МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«Тольяттинский государственный университет»

Институт математики, физики и информационных технологий
(наименование института полностью)

Кафедра «Высшая математика и математическое образование»
(наименование)

44.04.01 Педагогическое образование
(код и наименование направления подготовки)

Математическое образование
(направленность (профиль))

ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА (МАГИСТЕРСКАЯ ДИССЕРТАЦИЯ)

на тему «Методика обучения отбору корней уравнений в курсе алгебры и начал математического анализа общеобразовательной школы»

Обучающийся Е.О. Терехина
(Инициалы Фамилия) (личная подпись)

Научный руководитель канд. пед. наук, доцент, И.В. Антонова
(ученая степень (при наличии), ученое звание (при наличии), Инициалы Фамилия)

Тольятти 2023

Оглавление

Введение

Актуальность и научная значимость настоящего исследования. Нормативным документом, регламентирующим проведение итоговой и промежуточной аттестации учеников общеобразовательных школ, является «Федеральный государственный стандарт среднего общего образования» (ФГОС СОО) [97]. Итоговая аттестация по математике в 9 классах проводится в форме ОГЭ, в 11 классах – в форме ЕГЭ. Оцениванию подлежат задачи на отбор наименьшего (наибольшего) корня уравнений и на отбор корней, принадлежащих тому или иному промежутку.

Курс математики содержит на каждой ступени образовательного процесса задачи на нахождение и отбор корней уравнений. Следует отметить, что согласно «Концепции развития математического образования в Российской Федерации» «математическое образование должно обеспечивать каждого обучающегося развивающей интеллектуальной деятельностью на доступном уровне, используя присущую математике красоту и увлекательность; непрерывную поддержку и повышение уровня математических знаний для удовлетворения любознательности человека, его общекультурных потребностей, приобретение знаний и навыков, применяемых в повседневной жизни и профессиональной деятельности» [45]. Непрерывная линия уравнений при изучении математики в общеобразовательной школе позволяет привить учащимся математическую культуру, начиная с начальной школы. Проводя обобщающее повторение в курсе алгебры и начал математического анализа при изучении темы «Отбор корней уравнений на заданном промежутке» для подготовки к сдаче единого государственного экзамена, школьники систематизируют ранее полученные знания и приобретают навыки самоконтроля.

Задачи на составление и решение уравнений, отбор корней на заданном промежутке имеют прикладное значение, встречаются при изучении естественнонаучных дисциплин в школе: например, биологии, химии, физики.

Это диктует необходимость организации обобщающего повторения по теме «Отбор корней уравнений» как для приобретения навыков нахождения нестандартных способов решения задач естественнонаучной направленности, так и для формирования логических основ понимания явлений окружающего мира. Поэтому методика изучения и организации обобщающего повторения по теме поиска и отбора корней уравнений в теории и методике обучения математике, а также в практике работы в общеобразовательной школе занимает особое место.

Теоретические аспекты обучения методам отбора корней уравнений в школьном курсе математики рассмотрены в работах М.И. Башмакова [20], [21], М.И. Зайкина [36], Т.А. Ивановой [39], А.Г. Мордковича [65], Г.И. Саранцева [87], А.А. Столяра [93] Л.М. Фридмана [99] и других.

Актуальность темы исследования обоснована в том числе тем, что на фоне проведения экзаменов в форме тестирования, целые группы задач по теме данной работы оказываются отодвинутыми на второй план. В этих условиях основной акцент в обучении смещается непосредственно на учебные занятия и эффективную методику обучения отбору корней уравнений, так и на обобщающее повторение по данной теме. Это может оказаться мощным стимулом для осваивания определенных разделов алгебры и начал математического анализа, что и обуславливает актуальность данного исследования.

Вместе с этим, теме решения уравнений в школьном курсе математики посвящены многочисленные диссертационные исследования. Среди аспектов обучения решению уравнений в них выделяют: проблему развития у школьников системного типа мышления, способности демонстрировать практическое применение изученных методов их решения (В.В. Мирошин [58], 2008 г.); проблему использования в процессе обучения новых информационных технологий (С.А. Кругликов [50], 2003 г., Б.Б. Молоткова [59], 2014 г.); проблему определения действий, которые необходимы при решении уравнений того или иного типа (С.В. Арюткина [17], 2002 г.);

проблему применения дистанционных технологий обучения при реализации деятельностного подхода как способа развития математических способностей (С.Н. Суханова [94], 2002 г.).

Учитывая безусловную значимость отбора корней уравнений, проведя анализ основной учебной и учебно-методической литературы по данной теме, можно сделать вывод, что времени на изучение методов отбора корней на заданном промежутке в школьном курсе математики отводится недостаточно. Следует также отметить, что некоторые учебники вовсе не содержат задач подобного типа.

Научно-методические работы, посвященные различным аспектам методики обучения отбору корней уравнений в курсе алгебры и начал математического анализа и в ходе обобщающего повторения по теме, можно разделить на несколько групп:

- развивающий аспект, формирующий учебно-познавательные умения, логическое мышление, общие навыки старшеклассников;
- воспитательный аспект, направленный на повышение интереса к изучению математики, активность при обучении и умение общаться в ходе него;
- образовательный аспект, обобщающий и закрепляющий полученные теоретические знания при поиске и отборе корней уравнений.

Несмотря на достаточно подробное изучение вопросов по исследуемой теме, поиск методов и способов отбора корней уравнений в курсе алгебры и начал математического анализа общеобразовательной школы и других довузовских учебных заведений сохраняет свою актуальность.

Таким образом, актуальность данного исследования обусловлена сложившимся **противоречием** между необходимостью обучения школьников решению уравнений и последующему отбору их корней, систематизации типов уравнений и методов их решения, подготовки школьников к сдаче ОГЭ и ЕГЭ по курсу алгебры и начал математического анализа и фактическим состоянием методики обучения отбору корней уравнений на заданном промежутке в практике работы общеобразовательной школы.

Описанное выше противоречие позволяет определить **проблему диссертационного исследования:** выявление методических особенностей обучения отбору корней уравнений на заданном промежутке при изучении курса алгебры и начал математического анализа в старших классах общеобразовательной школы.

Объект исследования: процесс обучения алгебре и началам математического анализа в старших классах общеобразовательной школе.

Предмет исследования: методика обучения школьников теме «Отбор корней уравнений» в курсе алгебры и начал математического анализа общеобразовательной школы.

Цель исследования: выявление методических особенностей обучения отбору корней уравнений в старших классах общеобразовательной школы.

Гипотеза исследования основана на предположении о том, что качество математической подготовки учащихся старших классов по теме «Отбор корней уравнений» улучшится, если: выявить методические особенности обучения решению логарифмических, показательных, иррациональных и тригонометрических уравнений в старших классах при изучении курса алгебры и начал математического анализа, с их учетом разработать и внедрить методику обучения отбору корней этих уравнений.

Для достижения поставленной цели необходимо решить следующие **задачи:**

1. Определить роль и место уравнений в курсе математики общеобразовательной школы.
2. Провести анализ учебников алгебры и начал математического анализа разных авторов по содержанию теоретического и задачного материалов по теме исследования.
3. Выявить. методические особенности обучения отбору корней уравнений в курсе алгебры и начал математического анализа

общеобразовательной школы и систематизировать методы их решения, методы и способы отбора их корней.

4. Рассмотреть задачи ЕГЭ по теме «Отбор корней уравнений».

5. Разработать элективный курс «Иррациональные уравнения: основные типы и методы их решения» для обучающихся 10-11 классов математического профиля.

6. Представить технологию консультирования и обосновать её выбор при обучении теме «Тригонометрические уравнений: отбор корней».

7. Проверить эффективность разработанного элективного курса в ходе проведенного педагогического эксперимента и описать полученные результаты.

Теоретико-методологическую основу данного исследования составили работы М.И. Башмакова, М.И. Зайкина, Т.А. Ивановой, А.Г. Мордковича, Г.И. Саранцева, А.А. Столяра, Л.М. Фридмана.

Базовыми для настоящего исследования явились также работы Т.А. Ивановой [95] и Стефановой Н.Л., Подходовой Н.С. [92], посвященные теории и методике организации обучения математике в общеобразовательной школе, А.Г. Мордковича [65] и И.В. Ященко [102], содержащие системы задач по теме исследования; Д.С. Барышенского, Е.Н. Белай, Н.А. Соколовой [91], описывающих методику эффективной подготовки к сдаче ЕГЭ по математике.

Методы исследования: сравнительный анализ учебников, учебных пособий, педагогической и методической литературы по содержанию темы «Решение уравнений и отбор их корней на заданном промежутке»; исследование опыта учителей алгебры и начал математического анализа по теме исследования и анализ опыта их работы со старшеклассниками по отбору корней иррациональных, показательных, логарифмических и тригонометрических уравнений на заданном промежутке; обзор и исследование контрольно-измерительных материалов итоговой аттестации в виде ОГЭ и ЕГЭ по теме «Отбор корней уравнений»; систематизация и обобщение материала по теме; проведение педагогического эксперимента и анализ его результатов.

Основные этапы исследования:

- 1 этап (2021/2022 уч.г.): анализ выполненных ранее исследований по теме диссертации; анализ программ обучения курсам алгебры, алгебры и начала математического анализа общеобразовательной школы и учебников, анализ нормативных документов; исследование опыта работы учителей по обучению старшеклассников методам и способам отбора корней уравнений на заданном промежутке;
- 2 этап (2021/2022 уч.г.): определение теоретических основ обучения методам отбора корней уравнений в курсе алгебры и начал математического анализа общеобразовательной школы;
- 3 этап (2022/2023 уч.г.): определение методических основ обучения методам отбора корней уравнений в курсе алгебры и начал математического анализа общеобразовательной школы; разработка систем задач по решению иррациональных уравнений в углубленном курсе алгебры и начал математического анализа и элективного курса «Иррациональные уравнения: основные типы и методы их решения» для учащихся математического профиля;
- 4 этап (2022/2023 уч.г.): оформление диссертации в соответствии с требованиями, корректировка материалов исследования, уточнение его аппарата, оформление результатов проведенного педагогического эксперимента, формулировка выводов по каждой главе диссертационной работы и заключения.

Опытно-экспериментальная база исследования: ГБОУ СОШ села Усолье Шигонского района Самарской области.

Научная новизна исследования заключается в том, что проблема выявления методических особенностей обучения отбору корней уравнений на заданном промежутке при изучении курса алгебры и начал математического анализа в старших классах общеобразовательной школы решается на основе методики обучения, состоящей в применении дифференцированной системы задач, которая включает типовые задачи различного уровня сложности и основные типы задач из ЕГЭ базового и профильного уровней, а также технологии консультирования, направленной на повышение качества математической подготовки обучающихся, а также на углубление их знаний.

Теоретическая значимость исследования заключается выявлении методических особенностей обучения отбору корней при решении иррациональных, показательных, логарифмических и тригонометрических уравнений и описании типовых задач по теме «Отбор корней уравнений» в профильном курсе алгебры и начал математического анализа общеобразовательной школы.

Практическая значимость исследования: разработан элективный курс «Иррациональные уравнения: основные типы и методы их решения» для обучающихся профильного уровня подготовки по математике; представлен один из вариантов проектирования уроков при обучении теме «Тригонометрические уравнений: отбор корней» в рамках технологии консультирования и обоснован ее выбор.

Достоверность и обоснованность результатов исследования обеспечивались анализом методической литературы и интернет-источников по методам и способам отбора корней уравнений, анализом педагогической практики педагогов старших классов и собственным опытом работы в 10-11 классах ГБОУ СОШ села Усолье Шигонского района Самарской области.

Личное участие автора в организации и проведении исследования состоит в выявлении методических особенностей и разработке методических рекомендаций по обучению отбору корней при решении иррациональных, показательных, логарифмических и тригонометрических уравнений на заданном отрезке; разработке элективного курса «Иррациональные уравнения: основные типы и методы их решения» для обучающихся математического профиля в курсе алгебра и начал математического анализа общеобразовательной школы.

Апробация и внедрение результатов работы велись в течение всего исследования. Его результаты были представлены в ходе прохождения производственных практик на базе кафедры «Высшая математика и математическое образования».

По теме исследования имеется одна публикация [80].

На защиту выносятся следующие положения:

1. Методика обучения отбору корней при решении иррациональных, показательных, логарифмических и тригонометрических уравнений должна быть построена на основе применения дифференцированной системы задач, включающей как различные типы задач из курса алгебры и начал математического анализа, так и основные типы задач из ЕГЭ базового и профильного уровней. Задания, решаемые на уроках по определенной теме и на занятиях в ходе элективных курсов, должны содержать задачи на разные методы и способы отбора корней.
2. Технология консультирования при обучении отбору корней уравнений в старших классах общеобразовательной школы направлена на повышение качества их математической подготовки, а также на углубление знаний.

Структура магистерской диссертации. Работа состоит из введения, двух глав, заключения, содержит 16 рисунков, 15 таблиц, список используемой литературы и используемых источников (108 источников). Основной текст работы изложен на 111 страницах.

Глава 1 Теоретические основы обучения методам отбора корней уравнений в курсе алгебры и начал математического анализа общеобразовательной школы

1.1 Роль и место уравнений в школьном курсе математики

Практически во всех разделах школьного курса математики для решения той или иной задачи составляют уравнения. Уравнения применяют также при решении задач прикладного характера в других предметных областях.

Содержательно-методическая линия уравнений «богата по содержанию, по способам и приёмам решения уравнений, по возможности её применения при изучении других тем школьного курса алгебры» [88].

В методической литературе выделяют основные направления реализации линии уравнений в курсе математики общеобразовательной школы [88]:

- при решении сюжетных задач раскрывается «прикладная направленность содержательно-методической линии уравнений. Уравнение рассматривается в этом случае как математическая модель описанной в задаче ситуации, при решении которой применяют алгебраический метод» [100]; «математическое моделирование оперирует уравнениями, неравенствами, системами уравнений и системами неравенств как инструментом исследования» [92];
- теоретико-математическая направленность линии уравнений, связанная с классификацией основных видов уравнений и систем уравнений; с изучением основных понятий и общих методов решений;
- проявление линии уравнений во внутрипредметных связях курса математики. Например, реализация функциональной линии школьного курса математики позволяет привлечь графический метод к решению уравнений и их систем, уравнения же в свою очередь позволяют аналитически исследовать функции.

Многие авторы отмечают, что «уравнения могут быть использованы как эффективное средство закрепления, углубления, повторения и расширения теоретических знаний при изучении практически любой темы в математике» [95].

Рассмотрим этапы введения понятия «уравнение» и трактовки этого понятия в общеобразовательной школе. По словам М.И. Башмакова: «традиционное понимание понятия «уравнение» – это запись постановки некоторой реальной задачи. Буквы в уравнении – это неизвестные (а не переменные!). Главное в решении уравнения – поиск способа его решения» [20, С. 3-4]. Этапы процесса введения понятия «уравнение» в 5-9 классах приведены в таблице 1.

Таблица 1 – Этапы введение понятия уравнения в основной школе

Этап	Описание этапа
1. Обоснование целесообразности введения понятия при рассмотрении жизненных примеров	Козлов В.В. иллюстрирует введение понятия «уравнение» при помощи задачи: «Матери было 25 лет, когда родилась дочь, и 28 лет, когда родился сын. Сколько лет каждому из них, если теперь всем троим вместе 46 лет?» [41]
2. Определение существенных и несущественных признаков	«Существенные признаки: содержит переменную, равенство. Несущественные признаки: – какой символ выбран для обозначения неизвестной, – в какой части расположена неизвестная» [18].
3. Введение определения	«равенство, содержащее неизвестное число»; «равенство с переменной» [52].
4. Применение понятия при решении задач	Анализ ситуации в тексте задачи определяет математическую модель: $x + (x + 3) + (x + 28) = 46$, в которой x – возраст сына.
5. Поиск альтернативного определения	«Равенство, содержащее неизвестное число, обозначенное буквой, называется уравнением» [18].

Далее вводят определение корня уравнения. «Переменную» и «неизвестную» различают исходя из следующего [18]: «переменная «пробегает» ряд значений, неизвестное является буквенным обозначением конкретного числа».

Во всех учебниках курса алгебры и начал математического анализа общеобразовательной школы авторы рассматривают различные виды уравнений.

Приведем обзор определений основных видов уравнений за курс основной школы (таблица 2).

Таблица 2 – Основные виды уравнений за курс основной школы

Класс	Автор	Определение
Линейное уравнение		
7	С.М. Никольский	«Линейным уравнением с одним неизвестным x называют уравнением, левая и правая части которого есть многочлены степени не выше первой относительно x или числа» [75, С. 174].
	Ю.Н. Макарычев	«Уравнение вида $\mathbf{ax = b}$, где $\mathbf{x}$ – переменная, $\mathbf{a, b}$ – некоторые числа, называется линейным уравнением с одной переменной» [53, С. 28]
	Ю.М. Колягин	«Уравнение вида $\mathbf{ax = b}$, где a, b – заданные числа, x – переменная, называют линейным уравнением» [43, С. 43]
	А.Г. Мордкович	«Линейным уравнением с одной переменной x называется уравнение вида $\mathbf{ax + b = 0}$, где $\mathbf{a, b}$ – любые числа (коэффициенты)» [62, С. 22]
Квадратное уравнение		
8	Ю.М. Колягин	«Квадратным уравнением называется уравнение вида $\mathbf{ax^2 +}$ $\mathbf{+ bx + c = 0}$, где $\mathbf{a, b, c}$ – заданные числа, $\mathbf{a \neq 0}$, x – неизвестное» [44, С. 161]
	Ю.Н. Макарычев	«Квадратным уравнением называется уравнение вида $\mathbf{ax^2 +}$ $\mathbf{+ bx + c = 0}$, где $\mathbf{x}$ – переменная, $\mathbf{a, b, c}$ – некоторые числа, причем $\mathbf{a \neq 0}$» [54, С. 174]
	А.Г. Мордкович	«Квадратным называют уравнение вида $\mathbf{ax^2 + bx + c = 0}$, где коэффициенты $\mathbf{a, b, c}$ – любые действительные числа, но $\mathbf{a \neq 0}$. Коэффициенты $\mathbf{a, b, c}$ называют соответственно так: первый или старший коэффициент, второй коэффициент или коэффициент при x, свободный член» [63, С. 141]
	С.М. Никольский	«Уравнение $\mathbf{ax^2 + bx + c = 0}$, где a, b, c – данные числа и $\mathbf{a \neq 0}$, называют квадратным уравнением» [76, С. 74]
Рациональные уравнения		
8	Ю.Н. Макарычев	«Если одна часть уравнения – целое выражение, а другая – дробно- рациональное или обе части – дробно-рациональные выражения, то уравнение называют дробно-рациональным уравнением» [54, С. 213]
	С.М. Никольский	«Уравнение, левая и правая части которого есть рациональные выражения относительно $\mathbf{x}$, называют рациональным уравнением с неизвестным $\mathbf{x}$» [76, С. 94]

Продолжение таблицы 2

Класс	Автор	Определение
Рациональные уравнения		
8	Ю.Н. Макарычев	«Уравнения, где левая и правая части являются рациональными выражениями. Рациональное уравнение, в котором и левая и правая части являются целыми выражениями, называются целым. Рациональное уравнение, в котором левая или правая части является дробным выражением, называется дробным» [54, С. 194]
	А.Г. Мордкович	«Если $\mathbf{p(x)}$ – рациональное выражение, то уравнение $\mathbf{p(x)\ =\ 0}$ называют рациональным» [63, С. 20]
Иррациональные уравнения		
8	А.Г. Мордкович	«Если в уравнении переменная содержится под знаком корня (квадратного, кубического и т.д.), то уравнение называют иррациональным» [63, С. 220]
	С.М. Никольский	«Уравнение, в котором хотя бы один член содержит неизвестное под знаком корня, называют иррациональным уравнением» [76, С. 104]
9	Ю.Н. Макарычев	«Уравнения называют иррациональными, если они содержат переменную под знаком корня или переменную, входящую в основание степени с дробным показателем» [55, С. 263].

В 10-11 классах ученикам предлагаются к изучению показательные, логарифмические и тригонометрические уравнения.

Анализ определений предложенных авторами учебников показывает, что строгое определение линейного уравнения вводится в 7 классе. Тогда же вводится понятие равносильности и рассматриваются первое и второе свойства равносильности, на основе которых решаются уравнения. В курсе математики 5-6 классов основной школы осуществляется пропедевтика: «Решение уравнений в пятом классе осуществляется на основе зависимости между результатами действий и их составляющими» [100]. Среди уравнений, подлежащих изучению, встречаются простейшие: $\mathbf{a + x = b}$, $\mathbf{a - x = b}$, $\mathbf{x - a = \ b}$, $\mathbf{x \cdot a = b}$, $\mathbf{x : a = b}$, $\mathbf{a : x = b}$. Для решения уравнений пятиклассники применяют правила сложения: «Чтобы найти неизвестное слагаемое, нужно из суммы вычесть другое слагаемое», или: «Чтобы найти уменьшаемое, нужно к разности прибавить вычитаемое». Решение уравнений пятиклассниками формирует вычислительные навыки. На этом этапе учащимся предлагают задачи творческого характера. Например, составить уравнение с заданным корнем или определить пропущенное в уравнении слагаемое, если корень уравнения задан: «Вставьте пропущенное число $*$ в выражение $\mathbf{5 \cdot x + * = 30}$, если $\boldsymbol{x = 4}$».

В шестом классе в уравнениях неизвестное может находится в его обеих частях. «Здесь прослеживается взаимосвязь линии уравнений и числовой линии: для понимания переноса неизвестного (или числа) из одной части уравнения в другую используют свойство противоположных чисел: $a+$ $+(-a) = 0$. Для иллюстрации приводят задачу: «На одной чаше весов лежат дыня и гиря в пять килограмм, на другой чаше лежит гиря в девять килограмм. Весы находятся в равновесии. Найти вес дыни» [18]. Математической моделью задачи является уравнение, при решении которого «перекладывают гири». Учащиеся знакомятся с понятием модуля, им предлагаются уравнения с модулем.

Начиная с 7 класса и по 9 класс в курсе алгебры осуществляется основной этап изучения уравнений. В 7 классе особое внимание уделяют решению уравнений с одной переменной [4]-[7], [43], [53], [62], [71], [75]. Дав строгое определение линейному уравнению, его исследуют в зависимости от введенных обозначений a и b. Линейное уравнение $ax + b = 0$ преобразовывают к виду $ax = -b$ и рассматривают возможные случаи:

- при $a = 0$, $b = 0$ уравнение принимает вид $0 \cdot x = 0$, то решением может быть любое число, так как будучи умноженным на ноль даёт верное равенство;
- при $a = 0, b \neq 0$ уравнение не имеет решения, так как при умножении на ноль невозможно получить отличное от нуля значение;
- при $a \neq 0$ уравнение имеет единственный корень $x = -\frac{b}{a}$.

Также в курсе 7 класса рассматривают неполные квадратные уравнения типа $ax^2 + bx = 0$ и $ax^2 + c = 0$ без строгого определения понятия квадратного уравнения методом разложения на множители. Уравнения вида $ax^2 + bx = 0$ раскладывают на множители $x \cdot (ax + b) = 0$, далее приравнивают каждый из множителей к нулю. Уравнения вида $ax^2 + c = 0$ раскладывают на множители с помощью формулы сокращенного умножения $a^2 - b^2 = (a - b) \cdot (a + b)$ и также приравнивают каждый множитель к нулю. Таким образом, решение сводится к нахождению корней двух линейных уравнений. Например, учащимся предлагают решить уравнение $25x^2 - 4 = 0$, его раскладывают на множители $(5x - 2) \cdot (5x + 2) = 0$ и находят решения линейных уравнений $5x - 2 = 0$ и $5x + 2 = 0$, корнями которого являются числа $\frac{2}{5}$ и $-\frac{2}{5}$.

Определение квадратного уравнения приводится в учебниках восьмого класса. Записывается формула корней квадратного уравнения с использованием дискриминанта, формула дискриминанта, исследуется наличие корней в зависимости от его значений. Даётся определение приведённого квадратного уравнения и соответствующие формулы для нахождения его корней. Неполные квадратные уравнения приобретают трактовку как частные случаи квадратного уравнения. Отдельное внимание уделяют алгебраическому методу выделения полного квадрата. Прослеживается внутрипредметная связь между методической линией уравнений и функциональной линией: для решения квадратных уравнений применяют графический метод, и наоборот, точки пересечения графика функции $y = ax^2 + bx + c$ с осью Ox находят, решая квадратное уравнение. Изучают класс уравнений, сводящихся к квадратным, например, содержащие переменную в знаменателе.

Наиболее подробно графический метод решения уравнений рассматривается в девятом классе. Для решения уравнения $f(x) = g(x)$ школьникам предлагают построить графики функций $y = f(x)$ и $y = g(x)$ и определить по графику точки их пересечения. «Используя данный способ, учащиеся получают возможность решения таких уравнений, которые на данном этапе не смогли бы решить аналитическим способом» [100].

Общие и систематизированные навыки решения тригонометрических, иррациональных, показательных, логарифмических уравнений вырабатываются в курсе алгебры и начал анализа старшей школы.

Место уравнений в школьной программе представлено в таблице 2.

Тема уравнений в школьном курсе математики наиболее обширная и присутствует в процессе всего обучения. Так, уже в начальной школе учащиеся применяют метод подбора при решении уравнений. В средней школе уравнения рассматриваются уже также как инструмент решения текстовых задач. Анализируя место уравнений в школьном курсе математики, можно выделить следующие этапы: пропедевтический этап (начальная школа, курс математики 5-6 классов основной школы), основной этап (с 7 по 9 класс основной школы) и завершающий этап (10-11 классы).

1.2 Анализ содержания теоретического и задачного материала по отбору корней уравнений в курсе алгебры и начал математического анализа

Задачи на отбор корней уравнения, формулируемые как «запишите в ответ меньший из корней», «запишите в ответ больший из корней», «найдите корень уравнения, принадлежащий отрезку», «найдите корень уравнения, принадлежащий промежутку» в учебниках курса алгебры и начал математического анализа практически не встречается. Подобные задачи ставятся перед учащимися при сдаче итоговой аттестации в форме ОГЭ и ЕГЭ. Умение осуществлять отбор того или иного корня уравнения способствует развитию, углублению их знаний, конкретизации содержательных связей по реализации линий между материалом разных классов.

ФГОС в качестве целей изучения раздела «Уравнения и неравенства» ставит сформировать у обучающихся понятия «уравнение, неравенство, равносильные уравнения и неравенства, уравнение, являющееся следствием другого уравнения, уравнения, равносильные на множестве, равносильные преобразования уравнений», что позволит им «понимать смысл теорем о равносильных и неравносильных преобразованиях уравнений и уметь их доказывать; владеть методами решения уравнений, неравенств и их систем, уметь выбирать метод решения и обосновывать свой выбор; использовать метод интервалов для решения неравенств, в том числе дробно-рациональных и включающих в себя иррациональные выражения; решать алгебраические уравнения и неравенства и их системы с параметрами алгебраическим и графическим методами; владеть разными методами доказательства неравенств; решать уравнения в целых числах; изображать множества на плоскости, задаваемые уравнениями, неравенствами и их системами; свободно использовать тождественные преобразования при решении уравнений и систем уравнений» [45, С. 100].

Навык отбора того или иного корня уравнения неразрывно связан с умением школьниками определять множество решений уравнения и оперировать понятиями множества, принадлежность множеству. Примером может служить задача отбора корней уравнения $x^2 - 3 \cdot x + 2 = 0$ на заданном множестве $\mathrm{A} = \{-1,\ 0, 1\}$. Согласно ФГОС при изучении раздела «Элементы теории множеств и математической логики» учащиеся должны уметь: «находить пересечение и объединение множеств, в том числе представленных графически на числовой прямой и на координатной плоскости; проводить доказательные рассуждения для обоснования истинности утверждений» [96]. Рассматриваемое уравнение $x^2 - 3 \cdot x + 2 = 0$ не имеет решений на множестве отрицательных чисел, так как ни один элемент этого множества не обращает высказывательную форму $x^2 - 3 \cdot x + 2 = 0$ в истинное высказывание. Из множества натуральных чисел это уравнение имеет два решения $x_1 = 1$ и $x_2 = 2$. Если задано множество $\mathrm{A} = \{-1,\ 0, 1\}$, то уравнение будет иметь на этом множестве одно решение $x = 1$. Как отмечают M. Bonato [104], D. Bresolin [105], F. Yua [108], M. Voskoglou [107], A. Терро [106], при изучении натуральных и целых чисел часто возникает недопонимание исходного понятия множества, что может вызывать в дальнейшем затруднения при отборе корней уравнения на заданном множестве.

Вместе с этим, задачи на отбор корней уравнений тесно связаны также со знанием школьников о том, какие бывают числа: натуральные, целые, рациональные или иррациональные, положительные или отрицательные, действительные или мнимые. Обучающиеся должны владеть понятиями «натуральное число, множество натуральных чисел, целое число, множество целых чисел, обыкновенная дробь, десятичная дробь, смешанное число, рациональное число, множество рациональных чисел, иррациональное число, корень степени n, действительное число, множество действительных чисел, геометрическая интерпретация натуральных, целых, рациональных, действительных чисел» [96, С. 94], которые формируются у них при изучении раздела «Числа и выражения». Изученные термины позволяют решать задачи на отбор корней уравнений. Так, рассматривая основные приёмы при решении уравнений в целых числах (перебор возможных вариантов после разложения уравнения на множители и использование делимости целых чисел) при изучении уравнений в целых числах, в пособии Б.А. Будак приводятся следующие задания:

Задание 1. «Решить уравнение в натуральных числах $2xy = x^2 + 2y$» [25].

Решение.

$$2xy = x^2 + 2y,$$

$$y^2 - 2y = (x - y)^2,$$

$$(y - 1)^2 - (x - y)^2 = 1,$$

$$(2y - x - 1)(x - 1) = 1.$$

На множестве целых чисел получим $x = 2, y = 2$.

Задание 2. «Доказать, что уравнение $y^2 = 5x^2 + 6$ не имеет решений в целых числах» [25].

Решение. Запишем уравнение в виде: $y^2 - x^2 = 4x^2 + 6$,

$$(y - x)(y + x) = 4x^2 + 6,$$

$$(y - x)(y + x) = 2 \cdot (2x^2 + 3).$$

Проведём анализ правой и левой частей уравнения. Правая часть уравнения кратна двум, значит, левая часть также является чётным числом. Однако, если выражение $(y + x)$ чётно, то $(y - x)$ чётно, а выражение $y^2 -$ $- x^2$ делится на четыре. Выражение $2 \cdot (2x^2 + 3)$ не делится на четыре. Значит, уравнение решений не имеет.

Кроме того, отбор корней уравнения тесно связан с умением сравнивать числа: дробные, иррациональные, положительные, отрицательные. В 5-6 классах ученики сравнивают дроби. В учебниках отражено правило: «Из двух дробей с одинаковыми знаменателями больше та, у которой числитель больше». В каждом учебнике 5-6 класса есть большой объём задач на сравнение. В средней и старшей школе такие задания также присутствуют [1], [4]-[9], [11], [16], [26], [37], [49], [62], [64], [65], [67], [71], хотя их значительно меньше. Примером такого задания для учащихся 7-9 классов может служить приведённое в книге Н.П. Кострикиной задание: «Какое из чисел больше $2^{3^{2^3}}$ или $3^{2^{3^2}}$?» [47]. Задачи на сравнение чисел есть во всех учебниках по математике и являются пропедевтическими по формированию навыка отбора большего или меньшего корня уравнения, корня уравнения на заданном отрезке или интервале.

Отметим также, что при решении текстовых задач в курсе алгебры анализ содержательной части задачи или предложенной ситуации позволяет также применять умение отбора полученных корней и формировать осознанное усвоение этого умения. Такого типа задачи также присутствуют во всех учебниках алгебры [1], [8], [9], [11], [26], [49], [55], [61], [70], [76] и пособиях для учителей [37], [82]. Согласно ФГОС в разделе «Текстовые задачи» ученики должны «анализировать условие задачи, выбирать оптимальный метод решения задачи, рассматривая различные методы; строить модель решения задачи, проводить доказательные рассуждения при решении задачи; решать задачи, требующие перебора вариантов, проверки условий, выбора оптимального результата; анализировать и интерпретировать полученные решения в контексте условия задачи, выбирать решения, не противоречащие контексту; переводить при решении задачи информацию из одной формы записи в другую, используя при необходимости схемы, таблицы, графики, диаграммы» [96, С. 114-115]. Например, в задаче для 10 класса в учебнике Ю.М. Колягина «Расстояние в 600 км пассажирский поезд прошёл на час быстрее товарного. Какова скорость каждого поезда, если скорость товарного поезда на 30км/ч меньше, чем скорость пассажирского?» [14] решение предполагает введение переменной x км/ч - скорости пассажирского поезда обозначается, тогда скорость товарного поезда принимают за $(x-30)$ км/ч. Время в пути товарного поезда $\frac{600}{x-30}$ч, время в пути пассажирского поезда $\frac{600}{x}$ ч. Составляем уравнение $\frac{600}{x-30}-1=\frac{600}{x}$. Решаем полученное уравнение.

Находим ОДЗ уравнения: $\begin{cases} x-30 \neq 0, \\ x \neq 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \neq 30, \\ x \neq 0. \end{cases}$

$\frac{600x-600(x-30)-x(x-30)}{x(x-30)}=0,$

$\frac{600x-600x+18000-x^2+30x}{x(x-30)}=0,$

$x^2-30x+18000=0,$

$D=900+72000=72900,$

$x_{1/2}=\frac{30\pm 270}{2}, x_1=150, x_2=-120.$

Анализируем полученные значения. Скорость не может быть отрицательной, поэтому значение $x=-120$ не является решением задачи. Данная задача формирует представление о необходимости отбора корней уравнений в задачах с практическим содержанием.

К ситуации, в которой необходимо отобрать корни уравнений, приводит наличие области допустимых значений. Как отмечает А.А. Столяр: «Уравнение всегда рассматривается на каком-то определённом множестве (область определения логической функции). Подмножество этого множества, на котором оно обращается в истинное высказывание (область истинности логической функции), называется множеством решений уравнения» [93, С. 291]. Область допустимых значений присутствует при решении иррациональных, биквадратных, показательных, логарифмических и тригонометрических уравнений.

Приведем примеры заданий из школьных учебников.

Задание 1. Решить уравнение $lg\, x - lg\, 1\,2 = log_{0,1}(x+1) - log_{100} 4$ [19].

Находим ОДЗ: $\begin{cases} x > 0 \\ x + 1 > 0 \end{cases} \Rightarrow x > 0.$

$$\lg\frac{x}{12} = \log_{10^{-1}}(x+1) - \log_{10^2} 2^2$$

Используя свойство $\log_{b^n} a = \frac{1}{n}\log_b a$, переходим к десятичному логарифму:

$$\lg\frac{x}{12} = -\lg(x+1) - \lg 2$$

Применяя свойство $\log_b a + \log_b c = \log_b a\,c$, получим:

$$\lg\frac{x}{12} = -\lg 2\,(x+1)$$

На основании свойства $n\log_b a = \log_b a^n$, имеем:

$$\lg\frac{x}{12} = \lg\frac{1}{2(x+1)}$$

Полученное уравнение равносильно уравнению

$$\frac{x}{12} = \frac{1}{2(x+1)}$$

$2x(x+1) = 12, \quad x^2 + x - 6 = 0, \quad x_1 = -3, x_2 = 2$

Корень $x_1 = -3$ не удовлетворяет ОДЗ уравнения.

Ответ: $x = 2$.

Проиллюстрируем отбор корня согласно ОДЗ уравнения на примере показательного уравнения:

Задание 2. Решить уравнение «$2^{2+x} - 2^{2-x} = 5$» [15].

Решение: $2^{2+x} - 2^{2-x} = 5 \Leftrightarrow 2^2 \cdot 2^x - \frac{2^2}{2^x} = 15 \Leftrightarrow 4 \cdot (2^x)^2 - 4 = 15 \cdot 2^x$. Сделаем замену: $t = 2^x$, $t > 0$, получим уравнение: $4 \cdot t^2 - 4 = 15 \cdot t \Leftrightarrow 4 \cdot t^2 - 15 \cdot t - 4 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 4 \\ t = -\frac{1}{4} \end{array}\right.$. Так как $t = -\frac{1}{4} < 0$, данный корень является посторонним. Обратная замена: $2^x = 4 \Leftrightarrow 2^x = 2^2 \Leftrightarrow x = 2$.

Уравнения на отбор корней по его ОДЗ такого типа также присутствуют во всех учебниках курса алгебры, алгебры и начал математического анализа [3], [12], [13], [15], [19], [28], [29], [49], [67], [68], [70], [72].

В 11 классе при изучении темы «Производная» в задачах на нахождение наибольшего и наименьшего значений функций обязательно указывается промежуток, интервал или отрезок, ограничивающий значения аргумента. Иллюстрацию приводят на прикладных задачах. Например, в учебнике Ш.А. Алимова разобрано решение задачи: «Из всех прямоугольников, вписанных в окружность, радиуса R, найти прямоугольник наибольшей площади» [13, С. 279]. При решении автор показывает, что следует ограничится нахождением корня на интервале $(\mathbf{0}; \mathbf{R})$. М.Л. Галицкий также приводит «пример задачи геометрического содержания, которая сводится к нахождению наибольшего и наименьшего значений функции, непрерывной на отрезке» [31, С. 86]: «В основании пирамиды $\mathbf{MABCD}$ лежит прямоугольная трапеция $\mathbf{ABCD}$, в которой $\mathbf{AB}$ и $\mathbf{CD}$ параллельны, угол $\mathbf{ABC}$ прямой. Боковое ребро $\mathbf{MB}$ перпендикулярно плоскости основания. Через вершину $\mathbf{M}$ и произвольную точку $\mathbf{K}$, взятую на ребре $\mathbf{BC}$, проведено сечение, параллельное прямой $\mathbf{AB}$. Найти наибольшую и наименьшую площади сечений, если $\mathbf{AB = 2}$, $\mathbf{BC = 5}$, $\mathbf{CD = 1}, \mathbf{MB} = \mathbf{2}\sqrt{\mathbf{2}}$». В ходе решения автор задаёт $\mathbf{BK = x}$, переписывает формулу для площади через заданную переменную и ограничивает её нахождение неравенством $\mathbf{0 \leq x \leq 5}$.

Кроме того, с отбором или наличием того или иного количества корней учащиеся также сталкиваются при решении задач с параметрами. Это наиболее сложные задания, которые присутствуют в перечне заданий второй части ЕГЭ профильного уровня курса алгебры и начал анализа. С.М. Никольский даёт следующее определение: «решить уравнение с параметром – значит для каждого значения параметра найти множество всех корней данного уравнения (множество может быть и пустым)» [74, С. 355]. Поэтому эти задания присутствуют в учебниках с углубленным уровнем. В курсе алгебры для 7 класса С.М. Никольский [15, С. 203-206] в §10 введён пункт 10.7* «О количестве решений системы двух уравнений первой степени с двумя неизвестными», являющийся дополнительным к базовому уровню подготовки. А.Г. Мордкович в учебнике для 8 класса [60, С. 229-231] в Главе 6. «Алгебраические уравнения» вводит обязательный к изучению параграф §39. «Задачи с параметрами». Учебник алгебры 9 класса автора Ю.Н. Макарычева [10, С. 109-117] содержит обязательный к изучению §7. «Уравнения с параметрами» второй главы «Уравнения и неравенства с одной переменной». С.М. Никольский [74] в учебнике алгебры и начал математического анализа для базового и профильного уровня 11 класса во второй главе «Уравнения. Неравенства. Системы» включает §15. «Уравнения, неравенства и системы с параметром», описывая: уравнения с параметром, неравенства с параметром, системы уравнений с параметром и задачи с условиями. Учебник по алгебре и началам математического анализа 11 класса А.Г. Мордковича [61] также содержит задачи с параметром в §34 «Задачи с параметрами» 6-той главы «Уравнения и неравенства. Системы уравнений и неравенств». Для учащихся 11 класса в учебнике по алгебре и началам математического анализа Н.Я. Виленкин [28, С. 124-133] «вводит параграф 6-той «Уравнения и неравенства с параметрами» главы 2 «Показательная, логарифмическая и степенная функции», в котором рассматриваются: рациональные уравнения и неравенства с параметром, иррациональные уравнения и неравенства с параметром, трансцендентные уравнения и неравенства с параметром» [52].

Уравнения с параметром описывают наличие различного числа корней и их отбор в зависимости от значения параметра. Задачи подобного типа включены в ЕГЭ профильного уровня, их решение также требует от учеников умения отбирать тот или иной корень.

Проведённый анализ показывает, что несмотря на отсутствие в формулировке заданий фразы «выберите корень», в задачном материале учебников встречаются задачи на составление уравнений, их решение и последующий отбор корней уравнений.

1.3 Методические особенности обучения решению иррациональных уравнений

В данном параграфе опишем методические особенности обучения решения старшеклассников методам решения иррациональных уравнений и отбору их корней на основе анализа методической литературы.

Нами будет описана дифференцированная система иррациональных уравнений, представленная на основе определенных требований. Опишем требования к данной системе задач.

Так, для разработки дифференцированной системы иррациональных уравнений при подготовке к ЕГЭ рассмотрим понятие «система». Т.А. Иванова приводит данное определение в учебном пособии для студентов педагогических ВУЗов «Теория и технология обучения математике в средней школе» как «совокупность элементов, находящихся в определенных связях и отношениях друг с другом, которые образуют определенную целостность» [95]. Согласно системному подходу для разработки системы упражнений следует выделить элементы системы, установить связи между ними и определить значения каждого элемента в ней.

Типы иррациональных уравнений в системе задач подобраны от простого к сложному, решение этих уравнений направлено на сформированность навыков решения основных типов иррациональных уравнений, в том числе при подготовке к ЕГЭ. При составлении системы задач выделены пять уровней: два базовых (по уровням сложности) и три профильных, в самом сложном из которых представлены иррациональные уравнения, содержащие параметр.

Приведём типы иррациональных уравнений и методы их решения согласно введённым уровням.

Базовый тип (1 уровень): содержит простейшие иррациональные уравнения с наличием функции только в одной части уравнения без дополнительных заданий поиска корней на заданном интервале. Это иррациональные уравнения вида $\sqrt[n]{f(x)} = a$, для решения которых обе части уравнения возводят в степень n. Решения подобного типа задач выступают основой для исследования более сложных иррациональных уравнений. Они играют ключевую роль в дифференцированной системе иррациональных уравнений.

Пример 1. Решить уравнение «$\sqrt[3]{1 - x} = 2$» [13]. Решение. $\sqrt[3]{1 - x} = 2$ $=> 1 - x = 2^3 => 1 - x = 8 => -x = 8 - 1 => x = -7$. Ответ: -7.

Пример 2. Решить уравнение «$\sqrt{x - 2} = 5$» [13]. Решение. $\sqrt{X - 2} = 5$ $=> x - 2 = 25 => x = 25 + 2 => x = 27.$ Ответ: 27.

Пример 3. Решить уравнение «$\sqrt[3]{2x + 3} = 1$» [13]. Решение. $\sqrt[3]{2x + 3} =$ $= 1 => 2x + 3 = 1 => 2x = 1 - 3 => 2x = -2 => x = -1$.

Ответ: -1.

Базовый тип (2 уровень): простейшие иррациональные уравнения с наличием функций в обеих частях уравнения, не содержащие задания на поиск корней на заданном отрезке. В дифференцированной системе иррациональных уравнений решение данного типа уравнений готовит учеников базового уровня подготовки к решению самых сложных уравнений. Несмотря на отсутствие задания на отбор корней, данный тип уравнений требует навыка отобрать корень согласно наличию ограничений на функции в подкоренной части уравнения. Определим их как уравнения вида $\sqrt[2n]{f(x)} = g(x)$ и $\sqrt[2n]{f(x)} = \\ = \sqrt[2n]{g(x)}$.

Пример 4. Решить уравнение «$\sqrt{4+\text{x}} = \sqrt{2\text{x}-1}$» [13].

Решение. $\sqrt{4+\text{x}} = \sqrt{2\text{x}-1} \Rightarrow 4+\text{x} = 2\text{x}-1 \Rightarrow 2\text{x}-\text{x} = 4+1 \Rightarrow \text{x} = 5.$ Ответ: 5.

Пример 5. Решить уравнение «$\sqrt[3]{3\text{x}^2-3} = \sqrt[3]{8\text{x}}$» [13].

Решение. $\sqrt[3]{3\text{x}^2-3} = \sqrt[3]{8\text{x}}$, $3\text{x}^2-3 = 8\text{x} \Rightarrow 3\text{x}^2-8\text{x}-3 = 0, \text{x}_1 == -\frac{1}{3};\ \text{x}_2 = 3.$ Ответ: $\text{x}_1 = -\frac{1}{3};\ \text{x}_2 = 3.$

Пример 6. Решить уравнение «$\sqrt{6+\text{x}-\text{x}^2} = 1-\text{x}$» [13]. Решение. $\begin{cases} 6+\text{x}-\text{x}^2 = (1-\text{x})^2 \\ 1-\text{x} \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 6+\text{x}-\text{x}^2 = 1-2\text{x}+\text{x}^2 \\ \text{x} \leq 1 \end{cases}, 2\text{x}^2-3\text{x}-5 = 0 \Rightarrow \text{x}_1 = \\ = \frac{5}{2}, \text{x}_2 = -1.$ x_1 —не удовлетворяет условию $\text{x} \leq 1$. Ответ: -1.

Профильный тип (1 уровень): уравнения основных типов иррациональных уравнений и методы их решения: метод возведения в одну степень, метод замены переменной. Это иррациональные уравнения вида $\sqrt[n]{f(x)} \pm \sqrt[m]{g(x)} = a$, $\sqrt[n]{f(x)}g(x) = 0$. Также несмотря на отсутствие задания на отбор корней уравнения в явном виде, школьникам приходится осуществлять отбор согласно введённым ограничениям.

Пример 7. Определить корень уравнения «$\sqrt{3-2\text{x}} - \sqrt{1-\text{x}} = 1$» [13]. Решение. $\left(\sqrt{3-2\text{x}}\right)^2 = \left(1+\sqrt{1-\text{x}}\right)^2 \Rightarrow 3-2\text{x} = 1+2\sqrt{1-\text{x}}+1-\text{x}$, $2\sqrt{1-\text{x}} = 1—\text{x} \Rightarrow 4(1-\text{x}) = \text{x}^2-2\text{x}+1$, $\text{x}^2+2\text{x}-3 = 0 \Rightarrow \text{x}_1 = \\ = 1;\ \text{x}_2 = -3.$ Ответ: $\text{x}_1 = 1;\ \text{x}_2 = -3.$

Пример 8. Решить уравнение $\sqrt{\text{x}^2+2\text{x}+10} + \sqrt{\text{x}^2+2\text{x}+17} = 7.$

Решение. Пусть $\text{t} = \sqrt{\text{x}^2+2\text{x}+10}$, получим $\text{t}^2 = \text{x}^2+2\text{x}+10.$ $\text{T} + \sqrt{\text{t}^2+7} = \\ = 7 \Rightarrow \sqrt{\text{t}^2+7} = 7-\text{t} \Rightarrow \text{t}^2+7 = 49-14\text{t}+\text{t}^2,\ 14\text{t} = 42 \Rightarrow \text{t} = 3,$

$\sqrt{x^2+2x+10}=3 \Rightarrow x^2+2x+10=9 \Rightarrow x^2+2x+1=0,\ \ x_1=-1.$
Ответ: -1.

Пример 9. Решить уравнение $\sqrt[4]{x-2}(21x^2-14x-35)=0$. Согласно области допустимых значений для подкоренного выражения четвёртой степени $x\geq 2$. Произведение равно нулю, если один из множителей равен нулю: $\sqrt[4]{x-2}=0$ или $21x^2-14x-35=0$. $x_1=2$ $x_2=-1, x_3=\frac{5}{3}$. x_2, x_3- не удовлетворяют неравенству $x\geq 2$. Ответ: 2.

Пример 10. Решить уравнение «$\sqrt{x+\sqrt{6x-9}}+\sqrt{x-\sqrt{6x-9}}=\sqrt{6}$» [13]. Решение.$\sqrt{x+\sqrt{6x-9}}+\sqrt{x-\sqrt{6x-9}}=\sqrt{6} \Rightarrow \left(\sqrt{x+\sqrt{6x-9}}+\right.$

$\left.+\sqrt{x-\sqrt{6x-9}}\right)^2=6;\ \left(x+\sqrt{6x-9}\right)+$

$+2\sqrt{\left(x+\sqrt{6x-9}\right)\left(x-\sqrt{6x-9}\right)}+\left(x-\sqrt{6x-9}\right)=6;\ \ 2x+$

$+2\sqrt{x^2-6x+9}=6;\ 2x+2|x-3|=6.$

При $x\geq 3$: $2x+2(x-3)=6 \Rightarrow 4x=12 \Rightarrow x=3$. При $x<3$: $2x+$ $+2(-x+3)=6 \Rightarrow 6=6 \Rightarrow x\in(-\infty;3)$. ОДЗ: $x\geq 1{,}5$.

Ответ: $x\in[1{,}5;3]$.

Профильный тип (2 уровень): иррациональные уравнения, решаемые преобразованием с помощью введения новой переменной или с использованием формул сокращённого умножения. В указанном уровне изучаются уравнения вида $\sqrt[n]{f(x)}\pm\sqrt[n]{g(x)}=\sqrt[n]{q(x)}$. Заметим, что при решении школьникам приходится осуществлять отбор корней иррациональных уравнений согласно введённым ограничениям.

Пример 11. Решить уравнение «$\sqrt{x+6}-\sqrt{x+1}=\sqrt{2x-5}$» [13]. Решение. $x+6-2\sqrt{x+6}\sqrt{x+1}+x+1=2x-5 \Rightarrow \sqrt{x^2+7x+6}=6, x^2+$ $+7x+6=36 \Rightarrow x^2+7x-30=0,\quad x_1=3;\ x_2=-10.\quad x_2-$ посторонний корень. Ответ: 3.

Пример 12. Решить уравнение «$\sqrt{7x+1}-\sqrt{6-x}=\sqrt{15+2x}$» [14]. Решение. $\left(\sqrt{7x+1}-\sqrt{6-x}\right)^2=15+2x \Rightarrow 7x+1-2\sqrt{(7x+1)(6-x)}+$ $+6-x=15+2x \Rightarrow 2\sqrt{6-7x^2+41x}=4x-8$, $4(6-7x^2+41x)=16x^2-$ $-64x++64 \Rightarrow 11x^2-57x+10=0$, $x_1=\frac{2}{11}, x_2=5$. Ответ: 5.

Профильный тип (3 уровень): иррациональные уравнения с обязательным дополнительным заданием нахождения корней на заданном промежутке и иррациональные уравнения, содержащие параметр. Задания подобного типа содержатся в ЕГЭ профильного уровня под номерами 13 и 18. Данный уровень призван подготовить обучающихся к успешной сдаче ЕГЭ профильного уровня.

Пример 13. «Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение $\sqrt{x^4-4x^2+9a^2}=x^2+2x-3a$ имеет ровно три корня» [103].

Решение. $\sqrt{x^4-4x^2+9a^2}=x^2+2x-3a \Rightarrow$

$$\begin{cases} x^4-4x^2+9a^2=x^4+4x^2+9a^2+4x^3-6ax^2-12ax, \\ x^2+2x-3a\geq 0, \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3ax(x+2)=2x^2(x+2), \\ x^2+2x-3a\geq 0. \end{cases}$$

Корни уравнения представленной системы: $x_1=0,\ x_2=-2, x_3=\frac{3a}{2}$.

Исходное уравнение имеет три отличных друг от друга корня, если при $x=0, x=-2$ и $x=\frac{3a}{2}$ выполняются неравенства:

$x^2+2x-3a\geq 0, \frac{3a}{2}\neq -2$ и $\frac{3a}{2}\neq 0$.

Получим систему:

$$\begin{cases} \frac{9}{4}a^2+3a-3a\geq 0, \\ \frac{3a}{2}\neq -2 \\ (-2)^2-4-3a\geq 0, \\ 0^2+0-3a\geq 0, \\ \frac{3a}{2}\neq 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a<0, \\ a\neq -\frac{4}{3}, \end{cases} \Leftrightarrow a\epsilon\left(-\infty;-\frac{4}{3}\right)\cup\left(-\frac{4}{3};0\right).$$

Ответ: $a<-\frac{4}{3},\ -\frac{4}{3}<a<0$.

Задания подобного типа содержатся в учебных пособиях И.В. Ященко [102], [103].

1.4 Методы отбора корней показательных и логарифмических уравнений

Переменная в показательном уравнении содержится в показателе степени. Среди методов решения показательных уравнений выделяют: почленное деление; группировка; уравнивание показателей; введение новой переменной; вынесение общего множителя за скобки; группировка; функционально-графический метод решения. В большинстве случаев решение показательного уравнения приводит в итоге к решению уравнения $a^x = a^b$, где $a > 0$, $a \neq 1$. Последние приведённые ограничения на a приводят к ограничениям при выборе того или иного корня показательного уравнения, решаемого заменой переменной, или в случае, если оно является уравнением с параметром или уравнением смешанного типа. Вопрос отбора корня показательного уравнения встаёт перед учащимися уже на этапе решения задач базового уровня, исходя из условия при решении заменой переменной, что $a^x > 0$.

Пример 1. Решить уравнение $25^{\mathrm{x}} + 5^{\mathrm{x}} - 2 = 0$. Пусть $5^{\mathrm{x}} = \mathrm{t}, \mathrm{t} > 0$, после замены получим уравнение: $\mathrm{t}^2 + \mathrm{t} - 2 = 0$, корни которого $\mathrm{t}_1 = 1$ и $\mathrm{t}_2 = -2$. Последний корень квадратного уравнения не удовлетворяет введённому ограничению $\mathrm{t} > 0$. Осуществляя обратную замену, получим $5^{\mathrm{x}} = 1, \mathrm{x} = 0$. Ответ: $\mathrm{x} = 0$.

Такое же отбор корня необходим при ограничении $a^x > 0$ в случае решения показательных уравнений методом почленного деления. Данный метод применяют при решении однородных показательных уравнений, деля каждый член уравнения на одно из оснований в наивысшей степени.

Пример 2. Решить уравнение $5 \cdot 5^{2\mathrm{x}} + 13 \cdot 5^{\mathrm{x}} \cdot 3^{\mathrm{x}} + 6 \cdot 3^{2\mathrm{x}} = 0$.

Решение. Делим каждый член уравнения на 3^{2x}. Получим уравнение $5\cdot\left(\frac{5}{3}\right)^{2x}+13\cdot\left(\frac{5}{3}\right)^{x}+6=0$. Сделаем замену $\left(\frac{5}{3}\right)^{x}=t, t>0$, получим квадратное уравнение $5t^2+13t+6=0$, корнями которого являются $t_1 = = -\frac{3}{5}$ и $t_2=-2$. Корни уравнения не удовлетворяет ограничению $t>0$. Ответ: уравнение не имеет решения.

Отдельный класс задач на отбор корней можно привести из различных сборников и интернет-источников, призванных подготовить старшеклассников к сдаче ЕГЭ профильного уровня. Это задачи типа 13 с отдельным заданием на отбор корней на промежутке.

Приведём пример такого задания с решением с сайта «РЕШУ ЕГЭ. Образовательный портал для подготовки к экзаменам» [83] (рисунок 1).

а) Решите уравнение $9^{x-\frac{1}{2}}-8\cdot3^{x-1}+5=0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left(1, \frac{7}{3}\right)$.

Решение.

а) Заметим, что $9^{\left(x-\frac{1}{2}\right)}=9^{\left(x-1+\frac{1}{2}\right)}=9^{\frac{1}{2}}\cdot9^{(x-1)}=3\cdot9^{(x-1)}$, преобразуем исходное уравнение:

$$9^{x-\frac{1}{2}}-8\cdot3^{x-1}+5=0\Leftrightarrow3\cdot9^{x-1}-8\cdot3^{x-1}+5=0.$$

Пусть $t=3^{x-1}$, тогда уравнение запишется в виде $3t^2-8t+5=0$, откуда $t=1$ или $t=\frac{5}{3}$.

При $t=1$ получим: $3^{x-1}=1$ откуда $x=1$.

При $t=\frac{5}{3}$ получим: $3^{x-1}=\frac{5}{3}$ откуда $x=\log_3 5$.

б) Корень $x=1$ не принадлежит промежутку $\left(1, \frac{7}{3}\right)$. Поскольку $1<\log_3 5$ и $\log_3 5<\log_3 9=2<\frac{7}{3}$, корень $x=\log_3 5$ принадлежит промежутку $\left(1, \frac{7}{3}\right)$.

Ответ: а) $1, \log_3 5$; б) $\log_3 5$.

Рисунок 1 - Пример задания на отбор корней показательного уравнения с сайта «РЕШУ ЕГЭ»

Также при подготовке к сдаче ЕГЭ профильного уровня по математике старшеклассники готовятся к решению уравнений с параметром, среди которых в наличии показательные уравнения.

Приведём пример КИМа задач типа 18 единого государственного экзамена [83] (рисунок 2).

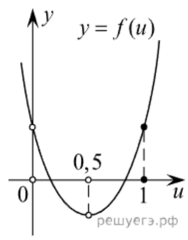
Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение

$$\frac{a\cdot 25^{x^2-1}+15^{x^2}}{2\cdot 9^{x^2}-15^{x^2}}=1$$

имеет хотя бы одно решение.

Решение.

Положив $a=25b$, $\left(\frac{3}{5}\right)^{x^2}=u$, где $0<u\leqslant 1$, и разделив числитель и знаменатель левой части уравнения на 5^{2x^2}, получаем уравнение $\frac{b+u}{2u^2-u}=1$. При $u\neq 0$, $u\neq 0,5$ имеем:



$$\frac{b+u}{2u^2-u}=1 \Leftrightarrow b+u=2u^2-u \Leftrightarrow 2u^2-2u-b=0.$$

Рассмотрим функцию $f(u)=2u^2-2u-b$ при $u\neq 0,5$. Её графиком является парабола, ветви которой направлены вверх. Абсцисса вершины этой параболы равна 0,5, значит, функция будет иметь корни на промежутке (0; 1] тогда и только тогда, когда выполняются два условия $f(0,5)<0$ и $f(1)\geqslant 0$ (см. рис.). Окончательно получаем:

$$\begin{cases} 0,5-1-b<0, \\ -b\geqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow -0,5<b\leqslant 0,$$

откуда $-12,5<a\leqslant 0$.

Ответ: $-12,5<a\leqslant 0$.

Рисунок 2 - Пример КИМа задачи типа 18 ЕГЭ

Аналогично при решении простейших логарифмических уравнений встаёт вопрос отбора того или иного корня из-за накладываемых ограничений на выражения, стоящие под знаком логарифма.

Рассмотрим пример.

Пример 3. Решить уравнение $\log_2(1+3x)=\log_2(2x-3)$.

Решение. Приравняем выражения, стоящие под знаками логарифмов в правой и левой частях равенства, так как основания логарифмов в обеих частях равенства одинаковые: $1+3x=2x-3$; $3x-2x=-3-1; x=-4$. При решении уравнения следует соблюдать ограничения, вытекающие из определения логарифма: на логарифм от некоторой функции $\log_a f(x)$ накладываются ограничения $\begin{cases} f(x)>0; \\ a>0; \\ a\neq 1. \end{cases}$ Таким образом, уравнение не имеет решения.

Решение логарифмических уравнений сводится к решению уравнения вида: $\log_a f(x)=\log_a g(x) \Rightarrow f(x)=g(x)$ при условии $f(x)>0$ или $g(x)>0$.

На повышенном уровне рассматриваются логарифмы с переменным основанием. Здесь при решении на основание логарифма, представляющее также выражение, зависящее от х, также накладывают ограничения.

Приведём пример задачи на отбор корней логарифмического уравнения с решением с сайта «РЕШУ ЕГЭ. Образовательный портал для подготовки к экзаменам» [83] (рисунок 3).

а) Решите уравнение $\log_5(2-x) = \log_{25} x^4$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\log_9 \frac{1}{82};\ \log_9 8\right]$.

Решение.

а) Запишем исходное уравнение в виде:

$$\log_5(2-x) = \log_5 x^2 \Leftrightarrow \begin{cases} 2-x = x^2, \\ x^2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+x-2=0, \\ x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-2, \\ x=1. \end{array}\right.$$

б) Поскольку $\log_9 \frac{1}{82} < -2 < \log_9 8 < 1$, отрезку $\left[\log_9 \frac{1}{82};\ \log_9 8\right]$ принадлежит единственный корень -2.

Ответ: а) -2; 1, б) -2.

Рисунок 3 - Пример задания на отбор корней показательного уравнения с сайта «РЕШУ ЕГЭ»

Анализ задачного материала учебников показал, что задач, содержащих отдельное задание на отбор корней логарифмических и показательных уравнений, нет в наличии, тогда как КИМы единого государственного экзамена такие задания содержат.

1.5 Методы и способы отбора корней тригонометрических уравнений

Перед описанием методов и способов отбора корней тригонометрических уравнений приведем методический анализ изучаемой темы. Выделим базовые знания и рассматриваемые сведения.

Базовые знания*:*

– понятие «тригонометрическое уравнение»; понятие «корень тригонометрического уравнения»;

– простейшие тригонометрические уравнения; типология тригонометрических уравнений;

– основные методы решения тригонометрических уравнений;

– понятие числовой окружности;

– понятия косинуса, синуса, тангенса, котангенса;

– понятие тригонометрических функций;

– понятие обратных тригонометрических функций.

Рассматриваемые сведения:

– задачи на отбор корней тригонометрических уравнений

– различные способы и методы отбора корней тригонометрических уравнений.

Теоретический материал по исследуемой теме представлен во всех учебниках старшей школы. Анализ содержания темы «Тригонометрические уравнения» в различных учебниках, рекомендованных Министерством Просвещения РФ авторов А.Г. Мордковича [64], Ю.М. Колягина [42] и Ш.А. Алимова [56] показывает, что в них рассматриваются одни и те же типы тригонометрических уравнений, порядок изучения типов тригонометрических уравнений одинаков, отличие наблюдается только в иллюстрации методов решения. Задачи на отбор корней тригонометрических уравнений приведены в ограниченном количестве как правило после изучения типов тригонометрических уравнений и методов их решения. Сравнительный анализ учебников, рекомендованных Министерством Просвещения РФ, представлен в таблице 3.

Тема «Тригонометрические уравнения» всеми авторами начинается с изучения решения уравнения вида $\cos x = a$. Затем следует пояснение решений простейших тригонометрических уравнений вида $sinx = a$, корни которых все авторы для начала предлагают записывать как $x = arcsina +$

$+2\pi k, k\epsilon Z; x = \pi - arcsina + 2\pi k, k\epsilon Z.$ Приведя некоторое количество примеров, во всех учебниках авторы выводят общую формулу $x = (-1)^k arcsina + \pi k, k\epsilon Z$ для приведённой ранее серии корней. Решения уравнений $cos\,x = a$ и $sinx = a$ проиллюстрированы на единичной окружности.

Таблица 3 – Результаты сравнительного анализа учебников, рекомендованных Министерством Просвещения РФ

Изучаемая тема	Ш.А. Алимов	Ю.М. Колягин	А.Г. Мордкович
	Раскрытие содержания темы		
Решение уравнения $cost = a$	Вывод общей формулы корней уравнения, примеры решений, иллюстрация решения на тригонометрической окружности	Вывод общей формулы корней уравнения, примеры решений, иллюстрация решения на тригонометрической окружности	Вывод общей формулы корней уравнения, примеры решений, иллюстрация решения на тригонометрической окружности
Решение уравнения $sint = a$	Вывод общей формулы корней уравнения, примеры решений, иллюстрация решения на тригонометрической окружности	Вывод общей формулы корней уравнения, примеры решений, иллюстрация решения на тригонометрической окружности	Вывод общей формулы корней уравнения, примеры решений, иллюстрация решения на тригонометрической окружности
Решение уравнений $tgt = a$ и $ctgt = a$	Выведена общая формула корней уравнения $tgt = a$, примеры решений, иллюстрация решения на тригонометрической окружности	Вывод общей формулы корней уравнения $tgt = a$, примеры решений, иллюстрация решения на тригонометрической окружности	Вывод общей формулы корней уравнений $tgt = a$ и $ctgt = a$, примеры решений
Однородные тригонометрические уравнения	Приведены примеры решения однородных тригонометрических уравнений	Описаны методы решения однородных уравнений, приведены примеры решения однородных тригонометрических уравнений	Введено определение однородных тригонометрических уравнений, описаны методы решения и алгоритм, примеры их решения

Продолжение таблицы 3

Изучаемая тема	Ш.А. Алимов	Ю.М. Колягин	А.Г. Мордкович
Раскрытие содержания темы			
Метод замены переменной	Примеры решения некоторых тригонометрических уравнений методом замены тригонометрической функции на новую переменную	Примеры решения некоторых тригонометрических уравнений методом замены тригонометрической функции на новую переменную	Описание метода, примеры решения тригонометрических уравнений методом замены тригонометрической функции на новую переменную
Метод разложения на множители	Рассмотрены примеры решения некоторых тригонометрических уравнений методом разложения на множители	Рассмотрены примеры решения некоторых тригонометрических уравнений методом разложения на множители	Описание метода, примеры решений некоторых тригонометрических уравнений методом разложения на множители
Уравнение типа $Asinx + Bcosx = C$	Рассмотрены: метод введения вспомогательного угла, метод приведения уравнения к однородному. Каждый метод проиллюстрирован примером решения.	Рассмотрены: метод введения вспомогательного угла, метод приведения уравнения к однородному. Каждый метод проиллюстрирован примером решения.	Рассмотрены: метод введения вспомогательного угла, универсальная тригонометрическая подстановка $t = tg\frac{x}{2}$, метод приведения уравнения к однородному. Каждый метод проиллюстрирован примером решения.
Отбор корней тригонометрических уравнений	Задачи на отбор корней приводятся после изучения свойств тригонометрических функций и изучения их графиков (по одному номеру на каждую тригонометрическую функцию)	Задачи на отбор корней тригонометрических уравнений приведены по одной на каждый тип тригонометрических уравнений	Рассматривает примеры на отбор корней простейших тригонометрических уравнений, иллюстрируя геометрическую интерпретацию решения

В учебниках авторов Ш.А. Алимова и Ю.М. Колягина перед изучением методов решения тригонометрических уравнений приведена тема «Преобразование тригонометрических выражений», опираясь на которую авторы далее демонстрируют решение тригонометрических уравнений с использованием преобразований. А.Г. Мордкович рассматривает методы решений различных типов уравнений, не применяя тригонометрические преобразования. Преобразование тригонометрических выражений автор рассматривает после изучения решения тригонометрических уравнений и после этого приводит примеры решения ранее изученных типов тригонометрических уравнений с помощью преобразований.

Отличие авторской позиции прослеживается при решении простейших тригонометрических уравнений $tgx = a$ и $ctgx = a$. Ш.А. Алимов и Ю.М. Колягин демонстрируют общую формулу только для решения уравнения $tgx = a$, приводя иллюстрацию решения на тригонометрической окружности. А.Г. Мордкович выводит формулы для нахождения корней уравнений обоих видов без иллюстрации их решений на единичной окружности. Все авторы приводят примеры решения уравнений $tgx = a$ и $ctgx = a$.

Во всех учебниках приведены также примеры решения тригонометрических уравнений, сводящихся к квадратным уравнениям методом замены тригонометрической функции на новую переменную и примеры решения тригонометрических уравнений с помощью разложения на множители.

Понятие однородных тригонометрических уравнений наиболее подробно описано у А.Г. Мордковича и Ю.М. Колягина, решение подобного типа уравнений алгоритмизировано только у А.Г. Мордковича, хотя примеры решения задач на данную тему приведены у всех трёх авторов.

Решения уравнений вида $Asinx + Bcosx = C$ методом введения вспомогательного угла и методом приведения уравнения к однородному проиллюстрированы во всех учебниках. Только А.Г. Мордкович описывает решение уравнений данного типа методом универсальной тригонометрической подстановки $t = tg\frac{x}{2}$ и приводит примеры решений.

В учебнике Ш.А. Алимова при рассмотрении примеров решения не приведены способы и методы отбора корней тригонометрических уравнений.

Однако, среди задач повышенного уровня уже при изучении темы «Уравнения $sint = a$» присутствуют задания №597 «Найти все корни уравнения $sin2x = \frac{1}{2}$, принадлежащие отрезку $[0; 2\pi]$» [56] и №598 «Найти все корни уравнения $sin\frac{x}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, удовлетворяющие неравенству $log_{\pi}(x - 4\pi) < 1$» [56]. Далее в тексте учебника подобного рода заданий не встречается вовсе.

Ю.М. Колягин также не приводит разбор примеров решения задач на отбор корней тригонометрического уравнения. Начиная тему с рассмотрения уравнений $cos\,x = a$ и приведя разбор решения уравнений данного вида, автор приводит задания №739 и № 740 на отбор корней. При изучении уравнений вида $sinx = a$ автор приводит три задачи на отбор корней, также не рассматривая в теоретической части способы и методы их отбора. При изучении темы на решения уравнений вида $tgx = a$ и $ctgx = a$ заданий на отбор корней не встречается. При рассмотрении уравнений, сводящихся к квадратным, автор приводит одну задачу с параметром на отбор корней. Больше задач на отбор корней тригонометрических уравнений автор не приводит. Приведем в таблице 4 обзор заданий на отбор корней тригонометрических уравнений в учебнике Ю.М. Колягина [42].

Таблица 4 - Задачи на отбор корней тригонометрических уравнений в учебнике Ю.М. Колягина

Вид уравнения	Задачи
$cos\,x = a$	«739. Найти все корни уравнения: $cos\,2x = -\frac{1}{2}$ на отрезке $[-\frac{\pi}{2}; \frac{5\pi}{2}]$» [42]. «740. Найти все корни уравнения $cos\,4x = \frac{\sqrt{2}}{2}$, удовлетворяющие неравенству $\|x\| < \frac{\pi}{4}$]» [42].
$sinx = a$	«766. Найти все корни уравнения $sin\,2x = \frac{1}{2}$, принадлежащие отрезку $[0;\ 2\pi]$» [42]. «767. Найти все корни уравнения $sin\,\frac{x}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, удовлетворяющие неравенству $log_{\pi}(x - 4\pi) < 1$» [42]. «768. Найти наименьший положительный корень уравнения: $sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$» [42].

Продолжение таблицы 4

Вид уравнения	Задачи
Уравнения, сводящиеся к квадратным	«818*. Найти все значения a, при котором уравнение $4cos\,2x + +(2-4a)sinx\ = a+3$ имеет единственный корень на интервале $\left(-\frac{\pi}{2};\ 0\right)$» [42].

А.Г. Мордкович уже при рассмотрении темы «Простейшие тригонометрические уравнения» приводит решение примера 11 «Найти те корни уравнения $\sin 2x = \frac{1}{2}$, которые принадлежат отрезку [0;π]», демонстрируя метод перебора параметра n. Далее автор приводит геометрическую интерпретацию приведённых рассуждений. Таким же образом разобран пример 12 на отбор корней тригонометрического уравнения $\cos 3x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ на отрезке [-2;3]. Далее автор говорит про наличие ОДЗ при решении тригонометрических уравнений и отбор корней в соответствии с областью определения уравнения, приводит пример $\mathrm{tg}x(\sin x - 1) = 0$, при решении которого $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$ – посторонние корни. В задачнике автор приводит систему задач на отбор корней тригонометрических уравнений с формулировками: найти корень на заданном отрезке; найти корень на заданном промежутке; найти наименьший положительный корень; найти наибольший отрицательный корень; сколько корней имеет заданное уравнение на заданном промежутке.

Отметим, что во всех учебниках рассматриваемых авторов приведены примеры решения с использованием формул двойного аргумента, формул суммы или разности аргументов различных тригонометрических функций, формул преобразования суммы функций в их произведение либо преобразования произведения в сумму, применяются формулы приведения. Присутствует ограниченное количество задач на отбор корней.

Таким образом, теоретический материал темы «Тригонометрические уравнения» всех авторов содержит следующие типы тригонометрических уравнений: простейшие тригонометрические уравнения видов $\cos x = a$, $\sin x == a$, $tgx = a$ и $ctgx = a$; однородные тригонометрические уравнения и уравнения вида $A\sin x + B\cos x = C$. Среди методов решения приведены и проиллюстрированы решением примеров метод введения новой переменной, метод разложения на множители; метод введения вспомогательного угла. Метод универсальной подстановки приведён только в учебнике А.Г. Мордковича, а метод оценки правой и левой частей уравнения только в учебнике Ю.М. Колягина. Примеры при демонстрации методов решения тригонометрических уравнений различных типов разные авторы приводят различные. Примеров на отбор корней тригонометрических уравнений в учебниках Ш.А. Алимова и Ю.М. Колягина приведено небольшое количество. А.Г. Мордкович ограничивает рассмотрение решение задач на отбор корней в учебнике методом перебора параметра n.

Нами был проведем анализ практического опыта учителей по теме «Отбор корней тригонометрических уравнений», опубликованный в статьях и учебно-методических пособиях. Опишем его результаты.

Статья «Алгоритмический подход к обучению школьников решению тригонометрических уравнений» Р.Ю. Костюченко [48] освещает основные методы решения тригонометрических уравнений, имеющиеся в учебниках алгебры и начал анализа.

С.В. Синакевич в статье «Опыт работы по теме «Тригонометрические уравнения» утверждает, что «наличие классификации связывает инициативу учащихся» [90] приводит примеры решений тригонометрических уравнений разных типов без их классификации или систематизации.

Применению при решении тригонометрических уравнений формул двойного угла, формул понижения степени, формул приведения посвящена статья П.И. Самсонова «Тема урока «Решение тригонометрических уравнений различными способами»» [86]. Этот же автор в статье «Простые замечания о сложной методике обучения решению тригонометрических уравнений» [85] рассматривает метод оценки правой и левой частей тригонометрического уравнения типа $\mathrm{Asinx} + \mathrm{Bcosx} = \mathrm{C}$.

Решению уравнений типа $\mathrm{Asinx} + \mathrm{Bcosx} = \mathrm{C}$ посвящена статья К.А. Рупасова «К вопросу о решении тригонометрических уравнений» [84], в которой автор приводит пример решения при помощи формулы $\cos \mathrm{x} = = \sqrt{1 - \mathrm{sinx}^2\mathrm{x}}$ и возведения обеих частей уравнения в квадрат; использование формул понижения степени и формул приведения; приведение уравнения к однородному; методы введения вспомогательного угла и универсальной тригонометрической подстановки.

Среди способов отбора корней тригонометрических уравнений С.Ш. Палфёрова в статье «Методика обучения отбору корней тригонометрических уравнений в курсе алгебры и начал математического анализа общеобразовательной школы» [81] выделяет арифметический, алгебраический, геометрический (подразделён на использование тригонометрической окружности и на использование числовой прямой при изображении корней уравнения) и функционально-графический, к каждому способу автором описаны приемы отбора корней тригонометрических уравнений. Те же способы отбора корней тригонометрических уравнений, а также методы их решения рассматривают авторы Прокофьев А.А. и Корянов А.Г в статье «Тригонометрические уравнения: методы решений и отбор корней» [46].

Глебова М.В. и Токарева Е.С. в статье «Методические рекомендации по отбору корней тригонометрического уравнения» раскрывают проблему небольшого процента решения задания №13 ЕГЭ профильного уровня по математике на отбор корней тригонометрического уравнения, рассматривают ошибки школьников при его решении, приводят методические рекомендации по оформлению отбора корней тригонометрического уравнения на основе применения определенных способов [32].

Авторы Кара-Сал Н.М., Бичиоол Е.К рассматривают такие приемы отбора корней тригонометрических уравнений как: подстановка в равенство целых значений n методом подбора; использование графика функции; наглядное использование единичной окружности [40].

Метод спирали при отборе корней тригонометрических уравнений, которые принадлежат определенному заданному промежутку, предлагают в своей статье Л.Д. Островерхая и О.К. Жданова [78].

Учитель математики ОБОУ «Лицей-интернат №1» г. Курска Е.Н. Белкина в своей статье рассматривает геометрический способ отбора корней тригонометрических уравнений, позволяющий, по её мнению, сразу определять количество корней уравнения, входящих в тот или иной промежуток, или решений, удовлетворяющих области определения уравнения [22].

Разработаны и опубликованы многочисленные методические пособия:

- «Тригонометрические уравнения и неравенства» И.Т. Бородуля [24];
- «Уравнения и неравенства (нестандартные методы решения)» С.Н. Олехник [77].
- «Тригонометрические уравнения и методика их преподавания» Е.С. Березанская [23].
- «Сборник задач по математике для поступающих во втузы В.К. Егерев [89].
- «Я сдам ЕГЭ! Математика. Модульный курс» И.В. Ященко [102]
- «Практикум по элементарной математике. Тригонометрия» В.Н. Литвиненко [51] и др.

Конспекты уроков по исследуемой теме представлены на сайте «Фестиваль педагогических идей «Открытый урок» [79], в том числе по учебнику А.Г. Мордковича [64].

На сайте «Мультиурок» [69] представлены лекции по теме «Тригонометрические уравнения», рабочие тетради, тестовые задания. На данном сайте также представлены также конспекты уроков по теме «Тригонометрические уравнения» по учебникам А.Г. Мордковича [64], [66].

Таким образом, анализ темы в перечисленных статьях и пособиях и опыта её изучения, в том числе при подготовке школьников к сдаче ЕГЭ, показывает интерес учителей и исследователей к теме «Тригонометрические уравнения: отбор корней».

Приведём вводимое при изучении темы определение тригонометрического уравнения.

«Тригонометрическими уравнения обычно называют уравнения, в которых переменные содержатся под знаками тригонометрических функций. Простейшие тригонометрические уравнения - это уравнения следующих видов: $\cos x = a, \sin x = a, \operatorname{tg} x = a, \operatorname{ctg} x = a$. Решить простейшее тригонометрическое уравнение - это значит описать множество значений переменной x, для которых данная тригонометрическая функция принимает заданное значение x» [67].

Среди тригонометрических уравнений (с условием отбора корней на заданном отрезке), изучаемых на базовом уровне подготовки, встречаются уравнения вида $\sin x = a,\ \cos x = a, \operatorname{tg} x = a, \operatorname{ctg} x = a$.

Приведём примеры.

Пример 1. «Решите уравнение $\sin\frac{\pi x}{3} = 0{,}5$. В ответ запишите наименьший положительный корень» [102].

Решение: $\frac{\pi x}{3} = \frac{\pi}{6} + 2\pi k, k\epsilon Z$; $\frac{\pi x}{3} = \frac{5\pi}{6} + 2\pi k, k\epsilon Z$; $x_1 = \frac{1}{2} + 6k, k\epsilon Z$; $x_2 =$ $= \frac{5}{2} + 6k, k\epsilon Z$. При $k = 0$, то $x = \frac{1}{2}$ и $x = \frac{5}{2}$.

Ответ: $x = \frac{1}{2}$.

Пример 2. «Решите уравнение $\cos\frac{\pi(x+2)}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$. В ответ запишите корни, принадлежащие промежутку $[-\pi; 0]$» [102].

Решение: $\frac{\pi(x+2)}{2} = \pm\frac{\pi}{4} + 2\pi k, k\epsilon Z;$ $\left[\begin{array}{l}\frac{\pi x}{2} = -\frac{3\pi}{4} + 2\pi k, k\epsilon Z \\ \frac{\pi x}{2} = -\frac{5\pi}{4} + 2\pi k, k\epsilon Z\end{array}\right.$

$\left[\begin{array}{l}x = -1{,}5 + 4k, k\epsilon Z \\ x = -2{,}5 + 4k, k\epsilon Z\end{array}\right.$

Ответ: -2,5; -1,5.

Пример 3. «Решите уравнение $\mathrm{tg}\frac{\pi x}{4} = -1$. В ответе запишите наибольший отрицательный корень» [102].

Решение:

$\frac{\pi x}{4} = -\frac{\pi}{4} + \pi k, k \in Z;$ $x = -1 + 4\,k, k \in Z.$ При $k = 0,$ то $x =$ $= -1.$ Ответ: $-1.$

Пример 4. «Решите уравнение $\mathrm{ctg}\frac{\pi(x-4)}{6} = \sqrt{3}.$ В ответ запишите корни, принадлежащие промежутку $[2\pi; 0]$» [102].

Решение: $\frac{\pi(x-4)}{6} = \frac{\pi}{6} + \pi k, k\epsilon Z;$ $\frac{\pi x}{6} = \frac{4\pi}{6} + \frac{\pi}{6} + \pi k, k\epsilon Z;$ $\frac{\pi x}{6} = \frac{5\pi}{6} + \pi k, k\epsilon Z;$ $x = 5 + 6k, k\epsilon Z.$

Ответ: 5.

Решение простейших тригонометрических уравнений является основой для решения более сложных тригонометрических уравнений.

При решении и отборе корней тригонометрических уравнений С.Ш. Палфёрова в статье «Методика обучения отбору корней тригонометрических уравнений в курсе алгебры и начал математического анализа общеобразовательной школы» [81] выделяет методы: арифметический, алгебраический, геометрический (подразделён на использование тригонометрической окружности и на использование числовой прямой при изображении корней уравнения) и функционально-графический способы отбора корней тригонометрических уравнений.

В качестве иллюстрации приведём примеры видов и способов решения тригонометрических уравнений методом разложения на множители (таблица 5).

Таблица 5 - Метод разложения на множители при решении тригонометрических уравнений

Действие или формула	Пример
Вынесение общего множителя	$a\sin x\cos x + b\sin x = 0,\quad \sin x(a\cos x + b) = 0,$ $\sin x = 0$ или $\cos x = -\frac{b}{a}.$
	$a\sin x\cos x + b\cos x = 0,\quad \cos x(a\sin x + b) = 0,$ $\cos x = 0$ или $\sin x = -\frac{b}{a}.$
	$a\sin x\cos x + b\sin^2 x = 0,\ \sin x(a\cos x + b\sin x) = 0,$ $\sin x = 0$ или $\mathrm{tg}x = -\frac{a}{b}.$
Применение тригонометрических формул	$\sin 2x = 2\sin x\cos x;$ $\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2};$ $\sin\alpha - \sin\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\sin\frac{\alpha-\beta}{2};$ $\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2};$ $\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\sin\frac{\alpha-\beta}{2}.$
Формула разности квадратов	$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$

Пример 5. «а) Решите уравнение $\mathrm{tg}(\pi - x)\cos\left(\frac{3\pi}{2} - 2x\right) = \sin\frac{5\pi}{6}.$ б) Найти корни уравнения, принадлежащие промежутку $\left[-2\pi;\ -\frac{\pi}{2}\right]$» [103].

Решение.

а) $-\mathrm{tg}x(-\sin 2x) = \frac{1}{2};\ \mathrm{tg}x 2\sin x\cos x = \frac{1}{2};\ \frac{\sin x 2\sin x\cos x}{\cos x} = \frac{1}{2};\ 2\sin^2 x = \frac{1}{2};$

$\sin^2 x = \frac{1}{4};\ \sin x = \pm\frac{1}{2}.$

$$\left[\begin{array}{l} x = (-1)^k\frac{\pi}{6} + \pi k, k\epsilon Z \\ x = (-1)^{k+1}\frac{\pi}{6} + \pi k, k\epsilon Z \end{array}\right.\quad x = \pm(-1)^k\frac{\pi}{6} + \pi k, k\epsilon Z$$

б) $x = -\frac{5\pi}{6}; x = -\pi - \frac{\pi}{6} = -\frac{7\pi}{6}; x = -2\pi + \frac{\pi}{6} = -\frac{11\pi}{6}.$

Ответ: а) $x = \pm(-1)^k\frac{\pi}{6} + \pi k, k\epsilon Z$; б) $-\frac{5\pi}{6};\ -\frac{7\pi}{6};\ -\frac{11\pi}{6}.$

Пример 6. «а) Решите уравнение $\sin x = \sqrt{\frac{1-\cos x}{2}}$. б) Найти корни уравнения, принадлежащие промежутку $\left[2\pi;\ \frac{7\pi}{2}\right]$» [103].

Решение.

а) ОДЗ: $\frac{1-\cos x}{2} \geq 0;\ \ 1-\cos x \geq 0;\ \ \cos x \leq 1;\ \ x \epsilon R.\ \ \frac{1-\cos x}{2} = \sin^2 x;\ \ 1 - -\cos x = 2\sin^2 x;\ \ \ 1 - -\cos x - 2 + 2\cos^2 x = 0;\ \ \ 2\cos^2 x - \cos x - 1 = 0.$

Пусть $\cos x = t$, $-1 \leq t \leq 1$, тогда $2t^2 - t - 1 = 0$, D=9, $t_1 = 1$, $t_2 = -\frac{1}{2}$.

$$\left[\begin{array}{l} \cos x = 1 \\ \cos x = -\frac{1}{2} \end{array}\right. \left[\begin{array}{l} x = 2\pi k, k\epsilon Z \\ \left[\begin{array}{l} x = \frac{2\pi}{3} + 2\pi k, k\epsilon Z \\ x = -\frac{2\pi}{3} + 2\pi k, k\epsilon Z \end{array}\right. \end{array}\right.$$

б) $x = 2\pi; x = 2\pi + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6} = \frac{8\pi}{3}; x = 3\pi + \frac{\pi}{3} = \frac{10\pi}{3}$.

Ответ: а) $x = 2\pi k, k\epsilon Z$; $x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi k, k\epsilon Z$; б) 2π; $\frac{8\pi}{3}$; $\frac{10\pi}{3}$.

Пример 7. «а) Решите уравнение $\cos x + \sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{2}(\sin x + 1)} = 0$. б) Найти корни уравнения, принадлежащие промежутку $\left[-\frac{11\pi}{2};\ -4\pi\right]$» [103].

Решение.

а) Оценив левую и правую части уравнения, перейдём к системе:

$$\begin{cases} \frac{2-\sqrt{2}}{2}(\sin x + 1) = 0 \\ \cos x \leq 0 \end{cases} \begin{cases} \sin x = -1 \\ \cos x \leq 0 \end{cases} \begin{cases} x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k, k\epsilon Z \\ -\pi + 2\pi k, k\epsilon Z \leq x \leq 2\pi k, k\epsilon Z \end{cases}$$

б) $-4\pi - \frac{\pi}{2} = -\frac{9\pi}{2}$.

Ответ: а) $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k, k\epsilon Z$; б) $-\frac{9\pi}{2}$.

Пример 8. а) Решите уравнение $2\sin 2x - 4\cos x + 3\sin x - 3 = 0$. б) Найти корни уравнения, принадлежащие промежутку $\left[\pi;\ \frac{5\pi}{2}\right]$.

Решение:

а) $4\sin x\cos x - -4\cos x + 3\sin x - 3 = 0;\ \ \ \sin x(4\cos x + 3) - (4\cos x + +3) = 0;\ (4\cos x + 3)(\sin x - 1) = 0.$

$$\left[\begin{array}{l}4\cos x+3=0\\ \sin x-1=0\end{array}\right.\left[\begin{array}{l}\cos x=-\frac{3}{4}\\ \sin x=1\end{array}\right.\left[\begin{array}{l}\left[\begin{array}{l}x=\pi-\arccos\frac{3}{4}+2\pi k, k\epsilon Z\\ x=\pi+\arccos\frac{3}{4}+2\pi k, k\epsilon Z\end{array}\right.\\ x=\frac{\pi}{2}+2\pi k, k\epsilon Z\end{array}\right.$$

б) $x=\frac{5\pi}{2}; x=\pi+\arccos\frac{3}{4}$.

Ответ: а) $x=\frac{\pi}{2}+2\pi k, k\epsilon Z$; $x=\pi\pm\arccos\frac{3}{4}+2\pi k, k\epsilon Z$; б) $\frac{5\pi}{2}$; $\pi+$ $+\arccos\frac{3}{4}$.

Пример 9. а) Решите уравнение $\frac{1}{\sin^2 x}-\frac{1}{\cos(\frac{3\pi}{2}-x)}=2$. б) Найти корни уравнения, принадлежащие промежутку $\left[\pi;\frac{5\pi}{2}\right]$.

Решение.

а) ОДЗ:

$$\left[\begin{array}{l}\sin^2 x\neq 0\\ \cos(\frac{3\pi}{2}-x)\neq 0\end{array}\right. \sin x\neq 0; x\neq \pi k, k\epsilon Z;$$

$\frac{1}{\sin^2 x}+\frac{1}{\sin x}-2=0$; $\frac{1+\sin x-2\sin^2 x}{\sin^2 x}=0$; $2\sin^2 x-\sin x-1=0$. Пусть $\sin x=t, -1\leq t\leq 1$, тогда $2t^2-t-1=0$, D=9, $t_1=1$, $t_2=-\frac{1}{2}$.

$$\left[\begin{array}{l}\sin x=1\\ \sin x=-\frac{1}{2}\end{array}\right.\left[\begin{array}{l}x=\frac{\pi}{2}+2\pi k, k\epsilon Z\\ \left[\begin{array}{l}x=-\frac{\pi}{6}+2\pi k, k\epsilon Z\\ x=-\frac{5\pi}{6}+2\pi k, k\epsilon Z\end{array}\right.\end{array}\right.\left[\begin{array}{l}x=\frac{\pi}{2}+2\pi k, k\epsilon Z\\ x=(-1)^{k+1}\frac{\pi}{6}+\pi k, k\epsilon Z\end{array}\right.$$

б) $x=\pi+\frac{\pi}{6}=\frac{7\pi}{6}; x=2\pi-\frac{\pi}{6}=\frac{11\pi}{6};\ x=\frac{5\pi}{2}$.

Ответ: $x=\frac{\pi}{2}+2\pi k, k\epsilon Z$; $x=(-1)^{k+1}\frac{\pi}{6}+\pi k, k\epsilon Z$; б) $\frac{7\pi}{6}$; $\frac{11\pi}{2}$; $\frac{5\pi}{2}$.

Выводы по первой главе

В первой главе рассмотрены теоретические основы обучения отбору корней иррациональных, показательных, логарифмических и тригонометрических уравнений в курсе алгебры и начал математического анализа общеобразовательной школы. Результатами первой главы являются:

− определена роль и место уравнений в курсе математики общеобразовательной школы;

− выделены цели и задачи обучения отбору корней иррациональных, показательных, логарифмических и тригонометрических уравнений в курсе алгебры и начал математического анализа общеобразовательной школы. Определено, что в процессе решения различных видов уравнений формируется логическое мышление и способность нахождения рациональных методов решения уравнений и отбора их корней;

− проведён анализ учебников алгебры 7-9 классов, алгебры и начал математического анализа 10-11 классов по содержанию теоретического и задачного материалов темы «Отбор корней уравнений». а также анализ контрольно-измерительных материалов единого государственного экзамена по математике базового и профильного уровней, результаты которого будут подробно описаны в Главе 2;

− раскрыты методические особенности обучения старшеклассников отбору корней тригонометрических, иррациональных, показательных и логарифмических уравнений в курсе алгебры и начал математического анализа общеобразовательной школы;

− разработана система задач на методы решения иррациональных уравнений и отбор их корней в курсе алгебры и начал анализа математического анализа общеобразовательной школы. При составлении системы задач выделены пять уровней: два базовых (по уровням сложности) и три профильных, в самом сложном из которых представлены иррациональные уравнения, содержащие параметр.

Глава 2 Реализация методики обучения методам отбора корней уравнений в курсе алгебры и начал математического анализа общеобразовательной школы

2.1 Анализ задач ЕГЭ по теме исследования

Проведённый анализ КИМов единого государственного экзамена по теме «Отбор корней уравнений» показал наличие среди задачного материала заданий данного вида как на базовом, так и на профильном уровне подготовки к экзамену. На базовом уровне подготовки к ЕГЭ по математике на данную тему приведены задачи под номером 17 «Простейшие уравнения», среди которых встречаются показательные, логарифмические и иррациональные уравнения, среди которых есть задачи с условием отбора того или иного корня.

На рисунке 4 приведены примеры заданий из КИМов единого государственного экзамена по математике базового уровня с условием отбора корня.

На профильном уровне подготовки к ЕГЭ по математике на данную тему приведены задачи под номером 13 и 18. В задание №13 встречаются задачи смешанного типа, в ходе решения которых учащийся должен продемонстрировать прямой аналитический переход от одного теоретического и практического материала к другому теоретическому и практическому материалу. Рассмотрим примеры.

Пример 1. «а) Решите уравнение $\log_2(\cos x + \sin 2x + 8) = 3$. б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{3\pi}{2}; 3\pi\right]$» [103].

Решение.

а) $\cos x + \sin 2x + 8 = 8;\ \cos x + 2\cos x \sin x = 0;$

$$\cos x(2\sin x + 1) = 0;$$

$\cos x = 0$ или $\sin x = -\frac{1}{2}$.

$x_1 = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in Z;$ $x_2 = -\frac{\pi}{6} + 2\pi k, k \in Z; x_3 = -\frac{5\pi}{6} + 2\pi k, k \in Z.$

Простейшее иррациональное уравнение

Найдите корень уравнения: $\sqrt{-72-17x}=-x$. Если уравнение имеет более одного корня, укажите меньший из ни

Решение.

Возведем в квадрат:

$$\sqrt{-72-17x}=-x \Leftrightarrow \begin{cases} -72-17x=x^2, \\ -x \geqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+17x+72=0, \\ x \leqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x=-9, \\ x=-8, \end{array}\right. \\ x \leqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-9, \\ x=-8. \end{array}\right.$$

Меньший корень равен −9.

Ответ: −9.

Простейшее логарифмическое уравнение

Решите уравнение $\log_{x-5} 49 = 2$. Если уравнение имеет более одного корня, в ответе укажите меньший из ни

Решение.

Решим уравнение:

$$\log_{x-5}49 = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} (x-5)^2=49, \\ x-5>0, \\ x-5 \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-5=\pm 7, \\ x-5>0, \\ x-5 \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow x-5=7 \Leftrightarrow x=12.$$

Итак, уравнение имеет только один корень.

Простейшее тригонометрическое уравнение

Найдите корни уравнения: $\cos\frac{\pi(x-7)}{3}=\frac{1}{2}$. В ответ запишите наибольший отрицательный корень.

Решение.

Последовательно получаем:

$$\cos\frac{\pi(x-7)}{3}=\frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{\pi(x-7)}{3}=\pm\frac{\pi}{3}+2\pi n \Leftrightarrow x-7=\pm 1+6n \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=8+6n; \\ x=6+6n, \ n \in \mathbb{Z}. \end{array}\right.$$

Значениям $n \geqslant 0$ соответствуют положительные корни.
Если $n=-1$, то $x=2$ и $x=0$.
Если $n=-2$, то $x=8-12=-4$ и $x=6-12=-6$.
Значениям $n \leqslant -3$ соответствуют меньшие значения корней.
Следовательно, наибольшим отрицательным корнем является число -4.

Ответ: −4.

Рисунок 4 – Примеры простейших уравнений с условием отбора корня из КИМов ЕГЭ по математике базового уровня

б) На числовой окружности отметим дугу $\left[\frac{3\pi}{2}; 3\pi\right]$, на которой отберём соответствующие корни: $\frac{3\pi}{2}$; $\frac{11\pi}{6}$; $\frac{5\pi}{2}$.

Ответ: а) $\left\{\frac{\pi}{2}+\pi k;\ -\frac{\pi}{6}++2\pi k;\ -\frac{5\pi}{6}++2\pi k, k \in Z\right\}$; б) $\frac{3\pi}{2}$; $\frac{11\pi}{6}$; $\frac{5\pi}{2}$.

Пример 2. «а) Решить уравнение $2\log_3{}^2(2\cos x)-5\log_3(2\cos x)+2=$ $=0$. б) Найти все корни уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\pi; \frac{5\pi}{2}\right]$» [103].

Решение.

а) Замена $\log_3(2\cos x) = t$ приведёт к решению квадратного уравнения $2t^2 - 5t + 2 = 0$, корнями которого являются числа $t_1 = 2;\ t_2 = \frac{1}{2}$.

Обратная замена: $\log_3(2\cos x) = 2; 2\cos x = 9; \cos x = \frac{9}{2} > 1$ – не удовлетворяет неравенству $-1 \le \cos x \le 1$.

$$\log_3(2\cos x) = \frac{1}{2}; 2\cos x = \sqrt{3}; \cos x = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$x_1 = \frac{\pi}{6} + 2\pi k;\ x_2 = -\frac{\pi}{6} + 2\pi k, k \in Z.$$

б) На дуге $\left[\pi; \frac{5\pi}{2}\right]$ числовой окружности отберём соответствующие корни: $\frac{11\pi}{6}$; $\frac{13\pi}{6}$.

Ответ: а) $\left\{-\frac{\pi}{6} + +2\pi k;\ \frac{\pi}{6} + 2\pi k, k \in Z\right\}$; б) $\frac{11\pi}{6}$; $\frac{13\pi}{6}$.

Под номером 18 задачного материала единого государственного экзамена по математике профильного уровня представлены задачи с параметром, решение которых требуют умения применять одновременно нескольких теоретических и практических сведений в рамках выполнения одного задания.

Пример 3. «Определите, при каких значения параметра a уравнение $|x - 2| = a\log_2|x - 2|$ имеет ровно два решения» [98].

Решение. «Пусть $|x - 2| = t$, после замены получим новое уравнение $t = a\log_2 t$, где $t > 0$. Два решения для исходного уравнения диктует наличие единственного решения у полученного после замены уравнения. Уравнение $t = a\log_2 t$ не имеет решений при $a = 0$ (не выполняется условие $t > 0$). При $a < 0$ уравнение $t = a\log_2 t$ имеет единственное решение. При $a > 0$ уравнение имеет единственное решение в точке касания прямой $y = t$ и функции $t = a\log_2 t$» [98]. Найдём точку касания графиков функций, решив систему:

$$\begin{cases} t' = (a\log_2 t)', \\ t = a\log_2 t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1 = \frac{a}{t\ln 2}, \\ t = a\log_2 t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t = \frac{a}{\ln 2}, \\ t = \frac{a\ln t}{\ln 2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = t\ln 2, \\ \ln t = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = e\ln 2, \\ t = e. \end{cases}$$

Ответ: $\mathrm{a} < 0, \mathrm{a} = \mathrm{e}\ln 2$.

Большое количество задачного материала для подготовки к ЕГЭ по математике профильного уровня представлено на сайте «Решу ЕГЭ» [83].

В задания 13 «Уравнения» рассмотрено 4 типа заданий: Тригонометрические уравнения · (121 шт.); Тригонометрические уравнения, разложение на множители · (37 шт.); Тригонометрические уравнения, исследование ОДЗ · (51 шт.); Уравнения смешанного типа · (112 шт.).

В задании 18 «Задача с параметром» присутствуют задания на тригонометрические уравнения с параметром, на расположение корней квадратных уравнений, полученных из тригонометрических уравнений методом замены переменной, на аналитическое решение тригонометрических уравнений с параметром.

Приведём примеры и их решения, представленные на сайте.

Пример 4. а) Решите уравнение $tg(\pi - x)\cos\left(\frac{3\pi}{2} - 2x\right) = sin\frac{5\pi}{6}$. б) Найти корни уравнения, принадлежащие промежутку $\left[-2\pi;\ -\frac{\pi}{2}\right]$.

Решение:

а) $-tgx(-sin2x) = \frac{1}{2}$; $tgx2sinxcosx = \frac{1}{2}$; $\frac{sinx2sinxcosx}{cosx} = \frac{1}{2}$; $2sin^2x = \frac{1}{2}$; $sin^2x = \frac{1}{4}$; $sinx = \pm\frac{1}{2}$.

$$\left[\begin{array}{l} x = (-1)^k\frac{\pi}{6} + \pi k, k\epsilon Z \\ x = (-1)^{k+1}\frac{\pi}{6} + \pi k, k\epsilon Z \end{array}\right. \quad x = \pm(-1)^k\frac{\pi}{6} + \pi k, k\epsilon Z$$

б) $x = -\frac{5\pi}{6}$; $x = -\pi - \frac{\pi}{6} = -\frac{7\pi}{6}$; $x = -2\pi + \frac{\pi}{6} = -\frac{11\pi}{6}$.

Ответ: а) $x = \pm(-1)^k\frac{\pi}{6} + \pi k, k\epsilon Z$; б) $-\frac{5\pi}{6}$; $-\frac{7\pi}{6}$; $-\frac{11\pi}{6}$.

Пример 5. а) Решите уравнение $sinx = \sqrt{\frac{1-cosx}{2}}$. б) Найти корни уравнения, принадлежащие промежутку $\left[2\pi;\ \frac{7\pi}{2}\right]$.

Решение:

а) ОДЗ: $\frac{1-cosx}{2} \geq 0$; $1-\ cosx \geq 0$; $cosx \leq 1$; $x\epsilon R$. $\frac{1-cosx}{2} = sin^2x$; $1-$ $-\ cosx = 2sin^2x$; $1 - cosx - -2 + 2cos^2x = 0$; $2cos^2x - cosx - 1 = 0$.

Пусть $cosx = t, -1 \leq t \leq 1$, тогда $2t^2 - t - 1 = 0$, D=9, $t_1\ = 1, t_2\ = -\frac{1}{2}$.

$$\left[\begin{array}{l} cosx = 1 \\ cosx\ = -\frac{1}{2} \end{array}\right. \left[\begin{array}{l} x = 2\pi k, k\epsilon Z \\ \left[\begin{array}{l} x = \frac{2\pi}{3} + 2\pi k, k\epsilon Z \\ x = -\frac{2\pi}{3} + 2\pi k, k\epsilon Z \end{array}\right. \end{array}\right.$$

б) $x = 2\pi; x = 2\pi + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6} = \frac{8\pi}{3}; x = 3\pi + \frac{\pi}{3} = \frac{10\pi}{3}$.

Ответ: а) $x = 2\pi k, k\epsilon Z$; $x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi k, k\epsilon Z$; б) 2π; $\frac{8\pi}{3}$; $\frac{10\pi}{3}$.

Пример 6. а) Решите уравнение $cosx + \sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{2}(sinx + 1)} = 0$. б) Найти корни уравнения, принадлежащие промежутку $\left[-\frac{11\pi}{2};\ -4\pi\right]$.

Решение.

а) Это уравнение решается методом оценки левой и правой частей и оно переходит к решению следующей системы:

$$\left\{\begin{array}{c} \frac{2-\sqrt{2}}{2}(sinx + 1) = 0 \\ cosx \leq 0 \end{array}\right. \left\{\begin{array}{c} sinx\ = -1 \\ cosx\ \leq 0 \end{array}\right. \left\{\begin{array}{c} x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k, k\epsilon Z \\ -\pi + 2\pi k, k\epsilon Z \leq x \leq 2\pi k, k\epsilon Z \end{array}\right.$$

б) $-4\pi - \frac{\pi}{2} = -\frac{9\pi}{2}$.

Ответ: а) $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k, k\epsilon Z$; б) $-\frac{9\pi}{2}$.

Пример 7. а) Решите уравнение $2sin2x - 4cosx + 3sinx - 3 = 0$. б) Найти корни уравнения, принадлежащие промежутку $\left[\pi;\ \frac{5\pi}{2}\right]$.

Решение.

а) $4sinxcosx - 4cosx + 3sinx - 3 = 0$;

$sinx(4cosx + 3) - (4cosx + 3) = 0$; $(4cosx + 3)(sinx - 1) = 0$.

$$\left[\begin{array}{l} 4cosx + 3 = 0 \\ sinx - 1 = 0 \end{array}\right. \left[\begin{array}{l} cosx\ = -\frac{3}{4} \\ sinx\ = 1 \end{array}\right. \left[\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} x = \pi - arccos\frac{3}{4} + 2\pi k, k\epsilon Z \\ x = \pi + arccos\frac{3}{4} + 2\pi k, k\epsilon Z \end{array}\right. \\ x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, k\epsilon Z \end{array}\right.$$

б) $x = \frac{5\pi}{2}; x = \pi + arccos\frac{3}{4}$.

Ответ: а) $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, k\epsilon Z$; $x = \pi \pm arccos\frac{3}{4} + 2\pi k, k\epsilon Z$; б) $\frac{5\pi}{2}$; $\pi +$ $+ arccos\frac{3}{4}$.

Пример 8. а) Решите уравнение $\frac{1}{sin^2x} - \frac{1}{\cos(\frac{3\pi}{2} - x)} = 2$. б) Найти корни уравнения, принадлежащие промежутку $\left[\pi; \frac{5\pi}{2}\right]$.

Решение.

а) ОДЗ: $\left[\begin{array}{c} sin^2x \neq 0 \\ \cos(\frac{3\pi}{2} - x) \neq 0 \end{array}\right.$ $sinx \neq 0; x \neq \pi k, k\epsilon Z$;

$\frac{1}{sin^2x} + \frac{1}{sinx} - 2 = 0$; $\frac{1 + sinx - 2sin^2x}{sin^2x} = 0$; $2sin^2x - sinx - 1 = 0$. Пусть $sinx = t, -1 \leq t \leq 1$, тогда $2t^2 - t - 1 = 0$, D=9, $t_1 = 1$, $t_2 = -\frac{1}{2}$.

$$\left[\begin{array}{l} sinx = 1 \\ sinx = -\frac{1}{2} \end{array}\right. \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, k\epsilon Z \\ \left[\begin{array}{l} x = -\frac{\pi}{6} + 2\pi k, k\epsilon Z \\ x = -\frac{5\pi}{6} + 2\pi k, k\epsilon Z \end{array}\right. \end{array}\right. \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, k\epsilon Z \\ x = (-1)^{k+1}\frac{\pi}{6} + \pi k, k\epsilon Z \end{array}\right.$$

б) $x = \pi + \frac{\pi}{6} = \frac{7\pi}{6}; x = 2\pi - \frac{\pi}{6} = \frac{11\pi}{6}$; $x = \frac{5\pi}{2}$.

Ответ: $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, k\epsilon Z$; $x = (-1)^{k+1}\frac{\pi}{6} + \pi k, k\epsilon Z$; б) $\frac{7\pi}{6}$; $\frac{11\pi}{6}$; $\frac{5\pi}{2}$.

На сайте не приведён подробный ход решения заданий с определенными способами и методами отбора корней тригонометрических уравнений, представлены только вычисления корней при подстановке определенных значений параметра $n \in Z$ и ответы.

2.2 Элективный курс «Иррациональные уравнения: основные типы и методы их решения» для учащихся математического профиля

Программа элективного курса «Иррациональные уравнения: основные типы и методы их решения» разработана для учеников 10-11 классов математического профиля. Программа предназначена для углубления и обобщения знаний и умений учащихся по решению иррациональных уравнений, в том числе при подготовке к сдаче ЕГЭ профильного уровня по математике. На занятиях элективного курса также разбираются задания повышенной сложности. Реализация элективного курса предполагает использование навыков и умений, полученных школьниками при изучении математике в основной школе.

Программа элективного курса подтверждает свою актуальность, так как:

- в ней содержится задачный материал по теме из вариантов контрольно-измерительных материалов единого государственного экзамена по математике профильного уровня;
- для систематизации методов решения иррациональных уравнений и методов отбора их корней требуется большее количества часов для качественной подготовки к сдаче единого государственного экзамена по математике на профильном уровне.

Целью элективного курса является расширение и углубление знаний по методам решения иррациональных уравнений у учащихся математического профиля, по методам отбора корней данных уравнений различными методами.

Задачи элективного курса.

1. Провести систематизацию знаний об иррациональных уравнениях.
2. Рассмотреть методы решения иррациональных уравнений.
3. Показать многообразие иррациональных уравнений и продемонстрировать исследовательский метод при их решении.
4. Привить навык подбора наиболее рационального метода решения иррациональных уравнений и обосновывать сделанный выбор.
5. Провести систематизацию знаний и умений полученных в основном курсе математики, рассмотреть их взаимосвязи с представленными в элективном курсе теоретическими сведениями.

Разработанный элективный курс обладает отличиями от уже имеющихся по данной теме:

- в нем подобраны задачи, требующие применения нестандартных методов решения;
- курс направлен на ликвидацию пробелов в знаниях о возможных методах решения иррациональных уравнений и подготовку старшеклассников к успешной сдаче итогового экзамена по курсу алгебры и начал математического анализа.

Новизна заключается в том, что в ходе изучения элективного курса ученики осваивают методы решения иррациональных уравнений, которых не содержится в школьной программе. Изученные методы могут быть использованы учащимися также при решении задач математических олимпиад различного уровня и при поступлении в ВУЗы.

Учебно-тематический план элективного курса составляет 32 часа (1 час в неделю) и предполагает проведение лекций, практикумов, индивидуальной работы и работы в группах (таблица 6).

Таблица 6 – Учебно-тематический план элективного курса

Наименование тем и методы контроля	Кол-во часов
1. Основные свойства арифметических корней.	1
2. Метод возведения обеих частей уравнения в одинаковую степень.	2
3. Применение формул сокращенного умножения при решении иррациональных уравнений.	4
4. Применение свойств равносильности уравнений и систем уравнений.	3
5. Применение замены переменной при решении иррациональных уравнений.	4
6. Различные методы решения иррациональных уравнений при решении задач.	1
7. Контрольная работа 1.	1
8. Свойства функций и построение графиков функций. Применение графического метода решения иррациональных уравнений.	7
9. Уравнения смешанного типа, содержащие иррациональные выражения.	4
10. Контрольная работа 2.	
11. Исследовательская работа (проектная деятельность).	1
12. Итоговое занятие. Проведение защиты проектов (учебно-исследовательская конференция).	1

В результате изучения программы данного элективного курса учащиеся должны:

- знать свойства арифметических корней;
- знать основные методы решения иррациональных уравнений;
- уметь определять тип иррационального уравнения и соответствующий данному типу метод решения;
- владеть понятиями монотонности и ограниченности функции;
- уметь находить область определения и множества значений функции;
- владеть навыками построения графиков элементарных функций;
- уметь самостоятельно находить информацию в источниках литературы и интернет-источниках;
- уметь отбирать корни данных уравнений различными методами.

Контрольными мероприятиями курса являются контрольные работы и учебно-исследовательская конференция.

Представим содержания тем элективного курса.

Тема 1. Основные свойства арифметических корней.

В результате рассмотрения темы проводится повторение основных свойств арифметических корней, которые далее применяются при преобразованиях иррациональных выражений и при решении иррациональных уравнений.

План изучения темы.

1. Определение арифметического корня.

«Арифметическим квадратным корнем из числа a (записывается $\sqrt{a}$) называется неотрицательное число, квадрат которого равен a.

Арифметическим корнем натуральной степени n>2 из неотрицательного числа a называется неотрицательное число, n -я степень которого равна a» [14].

2. Свойства арифметических корней.

Арифметический корень n-й степени обладает следующими свойствами: если $a \geq 0$, $b > 0$ и n, k, m – натуральные числа, причём $n \geq 2$, $m \geq 2$, то:

$$\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}$$

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}$$

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$$

$$\sqrt[kn]{a^{km}} = \sqrt[n]{a^m}$$

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m}$$

3. Решение задач.

Задача 1. «$\sqrt[3]{\sqrt{8}} - \sqrt[4]{4}$» [38]. $\sqrt[3]{\sqrt{8}} - \sqrt[4]{4} = \sqrt{2} - \sqrt{2} = 0$.

Задача 2. «$\sqrt[3]{0{,}75 - \frac{5}{8} \cdot \left(\frac{2}{\sqrt[3]{2}}\right)^6}$» [38]. $\sqrt[3]{0{,}75 - \frac{5}{8} \cdot \left(\frac{2}{\sqrt[3]{2}}\right)^6} = \sqrt[3]{\frac{3}{4} - \frac{5}{8} \cdot \frac{64}{4}} =$

$= \sqrt[3]{\frac{1}{8}} \cdot 16 = 8$.

Задача 3. «$\frac{\sqrt[4]{0{,}16} \cdot \sqrt{0{,}4^2 - 0.3^2}}{\sqrt{\frac{2}{5} + 0.3}}$» [38]. $\frac{\sqrt[4]{0{,}16} \cdot \sqrt{0{,}4^2 - 0.3^2}}{\sqrt{\frac{2}{5} + 0.3}} = \frac{\sqrt[4]{0.16} \cdot \sqrt{0.07}}{\sqrt{\frac{7}{10}}} = \sqrt[4]{0.16} \cdot$

$\sqrt{0.1} = 0.2$.

Задача 4. «$\frac{\sqrt[3]{\sqrt{8} + \sqrt{2}}}{\sqrt[3]{\sqrt{8} - \sqrt{2}}} \cdot \sqrt[3]{72}$» [38]. $\frac{\sqrt[3]{\sqrt{8} + \sqrt{2}}}{\sqrt[3]{\sqrt{8} - \sqrt{2}}} \cdot \sqrt[3]{72} = \frac{\sqrt[3]{\sqrt{8} + \sqrt{2}}}{\sqrt[3]{\sqrt{8} - \sqrt{2}}} \cdot 2\sqrt[3]{9} = 2 \cdot$

$\cdot \sqrt[3]{\frac{(2\sqrt{2} + \sqrt{2}) \cdot 9}{(2\sqrt{2} - \sqrt{2})}} = 2 \cdot \sqrt[3]{\frac{3\sqrt{2} \cdot 9}{\sqrt{2}}} = 2 \cdot \sqrt[3]{27} = 6$.

Задача 5. Представьте выражение под общим корнем:

а) $\sqrt{x^4 \sqrt[5]{x\sqrt{x^3}}} = \sqrt{x^4 \sqrt[10]{x^5}} = \sqrt{x^4 \sqrt{x}} = \sqrt[4]{x^9}$;

б) $\sqrt{x \sqrt[5]{4a^3 b^2 x}} = \sqrt[10]{4a^3 b^2 x^6}$.

Тема 2. Метод возведения обеих частей уравнения в одинаковую степень.

При рассмотрении темы отмечается, что возведение обеих частей уравнения в степень даёт в итоге уравнение-следствие, решение которого может повлечь наличие посторонних корней. Поэтому применение данного метода решения иррациональных уравнений должно сопровождаться либо проверкой полученных в итоге корней, либо нахождением изначально области определения для исходного уравнения. Таким образом осуществляется отбор корней данных уравнений.

План изучения темы.

1. Определение иррационального уравнения.

«Уравнение $A(x) = B(x)$, в котором хотя бы одно из выражений $A(x), B(x)$ иррационально, называется иррациональным» [30].

Примеры иррациональных уравнений: $\sqrt{x-3} + \sqrt{x+4} = 7$, $\sqrt{x^2-9} +$ $+\sqrt{x^2+9} - 10 = 0$.

Если уравнение не содержит переменную x под знаком корня, например, уравнение $\sqrt{2}x^4 + \sqrt[5]{3}x^2 + \sqrt{\frac{3-\sqrt{2}}{3+\sqrt{2}}} = 0,$ то оно не является иррациональным

2. Метод возведения частей уравнения в одинаковую степень.

Теорема. «Если $n > 0$ – нечетное число, $n = 2k + 1$, то уравнение $A^n(x) =$ $= B^n(x)$ и $A(x) = B(x)$ равносильны. Если же $n > 0$ – четное число, $n = 2k$, то любой корень уравнения $A^n(x) = B^n(x)$ удовлетворяет хотя бы одному из уравнений $A(x) = B(x)$ и $A(x) = -B(x)$» [30].

3. Решение задач.

Задача 1. $\sqrt[4]{x^2+12} = x$.

Решение: $\left(\sqrt[4]{x^2+12}\right)^4 = x^4$, $x^2 + 12 = x^4$, $x^4 - x^2 - 12 = 0$,

$x^2 = \frac{1 \pm \sqrt{1+48}}{2} = \frac{1 \pm 7}{2}$, $x^2 = 4,$ $x = \pm 2$ или $x^2 = -3$ - не имеет решения.

Наличие посторонних корней происходит при возведении в чётную степень. Произведём проверку: $\sqrt[4]{2^2+12} = 2, \sqrt[4]{(-2)^2+12} = -2,$то $x =$ $= -2$ не является корнем исходного уравнения.

Ответ: 2.

Задача 2. $\sqrt{3-2x} = 6 + x$.

$\left(\sqrt{3-2x}\right)^2 = (6+x)^2$

$x^2 + 14x + 33 = 0, x_1 = -3$, $x_2 = -11$.

Производилось возведение в чётную степень, осуществим проверку:

$\sqrt{3-2\cdot(-3)}=6+(-3);$

$\sqrt{3+6}=6-3;$

$3=3$ –верно.

$\sqrt{3-2\cdot(-11)}=6+(-11);$

$\sqrt{3+22}=6-11;$

$5=-5$ – неверно.

x $=-11$ посторонний корень.

Ответ: -3.

Задача 3. $\sqrt{3x+7}=x-7.$

$3x+7=(x-7)^2$

$x^2-17x+42=0,,x_1=3,\ x_2=14$

Производилось возведение в чётную степень, осуществим проверку:

$\sqrt{3\cdot 3+7}=3-7;$

$4\neq -4$

x $=3$ посторонний корень.

$\sqrt{3\cdot 14+7}=14-7;;$

$7=7$ –верно.

Ответ: 14.

Тема 3. Применение формул сокращенного умножения при решении иррациональных уравнений.

Происходит повторение формул сокращённого умножения и приводятся примеры их использования для избавления от иррациональности при решении иррациональных уравнений.

План изучения темы.

1. Метод умножения на сопряженное.

«Выражения $\sqrt{a}-\sqrt{b}$ и $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ называют сопряженными» [37]. Таким образом, основой данного метода решения иррациональных уравнений является формула $(\sqrt{a}-\sqrt{b})\cdot(\sqrt{a}+\sqrt{b})=a-b$. Избавиться от иррациональности представляется возможным, домножив разность двух выражений, содержащих неизвестные под знаком квадратных корней, на сумму этих же квадратных корней. При решении данным способом следует наложить соответствующие ограничения на подкоренные выражения, учитывая их неотрицательность.

2. Решение задач.

Задача 1. $\sqrt{x+5}+\sqrt{x+8}=3$.

$$\left(\sqrt{x+5}\right)^2-\left(\sqrt{x+8}\right)^2=3(\sqrt{x+5}-\sqrt{x+8})$$

$$x+5-x-8=3(\sqrt{x+5}-\sqrt{x+8})$$

$$-1=\sqrt{x+5}-\sqrt{x+8}$$

$$\begin{cases}\sqrt{x+5}+\sqrt{x+8}=3\\ \sqrt{x+5}-\sqrt{x+8}=-1\end{cases}$$

$$2\sqrt{x+5}=2$$

$$\sqrt{x+5}=1$$

$$x+5=1$$

$$x=-4.$$

Проверка:

$$\sqrt{-4+5}+\sqrt{-4+8}=3$$

Ответ: -4.

Задача 2. $\sqrt{3x^2-1}+\sqrt{x^2-x+1}=\sqrt{3x^2+2x+1}+\sqrt{x^2+2x+4}$

$$\left(\sqrt{3x^2+2x+1}-\sqrt{3x^2-1}\right)+\left(\sqrt{x^2+2x+4}-\sqrt{x^2-x+1}\right)=0.$$

$$\frac{\left(\sqrt{3x^2+2x+1}-\sqrt{3x^2-1}\right)\cdot\left(\sqrt{3x^2+2x+1}+\sqrt{3x^2-1}\right)}{\sqrt{3x^2+2x+1}+\sqrt{3x^2-1}}+$$

$$+\frac{\left(\sqrt{x^2+2x+4}-\sqrt{x^2-x+1}\right)\cdot\left(\sqrt{x^2+2x+4}+\sqrt{x^2-x+1}\right)}{\sqrt{x^2+2x+4}+\sqrt{x^2-x+1}}=0$$

$$\frac{3x^2+2x+1-(3x^2-1)}{\sqrt{3x^2+2x+1}+\sqrt{3x^2-1}}+\frac{x^2+2x+4-(x^2-x+1)}{\sqrt{x^2+2x+4}+\sqrt{x^2-x+1}}=0$$

$$\frac{2x+2}{\sqrt{3x^2+2x+1}+\sqrt{3x^2-1}}+\frac{3x+3}{\sqrt{x^2+2x+4}+\sqrt{x^2-x+1}}=0$$

$(x+1)\cdot\left(\frac{2}{\sqrt{3x^2+2x+1}+\sqrt{3x^2-1}}+\frac{3}{\sqrt{x^2+2x+4}+\sqrt{x^2-x+1}}\right)=0.$

$\begin{cases} x+1=0 \\ 3x^2-1\geq 0 \end{cases}$

$x=-1.$

Ответ: $-1.$

Тема 4. Применение свойств равносильности уравнений и систем уравнений.

Иллюстрируется процесс перехода от иррационального уравнения к равносильной системе уравнений, каждое из которых в системе не содержит иррациональных выражений.

План изучения темы.

1. Метод сведения иррационального уравнения к равносильной системе.

Теорема. «Уравнение вида $\sqrt[2k]{A(x)}=B(x)$ равносильно системе, состоящей из уравнения $A(x)=B^{2k}(x)$ и неравенства $B(x)\geq 0$:

$$\sqrt[2k]{A(x)}=B(x)\Leftrightarrow\begin{cases}\sqrt[2k]{A(x)}=B(x)\\ B(x)\geq 0\end{cases}$$ » [2].

2. Решение задач.

Задача 1. $\sqrt{x^2+2x+1}=x-4.$

$\begin{cases} x^2+2x+1=(x-4)^2, \\ x-4\geq 0. \end{cases}$

$x^2+2x+1=(x-4)^2;$

$x^2+2x+1=x^2-8x+16;$

$10\text{x}=15;$

x = 1,5 - не удовлетворяет неравенству $x\geq 4$

Ответ: уравнение не имеет решения.

Задача 2. $\sqrt{-9x^2+3x-6}=\sqrt{-6x-24}$.

$\begin{cases} -9x^2+3x-6=-6x-24 \\ -6x-24\geq 0 \end{cases}$

$-9x^2+3x-6=-6x-24$

$x=-1, x=2-$ удовлетворяют неравенству $x\leq -4$.

Ответ: уравнение не имеет решения.

Задача 3. $\sqrt{x^4 - 5x^2 - \frac{5}{2}x} = 5 - x^2$.

Для решения данного иррационального уравнения возведём обе его части в квадрат и введём ограничение в виде неравенства. Получим систему:

$$\begin{cases} x^4 - 5x^2 - \dfrac{5}{2}x = (5 - x^2)^2, \\ 5 - x^2 \geq 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^4 - 5x^2 - \dfrac{5}{2}x = 25 - 10x^2 + x^4, \\ (\sqrt{5} - \mathrm{x})(\sqrt{5} + \mathrm{x}) \geq 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} 5x^2 - 2{,}5x - 25 = 0, \\ -\sqrt{5} \leq x \leq \sqrt{5}; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} x=-2, \\ x=\frac{5}{2}, \end{array}\right. \\ -\sqrt{5} \leq x \leq \sqrt{5}. \end{cases}$$

Неравенству системы удовлетворет корень $x = -2$.

Ответ: -2.

Тема 5. Применение замены переменной при решении иррациональных уравнений.

Демонстрируется замена иррационального выражения на новую переменную, позволяющая перейти от иррационального уравнения к уравнению, не содержащему радикал. В случае, если уравнение содержит несколько радикалов, замена осуществляется для каждого из них на разные переменные, таким образом получают несколько не содержащих иррациональностей уравнений.

План изучения темы.

1. Метод замены.

При наличии в уравнении нескольких корней возможно введение нескольких переменных и переход к решению системы уравнений, полученных после произведённых замен.

2. Решение задач.

Задача 1. $\sqrt{x+2}-\sqrt{x-a+2}=1$.

Произведём замену $\begin{cases} t=\sqrt{x+2}\geq 0, \\ k=\sqrt{x-a+2}\geq 0; \end{cases}$, $t^2-k^2=a$, $t-k=1$.

В результате получим систему уравнений:

$$\begin{cases} t-k=1, \\ t^2-k^2=a; \end{cases}$$

$$\begin{cases} t-k=1, \\ (t-k)(t+k)=a; \end{cases} \quad \begin{cases} t=\frac{a+1}{2}, \\ k=\frac{a-1}{2}; \end{cases}$$

Произведём обратную замену: $\begin{cases} \sqrt{x+2}=\frac{a+1}{2} \geq 0, \\ \sqrt{x-a+2}=\frac{a-1}{2} \geq 0. \end{cases}$

Ответ: при $a<1$ уравнение решений не имеет; при $a\geq 1$ решение уравнения $x=\frac{(a+1)^2}{4}-2$.

Задача 2. «$\sqrt[3]{2-x}+\sqrt{x-1}-1=0$» [57]

Сделаем замену $u=\sqrt[3]{2-x}$, $v=\sqrt{x-1}$, $\begin{cases} u+v=1 \\ u^3-v^2=1 \end{cases}$.

Получим: $u^3+u^2+2u=0$. $u\in\{0,1,-2\}$.

Решением системы являются пары чисел $(0;1),(1;0),(-2;\ 3)$, откуда $\mathrm{x}=2, \mathrm{x}=1, \mathrm{x}=10$.

Ответ: $\mathrm{x}=2$; $\mathrm{x}=1$; $\mathrm{x}=10$.

Задача 3. $\sqrt{2x^2-8x+25}=\sqrt{x^2-4x+13}=2$.

Сделаем замену $x^2-4x+13=t$, $t\geq 0$, откуда выражение $2x^2-8x+$ $+25=2(x^2-4x++13)-1=2t-1$.

После замены имеем уравнение $\sqrt{2t-1}-\sqrt{t}=2$.

$\sqrt{2t-1}=2+\sqrt{t}$;

$2t-1=4+4\sqrt{t}+t$;

$t-5=4\sqrt{t}$;

$\begin{cases} t-5 \geq 0, \\ (t-5)^2 = 16t; \end{cases}$ $\begin{cases} t \geq 5, \\ t^2 - 26t + 25 = 0; \end{cases}$ $\begin{cases} t \geq 5, \\ \left[\begin{matrix} t_1=1, \\ t_2=25. \end{matrix}\right. \end{cases}$

t = 25.

Произведём обратную замену $x^2 - 4x + 13 = 25$.

$x^2 - 4x - 12 = 0$, $x_1 = -2, x_2 = 6$.

Ответ: $x_1 = -2, x_2 = 6$.

Тема 6. Различные методы решения иррациональных уравнений при решении задач.

Проводится урок обобщения, закрепляющий изученные методы решения.

Учащимся предлагается подобрать наиболее удобный способ для решения уравнений:

а) $\sqrt{4x-1} = \sqrt{2x+3};$

б) $\sqrt{x^2+2x+1} = \sqrt{x^2-1}$;

в) $\sqrt{x^2-5x+6} = \sqrt{x-6}$;

г) $8\sqrt{12+16x-16x^2} + 4x = 4x^2 + 3$;

д) $\sqrt{x+3} - \sqrt{x-1} = 2$;

е) $\sqrt{x^2+x} - \sqrt{2x^2+2x+17} = \sqrt{x^2+x+5}$;

ж) $\sqrt{\mathrm{x} - \frac{9}{\mathrm{x}}} + \sqrt{9 - \frac{9}{\mathrm{x}}} = \mathrm{x}$.

Тема 7. Свойства функций и построение графиков функций. Применение графического метода решения иррациональных уравнений.

Повторяются основные свойства элементарных функций, вид их графиков. Изучаются методы решения иррациональных уравнений с помощью известных свойств монотонности и ограниченности функций. Демонстрируется метод нахождения решения иррационального уравнения как абсциссы точки пересечения графиков построенных функций, акцентируется момент возможной неточности при применении данного метода решения.

План изучения темы.

1. Степенная функция, свойства и график.

«Функцию вида $y = x^p$, где p – любое действительное число, отличное от нуля, называют показательной функцией. Показательная функция $y = x^p$ при положительном действительном нецелом p» [14] имеет следующие свойства:

«1) область определения — множество неотрицательных чисел $x > 0$;

2) множество значений — множество неотрицательных чисел $y > 0$;

3) функция является возрастающей на промежутке $x > 0$;

4) функция не является ни четной, ни нечётной;

5) функция ограничена снизу: $p > 0$;

6) функция принимает наименьшее значение $y = 0$ при $x = 0$» [14].

«Показательная функция $y = x^p$ при отрицательном действительном нецелом p» [14] имеет следующие свойства:

«1) область определения — множество положительных чисел $x > 0$;

2) множество значений — множество положительных чисел $y > 0$;

3) функция является убывающей на промежутке $x > 0$;

4) функция не является ни четной, ни нечётной;

5) функция ограничена снизу: $y > 0$» [14].

Примеры графиков степенных функций представлены на рисунке 5.

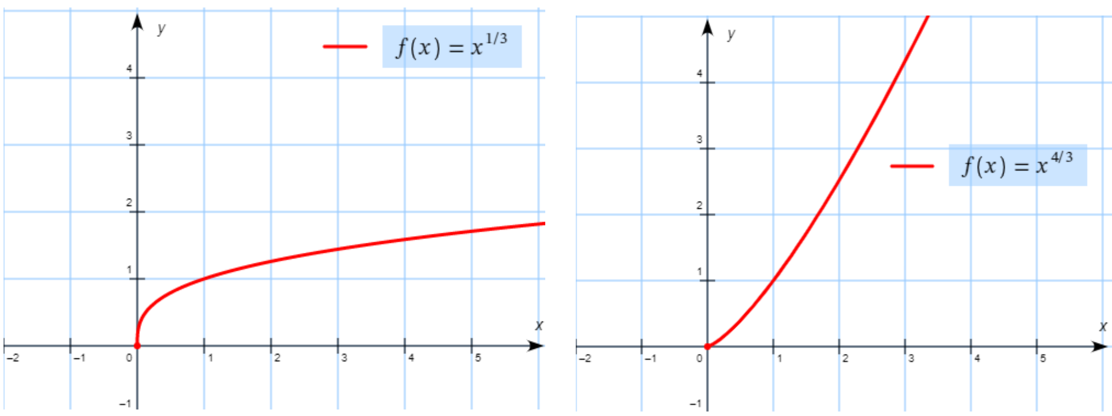


Рисунок 5 – Примеры графиков степенных функций $y = x^{\frac{1}{3}}$ и $y = x^{\frac{4}{3}}$

2. Применение графического метода при решения иррациональных уравнений.

«Графический метод решения уравнений предполагает использование графиков функций, отвечающих частям уравнения, для нахождения решения уравнения. Корнями уравнения являются абсциссы точек пересечения графиков функций» [34].

Однако, следует отметить, что по графику в некоторых случаях при нахождении точек пересечения заданных функций невозможно определить точное значение абсциссы.

3. Решение задач.

Задача 1. «$2\sqrt{x+4}-1=\sqrt[3]{2x}$» [33].

Введём функции $y=2\sqrt{x+4}$ и $y=\sqrt[3]{2x}$. Построим их графики по соответствующим точкам. Расчёты для построения приведём в таблицах 7 и 8.

Таблица 7 – Расчёт координат точек для построения графика функции $\mathrm{y}=2\sqrt{\mathrm{x}+4}$

x	- 4	- 3	0	5
y	- 1	1	3	5

Таблица 8 – Расчёт координат точек для построения графика функции $\mathrm{y}=\sqrt[3]{2\mathrm{x}}$

x	- 4	- 0,5	0	0,5	4
y	- 2	-1	0	1	2

На рисунке 6 продемонстрированы результаты построения графиков функций $y=2\sqrt{x+4}$ и $y=\sqrt[3]{2x}$.

Из рисунка видно, что графики функций $y=2\sqrt{x+4}$ и $y=\sqrt[3]{2x}$ не пересекаются, из чего делается вывод, что уравнение не имеет решения.

Ответ: уравнение не имеет решения.

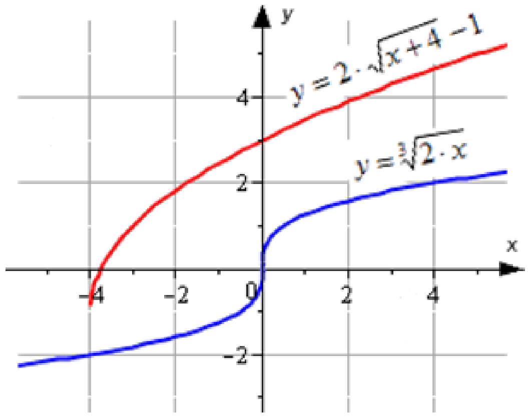


Рисунок 6 – Графики функций $y = 2\sqrt{x + 4}$ и $y = \sqrt[3]{2x}$

Задача 2. $\sqrt{x + 1} = \frac{6}{x}$.

Введём функции $y = \sqrt{x + 1}$ и $y = \frac{6}{x}$. Построим их графики по соответствующим точкам.

Расчёты для построения приведём в таблицах 9 и 10.

Таблица 9 – Расчёт координат точек для построения графика функции $y = \sqrt{x}$

x	0	4	9	16
y	0	2	3	4

Таблица 10 – Расчёт координат точек для построения графика функции $y = \frac{6}{x}$

x	1	2	3	6
y	6	3	2	1

На рисунке 7 продемонстрированы результаты построения графиков функций $y = \sqrt{x + 1}$ и $y = \frac{6}{x}$.

Из рисунка видно, что графики функций $y = \sqrt{x + 1}$ и $y = \frac{6}{x}$ пересекаются в единственной точке с координатами (3; 2), из чего делается вывод, что уравнение имеет один корень $x = 3$.

Ответ: 3.

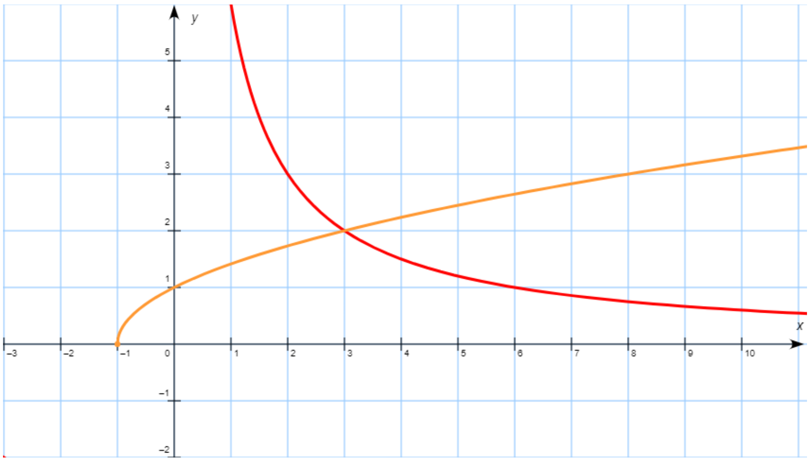


Рисунок 7 – Графики функций $y = \sqrt{x+1}$ и $y = \frac{6}{x}$

4. Использование свойств функции.

«В случаях, если уравнение имеет вид $f(x) = 0$, где $f(x)$ возрастает (убывает), или $f(x) = g(x)$, где функции $f(x)$ и $g(x)$ «встречно монотонны», т. е. $f(x)$ возрастает, а $g(x)$ убывает, то такое уравнение имеет не более одного корня» [27].

5. Решение задач.

Задача 1. «$\sqrt{7x+9} + \sqrt{15x+1} = 9 - \sqrt{2x-1}$» [35].

Пусть заданы функции $f(x) = \sqrt{7x+9} + \sqrt{15x+1}$ и $g(x) = 9 -$ $-\sqrt{2x-1}$. Функция $f(x)$ представляет из себя сумму корней второй степени, подкоренные выражения являются возрастающими, то и функции $f(x) =$ $= \sqrt{7x+9} + \sqrt{15x+1}$ является возрастающей. Для функции $g(x)$ аналогичные рассуждения приводят к выводу, что она является убывающей. Таким образом, данные функции могут пересекаться только единожды, то есть уравнение имеет единственный корень $x = 1$.

Ответ: 1.

Задача 2. $2x^5 + x^3 + 5x - 80 = \sqrt[3]{14-3x}$.

Исследуем на монотонность функцию $y = 2x^5 + x^3 + 5x - 80$ при помощи производной.

Производная данной функции $y^{/} = 10x^4 + 3x^2 + 5 \geq 5$, то функция $y = 2x^5 + x^3 + 5x - 80$ является возрастающей.

Введём функцию $y = 9 - \sqrt{2x - 1}$ и исследуем её на монотонность при помощи производной.

Производная данной функции $y^{/} = -\frac{1}{\sqrt[3]{(14-3\text{x})^2}}$, $(14 - 3\text{x})^2 \geq 0$, $y^{/} < 0$ при всех значениях аргумента, кроме $x = \frac{14}{3}$, то функция является убывающей.

Таким образом, данные функции могут пересекаться только единожды, то есть уравнение имеет единственный корень $\text{x} = 2$.

Ответ: 2.

Задача 3. $\sqrt{4x + 1} + \sqrt{4 - x^2} = \sqrt{x + 7} - \sqrt{x - 2}$.

Введём ограничения на подкоренные выражения: $\begin{cases} 4x + 1 \geq 0, \\ 4 - x^2 \geq 0, \\ x + 7 \geq 0, \\ \text{x} - 2 \geq 0. \end{cases}$

Решение системы неравенств к решению $\text{x} = 2$.

Произведём проверку найденного корня:

$\sqrt{4 - 2^2} + \sqrt{2 - 2} = \sqrt{2 + 7} - \sqrt{4 \cdot 2 + 1}$,

$0 = 3 - 3$ – верно.

Ответ: 2.

Тема 8. Уравнения смешанного типа, содержащие иррациональные выражения.

Приводятся примеры решения показательных, логарифмических, тригонометрических уравнений, содержащих радикалы. Обобщаются полученные знания, умения и навыки решения уравнений.

Задача 1. $\frac{\sqrt{3}}{2} - \sin\sqrt{3 - x^2} = 0$.

$\sqrt{3 - x^2} = (-1)^k \cdot \frac{\pi}{3} + \pi k, k \in Z$.

ОДЗ задаёт неравенство $3 - x^2 \geq 0,$ то среди найденных корней $(-1)^k \cdot \frac{\pi}{3} + \pi k$ решением является $\frac{\pi}{3}$ ($k = 0$).

При $k < 0$ получим $(-1)^k \cdot \frac{\pi}{3} + \pi k < 0$.

При $k > 0$ получим $(-1)^k \cdot \frac{\pi}{3} + \pi k > \frac{2\pi}{3}, (\frac{2\pi}{3} > \sqrt{3})$.

$\sqrt{3 - x^2} = \frac{\pi}{3}, \quad 3 - x^2 = \frac{\pi^2}{9}, \quad x = \pm\sqrt{\frac{27-\pi^2}{9}}$. Ответ: $\pm\frac{\sqrt{27-\pi^2}}{3}$.

Задача 2. $\sqrt{4x^2 - 7x + 3} \cdot \left(\text{Cos}\, x - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 0$.

$$\left[\begin{array}{l} 4x^2-7x+3=0, \\ \begin{cases} 4x^2-7x+3\geq 0, \\ \cos x=\frac{\sqrt{2}}{2}; \end{cases} \end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x\leq\frac{3}{4} \\ x\geq 1 \end{array}\right. \\ x=\pm\frac{\pi}{4}+2\pi k, k\in Z \end{cases} \\ x=1 \\ x=\frac{3}{4} \end{array}\right.$$

ОДЗ $x \epsilon \left(-\propto; \frac{3}{4}\right] \cup [1;\ +\propto)$ не удовлетворяет корень х=$\frac{\pi}{4}$.

Ответ: $\frac{3}{4}; 1;\ -\frac{\pi}{4} + 2\pi n, n \in Z;\ \frac{\pi}{4} + 2\pi k, k \in Z, k \neq 0$.

Тема 9. Проектная деятельность.

Учащимися проводится исследовательская работа по предложенной теме (таблица 11) либо тема исследования выбирается ими самостоятельно.

На итоговом занятии осуществляется защита проектов.

Приведем пример одной из тем.

Таблица 11 – Пример темы проекта в ходе изучения элективного курса

Наименование темы	Рекомендуемая литература
1. Тригонометрическая подстановка при решении уравнений, содержащих выражения под знаком радикала второй степени.	1. Олехник С.Н., Потапов М.К., Пасиченко П.И. Нестандартные методы решения уравнений и неравенств: Справочник. М.: Изд-во МГУ, 1991. С. 89-91. 2. Паркевич Е.В. Иррациональные уравнения и неравенства. Методическое пособие по подготовке к олимпиадам. М., 2014. 10 с. 3. Севрюков, П.Ф. Иррациональные уравнения: об ошибках при решении иррациональных уравнений // Математика в школе. 2002. № 7. С. 37-38.

При подготовке к занятиям элективного курса учителями могут быть использованы источники [57], [101].

Представленный элективный курс может быть использован учителями-предметниками в классах профильной направленности и при углублённом изучении математики в школе.

2.3. Технология консультирования при обучении теме «Тригонометрические уравнений: отбор корней»

При обучении данной теме целесообразно использовать технологию консультирования.

Отметим, что основной целью изучения темы «Тригонометрические уравнения: отбор корней» являются: научить отбирать корни тригонометрических уравнений с помощью дуги окружности, алгебраическим методом, методом перебора значений параметра, функционально-графическим методом.

Задачи изучения темы:

- сформировать понятие отрезка дуги единичной окружности;
- сформировать навыки отбора корней тригонометрических уравнений различными способами и методами.

Теоретический и практический материал, рассматриваемый в теме, способствует формированию познавательного интереса и мотивации к изучению курсу алгебра и начала математического анализа, в том числе при подготовки к сдаче ЕГЭ профильного уровня, развитию исследовательских способностей учащихся, развивает навыки работы с учебной литературой; повышает качество математических знаний, в том числе предметные математические компетенции.

Изучение темы «Тригонометрические уравнения» на базовом уровне, в соответствии с ФГОС среднего общего образования направлено на достижение следующих задач:

– «овладение системой математических понятий, законов и методов, изучаемых в пределах основной общеобразовательной программы среднего (полного) общего образования, установление логической связи между ними;

– осознание и объяснение роли математики в описании и исследовании реальных процессов и явлений; представление о математическом моделировании и его возможностях;

– овладение математической терминологией и символикой, начальными понятиями логики и принципами математического доказательства; самостоятельное проведение доказательных рассуждений в ходе решения задач;

– выполнение точных и приближенных вычислений и преобразований выражений; решение уравнений и неравенств; исследование функций, построение графиков;

– способность применять приобретенные знания и умения для решения задач, в том числе задач практического характера и задач из смежных учебных предметов» [97, с. 43].

Углубленный уровень подготовки ставит также задачи:

– «становление мотивации к последующему изучению математики, естественных и технических дисциплин в учреждениях системы среднего и высшего профессионального образования и для самообразования;

– осознание и выявление структуры доказательных рассуждений, логического обоснования доказательств;

– овладение основными понятиями, идеями и методами математического анализа, способность применять полученные знания для описания и анализа проблем из реальной жизни;

– готовность к решению широкого класса задач из различных разделов математики и смежных учебных предметов, к поисковой и творческой деятельности, в том числе при решении нестандартных задач» [97].

Кроме того, в стандарте по математике (профильный уровень) указано, что учащиеся в результате изучения темы должны:

«знать/понимать:

– типы основных тригонометрических уравнений;

– основные методы решения тригонометрических уравнений;

– формулы корней тригонометрических уравнений.

уметь:

– решать тригонометрические уравнения всех основных типов различными методами;

– изображать на тригонометрической окружности множество решений уравнения;

– выполнять отбор корней на заданном промежутке» [97].

Обоснуем целесообразность использования технологии консультирования для реализации темы «Тригонометрические уравнения: отбор корней» в школьном курсе математики.

Н.Л. Стефановой, Н.С. Подходовой в качестве основных задач уроков-консультаций выделены [92, с. 238]:

- «ликвидация пробелов в знаниях;
- углубление знаний;
- формирование новых знаний (например, знакомство с новыми методами решения задач);
- передача как опыта учителя, так и положительного опыта учащихся по решению задач» [92].

Опишем суть технологии консультирования.

Учитель выделяет блоки с теоретическим и практическим содержанием и предлагает их учащимся для самостоятельного изучения. Процесс обучения сопровождается промежуточным консультированием учителя. Итоговый контроль проводится после обобщающей консультации по теме.

Ученики фиксируют на карточке не понятые ими теоретические вопросы, нерешённые задачи, найденные интересные решения, которые он хотел бы предложить к обсуждению. Составленную таким образом карточку ученик передает накануне урока-консультации педагогу. По полученной от учеников информации с карточек учитель выстраивает урок-консультацию. Отметим, что на основе таких карточек учитель планирует урок - консультацию. Отобранный учителем материал для урока должен быть логически связан между собой и выстроен так, чтобы каждый ученик получил ответы на поставленные им вопросы.

Содержание темы «Тригонометрические уравнения: отбор корней» разобьем на 4 блока: «арифметический способ отбора корней тригонометрических уравнений; алгебраический способ отбора корней тригонометрических уравнений; геометрический способ отбора корней тригонометрических уравнений; функционально-графический способ отбора корней тригонометрических уравнений» [81].

Блок 1. Задания на арифметический способ отбора корней тригонометрических уравнений.

Задание 1. Решите уравнение $sin\frac{\pi x}{3} = 0{,}5$. В ответ запишите наименьший положительный корень. Ответ: $x = \frac{1}{2}$.

Задание 2. Решите уравнение $cos\frac{\pi(x+2)}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$. В ответ запишите корни, принадлежащие промежутку $[-\pi; 0]$. Ответ: -2,5; -1,5.

Задание 3. Решите уравнение $tg\frac{\pi x}{4} = -1$. В ответе запишите наибольший отрицательный корень. Ответ: $x = -1$.

Задание 4. Решите уравнение $ctg\frac{\pi(x-4)}{6} = \sqrt{3}$. В ответ запишите корни, принадлежащие промежутку $[2\pi; 0]$. Ответ: 5.

Блок 2. Задания на алгебраический способ отбора корней тригонометрических уравнений.

Задание 1. Найти корни уравнения $sinx = \frac{\sqrt{2}}{2}$, принадлежащие отрезку $[-\pi; \frac{5\pi}{6}]$. Ответ: $\frac{\pi}{4}$; $\frac{3\pi}{4}$

Задание 2. а) Решите уравнение $sinx = \sqrt{\frac{1-cosx}{2}}$. б) Найти корни уравнения, принадлежащие промежутку $\left[2\pi; \frac{7\pi}{2}\right]$.

Ответ: а) $x = 2\pi k, k\epsilon Z$; $x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi k, k\epsilon Z$; б) 2π; $\frac{8\pi}{3}$; $\frac{10\pi}{3}$.

Задание 3. а) Решите уравнение $cosx + \sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{2}(sinx+1)} = 0$. б) Найти корни уравнения, принадлежащие промежутку $\left[-\frac{11\pi}{2}; -4\pi\right]$.

Ответ: а) $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k, k\epsilon Z$; б) $-\frac{9\pi}{2}$.

Блок 3. Задания на геометрический способ отбора корней тригонометрических уравнений.

Задание 1. Найти корни уравнения $sinx = \frac{\sqrt{2}}{2}$, принадлежащие отрезку $[-\pi; \frac{5\pi}{6}]$.

Ответ: $\frac{\pi}{4}$; $\frac{3\pi}{4}$

Задание 2.

а) Решите уравнение $2sin2x - 3cosx + 8sinx - 6 = 0$.

б) Найти корни уравнения, принадлежащие промежутку $\left[-\frac{7\pi}{2}; \frac{5\pi}{2}\right]$.

Ответ: а) $\left[\begin{array}{l} x = arcsin\frac{3}{4} + 2\pi n, n\epsilon Z; \\ x = \pi - arcsin\frac{3}{4} + 2\pi n, n\epsilon Z. \end{array}\right.$; б) $-arcsin\frac{3}{4} - 3\pi$; $arcsin\frac{3}{4} - 2\pi$; $-arcsin\frac{3}{4} - \pi$; $arcsin\frac{3}{4}$; $\pi - arcsin\frac{3}{4}$; $arcsin\frac{3}{4} + 2\pi$.

Задание 3. Решите уравнение $\sqrt{\frac{3}{4} - cosx} = \sqrt{\frac{3}{4} - cos3x}$.

Ответ: $\frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}$.

Задание 4. Найти корни уравнения $\frac{cos\frac{x}{2}}{sin\frac{x}{3}} = 0$ на интервале $(-\pi; 11\pi]$.

Ответ: $\pi, 5\pi, 7\pi, 11\pi$.

Блок 4. Задания на функционально-графический способ отбора корней тригонометрических уравнений.

Задание 1. Решите уравнение $\frac{cosx-\frac{\sqrt{2}}{2}}{\sqrt{sinx-\frac{1}{2}}} = 0$. Ответ: $x = \frac{\pi}{4} + 2\pi n,\ n\epsilon Z$.

Задание 2. Решите уравнение $\frac{sinx-\frac{\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{tgx-1}} = 0$. Ответ: $x = \frac{\pi}{3} + 2\pi n,\ n\epsilon Z$.

Опишем проектирование изучения темы «Тригонометрические уравнения:
отбор корней» в рамках технологии консультирования.

Проектирование изучения темы «Тригонометрические уравнения: отбор корней» по программе учебника А.Г. Мордковича, П.В. Семенова для 10 классов представлено в таблице 12 на основе авторской рабочей программы Гимназии МГУДТ (профильные классы).

Таблица 12 – Тематическое планирование изучения темы «Тригонометрические уравнения: отбор корней»

Наименование темы	Количество часов
Арккосинус. Решение уравнения $cos\ x = a$	2
Арксинус. Решение уравнения $sinx = a$.	2
Арктангенс и арккотангенс. Решение уравнений $tgx = a, ctgx = a$	1
Тригонометрические уравнения	2
Отбор корней тригонометрических уравнений	2
Контрольная работа «Тригонометрические уравнения: отбор корней»	2

Приведём конспект урока консультирования с введением материала на разные методы отбора корней тригонометрических уравнений.

Тема урока: Тригонометрических уравнения: отбор корней.

Тип урока: урок-консультация.

Цели урока:

– образовательные: обобщение и систематизация знаний учащихся и ликвидация пробелов по теме «Решение тригонометрических уравнений»; углубление знаний; систематизация умений и навыков по применению способов отбора корней в тригонометрических уравнениях.

– развивающие: развитие познавательного интереса, логического мышления, интеллектуальных способностей; формирование математической речи;

– воспитательные: формировать эстетические навыки при оформлении записей в тетради и самостоятельность мышления у учащихся.

Ход урока консультации:

Этап 1. Организационный момент. Сформулировать цели и задачи урока.

Этап 2. Актуализация знаний учащихся.

Задание 1. Назовите вид уравнения и метод его решения.

а) $2\cos 2x - \cos x - 5 = 0$;

б) $\sin^2 x + \cos x - 8 = 0$;

в) $\sqrt{3}\cos x + \sin x = 0$;

г) $\sin x - \sqrt{3}\cos x = 1$;

д) $3\cos x - 4\sin x = 0$;

е) $3\cos x - 4\sin x = 5$;

ж) $5\sin 2x - 8\sin x\cos x + \cos 2x = 0$;

з) $5\sin 2x - 8\sin x\cos x + \cos 2x = 2$;

и) $\sin 2x - \cos x = 0$;

к) $\cos 3x = \cos x$;

л) $\cos^3 x = \cos x$.

Задание 2. Установить соответствие между уравнением и формулой его корней (таблица 13).

Таблица 13 - Задание на установление соответствия

Уравнение	Формула корней уравнения
$\sin x = 0$ $\cos x = -1$ $\sin x = 1$ $\cos x = 1$ $tgx = 1$ $\sin x = -1$ $\cos x = 0$	$x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in Z$ $x = 2\pi k, k \in Z$ $x = \pi k. k \in Z$ $x = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in Z$ $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in Z$ $x = \pi + 2\pi k, k \in Z$ $x = \frac{\pi}{4} + k, k \in Z$

Этап 3. Изучение нового материала.

Проблема отбора корней, отсеивания лишних корней при решении тригонометрических уравнений специфична. Лишние корни могут появиться вследствие того, что в процессе решения произошло расширение области определения уравнения. Запись ответа тригонометрического уравнения часто связана с понятиями объединения и пересечения множеств. Обычно при решении таких уравнений получают серии корней, и в окончательном варианте ответ записывают в виде объединения этих серий. Но как быть, если эти серии пересекаются? Сегодня мы на конкретных примерах рассмотрим различные способы и приемы при выборе ответа. Для нас важность этой темы связана с тем, что тригонометрические уравнения, в которых требуется провести отбор корней, часто встречаются в тематических тестах ЕГЭ.

При отборе корней в процессе решения тригонометрических уравнений обычно используют один из следующих способов.

Арифметический способ:

– «непосредственная подстановка полученных корней в уравнение и имеющиеся ограничения;

− перебор значений целочисленного параметра и вычисление корней» [46].

Алгебраический способ:

− «решение неравенства относительно неизвестного целочисленного параметра и вычисление корней;

− исследование уравнения с двумя целочисленными параметрами» [46].

Геометрический способ:

− «изображение корней на тригонометрической окружности с последующим отбором с учетом имеющихся ограничений;

− изображение корней на числовой прямой с последующим отбором с учетом имеющихся ограничений» [46].

Функционально-графический способ: «построение графика тригонометрической функции и его анализ» [46].

На уроке мы остановимся на наиболее подробно на каждом из применяемых способов отбора корней и некоторых его методах.

Этап 4. Решение задач.

Блок 1. Задания на арифметический способ отбора корней тригонометрических уравнений.

Задание 1. Решите уравнение $\sin\frac{\pi x}{3} = 0{,}5$. В ответ запишите наименьший положительный корень.

Решение: $\frac{\pi x}{3} = \frac{\pi}{6} + 2\pi k, k\epsilon Z$; $\frac{\pi x}{3} = \frac{5\pi}{6} + 2\pi k, k\epsilon Z$;

$x_1 = \frac{1}{2} + 6k, k\epsilon Z$; $x_2 = \frac{5}{2} + 6k, k\epsilon Z$.

При $k = 0$, то $x = \frac{1}{2}$ и $x = \frac{5}{2}$. Ответ: $x = \frac{1}{2}$.

Задание 2. Решите уравнение $\cos\frac{\pi(x+2)}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$. В ответ запишите корни, принадлежащие промежутку $[-\pi; 0]$. Решение: $\frac{\pi(x+2)}{2} = \pm\frac{\pi}{4} + 2\pi k, k\epsilon Z$;

$\left[\begin{array}{l}\frac{\pi x}{2} = -\frac{3\pi}{4} + 2\pi k, k\epsilon Z \\ \frac{\pi x}{2} = -\frac{5\pi}{4} + 2\pi k, k\epsilon Z\end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l}x = -1{,}5 + 4k, k\epsilon Z \\ x = -2{,}5 + 4k, k\epsilon Z\end{array}\right.$ `Ответ: -2,5; -1,5.

Задание 3. Решите уравнение $\mathrm{tg}\frac{\pi x}{4} = -1$. В ответе запишите наибольший отрицательный корень. Решение: $\frac{\pi x}{4} = -\frac{\pi}{4} + \pi k, k \in Z$; $x = -1 + 4k$, $k \in Z$. При $k = 0$, то $x = -1$. Ответ: $x = -1$.

Задание 4. Решите уравнение $\mathrm{ctg}\frac{\pi(x-4)}{6} = \sqrt{3}$. В ответ запишите корни, принадлежащие промежутку $[0;\ 2\pi]$. Решение: $\frac{\pi(x-4)}{6} = \frac{\pi}{6} + \pi k, k \epsilon Z$; $\frac{\pi x}{6} = \frac{4\pi}{6} + + \frac{\pi}{6} + \pi k, k \epsilon Z$; $\frac{\pi x}{6} = \frac{5\pi}{6} + \pi k, k \epsilon Z$; $x = 5 + 6k, k \epsilon Z$. Ответ: 5.

Предполагаемые вопросы при консультировании:

− Каким образом были отобраны корни уравнений в заданиях?

− Табличные или нетабличные были значения обратных тригонометрических функций при их решении?

− Как осуществлялся выбор целочисленных значений параметра n?

− Почему данный способ отбора корней тригонометрических уравнений называется арифметическим?

Блок 2. Задания на алгебраический способ отбора корней тригонометрических уравнений.

Задание 1. Найти корни уравнения $sinx = \frac{\sqrt{2}}{2}$, принадлежащие отрезку $[-\pi; \frac{5\pi}{6}]$. Решение. Запишем данное семейство значений x в виде:

$$\left[\begin{array}{l} x_1 = \frac{\pi}{4} + 2\pi n, n \in Z \\ x_2 = \frac{3\pi}{4} + 2\pi n, n \in Z \end{array}\right.$$

Решим два двойных неравенства:

а) $-\pi \leq \frac{\pi}{4} + 2\pi n \leq \frac{5\pi}{6}$;

$-\frac{5\pi}{4} \leq 2\pi n \leq \frac{7\pi}{12}$; $\quad -\frac{5}{8} \leq n \leq \frac{7}{24}$.

Так как $n \in Z$, то решением неравенства является значение $n = 0$. Значит $x_1 = \frac{\pi}{4}$.

б) $-\pi \leq \frac{3\pi}{4} + 2\pi n \leq \frac{5\pi}{6}$;

$-\frac{7\pi}{4} \leq 2\pi n \leq \frac{\pi}{12}$; $-\frac{7}{8} \leq n \leq \frac{1}{24}$.

Единственное целое решение неравенства это $n = 0$. Значит $x_2 = \frac{3\pi}{4}$.

Ответ: $\frac{\pi}{4}$; $\frac{3\pi}{4}$.

Задание 2. а) Решите уравнение $sinx = \sqrt{\frac{1-cosx}{2}}$. б) Найти корни уравнения, принадлежащие промежутку $\left[2\pi; \frac{7\pi}{2}\right]$.

Решение.

а) ОДЗ: $\frac{1-cosx}{2} \geq 0$; $1 — cosx \geq 0$; $cosx \leq 1$; $x\epsilon R$. $\frac{1-cosx}{2} =$ $= sin^2x$; $1 - cosx = 2sin^2x$; $1 - cosx - 2 + 2cos^2x = 0$; $2cos^2x -$ $-cosx - 1 = 0$. Пусть $cosx = t$, $-1 \leq t \leq 1$, тогда $2t^2 - t - 1 = 0$, D = 9, $t_1 = 1$, $t_2 = -\frac{1}{2}$.

$$\left[\begin{array}{l} cosx = 1 \\ cosx = -\frac{1}{2} \end{array}\right. \left[\begin{array}{l} x = 2\pi k, k\epsilon Z \\ \left[\begin{array}{l} x = \frac{2\pi}{3} + 2\pi k, k\epsilon Z \\ x = -\frac{2\pi}{3} + 2\pi k, k\epsilon Z \end{array}\right. \end{array}\right.$$

б) $2\pi \leq 2\pi k \leq \frac{7\pi}{2}$, $2 \leq 2k \leq \frac{7}{2}$, $1 \leq k \leq \frac{7}{4}$, $k = 1$, $x = 2\pi$;

$2\pi \leq \frac{2\pi}{3} + 2\pi k \leq \frac{7\pi}{2}$, $2 \leq \frac{2}{3} + 2k \leq \frac{7}{2}$, $\frac{4}{3} \leq 2k \leq \frac{17}{6}$, $\frac{4}{6} \leq k \leq \frac{17}{12}$,

$$k = 1, x = 2\pi + \frac{2\pi}{3} = \frac{8\pi}{3}; \ .$$

$2\pi \leq -\frac{2\pi}{3} + 2\pi k \leq \frac{7\pi}{2}$, $2 \leq -\frac{2}{3} + 2k \leq \frac{7}{2}$, $\frac{8}{3} \leq 2k \leq \frac{25}{6}$, $\frac{8}{6} \leq k \leq \frac{25}{12}$

$$k = 2, \ x = -\frac{2\pi}{3} + 2 \cdot 2\pi = \frac{10\pi}{3}$$

Ответ: а) $x = 2\pi k, k\epsilon Z$; $x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi k, k\epsilon Z$; б) 2π; $\frac{8\pi}{3}$; $\frac{10\pi}{3}$.

Задание 3. а) Решите уравнение $cosx + \sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{2}(sinx + 1)} = 0$. б) Найти корни уравнения, принадлежащие промежутку $\left[-\frac{11\pi}{2}; -4\pi\right]$.

Решение.

а) Это уравнение решается методом оценки левой и правой частей и оно переходит к решению следующей системы:

$$\begin{cases} \frac{2-\sqrt{2}}{2}(sinx+1)=0 \\ cosx \le 0 \end{cases} \begin{cases} sinx=-1 \\ cosx \le 0 \end{cases} \begin{cases} x=-\frac{\pi}{2}+2\pi k, k\epsilon Z \\ -\pi+2\pi k, k\epsilon Z \le x \le 2\pi k, k\epsilon Z \end{cases}$$

б) $-\frac{11\pi}{2} \le -\frac{\pi}{2}+2\pi k \le -4\pi$; $-\frac{11}{2} \le -\frac{1}{2}+2k \le -4$; $-\frac{10}{2} \le 2k \le$ $\le -3{,}5$; $-\frac{10}{4} \le k \le -\frac{7}{4}$; $k=-1; x=-4\pi-\frac{\pi}{2}=-\frac{9\pi}{2}$.

Ответ: а) $x=-\frac{\pi}{2}+2\pi k, k\epsilon Z$; б) $-\frac{9\pi}{2}$.

Предполагаемые вопросы при консультировании:

− Каким образом были отобраны корни уравнений в заданиях?

− Табличные или нетабличные были значения обратных тригонометрических функций при их решении?

− Как осуществлялся выбор целочисленных значений параметра n?

− Почему данный способ отбора корней тригонометрических уравнений называется алгебраическим?

Блок 3. Задания на геометрический способ отбора корней тригонометрических уравнений.

Задание 1. Найти корни уравнения $sinx=\frac{\sqrt{2}}{2}$, принадлежащие отрезку $[-\pi;\frac{5\pi}{6}]$. Решение. $x=(-1)^n\frac{\pi}{4}+\pi n, n \in Z.$ Отметим на единичной окружности точками значения x, принадлежащие заданному семейству.

Отметим на единичной окружности дугу $[-\pi;\frac{5\pi}{6}]$ (рисунок 8).

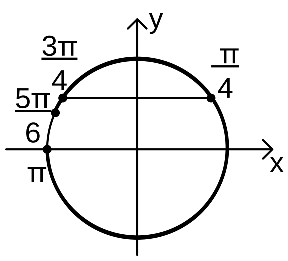


Рисунок 8

На этой дуге лежат точки $\frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}$, принадлежащие отрезку $[-\pi; \frac{5\pi}{6}]$.

Ответ: $\frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}$

Задание 2.

а) Решите уравнение $2sin2x - 3cosx + 8sinx - 6 = 0$.

б) Найти корни уравнения, принадлежащие промежутку $\left[-\frac{7\pi}{2}; \frac{5\pi}{2}\right]$.

Решение.

а) $4sinxcosx - 3cosx + 8sinx - 6 = 0;\ (4sinx - 3) \cdot (cosx + 2) = 0;$

$$\left[\begin{array}{l} 4sinx - 3 = 0; \\ cosx + 2 = 0; \end{array}\right. \Leftrightarrow sinx = \frac{3}{4} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = arcsin\frac{3}{4} + 2\pi n, n\epsilon Z; \\ x = \pi - arcsin\frac{3}{4} + 2\pi n, n\epsilon Z. \end{array}\right.$$

б) Для геометрической интерпретации отбора корней изобразим спираль (рисунок 9).

Отбираем корни на лучах, пересекающих витки спирали от $-\frac{7\pi}{2}$ до $\frac{5\pi}{2}$.

Получим корни:

$$-arcsin\frac{3}{4} - 3\pi;\ arcsin\frac{3}{4} - 2\pi;\ -arcsin\frac{3}{4} - \pi;$$
$$arcsin\frac{3}{4};\ \pi - arcsin\frac{3}{4};\ arcsin\frac{3}{4} + 2\pi.$$

Ответ:

а) $\left[\begin{array}{l} x = arcsin\frac{3}{4} + 2\pi n, n\epsilon Z; \\ x = \pi - arcsin\frac{3}{4} + 2\pi n, n\epsilon Z. \end{array}\right.$;

б) $-arcsin\frac{3}{4} - 3\pi;\ arcsin\frac{3}{4} - 2\pi;$

$-arcsin\frac{3}{4} - \pi;\ arcsin\frac{3}{4};$

$\pi - arcsin\frac{3}{4};\ arcsin\frac{3}{4} + 2\pi.$

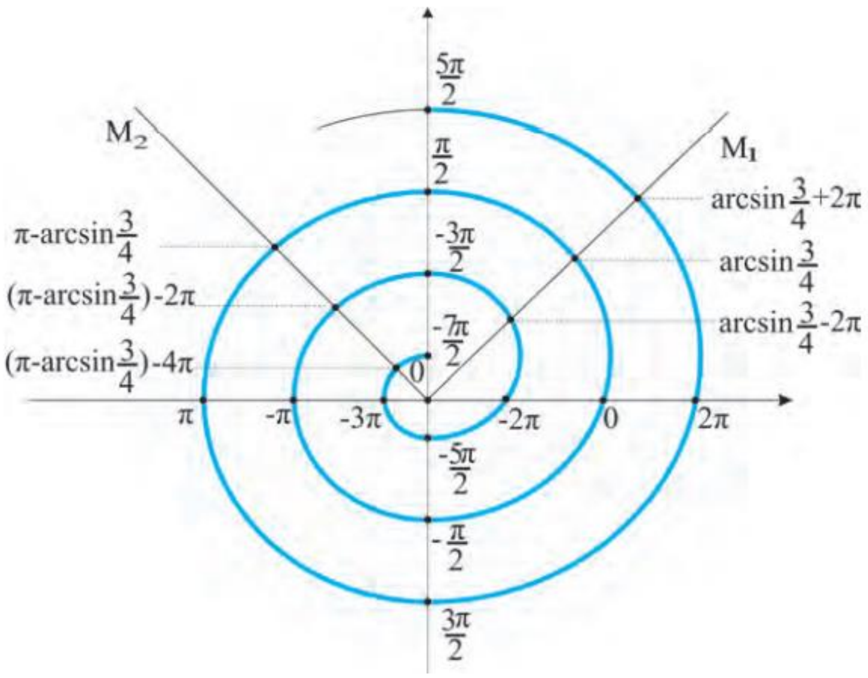


Рисунок 9

Задание 3. Решите уравнение $\sqrt{\frac{3}{4} - cosx} = \sqrt{\frac{3}{4} - cos3x}.$

Решение. $\begin{cases} cosx = cos3x, \\ cosx \leq \frac{3}{4}; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi n}{2}, n\epsilon Z, \\ cosx \leq \frac{3}{4}. \end{cases}$

Изобразим решение на тригонометрической окружности (рисунок 10), заштриховав решение неравенства $cosx \leq \frac{3}{4}$ и отметив точки $x = \frac{\pi n}{2}, n\epsilon Z.$

По имеющемуся рисунку отбираем корни $\frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}.$

Ответ: $\frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}.$

Задание 4. Найти корни уравнения $\frac{cos\frac{x}{2}}{sin\frac{x}{3}} = 0$ на интервале $(-\pi; 11\pi]$.

Решение.

$\begin{cases} cos\frac{x}{2} = 0, \\ sin\frac{x}{3} \neq 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \pi + 2\pi n,\ n\epsilon Z, \\ x \neq 3\pi k,\ \ k\epsilon Z, \end{cases} \Rightarrow x = \pi + 2\pi n, n \neq 3t + + 1, n\epsilon Z,$

$t\epsilon Z$. На числовой прямой отметим заданный промежуток $(-\pi; 11\pi]$ (рисунок 11) и отберём точки $\pi, 5\pi, 7\pi, 11\pi$.

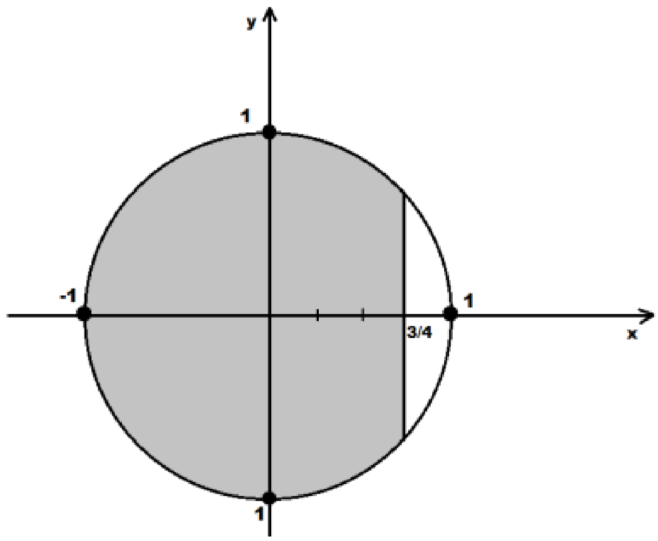


Рисунок 10

Ответ: $\pi, 5\pi, 7\pi, 11\pi$.

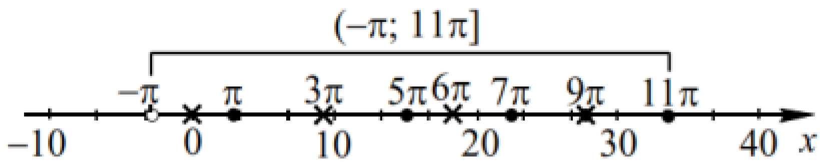


Рисунок 11

Предполагаемые вопросы при консультировании:

− Каким образом были отобраны корни уравнений в заданиях?

− Табличные или нетабличные были значения обратных тригонометрических функций при их решении?

− Как осуществлялся выбор целочисленных значений параметра n?

− Почему данный способ отбора корней тригонометрических уравнений называется геометрическим?

Блок 4. Задания на функционально-графический способ отбора корней тригонометрических уравнений.

Задание 1. Решите уравнение $\frac{cosx-\frac{\sqrt{2}}{2}}{\sqrt{sinx-\frac{1}{2}}}=0.$

Решение. $\begin{cases} cosx=\frac{\sqrt{2}}{2}, \\ sinx>\frac{1}{2}, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\pm\frac{\pi}{4}+2\pi n,\ n\epsilon Z, \\ sinx>\frac{1}{2}. \end{cases}$

Построив график синусоиды (рисунок 12) и рассмотрев промежуток $\left[-\frac{7\pi}{6};\ \frac{5\pi}{6}\right]$, длина которого равна периоду функции, находим число $\boldsymbol{\frac{\pi}{4}}$.

Добавляя слагаемое в виде периода, получаем $x=\frac{\pi}{4}+2\pi n,\ n\epsilon Z.$

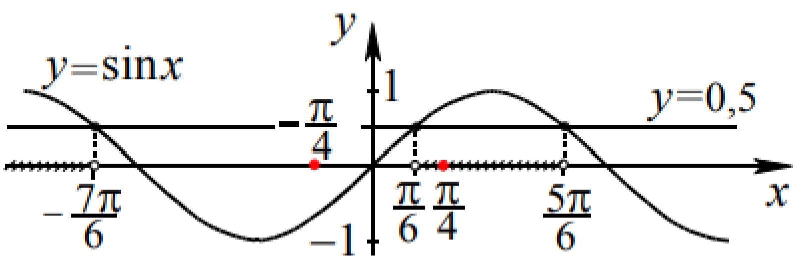


Рисунок 12

Ответ: $x=\frac{\pi}{4}+2\pi n,\ n\epsilon Z.$

Задание 2. Решите уравнение $\frac{sinx-\frac{\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{tgx-1}}=0.$

Решение.

$\begin{cases} sinx=\frac{\sqrt{3}}{2}, \\ tgx>\frac{1}{2}, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=(-1)^n\frac{\pi}{3}+\pi n,\ n\epsilon Z, \\ tgx>1. \end{cases}$

Построив график тангенса (рисунок 13) и рассмотрев промежуток $\left[-\frac{\pi}{2};\ \frac{3\pi}{2}\right]$, длина которого равна 2π, находим число $\frac{\pi}{3}$.

Добавляя слагаемое в виде периода, получаем $x=\frac{\pi}{3}++2\pi n,\ n\epsilon Z.$

Ответ: $x=\frac{\pi}{3}+2\pi n,\ n\epsilon Z.$

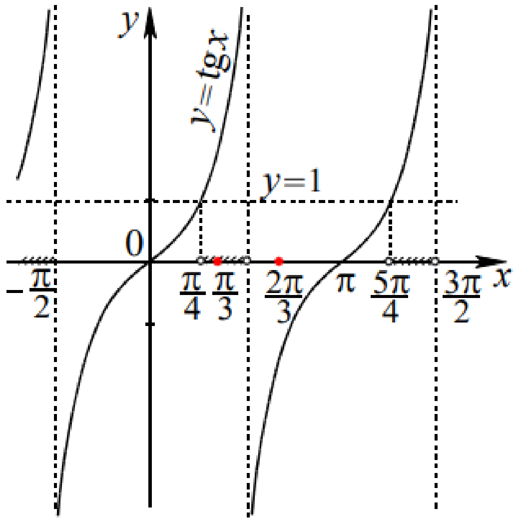


Рисунок 13

Предполагаемые вопросы при консультировании.

− Каким образом были отобраны корни уравнений в заданиях?

− Табличные или нетабличные были значения обратных тригонометрических функций при их решении?

− Как осуществлялся выбор целочисленных значений параметра n?

− Почему данный способ отбора корней тригонометрических уравнений называется функционально-графическим?

Этап 5. Подведение итогов урока.

Итак, мы разобрали различные виды задач, где необходим отбор корней, рассмотрели различные способы и методы их отбора.

Предполагаемые вопросы при консультировании.

− Какими способами или методами были отобраны корни тригонометрических уравнений в заданиях?

− В чём заключается арифметический способ отбора корней тригонометрических уравнений на заданном отрезке?

− В каком случае целесообразно применить арифметический способ отбора корней тригонометрических уравнений на заданном отрезке?

− В чём заключается алгебраический способ отбора корней тригонометрических уравнений на заданном отрезке?

– В каком случае целесообразно применить алгебраический способ отбора корней тригонометрических уравнений на заданном отрезке?

– В чём заключается геометрический способ отбора корней тригонометрических уравнений?

– В каком случае целесообразно применить геометрический способ отбора корней тригонометрических уравнений на заданном отрезке?

– В чём заключается функционально-графический способ отбора корней тригонометрических уравнений?

– В каком случае целесообразно применить функционально-графический способ отбора корней тригонометрических уравнений?

– В каких случаях не следует применять тот или иной способ или метод отбора корней?

Вы в дальнейшем можете применять любой из них. Нами определены особенности их применения при решении определенных заданий на отбор корней тригонометрических уравнений (учитель выставляет оценки учащимся, работавшим у доски, наиболее активным учащимся).

Этап 6. Домашнее задание.

Задание 1. Найдите все решения уравнения, принадлежащие указанному промежутку:

а) $\cos 2x + \sin x = \cos^2 x$ на $[0; 2\pi]$

б) $sin\,x + cos\,x = 0$ на $[-\pi; \pi]$

Задание 2. Найдите число корней уравнения из $[-\pi; \pi]$

$$3\,sin^2\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) = sin^2(\pi + x) + sin(\pi - 2x)$$

Задание 3. Решите уравнение:

а) $2\,cos^2\,x = |sin\,x|$

б) $\sqrt{2\,cos\,x - 1} = cos\,x$

На предпоследнем занятии проводится контрольная работа.

Контроль должен быть достаточно разнообразен и полон, охватить все этапы обучения. Контрольная работа должна констатировать уровень знаний и умений, которыми овладел учащийся за время изучения темы «Тригонометрические уравнения: отбор корней».

Контрольная работа включает в себя пять задач, связанные с отбором корней тригонометрических уравнений различными способами и методами.

Вариант №1

Задание 1.Решить уравнение: $sin2x \cdot \sqrt{4-x^2}=0$

Задание 2. Решить уравнение:$\sqrt{sinx} \cdot cosx=0$

Задание 3. Решить уравнение:$\frac{6sin^2x-5sinx+1}{\sqrt{-cosx}}=0$

Задание 4.

а) Решить уравнение:$3sin^2x+5sinx+2=0$;

б) Найти корни уравнения, принадлежащие промежутку $\left[\frac{\pi}{2}; 2\pi\right]$

Задание 5.

а) Решить уравнение:$\frac{6}{cos^2x}-\frac{7}{cosx}+1=0$;

б) Найти корни уравнения, принадлежащие промежутку $[-3\pi; \pi]$

Вариант №2

Задание 1. Решить уравнение: $(cos3x-1)\sqrt{6+5x-x^2}=0$

Задание 2. Решить уравнение:$\sqrt{\cos x} \cdot \sin x=0$

Задание 3. Решить уравнение:$\frac{2\sin^2 x+\sin x-1}{\sqrt{\sin x}}=0$

Задание 4.

а) Решить уравнение:$7\cos^2 x-\cos x-8=$

б) Найти корни уравнения, принадлежащие промежутку $\left[-\frac{7\pi}{2}; -\frac{3\pi}{2}\right]$

Задание 5.

а) Решить уравнение:$\frac{7}{\sin^2 x}-\frac{10}{\sin x}+3=0$;

б) Найти корни уравнения, принадлежащие промежутку $\left[-\frac{5\pi}{2}; \pi\right]$

Ответы на задачи варианта №1: $1)-2;2;\frac{\pi}{2}$; $2)\pi k, k \in Z$; $\frac{\pi}{2}+2\pi n, n \in Z$; $3)\ \frac{5\pi}{6}+2\pi n,\quad n \in Z$; $\pi-\arcsin\frac{1}{3}++2\pi n, n \in Z$; $4)$ а) $-\frac{\pi}{2}+2\pi n, n \in Z$; б)$(-1)^{m+1}\arcsin\frac{2}{3}+\pi m, m \in Z$; 5) а)$2\pi n, n \in Z$; б) $-2\pi; 0$.

Ответы на задачи варианта №2: $1)-1;6;0;\frac{2\pi}{3};\frac{4\pi}{3}$; $2)\ \frac{\pi}{2}+\pi n, n \in Z$; $2\pi k, k \in Z$; $3)\ \frac{2\pi}{3}+2\pi n, n \in Z$; 4)а)$\pi+2\pi n, n \in Z$; б) -3π; 5)а)$\frac{\pi}{2}+2\pi n, n \in Z$; б) $-\frac{3\pi}{2};\frac{\pi}{2}$

Критерии оценивания заданий: за каждое правильно выполненное задание будет ставиться по одному баллу в соответствии с кодификатором. Отметка «5» ставится за 7 баллов; отметка «4» - за 5-6 баллов; отметка «3» - за 3-4 балла; отметка «2» - за 0-2 балла. Можно выделить следующие типы ошибок, допущенных учениками при выполнении заданий контрольной работы:

- логические – не определены существенные признаки различных типов тригонометрических уравнений и соответствующие им методы решения;
- по содержанию – неверно применены основные тригонометрические формулы;
- процессуальные – нерационально и невнимательно решены задания из-за формального отношения к вычислениям.

2.4 Педагогический эксперимент и его результаты

Педагогический эксперимент проводился на базе ГБОУ СОШ села Усолье Шигонского района Самарской области среди учащихся 10 и 11 классов общим количеством 50 человек в 2022-2023 учебном году.

На констатирующем этапе эксперимента осуществлялась количественная и качественная оценка степени усвоения обучающимися темы «Отбор корней иррациональных уравнений».

Обучающиеся занимались по учебникам алгебре и началам математического анализа для 10-11 классов коллектива авторов С.М. Никольского, М.К. Потапова, Н.Н. Решетникова, А.В. Шевкина [73], [74]. В выбранных учебниках представлены материалы для базового и профильного уровней, что показывает его универсальность в процессе освоения тем курса алгебры и начал математического анализа.

На констатирующем этапе обучаемым была предложена контрольная работа (рисунок 14).

Контрольная работа по теме
«Иррациональные уравнения»

Задание. Решите представленные уравнения.
В случае, если уравнение имеет более одного корня, в ответ укажите меньший из них.

а) $3 - \sqrt[4]{x^2 + 9x + 20} = 0$

б) $2 + \sqrt[3]{2x^2 - x - 7 = 0}$

в) $\sqrt{x + 5} = 4 - 3x$

г) $\sqrt[3]{3x^2 + x - 21} = 1 + x$

д) $\sqrt{6x - 8 - x^2} + 7x = x^2 + 12 - \sqrt{x - 4}$

Рисунок 14 - Карточка с заданиями к контрольной работе

Первое и второе уравнения представленной контрольной работы являются стандартными типовыми заданиями по данной теме, для решения которых достаточно возведения обеих частей уравнения в степень, соответствующую показателю степени корня в левой части уравнения. Поэтому эти задачи были успешно решены большинством учеников. Далее следуют задания повышенной сложности, для решения которых требуется введение определённых ограничений на полученные корни либо знание специальных методов решений, с которыми знакомят как правило обучающихся профильного уровня подготовки по математике либо задачи подобного уровня изучаются ими на факультативах, на математических кружках, при изучении элективных курсов. Поэтому правильно решили задания 3-5 контрольной работы незначительное количество учащихся: примерно 12% учащихся экспериментального класса, 20% - контрольного класса.

Констатирующий этап проведённого эксперимента позволил сделать вывод о невысоком уровне сформированности умений решать иррациональные уравнения более высокого уровня сложности у учеников 10-11 классов. Это свидетельствует о малом количестве ранее решённых задач по представленной теме и о недостаточной вариативности предложенных к изучению задач по данной теме. Результаты констатирующего этапа представлены в таблице 14.

Таблица 14 – Результаты выполнения контрольной работы на констатирующем этапе педагогического эксперимента

№ задания	Количество обучающихся экспериментального класса, выполнившие задание (25 человек)	% обучающихся экспериментального класса, выполнившие задание	Количество обучающихся контрольного класса, выполнившие задание (25 человек)	% обучающихся контрольного класса, выполнившие задание
1	22	88%	22	88%
2	13	64%	17	68%
3	6	24%	9	36%
4	3	12%	5	20%
5	0	0%	1	4%

Далее на формирующем этапе проведения эксперимента осуществлялась апробация разработанного элективного курса «Иррациональные уравнения: основные типы и методы их решения».

В ходе проведения первого занятия проводилась актуализация знаний учеников по предложенной теме, после чего были решены задачи более сложного уровня, а также задания аналогичные заданиям из контрольной работы констатирующего этапа эксперимента.

Приведём примеры задач повышенной сложности, решённых на первом занятии.

Задание 1. «Найдите все значения а, при каждом из которых уравнение $ax + \sqrt{3 - 2x - x^2} = 4a + 2$ имеет единственный корень» [102].

Решение.

Равносильное уравнение имеет вид: $\sqrt{3 - 2x - x^2} = -ax + 4a + 2$.

Введём две функции: $f(x) = \sqrt{3 - 2x - x^2}$ и $g(x) = -ax + 4a + 2 = = -a(x - 4) + 2$.

Графики функций $f(x)$ и $g(x)$ представлены на рисунке 15.

В случае, если прямая $g(x)$ касается полуокружности $f(x)$ (точка С на рисунке 15) или прямая $g(x)$ пересекает полуокружность $f(x)$ в единственной точке (от точки А до точки В на рисунке 15), исходное уравнение имеет единственное решение.

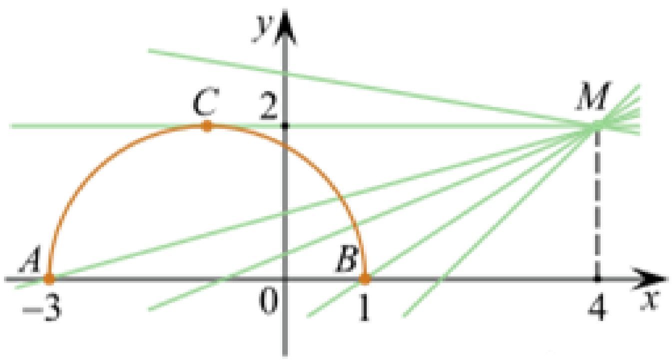


Рисунок 15 – Графики функции $f(x) = \sqrt{3 - 2x - x^2}$ и $g(x) = -ax + 4a + 2$

Точке С на графике соответствует значение $a = 0$. Прямые, проходящие через точку М при $a < 0$ не пересекают полуокружность.

Положение прямых от точки А до точки В при $-\frac{2}{3} \leq a < -\frac{2}{7}$ определяет наличие единственного корня. Ответ: $-\frac{2}{3} \leq a < -\frac{2}{7}, a = 0$.

Задание 2. «Найти наименьшее значение параметра a, при котором уравнение $\sqrt{x^2-6x+10}+\sqrt{x^2-4x+8}=a$, имеет хотя бы один корень» [73].

Решение.

Пусть заданы векторы $\vec{p}(3-x;1)$ и $\vec{q}(x-2;2)$, их длина определяется как $|\vec{p}|=\sqrt{(x-3)^2+1}$, $|\vec{q}|=\sqrt{(x-2)^2+4}$.

Сумма векторов $\vec{p}+\vec{q}$ определена координатами (1;3), откуда длина $|\vec{p}+\vec{q}|=\sqrt{1^2+3^2}=\sqrt{10}$.

В силу неравенства $|\vec{p}|+|\vec{q}|\geq|\vec{p}+\vec{q}|$ получим, что $a\geq\sqrt{10}$ и векторы $\vec{p}$ и $\vec{q}$ сонаправлены, то есть выполняется равенство $\frac{3-x}{x-2}=\frac{1}{2}$, $x=\frac{8}{3}$.

Таким образом, наименьшее значение достигается при $x=\frac{8}{3}$ и $a=\sqrt{10}$.

Ответ: $\sqrt{10}$.

Контрольный этап эксперимента заключался в повторной диагностике знаний учеников 10-11 классов по изученной теме.

При реализации контрольного этапа эксперимента учащимся была предложена контрольная работа по теме «Иррациональные уравнения» (рисунок 16).

1 вариант	2 вариант
1. Решить уравнение: 1) $\sqrt{x+4}=7$ 2) $\sqrt{4-6x-x^2}=x+4$ 3) $\sqrt{5-x}-\sqrt{5+x}=2$ 4) $\sqrt{x^2-4x+19}-\sqrt{x^2-4x+12}=1$ 2. Решить уравнение графически: $\sqrt{x-1}=2x-8$	1. Решить уравнение: 1) $\sqrt{x-3}=5$ 2) $\sqrt{6-4x-x^2}=x+4$ 3) $\sqrt{12+x}-\sqrt{1-x}=1$ 4) $\sqrt{x^2-x+14}-\sqrt{x^2-x+7}=1$ 2. Решить уравнение графически: $\sqrt{x+2}=6-2x$

Рисунок 16 - Карточка с заданиями контрольной работы

По результатам выполнения учениками контрольной работы был проведён ее анализ, результаты которого представлены в таблице 15.

Таблица 15 - Результаты выполнения контрольной работы на контрольном этапе педагогического эксперимента

№ задания	Количество обучающихся экспериментального класса, выполнившие задание (25 человек)	% обучающихся экспериментального класса, выполнившие задание	Количество обучающихся контрольного класса, выполнившие задание (25 человек)	% обучающихся контрольного класса, выполнившие задание
1	25	100%	21	84%
2	20	80%	15	60%
3	14	64%	9	36%
4	7	28%	5	20%
5	5	20%	1	4%

По результатам проведённого педагогического эксперимента можно сделать вывод об эффективности разработанной программы элективного курса.

Выводы по второй главе

Во второй главе были получены следующие результаты:

− выделены основные типы задач в ЕГЭ по математике базового и профильного уровней по теме «Отбор корней уравнений». Выявлено, что в первой части экзамена по математике базового уровня задачи по теме исследования не встречаются; во второй части базового уровня встречаются в задаче под номером 17 «Простейшие уравнения», среди которых встречаются показательные, логарифмические и иррациональные уравнения, среди которых есть задачи с дополнительным заданием на отбор корней. В заданиях профильного уровня по математике на данную тему приведены задачи под номером 13 («Уравнения») и 18 («Задача с параметром»);

− разработан элективный курс по теме «Иррациональные уравнения: основные типы и методы их решения» для классов математического профиля. В нём систематизированы основные типы иррациональных уравнений, разобраны методы их решения, а также приведены показаны методы отбора корней данных уравнений согласно заданным ограничениям;

− представлен педагогический эксперимент и проведён анализ его результатов.

Заключение

Результаты и выводы, полученные в ходе достижения поставленных в исследовании задач:

- определены роль и место уравнений в курсе математики общеобразовательной школы.

Так, выделены цели, задачи обучения отбору корней иррациональных, показательных, логарифмических и тригонометрических уравнений в курсе алгебры и начал математического анализа общеобразовательной школы. Определено, что в процессе решения различных видов уравнений у старшеклассников формируется логическое мышление и способность нахождения рациональных методов решения уравнений и отбора их корней.

- проведен анализ учебников алгебры и начал математического анализа разных авторов по содержанию теоретического и задачного материалов по теме исследования, рекомендованных Министерством Просвещения РФ, выделены отличия при рассмотрении темы отбора корней уравнений;
- выявлены. методические особенности обучения отбору корней уравнений в курсе алгебры и начал математического анализа общеобразовательной школы и систематизированы методы их решения, методы и способы отбора их корней.

Разработана система задач на методы решения иррациональных уравнений и отбор их корней в курсе алгебры и начал анализа математического анализа общеобразовательной школы. При составлении системы задач выделены пять уровней: два базовых (по уровням сложности) и три профильных, в самом сложном из которых представлены иррациональные уравнения, содержащие параметр;

- рассмотрены задачи ЕГЭ по теме «Отбор корней уравнений»; выполнен анализ контрольно-измерительных материалов единого государственного экзамена по математике базового и профильного уровней.

- разработан элективный курс «Иррациональные уравнения: основные типы и методы их решения» для обучающихся 10-11 классов математического профиля;
- представлена технология консультирования при обучении теме «Тригонометрические уравнений: отбор корней».

Приведён пример урока-консультации по данной теме по учебнику А.Г. Мордковича, обоснован выбор типа урока-консультирования, приведены примеры вопросов при проведении консультации;

- проверена эффективность разработанного элективного курса в ходе проведенного педагогического эксперимента и описаны полученные результаты.

Таким образом, можно сделать вывод о том, что все поставленные в диссертации цели достигнуты.

Список используемой литературы и используемых источников

1. Алгебра : для 8 кл. : учеб. пособие для учащихся шк. и кл. с углубл. изучением математики / Н. Я. Виленкин, А. Н. Виленкин, Г. С. Сурвилло, Ю. А. Дробышев ; под ред. Н. Я. Виленкина. Гриф МО. М.: Просвещение, 1995. 256 с.

2. Алгебра : сб. заданий для проведения письменного экзамена по алгебре за курс осн. школы : 9 кл. М.: Дрофа, 1997. 144 с.

3. Алгебра : учеб. для 10-11 кл. / авт. коллектив А. Н. Колмогоров, Ю. П. Абрамов . М.: Просвещение, 1993. 225 с.

4. Алгебра : учеб. для 7 кл. общеобраз. учр. / Ю. Н. Макарычев, Н. Г. Миндюк, Е. И. Нешков, Е. И. Нешков ; под ред. С. А. Теляковского. 6-е изд. Москва : Просвещение, 1998. 240 с.

5. Алгебра : учеб. для 7 кл. общеобразоват. учреждений / Ю. Н. Макарычев, Н. Г. Миндюк, К. И. Нешков, С. Б. Суворова ; под ред. С. А. Теляковского. 4-е изд. ; Гриф МО. М.: Просвещение, 1995. 240 с.

6. Алгебра : учеб. для 7 кл. сред. шк. / под ред. С. А. Теляковского. 3-е изд. М.: Просвещение, 1993. 240 с.

7. Алгебра : учеб. для 7 кл. сред. шк. / Ш. А. Алимов, Ю. М. Колягин, Ю. В. Сидоров, Н. Е. Федорова ; [под ред. А. Н. Тихонова]. 2-е изд. ; Гриф МО. М.: Просвещение, 1993. 191 с.

8. Алгебра : учеб. для 8 кл. сред. шк. / Ш. А. Алимов, Ю. М. Колягин, Ю. В. Сидоров [и др.]. М.: Просвещение, 1991. 239 с.

9. Алгебра : учеб. для 8 кл. сред. шк. / Ю. Н. Макарычев, Н. Г. Миндюк, К. И. Нешков, С. Б. Суворова ; под ред. С. А. Теляковского. 2-е изд. М.: Просвещение, 1991. 239 с.

10. Алгебра : учеб. для 9 кл. общеобразоват. учреждений / Ю. Н. Макарычев, Н. Г. Миндюк, К. И. Нешков, С. Б. Суворова ; под ред. С. А. Теляковского. 3-е изд. ; Гриф МО. М.: Просвещение, 1995. 272 с.

11. Алгебра : учеб. для 9 кл. сред. шк. / Ш. А. Алимов, Ю. М. Колягин, Ю. В. Сидоров, Н. Е. Федорова ; [под ред. А. Н. Тихонова]. М.: Просвещение, 1992. 223 с.

12. Алгебра и начала анализа : учеб. для 10-11 кл. сред. шк. / А. Н. Колмогоров, А. М. Абрамов, Ю. П. Дудницын, Б. М. Ивлев ; [под ред. А. Н. Колмогорова]. - 2-е изд. М.: Просвещение, 1991. 320 с.

13. Алгебра и начала анализа : учеб. для 10-11 кл. сред. шк. / Ш. А. Алимов, Ю. М. Колягин, Ю. В. Сидоров, Н. Е. Федорова ; [под ред. А. Н. Тихонова]. М.: Просвещение, 1992. 254 с.

14. Алгебра и начала математического анализа. 10 класс : учеб. Для общеобразоват. учреждений : базовый и профил. уровни / [Ю.М. Колягин, М.В. Ткачева, Н.Е. Федорова, М.И. Шабунин]; под ред. А.Б. Жижченко. 4-е изд. М.: Просвещение, 2011. 368 с.

15. Алгебра и начала математического анализа. 10 класс: учеб. для общеобразоват. учрежд.: базов. и профил. уровни / С.М. Никольский, М.К. Потапов, Н.Н. Решетников, А.В. Шевкин. М.: Просвещение, 2018. 432 с.

16. Алгебраические дроби: учеб. пособие по математике для 7 кл. Томск: Изд-во Томского ун-та, 1996. 288 с.

17. Арюткина С.В. Формирование обобщенных приемов решения уравнений и неравенств с параметрами у учащихся 8-9 классов: автореф. дисс. ... канд. пед. наук: 13.00.02 / Морд. гос. пед. ин-т им. М.Е. Евсевьева. Саранск, 2002. 18 с.

18. Афоничева Ю.А. Методика обучения решению показательным уравнениям и неравенствам в школьном курсе математики [Электронный ресурс]: магистерская диссертация : 44.04.01 / Ю.А. Афоничева. Тольятти: ТГУ, 2019. URL: https://dspace.tltsu.ru/handle/123456789/14184 (дата обращения 04.11.2022).

19. Башмаков М. И. Алгебра и начала анализа : учеб. для 10-11 кл. сред. шк. / М. И. Башмаков. 2-е изд. М.: Просвещение, 1992. 351 с.

20. Башмаков М.И. Давайте учить математике / М.И. Башмаков // Математика: Приложение к газете «Первое сентября». 2010. №6. С. 2-5, 48.

21. Башмаков М.И. Уравнения и неравенства. 2-е изд., перераб. М.: Наука. гл. ред. физ.-мат. лит., 1976. 95 с. (Библиотечка физико-математической школы. Математика. Вып. 5).

22. Белкина Е.Н. Геометрический метод отбора корней тригонометрических уравнений на заданном промежутке // Педагогический поиск. 2017. № 12. С. 4-7.

23. Березанская Е.С. Тригонометрические уравнения и методика их преподавания / Е.С. Березанская. М.: Учпедгиз, 1935. 68 с.

24. Бородуля И.Т. Тригонометрические уравнения и неравенства / И.Т. Бородуля. М.: Просвещение, 1989. 239с.

25. Будак Б.А. Математика. Сборник задач по углублённому курсу [Электронный ресурс]: учебно-методическое пособие / Б. А. Будак [и др.] ; под ред. М. В. Федотова. 3-е изд. (эл.). Электрон. текстовые дан. (1 файл pdf : 329 с.). М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2015. (ВМК МГУ - школе).

26. Буцко Е.В. Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия. Алгебра и начала математического анализа. Базовый уровень : 10 класс : методическое пособие / Е.В. Буцко, А.Г. Мерзляк, В.Б. Полонский, М. С. Якир. М. : Вентана-Граф, 2020. 113 с.

27. Буцко Е.В. Математика: алгебра и начала математического анализа. Углублённый уровень : 10 класс : методическое пособие / Е. В. Буцко, А. Г. Мерзляк, В. Б. Полонский, М. С. Якир. М. : Вентана-Граф, 2020. 143 с.

28. Виленкин Н. Я. Алгебра и математический анализ : для 11 кл. : учеб. пособие для учащихся шк. / Н. Я. Виленкин, О. С. Ивашев-Мусатов, С. И. Шварцбурд. 3-е изд. М. : Просвещение, 1993. 288 с.

29. Виленкин Н. Я. Алгебра и математический анализ для 10 класса : учеб. пособие для учащихся шк. и кл. с углубленным изучением математики / Н. Я. Виленкин, О. С. Ивашев-Мусатов, С. И. Шварцбурд. 5-е изд. М.: Просвещение, 1997. 335 с.

30. Виленкин Н.Я. Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия. Алгебра и начала математического анализа. 11 класс. Учебник для учащихся общеобразовательных организаций (углубленный уровень) / Н.Я. Виленкин, О.С. Ивашев-Мусатов, С.И. Шварцбурд. 18-е изд., стер. М.: Мнемозина, 2014. 312 с.

31. Галицкий М. Л. Сборник задач по алгебре для 8-9 классов : учеб. пособие / М. Л. Галицкий, А. М. Гольдман, Л. И. Звавич. Гриф МО. М.: Просвещение, 1992. - 271 с.

32. Глебова М.В., Токарева Е.С. Методические рекомендации по отбору корней тригонометрического уравнения // Социально-педагогические вопросы образования и воспитания. материалы Всероссийской научно-практической конференции. БУ ЧР ДПО «Чувашский республиканский институт образования» Министерства образования и молодежной политики Чувашской Республики. Чебоксары, 2021. С. 218-224.

33. Графики степенных, показательных и логарифмических функций [Электронный ресурс] // Учебные материалы «Резольвента». URL: https://www.resolventa.ru/demo/fiz/dgia.htm#step1 (дата обращения: 07.02.2023).

34. Графический метод при решении иррациональных уравнений [Электронный ресурс] // Cleverstudents.ru - доступная математика. URL: http://www.cleverstudents.ru/equations/solving_irrational_equations_graphic_method.html (дата обращения: 07.02.2023).

35. Егоров А., Раббот Ж. Иррациональные уравнения // Квант. 2001. №5. С. 42-45.

36. Зайкин М.И. Цепочки, циклы и системы математических задач: монография / М.И. Зайкин, С.В. Арюткина, Р.М. Зайкин; Нижегородский гос. ун-т им. Н.И. Лобачевского, Арзамасский фил. Арзамас: АГПИ, 2013. 135 с.

37. Звавич Л.И. Алгебра и начала анализа. Решение задач письменного экзамена. 11 кл. / Л.И. Звавич, Л.Я. Шляпочник, И.И. Кулагина. М.: Дрофа, 2000. 352 с.

38. Зив Б.Г., Алтынов П.И. Алгебра и начала анализа. Геометрия. 10-11 кл.: Учебно-метод. пособие. М.: Дрофа, 1999. 224 с.

39. Иванова Т.А. Современный урок математики: теория, технология. Практика: Книга для учителя. – Н. Новгород: НГПУ, 2010. 288 с.

40. Кара-Сал Н.М., Бичиоол Е.К. Приемы отбора корней при решении тригонометрических уравнений // Вестник Тувинского государственного университета. №4. Педагогические науки. 2016. № 4 (31). С. 125-136.

41. Книга для учителя к учебнику «Математика». 5 класс. Под редакцией акад. РАН В.В. Козлова и акад. РАО А.А. Никитина /авт.-сост. В.В. Козлов, А.А. Никитин, В.С. Белоносов и др. М.: ООО «Русское слово – учебник», 2013. 256 с. (ФГОС. Инновационная школа).

42. Колягин Ю.М. Алгебра и начала математического анализа: Учебник для 10 кл. средней школы (базовый и профильный уровни) / Ю.М. Колягин, М.В. Ткачева, Н.Е. Федорова, М.И. Шабунин. 4-е изд. М.: Просвещение, 2011. 368 с.

43. Колягин Ю.М. Алгебра. 7 класс: учеб. для общеобразоват. учреждений / [Ю. М. Колягин, М. В. Ткачева, Н. Е. Федорова, М. И. Шабунин]. М.: Просвещение, 2012. 319 с.

44. Колягин Ю.М. Алгебра. 8 класс: учеб. для общеобразоват. организаций / [Ю.М. Колягин, М.В. Ткачева, Н.Е. Федорова, М.И. Шабунин]. М.: Просвещение, 2013. 336 с.

45. Концепция развития математического образования в Российской Федерации [Электронный ресурс]. URL: https://www.garant.ru/products/-ipo/prime/doc/70452506/ (дата обращения 10.05.2020).

46. Корянов А.Г., Прокофьев А.А. Тригонометрические уравнения: методы решений и отбор корней. Задачи части С образца 2011 года [Электронный ресурс]. URL: https://www.alexlarin.net/ege11.html (дата обращения 23.11.2023 г.).

47. Кострикина Н.П. Задачи повышенной трудности в курсе алгебры 7-9 классов: Кн. для учителя. М.: Просвещение, 1991. 239 с.

48. Костюченко Р.Ю. Алгоритмический подход к обучению школьников решению тригонометрических уравнений / Р.Ю. Костюченко // Theoretical & Applied science. 2015. №8(28). С. 80-85.

49. Кочетков Е. С. Алгебра и начала анализа : 10 кл. : пробн. Учебн. / Е. Кочетков, Е.С. Кочеткова. Изд. 2-е, перераб. М.: Просвещение, 1974. 200 с.

50. Кругликов С.А. Методика преподавания математики с использованием информационных технологий и компьютерных продуктов учебного назначения: автореф. дис. … канд. пед. наук: 13.00.02 / Моск. гос. ун-т им. М.В. Ломоносова. М., 2003. 23 с.

51. Литвиненко В.Н. Практикум по элементарной математике. Тригонометрия: Учебное пособие / В.Н. Литвиненко, А.Г. Мордкович. М.: Вербум-М, 2007. 160 с.

52. Макарова С.О. Методика обучения решению алгебраических уравнений с параметрами в углубленном курсе математики общеобразовательной школы математики [Электронный ресурс]: магистерская диссертация: 44.04.01 / С.О. Макарова. Тольятти: ТГУ, 2019. URL: https://dspace.tltsu.ru/handle/123456789/13403 (дата обращения 05.11.2022).

53. Макарычев Ю.Н. Алгебра. 7 класс: учеб. пособие для общеобразоват. организаций: углубл. уровень / [Ю.Н. Макарычев, Н.Г. Миндюк, К.И. Нешков и др.]. М.: Провещение, 2018. 304 с.

54. Макарычев Ю.Н. Алгебра. 8 класс: учеб. пособие для общеобразоват. организаций: углубл. уровень / [Ю.Н. Макарычев, Н.Г. Миндюк, К.И. Нешков и др.]. М.: Просвещение, 2018. 351 с.

55. Макарычев Ю.Н. Алгебра. 9 класс: учеб. пособие для общеобразоват. организаций: углубл. уровень / Ю.Н. Макарычев, Н.Г. Миндюк, К.И. Нешков, И.Е. Феоктистов. 7-е изд., испр. и доп. М.: Мнемозина, 2008. 447 с.

56. Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия. Алгебра и начала математического анализа. 10-11 классы: учеб. для

общеобразоват. организаций: базовый и углубл. уровни / Ш.А. Алимов [и др.]. 3-е изд. М.: Просвещение, 2016. 463 с.

57. Методы решения иррациональных уравнений [Электронный ресурс] // Фоксворд. URL: https://foxford.ru/wiki/matematika/metody-reshenya-yrrac-uravneny (дата обращения 23.05.2023).

58. Мирошин В.В. Формирование содержательно-методической линии задач с параметрами в курсе математики общеобразовательной школы: автореф. дисс. ... канд. пед. наук: 13.00.02 / Тул. гос. пед. ун-т им. Л.Н. Толстого. М., 2008. 19 с.

59. Молоткова Б.Б. Методика использования электронных образовательных ресурсов при изучении тригонометрии как средство повышения уровня осознанности знаний: автореф. дис. ... канд. пед. наук: 13.00.02 / Рос. гос. пед. ун-т им. А.И. Герцена. Санкт-Петербург, 2014. 22 с.

60. Мордкович А. Г. Алгебра : 8 кл. : учебник / А. Г. Мордкович. М.: Мнемозина, 1998. 237 с.

61. Мордкович А. Г. Алгебра и начала анализа : учеб. для 10-11 кл. общеобразоват. учреждений. В 2 ч. Ч. 1 / А. Г. Мордкович. - 4-е изд. ; Гриф МО. М.: Мнемозина, 2003. - 375 с.

62. Мордкович А.Г. Алгебра (углубленное изучение). 7 класс. В 2 ч. Ч. 1. Учебник для учащихся общеобразовательных учреждений / А.Г. Мордкович, Н.П. Николаев. М.: Мнемозина, 2009. 191 с.

63. Мордкович А.Г. Алгебра (углубленное изучение). 8 класс. В 2 ч. Ч. 1. Учебник для учащихся общеобразовательных учреждений / А.Г. Мордкович, Н.П. Николаев. 10-е изд., доп. М.: Мнемозина, 2013. 256 с.

64. Мордкович А.Г. Алгебра и начала математического анализа 10 кл.: Учебник для учащихся общеобразовательных орг. (базовый и углубленный уровни) /А.Г. Мордкович, П.В. Семенов. 2-е изд. М.: Мнемозина, 2014. 463 с.

65. Мордкович А.Г. Беседы с учителями математики: учеб.-метод. пособие / А.Г. Мордкович. 2-е изд., доп. и перераб. М.: Оникс 21 век: Мир и Образование, 2005. С. 219-244.

66. Мордкович А.Г., Семёнов П.В. Алгебра и начала математического анализа. 10 кл. в 2 ч.: Ч. 1 учебник для общеобразоват. организаций (профильный уровень). М.: Мнемозина, 2009. 424 с.

67. Мордкович, А.Г. Алгебра и начала математического анализа. 10 класс. В 2 ч. Ч.1. Учебник для учащихся общеобразовательных учреждений (профильный уровень) / А.Г. Мордкович, П.В. Семенов. 6-е изд., стер. М.: Мнемозина, 2009. 424 с.

68. Мордкович, А.Г. Алгебра. 9 класс. В 2 ч. Ч. 2 [Текст]: задачник для учащихся общеобразовательных учреждений / А.Г. Мордкович, Л.А. Александрова, Т.Н. Мишустина, Е.Е. Тульчинская, П.В. Семенов. 12-е изд., испр. М.: Мнемозина, 2010. 223 с.

69. Мультиурок [Электронный ресурс]. URL: https://videouroki.net/et/onletalgebra10.html (дата обращения 05.11.2023).

70. Муравин Г. К. Алгебра : 9 кл. : метод. рекомендации к учебнику / Г. К. Муравин, О. В. Муравина. М.: Дрофа, 2004. 143 с.

71. Муравин Г. К. Алгебра : учебник : 7 кл. / Г. К. Муравин, К. С. Муравин, О. В. Муравина. Гриф МО. М.: Дрофа, 2014. 287 с.

72. Муравин, Г.К. Алгебра и начала математического анализа, углубленный уровень, 10 класс: учебник для общеобразовательных учреждений / Г.К. Муравин, О.В. Муравина. 9-е изд., стереотип. М.: Дрофа, 2013. 285 с.

73. Никольский С.М. Алгебра и начала математического анализа. 10 класс.: учеб. для общеобразоват. учреждений: базовый и профильный уровни / [С.М. Никольский, М.К. Потапов, Н.Н. Решетников, А.В. Шевкин]. 8-е изд. М.: Просвещение, 2009. 430 с.

74. Никольский С.М. Алгебра и начала математического анализа. 11 класс.: учеб. для общеобразоват. учреждений: базовый и профильный уровни / [С.М. Никольский, М.К. Потапов, Н.Н. Решетников, А.В. Шевкин]. 8-е изд. М.: Просвещение, 2009. 464 с.

75. Никольский С.М. Алгебра. 7 класс.: учеб. для общеобразоват. организаций / [С.М. Никольский, М.К. Потапов, Н.Н. Решетников, А.В. Шевкин]. М.: Просвещение, 2013. 287 с. (МГУ – школе).

76. Никольский С.М. Алгебра. 8 класс.: учеб. для общеобразоват. организаций / [С.М. Никольский, М.К. Потапов, Н.Н. Решетников, А.В. Шевкин]. М.: Просвещение, 2014. 301 с. (МГУ – школе).

77. Олехник С.Н. Уравнения и неравенства (нестандартные методы решения): Учебное пособие для учащихся старших классов общеобразовательных школ /С.Н. Олехник, М.К. Потапов П.И. Пасиченко. М.: Дрофа, 2007. 150 с.

78. Островерхая Л.Д., Жданова О.К. Отбор корней тригонометрических уравнений методом спирали // Вестник КРАУНЦ. Физико-математические науки. 2019. Т. 26. № 1. С. 100-109.

79. Открытый урок. Первое сентября [Электронный ресурс]. URL: https://urok.1sept.ru/ (дата обращения 05.11.2023).

80. Палфёрова С.Ш. Геометрические методы отбора положительных корней иррациональных уравнений / С.Ш. Палфёрова, Е.О. Терехина // Вестник магистратуры. 2022. №12-6(135). С. 148-149.

81. Палфёрова С.Ш. Методика обучения отбору корней тригонометрических уравнений в курсе алгебры и начал математического анализа общеобразовательной школы / С.Ш. Палфёрова // Математика и математическое образование: сборник трудов IX Международной научной конференции «Математика. Образование. Культура» (Россия, г. Тольятти, 24-26 апреля 2019 года) / под общ. ред. Р.А. Утеевой. Тольятти: Изд-во ТГУ, 2019. С. 247-252.

82. Пойа Д. Как решать задачу. Пособие для учителей. М.: Госучпедгиз, 1961. 209 с.

83. Решу ЕГЭ. Образовательный портал для подготовки к экзаменам: [Электронный ресурс]. URL: https://math-ege.sdamgia.ru/ (дата обращения 15.10.2023).

84. Рупасов К.А. К вопросу о решении тригонометрических уравнений / К.А. Рупасов // Математика в школе. 1938. №2. С. 66-67.

85. Самсонов П.И. Простые замечания о сложной методике обучения решению тригонометрических уравнений /П.И. Самсонов // Математика. 2010. №7. С. 46-47.

86. Самсонов П.И. Тема урока «Решение тригонометрических уравнений различными способами» / П.И. Самсонов // Математика. 2008. №22. С. 13-14.

87. Саранцев Г.И. Упражнения в обучении математике / Г.И. Саранцев. М.: Просвещение, 2005. 256 с.

88. Сафарян А.А. Линия уравнений в школьном курсе алгебры основной школы // Вестник Таганрогского государственного педагогического института. 2016. № 1. С. 343-346.

89. Сборник задач по математике для поступающих во втузы: Учебное пособие / В.К. Егерев. 6-е изд., испр. и доп. М.: Столетие, 2007. 560 с.

90. Синакевич С.В. Опыт работы по теме «Тригонометрические уравнения» / С.В. Синакевич // Математика в школе. 1955. №1. С. 4-19.

91. Соколова Н.А., Барышенский Д.С., Белай Е.Н. Комплексная методика работы с обучающимися средствами портала «СтатГрад», обеспечивающая эффективную подготовку к ЕГЭ по математике // Кубанская школа. 2021. №1. С. 47-49.

92. Стефанова Н.Л., Подходова Н.С. Методика и технология обучения математике. Лабораторный практикум: учеб. пособие для студентов матем. факультетов пед. университетов / под науч. ред. В. В. Орлова. М.: Дрофа, 2007. 320 с.

93. Столяр А. А. Педагогика математики : учеб. пособие для пед. ин-тов / А. А. Столяр. Изд. 3-е, перераб. Минск : Вышэйш. шк., 1986. 413 с.

94. Суханова С. Н. Изучение тригонометрии на основе деятельностного подхода и технологии дистанционного обучения как способ развития

математических способностей: автореф. дис. ... канд. пед. наук: 13.00.02 / Новосиб. гос. пед. ун-т. Новокузнецк, 2002. 21 с.

95. Теория и технология обучения математике в средней школе: Учеб. Пособие для студентов математических специальностей педагогических вузов / Т.А. Иванова. 2-е изд., испр. и доп. Н. Новгород: НГПУ, 2009. 355 с.

96. Федеральный государственный образовательный стандарт основного общего образования: Приказ Мин.обр. и науки РФ от 17.12.2010 г. №1897 (с изменениями на 8 ноября 2022 г.) [Электронный ресурс]. URL: https://docs.edu.gov.ru/document/8f549a94f631319a9f7f5532748d09fa (дата обращения: 09.12.2023).

97. Федеральный государственный образовательный стандарт среднего (полного) общего образования [Электронный ресурс]: Приказ Мин. образования и науки РФ от 17.05.2012 г. № 413 (с изменениями на 11 декабря 2020 г.). URL: https://fgos.ru/fgos/fgos-soo/ (дата обращения: 07.12.2023).

98. Федеральный институт педагогических измерений. [Электронный ресурс]. URL: http://fipi.ru/ (дата обращения: 12.12.2023).

99. Фридман Л.М. Теоретические основы методики обучения математике: учеб. пособие / Л. М. Фридман. Изд. 3-е. М.: Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2009. 248 с. (Психология, педагогика, технология обучения).

100. Шарова О.П. О некоторых аспектах методики обучения учащихся решению сюжетных задач арифметическим методом / Вопросы методики обучения математике в средней школе: Учебное пособие / отв. ред. Т.Н. Карпова, Т.М. Корикова. Ярославль: Изд-во ЯГПУ им. К.Д. Ушинского, 2002.

101. Шахмейстер А.Х. Иррациональные уравнения и неравенства / А.Х. Шахмейстер. СПб.: «Петроглиф», 2011. 216 с.

102. Ященко И.В. Я сдам ЕГЭ! Математика. Модульный курс. Методика подготовки: учебное пособие / И.В. Ященко, С.А. Шестаков. М.: Просвещение. 2020. 384 с.

103. Ященко И.В. ЕГЭ. Математика. Профильный уровень: типовые экзаменационные варианты: 36 вариантов / И.В. Ященко. М.: Изд.–во «Национальное образование», 2019. 256 с.

104. Bonato M., Fabbri S., Umilta` C., and Zorzi M. The Mental Representation of Numerical Fractions: Real or Integer [Text] / M. Bonato // Journal of Experimental Psychology: Human Perception and Performance. University of Oradea Publisher, 2007. PP. 1410-1419.

105. Bresolin D. Optimal decision procedures for MPNL over finite structures, the natural numbers, and the integers [Text] / D. Bresolin // Elsevier. University of Oradea Publisher, 2013. PP. 98-115.

106. Teppo A. Visual representations as objects of analysis: the number line as an example [Text] / A. Teppo // Springer. University of Oradea Publisher, 2013. PP. 600-613.

107. Voskoglou M. and Kosyvas G. Analyzing students' difficulties in understanding real numbers [Text] / M. Voskoglou // Redimat. University of Oradea Publisher, 2012. PP. 301-336.

108. Yua F., Ko K. On logarithmic-space computable real numbers [Text] / F. Yua // Elsevier. University of Oradea Publisher, 2012. PP. 712-714.