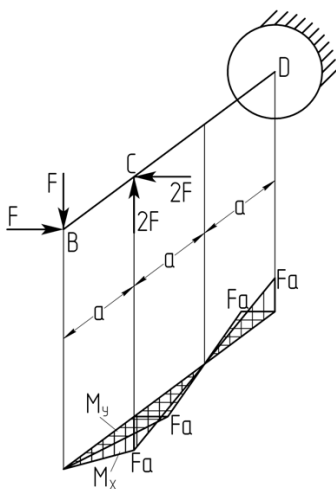
$$2) \frac{5 \cdot Fa \cdot 32}{\pi \cdot d^3} \leq [\sigma]$$

$$3) \frac{4,123 \cdot Fa \cdot 16}{\pi \cdot d^3} \leq [\sigma]$$

$$4) \frac{4,123 \cdot Fa \cdot 32}{\pi \cdot d^3} \leq [\sigma]$$

Вариант 2

Для данного консольного стержня, нагруженного сосредоточенными силами в двух взаимно перпендикулярных плоскостях, решить следующие задачи:

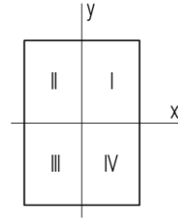


1. Определить, какое из сечений стержня наиболее опасно?

- 1) «В»
- 2) «С»
- 3) «D»
- 4) сечения «С» и «D» равноопасны

2. Через какие четверти прямоугольного сечения «D» проходит силовая линия?

- 1) I и III
- 2) II и IV
- 3) I и IV
- 4) II и III

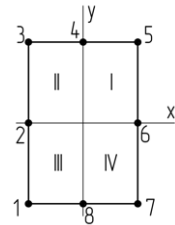


3. Через какие четверти прямоугольного сечения «D» проходит нейтральная линия?

- 1) I и III
- 2) II и IV
- 3) I и IV
- 4) II и III

4. Какие точки прямоугольного сечения «D» опасны?

- 1) 1 и 5
- 2) 3 и 7
- 3) 2 и 6
- 4) 4 и 8



5. Какое из выражений для напряжения, возникающего в точке «1» прямоугольного сечения «С», верно?

- 1) $\sigma_{(1)} = -\frac{M_X^{\max}}{W_X} - \frac{M_Y^{\max}}{W_Y}$
- 2) $\sigma_{(1)} = \frac{M_X^{\max}}{W_X} + \frac{M_Y^{\max}}{W_Y}$
- 3) $\sigma_{(1)} = -\frac{M_X^{\max}}{W_X} + \frac{M_Y^{\max}}{W_Y}$
- 4) $\sigma_{(1)} = \frac{M_X^{\max}}{W_X} - \frac{M_Y^{\max}}{W_Y}$

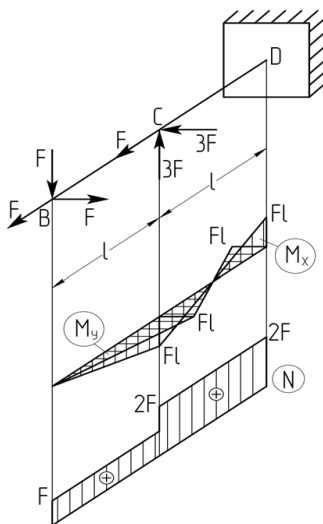
6. Для случая круглого поперечного сечения данного стержня диаметром d какое из приведенных условий прочности верно?

- 1) $\frac{2 \cdot Fa \cdot 32}{\pi \cdot d^3} \leq [\sigma]$
- 2) $\frac{\sqrt{2} \cdot Fa \cdot 32}{\pi \cdot d^3} \leq [\sigma]$
- 3) $\frac{\sqrt{2} \cdot Fa \cdot 16}{\pi \cdot d^3} \leq [\sigma]$
- 4) $\frac{2 \cdot Fa \cdot 16}{\pi \cdot d^3} \leq [\sigma]$

Тема 3

Вариант 1

Для данного консольного стержня, нагруженного продольной силой и сосредоточенными поперечными силами в двух взаимно перпендикулярных плоскостях, решить следующие задачи:

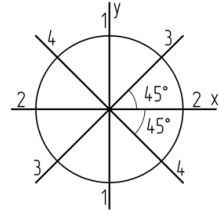


1. Какое сечение данной балки является опасным?

- 1) сечение «C» участка BC
- 2) сечение «C» участка CD
- 3) сечение «D» участка CD
- 4) сечения «C» и «D» участка CD равноопасны

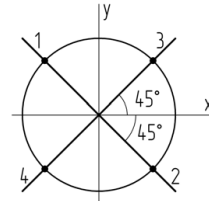
2. Для данной балки определите положение силовой линии в плоскости круглого поперечного сечения «С» участка CD.

- 1) 1–1
- 2) 2–2
- 3) 3–3
- 4) 4–4



3. Определите положение опасной точки в плоскости круглого сечения «С» участка CD данной балки.

- 1) точка «1»
- 2) точка «2»
- 3) точка «3»
- 4) точка «4»

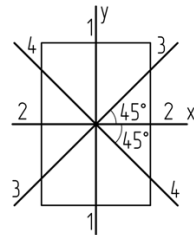


4. Выберите выражение для определения σ_{\max} , возникающего в опасной точке круглого сечения «С» участка CD данной балки.

- 1) $\sigma_{\max} = \frac{64 \cdot Fl}{\pi \cdot d^3} + \frac{4 \cdot F}{\pi \cdot d^2}$
- 2) $\sigma_{\max} = \frac{32 \cdot \sqrt{2} \cdot Fl}{\pi \cdot d^3} + \frac{8 \cdot F}{\pi \cdot d^2}$
- 3) $\sigma_{\max} = -\frac{32 \cdot \sqrt{2} \cdot Fl}{\pi \cdot d^3} - \frac{8 \cdot F}{\pi \cdot d^2}$
- 4) $\sigma_{\max} = \frac{64 \cdot Fl}{\pi \cdot d^3} + \frac{8 \cdot F}{\pi \cdot d^2}$

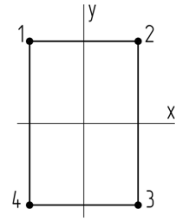
5. Определите положение силовой линии в плоскости прямоугольного сечения «D» участка CD данной балки.

- 1) 1–1
- 2) 2–2
- 3) 3–3
- 4) 4–4



6. Определите положение опасной точки в плоскости прямоугольного сечения «D» участка CD данной балки.

- 1) точка «1»
- 2) точка «2»
- 3) точка «3»
- 4) точка «4»

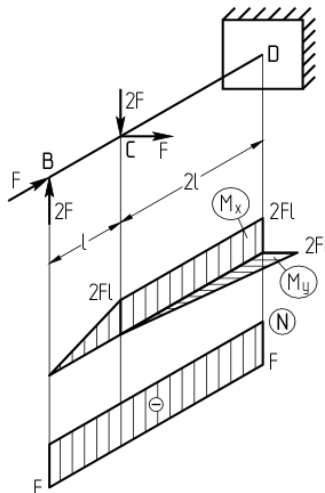


7. Выберите выражение для σ_{\max} , возникающего в опасной точке прямоугольного сечения «D» участка CD данной балки при соотношении сторон прямоугольника $h/b = 2$.

- 1) $\sigma_{\max} = \frac{4,5 \cdot Fl}{b^3} + \frac{F}{b^2}$
- 2) $\sigma_{\max} = -\frac{4,5 \cdot Fl}{b^3} - \frac{F}{b^2}$
- 3) $\sigma_{\max} = \frac{6 \cdot Fl}{b^3} + \frac{0,5 \cdot F}{b^2}$
- 4) $\sigma_{\max} = \frac{2 \cdot Fl}{b^3} + \frac{F}{b^2}$

Вариант 2

Для данного консольного стержня, нагруженного продольной силой и сосредоточенными поперечными силами в двух взаимно перпендикулярных плоскостях, решить следующие задачи:

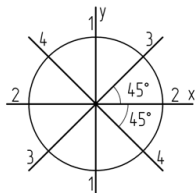


1. Какое сечение данной балки является опасным?

- 1) сечение «С» участка ВС
- 2) сечение «С» участка CD
- 3) сечение «D» участка CD
- 4) сечения «С» и «D» участка CD равноопасны

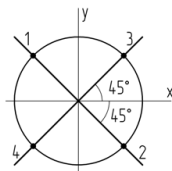
2. Для данной балки определите положение силовой линии в плоскости круглого поперечного сечения «С» участка CD.

- 1) 1–1
- 2) 2–2
- 3) 3–3
- 4) 4–4



3. Определите положение опасной точки в плоскости круглого сечения «D» участка CD данной балки.

- 1) точка «1»
- 2) точка «2»
- 3) точка «3»
- 4) точка «4»

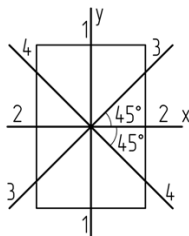


4. Выберите выражение для определения σ_{\max} , возникающего в опасной точке круглого сечения «D» участка CD данной балки.

- 1) $\sigma_{\max} = \frac{64 \cdot Fl}{\pi \cdot d^3} + \frac{4 \cdot F}{\pi \cdot d^2}$
- 2) $\sigma_{\max} = \frac{32 \cdot 2\sqrt{2}Fl}{\pi \cdot d^3} + \frac{4 \cdot F}{\pi \cdot d^2}$
- 3) $\sigma_{\max} = -\frac{32 \cdot 2\sqrt{2}Fl}{\pi \cdot d^3} - \frac{4 \cdot F}{\pi \cdot d^2}$
- 4) $\sigma_{\max} = \frac{64 \cdot Fl}{\pi \cdot d^3} + \frac{8 \cdot F}{\pi \cdot d^2}$

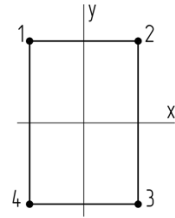
5. Определите положение силовой линии в плоскости прямоугольного сечения «D» участка CD данной балки.

- 1) 1–1
- 2) 2–2
- 3) 3–3
- 4) 4–4



6. Определите положение опасной точки в плоскости прямоугольного сечения «D» участка CD данной балки.

- 1) точка «1»
- 2) точка «2»
- 3) точка «3»
- 4) точка «4»



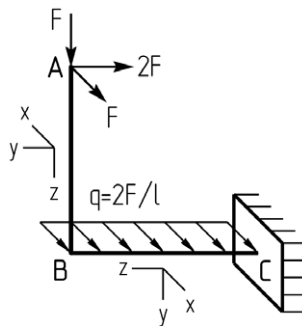
7. Выберите выражение для σ_{\max} , возникающего в опасной точке прямоугольного сечения «D» участка CD данной балки при соотношении сторон прямоугольника $h/b = 2$.

- 1) $\sigma_{\max} = \frac{4,5 \cdot Fl}{b^3} + \frac{F}{b^2}$
- 2) $\sigma_{\max} = -\frac{9 \cdot Fl}{b^3} - \frac{0,5 \cdot F}{b^2}$
- 3) $\sigma_{\max} = \frac{6 \cdot Fl}{b^3} + \frac{0,5 \cdot F}{b^2}$
- 4) $\sigma_{\max} = \frac{2 \cdot Fl}{b^3} + \frac{F}{b^2}$

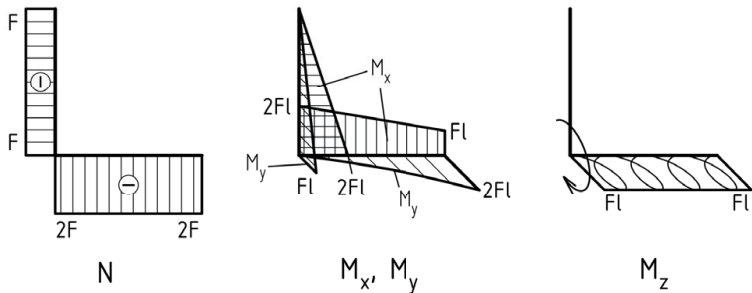
Тема 4

Вариант 1

Консольная рама, состоящая из двух элементов одинаковой длины l , изготовлена из пластичного материала и нагружена пространственной системой внешних сил.



Эпюры внутренних силовых факторов построены:



Поперечное сечение рамы круглое диаметром d или прямоугольное с соотношением длин сторон $h/b = 2$ и значениями коэффициентов $\beta = 0,493$, $\gamma = 0,795$.

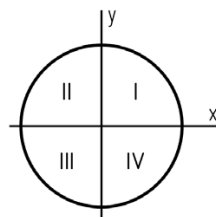
Используйте при необходимости III теорию предельного состояния.

1. Какое сечение данной рамы является наиболее опасным в случае круглой формы поперечного сечения?

- 1) сечение «В» элемента АВ
- 2) сечение «В» элемента ВС
- 3) сечение «С»
- 4) сечение «В» элемента ВС и «С» равноопасны

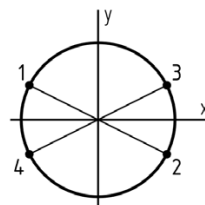
2. Как располагается силовая линия в плоскости круглого поперечного сечения «С» данной рамы?

- 1) совпадает с осью y
- 2) проходит через четверти I и III
- 3) совпадает с осью x
- 4) проходит через четверти II и IV



3. Какая точка круглого поперечного сечения «С» данной рамы является опасной?

- 1) точка «1»
- 2) точка «2»
- 3) точка «3»
- 4) точка «4»



4. Как записывается условие прочности для опасной точки круглого поперечного сечения «С» данной рамы?

$$1) \sqrt{\left(\frac{32 \cdot \sqrt{5} \cdot Fl}{\pi \cdot d^3} + \frac{8 \cdot F}{\pi \cdot d^2}\right)^2} + 4 \cdot \left(\frac{32 \cdot Fl}{\pi \cdot d^3}\right)^2 \leq [\sigma]$$

$$2) \sqrt{\left(\frac{160 \cdot Fl}{\pi \cdot d^3} + \frac{8 \cdot F}{\pi \cdot d^2}\right)^2} + 4 \cdot \left(\frac{16 \cdot Fl}{\pi \cdot d^3}\right)^2 \leq [\sigma]$$

$$3) \sqrt{\left(\frac{32 \cdot \sqrt{5} \cdot Fl}{\pi \cdot d^3} + \frac{8 \cdot F}{\pi \cdot d^2}\right)^2} + 4 \cdot \left(\frac{16 \cdot Fl}{\pi \cdot d^3}\right)^2 \leq [\sigma]$$

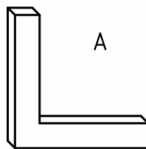
$$4) \sqrt{\left(\frac{32 \cdot \sqrt{5} \cdot Fl}{\pi \cdot d^3} + \frac{2 \cdot F}{\pi \cdot d^2}\right)^2} + \left(\frac{16 \cdot Fl}{\pi \cdot d^3}\right)^2 \leq [\sigma]$$

5. Какая форма рамы является более рациональной в случае прямоугольного поперечного сечения?

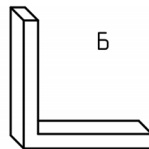
1) «А»

2) «Б»

3) оба варианта равнозначны



А



Б

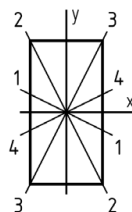
6. Как располагается силовая линия в плоскости прямоугольного поперечного сечения «С» данной рамы?

1) 1–1

2) 2–2

3) 3–3

4) 4–4



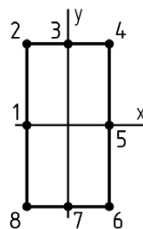
7. Какая тройка точек лежит в опасной четверти прямоугольного поперечного сечения «С» данной рамы?

1) точки «1», «2», «3»

2) точки «3», «4», «5»

3) точки «5», «6», «7»

4) точки «7», «8», «1»



8. Как записывается условие прочности для точки, находящейся в вершине опасной четверти прямоугольного поперечного сечения «С» данной рамы, при указанном выше расположении сечения?

$$1) \frac{6 \cdot Fl}{b^3} + \frac{F}{b^2} \leq [\sigma]$$

$$2) \frac{7,5 \cdot Fl}{b^3} + \frac{F}{b^2} \leq [\sigma]$$

$$3) \frac{6 \cdot Fl}{b^3} + \frac{2 \cdot F}{b^2} \leq [\sigma]$$

$$4) \sqrt{\left(\frac{7,5 \cdot Fl}{b^3} + \frac{F}{b^2}\right)^2} + 4 \cdot \left(\frac{Fl}{b^3}\right)^2 \leq [\sigma]$$

9. Как записывается условие прочности для точки, находящейся посередине длинной стороны в опасной четверти прямоугольного поперечного сечения «С» данной рамы, при указанном выше расположении сечения?

$$1) \sqrt{\left(\frac{7,5 \cdot Fl}{b^3} + \frac{2 \cdot F}{b^2}\right)^2} + 4 \cdot \left(\frac{Fl}{b^3}\right)^2 \leq [\sigma]$$

$$2) \sqrt{\left(\frac{3 \cdot Fl}{b^3} + \frac{F}{b^2}\right)^2} + 4 \cdot \left(\frac{1,613 \cdot Fl}{b^3}\right)^2 \leq [\sigma]$$

$$3) \sqrt{\left(\frac{1,5 \cdot Fl}{b^3} + \frac{F}{b^2}\right)^2} + \left(\frac{1,258 \cdot Fl}{b^3}\right)^2 \leq [\sigma]$$

$$4) \sqrt{\left(\frac{6 \cdot Fl}{b^3} + \frac{F}{b^2}\right)^2} + 4 \cdot \left(\frac{2,028 \cdot Fl}{b^3}\right)^2 \leq [\sigma]$$

10. Как записывается условие прочности для точки, находящейся посередине короткой стороны в опасной четверти прямоугольного поперечного сечения «С» данной рамы, при указанном выше расположении сечения?

$$1) \sqrt{\left(\frac{3 \cdot Fl}{b^3} + \frac{2 \cdot F}{b^2}\right)^2} + 4 \cdot \left(\frac{2,028 \cdot Fl}{b^3}\right)^2 \leq [\sigma]$$

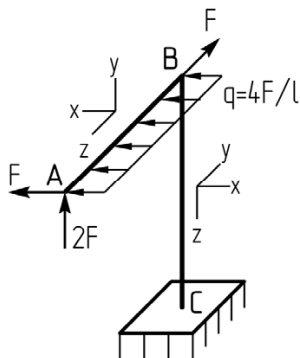
$$2) \sqrt{\left(\frac{1,5 \cdot Fl}{b^3} + \frac{F}{b^2}\right)^2} + 4 \cdot \left(\frac{1,613 \cdot Fl}{b^3}\right)^2 \leq [\sigma]$$

$$3) \sqrt{\left(\frac{6 \cdot Fl}{b^3} + \frac{F}{b^2}\right)^2 + 4 \cdot \left(\frac{1,258 \cdot Fl}{b^3}\right)^2} \leq [\sigma]$$

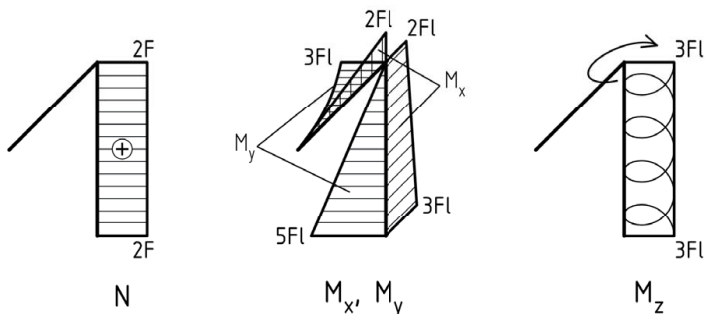
$$4) \sqrt{\left(\frac{7,5 \cdot Fl}{b^3} + \frac{F}{b^2}\right)^2 + 3 \cdot \left(\frac{Fl}{b^3}\right)^2} \leq [\sigma]$$

Вариант 2

Консольная рама, состоящая из двух элементов одинаковой длины l , изготовлена из пластичного материала и нагружена пространственной системой внешних сил.



Эпюры внутренних силовых факторов построены:



Поперечное сечение рамы круглое диаметром d или прямоугольное с соотношением длин сторон $h/b = 2$ и значениями коэффициентов $\beta = 0,493$, $\gamma = 0,795$.

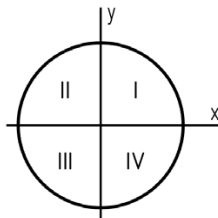
Используйте при необходимости III теорию предельного состояния.

1. Какое сечение данной рамы является наиболее опасным в случае круглой формы поперечного сечения?

- 1) сечение «А»
- 2) сечение «В» элемента АВ
- 3) сечение «В» элемента ВС
- 4) сечение «С»

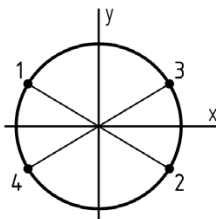
2. Как располагается силовая линия в плоскости круглого поперечного сечения «С» данной рамы?

- 1) совпадает с осью y
- 2) проходит через четверти I и III
- 3) совпадает с осью x
- 4) проходит через четверти II и IV



3. Какая точка круглого поперечного сечения «С» данной рамы является опасной?

- 1) точка «1»
- 2) точка «2»
- 3) точка «3»
- 4) точка «4»

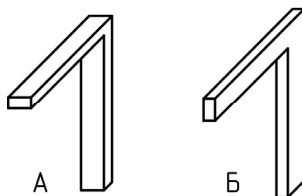


4. Как записывается условие прочности для опасной точки круглого поперечного сечения «С» данной рамы?

- 1) $\sqrt{\left(\frac{32 \cdot \sqrt{5} \cdot Fl}{\pi \cdot d^3} + \frac{2 \cdot F}{\pi \cdot d^2}\right)^2} + 4 \cdot \left(\frac{96 \cdot Fl}{\pi \cdot d^3}\right)^2 \leq [\sigma]$
- 2) $\sqrt{\left(\frac{256 \cdot Fl}{\pi \cdot d^3} + \frac{8 \cdot F}{\pi \cdot d^2}\right)^2} + \left(\frac{16 \cdot Fl}{\pi \cdot d^3}\right)^2 \leq [\sigma]$
- 3) $\sqrt{\left(\frac{256 \cdot Fl}{\pi \cdot d^3} + \frac{8 \cdot F}{\pi \cdot d^2}\right)^2} + 4 \cdot \left(\frac{48 \cdot Fl}{\pi \cdot d^3}\right)^2 \leq [\sigma]$
- 4) $\sqrt{\left(\frac{32 \cdot \sqrt{34} \cdot Fl}{\pi \cdot d^3} + \frac{8 \cdot F}{\pi \cdot d^2}\right)^2} + 4 \cdot \left(\frac{48 \cdot Fl}{\pi \cdot d^3}\right)^2 \leq [\sigma]$

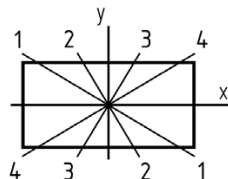
5. Какая форма рамы является более рациональной в случае прямоугольного поперечного сечения?

- 1) «А»
- 2) «Б»
- 3) оба варианта равнозначны



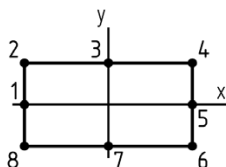
6. Как располагается силовая линия в плоскости прямоугольного поперечного сечения «С» данной рамы?

- 1) 1–1
- 2) 2–2
- 3) 3–3
- 4) 4–4



7. Какая тройка точек лежит в опасной четверти прямоугольного поперечного сечения «С» данной рамы?

- 1) точки «1», «2», «3»
- 2) точки «3», «4», «5»
- 3) точки «5», «6», «7»
- 4) точки «7», «8», «1»



8. Как записывается условие прочности для точки, находящейся в вершине опасной четверти прямоугольного поперечного сечения «С» данной рамы, при указанном выше расположении сечения?

- 1) $\frac{19,5 \cdot Fl}{b^3} + \frac{2 \cdot F}{b^2} \leq [\sigma]$
- 2) $\frac{16,5 \cdot Fl}{b^3} + \frac{F}{b^2} \leq [\sigma]$
- 3) $\frac{19,5 \cdot Fl}{b^3} + \frac{F}{b^2} \leq [\sigma]$
- 4) $\sqrt{\left(\frac{16,5 \cdot Fl}{b^3} + \frac{F}{b^2}\right)^2 + 4 \cdot \left(\frac{3 \cdot Fl}{b^3}\right)^2} \leq [\sigma]$

9. Как записывается условие прочности для точки, находящейся посередине длинной стороны в опасной четверти прямоугольного поперечного сечения «С» данной рамы, при указанном выше расположении сечения?

$$1) \sqrt{\left(\frac{9 \cdot Fl}{b^3} + \frac{F}{b^2}\right)^2 + 4 \cdot \left(\frac{6,085 \cdot Fl}{b^3}\right)^2} \leq [\sigma]$$

$$2) \sqrt{\left(\frac{4,5 \cdot Fl}{b^3} + \frac{F}{b^2}\right)^2 + 4 \cdot \left(\frac{4,838 \cdot Fl}{b^3}\right)^2} \leq [\sigma]$$

$$3) \sqrt{\left(\frac{7,5 \cdot Fl}{b^3} + \frac{F}{b^2}\right)^2 + 3 \cdot \left(\frac{3,774 \cdot Fl}{b^3}\right)^2} \leq [\sigma]$$

$$4) \sqrt{\left(\frac{15 \cdot Fl}{b^3} + \frac{F}{b^2}\right)^2 + 3 \cdot \left(\frac{3 \cdot Fl}{b^3}\right)^2} \leq [\sigma]$$

10. Как записывается условие прочности для точки, находящейся посередине короткой стороны в опасной четверти прямоугольного поперечного сечения «С» данной рамы, при указанном выше расположении сечения?

$$1) \sqrt{\left(\frac{4,5 \cdot Fl}{b^3} + \frac{F}{b^2}\right)^2 + 4 \cdot \left(\frac{6,085 \cdot Fl}{b^3}\right)^2} \leq [\sigma]$$

$$2) \sqrt{\left(\frac{9 \cdot Fl}{b^3} + \frac{F}{b^2}\right)^2 + 3 \cdot \left(\frac{3 \cdot Fl}{b^3}\right)^2} \leq [\sigma]$$

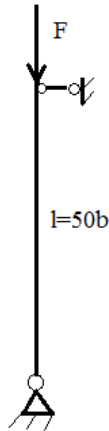
$$3) \sqrt{\left(\frac{7,5 \cdot Fl}{b^3} + \frac{F}{b^2}\right)^2 + 4 \cdot \left(\frac{4,838 \cdot Fl}{b^3}\right)^2} \leq [\sigma]$$

$$4) \sqrt{\left(\frac{15 \cdot Fl}{b^3} + \frac{F}{b^2}\right)^2 + 3 \cdot \left(\frac{3,774 \cdot Fl}{b^3}\right)^2} \leq [\sigma]$$

Тема 5

Вариант 1

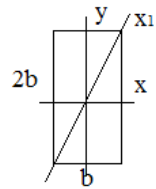
Для стойки длиной $l = 50b$ с заданными условиями закрепления



1. Определить величину коэффициента приведения длины μ .

- 1) $\mu = 0,7$
- 2) $\mu = 1$
- 3) $\mu = 0,5$
- 4) $\mu = 2$

2. Определить, относительно какой оси она обладает максимальной гибкостью, если поперечное сечение – прямоугольник со сторонами: $2b \times b$.

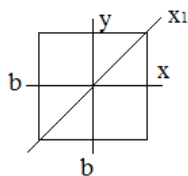


- 1) $\lambda_{\max} = \lambda_y$
- 2) $\lambda_{\max} = \lambda_x$
- 3) $\lambda_{\max} = \lambda_{x1}$
- 4) $\lambda_{\max} = \lambda_y = \lambda_{x1}$

3. Определить величину максимальной гибкости для данного прямоугольного сечения.

- 1) $\lambda_{\max} = 50\sqrt{3}$
- 2) $\lambda_{\max} = 100\sqrt{3}$
- 3) $\lambda_{\max} = 150\sqrt{3}$
- 4) $\lambda_{\max} = 200\sqrt{3}$

4. Определить, относительно какой оси она обладает максимальной гибкостью, если поперечное сечение – квадрат со сторонами $b \times b$.



- 1) $\lambda_{\max} = \lambda_y$
- 2) $\lambda_{\max} = \lambda_x$
- 3) $\lambda_{\max} = \lambda_{x1}$
- 4) $\lambda_{\max} = \lambda_y = \lambda_x$
- 5) $\lambda_{\max} = \lambda_y = \lambda_x = \lambda_{x1}$

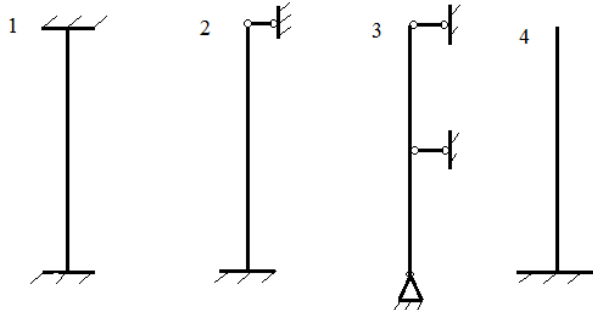
5. Определить величину максимальной гибкости для данного квадратного сечения.

- 1) $\lambda_{\max} = 50\sqrt{3}$
- 2) $\lambda_{\max} = 100\sqrt{3}$
- 3) $\lambda_{\max} = 150\sqrt{3}$
- 4) $\lambda_{\max} = 200\sqrt{3}$

6. Определить соотношение максимальных гибкостей данной стойки для случая прямоугольного сечения со сторонами $2b \times b$ и квадратного сечения со сторонами $b \times b$.

- 1) $\lambda_{\max}^{\text{квадр}} = \lambda_{\max}^{\text{прямоуг}}$
- 2) $\lambda_{\max}^{\text{квадр}} < \lambda_{\max}^{\text{прямоуг}}$
- 3) $\lambda_{\max}^{\text{квадр}} > \lambda_{\max}^{\text{прямоуг}}$

7. Выберите вариант условий закрепления для исходной стойки, чтобы уменьшить ее максимальную гибкость в 2 раза.



- 1) 2-й и 3-й варианты
- 2) 2-й вариант
- 3) 4-й вариант
- 4) 1-й и 3-й варианты

8. Какая из приведенных выше стоек имеет минимальный коэффициент приведения длины?

- 1) 1 и 3
- 2) 2
- 3) 4
- 4) 2 и 3

9. Для какой из вышеприведенных стоек критическая сила, определяемая по формуле Эйлера, имеет минимальное значение, если стойки отличаются только условиями закрепления?

- 1) 1
- 2) 2
- 3) 3
- 4) 4

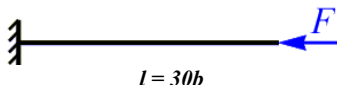
10. Методом линейной интерполяции определите с точностью до сотых долей коэффициент снижения основного допускаемого напряжения φ для стойки, обладающей гибкостью $\lambda = 93,2$, используя справочные данные:

λ	φ
90	0,69
100	0,6

- 1) 0,66
- 2) 0,64
- 3) 0,68
- 4) 0,72

Вариант 2

Для сжатого стержня длиной $l = 30b$ с заданными условиями закрепления



1. Определить величину коэффициента приведения длины μ .

- 1) $\mu = 0,7$
- 2) $\mu = 1$
- 3) $\mu = 0,5$
- 4) $\mu = 2$

2. Определить величину максимальной гибкости стержня, если его поперечное сечение – прямоугольник со сторонами $3b \times b$.

- 1) $\lambda_{\max} = 60\sqrt{3}$
- 2) $\lambda_{\max} = 120\sqrt{3}$
- 3) $\lambda_{\max} = 150\sqrt{3}$
- 4) $\lambda_{\max} = 200\sqrt{3}$

3. Определить величину максимальной гибкости стержня, если его поперечное сечение – квадрат со сторонами $2b \times 2b$.

- 1) $\lambda_{\max} = 60\sqrt{3}$
- 2) $\lambda_{\max} = 100\sqrt{3}$
- 3) $\lambda_{\max} = 120\sqrt{3}$
- 4) $\lambda_{\max} = 200\sqrt{3}$

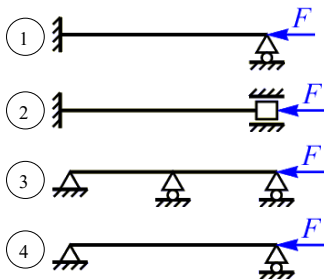
4. Определить соотношение максимальных гибкостей данного стержня для случая прямоугольного сечения со сторонами $3b \times b$ и квадратного сечения со сторонами $2b \times 2b$.

- 1) $\lambda_{\max}^{\text{квадр}} = \lambda_{\max}^{\text{прямоуг}}$
- 2) $\lambda_{\max}^{\text{квадр}} < \lambda_{\max}^{\text{прямоуг}}$
- 3) $\lambda_{\max}^{\text{квадр}} > \lambda_{\max}^{\text{прямоуг}}$

5. Определить соотношение критических сил данного стержня, найденных по формуле Эйлера, для случая прямоугольного сечения со сторонами $3b \times b$ и квадратного сечения со сторонами $2b \times 2b$.

- 1) $F_{\text{кр}}^{\text{квадр}} = F_{\text{кр}}^{\text{прямоуг}}$
- 2) $F_{\text{кр}}^{\text{квадр}} < F_{\text{кр}}^{\text{прямоуг}}$
- 3) $F_{\text{кр}}^{\text{квадр}} > F_{\text{кр}}^{\text{прямоуг}}$

6. Выберите вариант условий закрепления для исходного стержня, чтобы уменьшить его максимальную гибкость в 2 раза.



- 1) 2-й и 3-й варианты
- 2) 2-й вариант
- 3) 4-й вариант
- 4) 1-й и 3-й варианты

7. Какой из приведенных выше стержней имеет минимальный коэффициент приведения длины?

- 1) 1 и 3
- 2) 2 и 3
- 3) 4
- 4) 2

8. У какого из приведенных выше стержней коэффициент приведения длины $\mu = 0,7$?

- 1) 1
- 2) 2
- 3) 3
- 4) 4

9. Для какого из вышеприведенных стержней критическая сила, определяемая по формуле Эйлера, имеет минимальное значение, если стержни отличаются только условиями закрепления?

- 1) 1
- 2) 2
- 3) 3
- 4) 4

10. Методом линейной интерполяции определите с точностью до сотых долей коэффициент снижения основного допускаемого напряжения φ для стержня, обладающего гибкостью $\lambda = 67,7$, используя справочные данные:

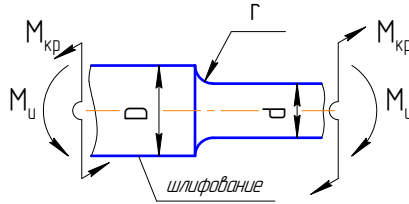
λ	φ
60	0,86
70	0,81

- 1) 0,81
- 2) 0,84
- 3) 0,82
- 4) 0,83

Тема 6

Вариант 1

Фрагмент вала с концентратором напряжений в виде галтели испытывает повторно-переменный изгиб с кручением. $D = 75$ мм, $d = 60$ мм, $r = 5$ мм, $M_{\text{н}}^{\text{min}} = -2$ кНм; $M_{\text{н}}^{\text{max}} = 2$ кНм; $M_{\text{кр}}^{\text{min}} = 0,45$ кНм; $M_{\text{кр}}^{\text{max}} = 1,5$ кНм. Вал изготовлен из стали 40ХН с механическими характеристиками: $\sigma_{\text{в}} = 1000$ МПа, $\sigma_{\text{Т}} = 800$ МПа, $\sigma_{-1} = 400$ МПа, $\tau_{\text{Т}} = 390$ МПа, $\tau_{-1} = 240$ МПа и имеет шлифованную поверхность.



1. Чему равен коэффициент асимметрии цикла нормальных напряжений, возникающих в опасном сечении данного вала?

1) $R_{\sigma} = \frac{M_{\text{н}}^{\text{min}}}{M_{\text{н}}^{\text{max}}} = -1$

2) $R_{\sigma} = -\frac{M_{\text{н}}^{\text{min}}}{M_{\text{н}}^{\text{max}}} = 1$

3) $R_{\sigma} = \frac{M_{\text{н}}^{\text{min}} - M_{\text{н}}^{\text{max}}}{M_{\text{н}}^{\text{min}} + M_{\text{н}}^{\text{max}}} = \infty$

4) $R_{\sigma} = \frac{M_{\text{н}}^{\text{min}} + M_{\text{н}}^{\text{max}}}{M_{\text{н}}^{\text{min}} - M_{\text{н}}^{\text{max}}} = 0$

2. Чему равен коэффициент асимметрии цикла касательных напряжений, возникающих в опасном сечении данного вала?

1) $R_{\tau} = -\frac{M_{\text{кр}}^{\text{min}}}{M_{\text{кр}}^{\text{max}}} = -0,3$

2) $R_{\tau} = \frac{M_{\text{кр}}^{\text{min}}}{M_{\text{кр}}^{\text{max}}} = 0,3$

3) $R_{\tau} = \frac{M_{\text{кр}}^{\text{min}} - M_{\text{кр}}^{\text{max}}}{M_{\text{кр}}^{\text{min}} + M_{\text{кр}}^{\text{max}}} = -0,538$

4) $R_{\tau} = \frac{M_{\text{кр}}^{\text{min}} + M_{\text{кр}}^{\text{max}}}{M_{\text{кр}}^{\text{min}} - M_{\text{кр}}^{\text{max}}} = -1,875$

3. Чему равно амплитудное нормальное напряжение цикла в опасном сечении данного вала, если $\sigma_{\max} = 94,36$ МПа, а $R_{\sigma} = -1$?

- 1) $\sigma_a = -94,36$ МПа
- 2) $\sigma_a = 0$
- 3) $\sigma_a = 47,18$ МПа
- 4) $\sigma_a = 94,36$ МПа

4. Чему равно амплитудное касательное напряжение цикла в опасном сечении данного вала, если $\tau_{\max} = 35,4$ МПа, а $R_{\tau} = 0,3$?

- 1) $\tau_a = 12,39$ МПа
- 2) $\tau_a = 23,1$ МПа
- 3) $\tau_a = 24,78$ МПа
- 4) $\tau_a = -12,39$ МПа

5. Чему равно среднее нормальное напряжение цикла в опасном сечении данного вала, если $\sigma_{\max} = 141,54$ МПа, а $R_{\sigma} = -1$?

- 1) $\sigma_m = 141,54$ МПа
- 2) $\sigma_m = 0$
- 3) $\sigma_m = 70,77$ МПа
- 4) $\sigma_m = -141,54$ МПа

6. Чему равно среднее касательное напряжение цикла в опасном сечении данного вала, если $\tau_{\max} = 35,4$ МПа, а $R_{\tau} = 0,3$?

- 1) $\tau_m = 12,39$ МПа
- 2) $\tau_m = 24,78$ МПа
- 3) $\tau_m = 23,01$ МПа
- 4) $\tau_m = -12,39$ МПа

7. Чему равен поправочный коэффициент к амплитудному нормальному напряжению, если коэффициенты, учитывающие влияние конструктивно-технологических факторов на усталостную прочность детали, следующие: $K_{\sigma} = 1,76$; $K_{d\sigma} = 0,675$; $K_F = 0,87$?

- 1) $K_{D\sigma} = \frac{K_{\sigma}}{K_F \cdot K_{d\sigma}} = 2,997$
- 2) $K_{D\sigma} = \frac{K_{d\sigma} \cdot K_F}{K_{\sigma}} = 0,438$

$$3) K_{d\sigma} = \frac{K_{d\sigma}}{K_F \cdot K_\sigma} = 0,517$$

$$4) K_{d\sigma} = \frac{K_F}{K_\sigma \cdot K_{d\sigma}} = 0,702$$

8. Чему равен поправочный коэффициент к амплитудному касательному напряжению, если коэффициенты, учитывающие влияние конструктивно-технологических факторов на усталостную прочность детали, следующие: $K_\tau = 1,42$; $K_{d\tau} = 0,675$; $K_F = 0,87$?

$$1) K_{d\tau} = \frac{K_\tau}{K_F \cdot K_{d\tau}} = 2,418$$

$$2) K_{d\tau} = \frac{K_{d\tau} \cdot K_F}{K_\tau} = 0,497$$

$$3) K_{d\tau} = \frac{K_{d\tau}}{K_F \cdot K_\tau} = 0,587$$

$$4) K_{d\tau} = \frac{K_F}{K_\tau \cdot K_{d\tau}} = 1,09$$

9. Чему равен коэффициент запаса усталостной прочности по нормальным напряжениям, если $\sigma_{-1} = 400$ МПа, $\sigma_a = 94,36$ МПа, $\sigma_m = 0$? Коэффициенты, учитывающие влияние конструктивно-технологических факторов на усталостную прочность детали, следующие: $K_\sigma = 1,76$, $K_{d\sigma} = 0,675$, $K_F = 0,87$, $\psi_\sigma = 0,2$.

$$1) n_\sigma = \frac{\sigma_{-1}}{\sigma_m \cdot \frac{K_\sigma}{K_{F\sigma} \cdot K_{d\sigma}} + \sigma_a \cdot \psi_\sigma} = 56,52$$

$$2) n_\sigma = \frac{\sigma_{-1}}{\sigma_a \cdot \frac{K_\sigma}{K_{F\sigma} \cdot K_{d\sigma}} - \sigma_m \cdot \psi_\sigma} = 1,41$$

$$3) n_\sigma = \frac{\sigma_{-1}}{\sigma_a \cdot \frac{K_\sigma}{K_{F\sigma} \cdot K_{d\sigma}} + \sigma_m \cdot \psi_\sigma} = 1,41$$

$$4) n_\sigma = \frac{\sigma_{-1}}{\sigma_a \cdot \frac{K_{d\sigma}}{K_{F\sigma} \cdot K_\sigma} + \sigma_m \cdot \psi_\sigma} = 5,46$$

10. Чему равен коэффициент запаса усталостной прочности по касательным напряжениям, если $\tau_{-1} = 240$ МПа, $\tau_a = 12,39$ МПа, $\tau_m = 23,01$ МПа? Коэффициенты, учитывающие влияние конструктивно-технологических факторов на усталостную прочность детали по касательным напряжениям, следующие: $K_\tau = 1,42$, $K_{d\tau} = 0,675$, $K_F = 0,87$, $\psi_\tau = 0,1$.

$$1) n_\tau = \frac{\tau_{-1}}{\tau_a \cdot \frac{K_\tau}{K_{F\tau} \cdot K_{d\tau}} - \tau_m \cdot \psi_\tau} = 8,68$$

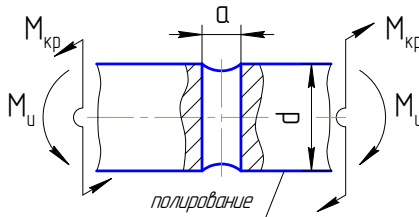
$$2) n_\tau = \frac{\tau_{-1}}{\tau_a \cdot \frac{K_\tau}{K_{F\tau} \cdot K_{d\tau}} + \tau_m \cdot \psi_\tau} = 7,44$$

$$3) n_\tau = \frac{\tau_{-1}}{\tau_m \cdot \frac{K_\tau}{K_{F\tau} \cdot K_{d\tau}} + \tau_a \cdot \psi_\tau} = 4,22$$

$$4) n_\tau = \frac{\tau_{-1}}{\tau_a \cdot \frac{K_{d\tau}}{K_{F\tau} \cdot K_\tau} + \tau_m \cdot \psi_\tau} = 26,46$$

Вариант 2

Фрагмент вала с концентратором напряжений в виде сквозного отверстия испытывает повторно-переменный изгиб с кручением; $d = 70$ мм, $a = 5$ мм, $M_{и}^{\min} = 0$; $M_{и}^{\max} = 2$ кНм; $M_{кр}^{\min} = -0,5$ кНм; $M_{кр}^{\max} = 1$ кНм. Вал изготовлен из стали 45 с механическими характеристиками: $\sigma_B = 600$ МПа, $\sigma_T = 360$ МПа, $\sigma_{-1} = 300$ МПа, $\tau_T = 230$ МПа, $\tau_{-1} = 180$ МПа и имеет полированную поверхность.



1. Чему равен коэффициент асимметрии цикла нормальных напряжений, возникающих в опасном сечении данного вала?

- 1) $R_\sigma = -1$
- 2) $R_\sigma = 1$
- 3) $R_\sigma = \infty$
- 4) $R_\sigma = 0$

2. Чему равен коэффициент асимметрии цикла касательных напряжений, возникающих в опасном сечении данного вала?

- 1) $R_\tau = 0,3$
- 2) $R_\tau = -0,3$
- 3) $R_\tau = -0,5$
- 4) $R_\tau = -1,8$

3. Чему равно амплитудное нормальное напряжение цикла в опасном сечении данного вала, если $\sigma_{\max} = 76,05$ МПа, а $R_\sigma = 0$?

- 1) $\sigma_a = 94,36$ МПа
- 2) $\sigma_a = 0$
- 3) $\sigma_a = 38,03$ МПа
- 4) $\sigma_a = -94,36$ МПа

4. Чему равно амплитудное касательное напряжение цикла в опасном сечении данного вала, если $\tau_{\max} = 26$ МПа, а $R_\tau = -0,5$?

- 1) $\tau_a = 19,5$ МПа
- 2) $\tau_a = 23,1$ МПа
- 3) $\tau_a = 38,03$ МПа
- 4) $\tau_a = -19,5$ МПа

5. Чему равно среднее нормальное напряжение цикла в опасном сечении данного вала, если $\sigma_{\max} = 76,05$ МПа, а $R_\sigma = 0$?

- 1) $\sigma_m = 76,05$ МПа
- 2) $\sigma_m = 0$
- 3) $\sigma_m = -76,05$ МПа
- 4) $\sigma_m = 38,03$ МПа

6. Чему равно среднее касательное напряжение цикла в опасном сечении данного вала, если $\tau_{\max} = 26$ МПа, а $R_\tau = -0,5$?

- 1) $\tau_m = 13$ МПа
- 2) $\tau_m = 6,5$ МПа

3) $\tau_m = 0$

4) $\tau_m = -13$ МПа

7. Чему равен поправочный коэффициент к амплитудному нормальному напряжению, если коэффициенты, учитывающие влияние конструктивно-технологических факторов на усталостную прочность детали, следующие: $K_\sigma = 2$; $K_{d\sigma} = 0,76$; $K_F = 1$?

1) $K_{d\sigma} = 2,63$

2) $K_{d\sigma} = 0,38$

3) $K_{d\sigma} = 1,57$

4) $K_{d\sigma} = 0,78$

8. Чему равен поправочный коэффициент к амплитудному касательному напряжению, если коэффициенты, учитывающие влияние конструктивно-технологических факторов на усталостную прочность детали, следующие: $K_\tau = 1,75$; $K_{d\tau} = 0,65$; $K_F = 1$?

1) $K_{d\tau} = 0,88$

2) $K_{d\tau} = 2,69$

3) $K_{d\tau} = 0,37$

4) $K_{d\tau} = 1,09$

9. Чему равен коэффициент запаса усталостной прочности по нормальным напряжениям, если $\sigma_{-1} = 300$ МПа, $\sigma_a = 38,03$ МПа, $\sigma_m = 38,03$ МПа? Коэффициенты, учитывающие влияние конструктивно-технологических факторов на усталостную прочность детали, следующие: $K_\sigma = 2$, $K_{d\sigma} = 0,76$, $K_F = 1$, $\psi_\sigma = 0,05$.

1) $n_\sigma = 1,24$

2) $n_\sigma = 3,95$

3) $n_\sigma = 2,94$

4) $n_\sigma = 5,46$

10. Чему равен коэффициент запаса усталостной прочности по касательным напряжениям, если $\tau_{-1} = 180$ МПа, $\tau_a = 19,5$ МПа, $\tau_m = 6,5$ МПа? Коэффициенты, учитывающие влияние конструктивно-технологических факторов на усталостную прочность детали по касательным напряжениям, следующие: $K_\tau = 1,75$, $K_{d\tau} = 0,65$, $K_F = 1$, $\psi_\tau = 0$.

1) $n_\tau = 7,44$

2) $n_\tau = 2,68$

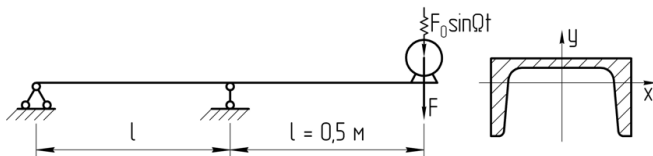
3) $n_\tau = 4,22$

4) $n_\tau = 3,43$

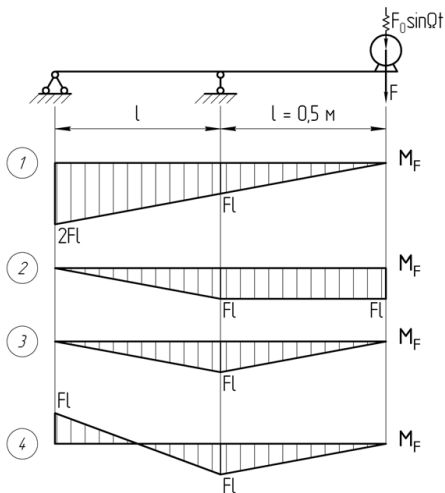
Тема 7

Вариант 1

На консольном участке двухопорной балки установлен электродвигатель весом $F = 0,5$ кН. Число оборотов электродвигателя $N = 600$ об/мин. Амплитудное значение центробежной силы, возникающей при вращении ротора, $F_0 = 0,2F$. Поперечное сечение балки – швеллер № 10 с осевым моментом инерции $I_x = 20,4$ см⁴ и осевым моментом сопротивления $W_x = 6,46$ см³. Материал балки – Ст.3 с допускаемым напряжением $[\sigma] = 160$ МПа и модулем упругости $E = 2 \cdot 10^5$ МПа. Силами сопротивления пренебречь.



1. Укажите номер правильной грузовой эпюры изгибающих моментов M_F от статического действия силы, равной весу двигателя F .



2. Чему равно максимальное статическое напряжение $\sigma_{\text{ст max}}(F)$?

1) $\sigma_{\text{ст max}}(F) = 85,14 \text{ МПа}$

2) $\sigma_{\text{ст max}}(F) = 38,70 \text{ МПа}$

3) $\sigma_{\text{ст max}}(F) = 56,30 \text{ МПа}$

4) $\sigma_{\text{ст max}}(F) = 26,82 \text{ МПа}$

3. Чему равно максимальное статическое напряжение $\sigma_{\text{ст max}}(F_0)$?

1) $\sigma_{\text{ст max}}(F_0) = 7,74 \text{ МПа}$

2) $\sigma_{\text{ст max}}(F_0) = 5,89 \text{ МПа}$

3) $\sigma_{\text{ст max}}(F_0) = 10,32 \text{ МПа}$

4) $\sigma_{\text{ст max}}(F_0) = 13,58 \text{ МПа}$

4. Чему равна податливость упругой системы δ_{11} ?

1) $\delta_{11} = \frac{2l^3}{3EI_x}$

2) $\delta_{11} = \frac{16l^3}{3EI_x}$

3) $\delta_{11} = \frac{4l^3}{3EI_x}$

4) $\delta_{11} = \frac{l^3}{3EI_x}$

5. Чему равна частота собственных колебаний ω , если $g \approx 10 \text{ м/сек}^2$?

1) $\omega = 138,54 \text{ сек}^{-1}$

2) $\omega = 34,63 \text{ сек}^{-1}$

3) $\omega = 67,27 \text{ сек}^{-1}$

4) $\omega = 98,95 \text{ сек}^{-1}$

6. Чему равна частота вынужденных колебаний Ω ?

1) $\Omega = 51,32 \text{ сек}^{-1}$

2) $\Omega = 62,83 \text{ сек}^{-1}$

3) $\Omega = 87,47 \text{ сек}^{-1}$

4) $\Omega = 121,13 \text{ сек}^{-1}$

7. Чему равен коэффициент усиления колебаний β ?

1) $\beta = 1,68$

2) $\beta = 1,35$

3) $\beta = 2,14$

4) $\beta = 2,63$

8. Чему равно максимальное напряжение в балке σ_{\max} при работающем электродвигателе?

- 1) $\sigma_{\max} = 38,92$ МПа
- 2) $\sigma_{\max} = 184,42$ МПа
- 3) $\sigma_{\max} = 105,37$ МПа
- 4) $\sigma_{\max} = 51,70$ МПа

9. Выполняется ли условие прочности?

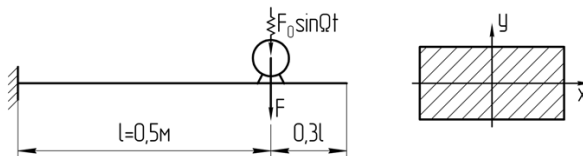
- 1) выполняется
- 2) не выполняется

10. Чему равно значение параметра l_p , при котором наступает явление резонанса?

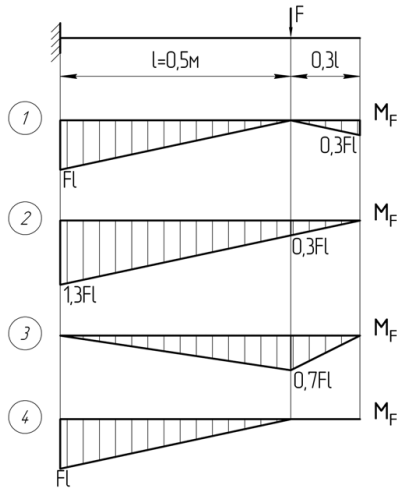
- 1) $l_p = 0,42$ м
- 2) $l_p = 0,68$ м
- 3) $l_p = 0,85$ м
- 4) $l_p = 1,21$ м

Вариант 2

На деревянной балке с жестким защемлением установлен электродвигатель весом $F = 0,6$ кН. Число оборотов электродвигателя $N = 700$ об/мин. Амплитудное значение центробежной силы, возникающей при вращении ротора, $F_0 = 0,15$ кН. Поперечное сечение балки – прямоугольник с осевым моментом инерции $I_x = 180$ см⁴ и осевым моментом сопротивления $W_x = 60$ см³. Материал балки – дерево с допускаемым напряжением $[\sigma] = 30$ МПа и модулем упругости $E = 10^4$ МПа. Силами сопротивления пренебречь.



1. Укажите номер правильной грузовой эпюры изгибающих моментов M_F от статического действия силы, равной весу двигателя F .



2. Чему равно максимальное статическое напряжение $\sigma_{\text{ст max}}(F)$?

- 1) $\sigma_{\text{ст max}}(F) = 6,5 \text{ МПа}$
- 2) $\sigma_{\text{ст max}}(F) = 5 \text{ МПа}$
- 3) $\sigma_{\text{ст max}}(F) = 1,5 \text{ МПа}$
- 4) $\sigma_{\text{ст max}}(F) = 2,5 \text{ МПа}$

3. Чему равно максимальное статическое напряжение $\sigma_{\text{ст max}}(F_0)$?

- 1) $\sigma_{\text{ст max}}(F_0) = 0,625 \text{ МПа}$
- 2) $\sigma_{\text{ст max}}(F_0) = 1,625 \text{ МПа}$
- 3) $\sigma_{\text{ст max}}(F_0) = 2,5 \text{ МПа}$
- 4) $\sigma_{\text{ст max}}(F_0) = 0,375 \text{ МПа}$

4. Чему равна податливость упругой системы δ_{11} ?

- 1) $\delta_{11} = \frac{0,333l^3}{EI_x}$
- 2) $\delta_{11} = \frac{0,732l^3}{EI_x}$
- 3) $\delta_{11} = \frac{0,212l^3}{EI_x}$
- 4) $\delta_{11} = \frac{0,586l^3}{EI_x}$

5. Чему равна частота собственных колебаний ω , если $g \approx 10 \text{ м/сек}^2$?

- 1) $\omega = 32,1 \text{ сек}^{-1}$
- 2) $\omega = 84,9 \text{ сек}^{-1}$
- 3) $\omega = 61,3 \text{ сек}^{-1}$
- 4) $\omega = 98,2 \text{ сек}^{-1}$

6. Чему равна частота вынужденных колебаний Ω ?

- 1) $\Omega = 104,3 \text{ сек}^{-1}$
- 2) $\Omega = 56,8 \text{ сек}^{-1}$
- 3) $\Omega = 73,3 \text{ сек}^{-1}$
- 4) $\Omega = 85,4 \text{ сек}^{-1}$

7. Чему равен коэффициент усиления колебаний β ?

- 1) $\beta = 2,6$
- 2) $\beta = 1,4$
- 3) $\beta = 3,2$
- 4) $\beta = 3,9$

8. Чему равно максимальное напряжение в балке σ_{\max} при работающем электродвигателе?

- 1) $\sigma_{\max} = 14,75 \text{ МПа}$
- 2) $\sigma_{\max} = 32,16 \text{ МПа}$
- 3) $\sigma_{\max} = 45,62 \text{ МПа}$
- 4) $\sigma_{\max} = 21,47 \text{ МПа}$

9. Выполняется ли условие прочности?

- 1) выполняется
- 2) не выполняется

10. Чему равно значение параметра l_p , при котором наступает явление резонанса?

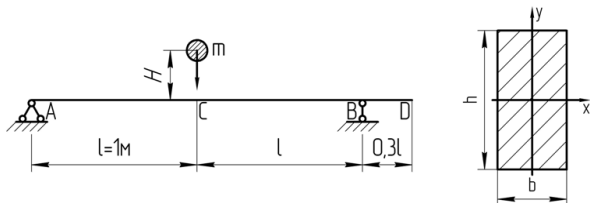
- 1) $l_p = 0,82 \text{ м}$
- 2) $l_p = 0,36 \text{ м}$
- 3) $l_p = 1,18 \text{ м}$
- 4) $l_p = 0,55 \text{ м}$

Тема 8

Вариант 1

На деревянную двухопорную балку с высоты $H = 0,4$ м свободно падает абсолютно жесткое тело массой $m = 45$ кг. Поперечное сечение балки – прямоугольник со сторонами $b = 10$ см и $h = 18$ см.

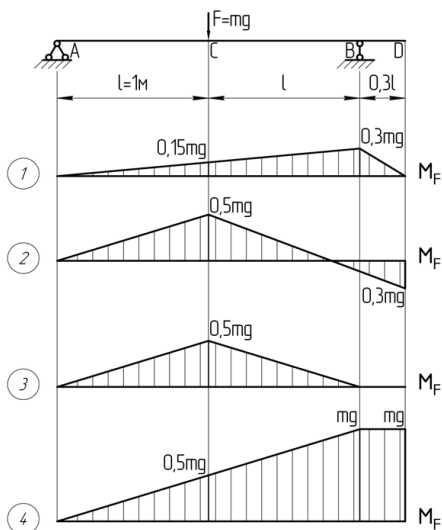
Принять: ускорение свободного падения $g \approx 10$ м/сек²; для дерева $[\sigma] = 30$ МПа, $E = 10^4$ МПа; допускаемый прогиб балки $[\delta] = 2$ мм.



1. Чему равны геометрические характеристики прямоугольного сечения балки I_x и W_x ?

- 1) $I_x = 1620 \text{ см}^4$ $W_x = 135 \text{ см}^3$
- 2) $I_x = 4860 \text{ см}^4$ $W_x = 540 \text{ см}^3$
- 3) $I_x = 1215 \text{ см}^4$ $W_x = 270 \text{ см}^3$
- 4) $I_x = 2840 \text{ см}^4$ $W_x = 325 \text{ см}^3$

2. Какой вид имеет грузовая эпюра M_F от действия силы $F = mg$, приложенной статически в ударяемом сечении «С» балки?



3. Какое сечение балки является наиболее опасным?

- 1) А
- 2) В
- 3) С
- 4) D

4. Чему равно максимальное статическое напряжение балки?

- 1) $\sigma_{\text{ст max}} = 0,417 \text{ МПа}$
- 2) $\sigma_{\text{ст max}} = 3,232 \text{ МПа}$
- 3) $\sigma_{\text{ст max}} = 1,586 \text{ МПа}$
- 4) $\sigma_{\text{ст max}} = 2,705 \text{ МПа}$

5. Чему равна податливость упругой балки?

- 1) $\delta_{11} = \frac{2}{3EI_x}$
- 2) $\delta_{11} = \frac{1}{12EI_x}$
- 3) $\delta_{11} = \frac{1}{48EI_x}$
- 4) $\delta_{11} = \frac{1}{6EI_x}$

6. Чему равен коэффициент динамичности?

- 1) $K_d = 102$
- 2) $K_d = 72$
- 3) $K_d = 36$
- 4) $K_d = 204$

7. Выполняется ли условие прочности?

- 1) выполняется
- 2) не выполняется

8. В каком сечении балки возникает максимальный статический прогиб?

- 1) А
- 2) В
- 3) С
- 4) D

9. Чему равен максимальный статический прогиб балки?

- 1) $\delta_{\text{ст max}} = 0,068 \text{ мм}$
- 2) $\delta_{\text{ст max}} = 0,15 \text{ мм}$
- 3) $\delta_{\text{ст max}} = 0,029 \text{ мм}$
- 4) $\delta_{\text{ст max}} = 0,098 \text{ мм}$

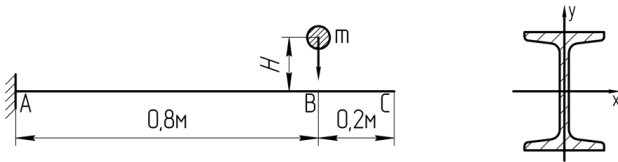
10. Выполняется ли условие жесткости?

- 1) выполняется
- 2) не выполняется

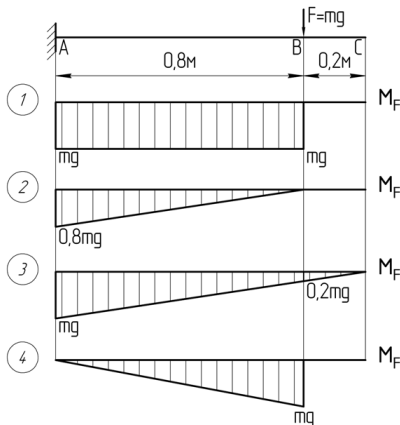
Вариант 2

На стальную упругую балку с жестким защемлением с высоты $H = 0,6 \text{ м}$ свободно падает абсолютно жесткое тело массой m . Поперечное сечение балки – двутавр № 20 с осевым моментом инерции $I_x = 1840 \text{ см}^4$ и осевым моментом сопротивления $W_x = 184 \text{ см}^3$.

Принять: ускорение свободного падения $g \approx 10 \text{ м/сек}^2$; для стали $[\sigma] = 160 \text{ МПа}$, $E = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа}$; допускаемый прогиб балки $[\delta] = 1 \text{ мм}$.



1. Какой вид имеет грузовая эпюра M_F от действия силы $F = mg$, приложенной статически в ударяемом сечении «В» балки?



2. Какое сечение балки является наиболее опасным?

- 1) А
- 2) В
- 3) С
- 4) Все сечения равноопасны

3. Чему равно максимальное статическое напряжение в долях параметра m ?

- 1) $\sigma_{\text{ст max}} = 0,062m$ (МПа)
- 2) $\sigma_{\text{ст max}} = 0,025m$ (МПа)
- 3) $\sigma_{\text{ст max}} = 0,043m$ (МПа)
- 4) $\sigma_{\text{ст max}} = 0,112m$ (МПа)

4. Чему равна податливость упругой балки?

- 1) $\delta_{11} = \frac{0,65}{EI_x}$
- 2) $\delta_{11} = \frac{0,38}{EI_x}$
- 3) $\delta_{11} = \frac{0,82}{EI_x}$
- 4) $\delta_{11} = \frac{0,17}{EI_x}$

5. Чему равен коэффициент динамичности в долях параметра массы m ?

- 1) $K_d = \frac{1611,7}{\sqrt{m}}$
- 2) $K_d = \frac{546,3}{\sqrt{m}}$
- 3) $K_d = \frac{830,5}{\sqrt{m}}$
- 4) $K_d = \frac{1842,6}{\sqrt{m}}$

6. Чему равно допускаемое значение массы падающего тела $[m]$ из условия прочности?

- 1) $[m] = 8,12$ кг
- 2) $[m] = 3,86$ кг

3) $[m] = 5,33$ кг

4) $[m] = 2,15$ кг

7. Чему равно численное значение коэффициента динамичности?

1) $K_d = 121$

2) $K_d = 698$

3) $K_d = 356$

4) $K_d = 92$

8. В каком сечении балки возникает максимальный статический прогиб?

1) А

2) В

3) С

9. Чему равен максимальный статический прогиб при $m = [m]$?

1) $\delta_{ст\max} = 0,102$ мм

2) $\delta_{ст\max} = 0,019$ мм

3) $\delta_{ст\max} = 0,0072$ мм

4) $\delta_{ст\max} = 0,0034$ мм

10. Выполняется ли условие жесткости?

1) выполняется

2) не выполняется

Ответы к тестам

№ вопроса		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Тема 1	Вариант 1	1	2	3	4	1	1	2	4	4	3
	Вариант 2	1	1	4	4	2	1	3	3	2	4
Тема 2	Вариант 1	3	1	2	1	2	4	—	—	—	—
	Вариант 2	4	2	1	2	3	2	—	—	—	—
Тема 3	Вариант 1	4	4	1	2	4	3	1	—	—	—
	Вариант 2	3	1	3	3	3	2	2	—	—	—
Тема 4	Вариант 1	3	2	3	3	3	4	2	2	4	2
	Вариант 2	4	4	2	4	1	1	3	2	1	3
Тема 5	Вариант 1	2	1	2	5	2	1	4	1	4	1
	Вариант 2	4	2	1	2	3	3	2	1	4	3
Тема 6	Вариант 1	1	2	4	1	2	3	1	1	3	2
	Вариант 2	4	3	3	1	4	2	1	2	3	4
Тема 7	Вариант 1	3	2	1	1	4	2	1	4	1	2
	Вариант 2	4	2	3	1	2	3	4	1	1	4
Тема 8	Вариант 1	2	3	3	1	4	2	1	3	2	2
	Вариант 2	2	1	3	4	1	3	2	3	4	2

Задания для выполнения контрольных работ

Правила выполнения и оформления контрольных работ

По дисциплине «Соппротивление материалов» для студентов заочной формы обучения учебным планом предусмотрено выполнение двух контрольных работ, содержание которых изложено в этом приложении. Каждая контрольная работа состоит из набора задач, план выполнения которых прилагается. Правила выполнения и оформления контрольных работ следующие.

Каждому студенту преподаватель назначает индивидуальный трехзначный номер варианта, согласно которому тот выбирает исходные данные для своих контрольных заданий.

В каждой задаче контрольной работы указано, что означает каждая цифра трехзначного варианта. Как правило, первая цифра варианта в приведенных таблицах исходных данных означает номер схемы конструкции, вторая и третья могут определять значения линейных размеров, величины нагрузок и другие данные. Таблица с пронумерованными расчетными схемами приводится отдельно. Для выбранных таким образом нагруженных расчетных схем необходимо выполнить сформулированное задание.

Контрольные работы оформляются либо в электронном виде, либо на листах формата А4, скрепленных степлером, либо в школьной тетради в клетку. Титульный лист к каждой контрольной работе оформляется по образцу, приведенному в данном приложении. Для каждой задачи указывается её номер, название темы, изображается расчетная схема конструкции в масштабе исходных данных по своему варианту. Значения линейных размеров и значения приложенных нагрузок указываются на самой расчетной схеме. Остальные данные варианта (если они есть) приводятся правее схемы. Решение каждой задачи рекомендуется производить согласно приведенному плану по мере изучения соответствующего материала дисциплины (см. ссылки в конце каждой темы данного практикума).

Выполненные контрольные работы представляются на проверку в сроки, указанные в плане-графике учебного процесса, лично преподавателю, либо на его электронный адрес (в электронном виде), либо экспресс-почтой (в рукописном виде) на адрес кафедры: 445667, Россия, Самарская область, г. Тольятти, ул. Белорусская, 14, ТГУ, кафедра «Нанотехнологии, материаловедение и механика», Ф.И.О. преподавателя.

Министерство образования и науки Российской Федерации
Тольяттинский государственный университет
Институт машиностроения
Кафедра «Нанотехнологии, материаловедение и механика»

Контрольная работа №1

по дисциплине «Сопротивление материалов»

Вариант № _____

Студент _____

Группа _____

Преподаватель _____

Оценка _____

« ____ » _____ 20 ____ г.

Тольятти 20 ____

**Задача 1.1. Расчет на прочность и жесткость
статически неопределимых балок**

Статически неопределимая балка испытывает действие внешних сил и моментов. Раскрыть статическую неопределимость балки, подобрать из условия прочности двутавровое сечение и проверить выполнение условия жесткости.

Материал балки – сталь Ст3: $[\sigma] = 160$ МПа, $E = 2 \cdot 10^5$ МПа. Жесткость всех участков балки постоянна: $EI_x = \text{const}$. Принять $[\delta] = L_{\max} \cdot 10^{-3}$ м, где L_{\max} – длина максимального пролета балки (пролет – расстояние между опорами).

Исходные данные – в табл. 1.1.1 и 1.1.2.

План решения

1. Раскрыть статическую неопределимость балки методом сил.
2. Построить эпюру изгибающих моментов и провести проверку правильности решения.
3. Установить положение опасного сечения балки и из условия прочности подобрать двутавровое сечение.
4. Определить прогиб в месте предполагаемой наибольшей деформации, показав приближенный вид изогнутой оси балки, и проверить выполнение условия жесткости.

Таблица 1.1.1

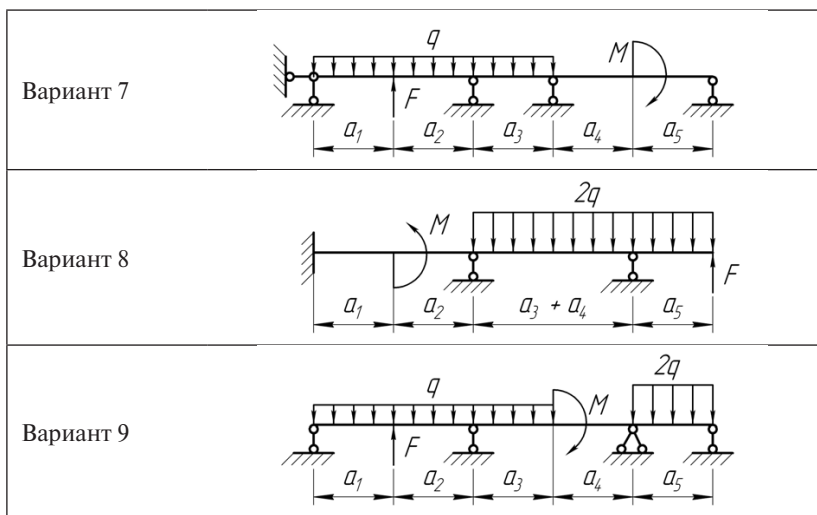
Исходные данные вариантов

Варианты схем	Варианты линейных размеров						Варианты нагрузок			
№ вар.	№ вар.	a_1 , м	a_2 , м	a_3 , м	a_4 , м	a_5 , м	№ вар.	q , кН/м	F , кН	M , кН·м
0	0	1,5	2,0	0,6	1,2	1,9	0	15	20	30
1	1	2,0	1,8	0,7	1,4	1,6	1	10	30	40
2	2	1,2	1,6	1,0	0,8	1,2	2	10	40	35
3	3	1,8	1,4	0,8	0,6	2,0	3	20	50	25
4	4	1,4	1,2	0,5	1,0	1,4	4	15	25	30
5	5	1,7	1,9	0,7	1,3	1,6	5	20	20	35
6	6	1,6	1,7	0,9	0,9	1,8	6	10	35	40
7	7	1,9	1,5	0,6	1,1	1,8	7	15	45	50
8	8	1,3	1,3	0,8	0,7	1,5	8	15	40	45
9	9	2,0	1,2	0,6	1,4	1,3	9	10	60	30

Примечание. Первая цифра варианта означает номер схемы балки, вторая – номер строки линейных размеров, третья – номер строки значений нагрузок.

Расчетные схемы балок

Вариант 0	
Вариант 1	
Вариант 2	
Вариант 3	
Вариант 4	
Вариант 5	
Вариант 6	



Задача 1.2. Расчет на прочность при сложном сопротивлении

Консольная рама нагружена пространственной системой внешних сил. Длина элементов рамы одинакова и равна l . Материал рамы – сталь Ст3 с допускаемым напряжением $[\sigma] = 160$ МПа. Требуется подобрать для рамы из условия прочности диаметр круглого поперечного сечения d , а также размеры прямоугольного сечения b и h . Сравнить подобранные сечения с точки зрения металлоемкости.

При наличии в опасной точке нормальных и касательных напряжений использовать заданную теорию предельного состояния.

План решения

1. Вычертить расчетную схему рамы с указанием числовых значений нагрузок. Исходные данные представлены в табл. 1.2.1 и 1.2.2.

Примечание. Знак «—» перед величинами силовых нагрузок в таблице 1.2.1 означает, что направление действия соответствующей нагрузки противоположно указанному на расчетной схеме (табл. 1.2.2).

2. Построить эпюры продольной силы N , изгибающих моментов M_x и M_y и крутящего момента M_z .
3. Для каждого варианта поперечного сечения (круг и прямоугольник):
 - подобрать размеры сечения из условия прочности для элемента II (в случае прямоугольного сечения предварительно указать рациональное его расположение);

- выполнить проверку прочности выбранного сечения для элемента I; если условие прочности не выполняется, изменить размеры сечения и повторить проверку.

4. Сравнить круглое и прямоугольное сечения по экономичности.

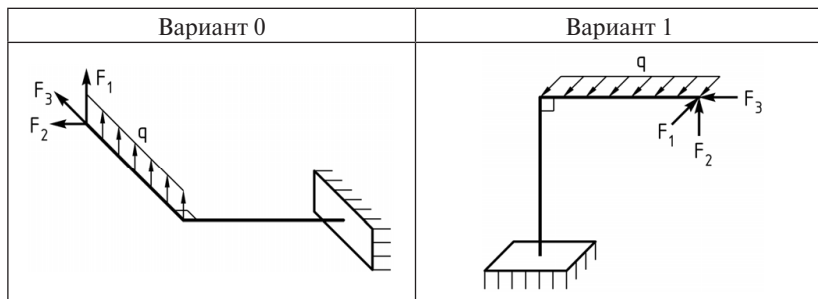
Таблица 1.2.1

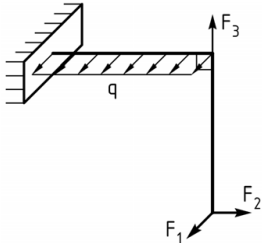
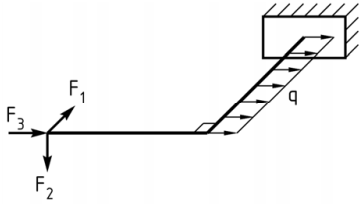
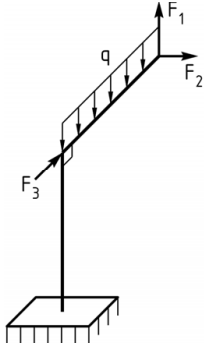
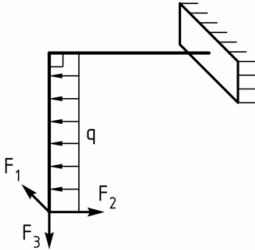
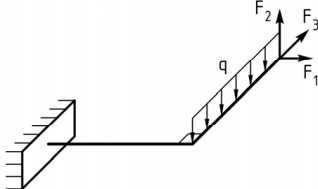
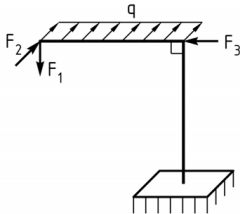
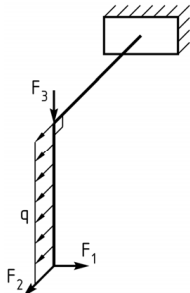
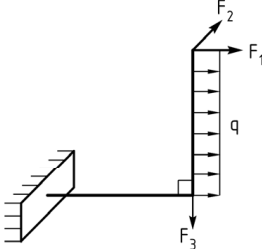
Исходные данные вариантов

Первая цифра варианта	Вторая цифра варианта				Третья цифра варианта				
	№ вар.	l , м	h/b	Теория пред. сост.	№ вар.	F_1 , кН	F_2 , кН	F_3 , кН	q , кН/м
0	0	0,5	1,5	III	0	4,5	3,5	1,5	2
1	1	0,6	2	IV	1	-5	2,5	1	2
2	2	0,7	1,6	III	2	3,5	-2,5	5,5	1,5
3	3	0,8	1,7	IV	3	6	4	-1,5	3
4	4	0,9	1,8	III	4	2	1,5	4	-1
5	5	1	1,9	IV	5	5,5	3	1	2,5
6	6	0,6	1,4	III	6	-3	2	5	1,5
7	7	0,7	1,2	IV	7	2,5	-2	4,5	1
8	8	0,8	3	III	8	4	1,5	-6	1
9	9	0,9	1,5	IV	9	5	4,5	2	-2,5

Таблица 1.2.2

Расчетные схемы рам



<p style="text-align: center;">Вариант 2</p> 	<p style="text-align: center;">Вариант 3</p> 
<p style="text-align: center;">Вариант 4</p> 	<p style="text-align: center;">Вариант 5</p> 
<p style="text-align: center;">Вариант 6</p> 	<p style="text-align: center;">Вариант 7</p> 
<p style="text-align: center;">Вариант 8</p> 	<p style="text-align: center;">Вариант 9</p> 

Министерство образования и науки Российской Федерации
Тольяттинский государственный университет
Институт машиностроения
Кафедра «Нанотехнологии, материаловедение и механика»

Контрольная работа №2

по дисциплине «Сопротивление материалов»

Вариант № _____

Студент _____

Группа _____

Преподаватель _____

Оценка _____

« ____ » _____ 20__ г.

Тольятти 20____

Задача 2.1. Расчет сжатых стержней на устойчивость

Поперечное сечение центрально сжатой стойки составлено из стальных прокатных профилей, соединенных в сплошное сечение при помощи диагональной решетки из стальных планок. Определить: допускаемую нагрузку из условия устойчивости, критическую нагрузку и коэффициент запаса устойчивости – для стойки заданной формы поперечного сечения, а также для стойки кольцевого сечения. Оба сечения имеют одинаковую площадь, для кольца известно соотношение диаметров: $\alpha = d/D = 0,9$. Исходные данные взять из табл. 2.1.1, 2.1.2, 2.1.3.

План решения

Для стойки с заданным составным сечением:

1. Определить расстояние x из условия равноустойчивости сечения.
2. Определить наибольшую допускаемую величину сжимающей нагрузки на стойку, используя коэффициент продольного изгиба.
3. Определить величину критической нагрузки и коэффициента запаса устойчивости стойки, приняв:
 - для Ст. 2 – $\lambda_0 = 60$, $\lambda_{\text{пред}} = 105$, $a = 245$ МПа, $b = 0,67$ МПа;
 - для Ст. 3 – $\lambda_0 = 61$, $\lambda_{\text{пред}} = 101$, $a = 304$ МПа, $b = 1,12$ МПа;
 - для Ст. 5 – $\lambda_0 = 55$, $\lambda_{\text{пред}} = 90$, $a = 342$ МПа, $b = 1,39$ МПа.
4. Повторить п. 2 и 3 для стойки с равновеликим по площади кольцевым сечением при всех прочих равных условиях.
5. Провести сравнение двух стоек с разными поперечными сечениями по грузоподъемности.

Таблица 2.1.1

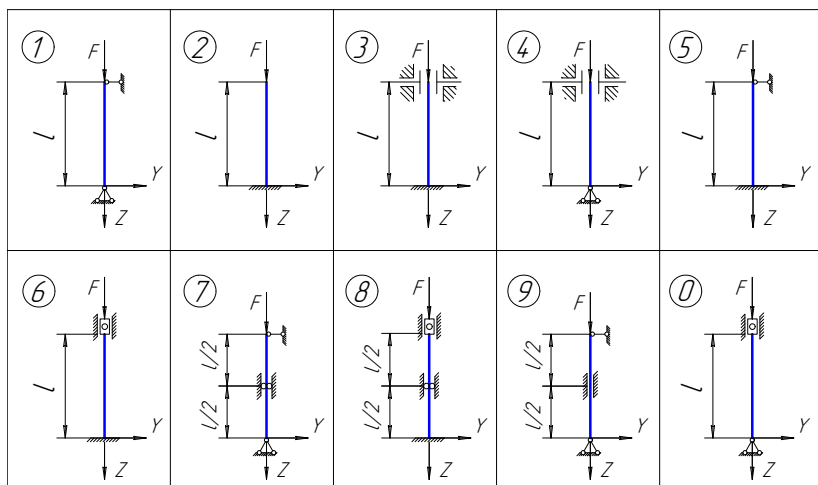
Исходные данные вариантов

<i>Первая цифра варианта</i>			<i>Вторая цифра варианта</i>				<i>Третья цифра варианта</i>					
Вид закрепления и длина стойки			Схема составного сечения и материал профилей				Размеры прокатных профилей по сортаменту					
№ вар.	№ схемы стойки (табл. 2.1.2)	l , м	№ вар.	№ схемы сечения (табл. 2.1.3)	Марка стали	[σ], МПа	№ вар.	Двутавр №	Швеллер №	Уголок равнобокий №	Уголок неравнобокий №	s , см
0	0	8,5	0	4	Ст.2	140	0	12	10	5	7,5/5	2,2
1	1	5,7	1	3	Ст.3	160	1	14	16	5,6	11/7	0

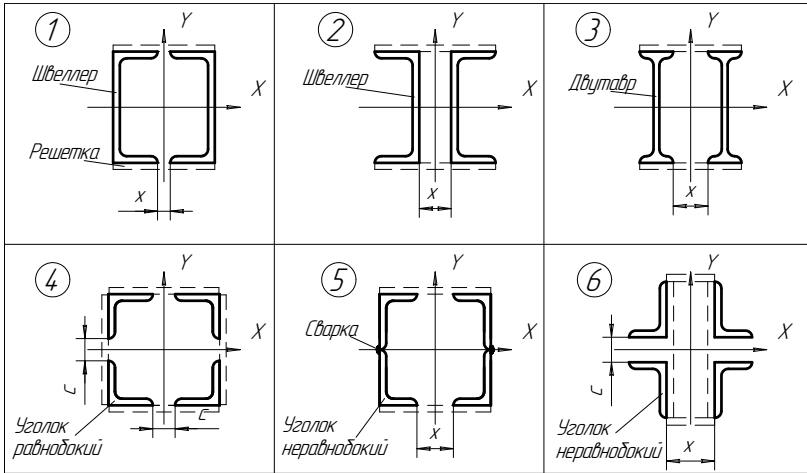
Первая цифра варианта Вид закрепления и длина стойки			Вторая цифра варианта Схема составного сечения и материал профилей				Третья цифра варианта Размеры прокатных профилей по сортаменту					
№ вар.	№ схемы стойки (табл. 2.1.2)	l , м	№ вар.	№ схемы сечения (табл. 2.1.3)	Марка стали	$[\sigma]$, МПа	№ вар.	Двутавр №	Швеллер №	Уголок рав- нобокий №	Уголок неравнобо- кий №	c , см
2	2	2,8	2	2	Ст.5	180	2	10	18а	6,3	9/5,6	1,4
3	3	6,0	3	1	Ст.2	140	3	16	12	7	7,5/5	2,0
4	4	3,0	4	6	Ст.3	160	4	22	14	7,5	11/7	0,8
5	5	8,1	5	5	Ст.5	180	5	20	20	8	10/6,3	1,2
6	6	12,0	6	2	Ст.2	140	6	20а	16а	9	9/5,6	1,8
7	7	11,3	7	1	Ст.3	160	7	18	18	10	10/6,3	1,0
8	8	16,2	8	4	Ст.5	180	8	22а	14а	5	7,5/5	2,4
9	9	17,1	9	3	Ст.3	160	9	18а	22	7	9/5,6	1,6

Таблица 2.1.2

Схемы закрепления стойки



Схемы составных сечений



**Задача 2.2. Расчет на прочность
при повторно-переменных нагрузках**

Вал редуктора, представляющий собой стержень круглого сечения с концентратором напряжений, подвергается действию изгибающего и крутящего моментов, изменяющихся по синусоидальному закону.

Определить коэффициент запаса прочности вала по выносливости и текучести. Исходные данные взять из табл. 2.2.1–2.2.4.

План решения

1. Определить характеристики циклов переменных напряжений от изгиба и кручения в ослабленном сечении вала.
2. Построить графики циклов переменных напряжений при произвольном периоде их изменения и указать все найденные характеристики циклов.
3. Определить коэффициенты, учитывающие влияние конструктивно-технологических факторов и асимметрии циклов на предел выносливости по изгибу и кручению.
4. Определить коэффициенты запаса прочности вала по выносливости от изгиба и от кручения.
5. Определить коэффициенты запаса прочности вала по выносливости и текучести от совместного действия изгиба и кручения. Сделать заключение по расчету.

Таблица 2.2.1

Исходные данные вариантов

Тип концентратора и материала			Варианты нагрузок				
№ вар.	№пп табл. 2.2.2	№пп табл. 2.2.3	№ вар.	$M_{и}^{max}$, кН·м	$M_{и}^{min}$, кН·м	$M_{к}^{max}$, кН·м	$M_{к}^{max}$, кН·м
0	1	5	0	0,60	-0,60	3,00	1,50
1	2	7	1	0,72	-0,48	1,06	-0,63
2	3	3	2	0,80	-0,40	1,70	0,17
3	4	1	3	1,32	-0,11	1,10	-0,55
4	3	2	4	1,50	0,30	2,75	1,10
5	1	4	5	2,00	0,80	1,50	0,15
6	4	5	6	1,20	0	2,20	0,55
7	2	8	7	1,20	-0,40	1,68	0
8	1	6	8	1,50	0,64	0,80	-0,80
9	4	2	9	0,95	-0,95	0,96	-0,96
Варианты конструктивных размеров и состояния поверхности валов							
№ вар.	D , мм	d , мм	r , мм	a , мм	b , мм	c , мм	№пп табл. 2.2.4
0	55	50	2,0	2,5	16	6,0	5
1	60	52	2,1	4,0	16	6,0	2
2	65	55	3,3	5,5	16	6,0	3
3	65	60	4,8	7,2	18	7,0	5
4	85	63	6,3	8,8	18	7,0	4
5	75	65	5,2	10,4	18	7,0	1
6	75	70	1,4	12,6	20	7,5	3
7	85	60	9,0	12,0	18	7,0	4
8	75	55	5,5	10,0	16	6,0	2
9	90	65	6,5	15,6	18	7,0	3

Примечание. При решении использовать размеры валов, соответствующие заданной схеме концентратора.

Типы концентраторов напряжений

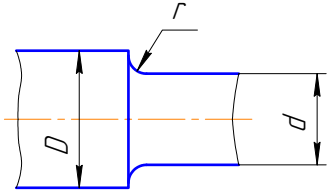
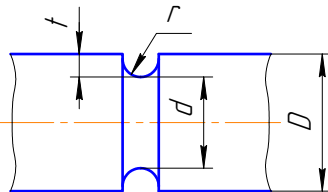
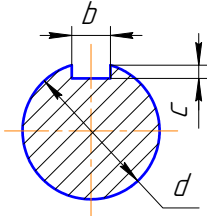
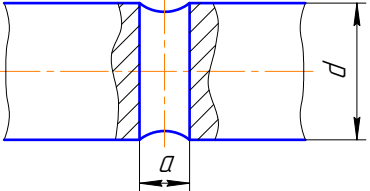
№ п/п	Наименование	Схема концентратора
1	Галтель	 <p>The diagram shows a cylindrical part with a diameter D on the left and a diameter d on the right. A fillet with a radius r smoothly transitions between the two diameters. A dashed horizontal line indicates the central axis.</p>
2	Выточка круглая $t = \frac{D-d}{2}$	 <p>The diagram shows a cylindrical part with a diameter D. It has a circular groove with a diameter d and a depth t. The groove has a rounded bottom with a radius r. A dashed horizontal line indicates the central axis.</p>
3	Паз шпоночный	 <p>The diagram shows a circular cross-section of a shaft with a diameter d. A keyway is cut into the shaft, with a key width b and a key height c. The area of the keyway is shaded with diagonal lines.</p>
4	Отверстие поперечное	 <p>The diagram shows a cylindrical part with a diameter D. It has a transverse hole with a diameter d and a width b. The hole is shaded with diagonal lines. A dashed horizontal line indicates the central axis.</p>

Таблица 2.2.3

Механические свойства материалов валов, МПа

№ п/п	Материал	σ_B , МПа	σ_r , МПа	σ_{-1} , МПа	τ_r , МПа	τ_{-1} , МПа
1	Сталь 45	600	360	300	230	180
2	Сталь 20Х	800	650	380	380	200
3	Сталь 50	640	380	320	220	200
4	Сталь 40	580	340	280	200	180
5	Сталь 30ХН3А	1000	800	600	460	360
6	Сталь 60	700	410	380	200	200
7	Сталь 40ХН	1000	800	400	390	240
8	Сталь 30ХМ	950	750	380	430	230

Таблица 2.2.4

Качество обработанной поверхности валов

№ п/п	Вид обработки
1	Полирование
2	Шлифование
3	Грубая обточка
4	Тонкая обточка
5	Наличие окалины

Задача 2.3. Расчет на прочность и жесткость балки при поперечном ударе

На упругую балку заданного поперечного сечения с высоты H свободно падает абсолютно жесткое тело массой m . Определить допустимую величину массы падающего тела $[m]$, при которой будет обеспечена прочность балки. Проверить выполнение условия жесткости, приняв $[\delta] = 10^{-3} \cdot L$, где L – расстояние между опорами. Массой балки пренебречь.

План решения

1. Определить геометрические характеристики сложного сечения балки.
2. Исходную балку статически нагрузить силой, равной по величине весу падающего тела, приложенной в точке удара и действующей в направлении удара.
3. Для полученной таким образом схемы выполнить статический прочностной расчет (в долях массы m):
 - построить грузовую эпюру изгибающих моментов M_F и определить положение опасного сечения;
 - найти максимальное статическое напряжение $|\sigma_{ст}|_{\max}$.
4. Определить динамический коэффициент (в долях массы m).
5. Записать условие прочности при ударе, из которого подобрать допустимую величину массы падающего тела $[m]$.
6. Изобразить приближенный вид изогнутой оси балки и определить максимальный статический прогиб $\delta_{ст \max}$ при $m = [m]$.
7. Определить максимальный динамический прогиб балки и проверить выполнение условия жесткости.

Примечание. Вариант задания выбирается по схеме:

- 1-я цифра варианта – номер схемы балки (табл. 2.3.1);
- 2-я цифра варианта – номер поперечного сечения (табл. 2.3.2);
- 3-я цифра варианта – номер строки числовых данных (табл. 2.3.3).

Схемы балок

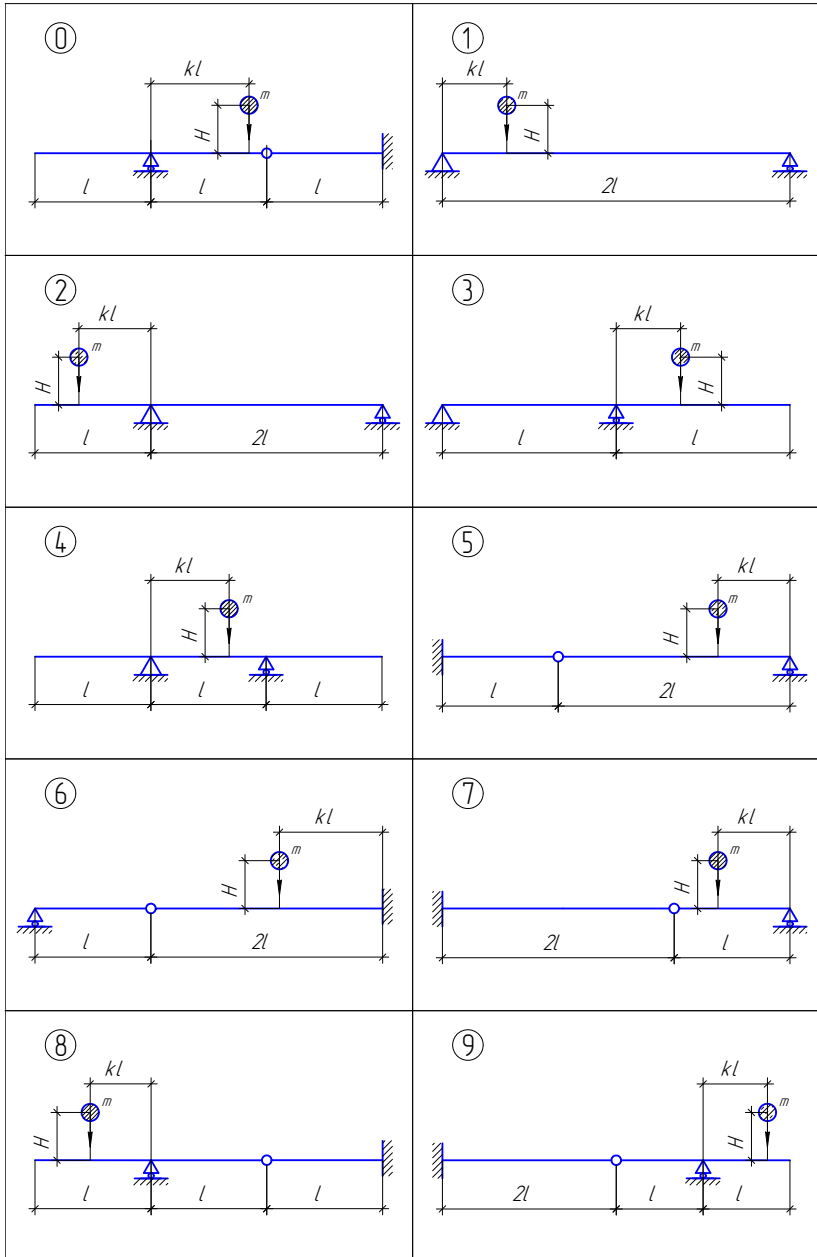


Таблица 2.3.2

Схемы поперечных сечений

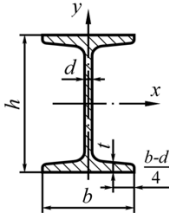
<p>Сталь: $E=2 \cdot 10^5$ МПа $[\sigma]=160$ МПа</p>	①	
	②	
	③	
	④	
	⑤	
<p>Дерево: $E=10^4$ МПа $[\sigma]=30$ МПа</p>	⑥	
	⑦	
	⑧	
	⑨	
	⑩	

Таблица 2.3.3

Числовые данные

№ вар.	l , м	H , м	b , мм	k	k_1	Двутавр, швеллер №	Уголок равнобокий №
0	0,5	0,10	120	0,20	0,22	10	5
1	0,2	0,15	130	0,80	0,32	12	5,6
2	0,5	0,20	140	0,30	0,24	10	6,3
3	0,3	0,25	100	0,40	0,34	14	7
4	0,4	0,30	150	0,70	0,26	12	7,5
5	0,6	0,35	160	0,45	0,36	16	8
6	0,7	0,40	170	0,50	0,28	18	9
7	0,9	0,45	180	0,65	0,38	20	10
8	0,8	0,50	190	0,55	0,20	18a	11
9	1,0	0,55	200	0,60	0,30	20a	12,5

Справочный материал
Сортамент прокатной стали
Двутавры стальные горячекатаные
 (по ГОСТ 8239-89)

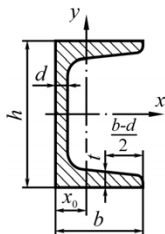


A – площадь поперечного сечения;
W – момент сопротивления;
I – момент инерции;
S – статический момент полусечения;
i – радиус инерции;
t – масса одного погонного метра.

Таблица 4.1

№	h, мм	b, мм	d, мм	t, мм	A, см ²	m, кг	$I_x,$ см ⁴	$W_x,$ см ³	$i_x,$ см	$S_x,$ см ³	$I_y,$ см ⁴	$W_y,$ см ³	$i_y,$ см
10	100	55	4,5	7,2	12,0	9,46	198	39,7	4,06	23,0	17,9	6,49	1,22
12	120	64	4,8	7,3	14,7	11,50	350	58,4	4,88	33,7	27,9	8,72	1,38
14	140	73	4,9	7,5	17,4	13,70	572	81,7	5,73	46,8	41,9	11,50	1,55
16	160	81	5,0	7,8	20,2	15,90	873	109,0	6,57	62,3	58,6	14,50	1,70
18	180	90	5,1	8,1	23,4	18,40	1290	143,0	7,42	81,4	82,6	18,40	1,88
18a	180	100	5,1	8,3	25,4	19,90	1430	159,0	7,51	89,8	114,0	22,80	2,12
20	200	100	5,2	8,4	26,8	21,00	1840	184,0	8,28	104,0	115,0	23,10	2,07
20a	200	110	5,2	8,6	28,9	22,70	2030	203,0	8,37	114,0	155,0	28,20	2,32
22	220	110	5,4	8,7	30,6	24,00	2550	232,0	9,13	131,0	157,0	28,60	2,27
22a	220	120	5,4	8,9	32,8	25,80	2790	254,0	9,22	143,0	206,0	34,30	2,50
24	240	115	5,6	9,5	34,8	27,30	3460	289,0	9,97	163,0	198,0	34,50	2,37
24a	240	125	5,6	9,8	37,5	29,40	3800	317,0	10,10	178,0	260,0	41,60	2,63
27	270	125	6,0	9,8	40,2	31,50	5010	371,0	11,20	210,0	260,0	41,50	2,54
27a	270	135	6,0	10,2	43,2	33,90	5500	407,0	11,30	229,0	337,0	50,00	2,80
30	300	135	6,5	10,2	46,5	36,50	7080	472,0	12,30	268,0	337,0	49,90	2,69
30a	300	145	6,5	10,7	49,9	39,20	7780	518,0	12,50	292,0	436,0	60,10	2,95
33	330	140	7,0	11,2	53,8	42,20	9840	597,0	13,50	339,0	419,0	59,90	2,79
36	360	145	7,5	12,3	61,9	48,60	13380	743,0	14,70	423,0	516,0	71,10	2,89
40	400	155	8,3	13,0	72,6	57,00	19062	953,0	16,20	545,0	667,0	86,10	3,03
45	450	160	9,0	14,2	84,7	66,50	27696	1231,0	18,10	708,0	808,0	101,00	3,09
50	500	170	10,0	15,2	100,0	78,50	39727	1589,0	19,90	919,0	1043,0	123,00	3,23
55	550	180	11,0	16,5	118,0	92,60	55962	2035,0	21,80	1181,0	1356,0	151,00	3,39
60	600	190	12,0	17,8	138,0	108,0	76806	2560,0	23,60	1491,0	1725,0	182,00	3,54

Швеллеры стальные горячекатаные
(по ГОСТ 8240-89)

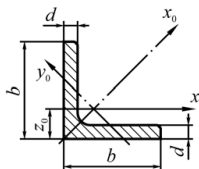


A – площадь поперечного сечения;
W – момент сопротивления;
S – статический момент полусечения;
I – момент инерции;
i – радиус инерции;
t – масса одного погонного метра.

Таблица 4.2

№	<i>h</i> , мм	<i>b</i> , мм	<i>d</i> , мм	<i>t</i> , мм	<i>A</i> , см ²	<i>m</i> , кг	<i>I_x</i> , см ⁴	<i>W_x</i> , см ³	<i>i_x</i> , см	<i>S_x</i> , см ³	<i>I_y</i> , см ⁴	<i>W_y</i> , см ³	<i>i_y</i> , см	<i>x₀</i> , см
5	50	32	4,4	7,0	6,16	4,84	22,8	9,10	1,92	5,59	5,61	2,75	0,95	1,16
6,5	65	36	4,4	7,2	7,51	5,90	48,6	15,0	2,54	9,00	8,70	3,68	1,08	1,24
8	80	40	4,5	7,4	8,98	7,05	89,4	22,4	3,16	13,3	12,8	4,75	1,19	1,31
10	100	46	4,5	7,6	10,9	8,59	174	34,8	3,99	20,4	20,4	6,46	1,37	1,44
12	120	52	4,8	7,8	13,3	10,4	304	50,6	4,78	29,6	31,2	8,52	1,53	1,54
14	140	58	4,9	8,1	15,6	12,3	491	70,2	5,60	40,8	45,4	11,0	1,70	1,67
14a	140	62	4,9	8,7	17,0	13,3	545	77,8	5,66	45,1	57,5	13,3	1,84	1,87
16	160	64	5,0	8,4	18,1	14,2	747	93,4	6,42	54,1	63,3	13,8	1,87	1,80
16a	160	68	5,0	9,0	19,5	15,3	823	103	6,49	59,4	78,8	16,4	2,01	2,00
18	180	70	5,1	8,7	20,7	16,3	1090	121	7,24	69,8	86,0	17,0	2,04	1,94
18a	180	74	5,1	9,3	22,2	17,4	1190	132	7,32	76,1	105	20,0	2,18	2,13
20	200	76	5,2	9,0	23,4	18,4	1520	152	8,07	87,8	113	20,5	2,20	2,07
20a	200	80	5,2	9,7	25,2	19,8	1670	167	8,15	95,9	139	24,2	2,35	2,28
22	220	82	5,4	9,5	26,7	21,0	2110	192	8,89	110	151	25,1	2,37	2,21
22a	220	87	5,4	10,2	28,8	22,6	2330	212	8,99	121	187	30,0	2,55	2,46
24	240	90	5,6	10,0	30,6	24,0	2900	242	9,73	139	208	31,6	2,60	2,42
24a	240	95	5,6	10,7	32,9	25,8	3180	265	9,84	151	254	37,2	2,78	2,67
27	270	95	6,0	10,5	35,2	27,7	4160	308	10,9	178	262	37,3	2,73	2,47
30	300	100	6,5	11,0	40,5	31,8	5810	387	12,0	224	327	43,6	2,84	2,52
33	330	105	7,0	11,7	46,5	36,5	7980	484	13,1	281	410	51,8	2,97	2,59
36	360	110	7,5	12,6	53,4	41,9	10820	601	14,2	350	513	61,7	3,10	2,68
40	400	115	8,0	13,5	61,5	48,3	15220	761	15,7	444	642	73,4	3,23	2,75

Уголки стальные горячекатаные равнополочные
(по ГОСТ 8509-86)



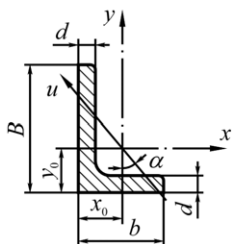
A – площадь поперечного сечения;
I – момент инерции;
i – радиус инерции;
t – масса одного погонного метра.

Таблица 4.3

№	<i>b</i> , мм	<i>d</i> , мм	<i>A</i> , см ²	<i>m</i> , кг	<i>I_x</i> , см ⁴	<i>i_x</i> , см	<i>I_{x0}</i> , см ⁴	<i>i_{x0}</i> , см	<i>I_{y0}</i> , см ⁴	<i>i_{y0}</i> , см	<i>z₀</i> , см
4	40	3	2,35	1,85	3,55	1,23	5,63	1,55	1,47	0,79	1,09
		4	3,08	2,42	4,58	1,22	7,26	1,53	1,90	0,78	1,13
		5	3,79	2,98	5,53	1,21	8,75	1,52	2,30	0,78	1,17
4,5	45	3	2,65	2,08	5,13	1,39	8,13	1,75	2,12	0,89	1,21
		4	3,48	2,73	6,63	1,38	10,5	1,74	2,74	0,89	1,26
		5	4,29	3,37	8,03	1,37	12,7	1,72	3,33	0,88	1,30
5	50	3	2,96	2,32	7,11	1,55	11,3	1,95	2,95	1,00	1,33
		4	3,89	3,05	9,21	1,54	14,6	1,94	3,80	0,99	1,38
		5	4,80	3,77	11,2	1,53	17,8	1,92	4,63	0,98	1,42
5,6	56	4	4,38	3,44	13,1	1,73	20,8	2,18	5,41	1,11	1,52
		5	5,41	4,25	16,0	1,72	25,4	2,16	6,59	1,10	1,57
6,3	63	4	4,96	3,90	18,9	1,95	29,9	2,45	7,81	1,25	1,69
		5	6,13	4,81	23,1	1,94	36,8	2,44	9,52	1,25	1,74
		6	7,28	5,72	27,1	1,93	42,9	2,43	11,2	1,24	1,78
7	70	4,5	6,20	4,87	29,0	2,16	46,0	2,72	12,0	1,39	1,88
		5	6,86	5,38	31,9	2,16	50,7	2,72	13,2	1,39	1,90
		6	8,15	6,39	37,6	2,15	59,6	2,71	15,5	1,38	1,94
		7	9,42	7,39	43,0	2,14	68,2	2,69	17,8	1,37	1,99
		8	10,7	8,37	48,2	2,12	76,4	2,68	20,0	1,37	2,02
7,5	75	5	7,39	5,80	39,5	2,31	62,6	2,91	16,4	1,49	2,02
		6	8,78	6,89	46,6	2,30	73,9	2,90	19,3	1,48	2,06
		7	10,1	7,96	53,3	2,29	84,6	2,89	22,1	1,47	2,10
		8	11,5	9,02	59,8	2,28	94,9	2,87	24,8	1,47	2,15
		9	12,8	10,1	66,1	2,27	105	2,86	27,5	1,46	2,18
8	80	5,5	8,63	6,78	52,7	2,47	83,6	3,11	21,8	1,59	2,17
		6	9,38	7,36	57,0	2,47	90,4	3,11	23,5	1,58	2,19
		7	10,8	8,51	65,3	2,45	104	3,09	27,0	1,58	2,23
		8	12,3	9,65	73,4	2,44	116	3,08	30,3	1,57	2,27
9	90	6	10,6	8,33	82,1	2,78	130	3,50	34,0	1,79	2,43
		7	12,3	9,64	94,3	2,77	150	3,49	38,9	1,78	2,47
		8	13,9	10,9	106	2,76	168	3,48	43,8	1,77	2,51
		9	15,6	12,2	118	2,75	186	3,46	48,6	1,77	2,55

№	b , MM	d , MM	A , CM ²	m , КГ	I_x , CM ⁴	i_x , CM	I_{x_0} , CM ⁴	i_{x_0} , CM	I_{y_0} , CM ⁴	i_{y_0} , CM	z_0 , CM
10	100	6,5	12,8	10,1	122	3,09	193	3,89	50,7	1,99	2,68
		7	13,8	10,8	131	3,08	207	3,88	54,2	1,98	2,71
		8	15,6	12,2	147	3,07	233	3,87	60,9	1,98	2,75
		10	19,2	15,1	179	3,05	284	3,84	74,1	1,96	2,83
		12	22,8	17,9	209	3,03	331	3,81	86,9	1,95	2,91
		14	26,3	20,6	237	3,00	375	3,78	99,3	1,94	2,99
11	110	7	15,2	11,9	176	3,40	279	4,29	72,7	2,19	2,96
		8	17,2	13,5	198	3,39	315	4,28	81,8	2,18	3,00
12,5	125	8	19,7	15,5	294	3,87	467	4,87	122	2,49	3,36
		9	22,0	17,3	327	3,86	520	4,86	136	2,48	3,40
		10	24,3	19,1	360	3,85	571	4,84	149	2,47	3,45
		12	28,9	22,7	422	3,82	670	4,82	174	2,46	3,53
		14	33,4	26,2	482	3,80	764	4,78	200	2,45	3,61
		16	37,8	29,6	539	3,78	853	4,75	224	2,44	3,68
14	140	9	24,7	19,4	466	4,34	739	5,47	192	2,79	3,78
		10	27,3	21,5	512	4,33	814	5,46	211	2,78	3,82
		12	32,5	25,5	602	4,31	957	5,43	248	2,76	3,90
16	160	10	31,4	24,7	774	4,96	1229	6,25	319	3,19	4,30
		11	34,4	27,0	844	4,95	1341	6,24	348	3,18	4,35
		12	37,4	29,4	913	4,94	1450	6,23	376	3,17	4,39
		14	43,6	34,0	1046	4,92	1662	6,20	431	3,16	4,47
		16	49,1	38,5	1175	4,89	1866	6,17	485	3,14	4,56
		18	54,8	43,0	1299	4,87	2061	6,13	537	3,13	4,63
18	180	11	38,8	30,5	1216	5,60	1933	7,06	500	3,59	4,85
		12	42,2	33,1	1317	5,59	2093	7,04	540	3,58	4,89
20	200	12	47,1	37,0	1823	6,22	2896	7,84	749	3,99	5,37
		13	50,9	39,9	1961	6,21	3116	7,83	805	3,98	5,42
		14	54,6	42,8	2097	6,20	3333	7,81	861	3,97	5,46
		16	62,0	48,7	2363	6,17	3755	7,78	970	3,96	5,54
		20	76,5	60,1	2871	6,12	4560	7,72	1182	3,93	5,70
		25	94,3	74,0	3466	6,06	5494	7,63	1438	3,91	5,89
22	220	14	60,4	47,4	2814	6,83	4470	8,60	1159	4,38	5,93
		16	68,6	53,8	3175	6,81	5045	8,58	1306	4,36	6,02
25	250	16	78,4	61,5	4717	7,76	7492	9,78	1942	4,98	6,75
		18	87,7	68,9	5247	7,73	8337	9,75	2158	4,96	6,83
		20	97,0	76,1	5765	7,71	9160	9,72	2370	4,94	6,91
		22	106,1	83,3	6270	7,69	9961	9,69	2579	4,93	7,00
		25	119,7	94,0	7006	7,65	11125	9,64	2887	4,91	7,11
		28	133,1	104,5	7717	7,61	12244	9,59	3190	4,89	7,23
		30	142,0	111,4	8177	7,59	12965	9,56	3389	4,89	7,31

Уголки стальные горячекатаные неравнополочные
(по ГОСТ 8510-86)

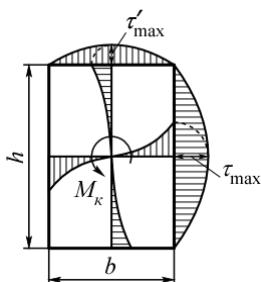


A — площадь поперечного сечения;
I — момент инерции;
i — радиус инерции;
 α — угол наклона главной оси.

Таблица 4.4

№	<i>B</i> , мм	<i>b</i> , мм	<i>d</i> , мм	<i>A</i> , см ²	<i>m</i> , кг	<i>I</i> _{<i>x</i>} , см ⁴	<i>i</i> _{<i>x</i>} , см	<i>I</i> _{<i>y</i>} , см ⁴	<i>i</i> _{<i>y</i>} , см	<i>y</i> ₀ , см	<i>x</i> ₀ , см	<i>I</i> _{<i>umin</i>} , см ⁴	<i>i</i> _{<i>umin</i>} , см	tg α
7,5/5	75	50	5	6,11	4,79	34,8	2,39	12,5	1,43	2,39	1,17	7,24	1,09	0,436
			6	7,25	5,69	40,9	2,38	14,6	1,42	2,44	1,21	8,48	1,08	0,435
			8	9,47	7,43	52,4	2,35	18,5	1,40	2,52	1,29	10,9	1,07	0,430
9/5,6	90	56	5,5	7,86	6,17	65,3	2,88	19,7	1,58	2,92	1,26	11,8	1,22	0,384
			6	8,54	6,70	70,6	2,88	21,2	1,58	2,95	1,28	12,7	1,22	0,384
			8	11,18	8,77	90,9	2,86	27,1	1,56	3,04	1,36	16,3	1,21	0,380
10/6,3	100	63	6	9,59	7,53	98,3	3,2	30,6	1,79	3,23	1,42	18,2	1,38	0,393
			7	11,1	8,70	113,0	3,19	35,0	1,78	3,28	1,46	20,8	1,37	0,392
			8	12,6	9,87	127,0	3,18	39,2	1,77	3,32	1,50	23,4	1,36	0,391
11/7	110	70	6,5	11,4	8,98	142,0	3,53	45,6	2,00	3,55	1,58	26,9	1,53	0,402
			8	13,9	10,9	172,0	3,51	54,6	1,98	3,61	1,64	32,3	1,52	0,400
			7	14,1	11,0	227,0	4,01	73,7	2,29	4,01	1,80	43,4	1,76	0,407
12,5/8	125	80	8	16,0	12,6	256,0	4,00	83,0	2,28	4,05	1,84	48,8	1,75	0,406
			10	19,7	15,5	312,0	3,98	100,0	2,26	4,14	1,92	59,3	1,74	0,404
			12	23,4	18,3	365,0	3,95	117,0	2,24	4,22	2,00	69,5	1,72	0,400
14/9	140	90	8	18	14,1	364,0	4,49	120,0	2,58	4,49	2,03	70,3	1,98	0,411
			10	22,2	17,5	444,0	4,47	146,0	2,56	4,58	2,12	85,5	1,96	0,409
20/12,5	200	125	11	34,9	27,4	1449	6,45	446,0	3,58	6,50	2,79	264	2,75	0,392
			12	37,9	29,7	1568	6,43	482,0	3,57	6,54	2,83	285	2,74	0,392
			14	43,9	34,4	1801	6,41	551,0	3,54	6,62	2,91	327	2,73	0,390
25/16	250	160	16	49,8	39,1	2026	6,38	617,0	3,52	6,71	2,99	367	2,72	0,388
			12	48,3	37,9	3147	8,07	1032	4,62	7,97	3,53	604	3,54	0,410
			16	63,6	49,9	4091	8,02	1333	4,58	8,14	3,69	781	3,50	0,408
25/16	250	160	18	71,1	55,8	4545	7,99	1475	4,56	8,23	3,77	866	3,49	0,407
			20	78,5	61,7	4987	7,97	1613	4,53	8,31	3,85	949	3,48	0,405

Данные по расчету на кручение стержней прямоугольного сечения



Момент инерции $I_k = \alpha \cdot b^4$
 Момент сопротивления $W_k = \beta \cdot b^3$
 Наибольшие касательные напряжения, возникающие посередине:
 длинных сторон $\tau_{\max} = M_k / W_k$
 коротких сторон $\tau'_{\max} = \gamma \tau_{\max}$

Значения коэффициентов α , β , γ зависят от отношения сторон прямоугольника h/b и приведены в табл. 4.5.

Таблица 4.5

h/b	α	β	γ
1,0	0,140	0,208	1,000
1,2	0,202	0,263	0,944
1,4	0,263	0,318	0,887
1,5	0,294	0,346	0,859
1,6	0,327	0,375	0,846
1,7	0,359	0,405	0,833
1,8	0,392	0,434	0,821
1,9	0,424	0,464	0,808
2,0	0,457	0,493	0,795
3,0	0,790	0,801	0,753
4,0	1,123	1,128	0,745
6,0	1,789	1,789	0,743
10,0	3,123	3,123	0,742

Данные к расчетам на устойчивость

Таблица 4.6

Коэффициенты продольного изгиба φ

λ	Стали Ст1, Ст2, Ст3, Ст4	Сталь Ст5	Стали повышен- ного качества $\sigma_{\text{пл}} > 320$ МПа	Чугун	Дерево
0	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00
10	0,99	0,98	0,97	0,97	0,99
20	0,96	0,95	0,95	0,91	0,97
30	0,94	0,92	0,91	0,81	0,93
40	0,92	0,89	0,87	0,69	0,87
50	0,89	0,86	0,83	0,57	0,80
60	0,86	0,82	0,79	0,44	0,71
70	0,81	0,76	0,72	0,34	0,60
80	0,75	0,70	0,65	0,26	0,48
90	0,69	0,62	0,55	0,20	0,38
100	0,60	0,51	0,43	0,16	0,31
110	0,52	0,43	0,35	—	0,25
120	0,45	0,37	0,30	—	0,22
130	0,40	0,33	0,26	—	0,18
140	0,36	0,29	0,23	—	0,16
150	0,32	0,26	0,21	—	0,14
160	0,29	0,24	0,19	—	0,12
170	0,26	0,21	0,17	—	0,11
180	0,23	0,19	0,15	—	0,10
190	0,21	0,17	0,14	—	0,09
200	0,19	0,16	0,13	—	0,08

Таблица 4.7

Значения коэффициентов, входящих в эмпирическую формулу Ясинского для критической силы, и пределы применимости этой формулы

№ п/п	Материал	E , ГПа	a	b	c	λ_0	$\lambda_{\text{пред}}$
			МПа				
1	Сосна	10	40	0,203	—	—	60
2	Сталь Ст3	200	310	1,14	—	61	100
3	Ст5, Ст30	200	464	3,26	—	60	90
4	15ХСНД (НЛ2)	200	589	3,82	—	60	100

№ п/п	Материал	E, ГПа	a	b	c	λ_0	$\lambda_{пред}$
			МПа				
5	Авиаль АВТ1	70	320	1,70	—	22	55
6	Дюралюминий Д16Т	70	380	2,19	—	20	50
7	Чугун	120	776	12	0,053	—	80

Данные к расчету характеристик сопротивления усталости

Таблица 4.8

Значения эффективных коэффициентов концентрации нормальных напряжений K_σ для валов с галтелями

		Валы из стали, имеющей σ_B , МПа				
D/d	r/d	≤ 600	700	800	900	1000
		K_σ				
До 1,1	0,02	1,96	2,08	2,20	2,35	2,50
	0,04	1,66	1,69	1,75	1,81	1,87
	0,06	1,51	1,52	1,54	1,57	1,60
	0,08	1,40	1,41	1,42	1,44	1,46
	0,10	1,34	1,36	1,37	1,38	1,39
	0,15	1,25	1,26	1,27	1,29	1,30
	0,20	1,19	1,21	1,22	1,23	1,24
Свыше 1,1 до 1,2	0,02	2,34	2,51	2,68	2,89	3,10
	0,04	1,92	1,97	2,05	2,13	2,22
	0,06	1,71	1,74	1,76	1,80	1,84
	0,08	1,56	1,58	1,59	1,62	1,64
	0,10	1,48	1,50	1,51	1,53	1,54
	0,15	1,35	1,37	1,38	1,40	1,41
	0,20	1,27	1,29	1,30	1,32	1,34
Свыше 1,2 до 2,0	0,02	2,40	2,60	2,80	3,00	3,25
	0,04	2,00	2,10	2,15	2,25	2,35
	0,06	1,85	1,88	1,90	1,96	2,00
	0,08	1,66	1,68	1,70	1,73	1,76
	0,10	1,57	1,59	1,61	1,63	1,64
	0,15	1,41	1,43	1,45	1,47	1,49
	0,20	1,32	1,34	1,36	1,38	1,40

Таблица 4.9

Значения эффективных коэффициентов концентрации касательных напряжений K_{τ} для валов с галтелями

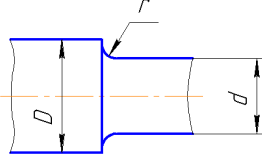
						
D/d	r/d	Валы из стали, имеющей σ_b , МПа				
		≤ 600	700	800	900	1000
		K_{τ}				
До 1,1	0,02	1,30	1,35	1,41	1,45	1,50
	0,04	1,20	1,24	1,27	1,29	1,32
	0,06	1,16	1,18	1,20	1,23	1,24
	0,08	1,12	1,14	1,16	1,18	1,19
	0,10	1,09	1,11	1,13	1,15	1,16
	0,15	1,06	1,07	1,08	1,09	1,11
	0,20	1,04	1,05	1,06	1,07	1,09
Свыше 1,1 до 1,2	0,02	1,50	1,59	1,67	1,74	1,81
	0,04	1,33	1,39	1,45	1,48	1,52
	0,06	1,26	1,30	1,33	1,37	1,39
	0,08	1,18	1,22	1,26	1,30	1,31
	0,10	1,16	1,19	1,21	1,24	1,26
	0,15	1,10	1,11	1,14	1,16	1,18
	0,20	1,06	1,08	1,10	1,13	1,15
Свыше 1,2 до 2,0	0,02	1,70	1,80	1,90	2,00	2,10
	0,04	1,46	1,53	1,60	1,65	1,70
	0,06	1,35	1,40	1,45	1,50	1,53
	0,08	1,25	1,30	1,35	1,40	1,42
	0,10	1,21	1,25	1,28	1,32	1,35
	0,15	1,12	1,15	1,18	1,20	1,24
	0,20	1,07	1,10	1,14	1,16	1,20

Таблица 4.10

Значения эффективных коэффициентов концентрации нормальных напряжений K_{σ} для валов с выточками

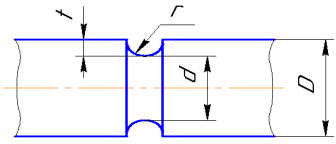
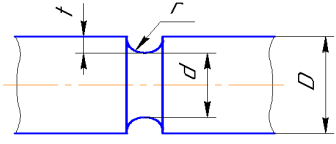
						
t/r	r/d	Валы из стали, имеющей σ_B , МПа				
		≤ 650	700	800	900	1000
		K_{σ}				
До 0,6	0,02	1,82	1,92	2,06	2,21	2,30
	0,04	1,77	1,82	1,96	2,06	2,16
	0,06	1,72	1,77	1,87	1,92	1,96
	0,08	1,68	1,72	1,77	1,87	1,92
	0,10	1,63	1,68	1,72	1,77	1,82
	0,15	1,53	1,55	1,58	1,63	1,68
Свыше 0,6 до 1,0	0,02	1,85	1,95	2,10	2,25	2,35
	0,04	1,80	1,85	2,00	2,10	2,20
	0,06	1,75	1,80	1,90	1,95	2,00
	0,08	1,70	1,75	1,80	1,90	1,96
	0,10	1,65	1,70	1,75	1,80	1,85
	0,15	1,55	1,57	1,60	1,65	1,70
Свыше 1,0 до 1,5	0,02	1,89	1,99	2,15	2,31	2,41
	0,04	1,84	1,89	2,05	2,15	2,26
	0,06	1,78	1,84	1,94	1,99	2,05
	0,08	1,73	1,78	1,84	1,94	1,99
	0,10	1,68	1,73	1,78	1,84	1,89
	0,15	1,58	1,60	1,63	1,68	1,73
Свыше 1,5 до 2,0	0,02	1,93	2,04	2,20	2,37	2,47
	0,04	1,87	1,93	2,09	2,20	2,31
	0,06	1,82	1,87	1,98	2,04	2,09
	0,08	1,76	1,82	1,87	1,98	2,04
	0,10	1,71	1,76	1,82	1,87	1,93
	0,15	1,60	1,62	1,66	1,71	1,76

Таблица 4.11

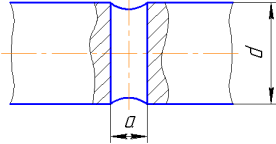
Значения эффективных коэффициентов концентрации касательных напряжений K_{τ} для валов с выточками



D/d	r/d	Валы из стали, имеющей σ_B , МПа				
		≤ 650	700	800	900	1000
		K_{τ}				
До 1,1	0,02	1,29	1,32	1,39	1,46	1,50
	0,04	1,27	1,30	1,37	1,43	1,48
	0,06	1,25	1,29	1,36	1,41	1,46
	0,08	1,21	1,25	1,32	1,39	1,43
	0,10	1,18	1,21	1,29	1,32	1,37
	0,15	1,14	1,18	1,21	1,25	1,29
Свыше 1,1 до 1,2	0,02	1,37	1,41	1,50	1,59	1,65
	0,04	1,35	1,37	1,47	1,55	1,62
	0,06	1,32	1,36	1,46	1,52	1,58
	0,08	1,27	1,32	1,41	1,50	1,55
	0,10	1,23	1,27	1,37	1,41	1,47
	0,15	1,18	1,23	1,27	1,32	1,37
Свыше 1,2 до 2,0	0,02	1,40	1,45	1,55	1,65	1,70
	0,04	1,38	1,42	1,52	1,60	1,68
	0,06	1,35	1,40	1,50	1,57	1,65
	0,08	1,30	1,35	1,45	1,55	1,60
	0,10	1,25	1,30	1,40	1,45	1,52
	0,15	1,20	1,25	1,30	1,35	1,40

Таблица 4.12

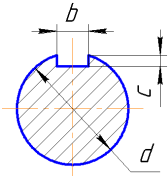
Значения эффективных коэффициентов концентрации напряжений K_σ и K_τ для валов с поперечными отверстиями

					
a/d	Коэффициенты	Для валов из стали, имеющих σ_B , МПа			
		≤ 700	800	900	1000
Свыше 0,05 до 0,15	K_σ	2,0	2,02	2,12	2,35
Свыше 0,15 до 0,25		1,8	1,82	1,90	2,10
Свыше 0,05 до 0,15	K_τ	1,75	1,83	1,90	2,0
Свыше 0,15 до 0,25		1,75	1,83	1,90	2,0

Примечание. Момент сопротивления нетто:
 при изгибе: $W_u = \frac{\pi d^3}{32} \left(1 - 1,54 \frac{a}{d}\right)$; при кручении: $W_{кр} = \frac{\pi d^3}{16} \left(1 - \frac{a}{d}\right)$.

Таблица 4.13

Значения эффективных коэффициентов концентрации напряжений K_σ и K_τ для валов с одной шпоночной канавкой

					
Коэффициенты	σ_B , МПа				
	≤ 600	700	800	900	1000
K_σ	1,60	1,75	1,80	1,90	2,00
K_τ	1,50	1,60	1,70	1,90	2,10

Примечание. Момент сопротивления нетто:
 при изгибе: $W_{и.нетто} = \frac{\pi d^3}{32} - \frac{bc}{2d} (d - c)^2$;
 при кручении: $W_{кр.нетто} = \frac{\pi d^3}{16} - \frac{bc}{2d} (d - c)^2$.

Таблица 4.14

Значения масштабных факторов $K_{d\sigma}$ и $K_{d\tau}$

Сталь	Коэффициенты	Диаметр вала d , мм						
		20	30	40	50	70	100	200
Углеродистая	$K_{d\sigma}, K_{d\tau}$	0,92	0,88	0,85	0,82	0,76	0,70	0,61
		0,83	0,77	0,73	0,70	0,65	0,59	0,52
Легированная	$K_{d\sigma}, K_{d\tau}$	0,83	0,77	0,73	0,70	0,65	0,59	0,52

Таблица 4.15

*Значения коэффициентов K_F
влияния состояния обработанной поверхности*

Вид обработки поверхности	Валы из стали, имеющей σ_B , МПа									
	500	600	700	800	900	1000	1100	1200	1300	
	K_F									
Полирование	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0
Шлифование	0,93	0,92	0,91	0,90	0,88	0,87	0,86	0,85	0,84	
Тонкая обточка	0,90	0,88	0,86	0,84	0,82	0,81	0,79	0,77	0,75	
Грубая обточка	0,85	0,82	0,79	0,77	0,74	0,71	0,68	0,66	0,63	
Наличие окалины	0,71	0,65	0,59	0,54	0,49	0,44	0,40	0,38	0,36	

Таблица 4.16

Значения коэффициентов Ψ , учитывающих асимметрию циклов напряжений

σ_B , МПа	Ψ_σ	Ψ_τ
Свыше 350 до 550	0	0
Свыше 550 до 750	0,05	0
Свыше 750 до 1000	0,10	0,05
Свыше 1000 до 1200	0,20	0,10
Свыше 1200 до 1400	0,25	0,15