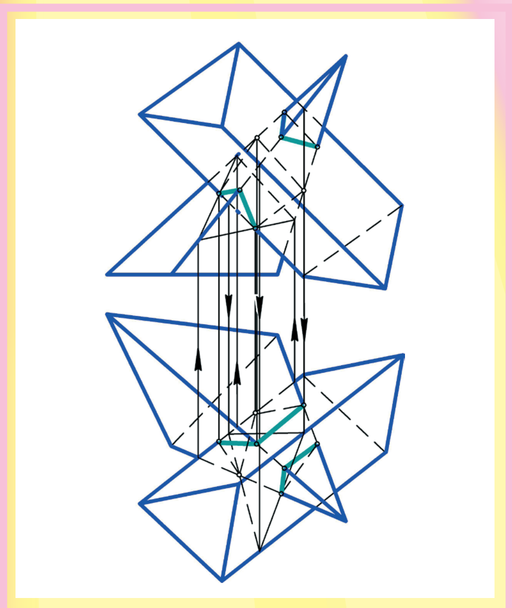
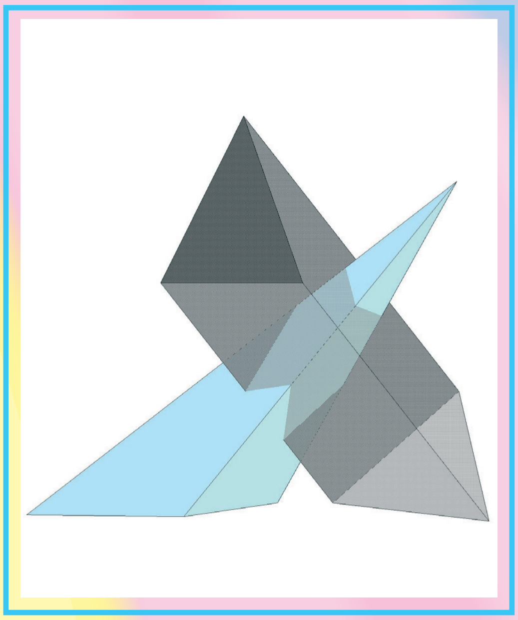
Министерство образования и науки Российской Федерации
Тольяттинский государственный университет
Архитектурно-строительный институт
Кафедра «Дизайн и инженерная графика»

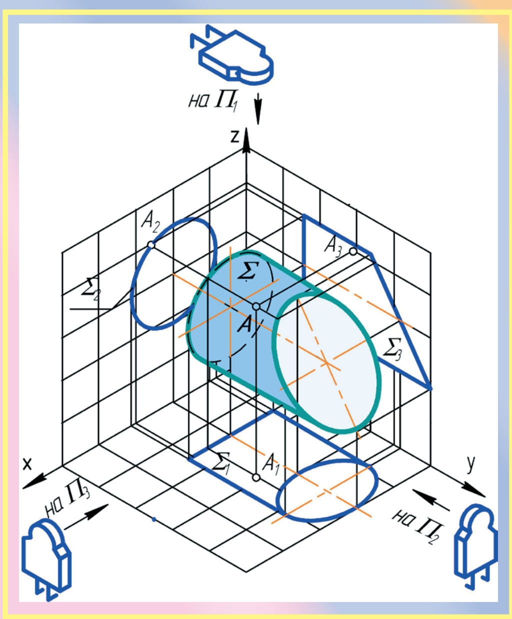
С.В. Грачева, И.А. Живоглядова

УВЛЕКАТЕЛЬНАЯ НАЧЕРТАТЕЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ

Допущено Научно-методическим советом по начертательной геометрии, инженерной графике Минобрнауки России в качестве учебного пособия для студентов вузов инженерно-технических специальностей







ISBN 978-5-8259-0939-4

УДК 514.8(075.8)
ББК 22.151.3я73

Рецензенты:
канд. техн. наук, доцент, зав. кафедрой инженерной графики СГАУ *В.И. Иващенко*;
д-р техн. наук, профессор Тольяттинского государственного университета *А.П. Шайкин*.

Грачева, С.В. Увлекательная начертательная геометрия : электронное учебн. пособие / С.В. Грачева, И.А. Живоглядова. – Тольятти : Изд-во ТГУ, 2015. – 1 оптический диск.

Пособие состоит из 16 тем-занятий, каждое содержит краткую наглядную теоретическую информацию, примеры решения типовых задач, обучающие и итоговые тесты, игровой тренинг, опорный конспект-канву, задачи для аудиторных и домашних занятий, двухуровневые задачи повышенной трудности. Подобраны задачи к трем эпюрам. Приложение содержит рисунки пересекающихся геометрических фигур в 3D.

Адресовано студентам технических специальностей высших учебных заведений. Может быть полезным начинающим преподавателям начертательной геометрии и при самостоятельном изучении курса «Начертательная геометрия».

Текстовое электронное издание

Рекомендовано к изданию научно-методическим советом
Тольяттинского государственного университета.

Минимальные системные требования: IBM PC-совместимый компьютер: Windows XP/Vista/7/8; PIII 500 МГц или эквивалент; 128 Мб ОЗУ; SVGA; Adobe Acrobat Reader.

Редактор *Т.Д. Савенкова*
Техническое редактирование: *С.В. Грачева*
Художественное оформление, компьютерное проектирование: *Г.В. Карасева*

Дата подписания к использованию 29.12.2015.
Объем издания 8,5 Мб.
Комплектация издания: компакт-диск, первичная упаковка.
Заказ № 1-04-14.

Издательство Тольяттинского государственного университета
445020, г. Тольятти, ул. Белорусская, 14,
тел. 8 (8482) 53-91-47, www.tltsu.ru

Предисловие

Начертательная геометрия – одна из фундаментальных дисциплин, закладывающая основу графической грамотности, способствующая формированию инженерного мышления. В последние годы в связи с реформами в школьном образовании черчение как необязательный предмет исключено из программ большинства средних школ. В результате при изучении этого курса студенты испытывают колоссальные затруднения. Данное учебное **пособие разработано не вместо, а в дополнение ко всей традиционной** литературе **и адресовано тем, кому при освоении этой науки** ***«трудно, непонятно и неинтересно».***

Содержание пособия соответствует программе по начертательной геометрии для инженерных специальностей технических вузов**.** По структуре оно своеобразно, его использование будет эффективным при параллельном прослушивании лекций и чтении традиционных учебных книг. Как выстроить работу?

1. **Тщательный просмотр и анализ теоретической информации** от наглядного изображения к поэтапному переходу к безосному чертежу. Изучение примеров решения типовых задач. Изображения сопровождаются надписями, текст в виде основных правил, выводов, обобщений, определений.
2. **Работа с обучающим тестом.** Тест состоит из десяти вопросов, не содержит неправильных решений, представляет достаточный диапазон задач по теме и позволяет закреплять основные теоретические положения.
3. **Игровые ситуации (*Тренировка ...*)** □□□□□. Связаны с историей развития начертательной геометрии. Дают возможность с интересом одолевать преграды. *При любых подходах в разгадывании необходим анализ решений, за которым следует усвоение терминологии, основных положений, действий при решении тех или иных задач.*

 *– грустно?*  *– подумаем!*  *– и всё будет хорошо!*

4. **Опорный конспект** – квинтэссенция темы на одной странице. *Сделал копию на телефон*  *– и усваивай постулаты в любом месте и в любое время.*
5. **Ответы на вопросы для самопроверки и анализ итогового теста.** *Проверьте себя**,** проанализируйте тест, здесь базовый минимум, ниже которого следует незнание или недостаточный уровень усвоения.*

6. Набор задач для практических занятий. Задачи под номерами, взятыми в окружность, решаются дома. Возможен индивидуальный темпоритм. Решение задач следует выполнять в двух тетрадях в клетку. Одна сдаётся каждую неделю на проверку.

Необходимо самостоятельно найти размеры и задание графического условия каждой задачи, с тем чтобы решение получилось удачным и наглядным. Домашние задачи желательно решать сразу после лекции.

7. Двухуровневые задачи повышенной сложности. Решение их не входит в обязательный объём, но позволяет рассчитывать на досрочный зачёт и экзамен, формирует стремление к саморазвитию и непременно готовит к участию в олимпиадах разного уровня.

«Плох тот солдат, который не мечтает стать генералом», решил эти задачи, можно идти на вузовскую олимпиаду!

«Не боги горшки обжигают», одолели хотя бы половину из них, пробуйте свои силы на всероссийских форумах!

8. Задания на три эпюра (*в 30-ти вариантах***)**. Описано содержание каждого эпюра, в масштабе уменьшения приведены примеры выполнения. *Выполнение эпюров возможно по индивидуальному графику, желательно без промедления сразу после изучения темы. Размеры фигур не определены, необходимо обеспечить наглядное решение.*

9. Рисунки 3D пересекающихся геометрических фигур способствуют качественному прочтению чертежей.

Будьте терпеливы и настойчивы! Знание основ начертательной геометрии развивает пространственное и логическое мышление, способствует формированию пространственного интеллекта и прокладывает дорогу ко всем видам инженерного творчества!

Пособие написано С.В. Грачевой; И.А. Живоглядовой выполнены рисунки в 3D и оказано большое содействие в оформлении пособия.

Авторы благодарны рецензентам: преподавателям кафедры инженерной графики СГАУ, заведующему кафедрой инженерной графики СамГТУ кандидату технических наук, доценту Т.С. Москалёвой, доктору технических наук, профессору ТГУ А.П. Шайкину за ценные замечания, направленные на улучшение содержания пособия.

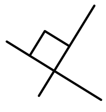
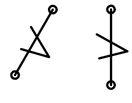
ОБОЗНАЧЕНИЯ

Точки – A, B, C, D, E, F, G, H, I, J, K, L, M, N, O, P, Q, R, S
(прописные буквы латинского алфавита)
Линии – a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k, l, m, n, o, p, q, r, s, t
(строчные буквы латинского алфавита)
Поверхности – Γ, Δ, Θ, Λ, Π, Ρ, Σ, Τ, Φ, Ψ, Ω
(прописные буквы греческого алфавита)
Углы – α, β, γ, δ, λ, φ
(строчные буквы греческого алфавита)

СИМВОЛИКА

$\perp$ – перпендикулярность
$\|$ – параллельность
$\in$ – принадлежность: например, **A** $\in$ **a** – точка **A** принадлежит прямой **a**
$\subset$ – включение: (содержит в себе) например, **a** $\subset$ **Σ** – прямая **a** принадлежит плоскости **Σ**, **Σ** $\supset$ **a** – плоскость **Σ** проходит через прямую **a**
$\cap$ – пересечение множеств
$\dot{-}$ – скрещивание
$\rightarrow$ – отображение
$=$ – результат действия, равны, например, $\mathbf{l} \cap \mathbf{\Pi_1} = \mathbf{A_1}$
$\equiv$ – совпадение, тождество
$\sim$ – подобие
$\cong$ – конгруэнтность
$\wedge$ – союз **и**
$\vee$ – союз **или**
$\Rightarrow$ – импликация (логическое следствие)
(AB) – прямая, проходящая через точки **A** и **B**
[AB] – отрезок прямой, ограниченный точками **A** и **B**
I**AB**I – расстояние между точками **A** и **B**
I**Aa**I – расстояние от точки **A** до прямой **a**
I**ΣΓ**I – расстояние между плоскостями **Σ** и **Γ**

Условные изображения и сокращения

 – прямой угол;  – равные отрезки (*любые одинаковые засечки);*

о. п. – общего положения;
х. п. ч. – характерный признак чертежа.

Примеры условных обозначений, записи и чтения алгоритмов

$П_1$ – горизонтальная плоскость проекций *(проекции всех фигур на эту плоскость снабжаются соответственным индексом);*
A_1 – горизонтальная проекция точки **А;**
$Г_1$ – горизонтальная проекция плоскости **Г**;
m_1–горизонтальная проекция линии **m** и т. д.;
$П_2$ – фронтальная плоскость проекций;
A_2 – фронтальная проекция точки **А;**
$П_3$ – профильная плоскость проекций;
A_3 – профильная проекция точки **А.**

Задача 1

Дано:
$A \wedge m$; $A \not\subset m$;
$A \subset h \cap m$,
$h_2 \wedge h_1 = ?$

Следует читать

Даны прямая **m** и точка **А**, не принадлежащая прямой **m**, требуется построить горизонталь **h**, проходящую через точку **А** и пересекающую прямую **m**.

Алгоритм решения

$A_2 \subset h_2 \perp$ л.с.,
$h_2 \cap m_2 = 1_2$,
$1_1 \subset m_1$; $h_1 (A_1 1_1)$

Через фронтальную проекцию точки **А** проводим фронтальную проекцию горизонтали перпендикулярно линии связи (*или параллельно оси OX)*. При пересечении с фронтальной проекцией прямой **m(m_2)** получаем фронтальную проекцию точки пересечения **1(1_2)**. Достраиваем горизонтальную проекцию точки пересечения **1(1_1)** по принадлежности проекции прямой **m(m_1)**. Горизонтальная проекция искомой горизонтали определилась точками **А** и **1**.

Задача 2

Дано:
$[A_2B_2] \wedge [A_1B_1]$;
$|AB| = ?\ \angle\alpha = ?$

Даны две проекции отрезка общего положения, требуется найти истинную длину отрезка и угол наклона его к **$П_1$.**

Алгоритм

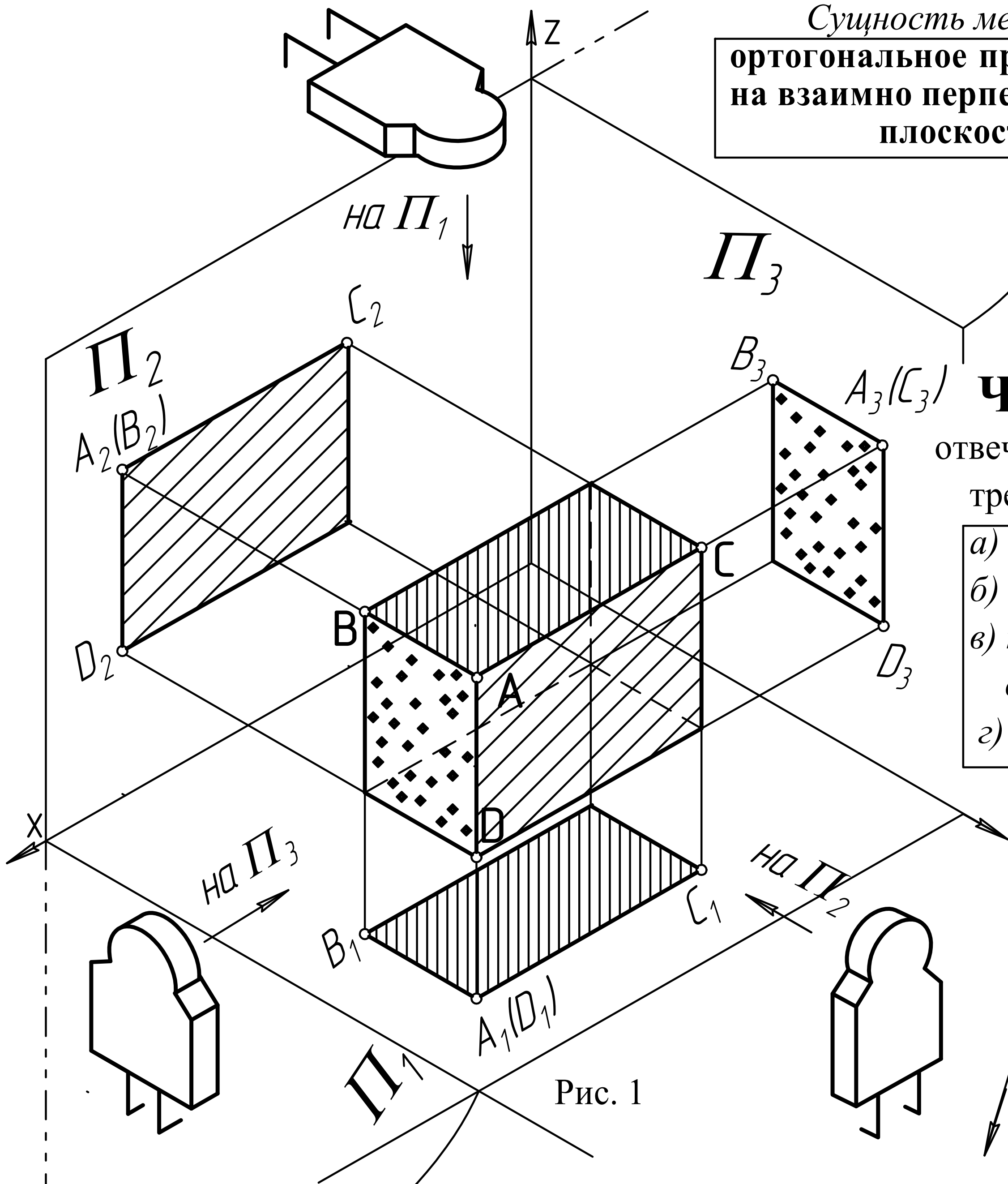
1) $П_2П_1 \rightarrow П_1П_4$;
$x_{14} \parallel A_1B_1$;
$|x_{14}A_4| = |x_{12}A_2|$.
$|A_4B_4| = |AB|$,
$\angle\alpha = x_{14}\widehat{(A_4B_4)}$

Применяем способ замены плоскостей проекций, от системы $П_2П_1$ переходим к системе **$П_1П_4$.** Плоскость $П_4$ вводим параллельно прямой, на чертеже ось пересечения **x_{14}** задаём параллельно горизонтальной проекции прямой **(A_1B_1).** Для построения новых проекций используем аппликаты точек (*расстояния до оставшейся горизонтальной плоскости проекций).*
На $П_4$ получаем искомые величины.

Метод Монжа

Сущность метода:

ортогональное проецирование на взаимно перпендикулярные плоскости



Ч е р т ё ж

отвечает основным требованиям:

а) обратим,
б) нагляден,
в) прост в построениях,
г) удобоизмерим.

Рис. 1

Комплексный чертёж Монжа

получается при совмещении всех плоскостей проекций в одну, при этом $\mathbf{П_2}$ неподвижна, $\mathbf{П_1}$ поворачивается вниз, $\mathbf{П_3}$ – вправо. Оригинала (*за исключением частных случаев*) на чертеже нет, только его проекции: горизонтальная – на $\mathbf{П_1}$ фронтальная – на $\mathbf{П_2}$, профильная – на $\mathbf{П_3}$.

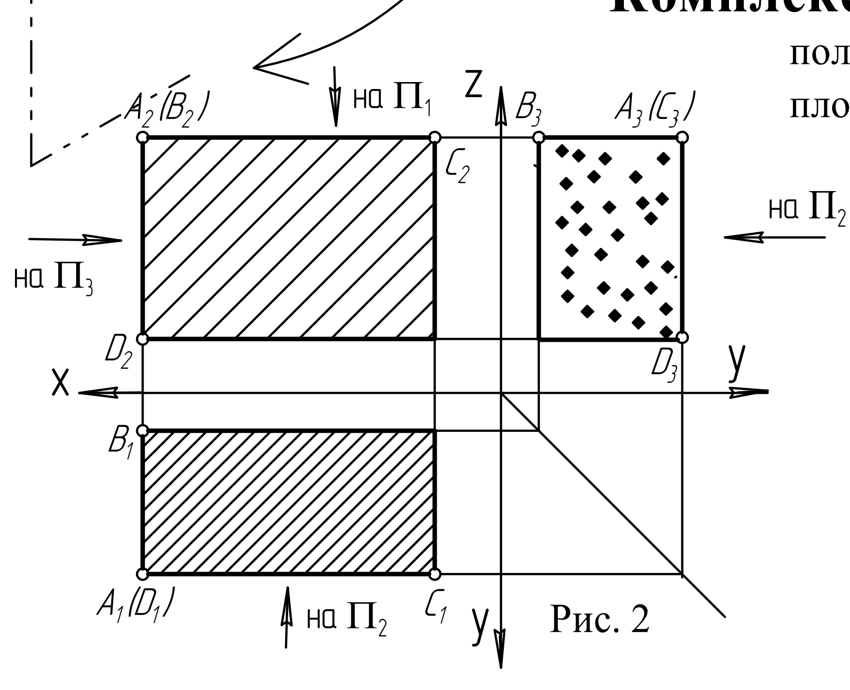


Рис. 2

§ 1. Точка на эпюре Монжа

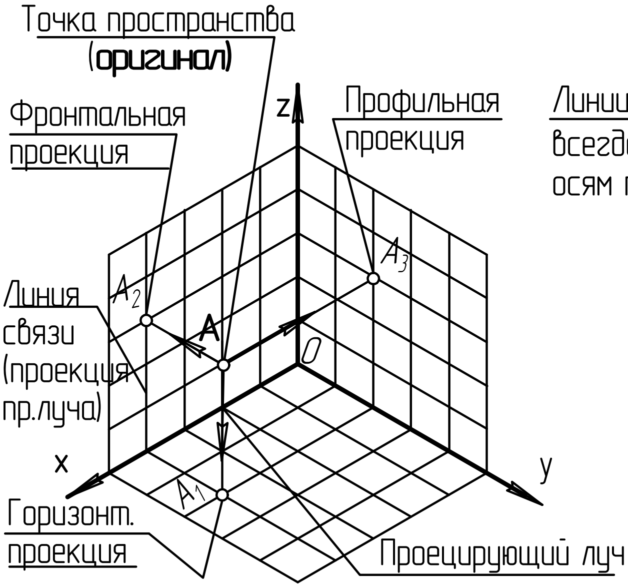


Рис. 3

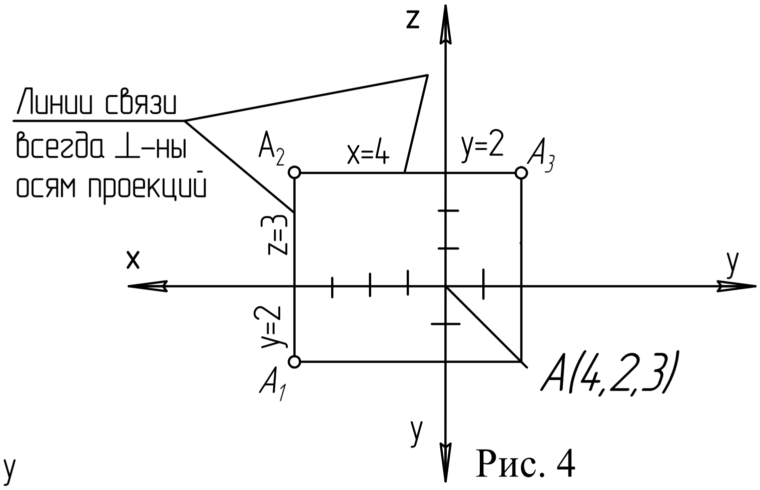


Рис. 4

$A_2A_1 \rightarrow$ всегда на одной линии связи, перпендикулярной оси OX;

$A_2A_3 \rightarrow$ всегда на одной линии связи, перпендикулярной оси OZ.

$A_3 \rightarrow$ определяется аппликатой и ординатой точки.

x (абсцисса) – $/A\Pi_3/=/AA_3/ \rightarrow$ широта точки;

y(ордината) – $/A\Pi_2/=/AA_2/ \rightarrow$ глубина точки;

z(аппликата) – $/A\Pi_1/=/AA_1/ \rightarrow$ высота точки.

Записывают координаты **A(x, y, z)**

*Если точка **A** в пространстве, все координаты имеют числовые значения, отличные от нуля*

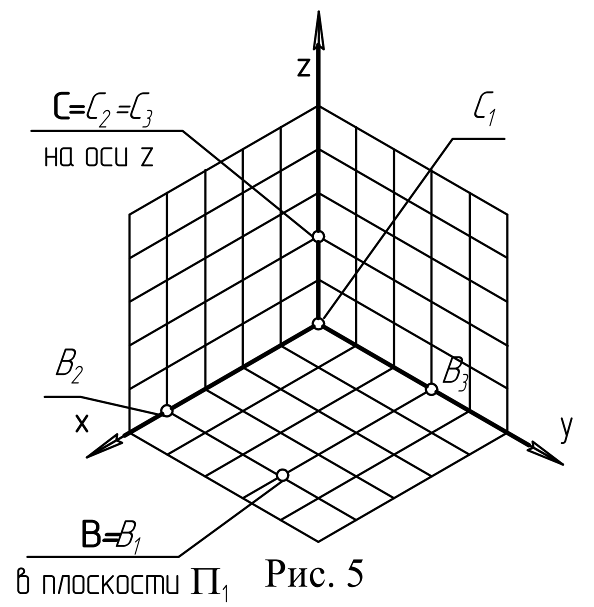


Рис. 5

*Точка **B** в плоскости, одна координата равна 0, точка **C** на оси – две координаты равны 0*

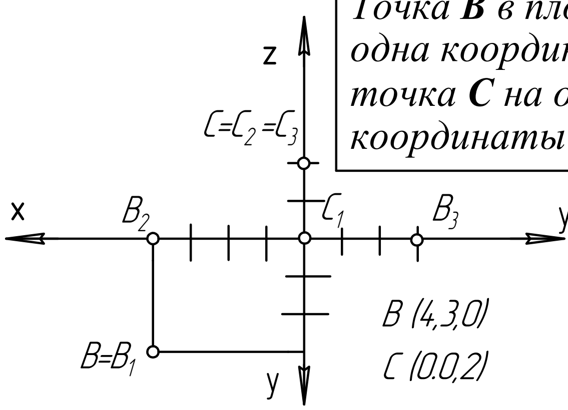


Рис. 6

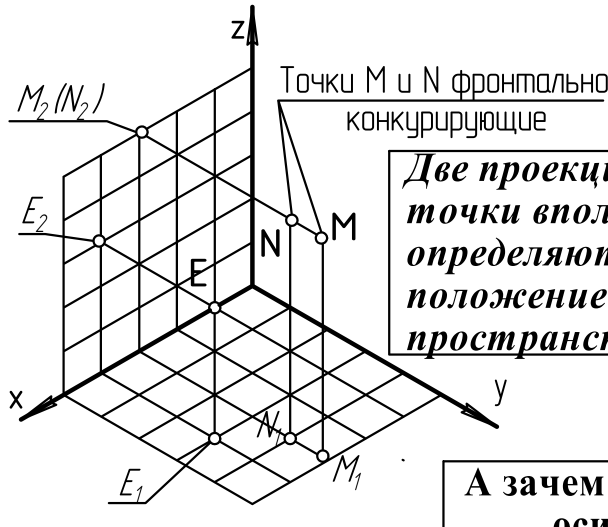


Рис. 7

Две проекции точки вполне определяют её положение в пространстве

А зачем нам оси ?

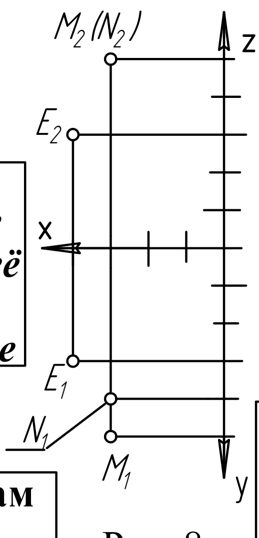


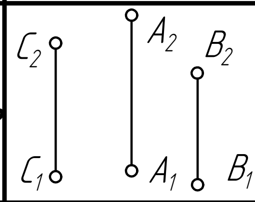
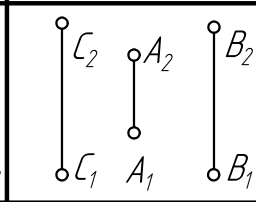
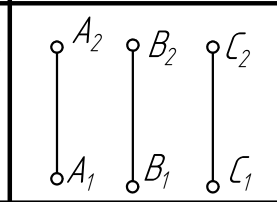
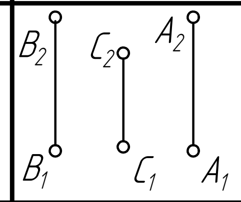
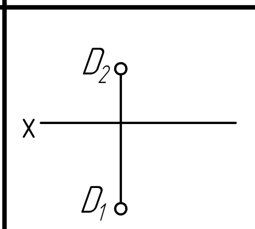
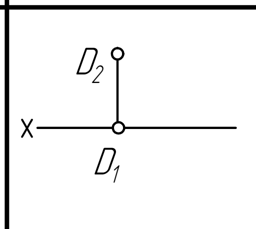
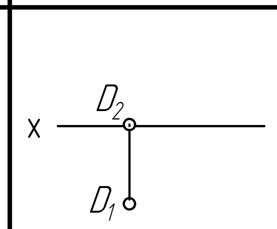
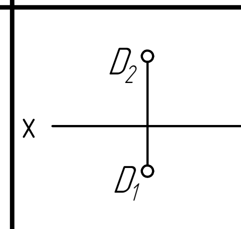
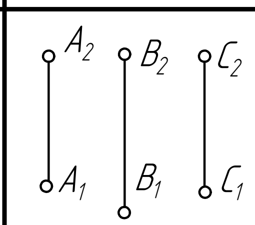
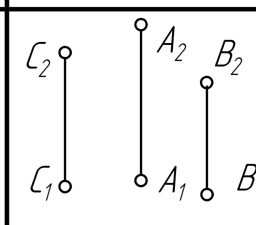
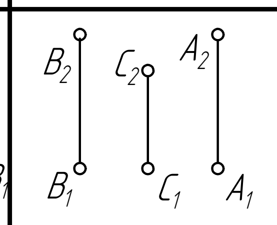
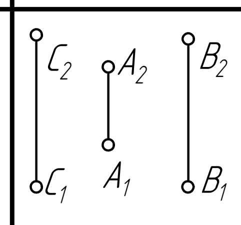
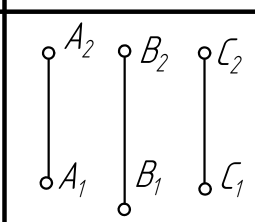
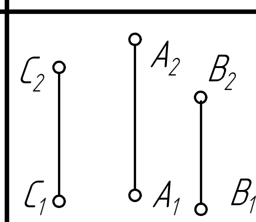
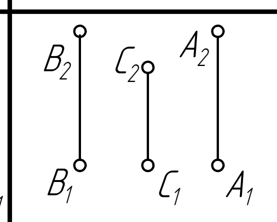
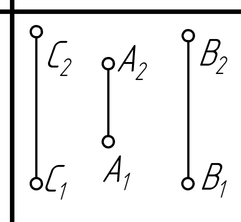
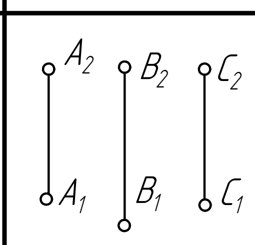
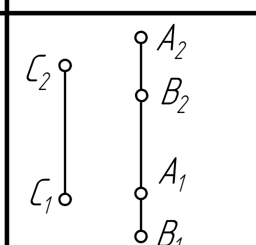
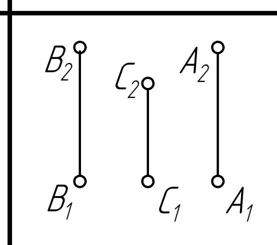
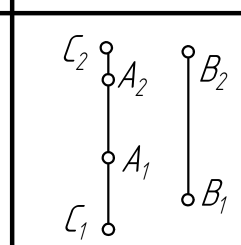
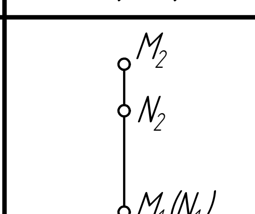
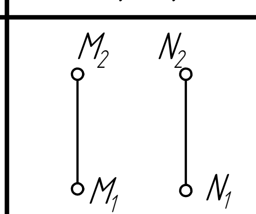
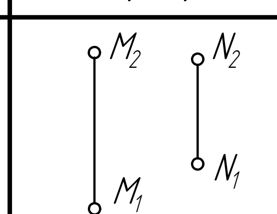
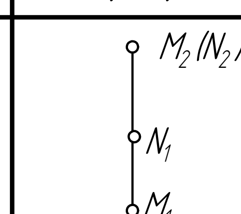
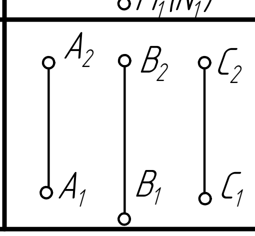
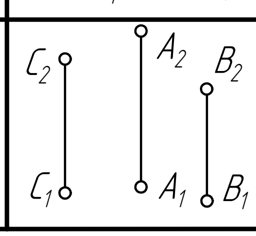
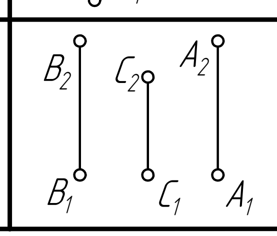
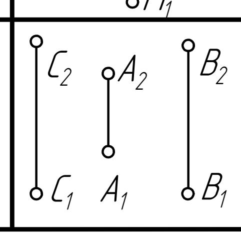
Рис. 8

Точка **E** левее **M** на **1**, точка **M** выше **E** на **2**, точка **E** ближе к $\mathbf{\Pi_2}$ на **2** по сравнению с **M**, **M** и **E** одинаково удалены от $\mathbf{\Pi_2}$ и $\mathbf{\Pi_1}$; точки **M** и **N** расположены на одном перпендикуляре к $\mathbf{\Pi_2}$.

*Выше, ниже видим на $\boldsymbol{\Pi_2}$, ближе, дальше – на $\boldsymbol{\Pi_1}$, левее, правее – по **OX***

Проверьте себя!

Обучающий тест 1 по теме **«Точка на эпюре Монжа»**

№ п/п	Вопрос	1	2	3	4
1	В каком случае точка **A** левее точек **B** и **C**?				
2	Где точка **A** принадлежит Π_2?	A(20,30,50)	A(10,0,35)	A(15,30,0)	A(0,40,0)
3	Укажите чертёж точки, принадлежащей Π_1.				
4	Где все точки отстоят на одном расстоянии от Π_2?				
5	В каком случае точка **A** принадлежит оси **Y**?	A(0,40,0)	A(20,30,50)	A(15,30,0)	A(10,0,35)
6	На каком чертеже точка **A** выше точек **B** и **C**?				
7	В каком случае точки **A** и **B** одинаково удалены от Π_3?				
8	Где точки **C** и **D** профильно конкурируют?	C (15,20,30) D (20,40,10)	C (40,20,10) D (40,30,10)	C (15,40,10) D (20,40,10)	C (15,20,30) D (15,20,10)
9	Укажите чертёж фронтально конкурирующих точек.				
10	Где точка **A** ниже точек **B** и **C** и ближе к Π_2 по сравнению с ними?				

Ответы: 4 4 3 2 2 1 3 3 2 3

Всё понятно? Очень хорошо, переходим к занятию № 1, решаем задачи!

Не уверены?

Не расстраивайтесь! Не всё потеряно! Предлагаем увлекательный тренаж.

Тренировка 1 по теме «Точка на эпюре Монжа»

В таблице 1 представлены точки с заданными координатами.

1. Ответив правильно на первые шесть (1– 6) вопросов, вы узнаете *имя древнегреческого учёного, изложившего основы элементарной геометрии*.
2. Из правильных ответов на следующие шесть вопросов (7– 12) сложится *название его сочинения, содержащего законы, по которым человек видит форму и размеры предметов.*
3. Если правильно ответите на следующие шесть вопросов (13–18), узнаете название *труда этого же учёного по изучению трёхмерного пространства.*
4. Последние шесть (19 – 24) правильных ответов определят *слово, которое согреет вашу душу.*

Вопросы к таблице 1

1. Найдите точку **А**, отстоящую от Π_2 на расстоянии **45 мм**.
2. Где точка **А** принадлежит плоскости Π_3?
3. Найдите точку **А,** равноудалённую от всех плоскостей проекций.
4. К каком случае точка **А** от Π_2 удалена на **10 мм** дальше, чем от Π_1?
5. Найдите точку **А**, принадлежащую оси **OY.**
6. Где точка **А** принадлежит Π_2?

7. Найдите точку **В**, принадлежащую оси **OZ.**
8. В каком случае точка **В** принадлежит Π_1?
9. Найдите точку **В,** находящуюся на одинаковом расстоянии от Π_2 и Π_1 и вдвое меньшем от Π_3.
10. Где точка **В** одинаково удалена от Π_3 и Π_1 и вдвое дальше от Π_2**?**
11. Найдите, где точки **С** и **D** горизонтально конкурирующие.
12. В каком случае точка **С** левее точки **D** на **15 мм**?
13. Где точки **С** и **D** фронтально конкурируют?
14. Где точка **С** расположена выше точки **D** на **30 мм**?
15. Где точка **С** ближе к Π_2 на **10 мм** по сравнению с точкой **D**?
16. Найдите точки **С** и **D,** профильно конкурирующие.
17. Найдите, где точка **D** правее точки **С** на **12 мм**.
18. Где точки **С** и **D** одинаково удалены от Π_3 и **D** ближе к Π_1 по сравнению с **С** на **32 мм**?
19. Где точки **Е** и **М** одинаково удалены от Π_2 и **М** выше **Е** на **5 мм**?
20. Где точки **Е** и **М** фронтально конкурируют и точка **Е** ближе к вам?
21. Найдите точки **Е** и **М,** одинаково удалённые от Π_3 и Π_2.

22. Где точки **Е** и **М** принадлежат плоскости **$П_2$**, при этом **Е** выше **М?**

23. Найдите, где точки **Е** и **М** принадлежат оси **ОХ** и точка **М** правее точки **Е.**

24. Найдите, где точки **Е** и **М** принадлежат оси **ОХ** и точка **М** левее точки **Е**.

Таблица 1

 П B (27,16,0)	К C (15,23,30) D (15,23,10)	В A (0,28,20)	А C (15,25,60) D (5,30,30)	Л C (44,15,20) D (32,18,30)
Н C (8,22,10) D (8,40,10)	А C (10,30,10) D (30,30,10)	У E (30,42,10) M (10,42,15)	К A (30,30,30)	И A (0,18,0)
И B (18,36,18)	А C (15,36,36) D (15,40,4)	А C (45,12,20) D (30,5,10)	И E (10,0,20) M (15,0,15)	Т B (21,42,42,)
Н E (20,40,8) M (20,40,12)	Е A (10,45,15)	О B (0,0,35)	М E (10,25,30) M (10,8,30)	Д A (25,0,30)
Ц E (30,0,0) M (10,0,0)	Ч C (10,25,50) D (15,35,40)	Л A (15,25,15)	А! E (40,0,0) M (60,0,0)	**У Р А !** 

Опорный конспект
по теме «Точка на Эпюре Монжа»

Канва 1

/АП/	Координаты	Расположение точки в пространстве	$\subset П_1$	$\subset П_2$	$\subset П_3$	$\subset ox$	$\subset oy$	$\subset oz$	
/А$П_3$/	X	$\neq 0$	$\neq 0$	$\neq 0$	$= 0$	$\neq 0$	$= 0$	$= 0$	левее, правее
/А$П_2$/	Y	$\neq 0$	$\neq 0$	$=0$	$\neq 0$	$= 0$	$\neq 0$	$=0$	ближе, дальше
/А$П_1$/	Z	$\neq 0$	$=0$	$\neq 0$	$\neq 0$	$=0$	$=0$	$\neq 0$	выше, ниже
		Все числовые значения	Одна координата нулевая			Две координаты нулевые			

Вопросы для самопроверки

1. В чем сущность метода Монжа?
2. Как получается комплексный чертеж Монжа?
3. На каких плоскостях проекций видны расстояния от точки :
   а) до **$П_1$** б) до **$П_2$**; в) до **$П_3$**?
4. Сколько проекций точки вполне определяют ее положение в пространстве?
5. Какие точки называются конкурирующими?

Внимание! ***Итоговый тест 1***

(Условные обозначения предварительно прикройте листом бумаги, записав ответы, сверьте)

⊘ 1. В каком случае точка **А** ниже точки **В** и дальше ее от наблюдателя?

◎ 2. В каком случае обе точки принадлежат **$П_3$**?

⊗ 3. В каком случае точка **А** находится на оси **OZ**?

⦶ 4. В каком случае точки **А** и **В** фронтально конкурируют?

⊖ 5. В каком случае точка **В** левее точки **А** и ближе к **$П_2$**?

1	2	3	4	5
A(0, 0, 10) B(15, 0, 15)	A(30, 10, 40) B(30, 30, 40)	A(30, 40, 10) B(40, 20, 15)	A(15, 20, 30) B(10, 30, 40)	A(0, 10, 20) B(0, 20, 10)
⊗	⦶	⊖	⊘	◎

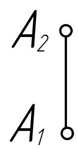
З А Н Я Т И Е   1

Проекции точки

1.1. Построить три проекции точек **A(15, 20, 30); B(30, 0, 15); C(40, 0, 0); D(20, 15, 0).**

1.2. Построить проекции точек **A** и **B** и записать их координаты, если **$IA\Pi_3I=IB\Pi_3I=30$ мм; $IA\Pi_1I=IB\Pi_1I=20$ мм; $IA\Pi_2I = 40$ мм; $IB\Pi_2I=15$ мм.**

1.3. Задать ось **OX,** если **$IA\Pi_1I=25$ мм; $IA_2A_1I >25$ мм**



1.4. Точка **$B\subset\Pi_2$, $IB\Pi_1I=20$ мм, $IB\Pi_3I=15$ мм. B_1=? B_2=? B_3=?**

1.5. Задать оси **OX** и **OZ**, если **$IA\Pi_2I=15$ мм, $IA_2A_3I \wedge IA_2A_1I >15$ мм.**

1.6. Точки **A** и **B** горизонтально конкурирующие, от **Π_3** отстоят на **25 мм**, от **Π_2 на 30 мм, $IA\Pi_1I=15$ мм, B** выше **A** на **20 мм.**

1.7. Построить проекции точек **A, B, C. A(30, 20, 10)**. Точка **B** левее **A** на **10 мм**, выше ее на **15 мм**, ближе к наблюдателю на **5 мм.** **$IC\Pi_1I=IB\Pi_1I$; $IX_C-X_BI=20$ мм; $IY_C-Y_BI=10$ мм.**

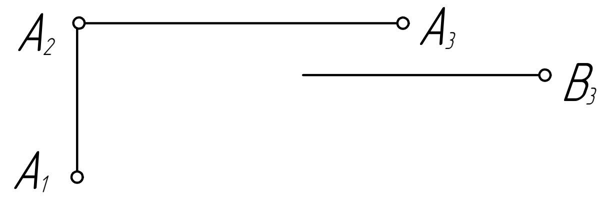
1.8. Построить проекции профильно конкурирующих точек **C** и **D,** если от фронтальной плоскости проекций они удалены на **40 мм**, от горизонтальной на **25 мм**. Точка **D** от профильной плоскости проекций отстоит на **20 мм**, **C** левее точки **D** на **15 мм**. Записать их координаты.
То же условие задачи, выполненное с помощью символов.
Готовьтесь к алгоритмическим записям решения задач!
$/C\Pi_2/=/D\Pi_2/=40$ мм; $/C\Pi_1/=/D\Pi_1/=25$ мм; $/D\Pi_3/=20$ мм; $/X_C - X_D|= 15$ мм

1.9. Точка **M** принадлежит оси **OZ** и отстоит от горизонтальной плоскости проекций на **30 мм**. Построить точку **E,** фронтально конкурирующую с ней и отстоящую от фронтальной плоскости проекций на **40 мм** дальше по сравнению с **M.** Где находится точка **E**?

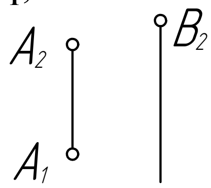
Внимание! *При решении всех задач строим три проекции заданных точек, предварительно записав их координаты!*

З а д а ч и д л я л и д е р о в

1Л Достроить $\mathbf{B_2}$ и $\mathbf{B_1}$, если разность расстояний точек **А** и **В** от $\mathbf{П_3}$ равна разности расстояний этих точек от $\mathbf{П_2}$.

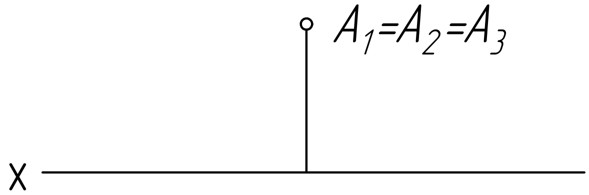


2Л Построить ось **ОХ** и $\mathbf{B_1}$, если обе точки равноудалены от $\mathbf{П_2}$ и $\mathbf{П_1}$.

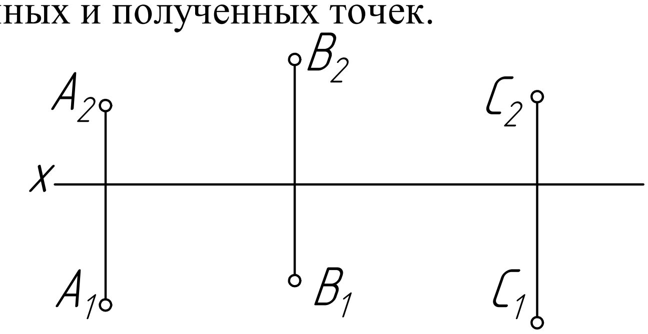


Задачки для самых крутых!

1К Монж тремя взаимно перпендикулярными плоскостями разделил пространство на 8 октантов.
В каком октанте и с какими координатами должна быть точка, если все её проекции совпадают?



2К **Построить точки, симметричные заданным: А′** симметричную **А** относительно оси **ОХ**, **В′** симметричную **В** относительно $\mathbf{П_1}$, **С′** симметричную **С** относительно $\mathbf{П_2}$. Запишите координаты заданных и полученных точек.



§ 2. Прямые общего и частных положений

Прямая общего положения (о. п.) не параллельна ни одной из плоскостей проекций.

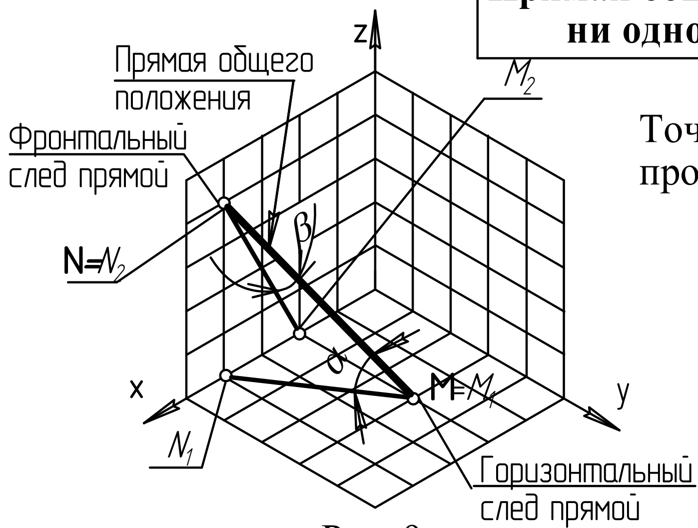
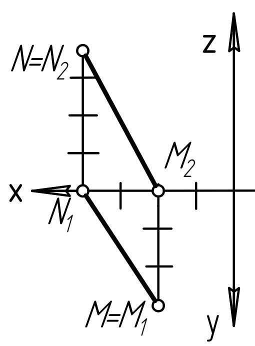


Рис. 9

Точка пересечения прямой с плоскостью проекций называется следом прямой.

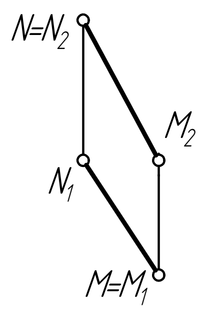
$\alpha \rightarrow$ угол наклона прямой к Π_1;
$\beta \rightarrow$ угол наклона прямой к Π_2;
$\gamma \rightarrow$ угол наклона прямой к Π_3.



Характерный признак чертежа (х. п.) прямой о. п. – ни одна из проекций не параллельна ни одной из осей.

Рис. 10

Осей нет
(чертеж безосный)



Х. п. чертежа прямой о. п. – **<u>ни одна из проекций не перпендикулярна и не параллельна линиям связи.</u>**

Рис. 11

Ни на одной из плоскостей проекций нет натуральной длины отрезка о. п., нет натуральных углов наклона его к плоскостям проекций.

Правило прямоугольного треугольника

позволяет определять искомые натуральные величины

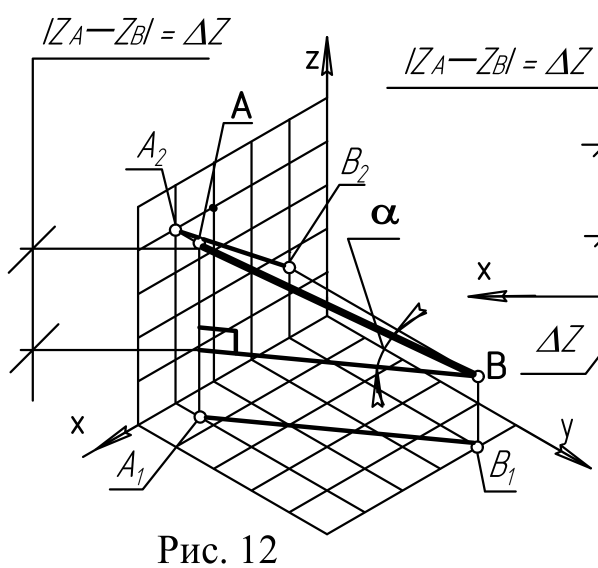


Рис. 12

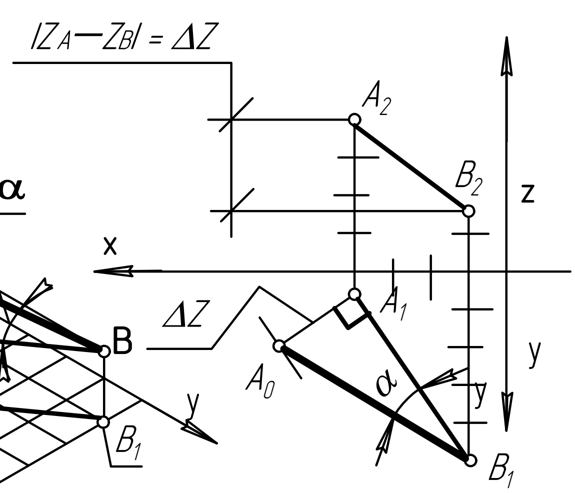


Рис. 13

Безосный чертёж

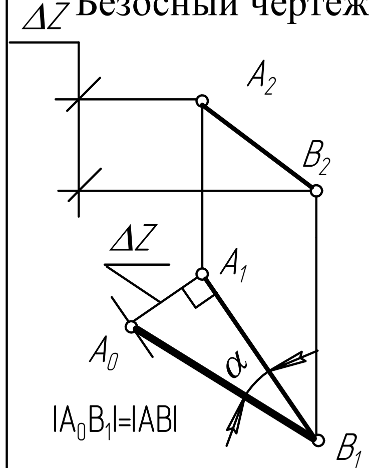


Рис. 14

*Отрезок прямой общего положения с каждой из своих проекций образует прямоугольный треугольник, который мы легко можем изобразить на плоскости. На $\boldsymbol{\Pi_2}$ находим /**AB**/ и $\angle\boldsymbol{\beta}$, на $\boldsymbol{\Pi_1}$ – /**AB**/ и $\angle\boldsymbol{\alpha}$ (рис. 14).*

Прямые частных положений

Прямые уровня: h|| Π_1→горизонталь,
f|| Π_2→фронталь,
p|| Π_3→профильная.

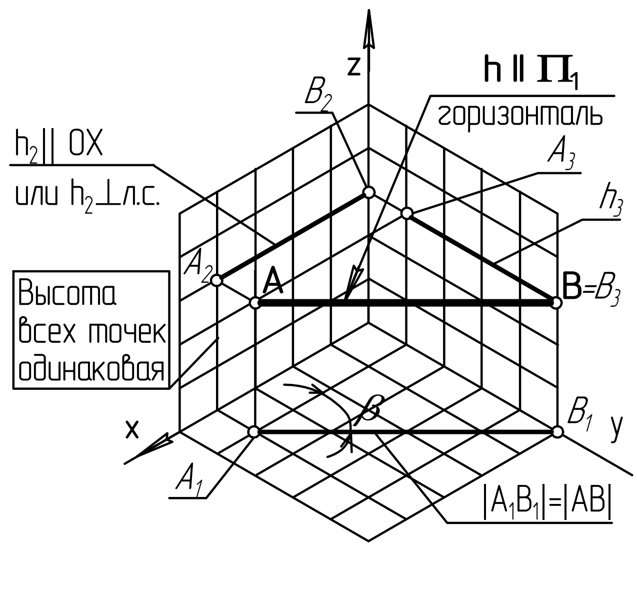


Рис. 15

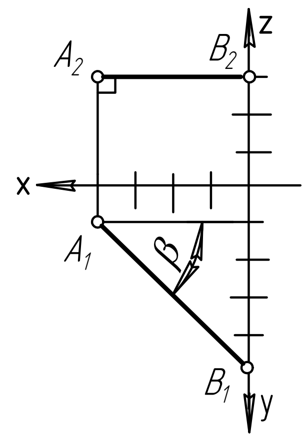


Рис. 16

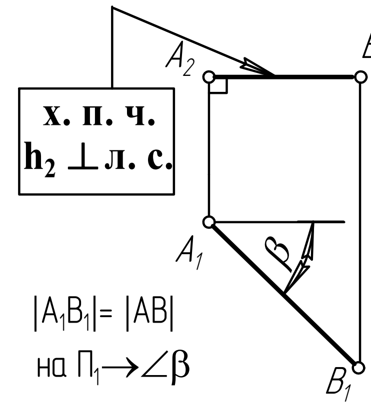


Рис. 17

Прямыми уровня называют прямые, параллельные одной из плоскостей проекций.

Следовательно, на чертеже характерным признаком будет проекция, показывающая одинаковое расстояние от всех точек прямой до той плоскости, которой прямая параллельна. У горизонтали ***высота (z)*** *всех точек одинакова, у фронтали –* ***глубина (y),*** *у профильной прямой –* ***широта (x).*** *На чертеже $h_2 \perp$л. с.; $f_1 \perp$л. с.; p_2 и p_1 //л. с. или p_2 и $p_1 \perp$ ox.*

Проецирующие прямые
(двоякопараллельные)

MN ⊥ Π_1→горизонтально проецирующая;
EF ⊥ Π_2→ фронтально проецирующая;
AB ⊥ Π_3→ профильно проецирующая.

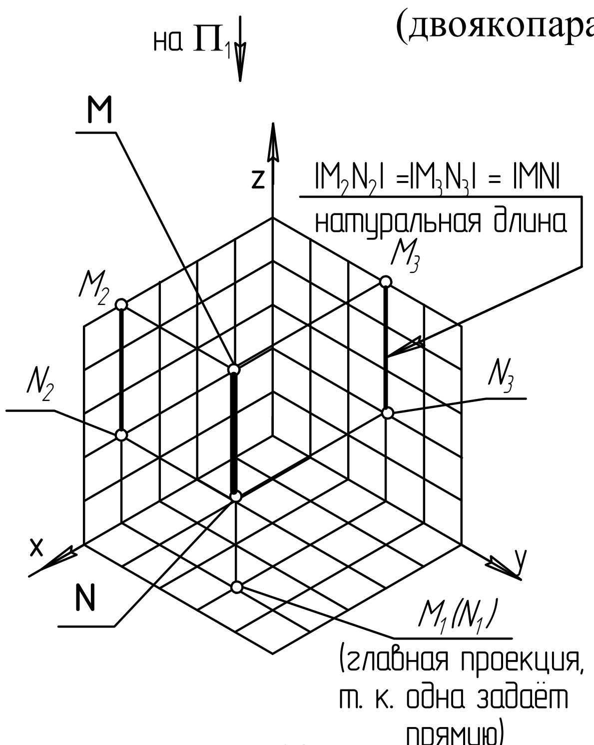


Рис. 18

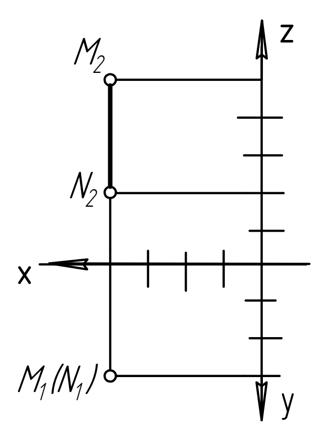


Рис. 19

(безосный чертёж)

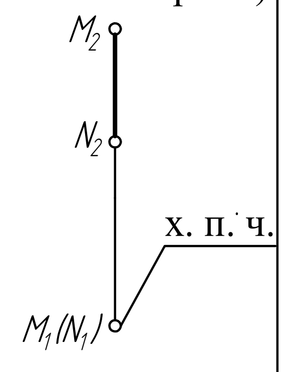


Рис. 20

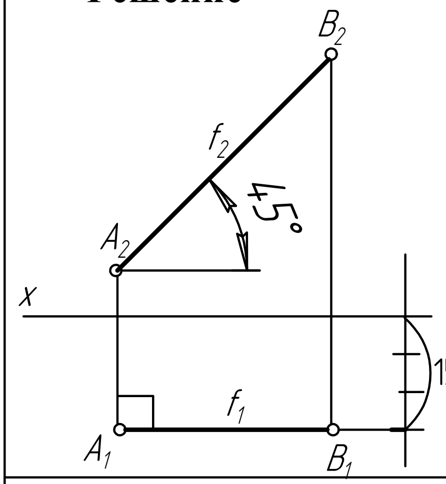
Характерным признаком чертежа проецирующей прямой является её ***главная проекция в виде точки*** *(проекция на единицу меньшего измерения, чем сама фигура, называется главной, обладает собирательным свойством).*

Примеры решения задач по теме «Чертежи прямых»

Пример 2.1

Построить проекции отрезка **AB** фронтали, отстоящего от Π_2 на расстоянии **15 мм**, пересекающего Π_1 слева от вас и наклонённого к ней под углом **45°**, длина отрезка прямой равна **40 мм**, точка **A** задана на фронтальной плоскости.

Решение



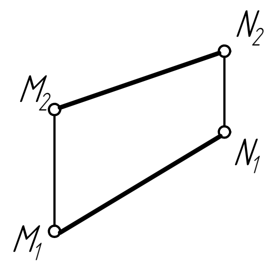
Алгоритм решения

1) $Y_A = Y_B = 15$ мм
$f_1(A_1B_1) \parallel ox$
или $f_1 \perp$ л.с.;
2) $A_2 \subset f_2$;
$\widehat{(AB)\,\Pi_1} = 45°$;
3) $|A_2B_2| = 40$ мм

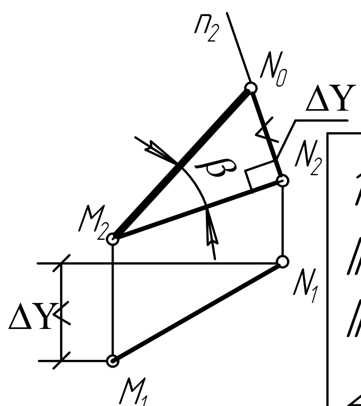
Все точки фронтали отстоят от $\boldsymbol{\Pi_2}$ *на* ***15*** *мм, отложив от оси* ***ox*** *по линии связи из* $\boldsymbol{A_2}$ *данный отрезок (****15 мм****), получим* $\boldsymbol{A_1}$*, проводим* $\boldsymbol{f_1 \perp}$ ***л. с.*** *На фронтальную плоскость сам отрезок и его угол наклона к* $\boldsymbol{\Pi_1 \rightarrow \alpha}$ *проецируются без искажения.*

Пример 2.2

Определить **/MN/** и $\angle\beta \rightarrow \widehat{(MN)\,\Pi_2}$ (истинную длину отрезка и угол наклона его к фронтальной плоскости проекций).



Решение



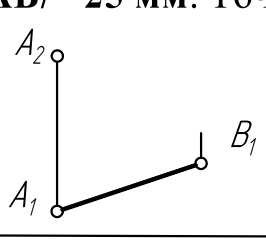
Алгоритм решения

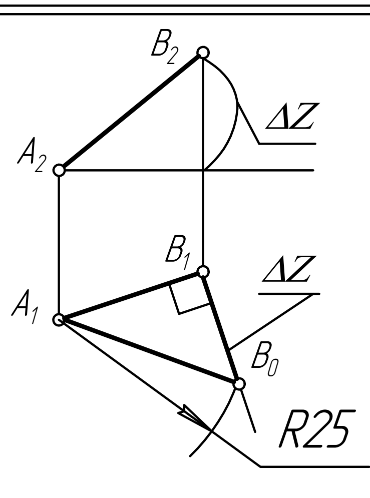
1) $N_2 \subset n_2 \perp (M_2N_2)$
$|N_2N_0| = |Y_M - Y_N| = \Delta Y$
$|M_2N_0| = |MN| = 26$ мм
$\angle N_0M_2N_2 = \angle\beta = 28°$

Для определения истинной длины отрезка можно строить прямоугольный треугольник на любой из проекций, а для определения угла наклона к фронтальной плоскости проекций его следует строить только на $\boldsymbol{M_2N_2}$*. Из любого конца фронтальной проекции отрезка восстанавливаем перпендикуляр к нему. Размер катета равен разности ординат концов отрезка* $\boldsymbol{/Y_M - Y_N/ = \Delta Y}$.

Пример 2.3

Достроить фронтальную проекцию точки **B**, если истинная длина **/AB/= 25 мм**. Точка **B** выше точки **A.**

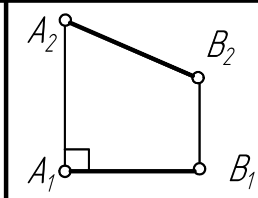
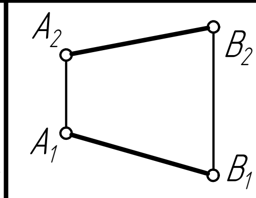
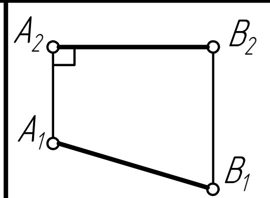
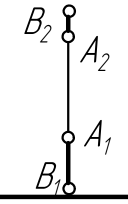
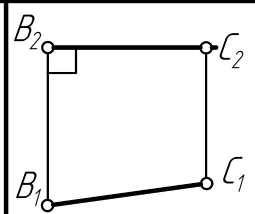
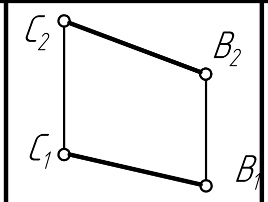
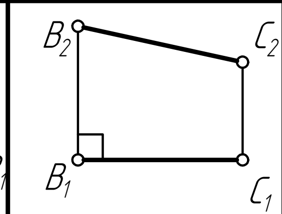
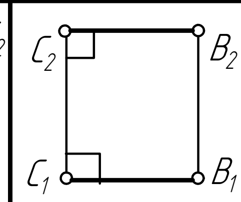
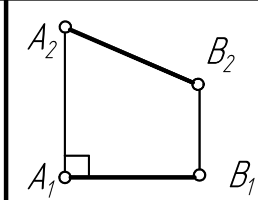
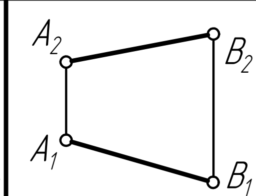
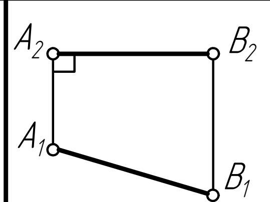
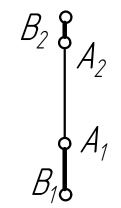




Решение

1. *Из точки* $\boldsymbol{B_1}$ *восстанавливаем перпендикуляр к* $\boldsymbol{(A_1B_1)}$.
2. *Из т.* $\boldsymbol{A_1}$ *делаем на нём засечку* ***R25****, получаем* $\boldsymbol{B_0}$.
3. $|Z_B - Z_A| = |B_1B_0|$.

Проверьте себя!
Обучающий тест 2 по теме **«Чертежи прямых»**

№ п/п	Вопрос	1	2	3	4
1	*В каком случае **(AB)** параллельна Π_1?*				
2	*На какую плоскость прямая **b** $\perp \Pi_2$ проецируется в виде точки?*	на Π_1	на Π_2	на Π_3	на Π_1 и на Π_3
3	*При каком положении прямой **m** и на какой плоскости виден её угол наклона к Π_1?*	$m \parallel \Pi_1$, на Π_1	$m \parallel \Pi_2$, на Π_2	$m \parallel \Pi_1$, на Π_2	$m \parallel \Pi_3$, на Π_1
4	*Где изображена профильно проецирующая прямая?*				
5	*Как расположена фронталь?*	$\parallel \Pi_1$	$\parallel \Pi_2$	$\parallel \Pi_3$	$\perp \Pi_2$
6	*На каком чертеже прямая **(AB)** общего положения?*				
7	*На какой проекции отрезка общего положения строится треугольник для определения его угла наклона к Π_2?*	*любой*	*профильной*	*горизонтальной*	*фронтальной*
8	*Для определения истинной длины отрезка общего положения на какой проекции следует моделировать прямоугольный треугольник?*				
		на Π_1	на Π_2	на любой	на Π_3
9	*При построении прямоугольного треугольника на горизонтальной проекции отрезка чему равен второй катет и где он измеряется?*				
10	*При построении прямоугольного треугольника на фронтальной проекции отрезка чему равен второй катет и где он измеряется?*				
		ΔX на Π_2	ΔY на Π_1	ΔZ на Π_2	ΔZ на Π_1

Ответы: 2 3 3 2 4 2 2 4 2 2 3

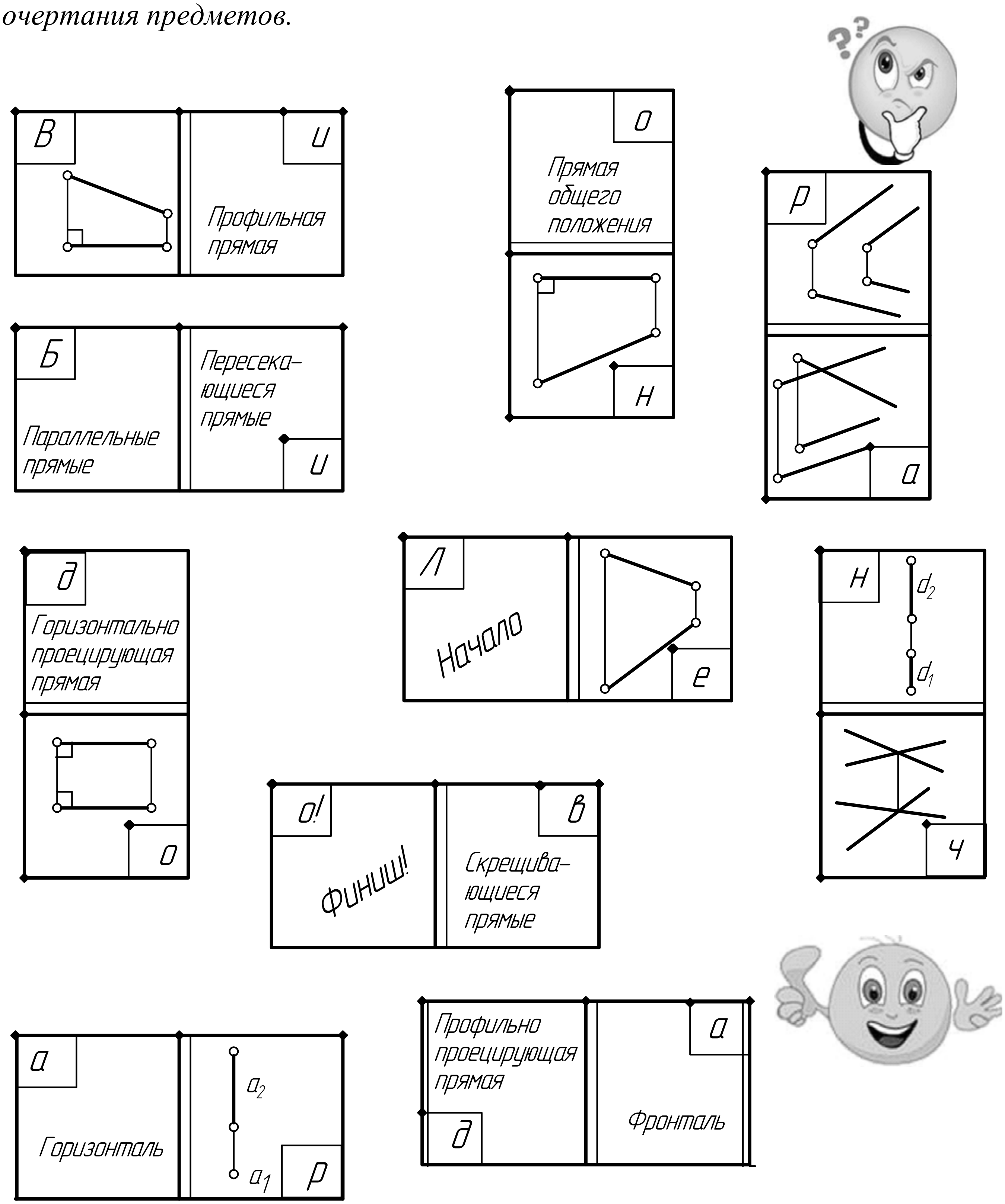
Всё понятно? Переходим к решению задач занятия 2.

Не огорчайтесь! Сыграем в домино или в крестики-нолики, и всё станет яснее ясного!

Тренировка 2.1 по теме «Чертежи прямых»

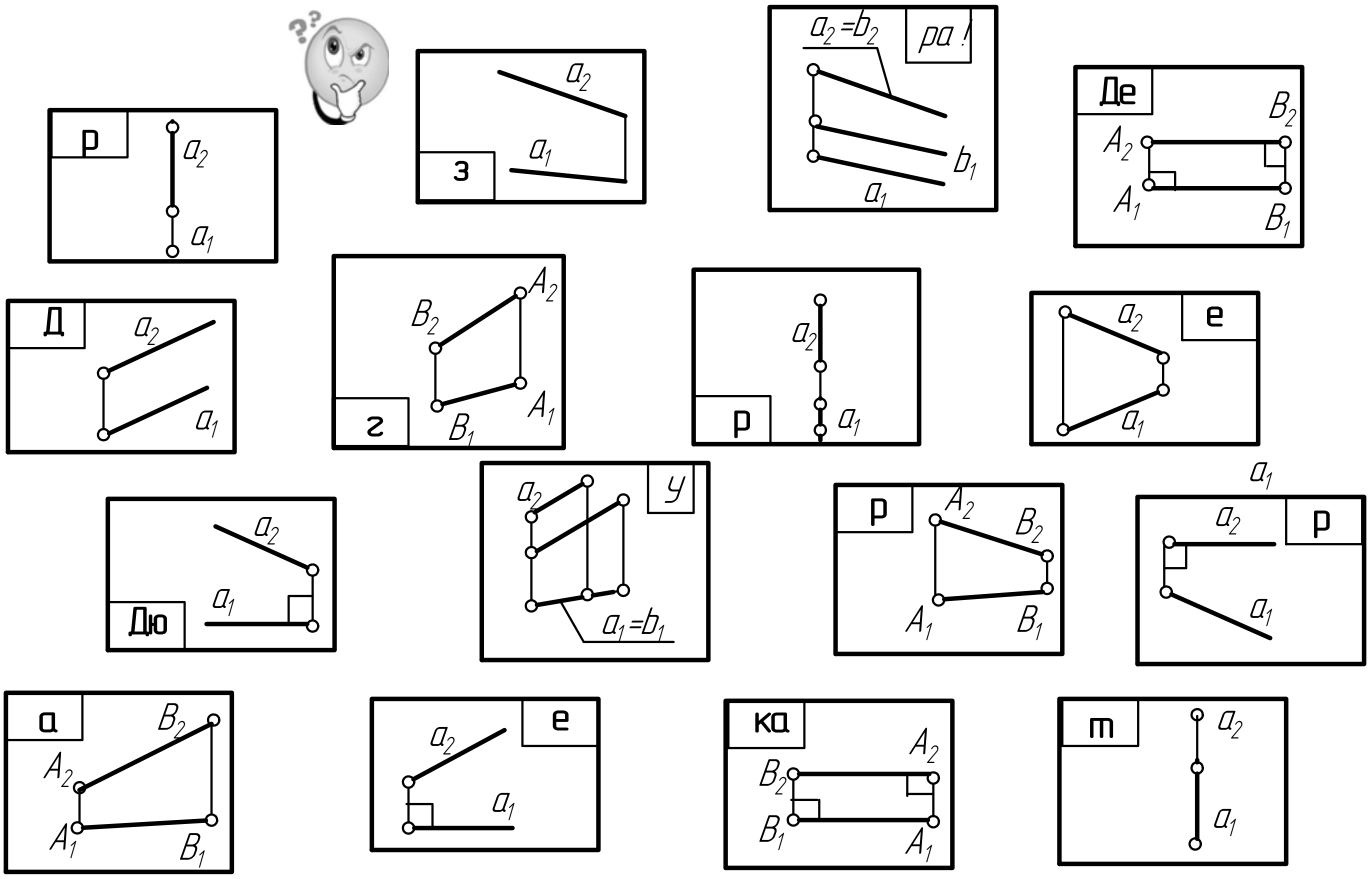
Игра в домино для одного игрока

Сложив правильно карточки домино, вы узнаете *имя великого учёного и художника, внёсшего огромный вклад в учение о перспективе. Именно он разделил её на линейную, воздушную, цветовую и перспективу чёткости очертания предметов.*



Тренировка 2.2 по теме «Чертежи прямых»

Перед вами в хаотическом порядке расположены чертежи прямых.



Расположите по диагонали снизу вверх чертежи прямых уровня в следующей последовательности: 1) фронталь, пересекающая Π_1 справа от вас; 2) профильная прямая; 3) фронталь, пересекающая Π_1 слева от вас; 4) горизонталь.
Решив правильно, *вы узнаете фамилию живописца и гравёра, предложившего построение перспективы по двум проекциям.*

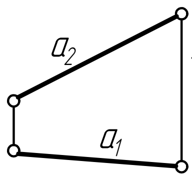
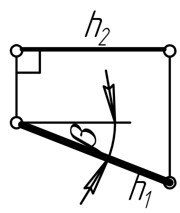
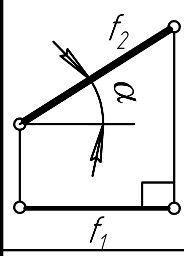
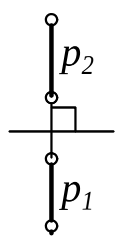
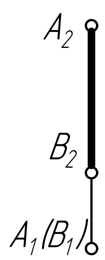
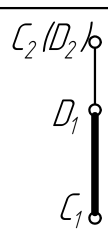
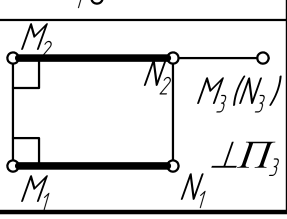
По диагонали сверху вниз разместите чертежи всех проецирующих прямых:
5) профильно проецирующая прямая, у которой точка **A** на Π_3 видимая;
6) профильно проецирующая прямая, у которой точка **A** на Π_3 не видна;
7) горизонтально проецирующая прямая; 8) фронтально проецирующая прямая.
Расположив правильно, *вы познакомитесь с учёным, заложившим основы аналитической геометрии.*

В оставшихся клетках в указанной последовательности расположите:
9) прямую, равнонаклонённую к Π_2 и к Π_1 и пересекающую Π_1 слева от вас;
10) прямую, равнонаклонённую к Π_2 и к Π_1 и пересекающую Π_1 справа от вас;
11) прямую общего положения **a**, пересекающую Π_1 справа от вас;
12) прямую общего положения, у которой точка **A** ниже и дальше от Π_2, чем **B**;
13) прямую общего положения, у которой точка **A** выше и ближе к набл., чем **B;**
14) пр. общего положения, где точка **A** выше и дальше от наблюдателя, чем **B.**
Расположив правильно, прочтёте *фамилию архитектора, математика, положившего начало аксонометрии;*
15) горизонтально конкурирующие прямые;
16) фронтально конкурирующие прямые.
Мы Вас поздравляем!

5	9	10	4
14	6	3	11
13	2	7	12
1	15	16	8

Опорный конспект по теме «Чертежи прямых»

Канва 2

№п/п	Наименование	Чертёж	Характерный признак чертежа (х. п. ч.)	Дополнительная информация о чертеже	Координаты любой точки
1	Общего положения (о. п.)	 ∦ П1 ∦ П2 ∦ П3	Любая проекция не параллельна и не перпендикулярна линиям связи (осям)	Нет натуральной длины отрезка, нет натуральных углов наклона его к плоскостям проекций	x ≠ const y ≠ const z ≠ const
2	Уровня: Горизонталь h	 II П1	Фронтальная проекция перпендикулярна линии связи (II оси OX) $h_2 \perp$ л. с.	На **П1** отрезок проецируется без искажения, на $П_1$ натуральный угол наклона к $П_2$	z = const
3	Уровня: Фронталь f	 II П2	Горизонтальная проекция перпендикулярна линии связи (II оси OX), $f_1 \perp$ л. с.	На **П2** отрезок проецируется без искажения, на **П2** натуральный угол наклона к **П1**	y = const
4	Уровня: Профильная p	 II П3	Обе проекции совпадают с линией связи (p_2 и $p_1 \perp$ OX)	На **П3** отрезок и углы его наклона к **П1** и к **П2** проецируются без искажения	x = const
5	Проецирующие: Горизонтально проецирующая	 ⊥ П1	Горизонтальная проекция в виде точки (главная, поскольку одна задаёт прямую, обладает собирательным свойством)	На **П2** и **П3** отрезок проецируется без искажения	x = const y = const
6	Проецирующие: Фронтально проецирующая	 ⊥ П2	Фронтальная проекция – точка	На **П1** и **П3** отрезок проецируется без искажения	x = const z = const
7	Проецирующие: Профильно проецирующая		Профильная проекция в виде точки	На **П2** и **П1** отрезок проецируется без искажения	z = const y = const

Вопросы для самопроверки

1. На какие группы делятся прямые в зависимости от расположения по отношению к плоскостям проекций?

2. Каковы характерные признаки чертежей:

   а) прямой общего положения;
   б) фронтали;
   в) горизонтали;
   г) профильной прямой;
   д) фронтально проецирующей прямой;
   е) горизонтально проецирующей прямой;
   ж) профильно проецирующей прямой?

3. Какая проекция отрезка общего расположения используется для определения:
   а) натуральной длины отрезка;
   б) угла наклона его к $\mathbf{\Pi_1}$;
   в) угла наклона его к $\mathbf{\Pi_2}$?

В н и м а н и е ! *Итоговый тест* **2**

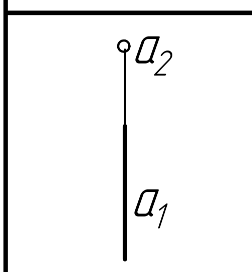
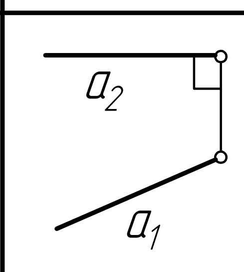
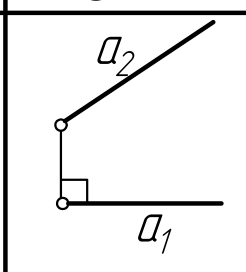
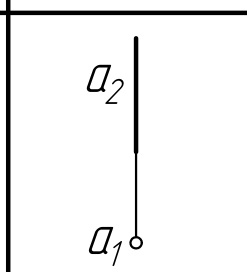
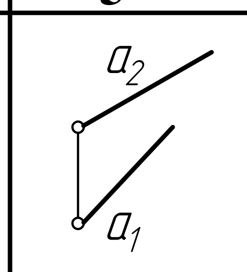
◎ 1. Укажите чертеж фронтали.

⊗ 2. Укажите чертеж фронтально проецирующей прямой.

○ 3. Укажите чертеж прямой общего положения.

⊖ 4. В каком случае на чертеже определяется угол $\angle\beta \rightarrow \widehat{\mathbf{a}\ \mathbf{\Pi_2}}$?

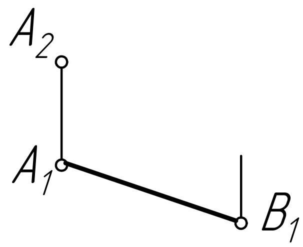
⦶ 5. Укажите чертеж горизонтально проецирующей прямой.

1	2	3	4	5
				
⊗	⊖	◎	⦶	○

З А Н Я Т И Е   2

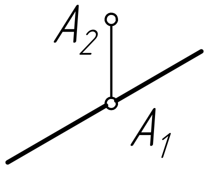
Проекции прямой.
Правило прямоугольного треугольника

2.1



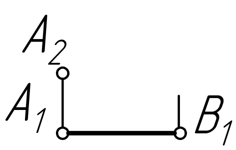
Построить фронтальную проекцию отрезка **AB** прямой, если известно, что точка **B** выше точки **A** на **15 мм**.

2.2



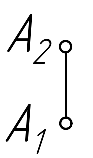
Построить проекции отрезка **|AB|** = **30 мм** горизонтальной прямой, если дано направление горизонтальной проекции её, точка **B** ближе к наблюдателю, чем точка **A**.

2.3



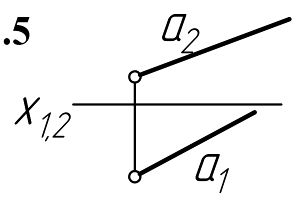
Построить фронтальную проекцию отрезка **[AB]** фронтали , если $\angle\alpha \to \widehat{(AB)\,\Pi_1}=30°$, а точка **B** выше точки **A.**

2.4



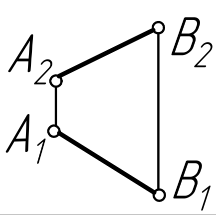
Построить проекции отрезка **|AB| =15 мм** фронтально проецирующей прямой так, чтобы точка **B** была видимой на главной проекции.

2.5



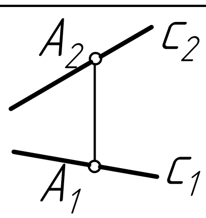
На прямой **a** найти точку **N**, принадлежащую **Π_2,** и точку **M**, принадлежащую **Π_1.**

2.6



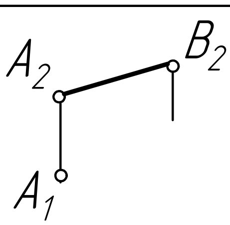
Определить длину отрезка **AB** и угол наклона его к **Π_2**.

2.7



Отложить от точки **A** на прямой **c** общего положения отрезок **|AB|= 30 мм** так , чтобы точка **B** находилась дальше от фронтальной плоскости проекций, чем точка **A**.

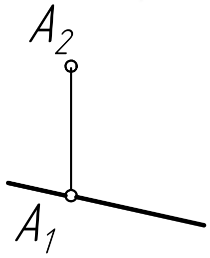
2.8



Найти **[AB]** , если **$\angle\beta$=45°** и точка **B** ближе к наблюдателю по сравнению с точкой **A.**

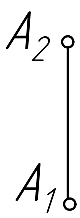
Задачи для лидеров

3Л



Построить проекции отрезка **AB=35** мм, если известно, что угол наклона его к горизонтальной плоскости проекций **α=30°** и точка **B** расположена выше, чем точка **A.**

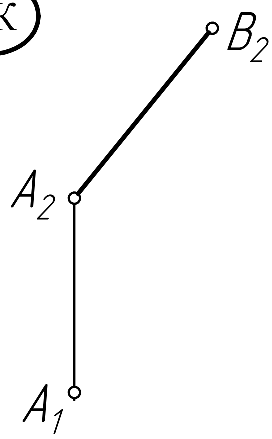
4Л



Построить проекции отрезка **/AB/=30** мм общего положения, если его ∠**α=30°**, а ∠**β=45°.** Сколько решений?

Задачки для самых крутых!

3К

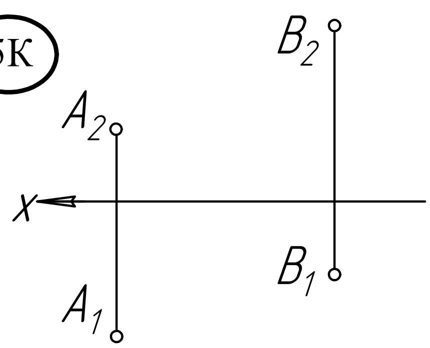


Построить горизонтальную проекцию отрезка **AB**, если его угол наклона к плоскости Π_1 составляет **30°** и точка **B** ближе к наблюдателю по сравнению с **A.**

4К

Построить проекции прямой, равнонаклонённой ко всем плоскостям проекций. Сколько решений?

5К



Найти кратчайший путь из точки **A** в точку **B** с заходом на плоскость Π_1**.**

§ 3. Взаимная принадлежность точки и прямой. Взаимное положение прямых

Точка **C** принадлежит прямой **(AB)**;

$$\mathbf{C \subset (AB) \Rightarrow C_2 \subset (A_2B_2) \wedge C_1 \subset (A_1B_1)}$$

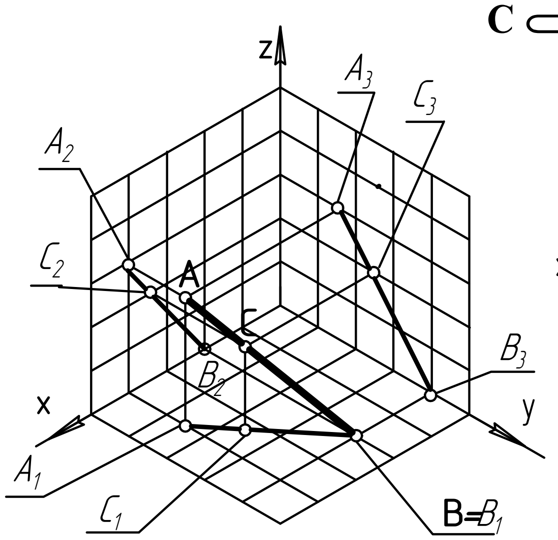


Рис. 21

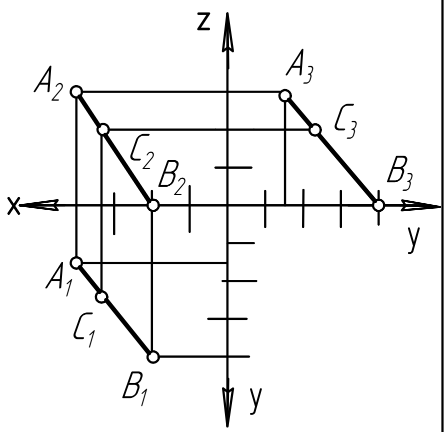


Рис. 22

Чертёж безосный

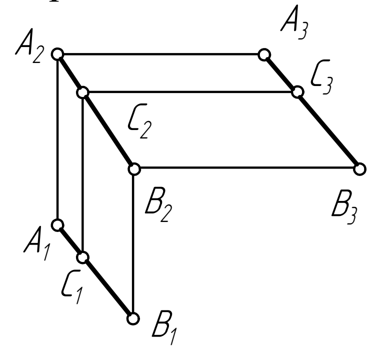


Рис. 23

Если точка принадлежит линии, то проекции точки принадлежат соответствующим проекциям этой линии.

Точка **D** не принадлежит прямой **(AB)**;

$D \not\subset (AB) \Rightarrow D_2 \not\subset (A_2B_2)$; D– над прямой.

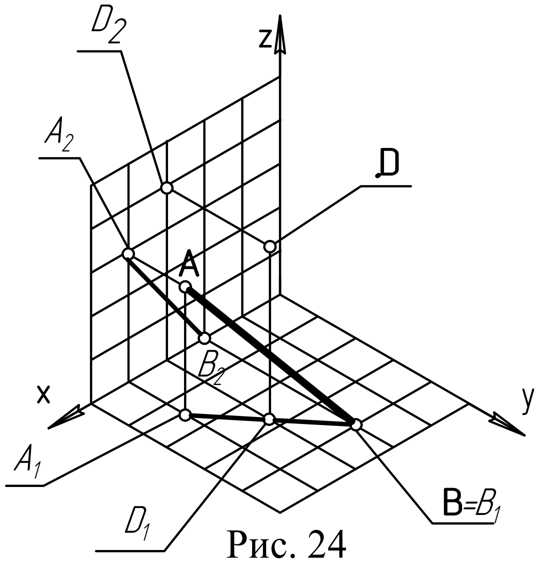


Рис. 24

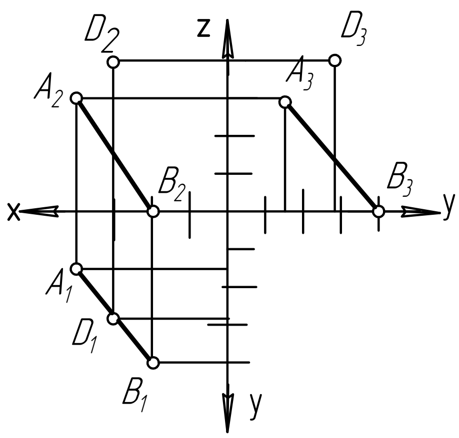


Рис. 25

Чертёж безосный

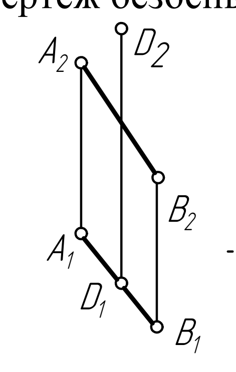


Рис. 26

$E \not\subset (AB)$; E – перед прямой.

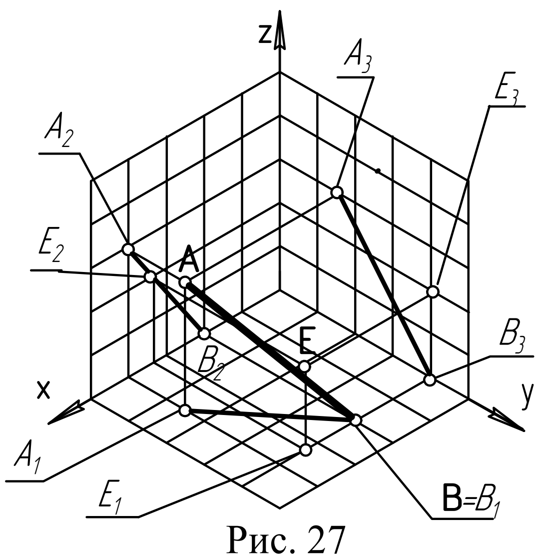


Рис. 27

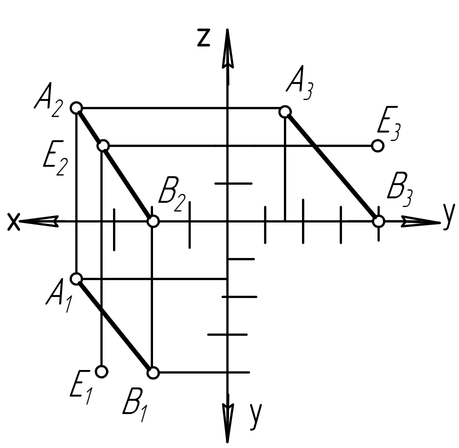


Рис. 28

Чертёж безосный

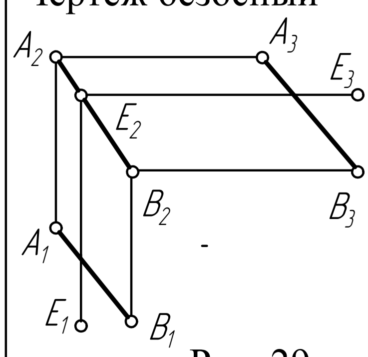


Рис. 29

Параллельные прямые

$a \parallel b \Rightarrow a_1 \parallel b_1 \wedge a_2 \parallel b_2$

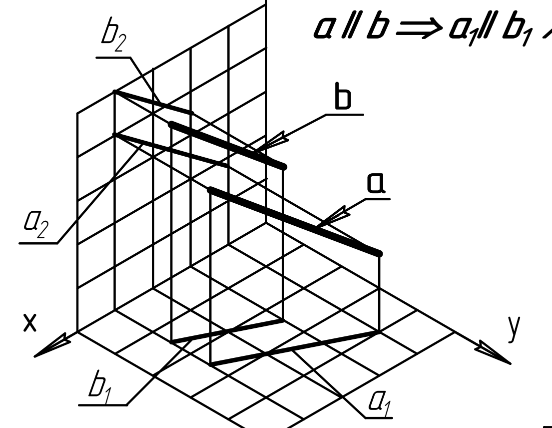


Рис. 30

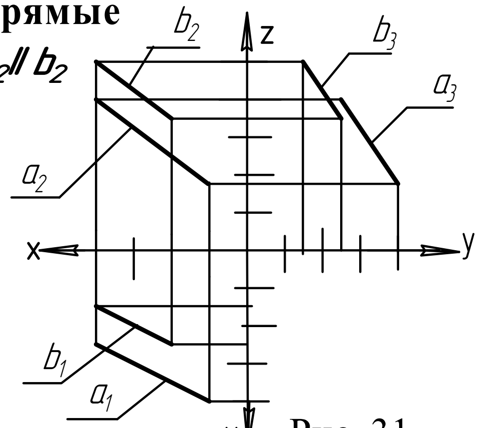


Рис. 31

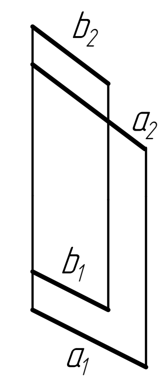


Рис. 32

Одноимённые проекции параллельных прямых всегда параллельны.

Пересекающиеся прямые

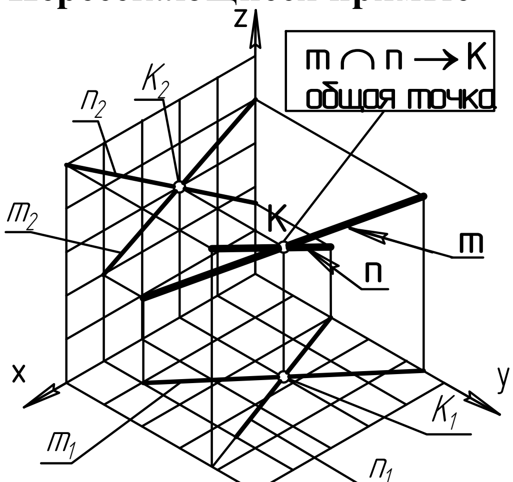


Рис. 33

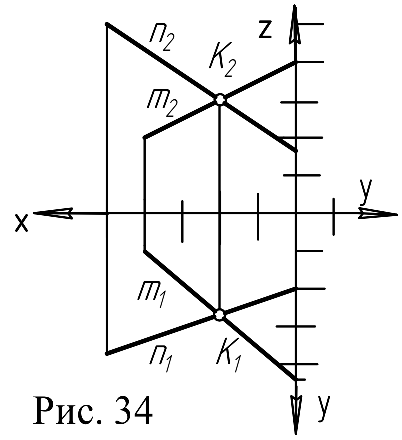


Рис. 34

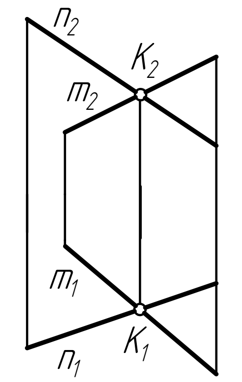


Рис. 35

Проекции точек пересечения проекций всегда на одной линии связи.

Скрещивающиеся прямые

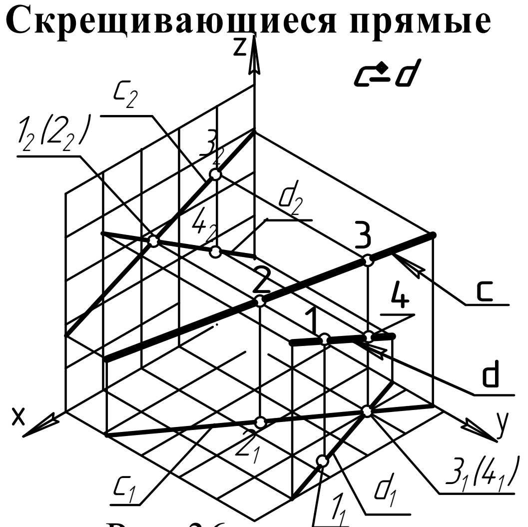


Рис. 36

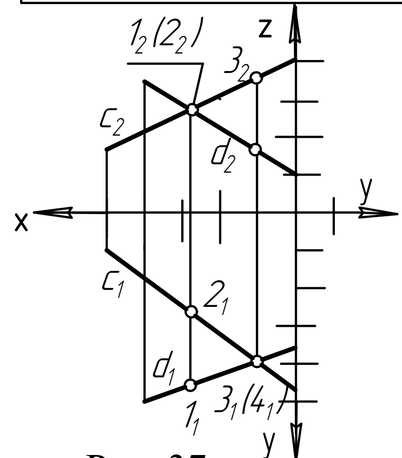


Рис. 37

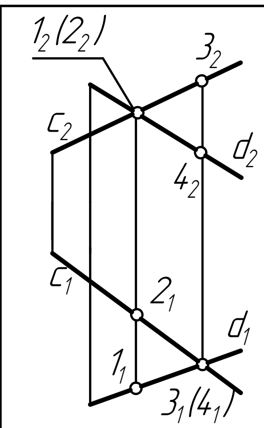


Рис. 38

Проекции точек пересечения проекций никогда не находятся на одной линии связи.

Перпендикулярные прямые

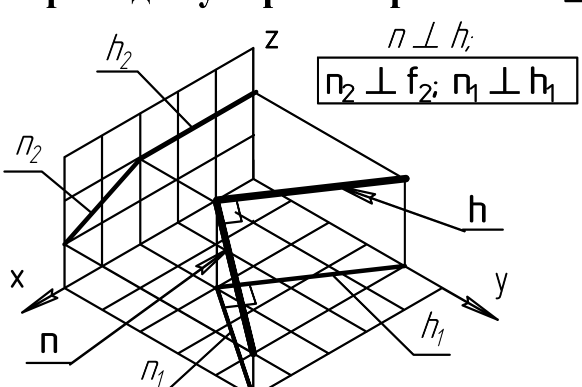


Рис. 39

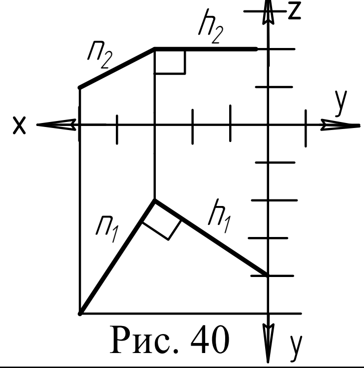


Рис. 40

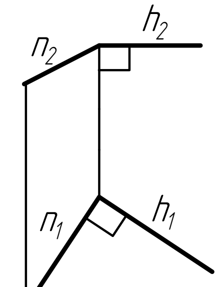
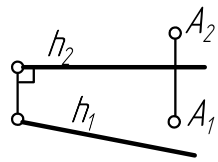


Рис. 41

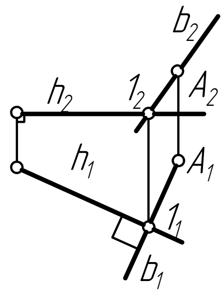
Одна из сторон – обязательно прямая уровня.

Примеры решения задач по теме
«Взаимная принадлежность точки и прямой. Взаимное положение прямых»

Пример 3.1



Через точку **A** провести прямую **b**, перпендикулярную горизонтали и пересекающуюся с ней.



Алгоритм решения

1) $h \parallel \Pi_1 \Rightarrow$

$A_1 \subset b_1 \perp h_1$;

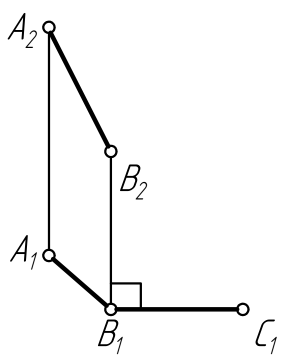
2) $b_1 \cap h_1 = 1_1$;

3) $b_2 (A_2 1_2)$.

Решение

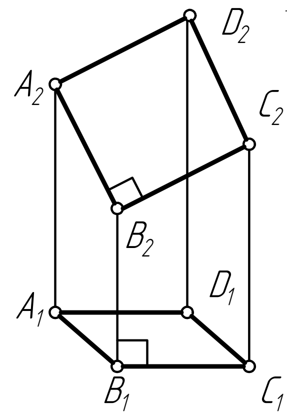
Любая прямая, перпендикулярная горизонтали, на Π_1 *спроецируется к ней под прямым углом. Построение начинаем с горизонтальной проекции. Получаем горизонтальную проекцию точки пересечения прямых* ***1(1₁)***. *Достраиваем проекцию точки* ***1(1₂)***.

Пример 3.2



Построить проекции прямоугольника **ABCD** по его стороне **AB** и проекции $\mathbf{B_1C_1}$ стороны **BC**.

Решение

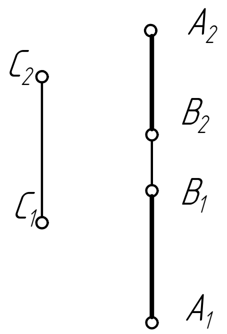


1) $BC \parallel \Pi_2 \Rightarrow$

$A_2B_2 \perp B_2C_2$;

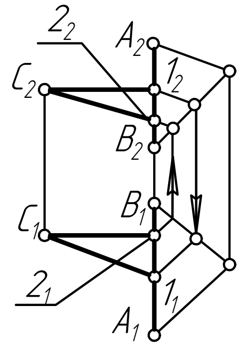
2) $A_2D_2 \parallel B_2C_2$

Пример 3.3

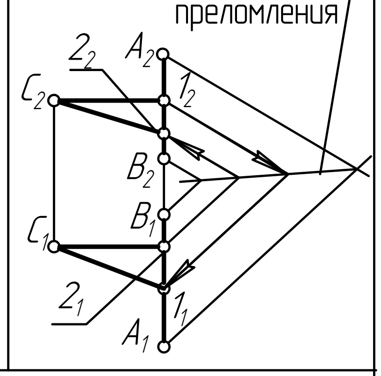


Через точку **C** провести горизонталь и фронталь, пересекающие прямую **AB II** Π_3.

I способ



II



Решение

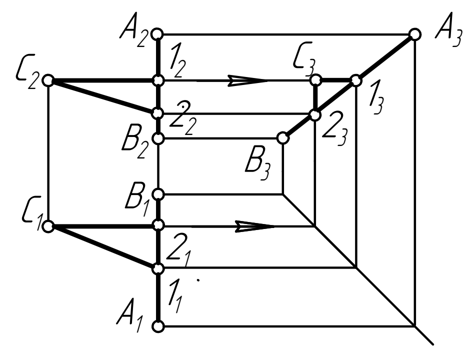
Задача решена тремя способами:

1) делением отрезка в заданном отношении;

2) через прямую преломления (см. построение);

3) через профильную проекцию.

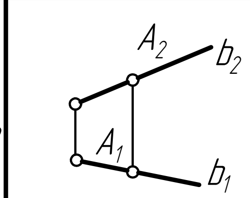
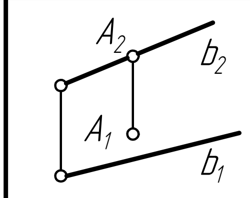
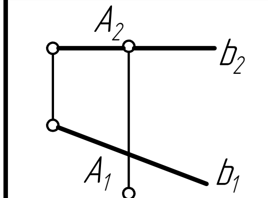
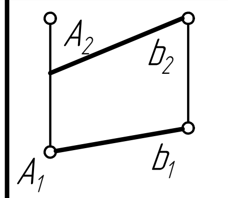
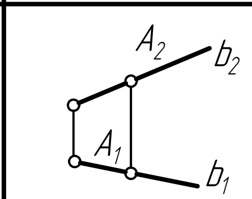
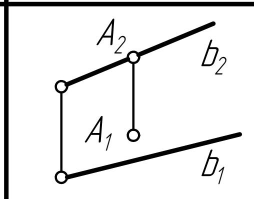
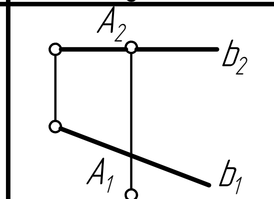
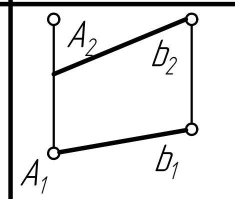
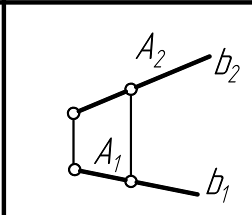
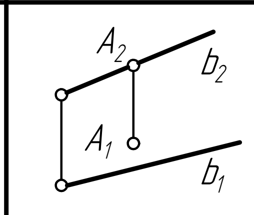
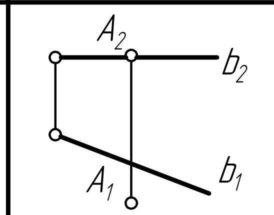
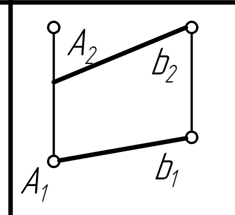
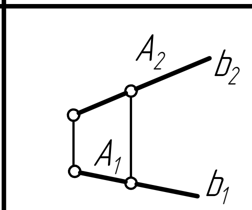
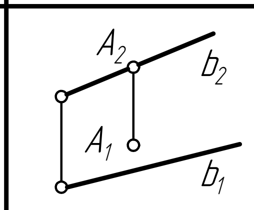
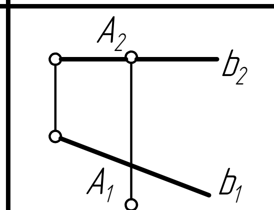
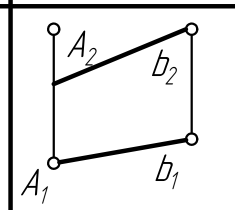
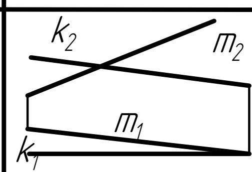
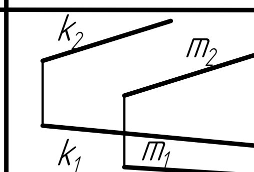
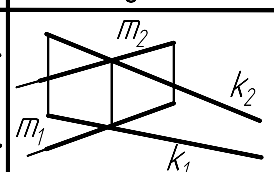
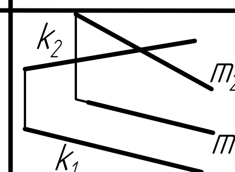
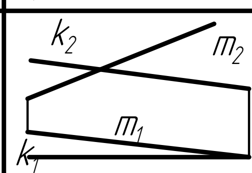
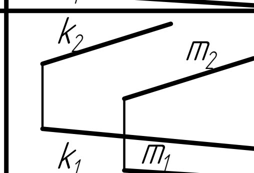
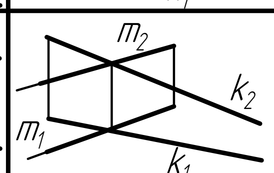
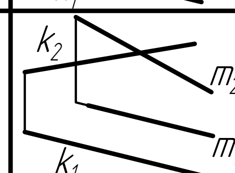
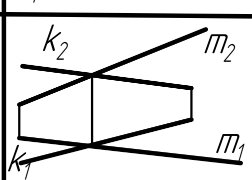
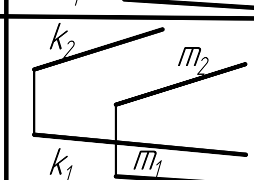
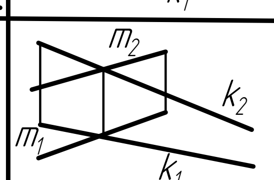
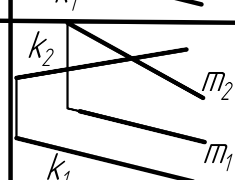
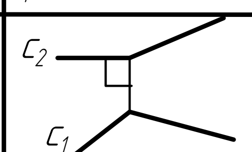
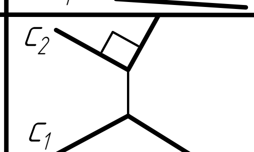
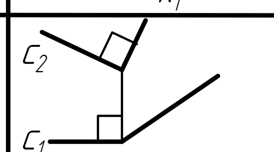
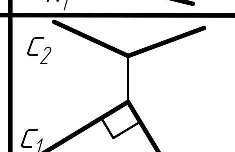
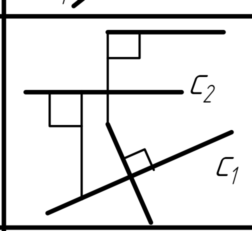
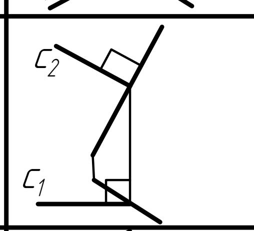
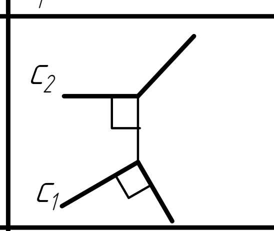
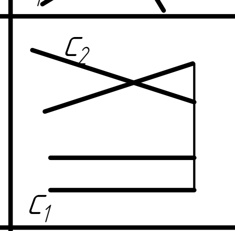
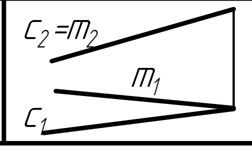
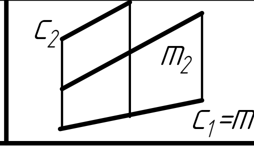
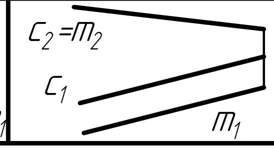
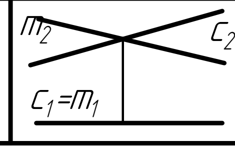
$h_2 \perp A_2B_2$; $f_1 \perp A_1B_1$



III

Проверьте себя!

Обучающий тест 3 по теме **«Взаимная принадлежность точки и прямой, взаимное положение прямых»**

№ п/п	Вопрос	1	2	3	4
1	В каком случае точка **A** не принадлежит **b** и расположена за ней?				
2	Где точка **A** принадлежит **b?**				
3	Где точка **A** не принадлежит **b** и расположена перед ней?				
4	Где точка **A** не принадлежит **b** и расположена над ней?				
5	На каком чертеже прямые пересекаются?				
6	В каком случае прямые параллельны?				
7	Укажите чертёж скрещивающихся прямых				
8	Где пересекающиеся прямые взаимно перпендикулярны?				
9	Укажите чертёж скрещивающихся, взаимно перпендикулярных прямых				
10	Где прямые горизонтально конкурируют?				

Ответы: 2 1 3 4 2 3 4 3 1 2

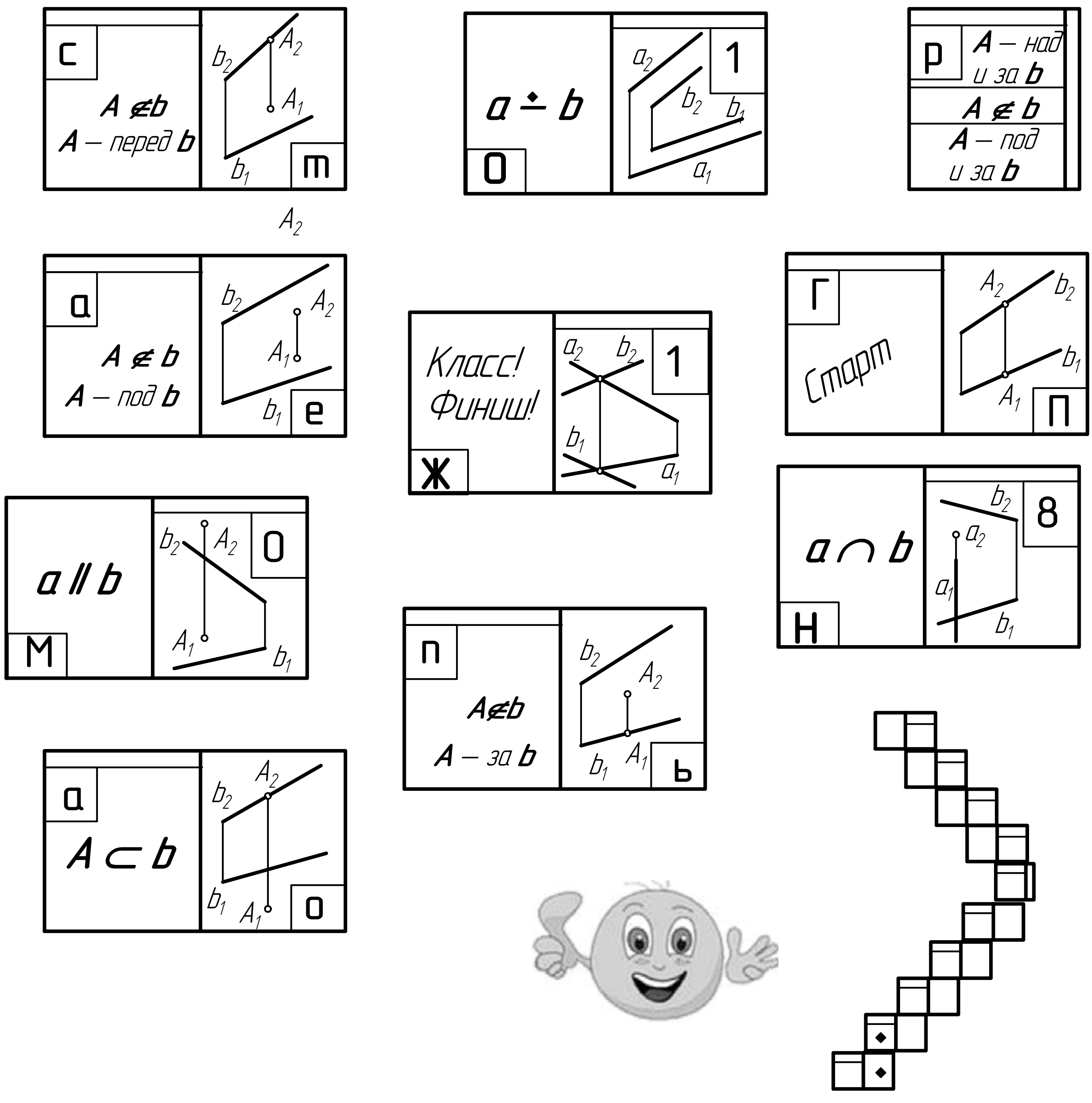
Всё хорошо? Переходим к решению задач занятия 3.

Тренировка 3 по теме «Взаимное положение точки и прямой. Взаимное положение прямых»

Из расположенных вперемешку карточек складываем **лестницу-чудесницу.**

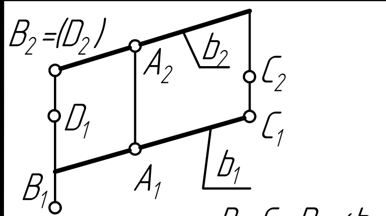
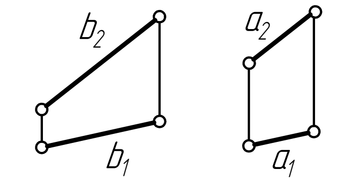
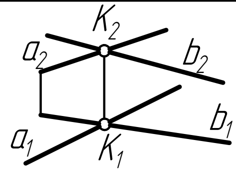
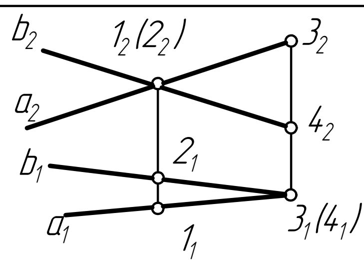
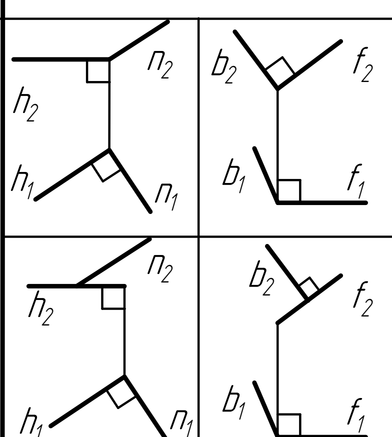
Сложив правильно, по диагонали снизу вверх вы прочтёте *имя создателя начертательной геометрии и фамилию его ученика, первого лектора начертательной геометрии в России.*

Поднимаясь по лестнице вверх, узнаете *фамилию этого выдающегося математика, геометра, прекрасного графика и инженера, написавшего классический труд* ***"Geometric descriptive",*** *а также дату начала чтения лекций по начертательной геометрии в России.*



Опорный конспект по теме «Взаимная принадлежность точки и прямой. Взаимное положение прямых»

<u>Канва 3</u>

№ п/п	Наименование	Графическое изображение и запись	Определение характерных признаков чертежа	
1	Взаимное положение прямой и точки	 $B \wedge C \wedge D \notin b$ $A \in b \Rightarrow A_2 \in b_2 \wedge A_1 \in b_1.$	Если точка принадлежит линии, то проекции этой точки принадлежат соответствующим проекциям этой линии. **A** – принадлежит прямой, **B** – перед прямой, **C** – под прямой, **D** – за прямой	
2	Параллельные прямые	 $a \parallel b \Rightarrow a_2 \parallel b_2 \wedge a_1 \parallel b_1$	Одноименные проекции параллельных прямых всегда параллельны	Задают плоскость
3	Пересекающиеся прямые	 $a \cap b = K$	Проекции точек пересечения проекций всегда находятся на одной линии связи	
4	Скрещивающиеся прямые	 $a \dot{-} b$	Проекции точек пересечения проекций никогда не находятся на одной линии связи	Не задают плоскость
5	Перпендикулярные прямые	 $n \perp h$ $b \perp f$	Для того чтобы прямой угол ортогонально спроецировался без искажения, необходимо и достаточно, чтобы одна из его сторон была параллельна плоскости проекций, а вторая не перпендикулярна к ней. *Одна сторона угла – обязательно прямая уровня*	Задают плоскость Не задают плоскость

Вопросы для самопроверки

1. Когда точка принадлежит прямой?

2. Сформулируйте характерный признак чертежа параллельных прямых.

3. Назовите характерный признак чертежа пересекающихся прямых.

4. В чем отличие чертежа пересекающихся прямых от чертежа скрещивающихся прямых?

5. При каком условии прямой угол проецируется без искажения?

6. Какие прямые не задают плоскость?

В н и м а н и е ! ***Итоговый тест* 3**

○ 1. В каком случае точка **A** не принадлежит прямой **b**?

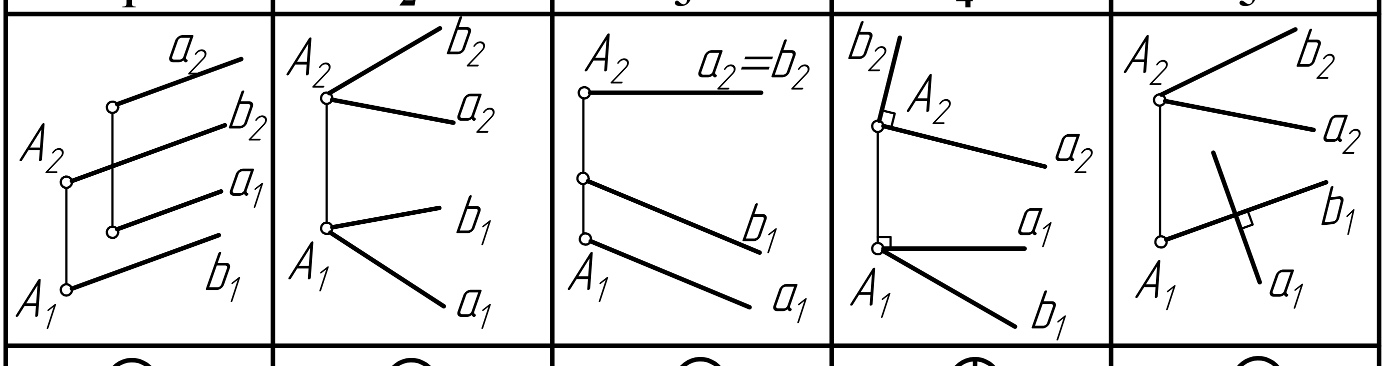
⊗ 2. В каком случае прямые **a** и **b** пересекаются, но не перпендикулярны между собой?

⊙ 3. Укажите чертеж скрещивающихся прямых.

⊖ 4. В каком случае **a || b** и **a** выше и ближе к Π_2 по сравнению с **b**?

⦶ 5. В каком случае **a⊥b?**

1	2	3	4	5

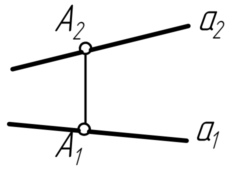


⊖	⊗	○	⦶	⊙

З А Н Я Т И Е   3

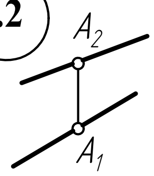
Взаимное положение прямых, взаимная принадлежность прямой и точки

3.1



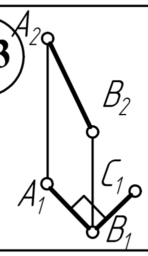
На горизонтально проецирующем луче, проходящем через точку **А**, взять точку **В** на **10 мм** выше точки **А** и через нее провести прямую, параллельную прямой **а**.

3.2



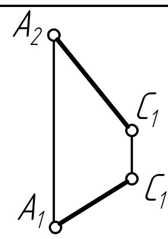
На фронтально проецирующем луче, проходящем через точку **А**, взять точку **В** на **15 мм** ближе к наблюдателю, чем точка **А,** и через нее провести прямую, параллельную заданной прямой.

3.3



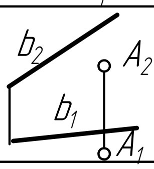
Построить прямоугольник **ABCD** по его стороне **АВ** и проекции **B_1C_1** стороны **ВС.**

3.4.



Построить квадрат **ABCD** по его диагонали **АС**, если вторая диагональ **BD**$\|$ **Π_1.**

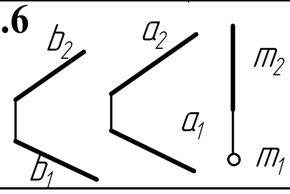
3.5



Через точку **А** провести горизонталь так, чтобы она пересекала прямую общего положения.

$h \| \Pi_1;\ h \supset A;\ h \cap b = 1$

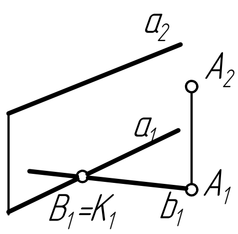
3.6



Построить фронталь, пересекающую прямые **a, b** и **m.**

$f \cap a = 1;\ f \cap b = 2;\ f \cap m = 3$

3.7

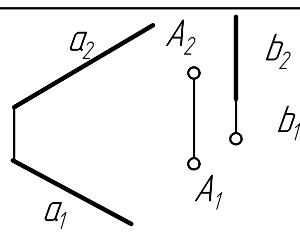


Достроить прямую **b**, скрещивающуюся с прямой **а** и проходящую через точку **В**, горизонтально конкурирующую с точкой **К⊂а**. **В** выше **К** на **10 мм.**

Определить видимость прямых.

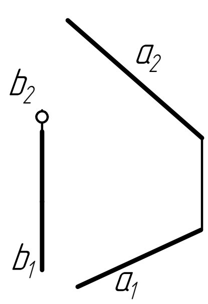
$b \dot{-} a;\ b \supset A;\ b \supset B;\ K \subset a;\ |Z_B - Z_K| = 10$ мм

3.8



Провести прямую **m ⊃A; m ∩ b; m ∩ a.**

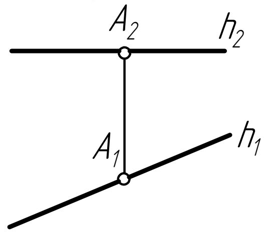
3.9



Провести прямую **n**, перпендикулярную к прямым **а** и **b** и пересекающуюся с ними.

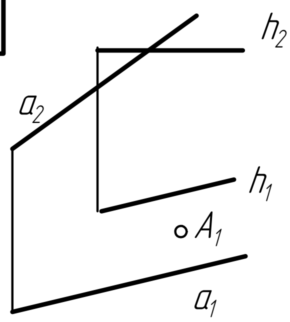
Задачи для лидеров

5Л



Через точку **A** провести прямую, перпендикулярную к **h** и наклоненную к плоскости $\mathbf{П_1}$ под углом **30°**.

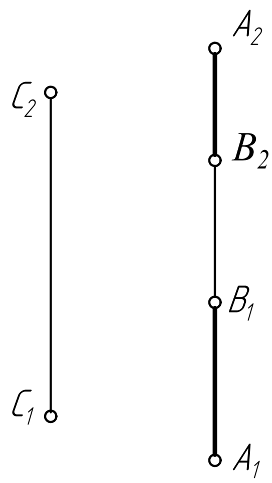
6Л



Через точку **A** провести **n** и найти $\mathbf{A_2}$, если **n⊥a; n⊥h** и **n ∩ a.**

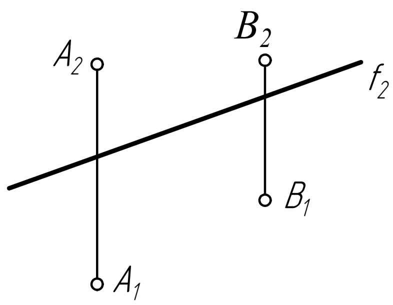
Задачки для самых крутых!

6К



Через точку **C** провести отрезок **CD|| AB.** Профильную проекцию не использовать. Сколько решений?

7К



Фронталь равноудалена от точек **A** и **B.** Не преобразуя чертёж, найти $\mathbf{f_1}$**,** если $\mathbf{Z_A = Z_B}$.

§ 4. Плоскость. Принадлежность точки и плоскости, прямой и плоскости. Главные линии плоскости

Плоскость общего положения (о. п.) не параллельна и не перпендикулярна ни одной из плоскостей проекций.

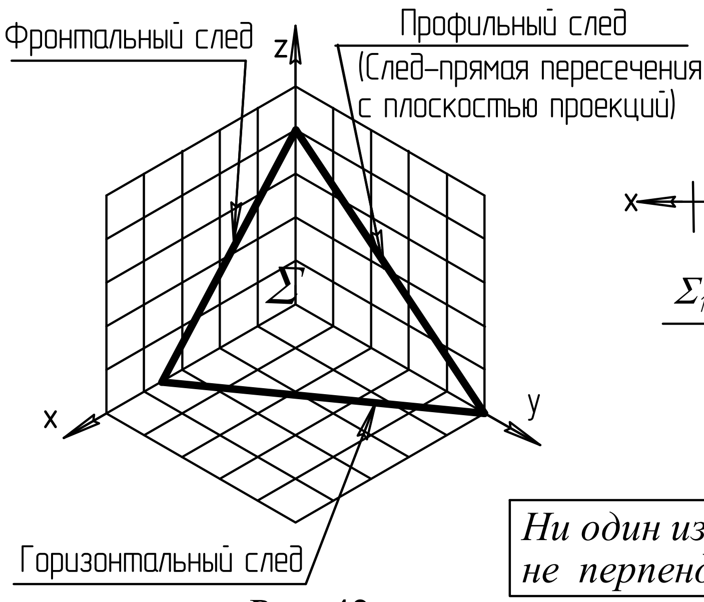
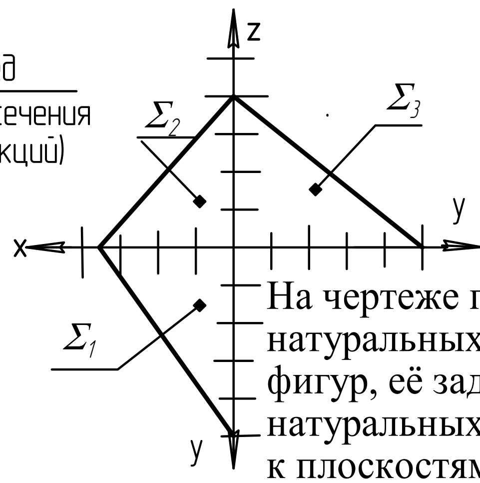


Рис. 42



На чертеже плоскости о. п. нет натуральных величин плоских фигур, её задающих, нет натуральных углов наклона её к плоскостям проекций.

Рис. 43

Ни один из следов плоскости общего положения не перпендикулярен ни одной из осей.

К **главным линиям** плоскости относят **линии уровня,** принадлежащие этой плоскости, а также **прямые, перпендикулярные к этим линиям уровня,** также принадлежащие этой плоскости.

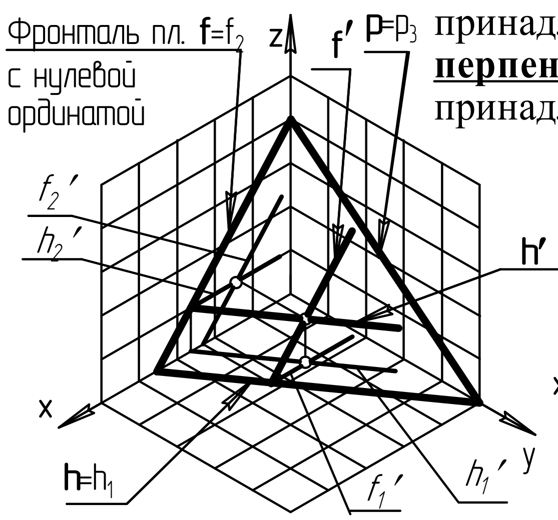


Рис. 44

Безосный чертёж пл. о. п., заданной прямыми уровня

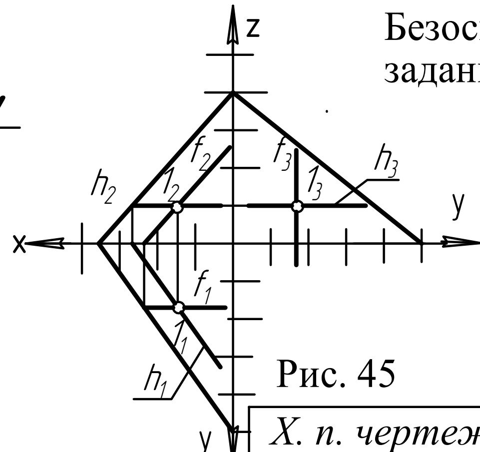


Рис. 45

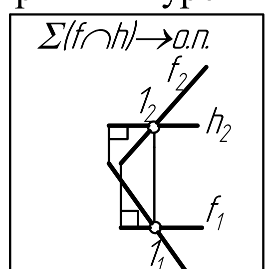


Рис. 46

Х. п. чертежа – ни на одну из плоскостей проекций плоскость общего положения никогда не проецируется в виде прямой.

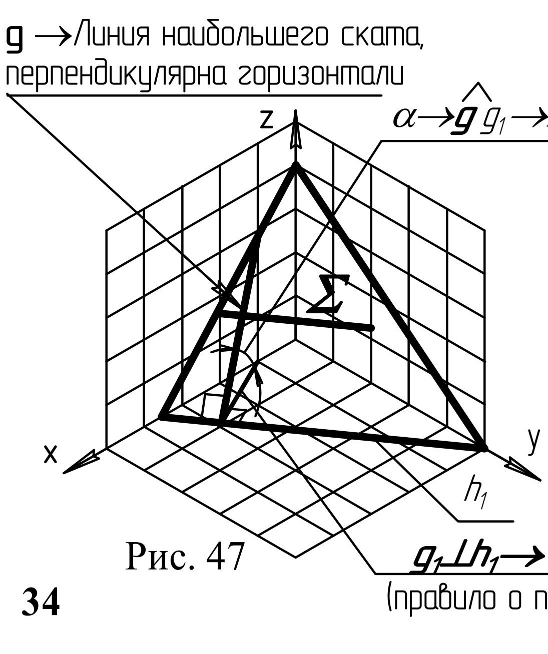


Рис. 47

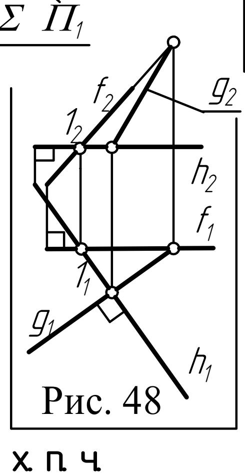


Рис. 48

Линия наибольшего ската **g,** перпендикулярная горизонтали плоскости, позволяет определить угол наклона плоскости к Π_1 *(двугранный угол равен линейному между двумя перпендикулярами к прямой пересечения двух граней).*

Точка принадлежит плоскости, когда принадлежит прямой этой плоскости. Прямая принадлежит плоскости, когда проходит через две её точки или через одну, но параллельно какой-то прямой этой плоскости.

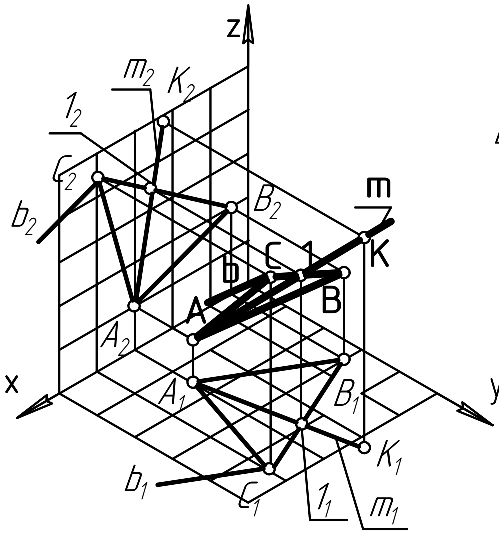


Рис. 49

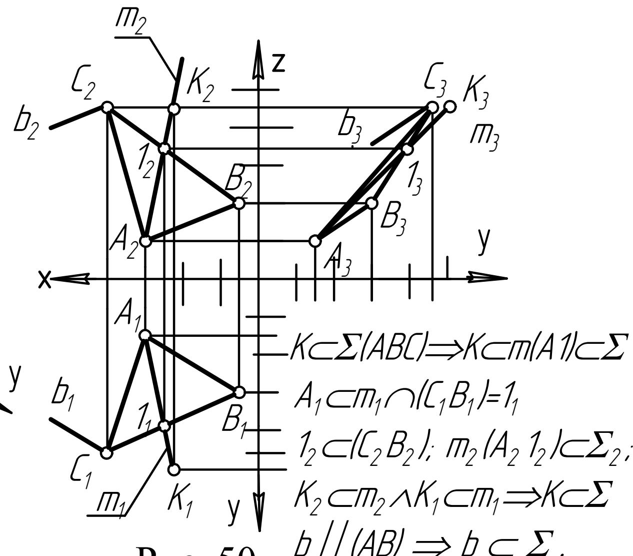


Рис. 50

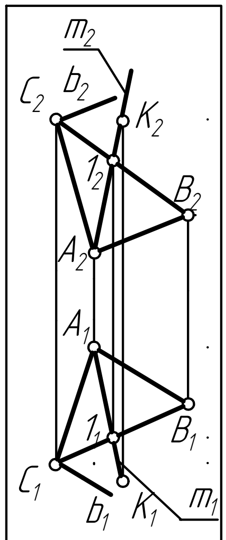


Рис. 51

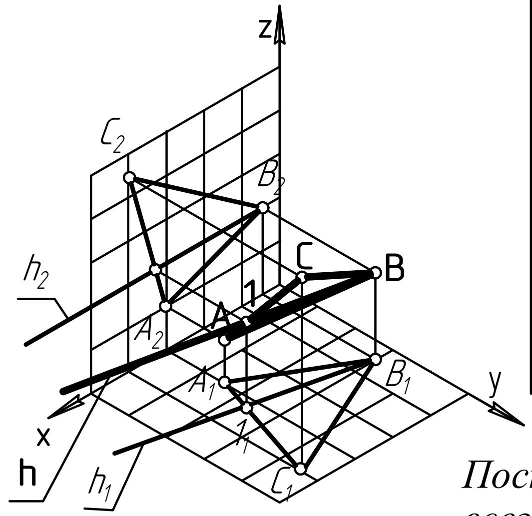


Рис. 52

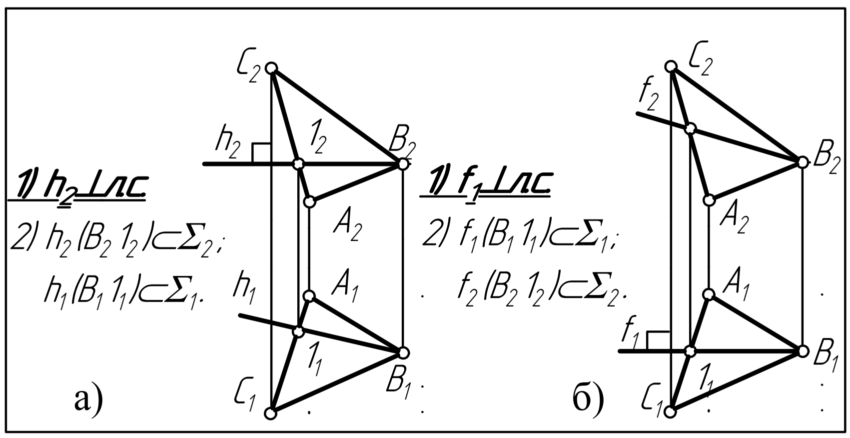


Рис. 53

Построение ***горизонтали*** *плоскости всегда начинаем* ***с фронтальной*** *проекции* ***$h_2\perp$л. с.***
Построение ***фронтали****, принадлежащей плоскости, всегда начинаем* ***с горизонтальной*** *проекции* ***$f_1\perp$л. с.***

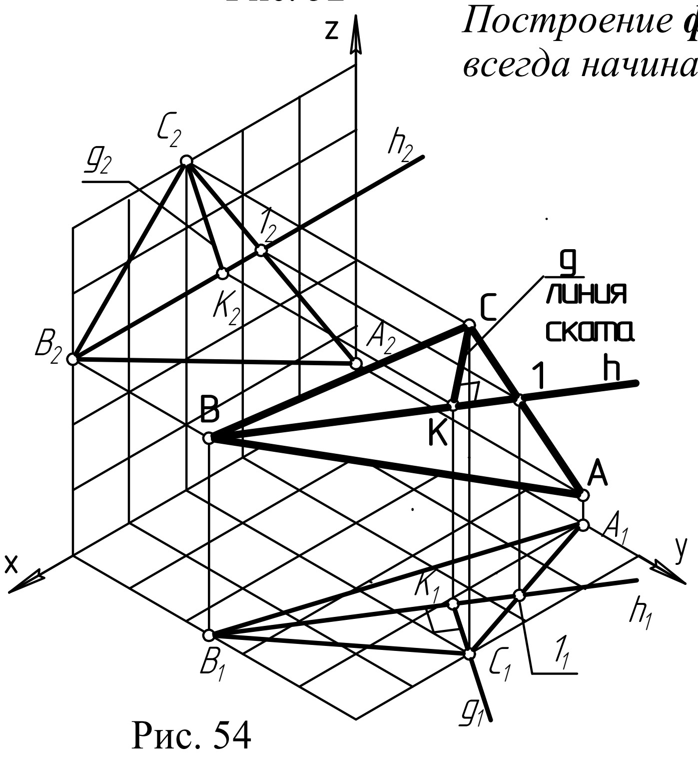


Рис. 54

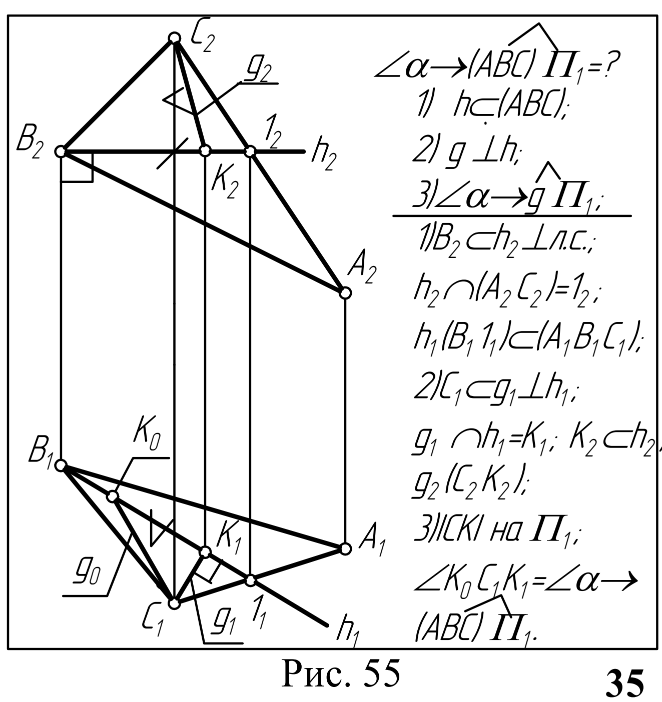
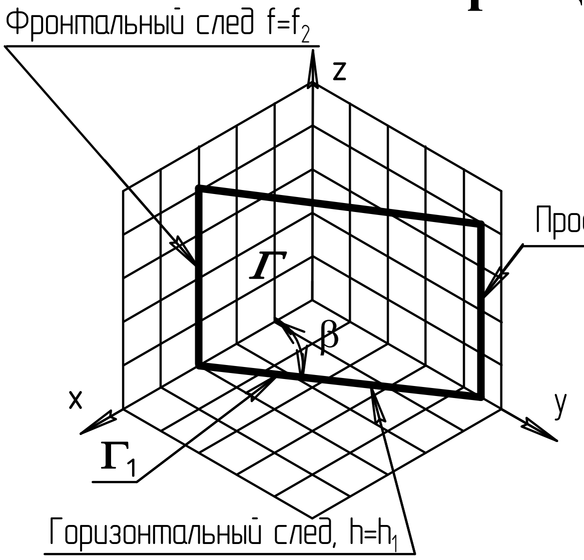


Рис. 55

Проецирующие плоскости

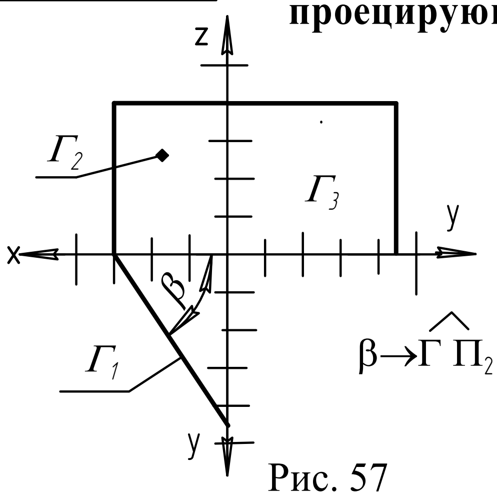
К проецирующим относят плоскости, перпендикулярные одной из плоскостей проекций.



$\Gamma_1 \rightarrow$ прямая (главная проекция, обладает собирательным свойством)

Рис. 56

$\Gamma \perp \Pi_1 \rightarrow$ горизонтально проецирующая плоскость



$\beta \rightarrow \widehat{\Gamma\ \Pi_2}$

Рис. 57

задана следами

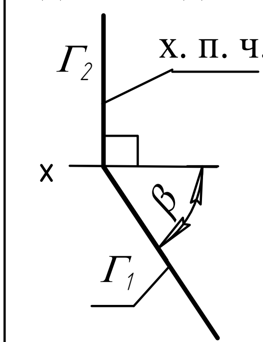


Рис. 58

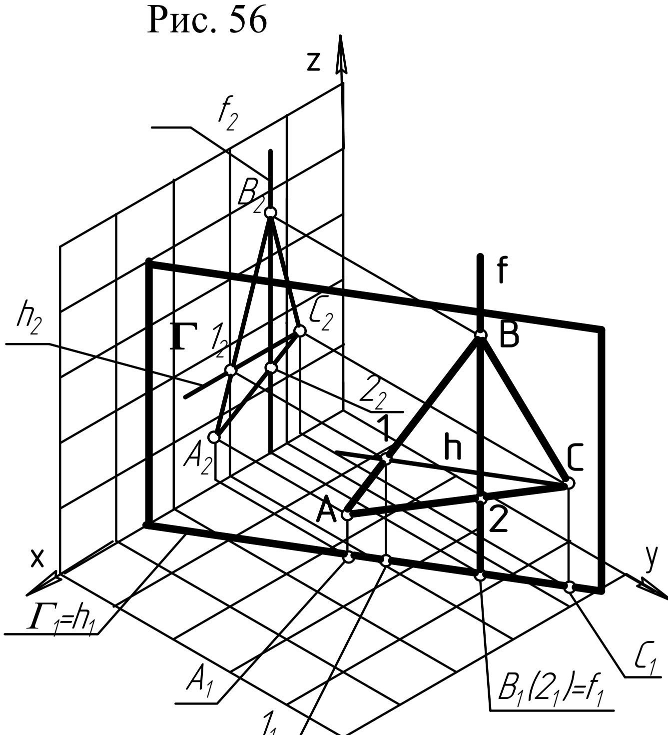


Рис. 59

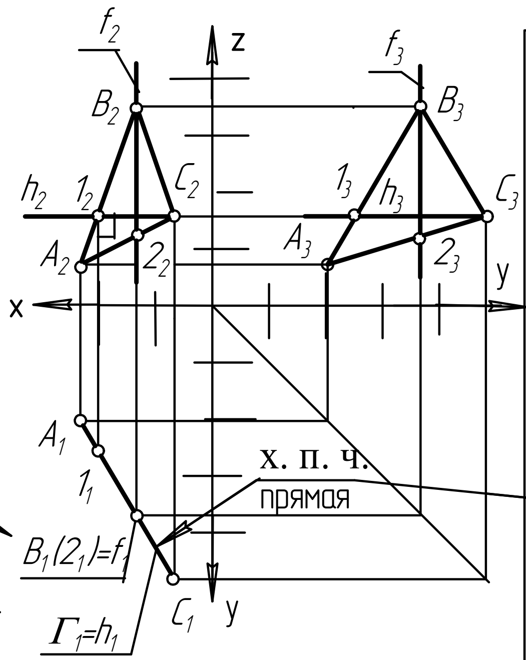


Рис. 60

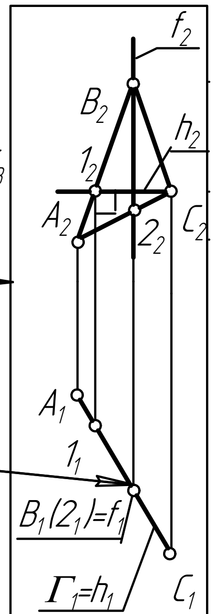


Рис. 61

Плоскости уровня

(двоякоперпендикулярные)

К плоскостям уровня относят плоскости, параллельные плоскости проекций.

$\Sigma(ABC) \parallel \Pi_1 \rightarrow$ горизонтальная

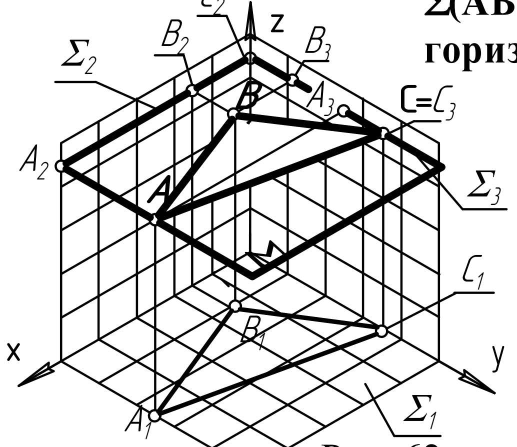


Рис. 62

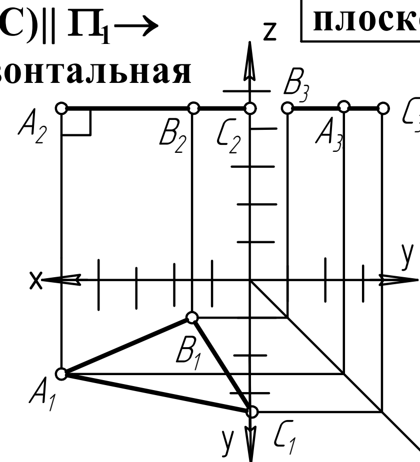


Рис. 63

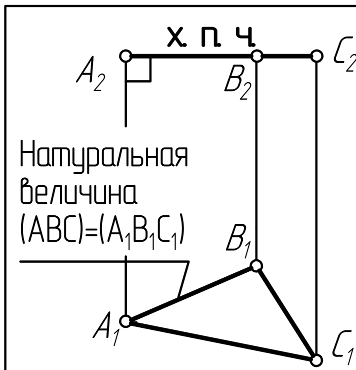
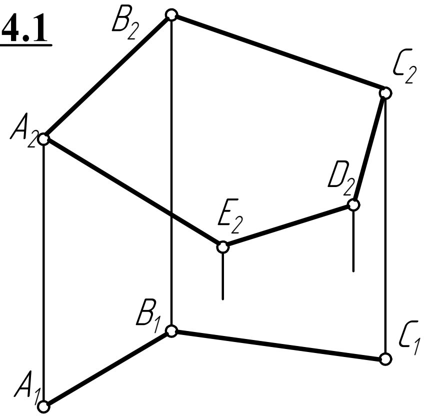


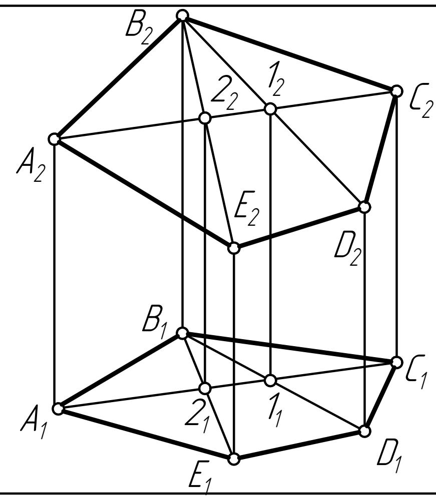
Рис. 64

Примеры решения задач по теме
«Плоскость. Принадлежность точки и прямой плоскости. Главные линии плоскости»

Пример 4.1



Достроить горизонтальную проекцию плоского пятиугольника **ABCDE.**



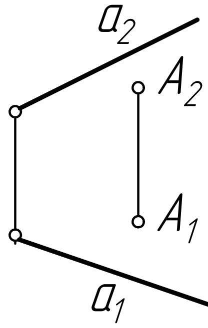
Алгоритм решения

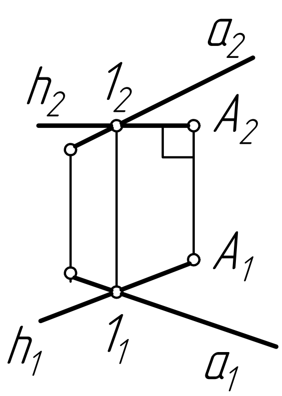
1) $B_2D_2 \cap A_2C_2 = 1_2; \Rightarrow D_1 \subset B_1 1_1;$

2) $B_2E_2 \cap A_2C_2 = 2_2; \Rightarrow E_1 \subset B_1 2_1.$

Пример 4.2

Задана плоскость **Г(a,A)**. Построить **h || П₁; h⊂Г; h ⊃A**.





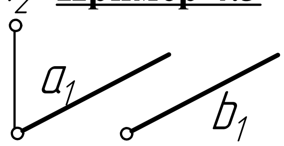
Алгоритм решения

1) $h_2 \supset A_2;\ h_2 \perp$ л.с.

2) $h_2 \cap a_2 = 1_2;\ 1_1 \subset a_1;$

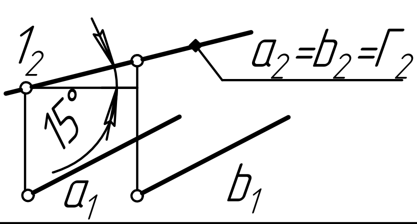
3) $h_1(A_1 1_1).$

1_2 **Пример 4.3**



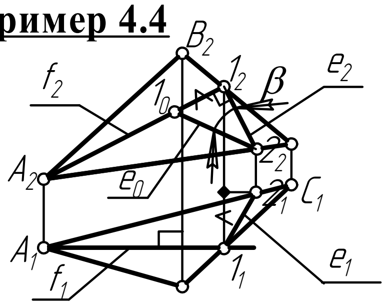
Достроить фронтальную проекцию фронтально проецирующей плоскости **Г(a||b)**, если $\angle \alpha \rightarrow \widehat{\Gamma\, \Pi_1} = 15°$, и пересекающейся с Π_1 слева от вас.

Решение



Если ***Г(aIIb)*** $\perp \Pi_2 \Rightarrow \Gamma_2 \rightarrow$ *прямая, расположенная под углом* ***15°*** *к оси* ***ОХ****. Фронтальные проекции всех фигур, принадлежащих этой плоскости, находятся на этой главной проекции.*

Пример 4.4



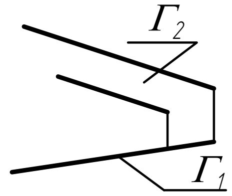
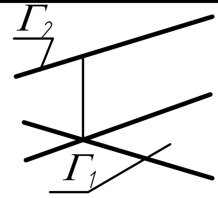
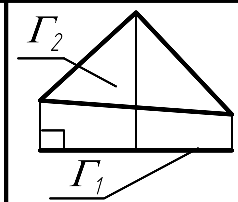
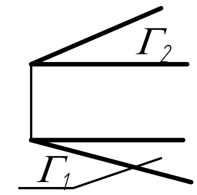
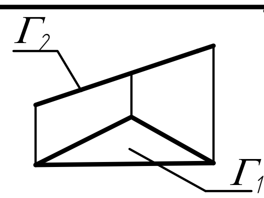
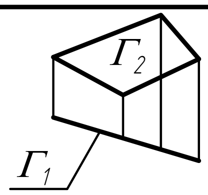
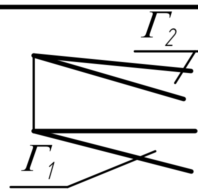
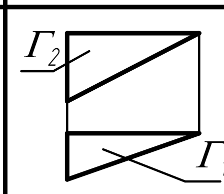
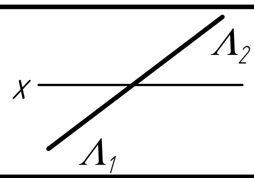
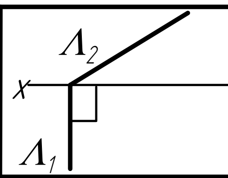
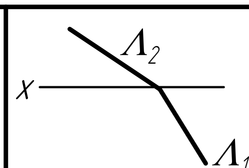
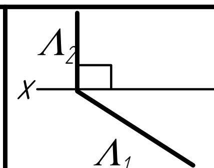
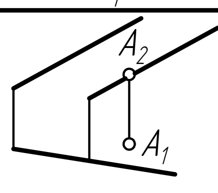
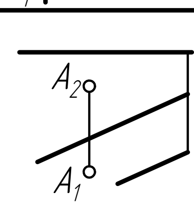
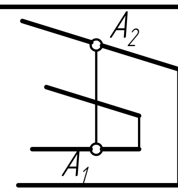
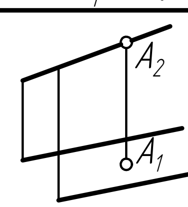
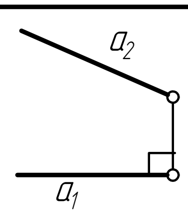
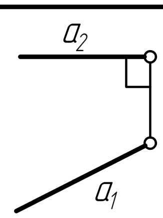
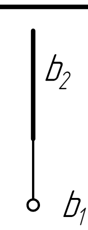
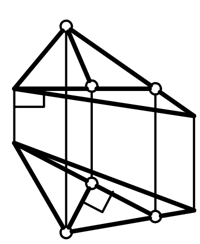
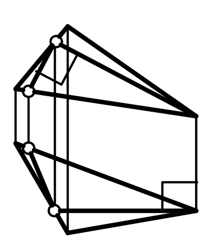
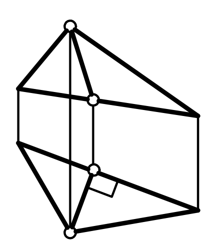
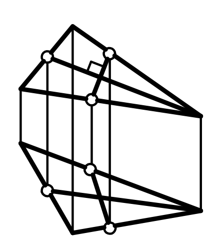
Определить угол наклона плоскости **Г(АВС)** к Π_2.

Двугранный угол между плоскостью ***Г*** *и* Π_2 *равен линейному между прямой* ***e*** $\perp f$ *этой плоскости и её фронтальной проекцией.*

1. *Строим фронталь плоскости* ***Г(АВС), f (A1)****.*
2. *Строим* ***e****, перпендикулярную фронтали* $\boxed{e_2 \perp f_2.}$
3. *Находим угол наклона* ***e(12)*** *к* Π_2.

Проверьте себя!

Обучающий тест **4.1** *по теме* **«Плоскость. Принадлежность точки и прямой плоскости. Главные линии плоскости»**

№ п/п	Вопрос	1	2	3	4
1	Укажите чертёж плоскости общего положения				
2	Какую плоскость называют фронтально проецирующей?	$\parallel \Pi_2$	$\perp \Pi_1$	$\perp \Pi_2$	$\perp \Pi_3$
3	При каком положении плоскости одна из проекций есть натуральная величина всех её фигур?	$\perp \Pi_1$	$\parallel \Pi_2$	$\perp \Pi_3$	$\perp \Pi_2$
4	На каком чертеже определяется угол наклона плоскости Γ к Π_2 (β)?				
5	При каком положении плоскости определяется её угол наклона к Π_1 (α)?	$\parallel \Pi_1$	$\perp \Pi_1$	$\perp \Pi_2$	общем
6	Плоскости заданы следами. Найдите, какая из них $\perp \Pi_2$,				
7	какая равнонаклонена к плоскостям проекций?				
					
8	На каком чертеже точка ***A*** принадлежит плоскости?				
9	Найдите фронталь горизонтально проецирующей плоскости				
10	Где построена линия ската (наибольшего наклона к Π_1) данной плоскости?				

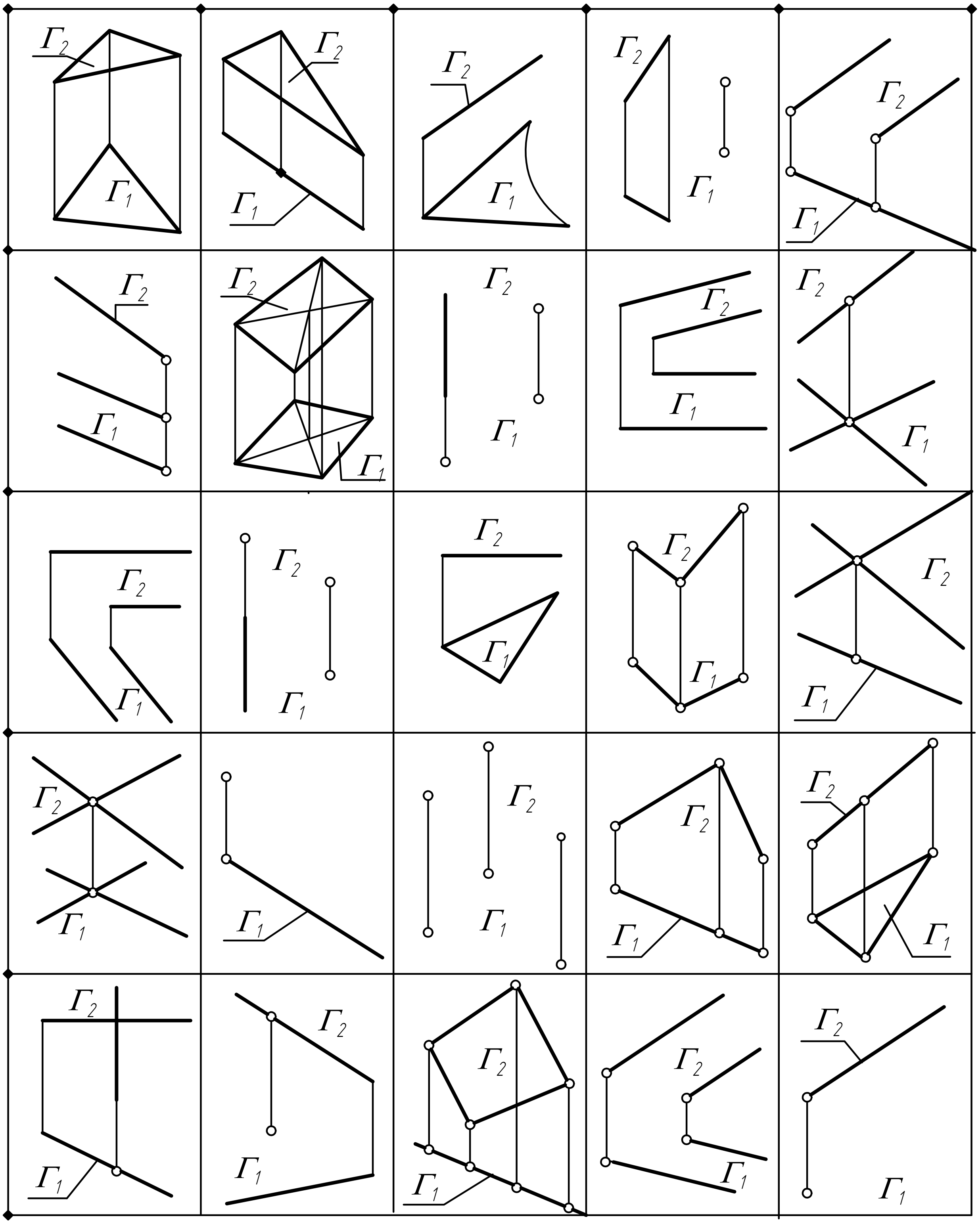
Ответы: 4, 3, 2, 2, 3, 2, 1, 4, 3, 1

Тренировка 4.1 по теме «Плоскость»

Вам предлагается хорошая тренировка для закрепления темы.

Подсчитайте в строгой очерёдности, сколько изображено плоскостей:

1) горизонтальных уровня; 2) фронтально проецирующих (но не уровня); 3) общего положения; 4) горизонтально проецирующих (но не уровня).



При правильном подсчёте вы узнаете самую знаменательную дату в истории развития начертательной геометрии!

Успеха!

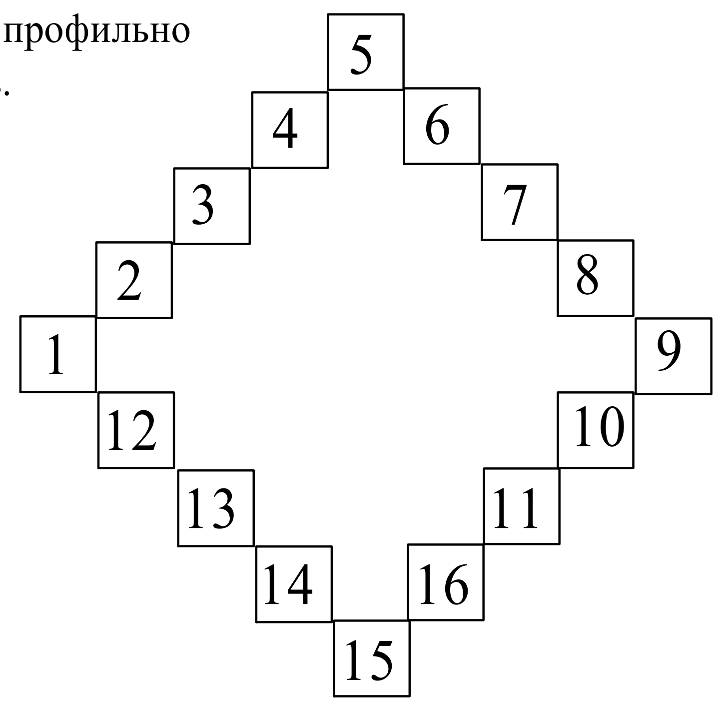
Вы обязательно должны быть первым!

Тренировка 4.2 *по теме* «Принадлежность точки и прямой плоскости. Главные линии плоскости»

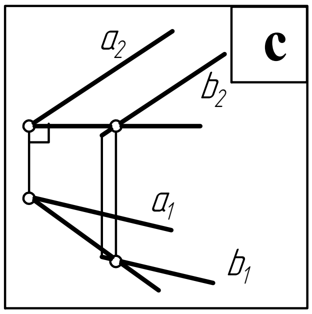
Перед вами чертежи точек и прямых, расположенных в заданных плоскостях. Составив их правильно по схеме в заданной последовательности, вы узнаете *фамилию первого русского профессора начертательной геометрии и дату издания его первого учебника на русском языке по данному предмету.*

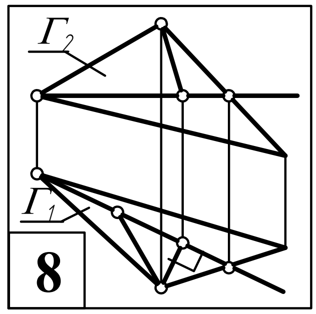
Н а й д и т е:

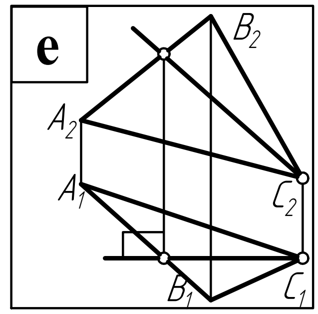
1) фронталь плоскости, заданной пересекающимися прямыми, $\mathbf{f \subset \Sigma(m \cap n)}$;
2) фронталь плоскости общего положения, заданной треугольником, $\mathbf{f \subset \Gamma(ABC)}$;
3) фронталь горизонтально проецирующей плоскости; $\mathbf{f \subset \Gamma(\Gamma_1) \perp \Pi_1}$;
4) фронталь фронтально проецирующей плоскости; $\mathbf{f \subset \Gamma(\Gamma_2) \perp \Pi_2}$;
5) горизонталь плоскости общего положения, $\mathbf{h \subset \Gamma(a \parallel b)}$;
6) горизонталь фронтально проецирующей плоскости, $\mathbf{h \subset \Gamma(\Gamma_2)}$;
7) горизонталь горизонтально проецирующей плоскости, $\mathbf{h \subset \Gamma(\Gamma_1)}$;
8) где прямоугольник спроецировался без искажения, $\mathbf{ABCD \subset \Gamma}$;
9) где прямоугольник спроецировался с искажением; $\mathbf{ABCD \subset \Gamma}$;
10) где построена линия наибольшего ската плоскости, $\mathbf{g \subset \Gamma}$;
11) где построена линия наибольшего наклона плоскости к $\mathbf{\Pi_2}$;
12) где построена профильная прямая плоскости общего положения, $\mathbf{p \subset \Gamma(f \cap h)}$;
13) где определён угол наклона плоскости общего положения к $\mathbf{\Pi_1}$ (α);
14) где определён угол наклона плоскости общего положения к $\mathbf{\Pi_2}$ (β);
15) где прямые уровня задают профильно проецирующую плоскость.
16. **Вы победили!**

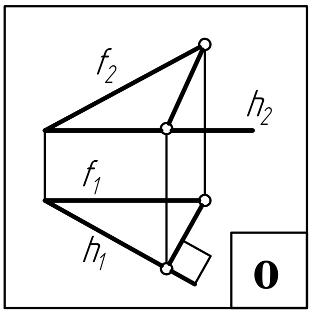


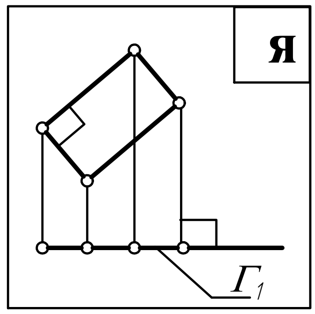
Будьте внимательны: на чертежах проекции прямых, принадлежащих плоскости, не обозначены!

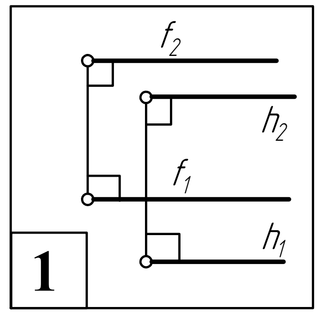


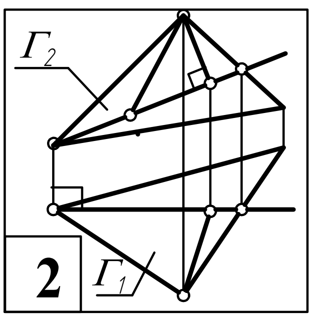


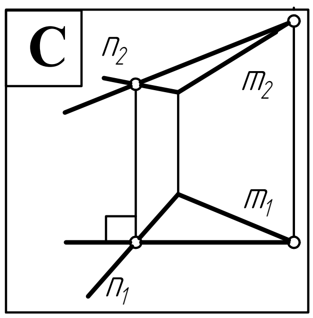


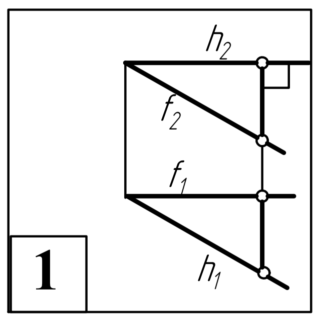


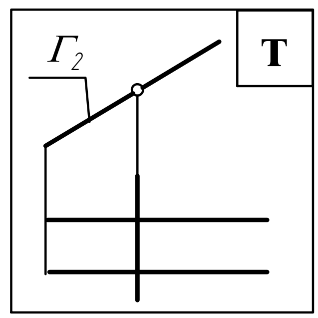


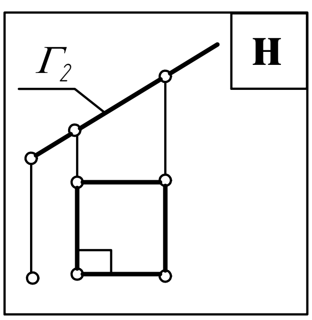


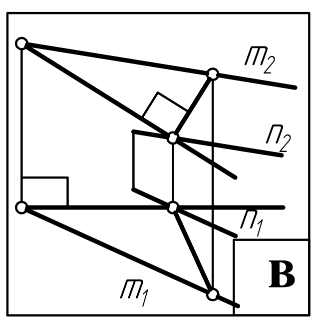


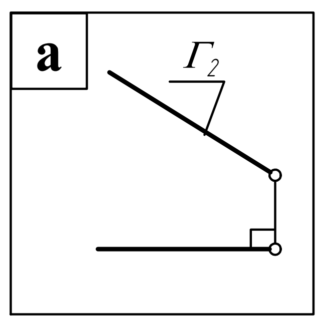






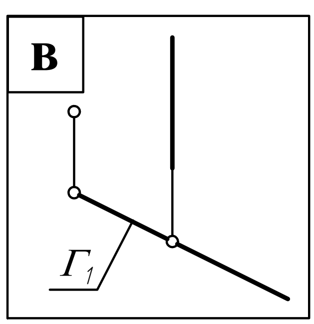


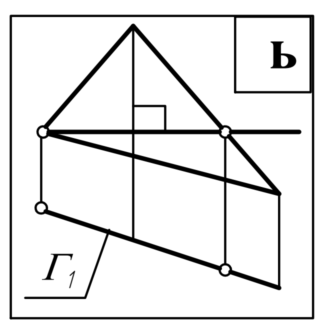


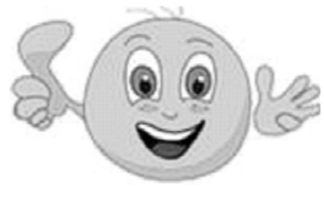


Так держать!

Ура!

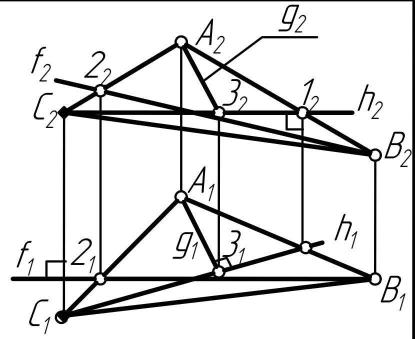
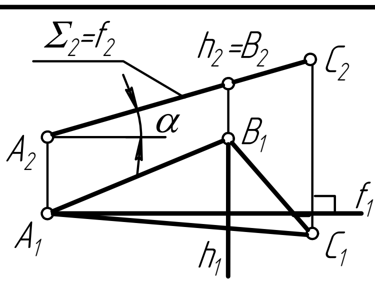
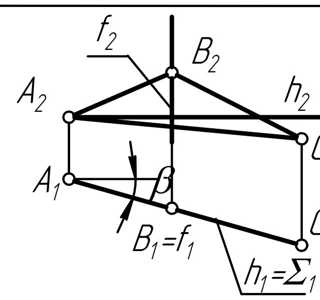
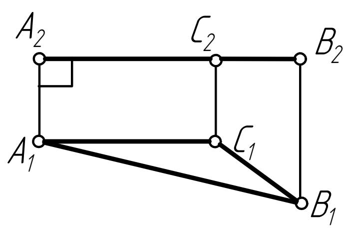
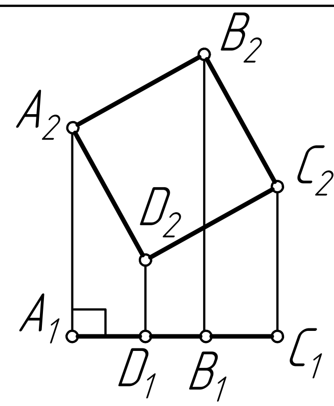






Опорный конспект по теме «Плоскость. Принадлежность точки, прямой плоскости. Главные линии плоскости»

Канва 4

№п/п	Наименование	Чертёж	Характерные признаки чертежа
1	Плоскость общего положения не параллельна и не перпендикулярна ни одной из плоскостей проекций. **g**-линия ската, **g ⊂ Γ(ABC); g ⊥ h ⊂ Γ;** **e** → линия н.н. к Π_2, **e ⊂ Γ(ABC); e ⊥ f ⊂ Γ**		Ни на одну из плоскостей проекций **не проецируется в виде прямой.** $f(2B) \subset \Gamma(ABC) \rightarrow f_1 \perp$ л.с.; $h(C1) \subset \Gamma(ABC) \rightarrow h_1 \perp$ л.с.; $g(A3) \subset \Gamma(ABC) \rightarrow g_1 \perp h_1$. $e_2 \perp f_2$
2	Фронтально проецирующая плоскость перпендикулярна фронтальной плоскости проекций. $\Sigma \perp \Pi_2$		**На фронтальную плоскость проекций проецируется в виде прямой.** Такая проекция называется главной, обладает собирательным свойством $\angle\alpha = \widehat{\Sigma(ABC)\,\Pi_1}$
3	Горизонтально проецирующая плоскость перпендикулярна горизонтальной плоскости проекций. $\Sigma \perp \Pi_1$		**Горизонтальная проекция – прямая,** называется главной, обладает собирательным свойством. $\angle\beta = \widehat{\Sigma(ABC)\,\Pi_2}$
4	Горизонтальная уровня параллельна Π_1 **Ф(ABC) ‖** Π_1		**Фронтальная проекция – прямая, перпендикулярная линии связи** *(все множество горизонталей)* $(A_1B_1C_1) = (ABC)$*нат. вел.*
5	Фронтальная уровня – плоскость, параллельная Π_2 **Ф(ABCD) ‖** Π_2		**Горизонтальная проекция – прямая, перпендикулярная линии связи** *(всё множество фронталей)* на Π_2 – натуральная величина всех фигур плоскости

Вопросы для самопроверки

1. Какими геометрическими элементами можно задать плоскость на чертеже?

2. Сформулируйте характерный признак чертежа плоскости общего положения.

3. Перечислите возможные частные случаи расположения плоскости относительно плоскостей проекций и укажите особенности их задания на комплексном чертеже.

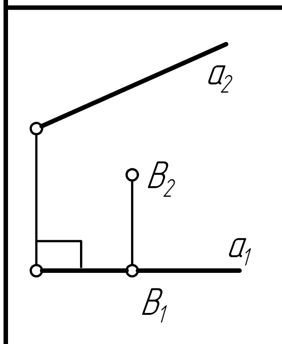
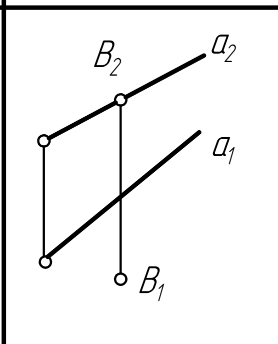
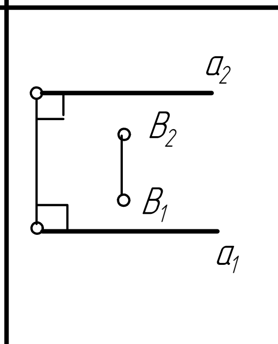
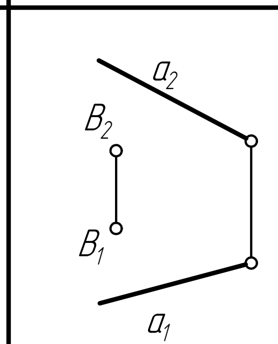
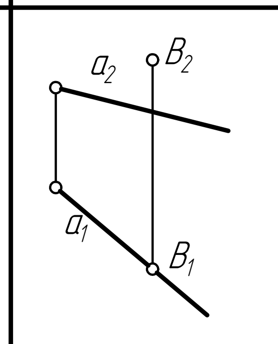
4. Когда точка (прямая) принадлежит плоскости?

5. Какие главные линии плоскости вы знаете?

6. С помощью каких главных линий плоскости определяются углы наклона плоскостей к плоскостям проекций? Каковы характерные признаки чертежей этих прямых?

Внимание! ***Итоговый тест 4***

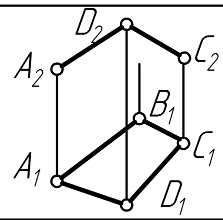
○ 1. Укажите чертеж фронтально проецирующей плоскости.
⊗ 2. Укажите чертеж плоскости общего положения.
⊙ 3. В каком случае угол $\beta \to \Gamma \widehat{(aB)\ \Pi_2}$ спроецировался без искажения ?
⊖ 4. На каком чертеже вы видите фронтальную плоскость уровня?
⦶ 5. Укажите чертеж профильно проецирующей плоскости.

1	**2**	**3**	**4**	**5**
				
⊖	○	⦶	⊗	⊙

З А Н Я Т И Е   4

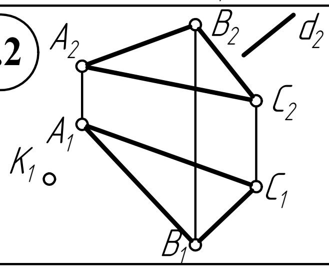
Плоскость, главные линии плоскости. Принадлежность точки и прямой плоскости

4.1



Достроить фронтальную проекцию четырехугольника **(ABCD).**

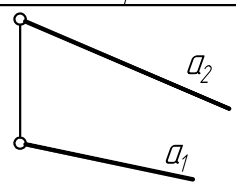
4.2



$d \subset \Gamma(ABC)$; $K \subset \Gamma(ABC)$

$d_1=?$ $K_2=?$

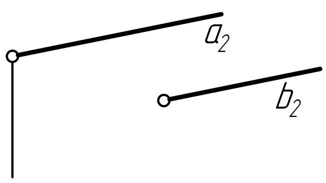
4.3



Через прямую **a** провести фронтально проецирующую плоскость **Г,**

$\mathbf{a \subset \Gamma \perp \Pi_2}$.

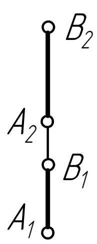
4.4



Г(a II b) ⊥П$_1$; Г$_1$=?, если $\beta \rightarrow \widehat{\Gamma\,\Pi_2}=30°$

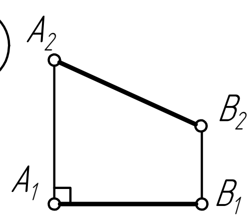
Г пересекается с **П$_2$** слева от вас.

4.5



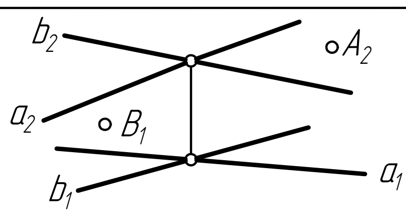
Достроить проекции профильного равностороннего треугольника по проекциям его стороны **АВ**, если **С** выше **А** и **В.**

4.6



Достроить фронтальную проекцию фронтального расположения квадрата **(ABCD)** по проекциям его стороны **АВ,** если **С** и **D** выше точек **А** и **В**.

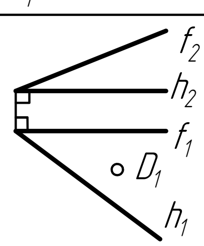
4.7



$A \subset \Gamma(a \cap b)$; $B \subset \Gamma(a \cap b)$;

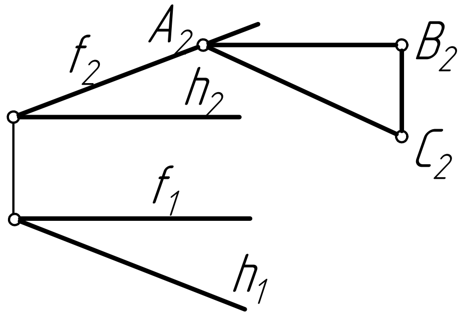
$A_1=?$ $B_2=?$

4.8



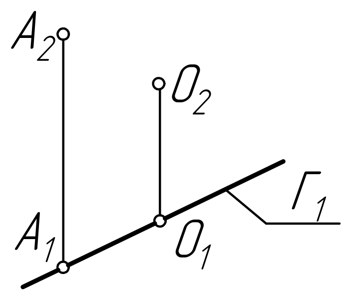
При помощи фронтали достроить **D$_2$,** если **D ⊂Σ(f ∩ h).**

4.9



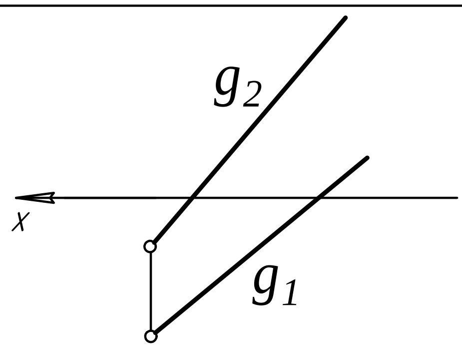
$$(ABC) \subset \Sigma(f \cap h);$$
$$(A_1B_1C_1)=?$$

4.10



Построить проекции окружности **m** с центром в точке **O**, принадлежащей плоскости **$\Gamma(\Gamma_1)$**, если **$A \subset m$**.

4.11

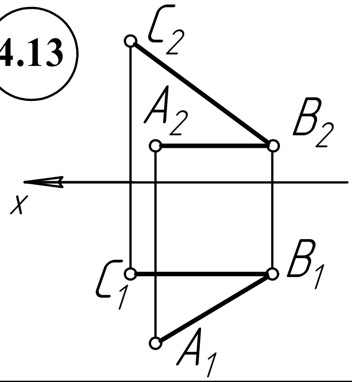


Построить следы плоскости **Δ**, для которой данная прямая **g** является линией наибольшего ската.

4.12

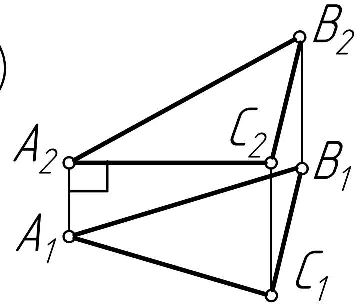
Даны прямая **$a \perp \Pi_2$** и точка **$C \not\subset a$.** Построить следы плоскости **aC.**

4.13



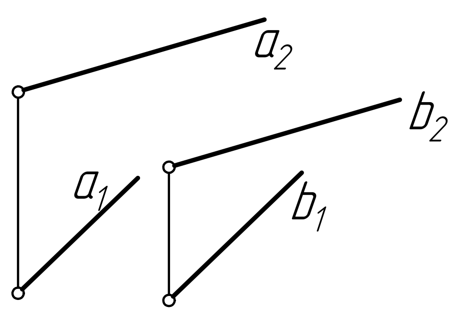
Даны горизонталь **AB** и фронталь **BC**. Построить следы плоскости **ABC.**

4.14



Определить $\angle \alpha \rightarrow \widehat{\Gamma(ABC)\ \Pi_1}$.

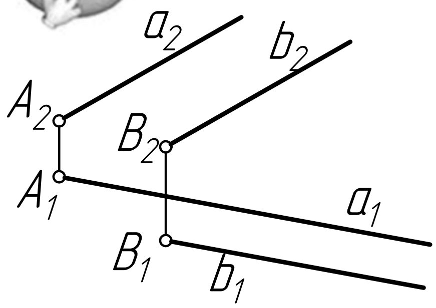
4.15



Определить $\angle \beta \rightarrow \widehat{\Sigma(a \parallel b)\ \Pi_2}$.

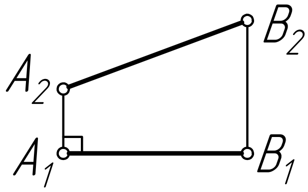
Задачи для лидеров

7Л



В плоскости **Г(a||b)** построить точку, которая находилась бы на таком же расстоянии, как точка **A** от плоскости $\mathbf{\Pi_1}$, и на таком же расстоянии, как точка **B** от плоскости $\mathbf{\Pi_2}$.

8Л

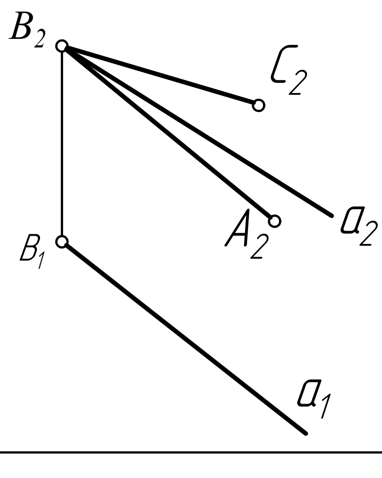


Достроить **Г(ABCD)** – квадрат, $\mathbf{Г \perp \Pi_2}$.
Точка **C** ближе к наблюдателю, чем точка **B.**

9Л Дан отрезок **AB** общего положения. Построить плоскость **ABC,** которая наклонена под углом **45°** к фронтальной плоскости проекций. Сколько решений?

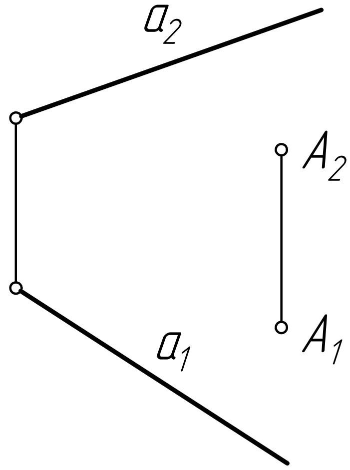
Задачки для самых крутых!

8К



Найти горизонтальную проекцию угла **ABC**, если **a** его биссектриса.

9К



Через точку **A** провести прямую **b,** пересекающую прямую **a** и равнонаклонённую к плоскостям проекций $\mathbf{\Pi_1}$ и $\mathbf{\Pi_2}$ (без построения третьей проекции).

§ 5. Прямая, параллельная плоскости, перпендикулярная плоскости. Плоскости параллельные, взаимно перпендикулярные. Кривые линии

Прямая, параллельная плоскости

Прямая параллельна плоскости, когда параллельна прямой, принадлежащей этой плоскости; $m \parallel n \subset \Gamma \Rightarrow m \parallel \Gamma$.

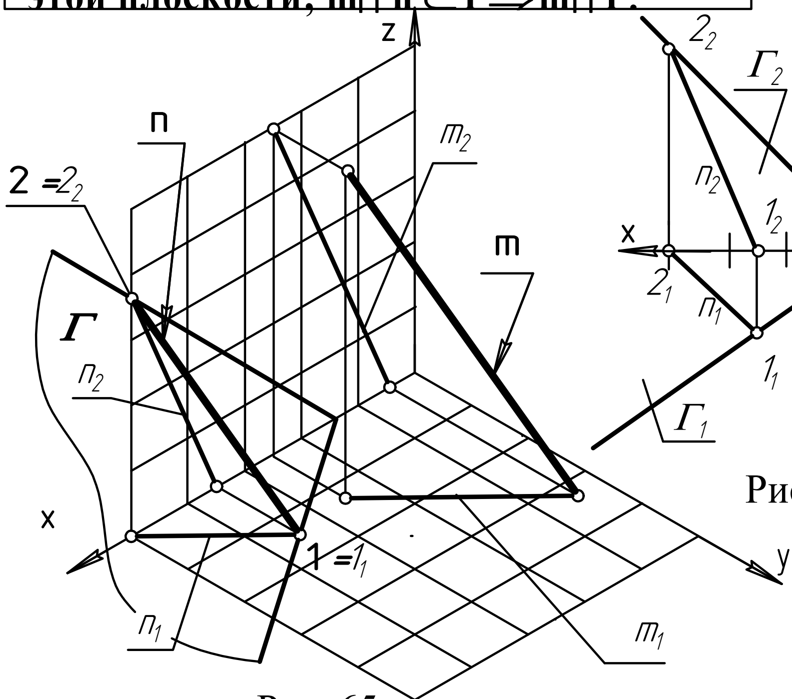


Рис. 65

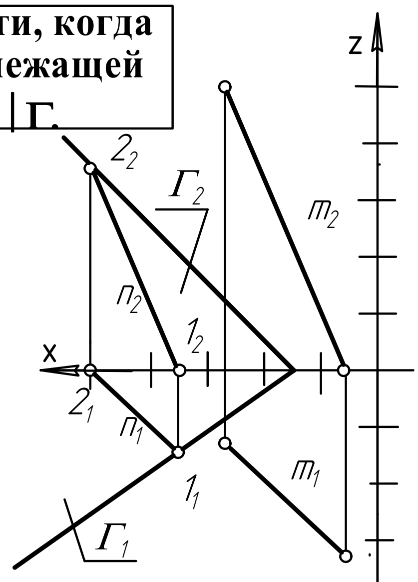


Рис. 66

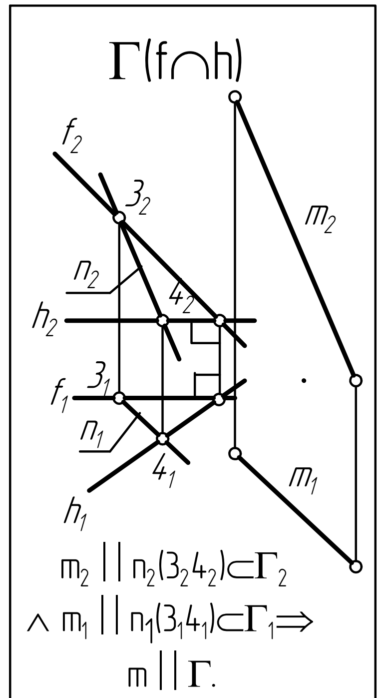


Рис. 67

Прямая, перпендикулярная плоскости

Прямая перпендикулярна плоскости, если перпендикулярна двум пересекающимся прямым этой плоскости; $n_2 \perp f_2 \wedge n_1 \perp h_1 \Rightarrow n \perp \Sigma$.

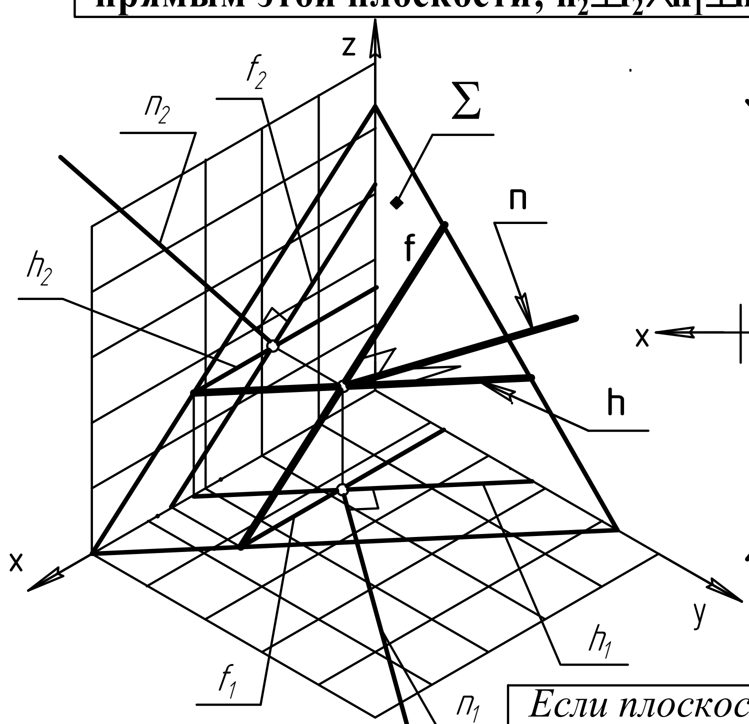


Рис. 68

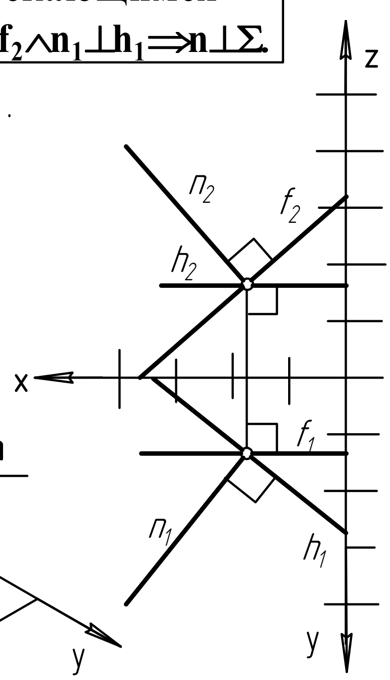


Рис. 69

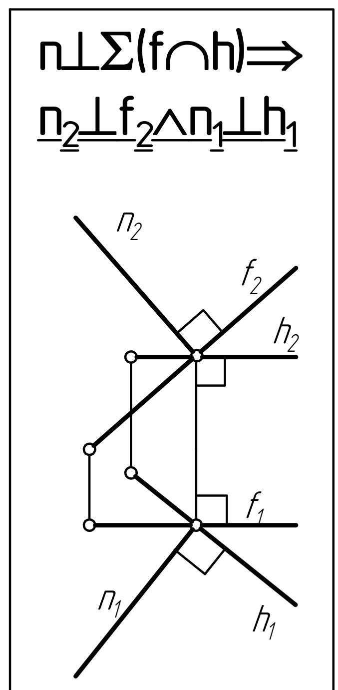


Рис. 70

Если плоскость общего положения, перпендикуляр к ней – также прямая общего положения.

Если плоскость частного положения, перпендикуляр к ней – также прямая частного положения: $\Gamma\perp\Pi_2 \Rightarrow n\,//\,\Pi_2$; $\Gamma\perp\Pi_1 \Rightarrow n\,//\,\Pi_1$; $\Gamma\perp\Pi_3 \Rightarrow n\,//\,\Pi_3$.

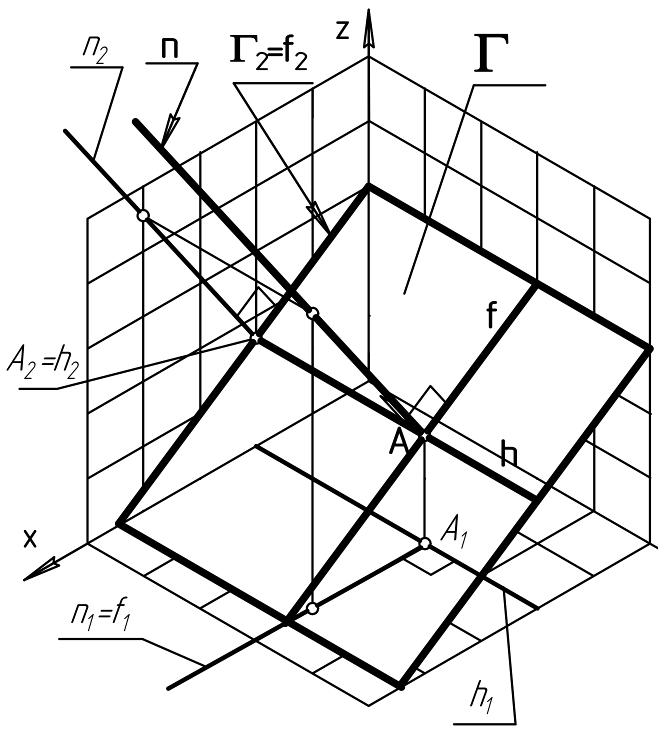


Рис. 71

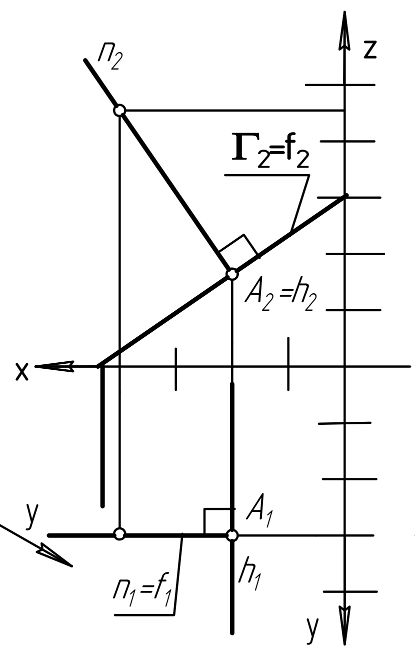


Рис. 72

$\Gamma\perp\Pi_2 \Rightarrow$
$n\,||\,\Pi_2$

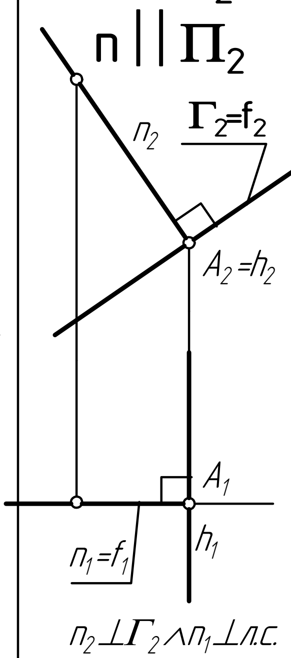


Рис. 73

Параллельные плоскости

Если две пересекающиеся прямые одной плоскости соответственно параллельны двум пересекающимся прямым другой плоскости, то такие плоскости параллельны.

Одноимённые следы у параллельных плоскостей обязательно параллельны.

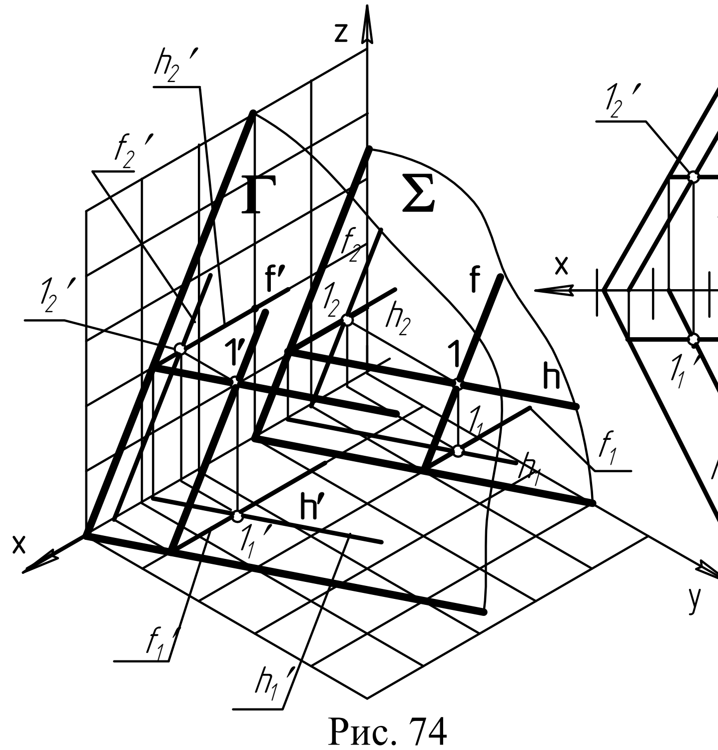


Рис. 74

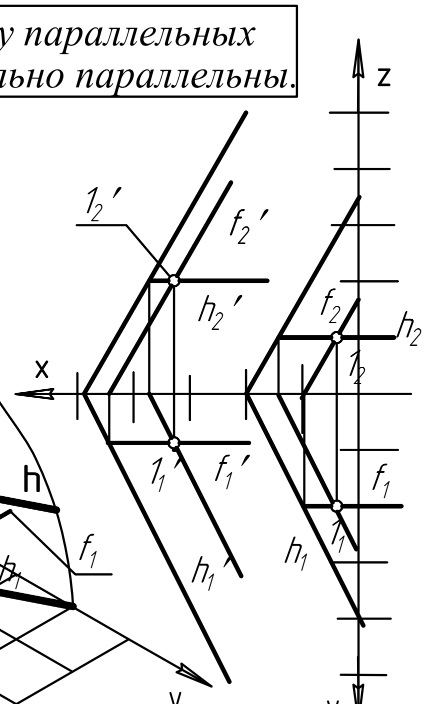


Рис. 75

$\Sigma(f\cap h)\ ||\ \Gamma(f'\cap h')\Rightarrow$
$f_2\,||\,f_2' \wedge h_1\,||\,h_1'$.

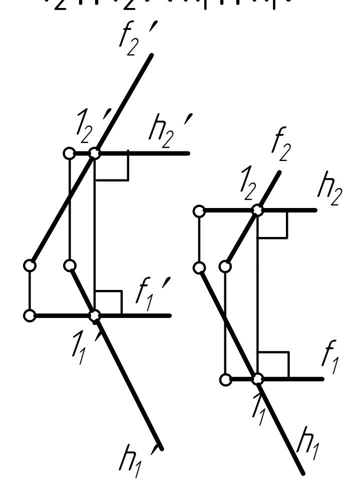


Рис. 76

Взаимно перпендикулярные плоскости

Если плоскость проходит через перпендикуляр к другой плоскости, то такие плоскости перпендикулярны.

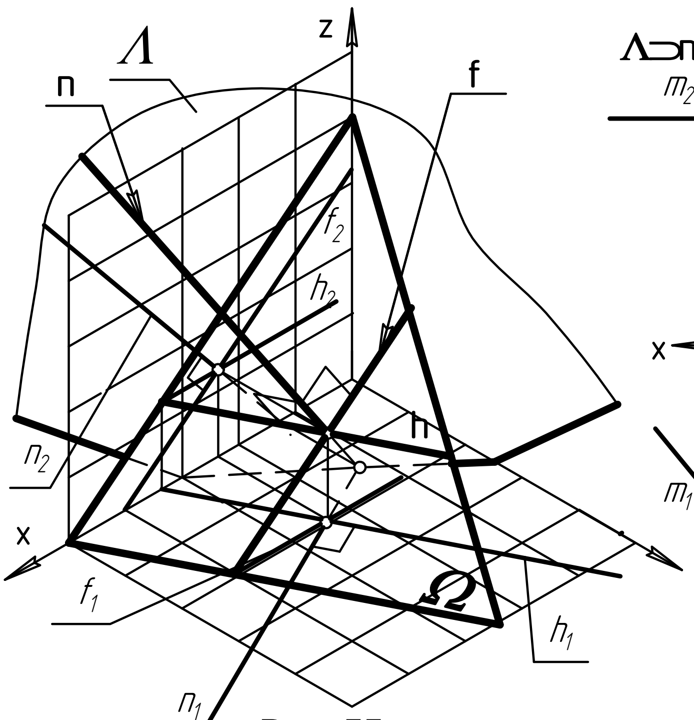


Рис. 77

$\Lambda \supset n \perp \Omega \Rightarrow \Lambda \perp \Omega$

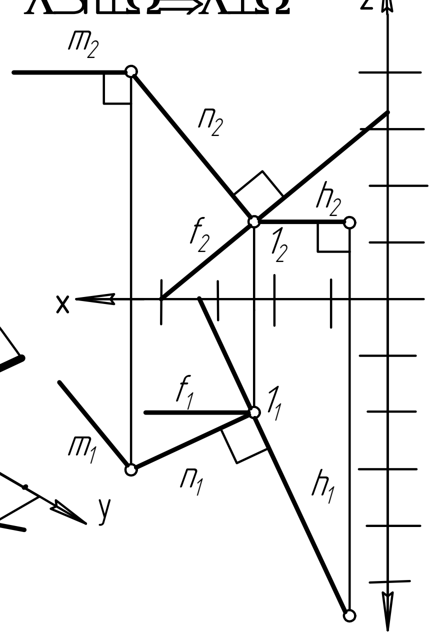
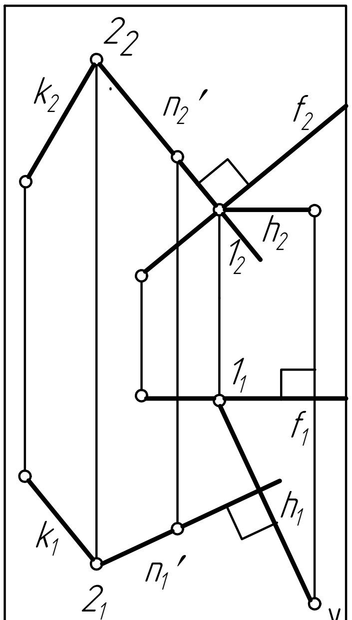


Рис. 78



$n_2' \perp f_2 \wedge n_1' \perp h_1 \Rightarrow$
$n' \perp \Omega(f \cap h);$

$\Gamma \supset n' \perp \Omega \Rightarrow$
$\Gamma(k \cap n') \perp \Omega(f \cap h).$

Рис. 79

Очевидно,что через перпендикуляр к плоскости можно провести бесчисленное множество плоскостей и все они будут ей перпендикулярны.

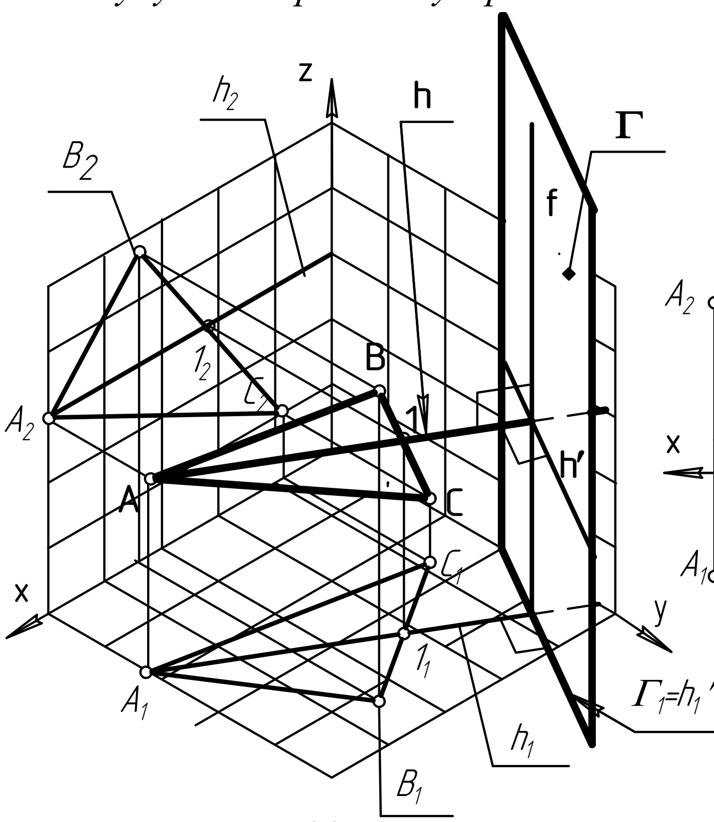


Рис. 80

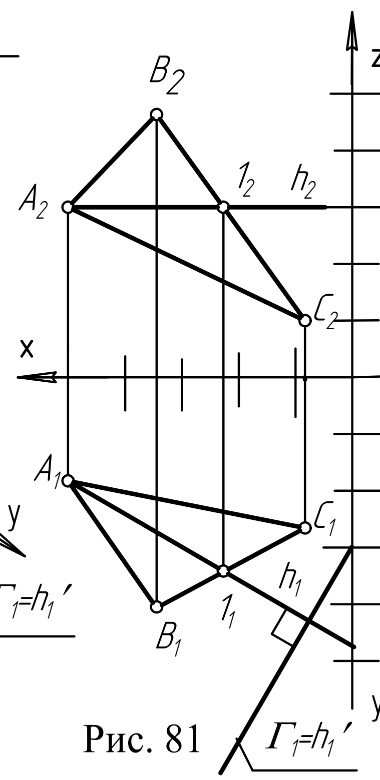
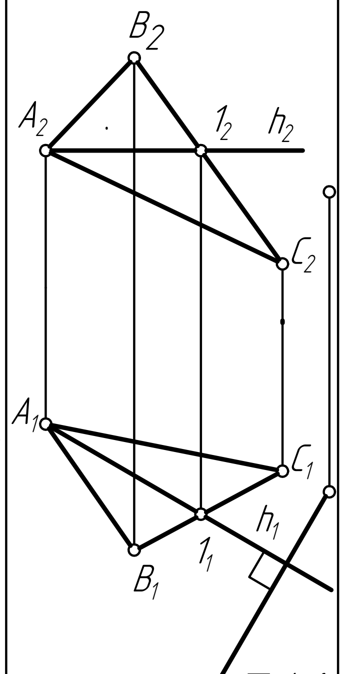


Рис. 81

$\Gamma \perp h \Rightarrow \Gamma \perp \Pi_1;$
$\Gamma \perp \Sigma(ABC) \supset h$



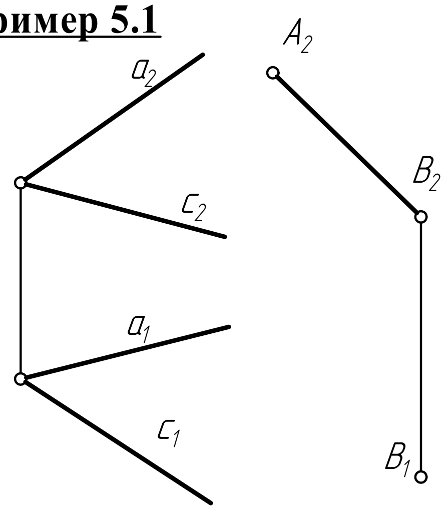
$h(A1) \subset \Sigma;$
$h_1 \perp \Gamma_1$

Рис. 82

Помним: плоскость, перпендикулярная прямой уровня, обязательно будет проецирующей, а перпендикулярная проецирующей прямой будет плоскостью уровня.

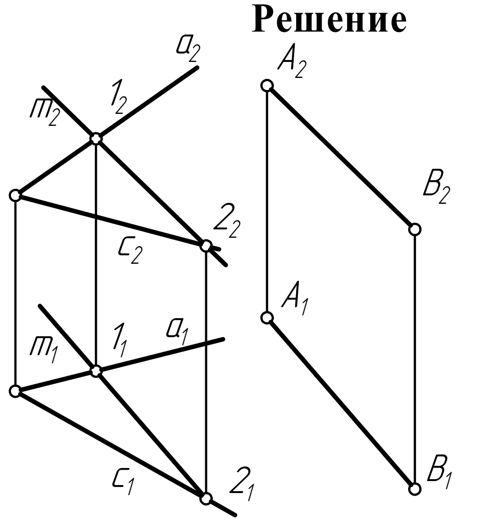
Примеры решения задач по теме
«Прямая, параллельная плоскости, перпендикулярная плоскости. Плоскости параллельные, взаимно перпендикулярные»

Пример 5.1



Достроить недостающую проекцию отрезка **AB**, параллельного плоскости **Г(a⌒c)**.
AB || Г(a⌒c); A$_1$= ?

Решение

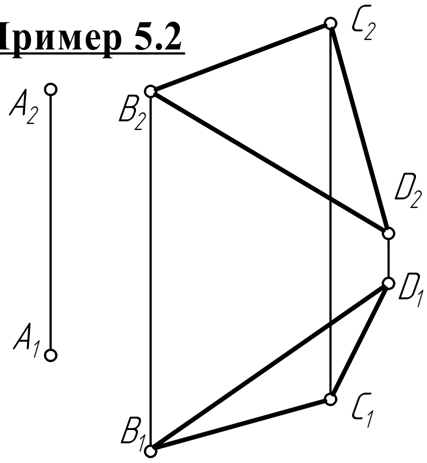


Алгоритм

1) $m_2 \parallel (A_2B_2)$;
$m_2(1_2 2_2) \subset \Gamma_2$;
$m_1(1_1 2_1) \subset \Gamma_1$;
2) $B_1A_1 \parallel m_1$.

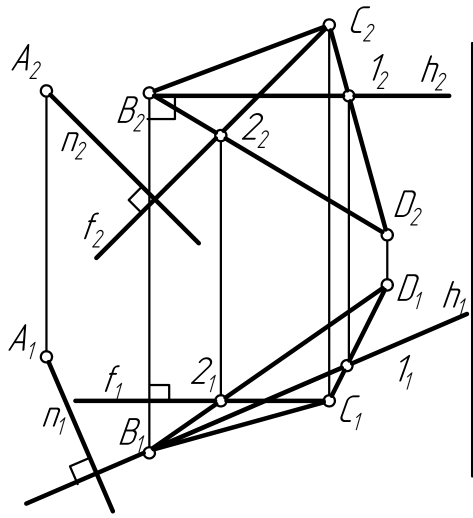
*Строим фронтальную проекцию любой прямой, принадлежащей заданной плоскости, параллельно **(A_2B_2)**. Обозначаем две точки пересечения с заданными прямыми **($1_2 2_2$)**. Достраиваем их горизонтальные проекции по принадлежности **Г**. Через точку **B** проводим прямую, параллельную **m**.*

Пример 5.2



Через точку **A** провести прямую, перпендикулярную плоскости **Δ(BCD)**.
A ⊂ n ⊥ Δ(BCD).

Решение



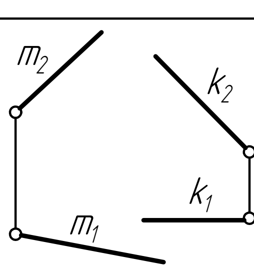
Алгоритм

1) $B_2 \subset h_2 \perp$ л.с.,
$h_2 \cap (C_2D_2) = 1_2$,
$1_1 \subset (C_1D_1)$; $h_1(B_1 1_1) \subset \Delta_1$;
$C_1 \subset f_1 \perp$ л.с.,
$f_1(C_1 2_1) \subset \Delta_1$;
$f_2(C_2 2_2) \subset \Delta_2$;
2) $A_2 \subset n_2 \perp f_2$;
$A_1 \subset n_1 \perp h_1$.

*В плоскости **Δ** строим любые фронталь и горизонталь. Из точки **A** опускаем перпендикуляр к ней, следуя формуле нормали к плоскости.*

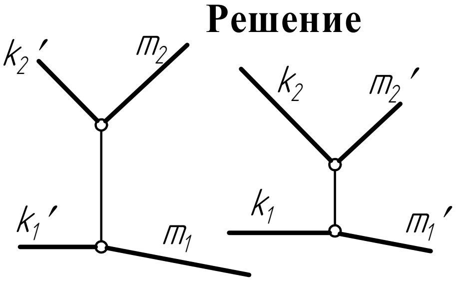
Пример 5.3

$m \dot{=} k$;
$m \subset \Gamma \wedge k \subset \Lambda$,
$\Gamma \parallel \Lambda = ?$



Через скрещивающиеся прямые **m** и **k** провести параллельные плоскости.

Решение



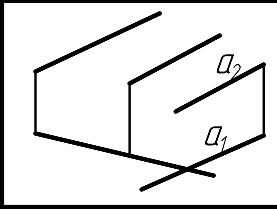
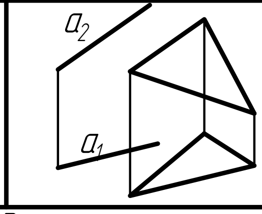
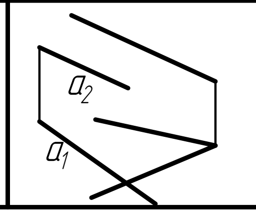
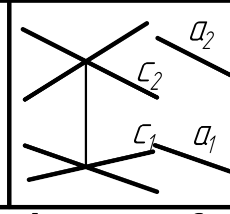
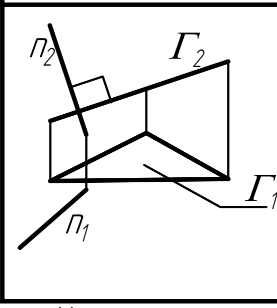
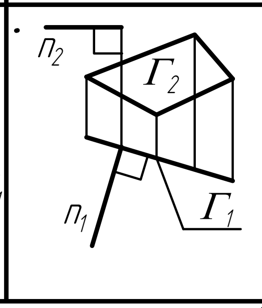
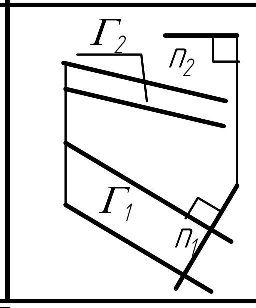
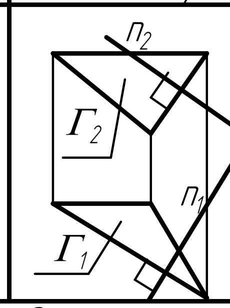
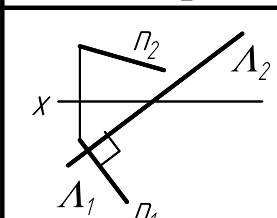
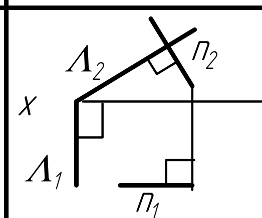
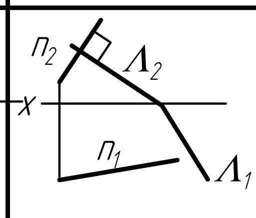
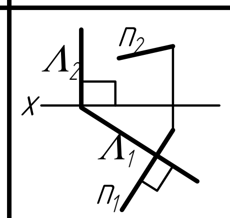
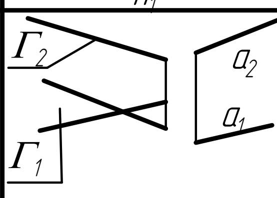
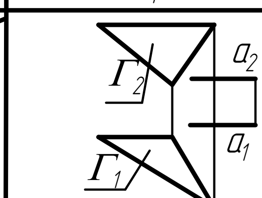
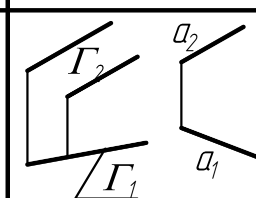
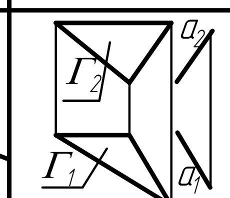
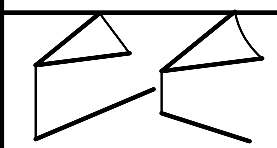
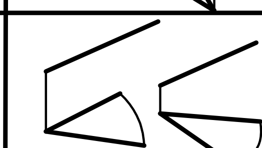
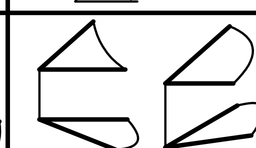
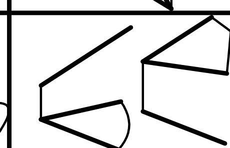
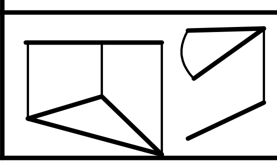
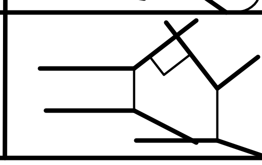
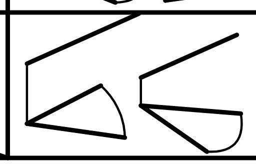
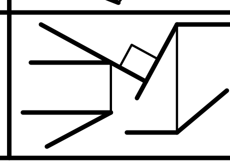
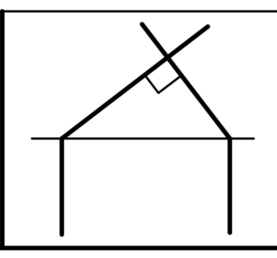
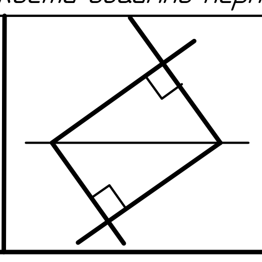
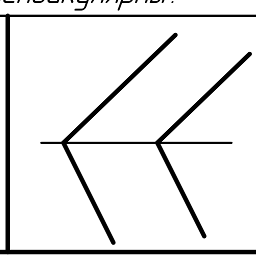
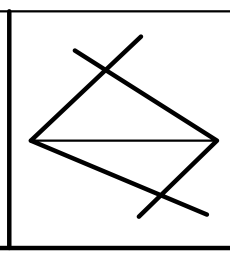
Алгоритм

$k' \cap m \wedge m' \cap k$;
$k' \parallel k \wedge m' \parallel m$;
$\Gamma(k' \cap m) \parallel \Lambda(k \cap m')$.

Проверьте себя!

Обучающий тест 5 по теме

«Прямая, параллельная плоскости, перпендикулярная плоскости. Плоскости параллельные, взаимно перпендикулярные»

№ п/п	Вопрос	1	2	3	4
1	Где прямая **a** параллельна плоскости?				
2	Как расположена прямая, перпендикулярная горизонтально проецирующей плоскости?				
		$\parallel \Pi_2$	$\parallel \Pi_1$	$\perp \Pi_3$	$\perp \Pi_2$
3	Где прямая **n** перпендикулярна заданной плоскости?				
4	Как расположена плоскость, перпендикулярная фронтали?				
		$\parallel \Pi_2$	$\parallel \Pi_3$	$\perp \Pi_2$	$\perp \Pi_1$
5	Где прямая **n** перпендикулярна заданной плоскости (плоскость задана следами)?				
6	Где прямая **a** параллельна плоскости?				
7	Где изображены параллельные плоскости?				
8	Где изображены перпендикулярные плоскости ?				
9	Где плоскости параллельны?				
10	Где плоскости взаимно перпендикулярны?				
	Плоскости заданы следами				

Ответы: 1 3 1 2 4 2 3 2 2 3

Тренировка 5 по теме

«Прямая, параллельная плоскости, перпендикулярная плоскости. Плоскости параллельные, взаимно перпендикулярные»

Ответив правильно на первые восемь вопросов (1 – 8), вы узнаете *фамилию блестящего педагога, учёного с европейским именем в области н. г., основоположника применения фотографии в научно-технических исследованиях, автора крылатой фразы: «Если чертёж является языком техники, одинаково понятным всем образованным народам, то начертательная геометрия служит грамматикою этого мирового языка...».*
Сложив правильно следующие четыре кадра (9–12), вы увидите *годы работы его над огромным классическим трудом, являвшимся лучшим учебным пособием по начертательной геометрии для всех российских учебных заведений в течение полувека.*
Последние четыре чертежа (13–16) покажут, *на скольких страницах изложен этот величайший труд, из которого молодые учёные-геометры и по сей день черпают ценные идеи для своих научных исследований.*

Н а й д и т е, где прямая параллельна:

1) плоскости треугольника общего положения;
2) плоскости о. п., заданной параллельными прямыми;
3) плоскости о. п., заданной пересекающимися прямыми;
4) плоскости о. п., заданной линией наибольшего ската;
5) плоскости о. п., заданной линией наибольшего наклона к Π_2;
6) фронтально проецирующей плоскости;
7) горизонтально проецирующей плоскости;
8) профильно проецирующей плоскости.

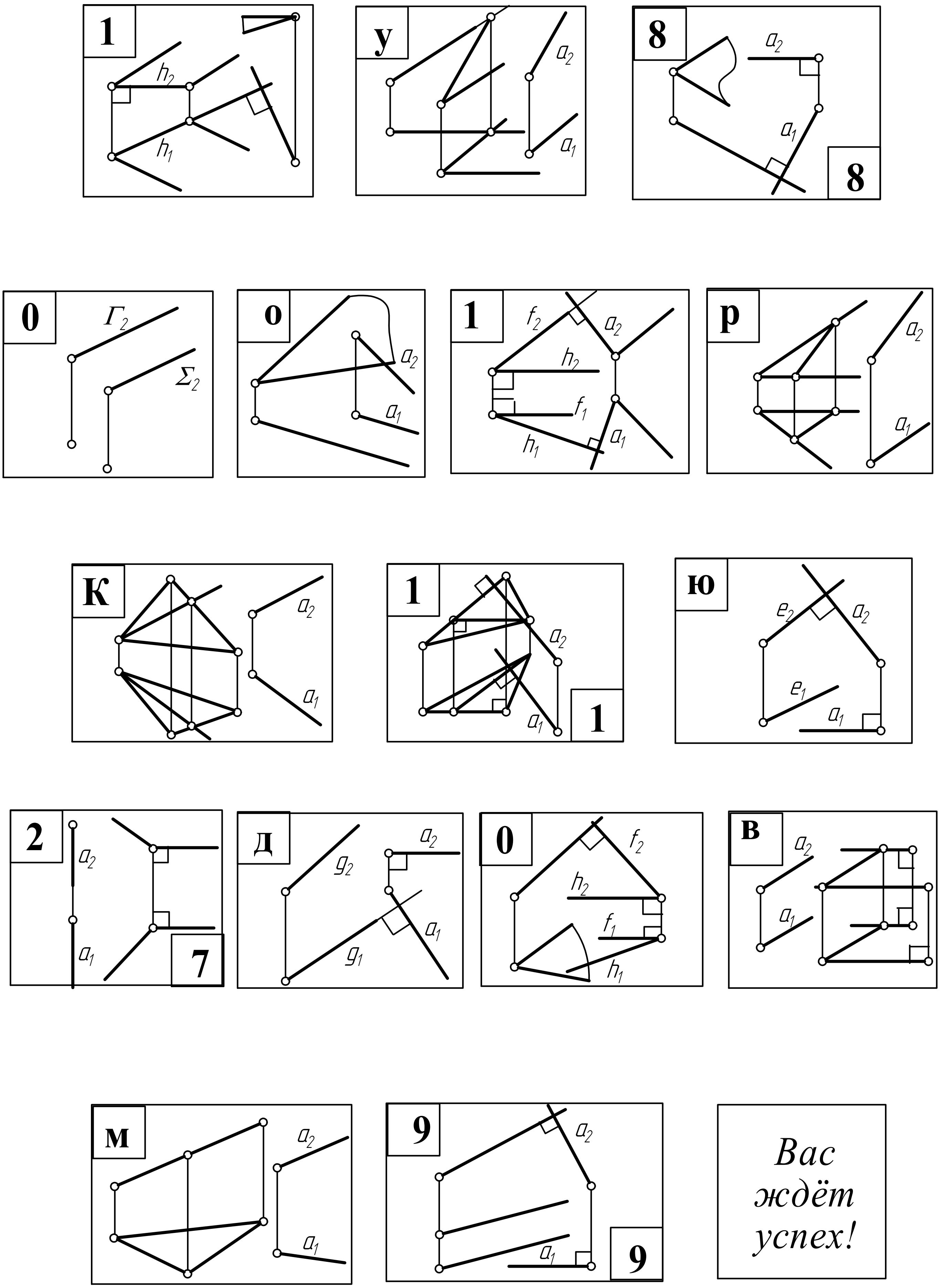
Н а й д и т е, где прямая перпендикулярна:

9) плоскости общего положения;
10) горизонтально проецирующей плоскости;
11) фронтально проецирующей плоскости;
12) профильно проецирующей плоскости.

Н а й д и т е, где изображены:

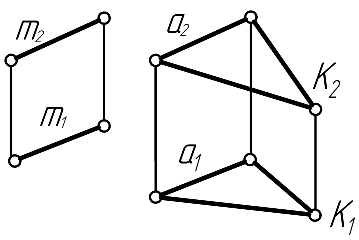
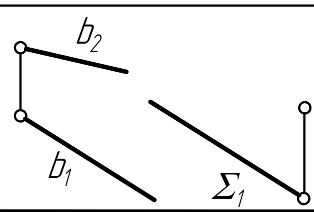
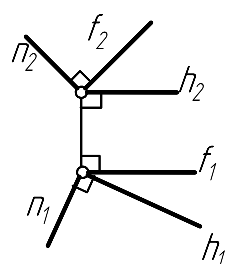
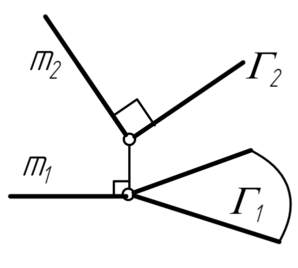
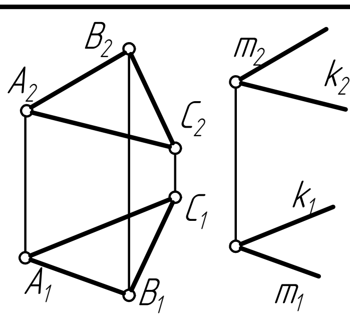
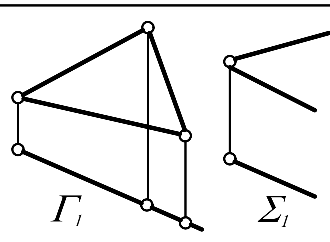
13) взаимно перпендикулярные плоскости общего положения;
14) взаимно перпендикулярные плоскость общего положения и горизонтально проецирующая;
15) взаимно перпендикулярные плоскость общего положения и фронтально проецирующая;
16) параллельные плоскости. ***Мы рады за вас!***

			9				
			10				
			11				
			12				
1	2	3	4	5	6	7	8
			13				
			14				
			15				
			16				

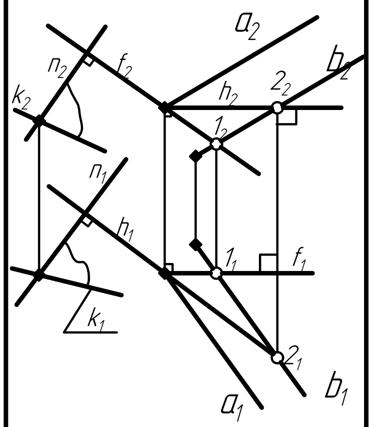
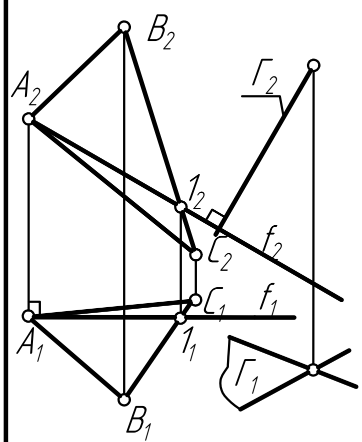
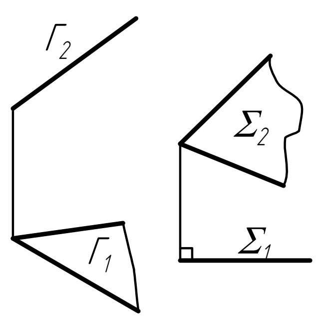
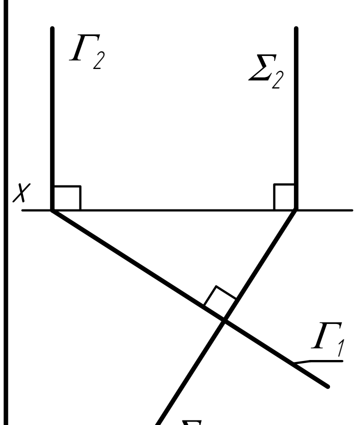

1
h2
h1
у
a2
a1
8
a2
a1
8
0
Г2
Σ2
о
a2
a1
1
f2
a2
h2
f1
h1
a1
р
a2
a1
К
a2
a1
1
a2
a1
1
ю
e2
a2
e1
a1
2
a2
a1
7
д
g2
a2
a1
g1
0
f2
h2
f1
h1
в
a2
a1
м
a2
a1
9
a2
a1
9
Вас
ждёт
успех!

Опорный конспект по теме «Прямая, параллельная плоскости, перпендикулярная плоскости. Плоскости параллельные, взаимно перпендикулярные»

Канва 5.1

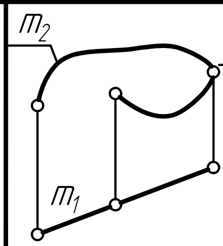
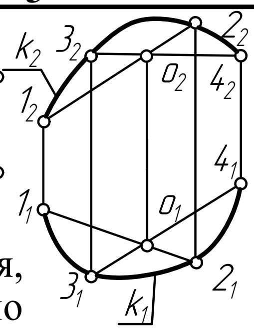
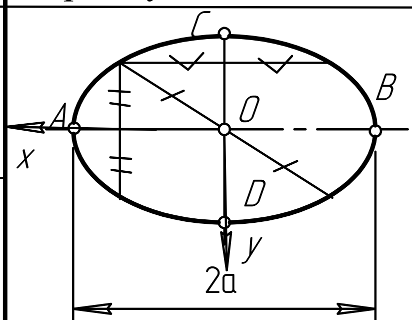
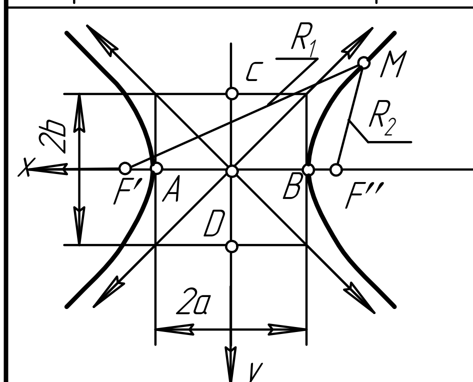
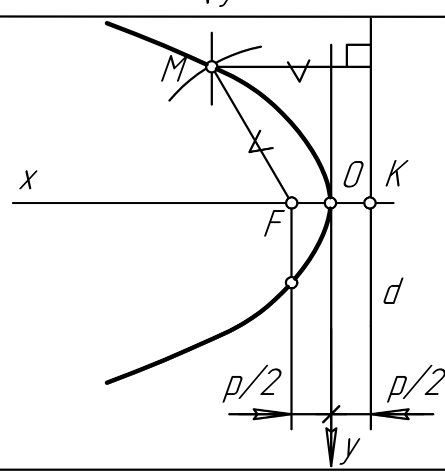
№п/п	Наименование	Чертёж	Характерные признаки чертежа
1	2	3	4
1	Прямая, параллельная плоскости **Г(a,К); m ‖ Г**		$m_2 \parallel a_2 \wedge m_1 \parallel a_1 \Rightarrow m \parallel \Gamma(a,K)$. **Прямая параллельна плоскости, если она параллельна прямой, принадлежащей плоскости.**
	$b \parallel \Sigma(\Sigma_1) \perp \Pi_1$		$b_1 \parallel \Sigma_1 \Rightarrow b \parallel \Sigma$
2	Прямая, перпендику-лярная плоскости **$n \perp \Sigma(f \cap h)$**		$n \perp \Sigma\ (f \cap h) \Rightarrow n_2 \perp f_2 \wedge n_1 \perp h_1$ **формула нормали к плоскости** **Прямая перпендикулярна плоскости, если перпендикулярна двум пересекающимся прямым этой плоскости.**
	$m \perp \Gamma$		*Плоскость общего положения – перпендикуляр к ней также прямая общего положения.* *Плоскость частного положения– перпендикуляр к ней также прямая частного положения.* $m_2 \perp \Gamma_2 \Rightarrow m \perp \Gamma;\ m \parallel \Pi_2$
3	Параллельные плоскости **Г‖ Σ**		$\Gamma(ABC) \parallel \Sigma\ (m \cap k)$, если $AB \parallel m$, $AC \parallel k$. **Если две пересекающиеся прямые одной плоскости соответственно параллельны двум пересекающимся прямым другой плоскости, то такие плоскости параллельны.**
	Параллельные плоскости **Г‖ Σ**		$\Gamma \perp \Pi_1 \wedge \Sigma \perp \Pi_1;$ $\Gamma_1 \parallel \Sigma_1 \Rightarrow \Gamma \parallel \Sigma$

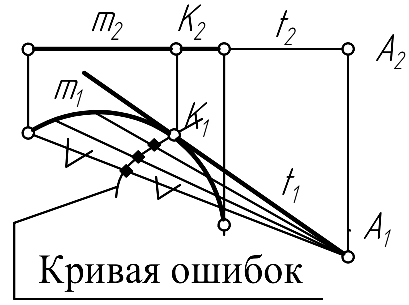
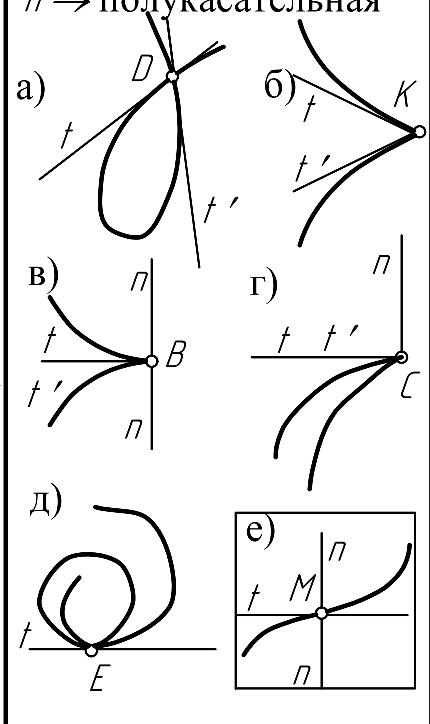
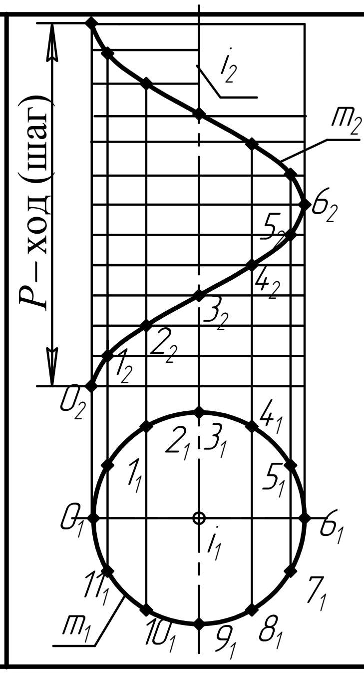
Продолжение таблицы

1	2	3	4
4	Перпендику- лярные плоскости. **Σ⊥Γ**		$n_2 \perp f_2 \wedge n_1 \perp h_1 \rightarrow n \perp \Gamma \Rightarrow$ $\Sigma(n \cap k) \perp \Gamma(a \parallel b).$ **Плоскости перпендикулярны, если каждая проходит через перпендикуляр к другой плоскости.**
	Перпендику- лярные плоскости. **Σ⊥Γ**		$\Gamma \perp f \subset \Sigma(ABC) \Rightarrow$ $\Gamma \perp \Sigma\ (ABC)$
	Перпендику- лярные плоскости. **Σ⊥Γ**		$\Gamma \perp \Sigma$, так как $\Gamma \perp \Pi_2$, а $\Sigma \parallel \Pi_2$
	Перпендику- лярные плоскости. **Σ⊥Γ** (плоскости заданы следами)		$\Gamma \perp \Pi_1 \wedge \Sigma \perp \Pi_1 \rightarrow$ $\Gamma_1 \perp \Sigma_1 \Rightarrow \Gamma \perp \Sigma.$ **Если одноимённые следы проецирующих плоскостей перпендикулярны, то плоскости взаимно перпендикулярны.**

Опорный конспект по теме «Кривые линии»

Канва 5.2

№п/п	Определение	Чертёж	Информация о чертеже
1	2	3	4
1	**<u>Кривые плоские</u>** определяются как траектории движущихся точек. *Все точки плоской кривой принадлежат одной плоскости*	 m→плоская, очевидно по чертежу  Метод хорд	Так как положение точки в любой момент определяется двумя её проекциями, то и сама кривая в общем случае определяется двумя своими проекциями. *Хорды пересекаются – кривая плоская*
	Плоские кривые могут определяться <u>алгебраическими уравнениями:</u> а) эллипс $x^2/a^2+y^2/b^2=1$; $R_1+R_2=2a$;		**Проекция эллипса есть эллипс или в частности– окружность.** ***AB*** *и* ***CD*** *– оси эллипса (большая и малая) или сопряжённые диаметры, так как хорды, параллельные одному диаметру, делятся другим пополам.*
	КОНИКИ б) гипербола $x^2/a^2-y^2/b^2=1$; $R_1-R_2=2a$;		*Гипербола имеет две оси симметрии, называемые действительной осью (пересекает гиперб.) и мнимой (не пересекает), точка их пересечения называется центром гиперболы. Две прямые, проходящие через центр, – асимптоты гиперболы.*
	в) парабола $y^2=2px$; $\|MF\|=\|Md\|$;		*Парабола имеет одну ось симметрии и не имеет центра симметрии.* ***d*** *– директриса,* ***F*** *– фокус, отрезок* ***p*** ***/FK/*** *– параметр параболы.*
	г) окружность $x^2+y^2=R^2$;		
	<u>трансцендентными уравнениями:</u> эвольвента, циклоида, спираль Архимеда, синусоида и т. д.	**Проекция гиперболы и параболы есть соответственно гипербола и парабола**	
		<u>Графически порядок кривой определяется числом точек пересечения её с произвольной прямой,</u> для алгебраической кривой– степенью её уравнения	

№п/п	Определение	Чертёж	Информация о чертеже
1	2	3	4
2	<u>**Касательная и нормаль кривой.**</u> <u>**Касательная к плоской кривой**</u> – это предельное положение секущей. <u>**Нормаль к кривой–**</u> это перпендикуляр к её касательной в точке касания. <u>Особые точки:</u> а) **D** – *узловая или самопересечения,* в которой кривая имеет две касательные; б) **K**– *угловые (точки излома);* в) **B** – *точка возврата первого рода (заострения);* г) **C** – *точка возврата второго рода (вершина клюва);* д) **E** – *точка самоприкосновения;* е) **M** – *точка перегиба*	 **Особые точки кривой *(иррегулярные)*** $n \rightarrow$ полукасательная  M→специальная точка	<u>Касательная</u> **t** к горизонтальной кривой **m** построена при помощи <u>**кривой ошибок.**</u> Дугу кривой, имеющую в каждой точке определён–ную касательную, не имеющую особых точек, называют *плавной, гладкой, монотонной (эллипс,овал...).* <u>**Свойства кривых, сохраняемые при ортогональном проецировании:**</u> *1) касательная к кривой проецируется в касательную к её проекции;* *2) несобственным точкам кривой соответствуют несобственные точки её проекции;* ***3) порядок плоской*** *алгебраической кривой не изменяется;* *4) число точек самопересечения проекций плоской кривой равно числу точек* ***самопересечения самой кривой***
3	Все точки **пространственных кривых** не принадлежат одной плоскости. Примером служит <u>цилиндрическая винтовая линия –</u> *это траектория точки, движущейся вдоль образующей цилиндра, в то время как сама образующая вращается вокруг оси цилиндра, оба эти движения строго пропорциональны*	 	<u>**Порядок пространственной кривой**</u> может быть определён геометрически числом точек пересечения этой кривой с произвольной плоскостью. Сюда входят как мнимые точки, так и действительные точки пересечения

Вопросы для самопроверки

1. Когда прямая параллельна плоскости?
2. Как располагаются проекции прямой, перпендикулярной плоскости? (Формула нормали к плоскости)
3. Как расположена прямая, перпендикулярная проецирующей плоскости?
4. Когда плоскости параллельны?
   Как располагаются следы параллельных плоскостей?
5. Когда одна плоскость перпендикулярна другой?
6. Что такое кривая линия, какие кривые вы знаете?
   Перечислите кривые второго порядка.
7. Какие свойства плоских кривых сохраняются при их проецировании?
8. Для чего служит способ хорд?
9. Как строится касательная к кривой?

В н и м а н и е ! *Итоговый тест* **5**

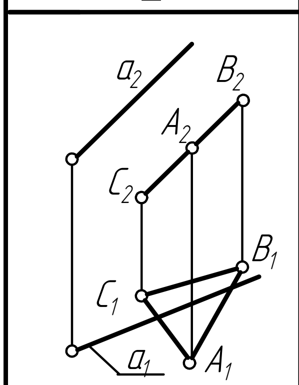
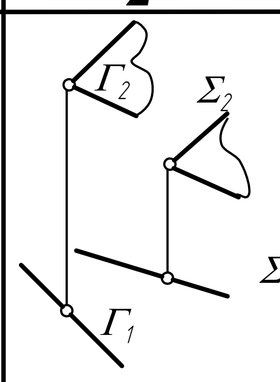
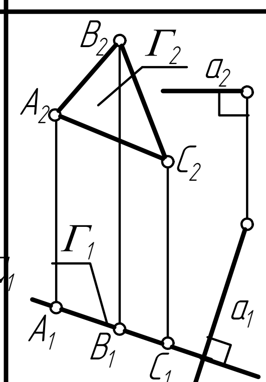
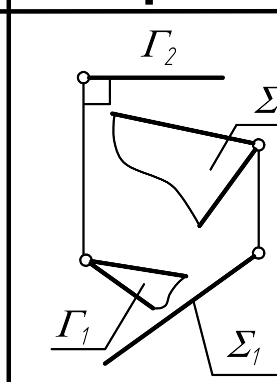
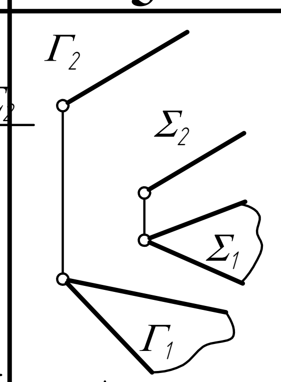
▭ 1. На каком чертеже прямая **а** параллельна плоскости **Г(АВС)**?

⊕ 2. В каком случае прямая **а** перпендикулярна плоскости **Г**?

⦶ 3. Укажите чертёж параллельных плоскостей.

⊙ 4. В каком случае **Г** и **Σ** взаимно перпендикулярны?

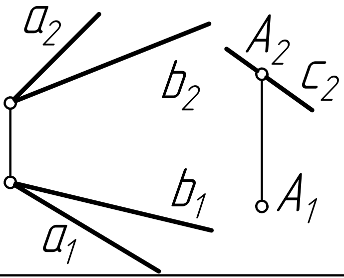
⊖ 5. В каком случае **Г** и **Σ** пересекаются и не перпендикулярны между собой?

1	2		4	5
				
▭	⊖	⊕	⊙	⦶

З А Н Я Т И Е   5

Прямая, параллельная плоскости, перпендикулярная плоскости. Плоскости параллельные и взаимно перпендикулярные. Кривые линии

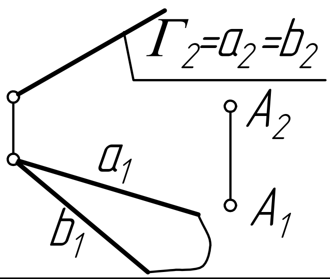
5.1



Дано: $\mathbf{c \parallel \Sigma(a \cap b);\ c \supset A.}$

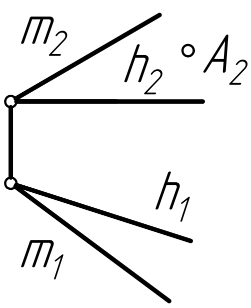
Построить $\mathbf{c_1}$.

5.2



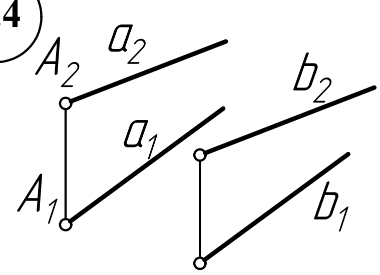
Провести прямую **k**, параллельную плоскости **Г** и проходящую через точку **A**.
$\mathbf{k \parallel \Gamma;\ k \supset A.}$
Сколько решений?

5.3



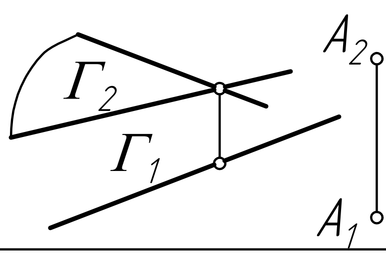
Из точки **A** восставить перпендикуляр к плоскости **Г(m ∩ h)**, если $\mathbf{A \subset \Gamma}$.
$\mathbf{A \subset \Gamma(m \cap h);}$
$\mathbf{A \subset n \perp \Gamma.}$

5.4



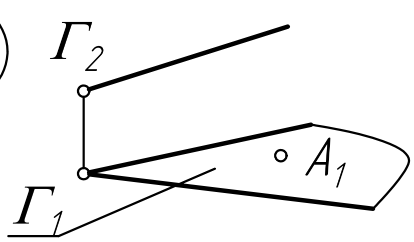
$\mathbf{n \perp \Gamma(a \parallel b),}$
$\mathbf{n \supset A;}$
$\mathbf{n_2 = ?\ \ n_1 = ?}$

5.5



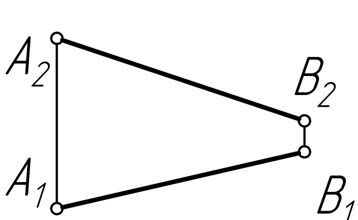
Из точки **A** опустить перпендикуляр к плоскости **Г (Г$_1$)**.

5.6



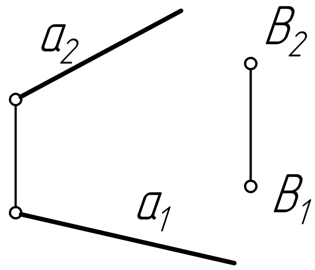
Дано: $\mathbf{\Gamma(\Gamma_2);\ \ A \subset \Gamma.}$
Провести $\mathbf{n \supset A,\ n \perp \Gamma.}$

5.7



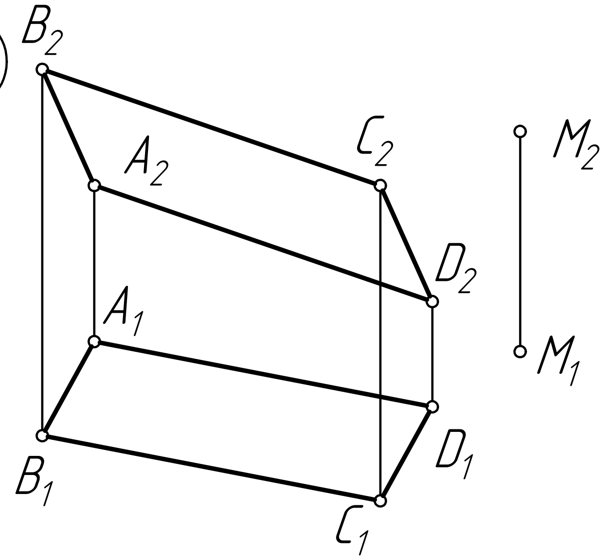
Построить все множество точек, одинаково удаленных от концов отрезка **AB**.

5.8



Построить $\Gamma \supset B$; $\Gamma \perp \Pi_2$; $\Gamma \parallel a$.

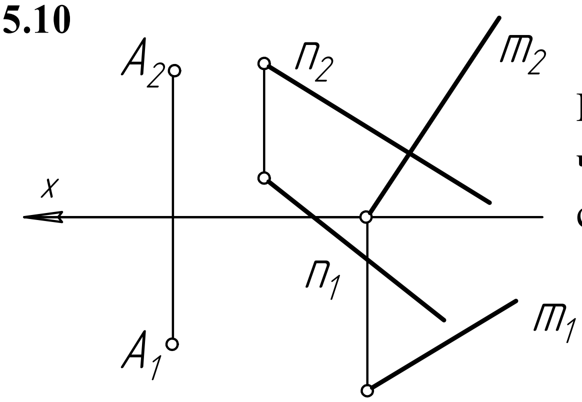
5.9



Дано: $\Sigma(ABCD)$; $M \notin \Sigma$

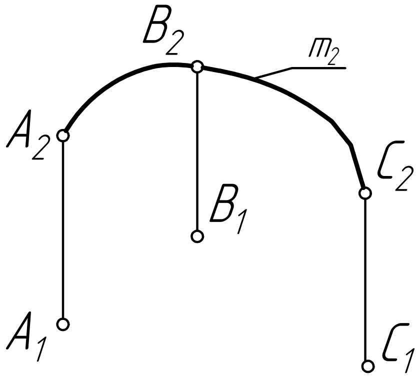
Построить $\Gamma \supset M$, $\Gamma \parallel \Sigma$; $\Gamma(f \cap h)$

5.10



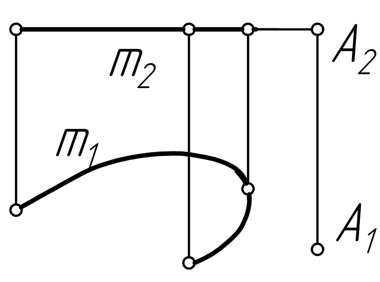
Построить следы плоскости **Г**, проходящей через данную точку **A** и параллельной данным скрещивающимся прямым **m** и **n.**

5.11



Построить горизонтальную проекцию плоской кривой **m** по трем точкам, кроме **A, B, C.**

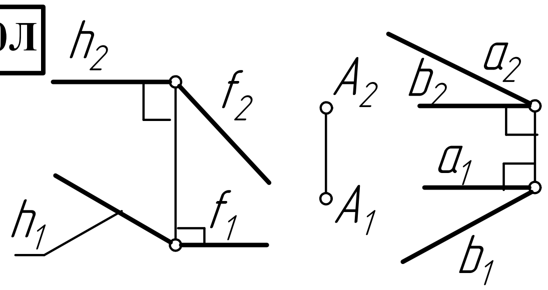
5.12



Через точку **A** провести касательную к кривой **m.**

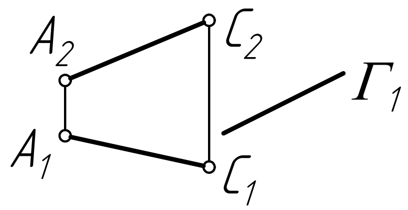
Задачи для лидеров

10Л



Через точку **А** провести плоскость, перпендикулярную двум заданным плоскостям.

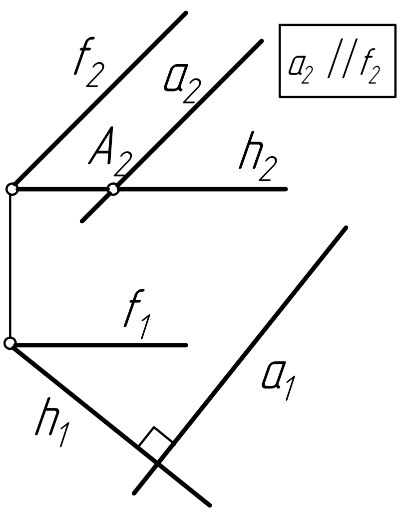
11Л



Построить проекции квадрата **ABCD**, если диагональ **BD** ‖ **Г**.

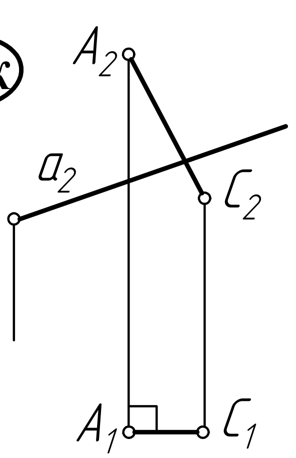
Задачки для самых крутых!

10К



Построить квадрат **ABCD** с диагональю **AC**, принадлежащей прямой **a,** и диагональю **BD,** принадлежащей плоскости **Σ(h$\frown$f).**

11К



Найти горизонтальную проекцию равнонаклонённой к плоскостям проекций прямой **a** и построить ромб **ABCD,** если его вершина **D** принадлежит прямой **a,** а длина большей диагонали – **80 мм.**

§ 6. П о в е р х н о с т и.

Основные понятия и определения. Группирование поверхностей. Поверхности линейчатые развёртывающиеся и неразвёртывающиеся

Поверхность – совокупность всех положений движущейся в пространстве линии, которую мы называем о б р а з у ю щ е й.

Н а п р а в л я ю щ а я – линия, по которой перемещается образующая. Семейства образующих и направляющих создают к а р к а с.

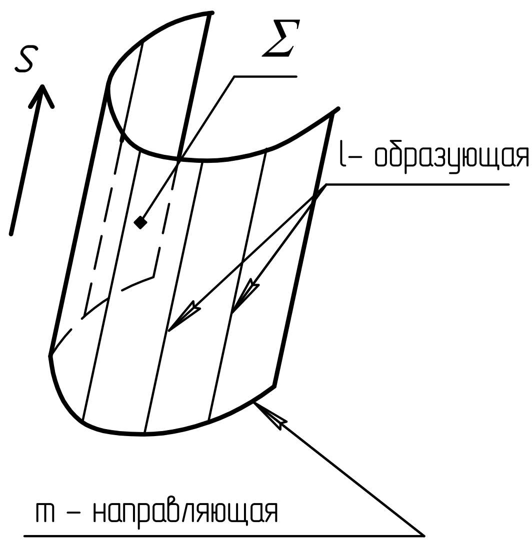


Рис. 83

Л и н е й н ы й каркас – семейство линий, связанных между собой определённой зависимостью, единым законом образования.

Н е п р е р ы в н ы й каркас – поверхность задана бесконечно плотным числом образующих.

Д и с к р е т н ы й каркас – поверхность задана конечным числом равномерно расположенных образующих.

З а к о н каркаса – закон движения образующей.

О п р е д е л и т е л ь поверхности – совокупность геометрических условий, однозначно задающих поверхность, позволяющих реализовать кинематический закон образования поверхности.

Определитель состоит из двух частей:

1) **Σ (m,s)** – фигур, задающих поверхность;

2) $(l^i \cap m,\ l^i \parallel s)$ – закона образования поверхности.

*(**Σ** – цилиндрическая поверхность, задана кривой направляющей **m** и вектором **s**, прямолинейная образующая l^i в любом своём положении пересекает направляющую **m** и остается параллельной заданной прямой **s**.)*

П о р я д о к поверхности определяется числом точек пересечения с произвольной прямой. Плоскость пересекает поверхность по кривой того же порядка, что и сама поверхность.

*Поверхность считается заданной на чертеже, если возможно построение проекций любой её точки. Точка принадлежит поверхности, когда располагается на линии, принадлежащей данной поверхности. Линию по принадлежности поверхности выбираем простейшую в графическом построении **(прямую и окружность).***

В н и м а н и е ! В курсе начертательной геометрии рассматривают только **б о к о в у ю** поверхность, оснований нет.

Группирование поверхностей

Группирование поверхностей возможно: 1) по форме образующей;
2) по закону образования.

По форме образующей и закону образования.

Линейчатые (*l – прямая*)

развертывающиеся:

1) призматические $\Sigma\,[(m,s)(l \cap m, l \parallel s)]$;
2) пирамидальные $\Gamma\,[(m,S)(l \cap m, l \supset S)]$;
3) цилиндрические $\Sigma\,[(m,s)(l \cap m, l \parallel s)]$;
4) конические $\Gamma\,[(m,S)\ (l \cap m, l \supset S)]$;
5) торсовые $\Omega\,[(m)\ (l \cup m)]$

неразвертывающиеся:

1) цилиндроид;
2) коноид;
3) гиперболический параболоид (косая плоскость);
$\Phi\,[(m,n,\Gamma)(l \cap m, l \cap n, l \parallel \Gamma)]$;
4) однополостный гиперболоид

Нелинейчатые (*l – кривая*). Поверхности вращения Ф [(l,i)(l ⟲ i)]

закономерные: *(l – линия, описываемая алгебраическим уравнением)*

2-го порядка квадрики

1) цилиндр круговой;
2) конус круговой;
3) сфера;
4) параболоид вращения;
5) эллипсоид вращения;
6) гиперболоид однополостный;
7) гиперболоид двуполостный;
8) тор-лимон, тор-глобоид;

4-го порядка

9) тор самопересекающийся;
10) тор соприкасающийся;
11) тор-кольцо.

общего вида *(l – линия, не задаваемая алгебраическим уравнением)*

Циклические *(l – окружность постоянного или переменного радиуса)*; **трубчатые, каналовые.**

Топографические *(задаются непрер. множеством горизонталей)*

Винтовые поверхности $\Phi\,[(m,i,\Gamma)(l \cap m, l \cap i, l \parallel \Gamma)]$:

1) прямой геликоид
2) наклонный геликоид

Поверхности линейчатые развёртываемые

Призматическая поверхность образована прямолинейной образующей, перемещающейся по ломаной прямой направляющей, в любом своём положении образующая параллельна заданной прямой.

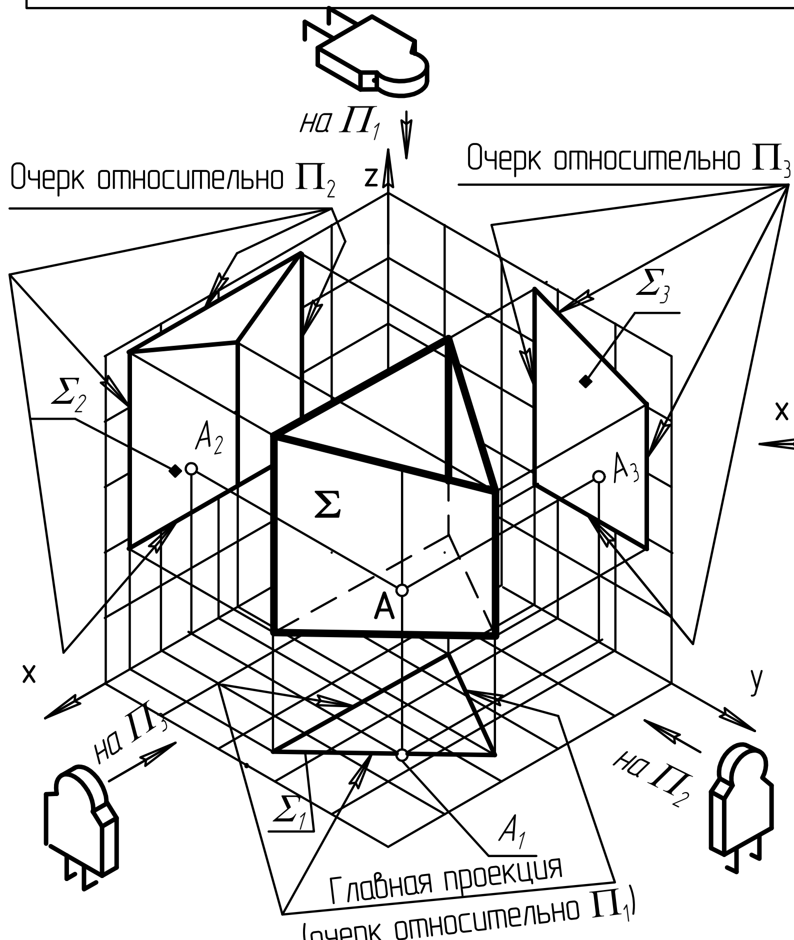


Рис. 84

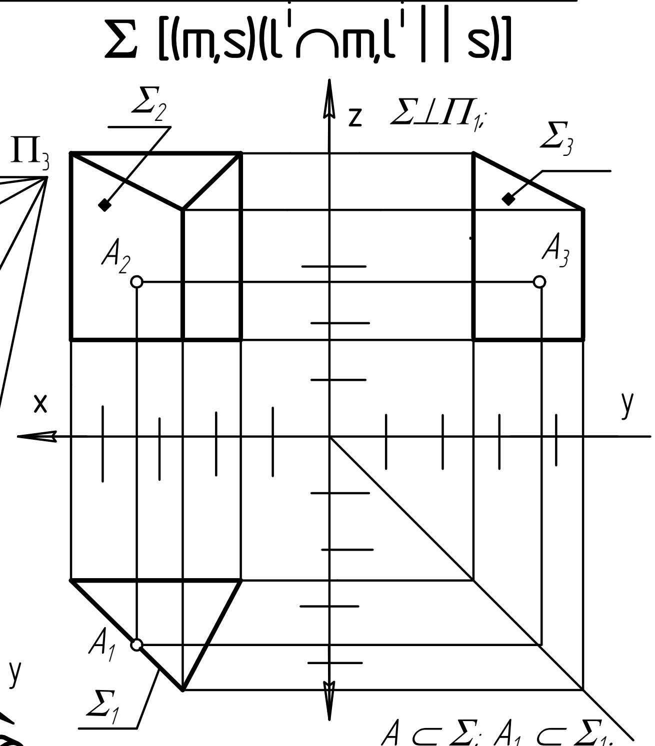


Рис. 85

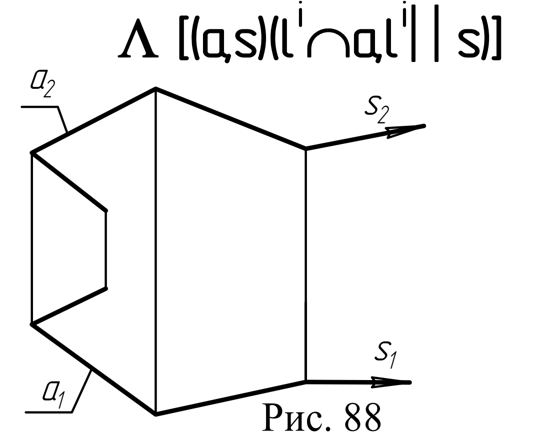


Рис. 88

Призма Λ общего положения задана проекциями определителя.

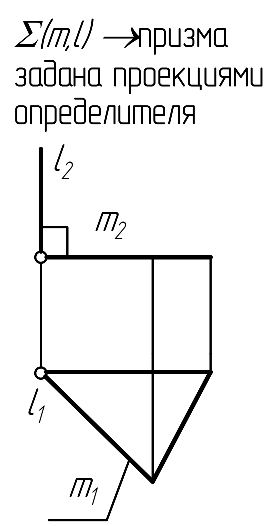


Рис. 86

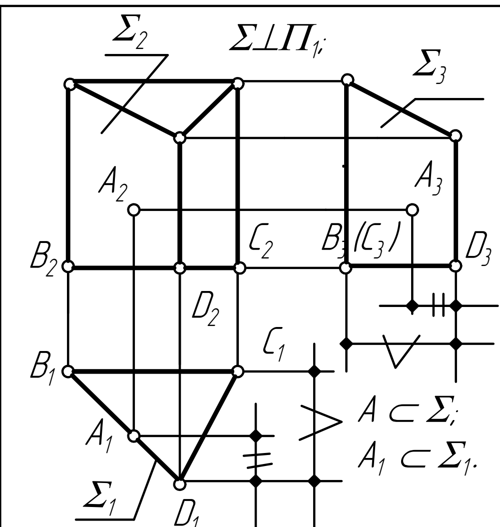


Рис. 87

Обратите внимание, как просто обходиться без осей при построении трёх проекций. За базу отсчёта принимаем любую из точек и от неё в нужном направлении откладываем размеры по оси ординат (рис. 87).

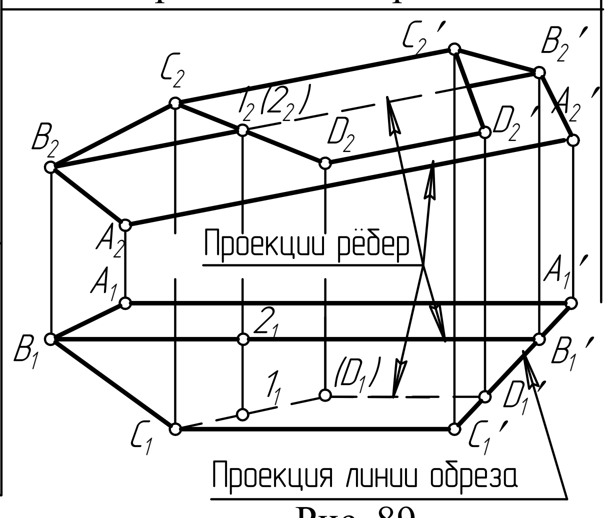


Рис. 89

На рис. 89 – проекции поверхности трёхгранной призмы.

<u>Пирамидальная поверхность</u> образована прямолинейной образующей, перемещающейся по ломаной прямой направляющей, в любом своём положении образующая проходит через фиксированную точку пространства, называемую вершиной.

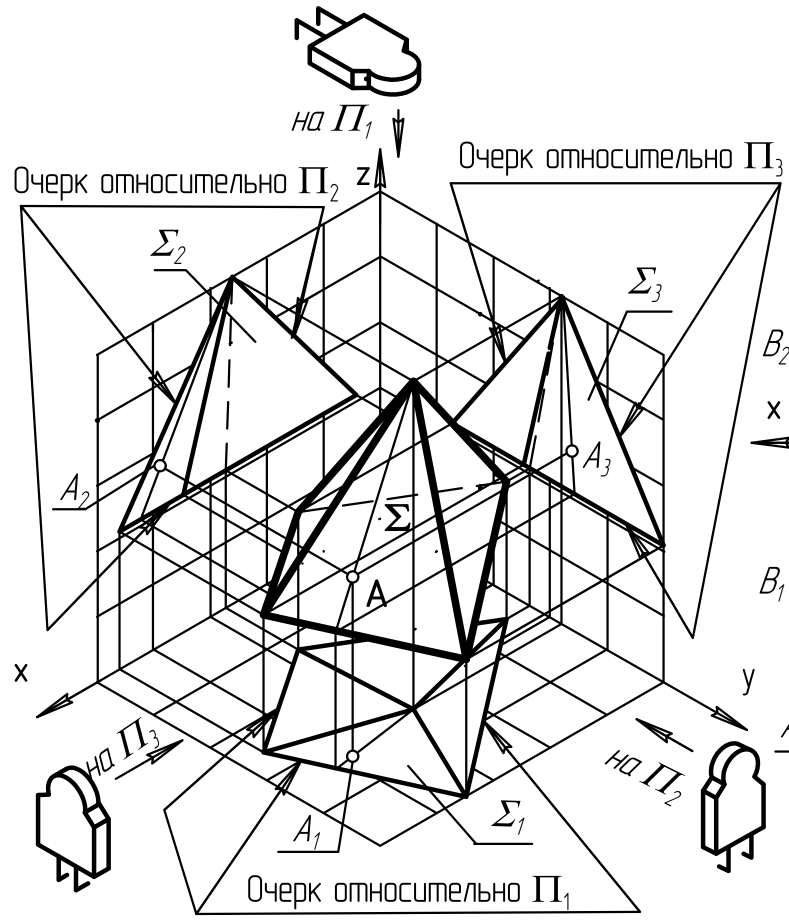
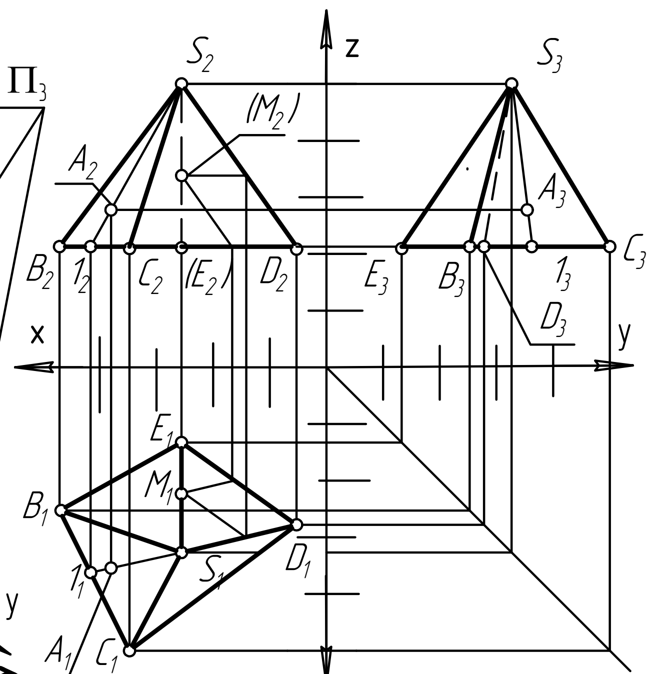


Рис. 90

$$\Sigma\ [(m,S)(l^i \cap m, l^i \supset S)]$$



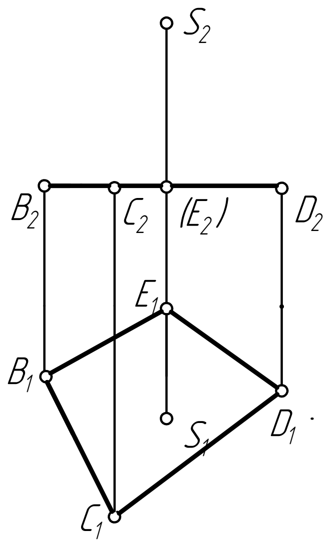
$\Sigma(BCDE,\ S)$; $A \subset \Sigma$, $A(A_2)$, $A_1 = ?$

$A_2 \subset l_2(S_2 1_2) \subset \Sigma_2$; $(S_1 1_1) \subset \Sigma_1$;

$A_2 \subset (S_2 1_2) \wedge A_1 \subset (S_1 1_1) \Rightarrow A \subset \Sigma$

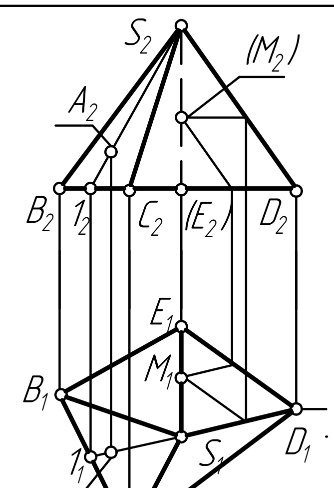
$M \subset (SE) // \Pi_3$, $M \subset k // (DE) \vee e // (SD)$.

Рис. 91



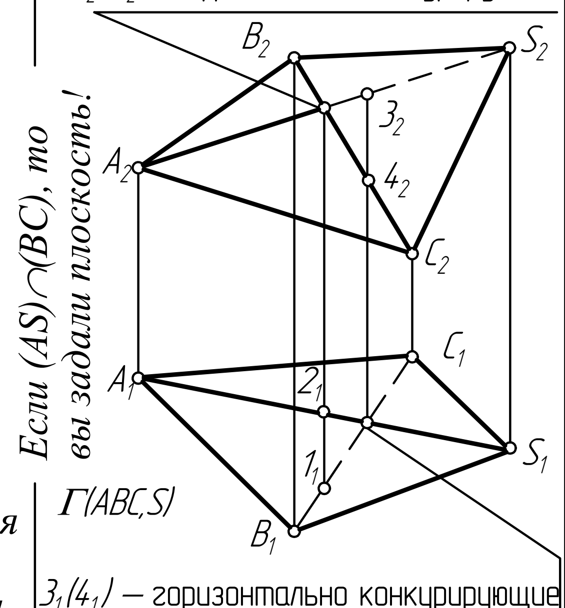
$\Sigma\ (BCDE,\ S)$

Поверхность задана проекциями определителя.



Точка, принадлежащая профильному ребру, строится при помощи прямой, параллельной одной из сторон треугольника.

$1_2(2_2)$ – фронтально конкурирующие



$\Gamma(ABC,S)$

$3_1(4_1)$ – горизонтально конкурирующие

1,2→определяем видимость относительно $\mathbf{\Pi_2}$;

3,4 – относительно $\mathbf{\Pi_1}$.

Рис. 92

Рис. 93

Рис. 94

Цилиндрическая поверхность образована прямолинейной образующей, перемещающейся по кривой направляющей, в любом своём положении образующая остаётся параллельной заданной прямой.

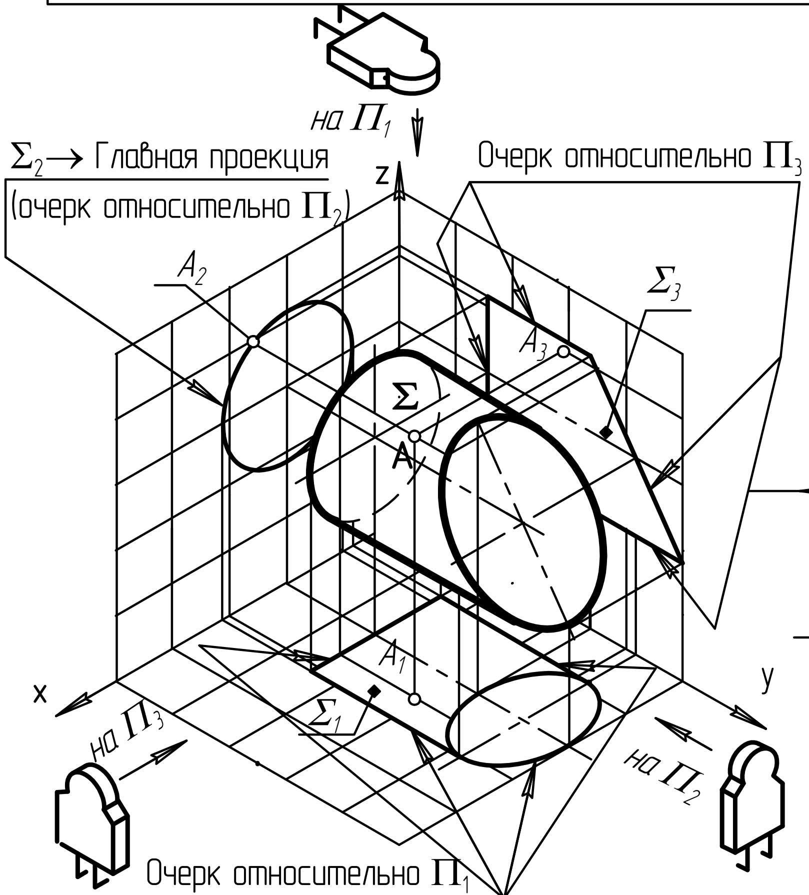


Рис. 95

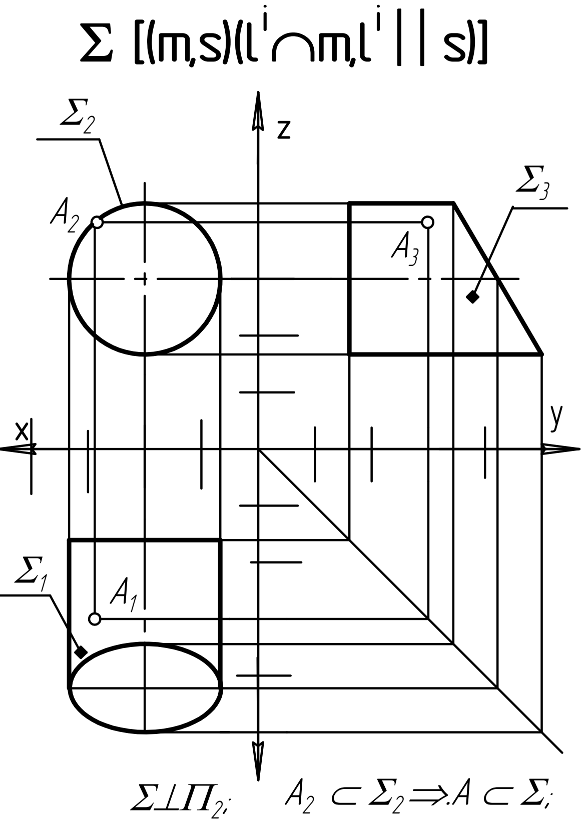
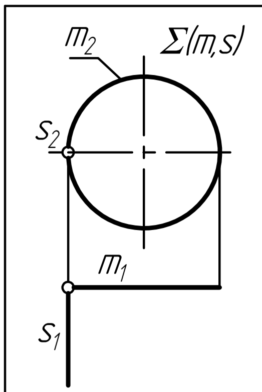
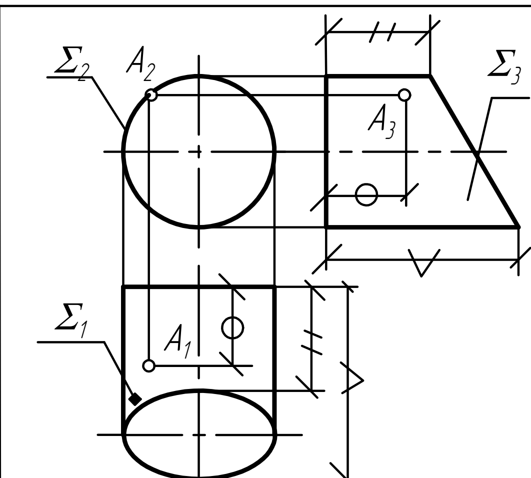


Рис. 96



Поверхность задана проекциями определителя

Рис. 97



На чертеже проекции отсека фронтально проецирующего цилиндра

Рис. 98

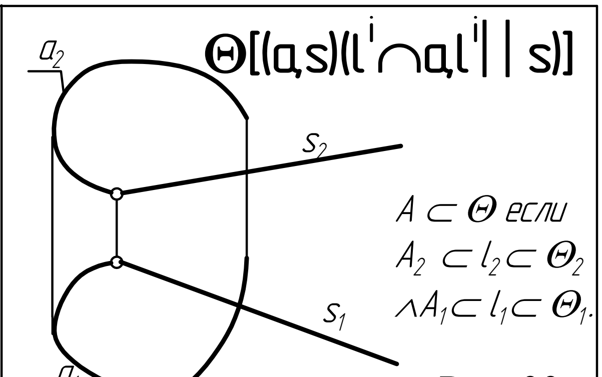


Рис. 99

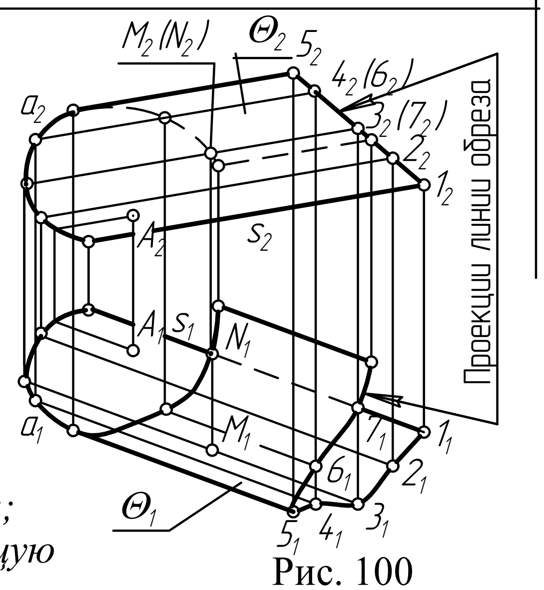


Рис. 100

При построении проекций любой поверхности общего вида соблюдаем следующие правила:

1) каркас задаём из конечного числа одних и тех же равномерно расположенных образующих;

2) крайние образующие строим с учётом видимости, промежуточные – тонкими линиями;

3) задав одну проекцию линии обреза, недостающую достраиваем по принадлежности поверхности, аналогичное построение используем для проверки на плоскостность.

<u>Коническая поверхность</u> образована прямолинейной образующей, движущейся по кривой направляющей, в любом своём положении образующая проходит через фиксированную точку пространства, называемую вершиной.

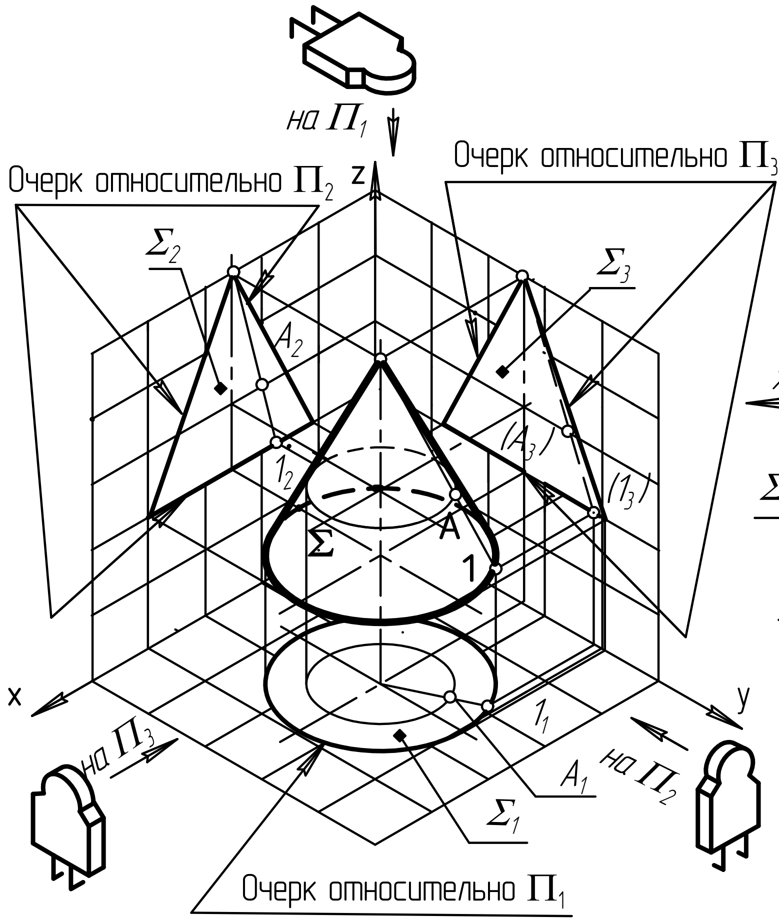
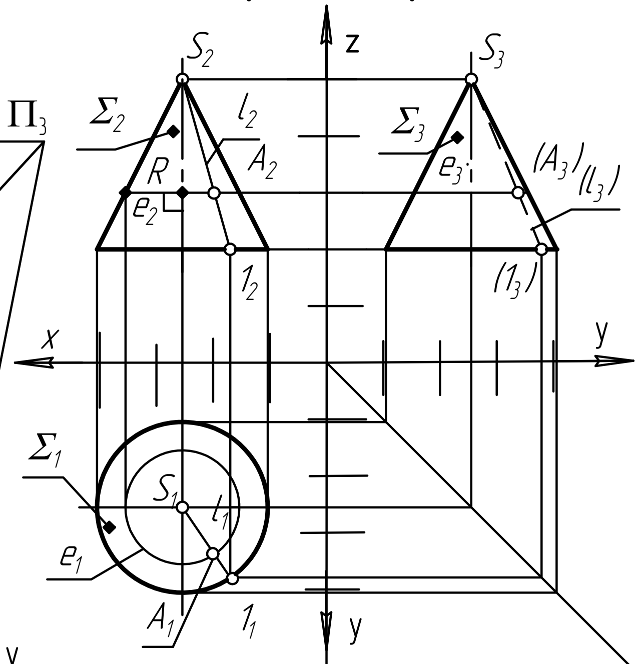


Рис. 101

$$\Sigma[(m,S)(l^i \cap m, l^i \supset S)]$$



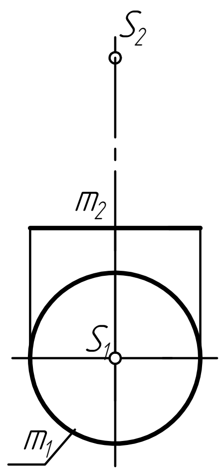
$\Sigma(m, S)$; $A \subset \Sigma$, $A(A_2)$, $A_1 = ?$

1 вар. $A_2 \subset l_2(S_2 1_2) \subset \Sigma_2$; $(S_1 1_1) \subset \Sigma_1$;

$A_2 \subset (S_2 1_2) \wedge A_1 \subset (S_1 1_1) \Rightarrow A \subset \Sigma$

2 вар. $A_2 \subset e_2 \subset \Sigma_2 \wedge A_1 \subset e_1 \subset \Sigma_1 \Rightarrow A \subset \Sigma$

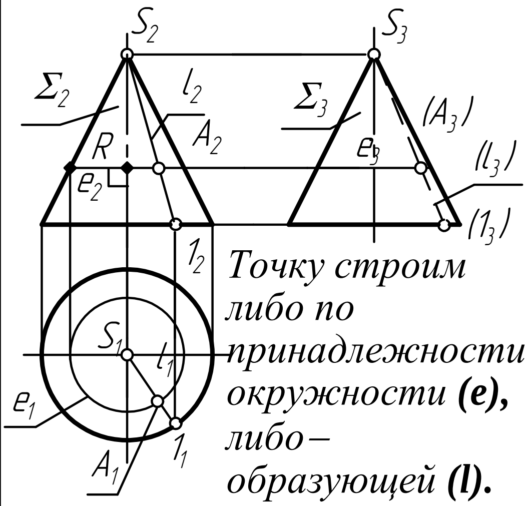
Рис. 102



$\Sigma(m,S)$

Поверхность задана проекциями определителя

Рис. 103



Точку строим либо по принадлежности окружности ***(e)****, либо – образующей* ***(l)****.*

Выполнен чертёж прямого кругового конуса с горизонтально проецирующей осью

Рис. 104

$$\Delta[(k,M)(l^i \cap k, l^i \supset M)]$$

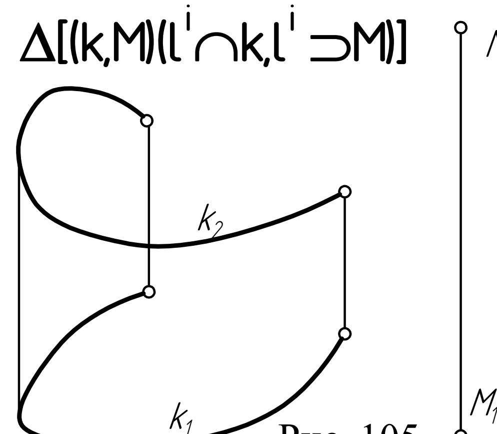


Рис. 105

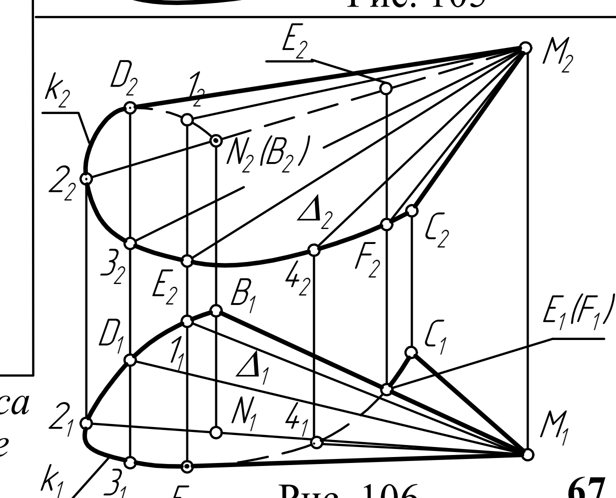


Рис. 106

На рис. 106, где построены проекции конуса общего вида, промежуточные образующие обозначены цифрами.

Поверхности линейчатые неразвёртываемые

<u>Поверхности Каталана (с двумя направляющими и плоскостью параллелизма)</u> образованы прямолинейной образующей, перемещающейся по двум направляющим. В любом своём положении образующая остаётся параллельной заданной плоскости параллелизма.

Отличие поверхностей в форме направляющих:

<u>цилиндроид</u> *– направляющие кривые (если плоские, то не в одной плоскости);*
<u>коноид</u> *– одна прямая, другая кривая (не принадлежащие одной плоскости);*
<u>косая плоскость</u> *(гиперболический параболоид) – обе прямые (скрещивающиеся).*

$$\Phi\ [(m,n,\Gamma \parallel \Pi_2)(l^i \cap m, l^i \cap n, l^i \parallel \Pi_2)]$$

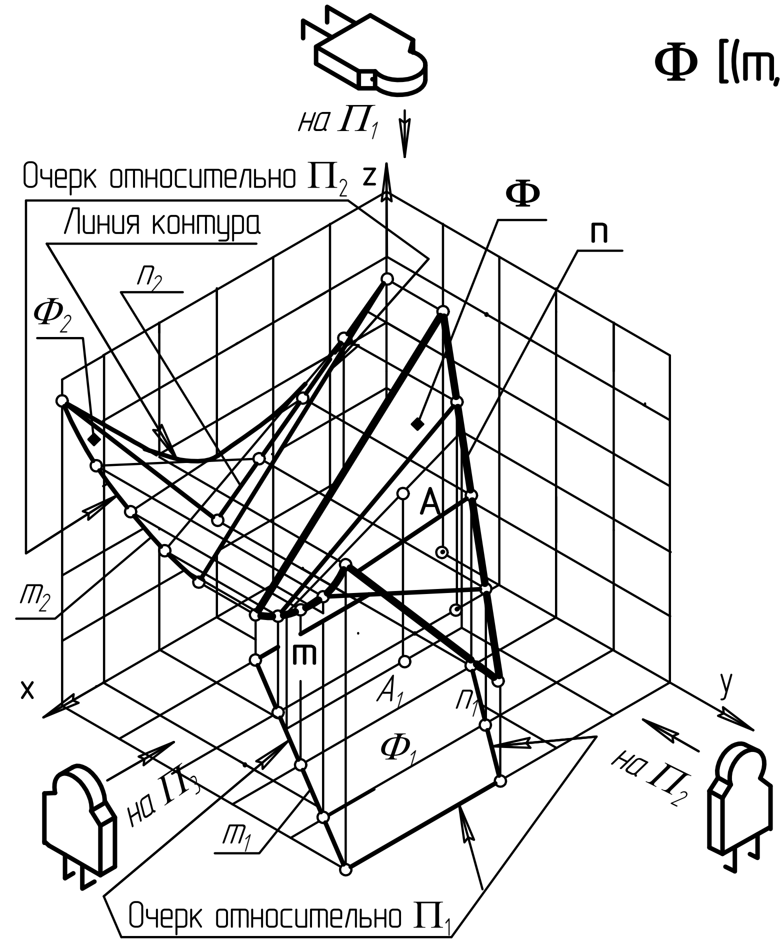
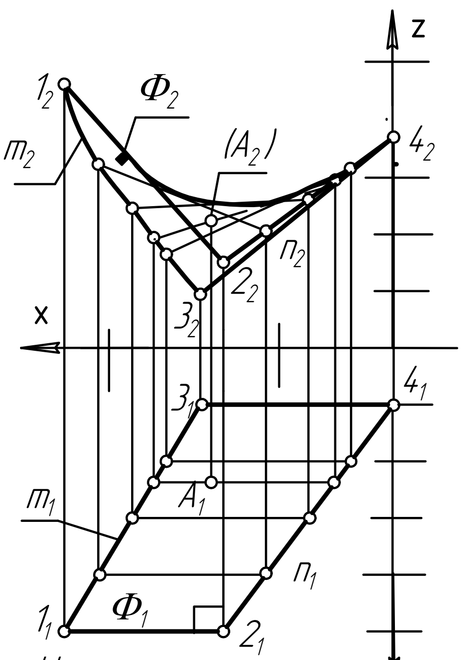
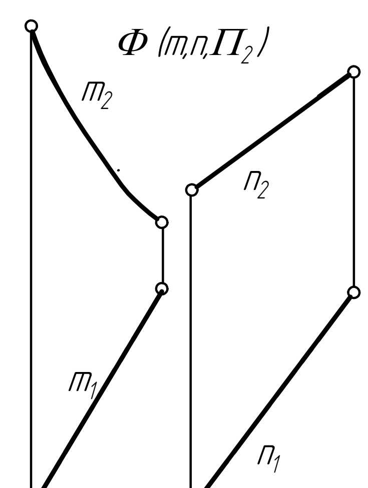


Рис. 107



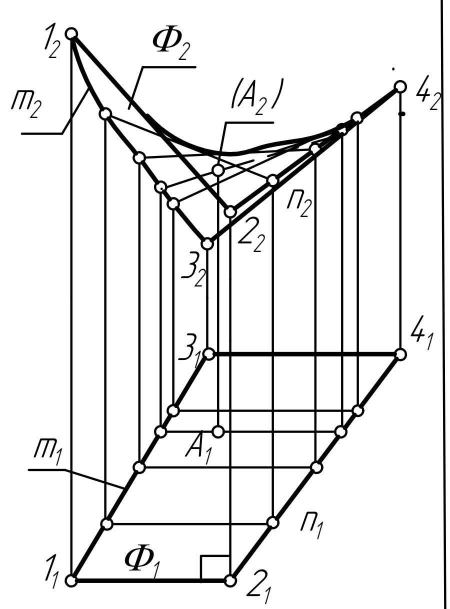
1) $l_1 // ox,\ l_1 \cap m_1 = 1_1 \wedge l_1 \cap n_1 = 2_1$;
2) $1_2 \subset m_2 \wedge 2_2 \subset n_2,\ l_2(1_2 2_2)$; (6…8 обр-х).
$A \subset l \subset \Phi$

Рис. 108



Поверхность коноида задана проекциями определителя

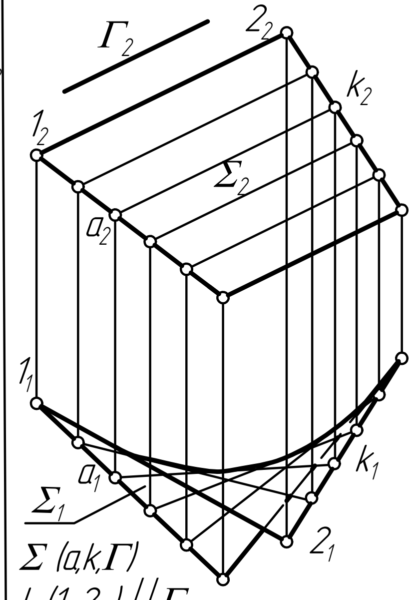
Рис. 109



Проекции коноида

Рис. 110

Проекции косой плоскости



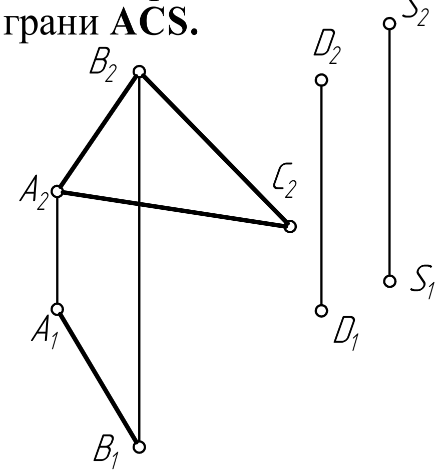
$\Sigma\ (a,k,\Gamma)$
$l_2(1_2 2_2) // \Gamma_2$,
$l_1(1_1 2_1) \subset \Sigma_1$.

Рис. 111

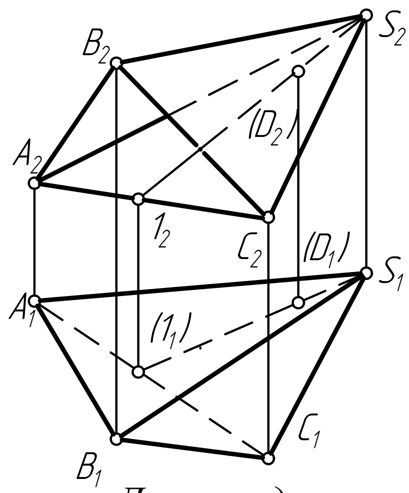
Примеры решения задач по теме «Поверхности линейчатые развёртываемые»

Пример 6.1

Достроить проекции пирамиды Δ(**S, ABC**), если **D** принадлежит грани **ACS.**



Решение



Алгоритм

1) $(S_2D_2)\cap(A_2C_2)=1_2$;
$1_1\subset(S_1D_1)$, $C_1\subset(A_1 1_1)$;
2) $(B_2S_2),(A_2S_2),(C_2S_2)\wedge$ $(B_1S_1),(A_1S_1),(C_1S_1)$;
3) Определяем видимость.

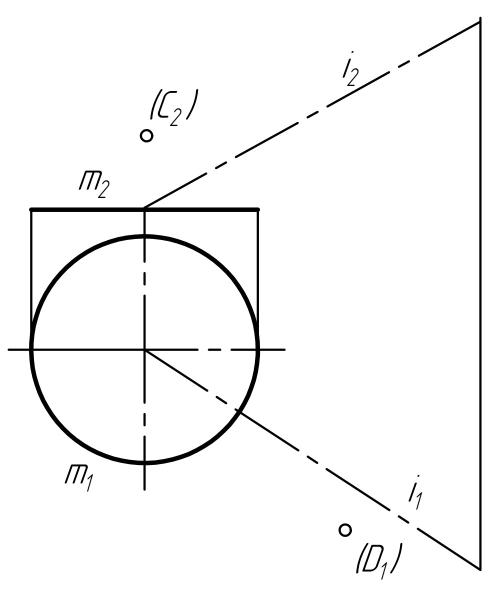
Если задана точка ***D,*** *принадлежащая грани, значит, мы можем найти любую точку этой плоскости* ***(ADS)****.*

Для определения видимости внимательно посмотрите на проекции. Ребро ***AS****– заднее, а* ***BS****–верхнее.*

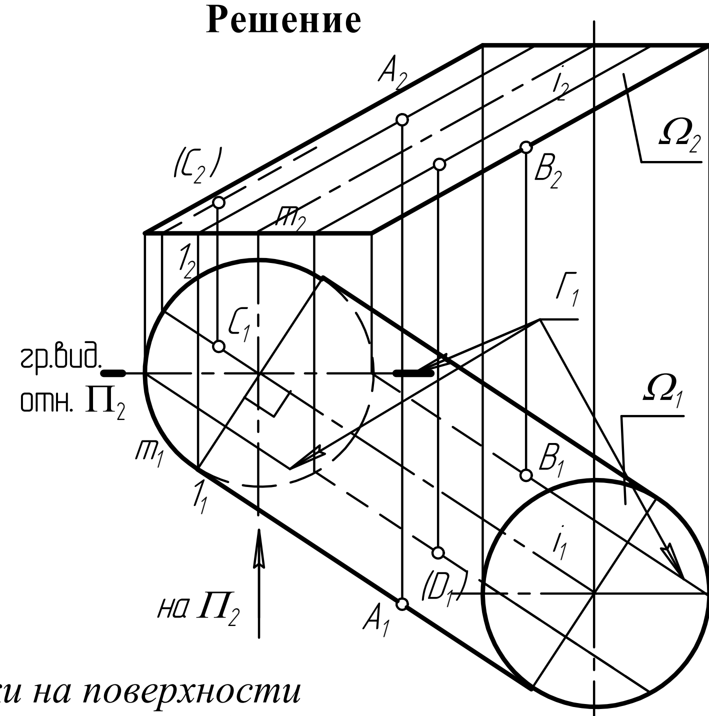
Пример 6.2

По проекциям определителя построить проекции наклонного цилиндра и проекции точек, ему принадлежащих: **A**$\subset$ очерковой образующей относительно $\boldsymbol{\Pi_1}$, видимой на $\boldsymbol{\Pi_3}$, **B**$\subset$очерковой образующей относительно $\boldsymbol{\Pi_2}$, невидимой на $\boldsymbol{\Pi_3}$, и недостающие проекции заданных точек **C** и **D**.

$$\Omega\ [(m,i)(l^i\cap m, l^i \parallel i)]$$



Решение

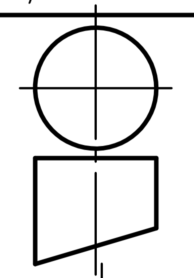
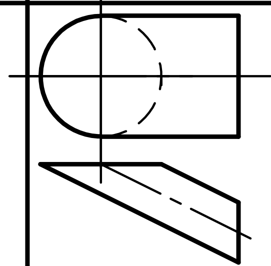
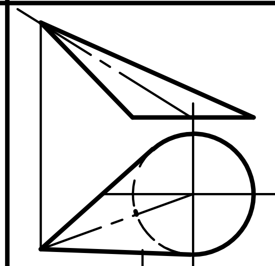
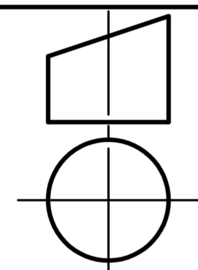
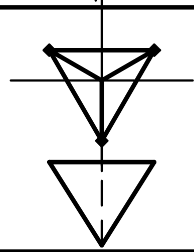
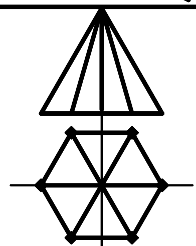
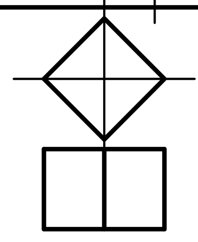
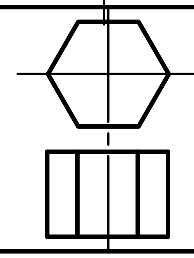
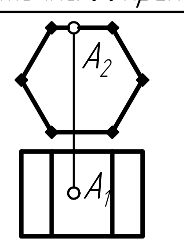
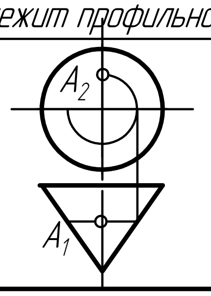
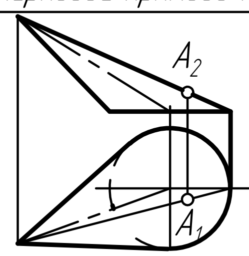
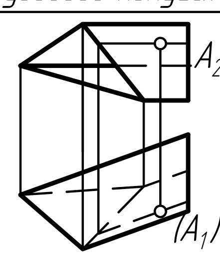
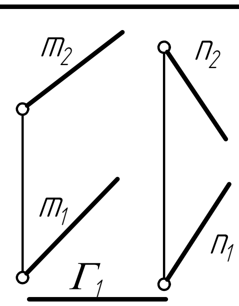
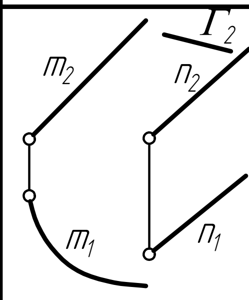
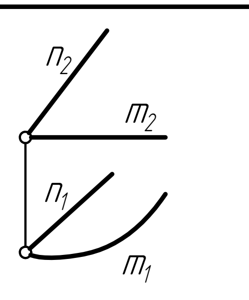
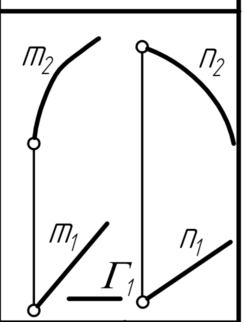
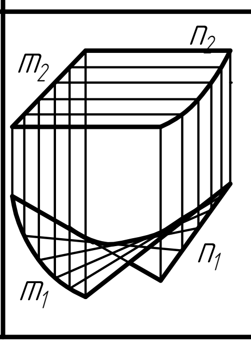
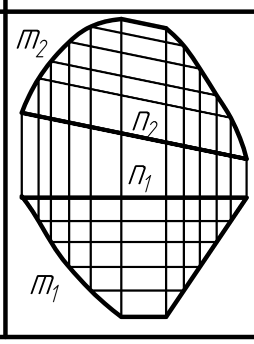
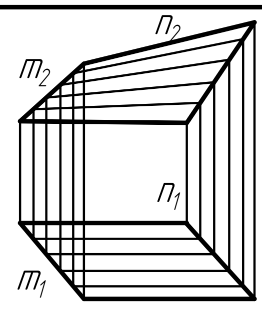
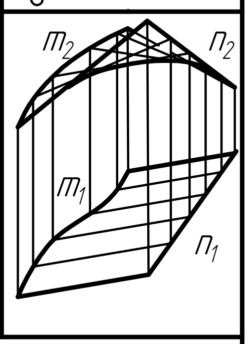


Точки на поверхности наклонного цилиндра и наклонного конуса строим по принадлежности соответствующей образующей поверхности. Границей видимости относительно $\boldsymbol{\Pi_2}$ *является плоскость симметрии* $\boldsymbol{\Gamma(\Gamma_1)}$*, границей видимости относительно* $\boldsymbol{\Pi_1}$ *являются очерковые образующие относительно* $\boldsymbol{\Pi_1}$*, которые разделили цилиндр на верхнюю видимую и нижнюю невидимую половины. В осевой горизонтально проецирующей плоскости находятся верхняя и нижняя образующие. А где ближняя и дальняя?*

Проверьте себя!

Обучающий тест 6 по теме

«Поверхности линейчатые развёртывающиеся и неразвертывающиеся»

№ п/п	Вопрос	1	2	3	4
1	Какая из поверхностей может занимать проецирующее положение?				
		Пирамидальная	Призматическая	Цилиндроид	Коноид
2	Где изображён горизонтально проецирующий цилиндр?				
3	Найдите проекции прямой правильной шестигранной пирамиды.				
4	Где точка **А** принадлежит очерковой образующей наклонного конуса?				
5	Где точка **А** принадлежит фронтально проецирующей призме?				
6	Где точка **А** принадлежит призме общего вида?				
7	Где точка **А** принадлежит профильной очерковой прямого кругового конуса?				
					
8	Какая из поверхностей неразвёртываемая?				
		Цилиндрическая	Призматическая	Пирамидальная	Цилиндроид
9	Где заданы проекции определителя коноида?				
10	Где изображен цилиндроид?				

Ответы: 1 2 4 2 4 1 3 2 4 2

Сложно?

Сейчас станет просто!

Ещё немного усилий – и ключ в кармане!

Тренировка 6.1 по теме
«Поверхности линейчатые развёртывающиеся»

Перед вами 15 кадров проекций поверхностей. При правильном выборе и составлении их в указанной последовательности по центральной диагонали вы прочитаете *фамилию профессора, который показал широту применения начертательной геометрии в самых различных областях науки и техники (в строительстве, аэрофотосъёмке, кинематографии, механике и т. д.),* по верхней диагонали сложится фамилия *ординарного профессора начертательной геометрии института путей сообщения,* по нижней – *фамилия ещё одного известного учёного, посвятившего всю свою жизнь развитию этой точной науки.*

Необходимо найти и правильно составить в проекционной связи <u>три проекции</u> (фронтальную, горизонтальную и профильную) указанных поверхностей:

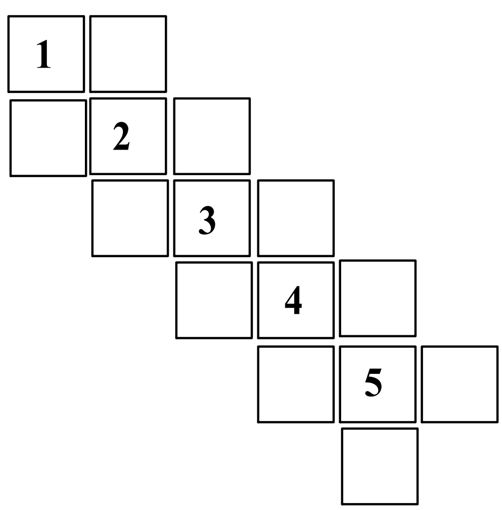
1) четырехгранной фронтально проецирующей призмы;

2) пятигранной правильной пирамиды;

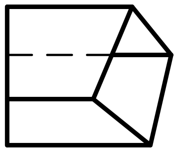
3) цилиндрической поверхности общего вида;

4) наклонного конуса;

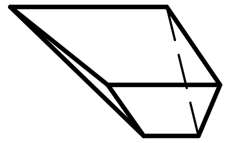
5) трёхгранной наклонной призмы.



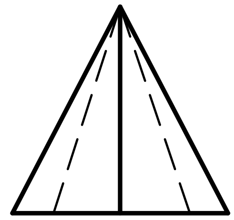
Д



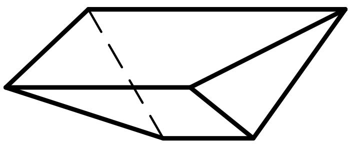
в



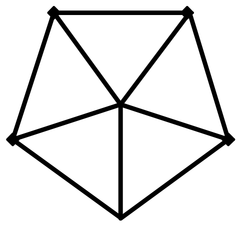
ы



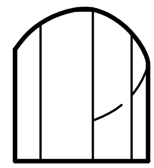
н



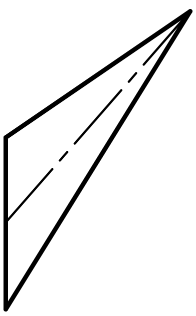
е



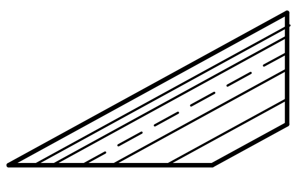
р



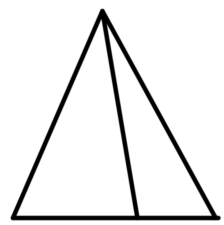
о



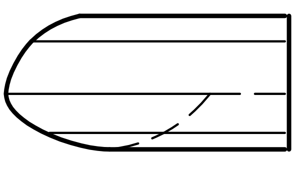
н



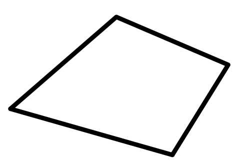
у



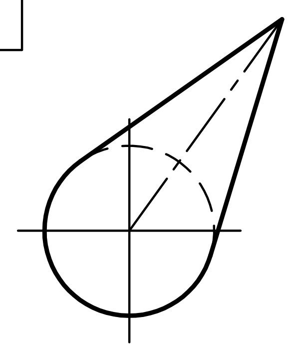
д



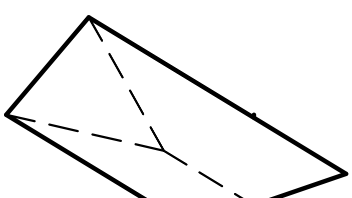
Р



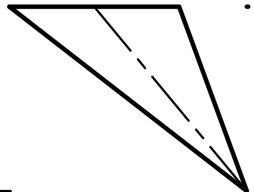
и



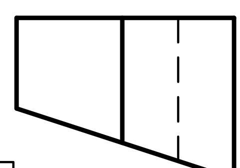
р



е



Р



Тренировка 6.2 по теме «Поверхности Каталана»

Перед вами четырнадцать кадров с изображениями проекций поверхностей. Сложив их в заданной последовательности, вы познакомитесь *с выдающимся педагогом, создавшим колоссальный, много раз переиздававшийся труд "Начертательная геометрия". В нижней строке прочитаете фамилию академика, основоположника современной кристаллографии и кристаллохимического анализа, человека, идеи которого сделали возможным дальнейшее развитие теории изображений многомерных пространств.*

Найдите две проекции (фронтальную и горизонтальную) следующих поверхностей:

1) коноида с плоскостью параллелизма Π_2;

2) косой плоскости (гиперболического параболоида) с плоскостью параллелизма Π_1;

3) цилиндроида с плоскостью параллелизма Π_2;

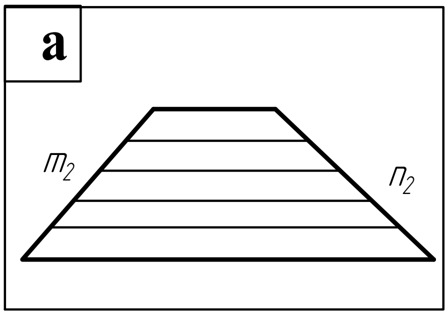
4) коноида с горизонтально проецирующей плоскостью параллелизма;

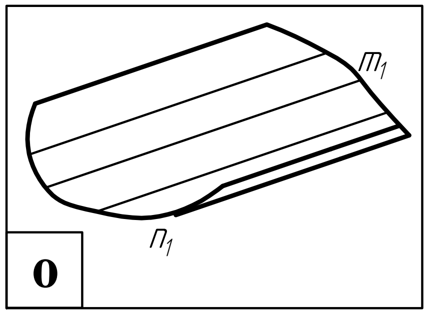
5) косой плоскости с фронтально проецирующей плоскостью параллелизма;

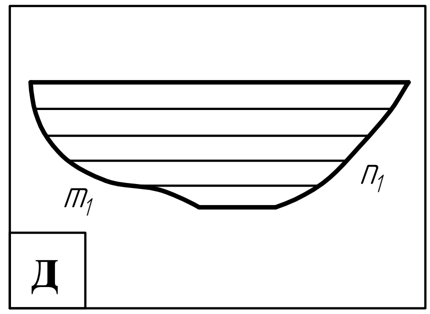
6) цилиндроида с горизонтально проецирующей плоскостью параллелизма;

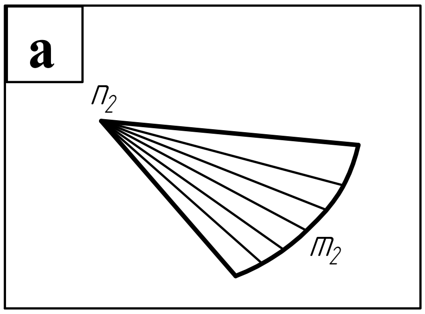
7) косой плоскости с плоскостью параллелизма Π_3.

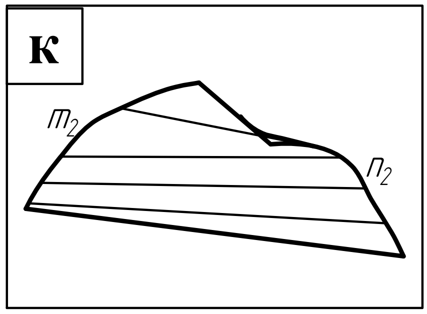
1	2	3	4	5	6	7

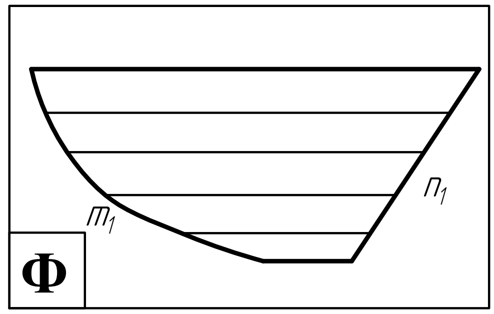


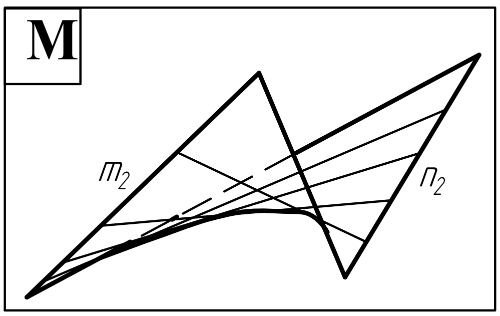


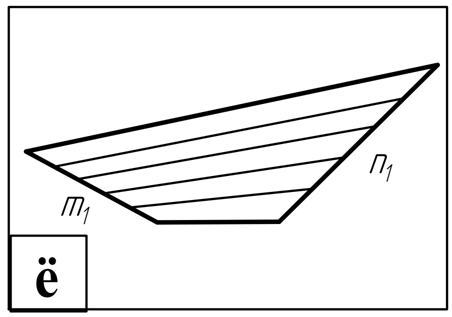


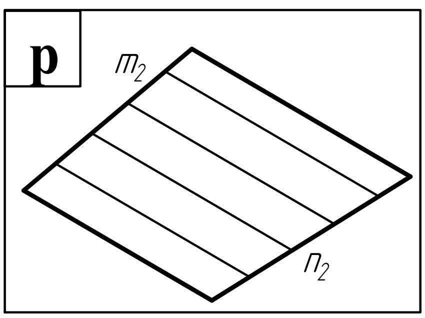


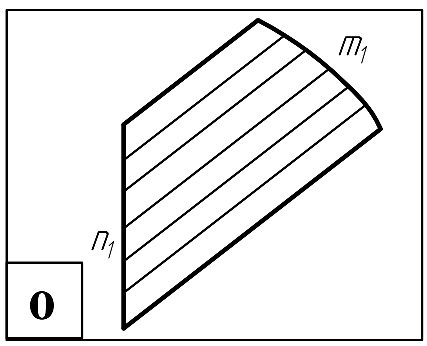


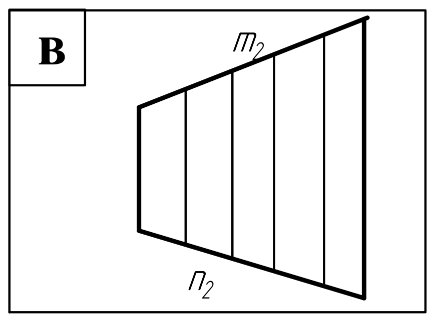


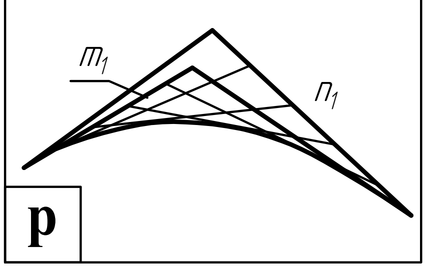


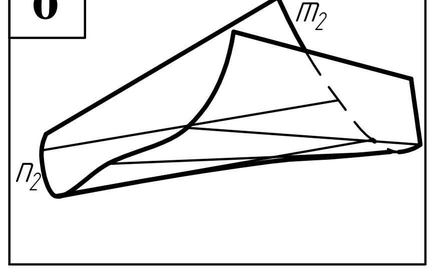


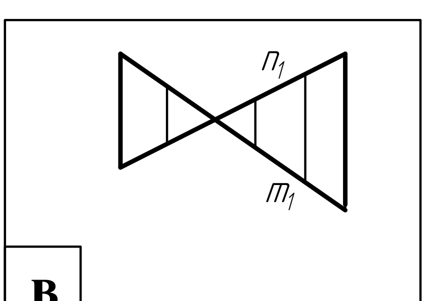








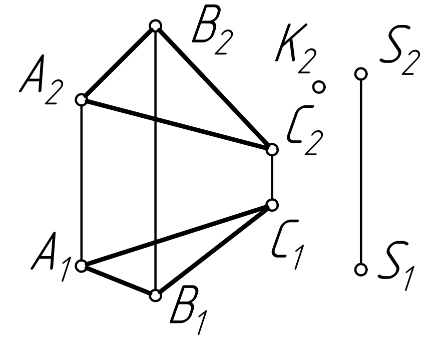
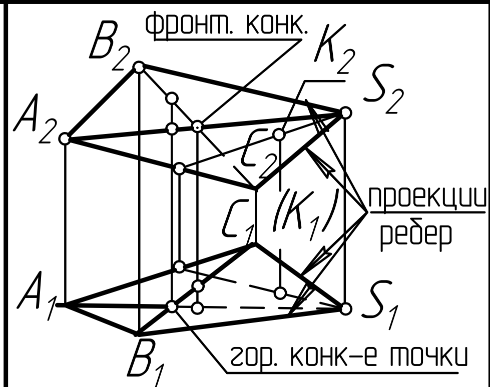
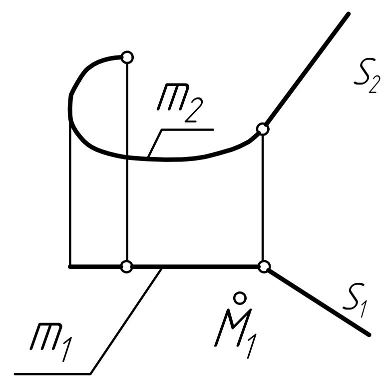
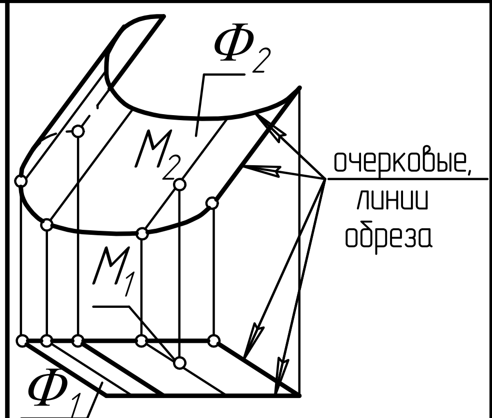
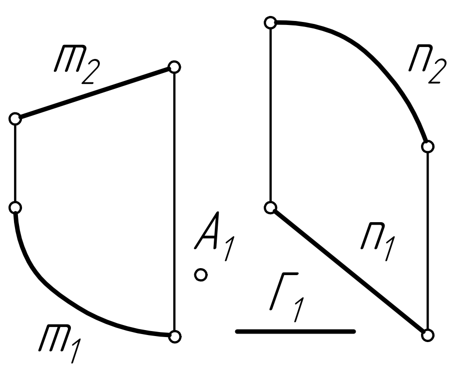
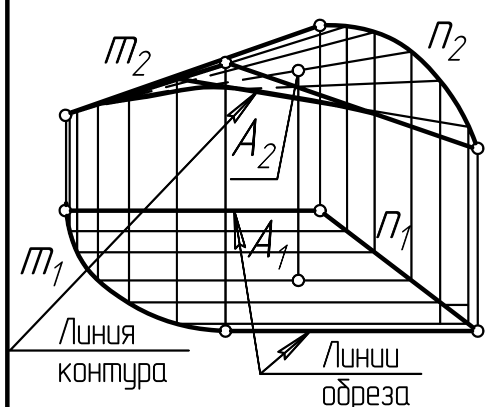




Мы очень рады за вас!

Опорный конспект по теме **«Поверхности линейчатые»**

Канва 6

Наименование поверхности	**Проекции определителя**	**Проекции поверхности**
Пирамидальная $\Sigma(ABC,S)$ $l^i \cap (ABC);$ $l^i \supset S;$ $K \subset \Sigma;$ $K_1=?$ *(аналогична конической)*		
Цилиндрическая общего вида $\Phi(m, s)$ $l^i \cap m$ $l^i \parallel s$ $M \subset \Phi;$ $M_2=?$ *(аналогична призматической)*		
Цилиндроид $\Lambda(m,n,\Gamma // \Pi_2)$ $l^i \cap m$ $l^i \cap n$ $l^i \parallel \Pi_2$ $A \subset \Lambda;$ $A_2=?$ *(аналогична коноиду, косой плоскости)*		

Построение развёртывающихся поверхностей при заданных проекциях определителя ***можно начинать с любой проекции.***

Построение поверхностей Каталана всегда ***начинаем с конкретной проекции,*** *её определяет заданная плоскость параллелизма.*

Проекции поверхности состоят из <u>**проекций определителя,**</u> <u>**проекций линий обреза,**</u> <u>**проекций линий контура.**</u>
<u>**Внимание!**</u> *Точку по принадлежности поверхности строим с помощью линии, принадлежащей поверхности. Линию выбираем простейшую в графическом построении* ***(прямую или окружность).***

Вопросы для самопроверки

1. Что называется поверхностью?
2. Чем отличается геометрическая поверхность от геометрического тела?
3. Что такое определитель поверхности, непрерывный и дискретный каркасы, закон каркаса?
4. Из чего состоят проекции поверхности?
5. Какие линии называются главными линиями поверхности?
6. Как строят точки по принадлежности поверхности?
7. Перечислите поверхности, относящиеся к развертывающимся.
8. Назовите линейчатые поверхности с плоскостью параллелизма.
9. В чем отличие цилиндрической поверхности от поверхности цилиндроида?

Внимание! *Итоговый тест* **6**

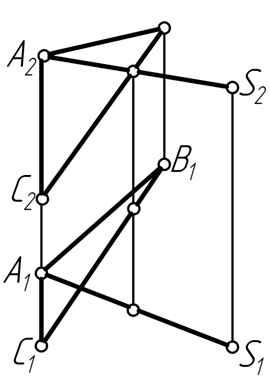
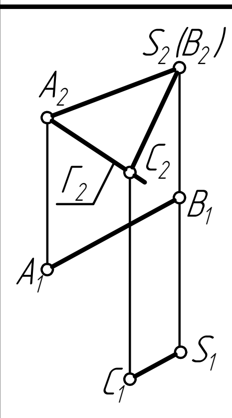
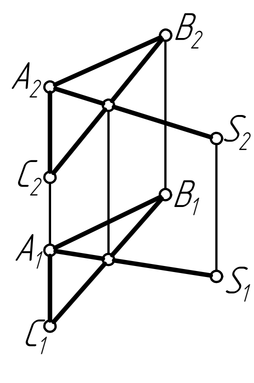
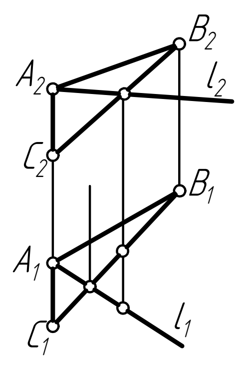
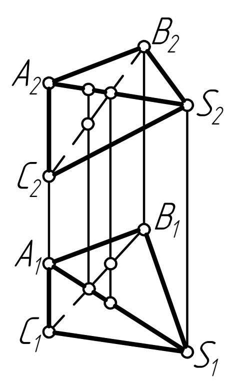
○ 1. Укажите проекции определителя пирамидальной поверхности.

⊗ 2. Укажите чертеж плоскости.

⊙ 3. Укажите проекции определителя призматической поверхности.

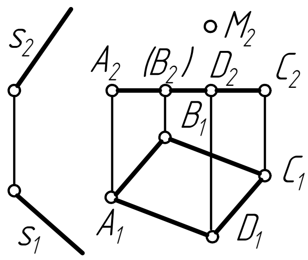
⦶ 4. Укажите проекции определителя гиперболического параболоида.

⊖ 5. Укажите проекции пирамидальной поверхности.

1	2	3	4	5
				
○	⦶	⊗	⊙	⊖

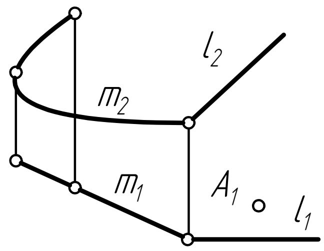
З А Н Я Т И Е 6
Линейчатые поверхности

6.1



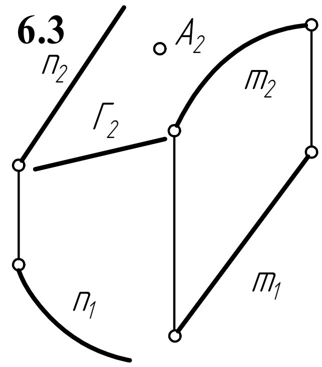
По проекциям определителя призматической поверхности **Σ (ABCD, s)** достроить проекции поверхности и недостающую проекцию точки **M** $\subset$**Σ**.

6.2



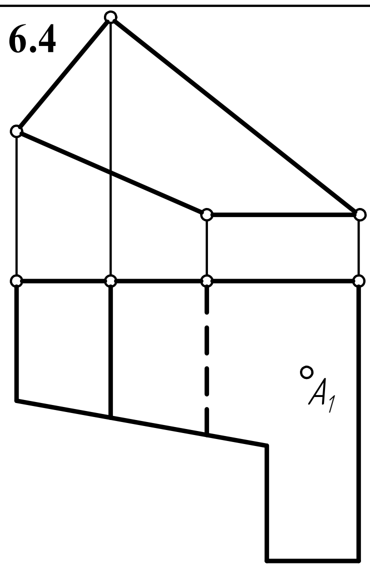
Г(m, l) – цилиндрическая общего вида, **$Г_2 \wedge Г_1$=?**
A $\subset$Г, A_2=?

6.3



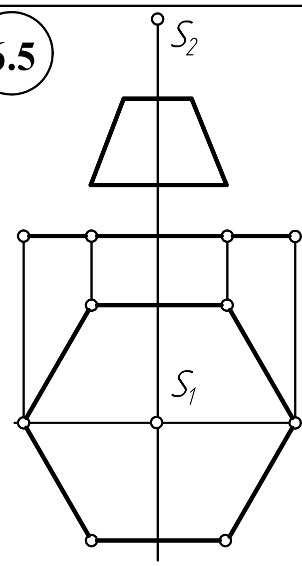
Цилиндроид **Λ (m, n, Г)** задан проекциями определителя.
A $\subset$Λ.
Достроить проекции поверхности и **A_1**.

6.4



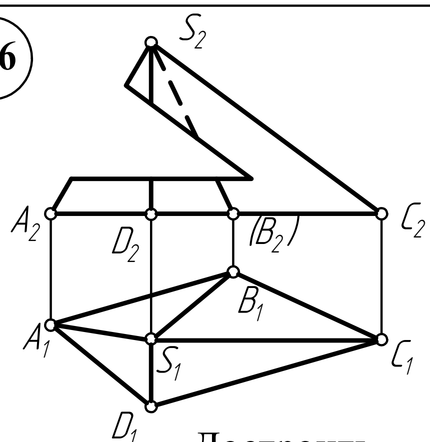
Построить профильную проекцию призмы со срезом. Достроить **A_2** и **A_3**.

6.5



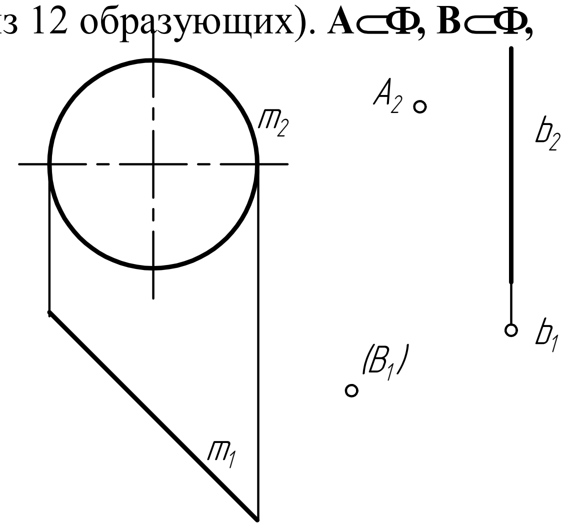
Построить три проекции пирамиды **Ф (SABCDEF)** со сквозным отверстием.

6.6



Достроить горизонтальную проекцию выреза на пирамиде **SABCD.**

6.7. Коноид **Ф** задан своими плоскостью параллелизма **$П_1$** и направляющими эллипсом **m** и **прямой b⊥$П_1$,** построить проекции коноида (из 12 образующих). **A$\subset$Ф, B$\subset$Ф, A_1=? B_2=?**

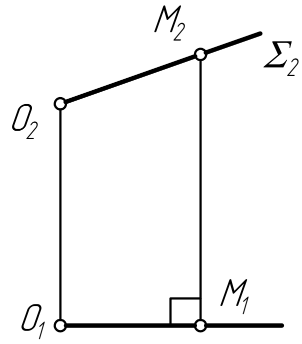


Задачи для лидеров

12Л

Задать проекции гиперболического параболоида (косой плоскости) с плоскостью параллелизма $\mathbf{\Pi_2}$ так, чтобы на $\mathbf{\Pi_2}$ он был виден с разных сторон.

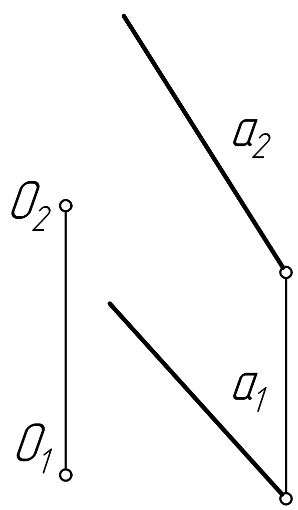
13Л



Построить проекции цилиндра вращения высотой **30 мм**, окружность **m** основания которого принадлежит плоскости $\mathbf{\Sigma}$ и имеет центр $\mathbf{O \in \Sigma}$; $\mathbf{M \subset m}$.

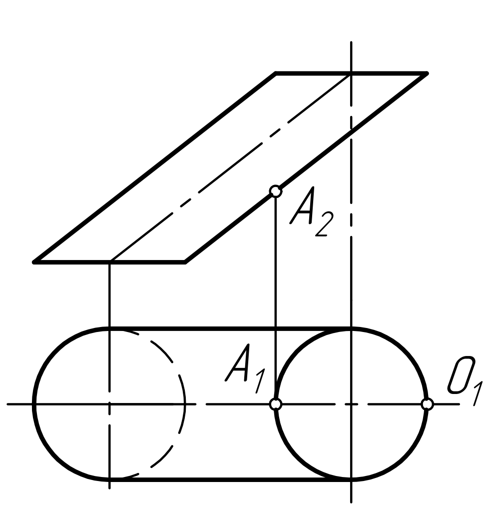
Задачки для самых крутых!

12К

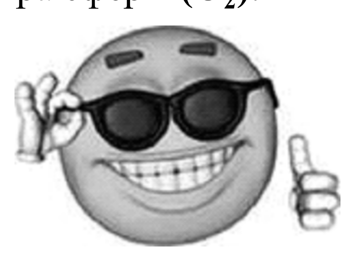


Построить правильную четырёхугольную пирамиду **ABCDS** высотой **60 мм**, если **O** – центр её основания, а ребро **AB** принадлежит прямой **a**. (Задачу решить без преобразования чертежа.)

13К



Точка **A** принадлежит окружности, по которой сфера **Ф (O, A)** пересекает цилиндр. Найти недостающую проекцию центра сферы **($\mathbf{O_2}$)**.



§ 7. Поверхности вращения. Винтовые поверхности

Поверхность вращения образована вращением любой образующей вокруг неподвижной прямой, называемой осью.

Ф [(i,l) (l ⟲ i)]

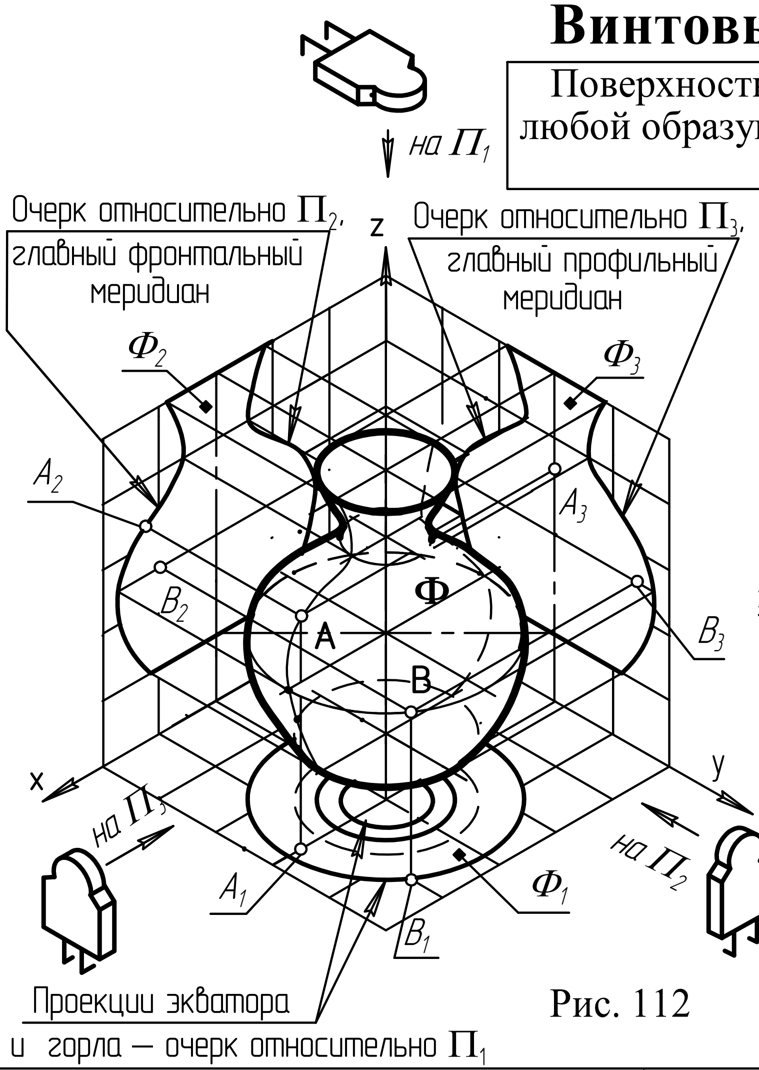


Рис. 112

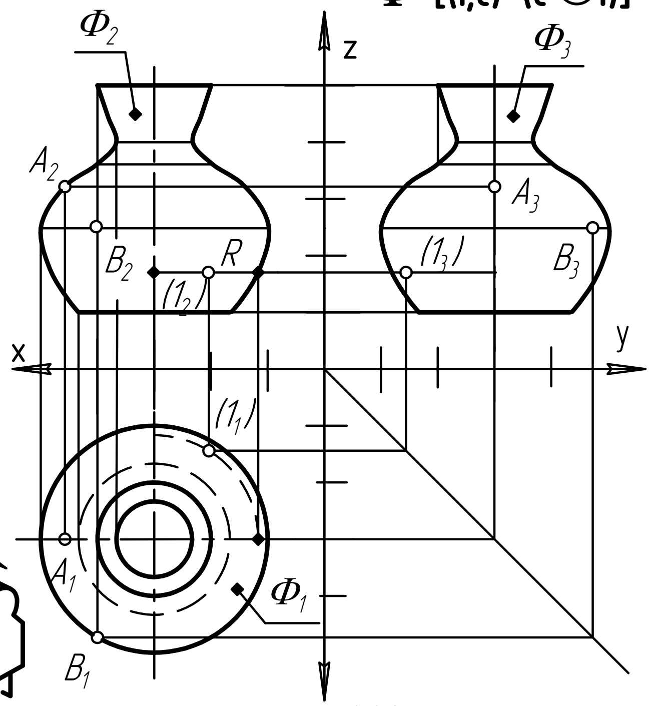
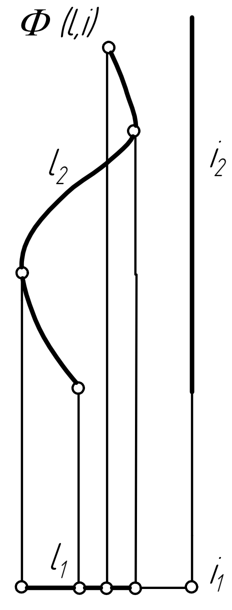


Рис. 113



Поверхность задана проекциями определителя

Рис. 114

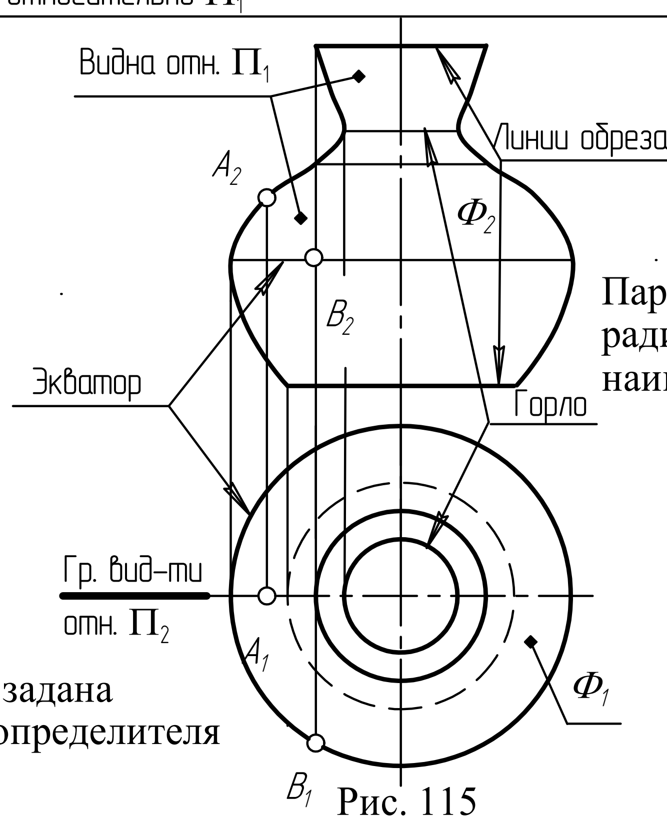


Рис. 115

Каждая точка образующей описывает окружность-**<u>параллель</u>** в плоскости, перпендикулярной оси вращения.

Параллель наибольшего радиуса называем **<u>экватором,</u>** наименьшего – **<u>горлом.</u>**

Сечение вдоль оси называется **<u>меридианом</u>**. Очерковые меридианы называем **<u>главными.</u>**

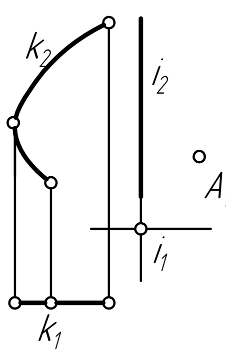
Все меридианы одной поверхности вращения равны между собой.

<u>П о м н и м</u>! При проецирующем положении оси параллель на одну из плоскостей проекций (*по отношению к которой ось перпендикулярна*) проецируется **<u>в виде окружности</u>**, на другие – **<u>в виде отрезков</u>**. *Радиус параллели-отрезка всегда равен расстоянию от оси до очерка.*

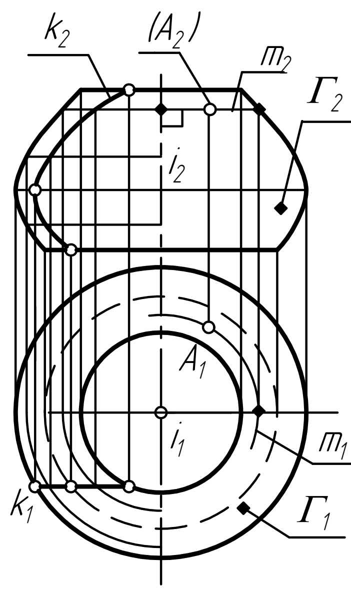
Примеры решения задач по теме «Поверхности вращения»

Пример 7.1

По заданным проекциям определителя **Г (k, i)** достроить проекции поверхности.
$A \subset Г$, A_2=?



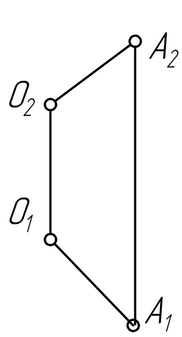
Решение

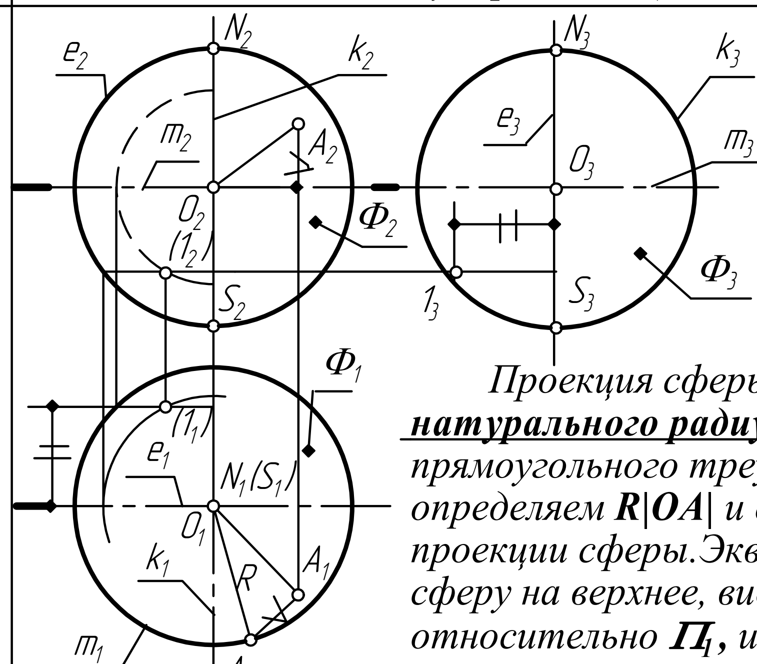


Образующая ***k*** *не находится в одной фронтальной плоскости с осью вращения* ***i****, следовательно,* ***k_2*** *не является левым фронтальным полумеридианом. Для построения очерка необходимо предварительно строить горизонтальные проекции параллелей-окружностей, затем по принадлежности им достраивать точки главного фронтального меридиана. Для построения* ***A_2*** *используем окружность* ***m****,* ***m_1 $R/i_1A_1/$****, фронтальную проекцию* ***m_2*** *в виде отрезка, перпендикулярного оси, достраиваем с помощью точки пересечения её с осью (фронтальным полумеридианом).*

Пример 7.2

Сфера **Ф** задана своими центром **O** и радиусом **OA.** Построить её очерки, её экватор **m**, главный меридиан **e**, профильный меридиан **k** и её северный и южный полюсы **N** и **S.**





Решение

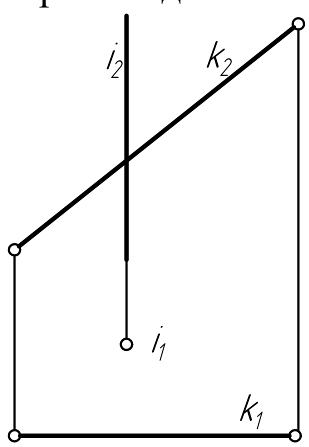
Проекция сферы – ***<u>всегда круг натурального радиуса</u>****. По правилу прямоугольного треугольника определяем* ***R|OA|*** *и строим три проекции сферы. Экватор* ***m*** *делит сферу на верхнее, видимое относительно* ***$П_1$****, и нижнее, невидимое полушария. Главный фронтальный меридиан* ***e*** *разделяет сферу на переднее, видимое относит. $П_2$, и заднее невидимое полушария. Профильный меридиан* ***k*** *делит сферу на левое, видимое относит.* ***$П_3$*** *и правое, невидимое полушария. Для построения произвольной точки, принадлежащей сфере, можно использовать как горизонтальную, так и фронтальную окружности, как показано на примере для точки* ***1.***

<u>В н и м а н и е !</u>

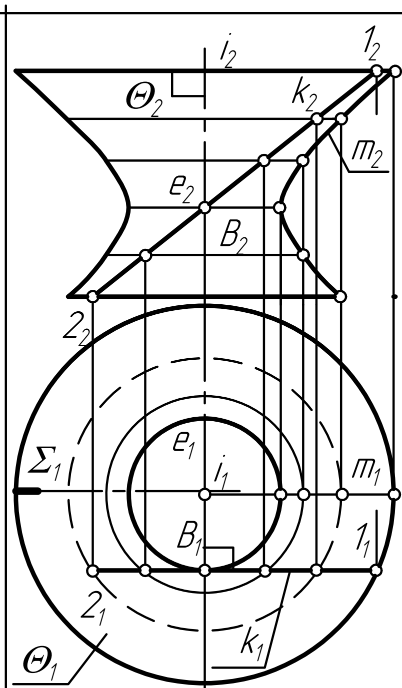
Точки, принадлежащие главным линиям поверхностей вращения, строим, как правило, без вспомогательных построений.

Пример 7.3

Однополостный гиперболоид вращения Θ задан своими осью $i \perp \Pi_1$ и прямолинейной образующей $k \parallel \Pi_2$. Построить проекции гиперболоида.



Решение



*Точки прямой **k**, вращаясь вокруг оси **i**, описывают параллели. Параллель горла **e** опишет ближайшая к оси точка **B**, которую найдём на перпендикуляре к **k**. Параллель горла и верхняя линия обреза определят очерк отн.Π_1. Точки пересечения параллелей с осевой пл. $\Sigma \parallel \Pi_2$ образуют гиперболу **m**, которая совпадает с фронтальным очерком гиперболоида.*

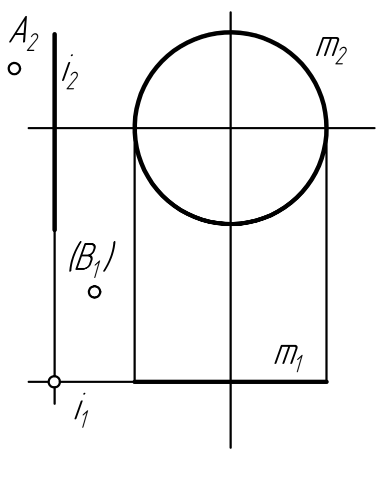
*Гиперболоид Θ можно образовать вращением вокруг оси **i** не только прямой **k**, но и гиперболы **m**. Прямая $\boldsymbol{k_2}$ – асимптота гиперболы Θ_2.*

*Проекции гиперболоида можно получить и построением последовательных положений прямой **k**, касательных к горизонтальной проекции горла **e**.*

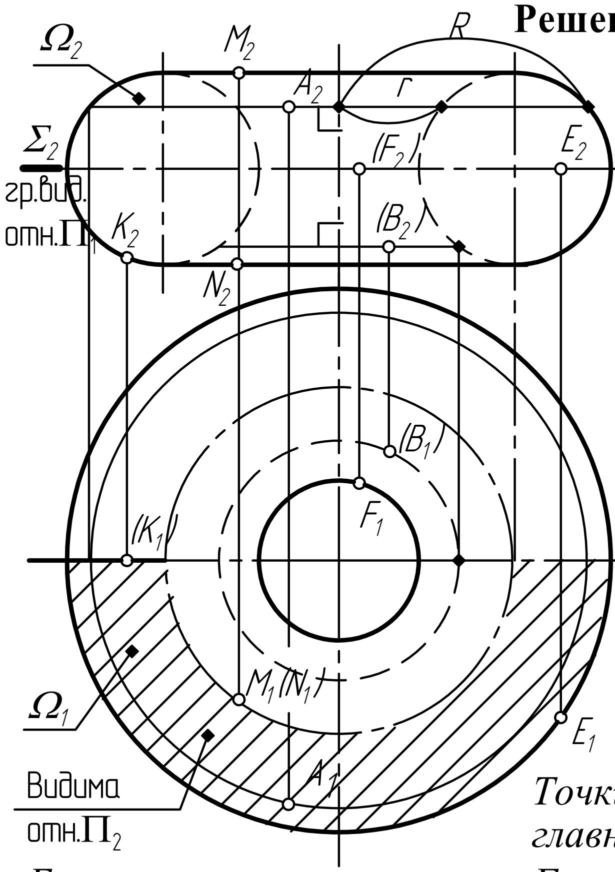
Поле видимых точек относительно Π_1 определяем по фронтальной проекции (поверхность видна до горла), отн. Π_2 границей видимости является фронтальная плоскость Σ, которая разделила гиперболоид на две половины – переднюю, видимую относительно Π_2, и заднюю, невидимую.

Пример 7.4

Заданы проекции определителя кругового кольца Ω(m, i), точки $A \subset \Omega$, $B \subset \Omega$;
A_1=? B_2=?
Построить проекции точек, принадлежащих главным линиям Ω.



Решение



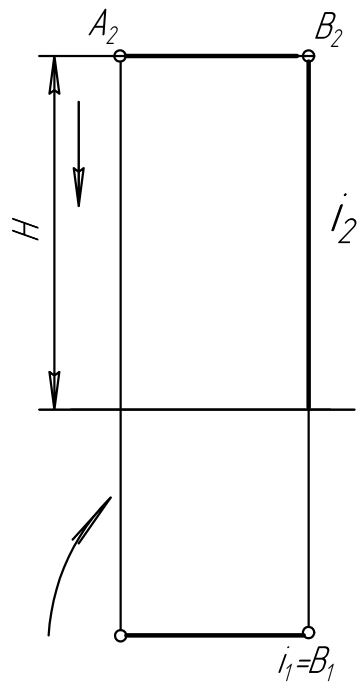
*Тор-кольцо – поверхность четвёртого порядка образована вращением окр. **m** вокруг оси **i**, расположенной в плоскости этой окр. и не проходящей через её центр. Точки **A** и **B** строим при помощи параллелей.*
<u>Внимание!</u> На своём уровне всякий раз мы имеем две параллели (r, R).

Точки, принадлежащие главным линиям кольца:
E расположена на экваторе, F – на горле, K – на левом полумеридиане, M, N – на очерковых параллелях относительно Π_2, (ось→очерк, очерк→ось).

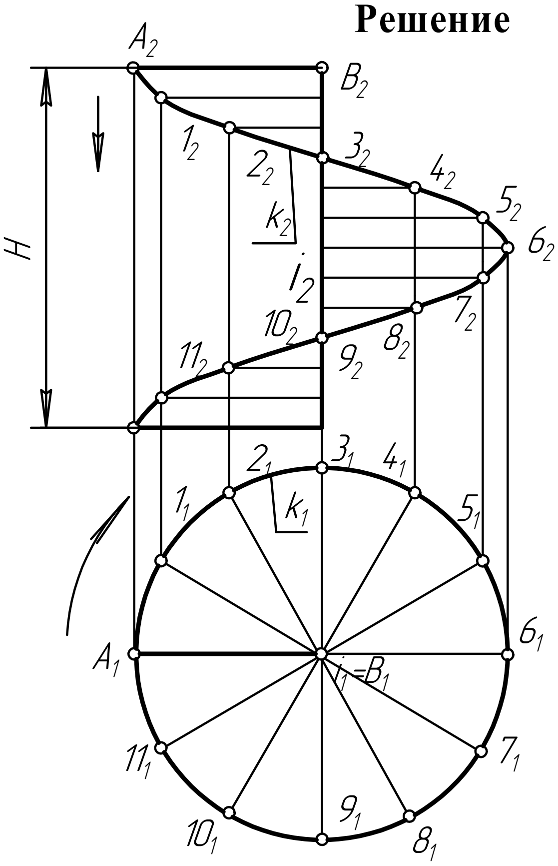
Примеры решения задач по теме
«Винтовые поверхности»

Пример 7.5

Отрезок $\mathbf{AB \perp \Pi_3}$ совершает правое винтовое движение заданного шага **H** относительно проходящей через точку **B** оси $\mathbf{i \perp \Pi_1}$. Построить один виток образуемого им прямого закрытого геликоида, показав **12** положений образующей **AB.**



Решение



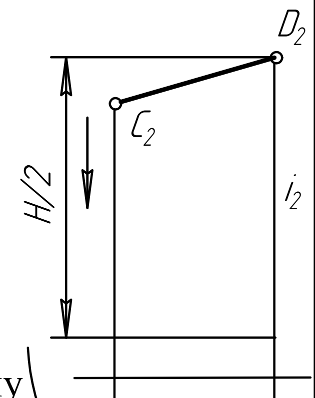
*Точка **A** описывает правую винтовую линию **k** шага **H** с осью **i.** Шаг винтовой линии – это расстояние, которое проходит точка за один оборот.*

Соответствующий одному шагу отрезок винтовой линии называют <u>витком</u>. Винтовую линию называют <u>правой,</u> если точка, опускаясь, вращается по часовой стрелке, и левой, если против часовой стрелки.

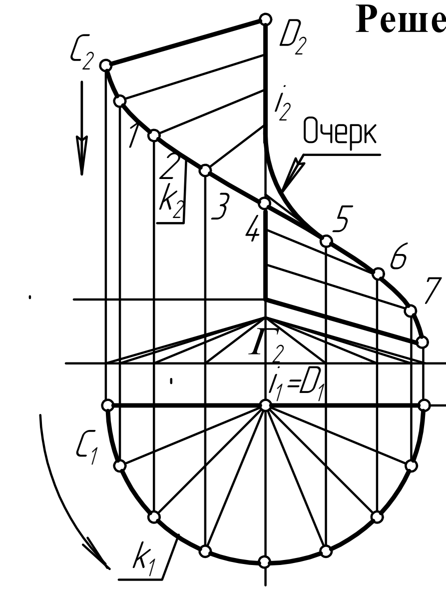
*Горизонтальная проекция винтовой линии – <u>окружность</u> с центром **i** и радиусом $\boldsymbol{i_1 A_1}$**,** фронтальная проекция – <u>синусоида,</u> для построения которой эту окружность и шаг делим на 12 частей. Винтовую поверхность, образованную винтовым движением прямой, называют <u>геликоидом.</u> Если эта прямая пересекает ось **i,** то геликоид называют <u>закрытым</u>, а если нет – <u>открытым</u>. Если она образует с осью прямой угол, то геликоид называют <u>прямым,</u> а если нет – <u>косым.</u>*

Пример 7.6

Отрезок $\mathbf{CD \parallel \Pi_2}$ совершает левое винтовое движение заданного шага **H** относительно проходящей через точку **D** оси $\mathbf{i \perp \Pi_1}$. Построить половину витка образуемого им косого закрытого геликоида, показав 8 положений образующей **CD.**



Решение



*Точка **C** описывает левую винтовую линию **k.** Образующие параллельны соответствующим образующим направляющего конуса Г.*

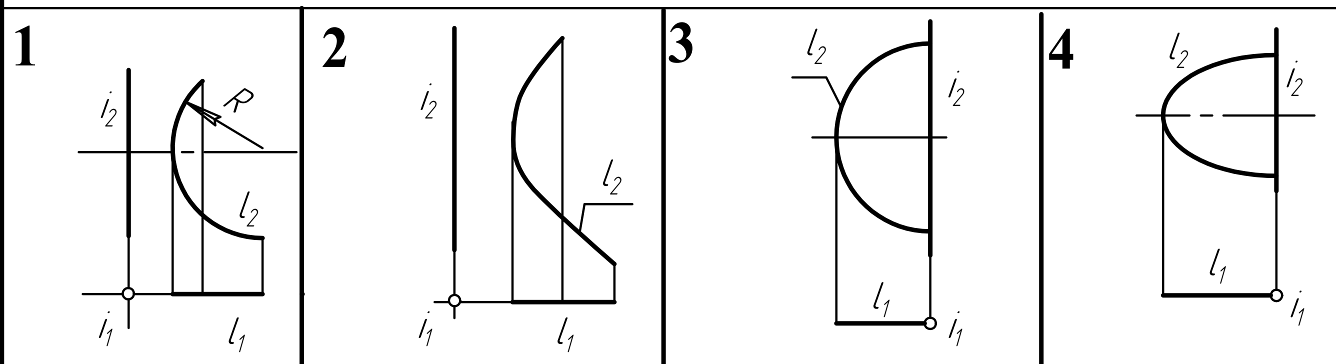
C_2D_2 параллельна очерковой конуса.

Проверьте себя!

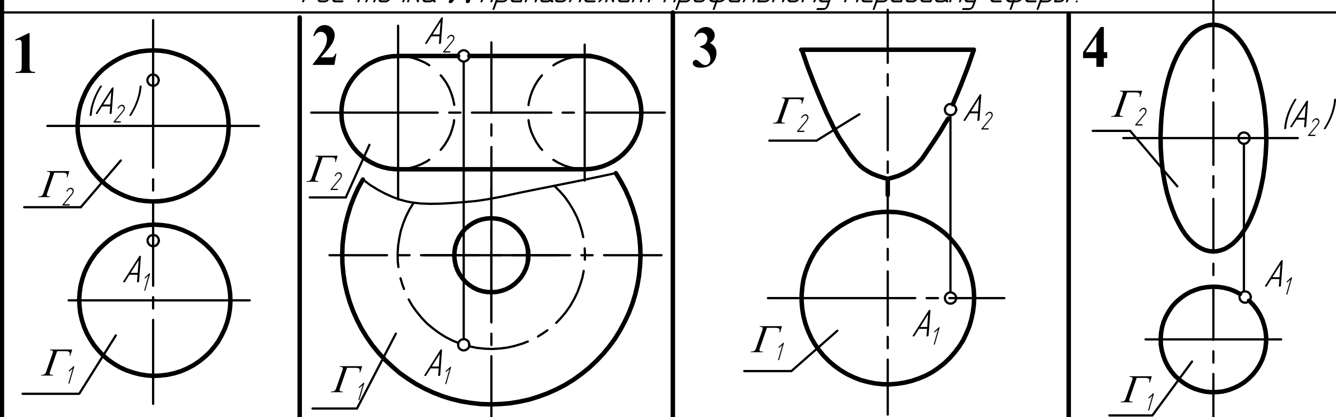
Обучающий тест 7 по теме

«Поверхности вращения. Винтовые поверхности»

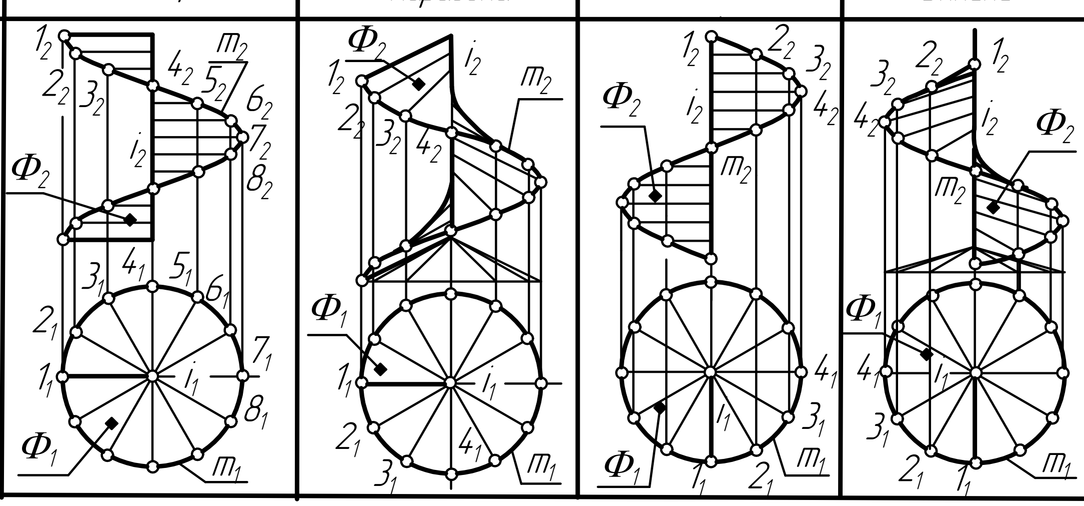
№ п/п	Вопрос	1	2	3	4
1	*Где заданы проекции определителя сферы?*				
2	*Найдите проекции определителя сжатого эллипсоида вращения.*				
3	*В каком случае изображены проекции определителя глобоидного тора ?*				
4	*На каком чертеже изображены проекции определителя однополостного гиперболоида?*				



№ п/п	Вопрос
5	*Где точка **А** принадлежит очерковой параллели тора-кольца?*
6	*Где точка **А** принадлежит фронтальному меридиану параболоида вращения?*
7	*Где точка **А** принадлежит экватору вытянутого эллипсоида ?*
8	*Где точка **А** принадлежит профильному меридиану сферы?*



№ п/п	Вопрос	1	2	3	4
9	*Какая из кривых входит в определитель прямого и косого геликоидов?*				
		Гипербола	*Парабола*	*Винтовая линия*	*Эллипс*
10	*Где изображён косой геликоид с правым направлением винтовой линии?*				



84 *Ответы:* 3 4 1 2 2 3 4 1 3 4

Тренировка 7 по теме «Поверхности вращения»

Перед вами на стр. 86 наглядные изображения поверхностей вращения. На следующей стр. 87 в произвольном порядке в прямоугольниках фронтальная и горизонтальная проекции всех показанных поверхностей. Ставим задачу расположить все изображения в соответствии с представленной схемой.

При правильных ответах на первые три вопроса по горизонтали вы прочтёте *фамилию профессора Московского университета, развивавшего проективное направление отечественной начертательной геометрии. А какой раздел геометрии называют проективным? Что такое поляры и подеры?*

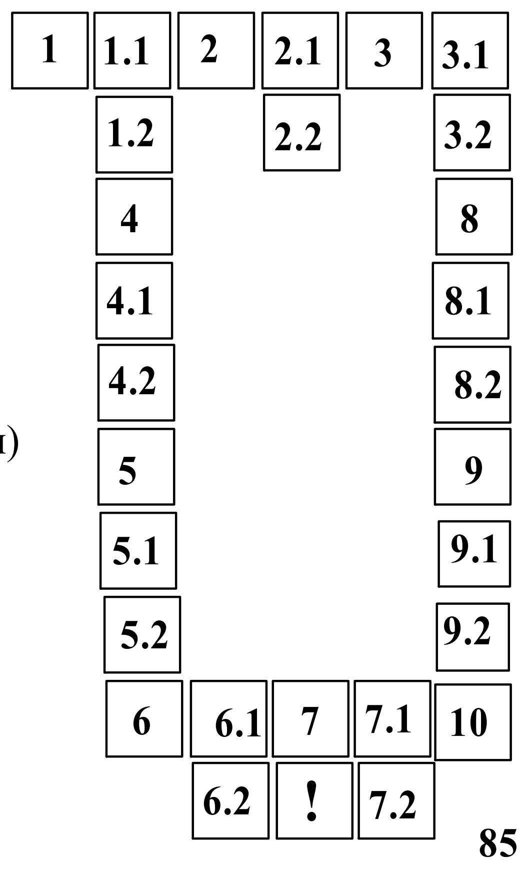
Правильно выстроенная левая вертикаль познакомит вас с *единомышленником предыдущего учёного, также развивавшего проективное направление начертательной геометрии, способствовавшего развитию номографирования и механизации построений в этой области.*

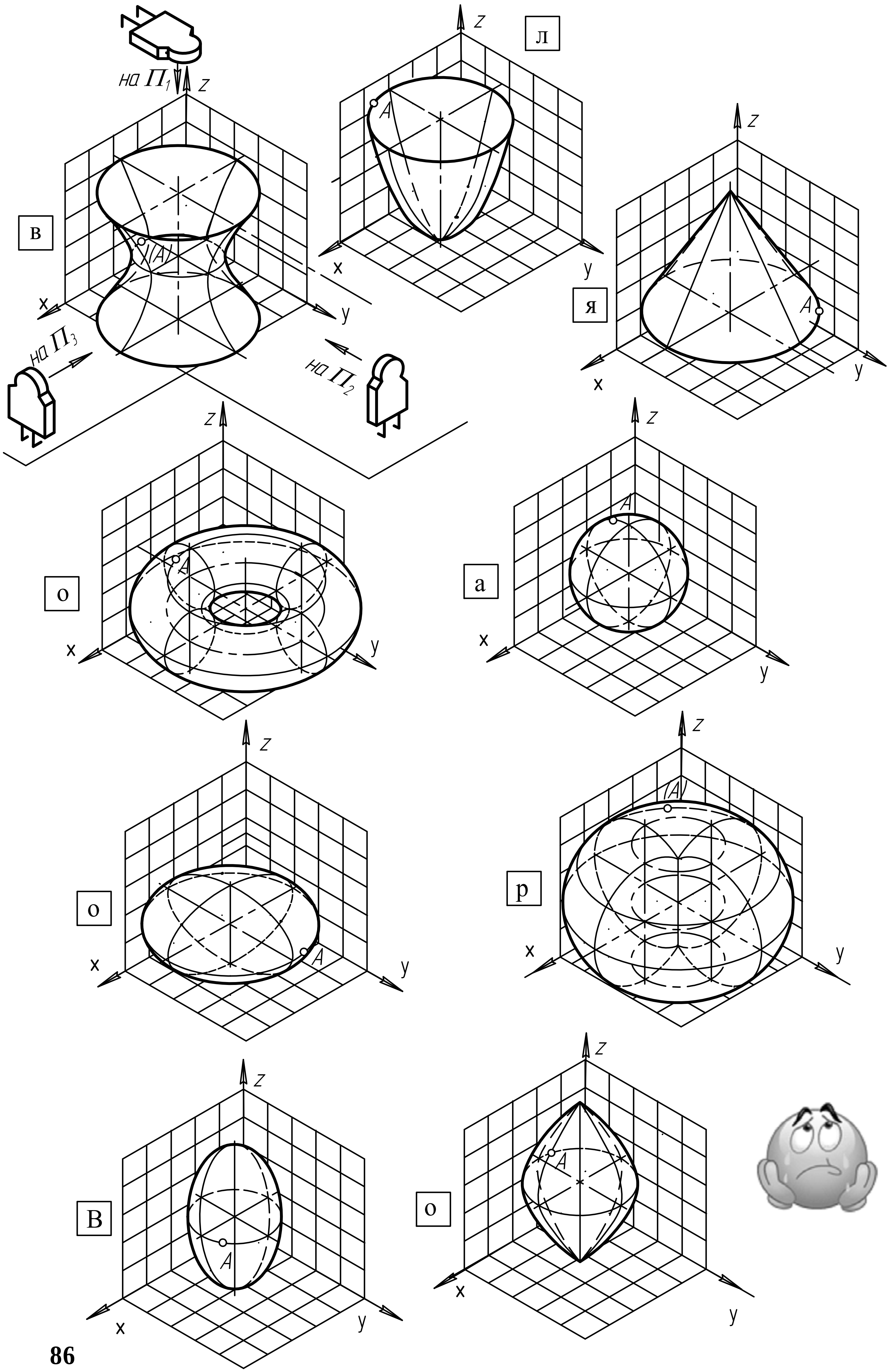
Горизонтальные, соединяющие шесть кадров, расскажут *о выдающемся специалисте в области шрифтовой графики, проводившем множество исследований по точности графических расчётов.*

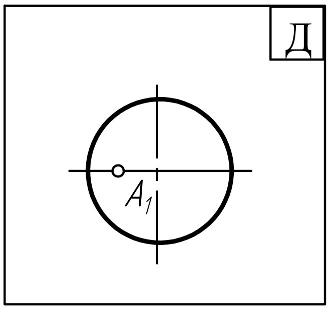
Правая вертикаль завершает экскурс в историю развития геометрии *ещё одним из ярких её представителей, разрешившим основные вопросы перспективных изображений и теории теней применительно к архитектурно-строительному проектированию.*

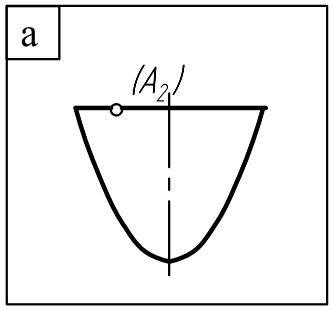
Найдите наглядное изображение, фронтальную и горизонтальную проекции:

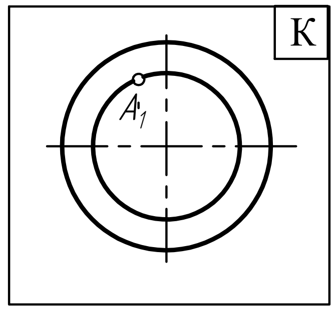
1) вытянутого эллипсоида вращения с точкой на экваторе;
2) сферы с точкой на профильном меридиане;
3) закрытого тора (лимона) с точкой на фронтальном меридиане;
4) параболоида вращения с точкой на линии обреза;
5) сжатого эллипсоида вращения с точкой на экваторе;
6) глобоидного тора с точкой на горле;
7) закрытого тора-яблока (самопересекающегося) с промежуточной точкой;
8) открытого тора-кольца с точкой на фронтальной очерковой параллели;
9) конуса вращения с точкой на нижней параллели.
10) Найдите фронтальную проекцию поверхности вращения общего вида.

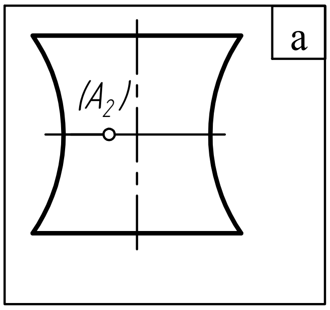


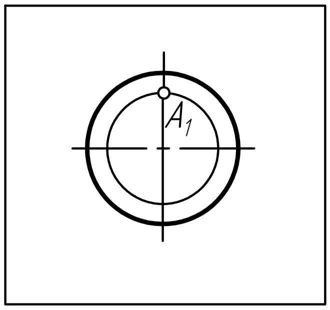

на Π_1
z
x
y
в
(A)
на Π_3
на Π_2
л
A
я
о
а
р
В

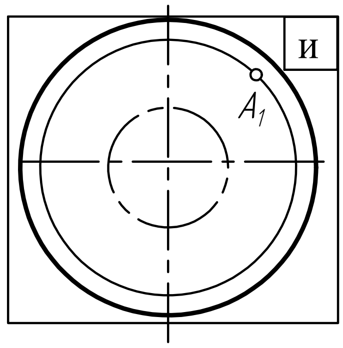


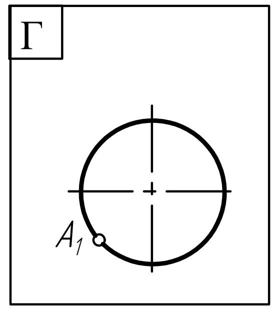


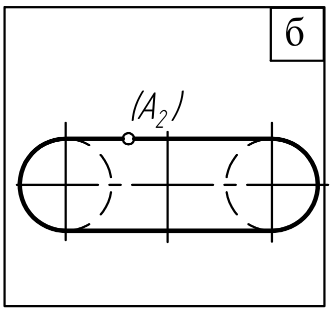


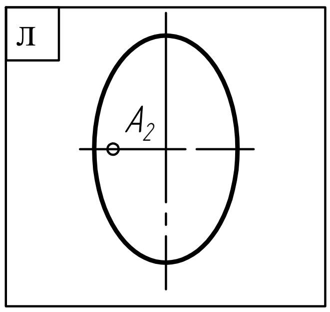


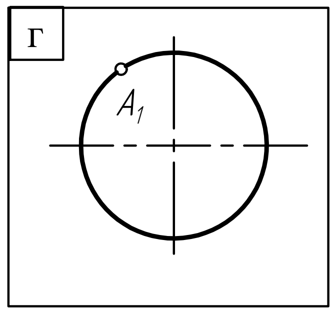






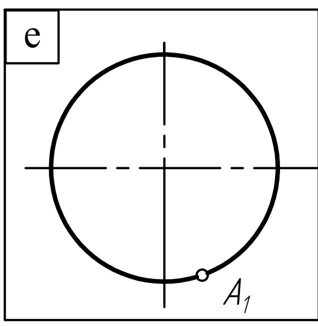


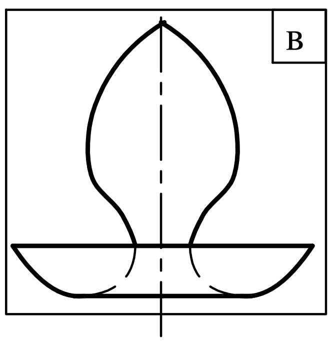


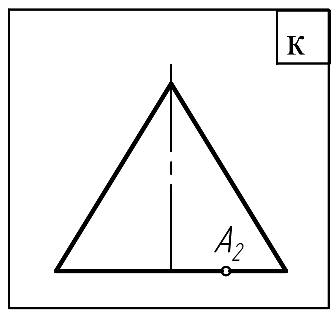


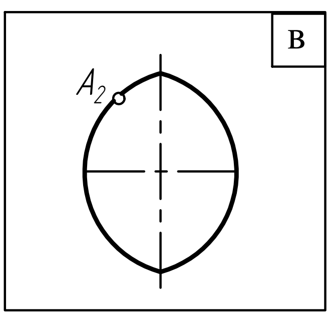
Вы победили!

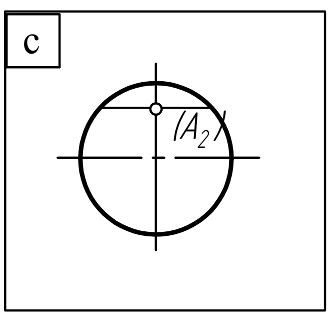
н

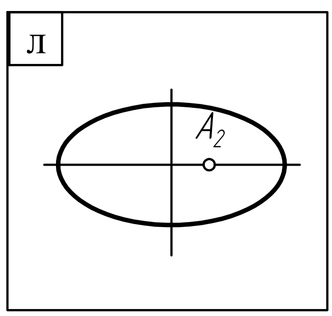


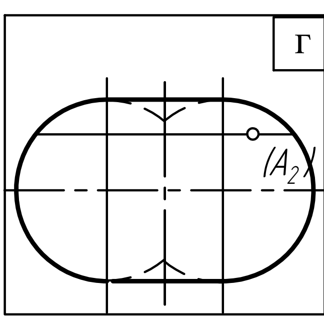


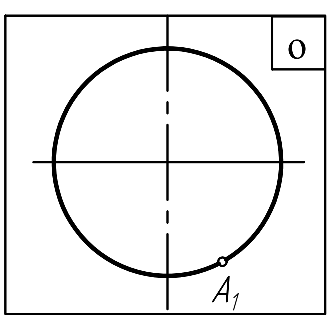


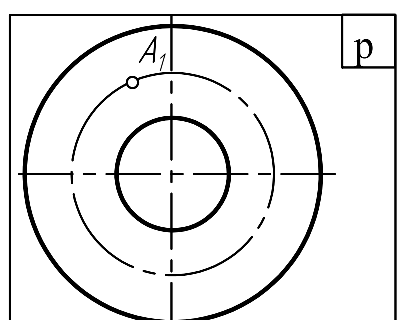






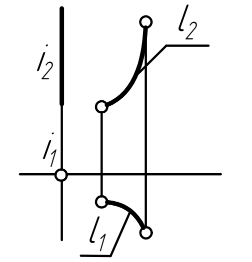
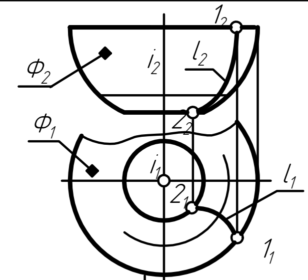
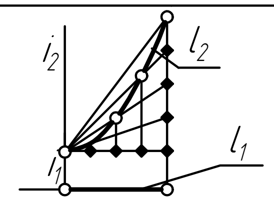
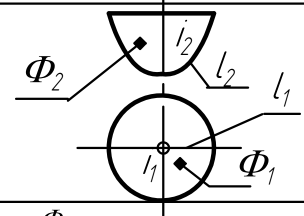
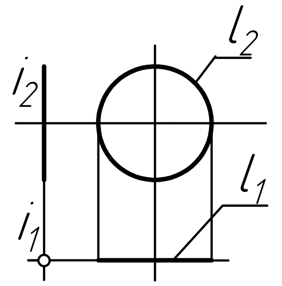
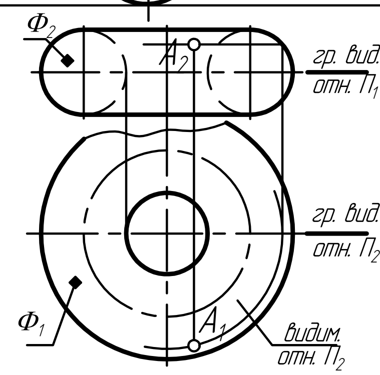
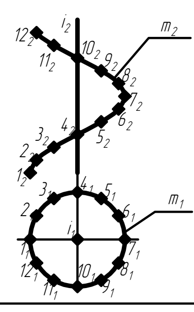
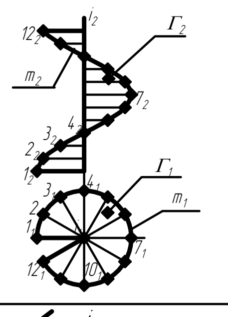
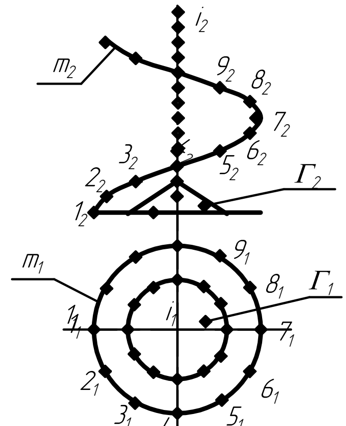
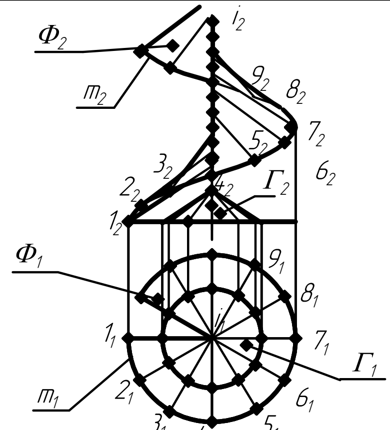






Опорный конспект по теме
«Поверхности вращения. Винтовые поверхности»

Канва 7

Наименование	Проекции определителя	Проекции поверхности
1. Вращения общего вида (*l – произвольная линия, не описываемая алгебраическим уравнением*) Ф (l,i)		
2. Параболоид вращения Ф (l,i) (*l – парабола*)		
3. Кольцо (тор открытый) Ф (l,i) (*l – окружность, l⌒i*)		
Главные линии поверхностей: *очерковые – <u>горло, экватор, главные меридианы,</u> точки на этих линиях строятся без вспомогательных построений.* **Внимание!** Вспомогательная линия для построения точки по принадлежности поверхности вращения – **<u>окружность</u>**.		
4. Прямой геликоид (*винтовой коноид*) **Г (m , i , $П_1$)** **m** – *винтовая линия* **$l^i \cap i$; $l^i \cap m$; $l^i \perp i$, (l^i II $П_1$)**		
5. Наклонный геликоид **Ф [(m , i , Г)** **($l^i \cap i$; $l^i \cap m$;** **l^i II $l^o \subset Г$)]** ***Г*–*направляющий конус***		

Вопросы для самопроверки

1. Какие поверхности называются поверхностями вращения?
2. Назовите главные линии поверхностей вращения.
3. С помощью какой линии строятся недостающие проекции точек, принадлежащих поверхности вращения?
4. Как определяется поле видимых точек относительно **$П_2$, $П_1$, $П_3$?**
5. Как определяется порядок поверхности?
6. Перечислите закономерные поверхности, относящиеся к поверхностям вращения второго порядка.
7. Что называется цилиндрической винтовой линией? Какими параметрами она задается?
8. Как образуется прямой геликоид?
9. Как движутся образующие наклонного геликоида?

В н и м а н и е ! *Итоговый тест* **7**

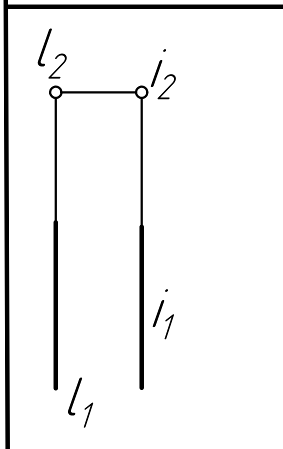
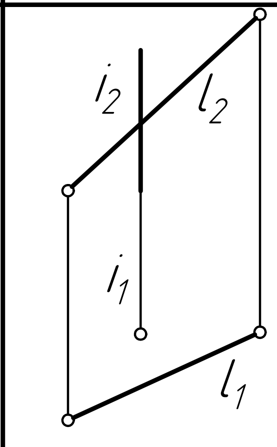
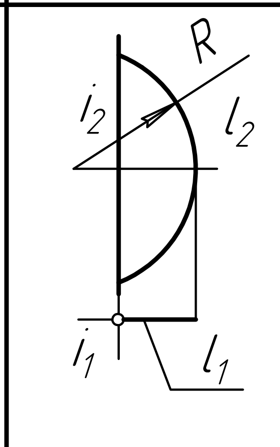
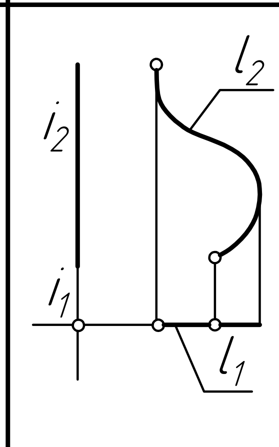
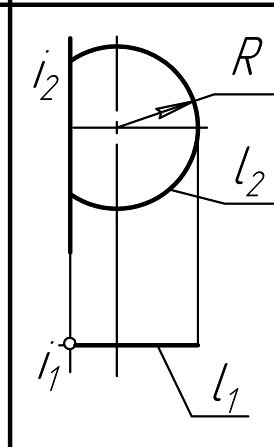
○ 1. Укажите определитель поверхности закрытого тора (лимона).

⊗ 2. Укажите определитель поверхности самопересекающегося тора.

⊖ 3. Укажите определитель поверхности однополостного гиперболоида вращения.

⦶ 4. В каком случае заданы проекции определителя поверхности вращения общего вида?

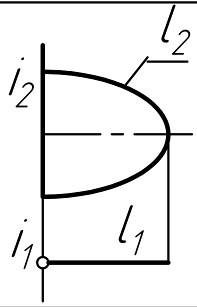
⊙ 5. На каком чертеже представлены проекции определителя фронтально проецирующего кругового цилиндра?

<table>
<tr><th>1</th><th>2</th><th>3</th><th>4</th><th>5</th></tr>
<tr>
<td></td>
<td></td>
<td></td>
<td></td>
<td></td>
</tr>
<tr><td>⊙</td><td>⊖</td><td>○</td><td>⦶</td><td>⊗</td></tr>
</table>

З А Н Я Т И Е 7

Поверхности вращения. Винтовые поверхности

7.1

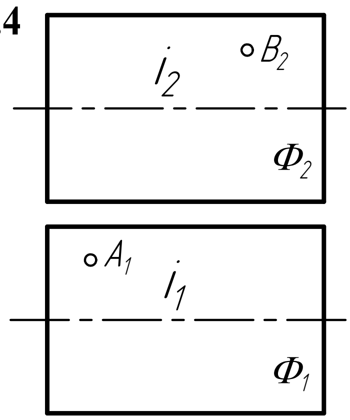


Достроить проекции эллипсоида вращения $\mathbf{\Phi\ (l\ ,\ i\ )}$. Построить проекции точки **А,** принадлежащей главному фронтальному меридиану, видимой относительно $\mathbf{\Pi_1}$ и $\mathbf{\Pi_3}$, точки **В**, принадлежащей экватору, невидимой отн. $\mathbf{\Pi_2}$ и $\mathbf{\Pi_3}$, точки **С,** не принадлежащей главным линиям поверхности, видимой относительно $\mathbf{\Pi_2}$ и $\mathbf{\Pi_1}$.

7.2 Построить проекции сферы произвольного радиуса. Построить по принадлежности ей три точки: **А** – на экваторе, видимую относительно фронтальной и профильной плоскостей проекций; **В** – на фронтальном меридиане, невидимую относительно горизонтальной и профильной плоскостей проекций; **С** – не принадлежащую главным линиям поверхности, видимую относительно фронтальной плоскости проекций и невидимую относительно горизонтальной и профильной.

7.3 Построить три проекции прямого кругового конуса с фронтально проецирующей осью. Построить по принадлежности ему две произвольные точки. Определить их видимость.

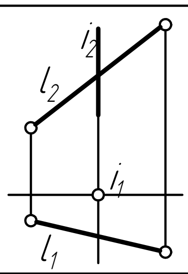
7.4



Дан цилиндр вращения $\mathbf{\Phi}$ с осью $\mathbf{i \perp \Pi_3}$. Зная проекции $\mathbf{A_1}$ и $\mathbf{B_2}$ точек $\mathbf{A \subset \Phi}$ и $\mathbf{B \subset \Phi}$, построить их проекции $\mathbf{A_2}$ и $\mathbf{B_1}$.

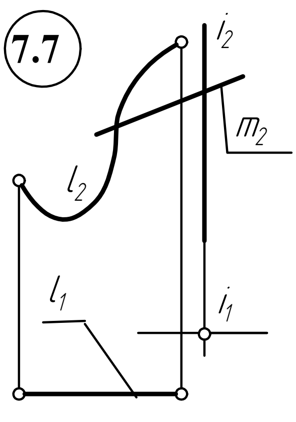
7.5 Задача аналогична 7.4. Поверхность– конус вращения с осью $\mathbf{i \perp \Pi_3}$.

7.6



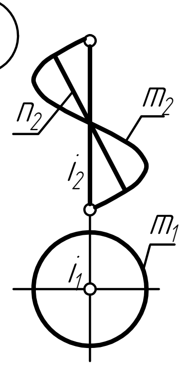
Достроить проекции однополостного гиперболоида вращения $\mathbf{\Phi\ (\ l\ ,\ i\ )}$. Построить проекции точки **А**, видимой относительно $\mathbf{\Pi_2}$, невидимой относительно $\mathbf{\Pi_1}$, точки **В**, принадлежащей фронтальному меридиану, точки **С**, принадлежащей нижней линии обреза.

7.7



По проекциям определителя достроить проекции поверхности $\mathbf{\Sigma\ (\ l\ ,\ i\ )}$. Найти недостающую проекцию линии $\mathbf{m \subset \Phi}$.

7.8

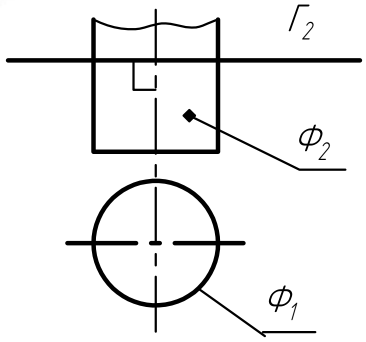


Построить проекции прямого геликоида $\mathbf{\Phi\ (l,\ i,\ \Pi_1)}$, достроить $\mathbf{n_1}$, если $\mathbf{n \subset \Phi}$, (**m**–винтовая линия).

7.9 Построить проекции наклонного геликоида $\mathbf{\Theta\,(m,\ i,\ \Gamma)}$, если $\mathbf{i \perp \Pi_1}$, ход равен **70 мм**, $\mathbf{R(l_1)=25}$ **мм,** угол наклона **l** к оси равен **60°**, с правым направлением винтовой линии (*каркас из 12 образующих*).

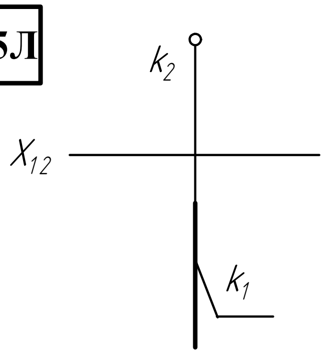
З а д а ч и   д л я   л и д е р о в

14Л



Построить все множество точек, равноудаленных от цилиндрической поверхности **Ф** и плоскости **Г.**

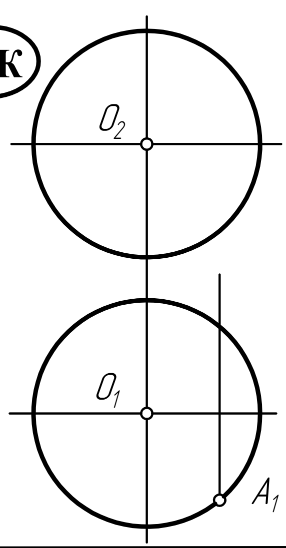
15Л



Построить все множество точек, равноудаленных от прямой **k** и плоскости проекций $\mathbf{П_1}$**.**

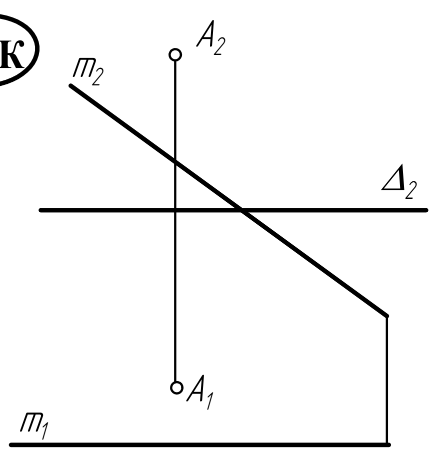
Задачки для самых крутых!

14К



Через точку **A**, удалённую от сферы **Ψ** на **10 мм** и расположенную выше её центра, провести фронталь, касательную к сфере.

15К



Построить однополостный гиперболоид вращения, содержащий данные точку **A** и прямую **m** || $\mathbf{П_2}$**,** если известно, что его горловая окружность лежит в данной плоскости **Δ**||$\mathbf{П_1}$**.**

§ 8. П о з и ц и о н н ы е   з а д а ч и. I и II ГПЗ в первом и втором случаях взаимного расположения фигур. I ГПЗ в третьем случае взаимного расположения фигур

К позиционным относят задачи на взаимное расположение геометрических фигур. Все их можно разделить на три группы:

1) на взаимный порядок –

A – перед прямой,
B – над прямой,
C – ниже и за прямой;

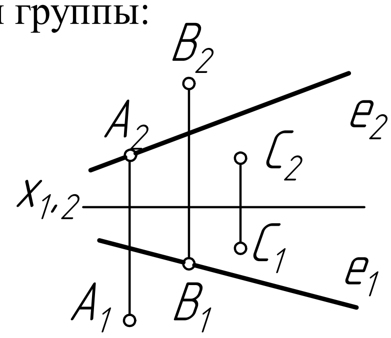


Рис. 116

2) взаимную принадлежность
($\mathbf{A \subset b}$, если $\mathbf{A_2 \subset b_2}$; $\mathbf{A_1 \subset b_1}$; $\mathbf{A \subset \Lambda\,(M, N, E)}$, если $\mathbf{A \subset k \subset \Lambda ...}$);

3) взаимное пересечение.

В свою очередь, в задачах на взаимное пересечение выделяем
<u>первую главную позиционную задачу</u> (I ГПЗ),
<u>вторую главную позиционную задачу</u> (II ГПЗ).

<u>I ГПЗ</u> – пересечение прямой (*кривой*) линии с поверхностью, $\mathbf{a \cap \Gamma = M}$...
Общий искомый элемент – одна или несколько точек.

<u>II ГПЗ</u> – пересечение поверхностей. В результате пересечения могут получиться:
а) п р я м а я – если пересекаются две плоскости;
б) п л о с к а я   л о м а н а я – если пересекаются гранная поверхность и плоскость;
в) п л о с к а я   к р и в а я – плоскость пересекает кривую поверхность;
г) один или два п л о с к и х или п р о с т р а н с т в е н н ы х к о н т у р а из л о м а н ы х п р я м ы х – пересекаются гранная с гранной;
д) одна либо две п л о с к и е или п р о с т р а н с т в е н н ы е к р и в ы е – если пересекаются две кривые поверхности;
е) один либо два п л о с к и х или п р о с т р а н с т в е н н ы х к о н т у р а из л о м а н ы х к р и в ы х, когда пересекаются кривая поверхность с гранной.

В зависимости от расположения геометрических фигур по отношению к плоскостям проекций различают **<u>три случая</u>,** а в соответствии с ними и **разные алгоритмы** решения задач на взаимное пересечение.

П е р в ы й случай – обе фигуры занимают проецирующее положение по отношению к разным плоскостям проекций.

АЛГОРИТМ – *обе проекции искомого элемента уже заданы на чертеже, они принадлежат главным проекциям проецирующих геометрических фигур.*

Задача с в о д и т с я к о б о з н а ч е н и ю.

В н и м а н и е !
Проецирующее положение могут занимать только:
прямая, плоскость, цилиндр и призма.

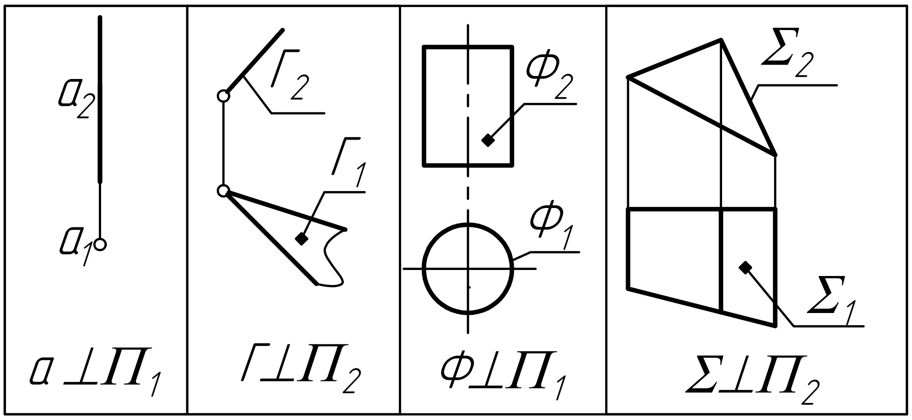


Рис. 117

В т о р о й случай – одна фигура занимает проецирующее положение, другая – общее.

АЛГОРИТМ – *одна проекция искомого элемента уже есть, она принадлежит г л а в н о й проекции проецирующей геометрической фигуры, другую строим* **по п р и н а д л е ж н о с т и** *поверхности общего положения.*

Т р е т и й случай – обе фигуры общего положения. $a \cap \Phi = M, N...$ **?**

АЛГОРИТМ I ГПЗ в третьем случае – решение в три действия:

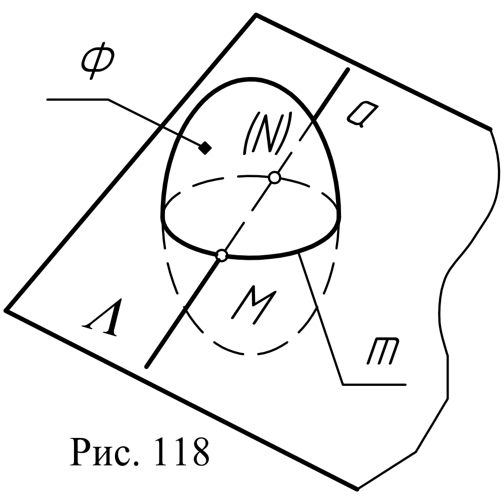


Рис. 118

1) *прямую заключаем во вспомогательную плоскость-посредник,* $a \subset \Lambda$;
2) *строим линию пересечения вспомогательной плоскости с исходной поверхностью,* $\Lambda \cap \Phi = m$;
3) *строим точку или точки пересечения построенной линии с прямой, они и будут искомыми точками пересечения прямой с заданной поверхностью,* $a \cap m = M \wedge N$.

II ГПЗ в третьем случае *(обе пересекающиеся поверхности занимают общее расположение по отношению к плоскостям проекций)*. Для решения возможно использование одного (нескольких) из нижеперечисленных способов:

вспомогательных плоскостей-посредников;

концентрических сфер-посредников;

эксцентрических сфер-посредников.

Встречаются **особые случаи пересечения** ***(соосные поверхности вращения и теорема Монжа).***

Пересечение проецирующих поверхностей
(II ГПЗ в первом случае взаимного расположения)

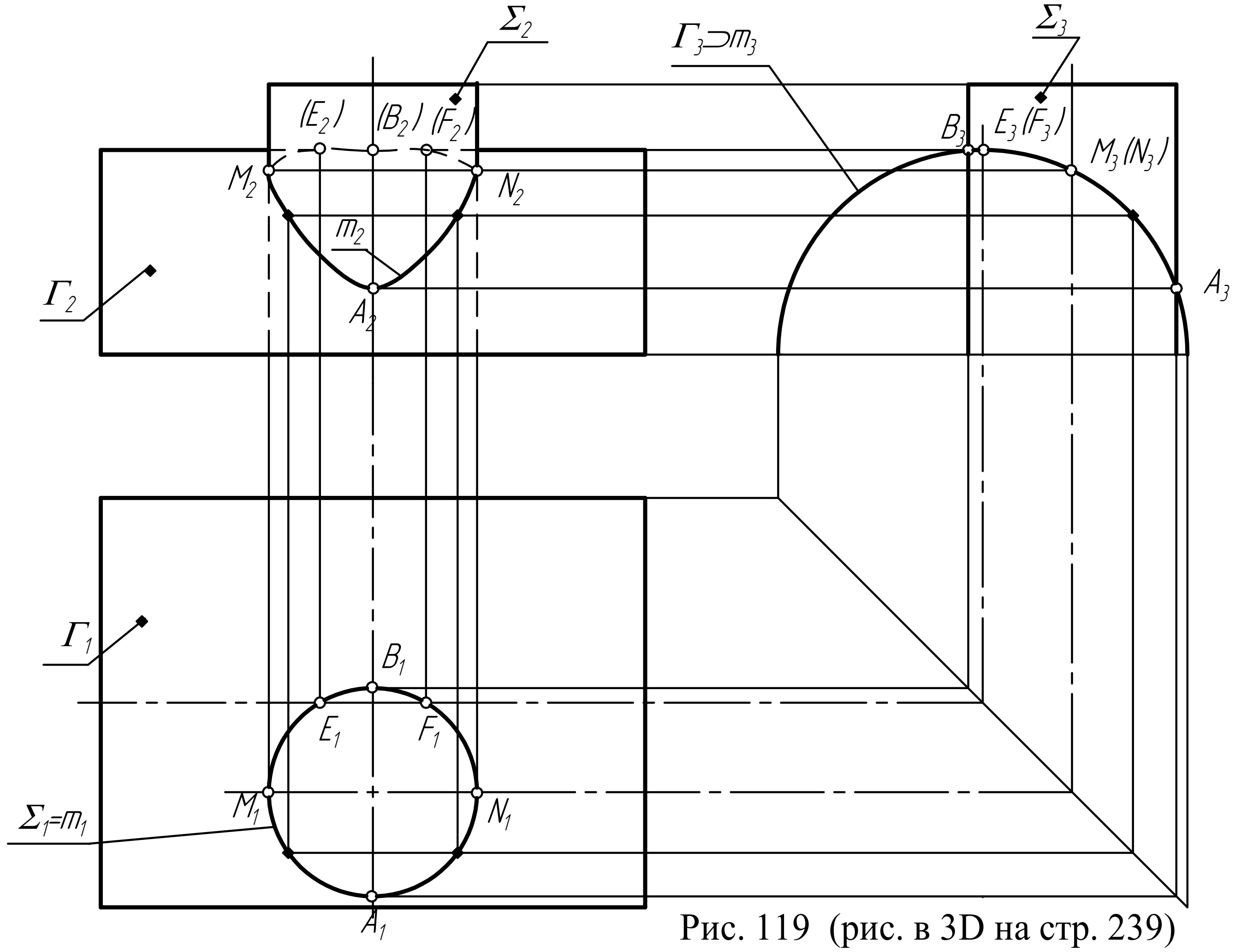


Рис. 119 (рис. в 3D на стр. 239)

Перед нами стоит задача найти линию пересечения двух цилиндров.

$\Gamma \cap \Sigma = m$? А л г о р и т м: $\Sigma \perp \Pi_1 \Rightarrow m_1 = \Sigma_1$; $\Gamma \perp \Pi_3 \Rightarrow m_3 \subset \Gamma_3$; $m_2 \subset \Gamma_2 \wedge \Sigma_2$.

*При построении проекций линии пересечения поверхностей в первую очередь строим проекции главных (характерных) точек. Точка **A** самая ближняя, точка **B** – самая дальняя по отношению к наблюдателю, эти точки являются границей видимости относительно **Π_3**, так как принадлежат крайним ближней (правой) и дальней (левой) образующим горизонтально проецирующего цилиндра **Σ**. Профильные очерковые образующие цилиндра **Σ** в пересечении с главной проекцией профильно проецирующего цилиндра **Г(Γ_3)** дают профильные проекции данных точек **A(A_3)** и **B(B_3)**, недостающие фронтальные проекции этих точек получаем при пересечении соответствующих линий связи.*

*Точки **M** и **N** принадлежат очерковым образующим (относительно **Π_2**) горизонтально проецирующего цилиндра **Σ** и расположены к наблюдателю ближе по сравнению с точками **E** и **F**, принадлежащих фронтальной очерковой профильно проецирующего цилиндра **Г**, следовательно, точки **M** и **N** являются точками – границами видимости относительно **Π_2**. Обязательно строим точки **E** и **F** на очерковой образующей цилиндра **Г**. Промежуточные точки не обозначены, и их третьи проекции мы также строим по двум заданным.*

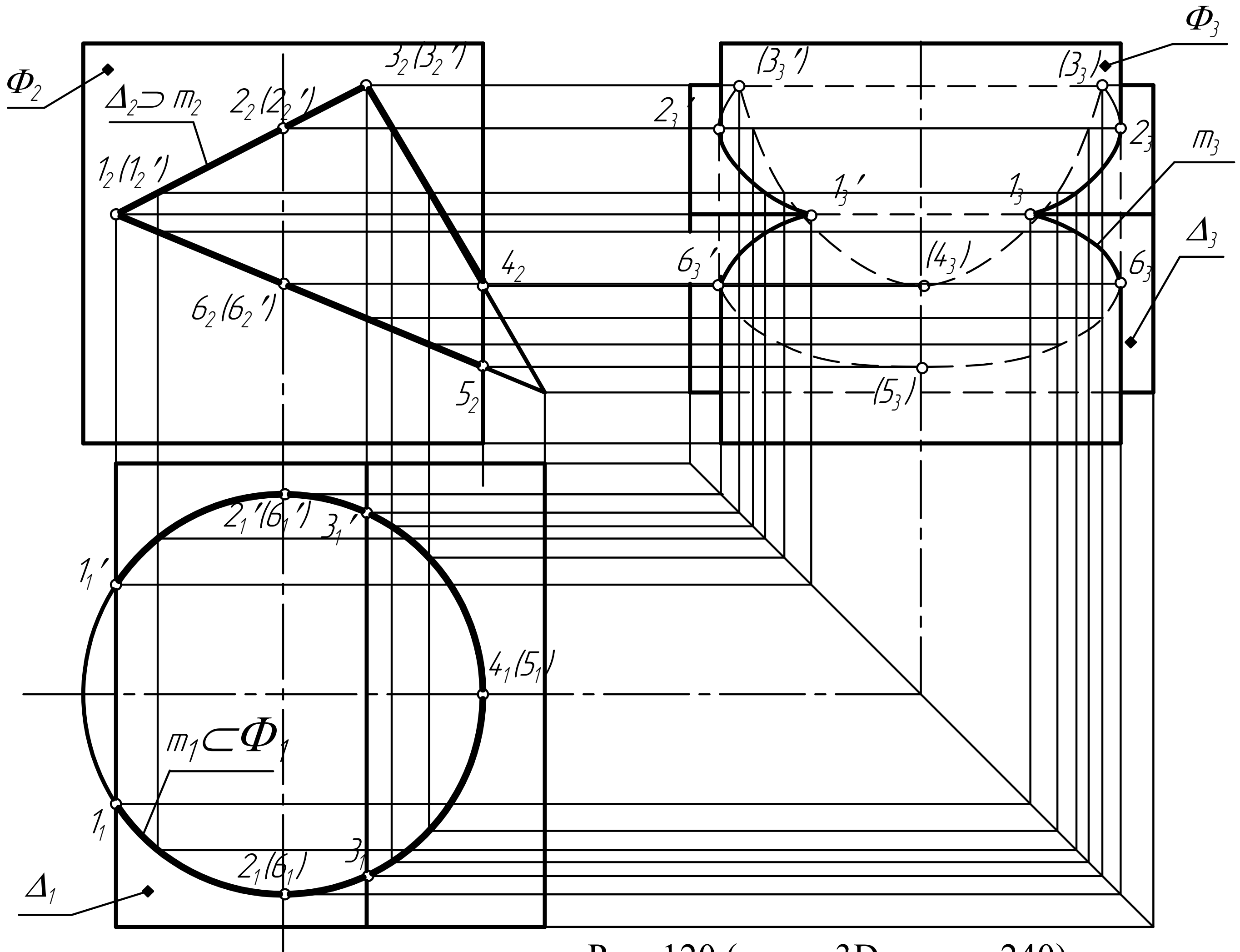


Рис. 120 (рис. в 3D на стр. 240)

$\Phi \cap \Delta = m?$ $\quad \Phi \perp \Pi_1 \Rightarrow m_1 \subset \Phi_1;$ $\quad \Delta \perp \Pi_2 \Rightarrow m_2 \subset \Delta_2;$ $\quad m_3 \subset \Phi_3 \wedge \Delta_3.$

Пересекаются кривая и гранная поверхности. Цилиндр занимает проецирующее положение по отношению к горизонтальной плоскости проекций, поэтому горизонтальная проекция линии пересечения этих поверхностей уже есть, она принадлежит главной проекции цилиндра (обратите внимание, линия располагается в пределах очерка призмы). Призма перпендикулярна по отношению к фронтальной плоскости проекций, следовательно, фронтальная проекция искомой линии пересечения уже задана на чертеже, она принадлежит главной проекции призмы. Речь не идёт о полном совпадении фронтальной проекции линии пересечения и главной проекции призмы, фронтальная проекция искомой линии совпадает с главной проекцией призмы в пределах очерка цилиндра. Фронтальная и горизонтальная проекции линии пересечения выделены утолщённой линией. Третью проекцию строим по двум заданным.

На чертеже обозначены все характерные точки для данной линии пересечения. Точки ***1*** *и* ***1′****,* ***3*** *и* ***3′*** *принадлежат рёбрам призмы, это точки излома кривой,* ***2*** *и* ***2′****,* ***6*** *и* ***6′*** *принадлежат профильным очерковым цилиндра, определяют видимость относительно* Π_3*, точки* ***4*** *и* ***5*** *принадлежат правой очерковой цилиндра и определяют главные точки фрагментов эллипсов. Промежуточные точки строим по тем же правилам, но не обозначаем.*

II ГПЗ во втором случае взаимного расположения (*когда одна из фигур общего расположения, другая проецирующая)*

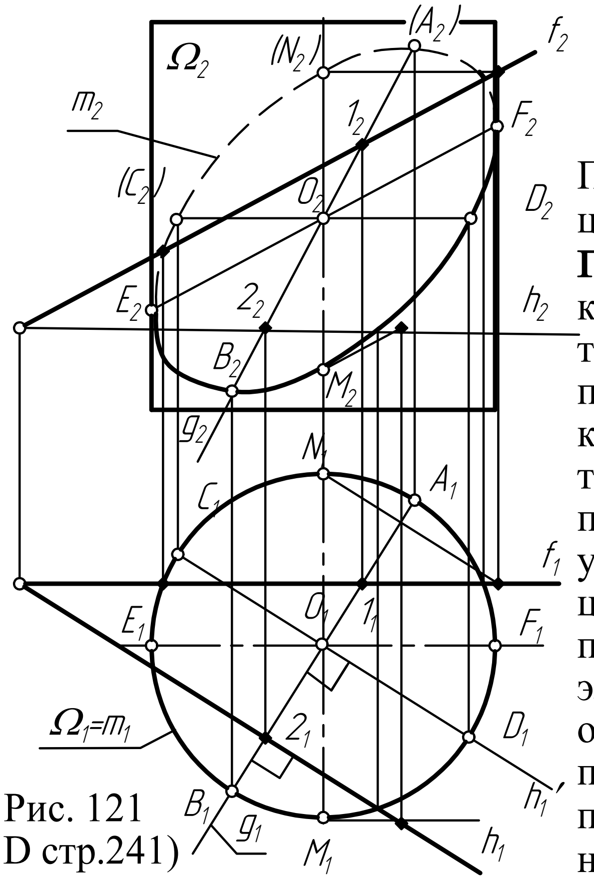


Рис. 121 (3D стр.241)

1) $O_1 \subset g_1 \perp h_1 \rightarrow A_1B_1$, $AB \rightarrow$ большая ось.
$g_1 \cap f_1 = 1_1 \wedge g_1 \cap h_1 = 2_1$; $g_2(1_2 2_2) \subset \Lambda_2$;
$g_2 \cap i_2 = O_2$, $A_2 \wedge B_2 \subset g_2$.
2) $O_1 \subset h_1' // h$, $\rightarrow C_1 \wedge D_1$, $O_2 \subset h_2' \supset C_2 \wedge D_2$,
$CD \rightarrow$ малая ось;
3) $O_2 \subset f_2' // f$, $\rightarrow E_2 \wedge F_2$,
4) $M_2 \subset f_2'' \wedge N_2 \subset h_2''$.

$$\Omega \cap \Lambda(f \cap h) = m?$$
$$\Omega \perp \Pi_1 \Rightarrow m_1 = \Omega_1;\ m_2 \subset \Lambda_2.$$

Пересекаются горизонтально проецирующий цилиндр **Ω** и плоскость общего положения **Г,** заданная прямыми уровня. При пересечении кругового цилиндра с плоскостью мы имеем три разновидности линий: две прямые, если плоскость параллельна оси; окружность, когда плоскость перпендикулярна оси, и в третьем случае плоскость пересекает цилиндр по эллипсу. Горизонтальная проекция эллипса уже задана, она принадлежит главной проекции цилиндра. Фронтальную достраиваем по принадлежности плоскости. Построение эллипса следует начинать с большой и малой осей. Очевидно, высшая и низшая точки сечения принадлежат линии ската плоскости, проходящей через ось цилиндра. Построение начинаем с Π_1, проведя $\mathbf{O_1 \subset g_1 \perp h_1}$. Далее достраиваем $\mathbf{g_2(1_2 2_2) \cap i_2 = O_2}$. Фронтальная проекция центра эллипса позволяет найти проекции остальных главных точек эллипса. $\mathbf{O_1 \subset (C_1D_1) \,||\, h_1;\ O_2 \subset (E_2F_2) \,||\, f_2}$. Точки **E** и **F** – границы видимости относительно $\mathbf{\Pi_2}$. Точки **M** и **N** (ближняя и дальняя) рационально строить при помощи прямых уровня.

(3D стр. 242)

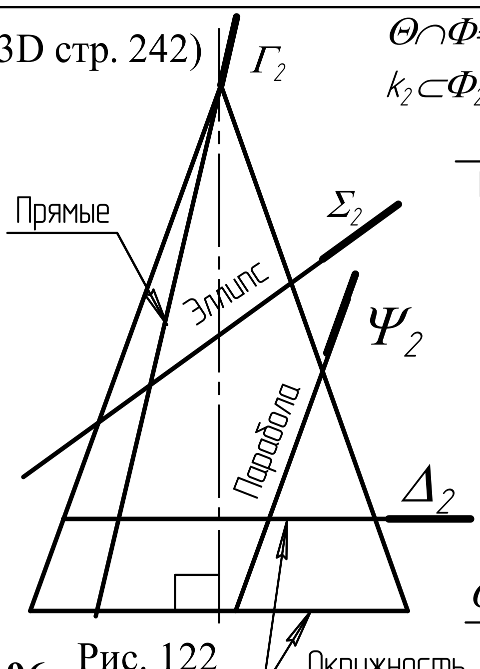


Рис. 122

$\Theta \cap \Phi = k$, $\Theta \perp \Pi_1 \Rightarrow k_1 \subset \Theta_1$,
$k_2 \subset \Phi_2$.

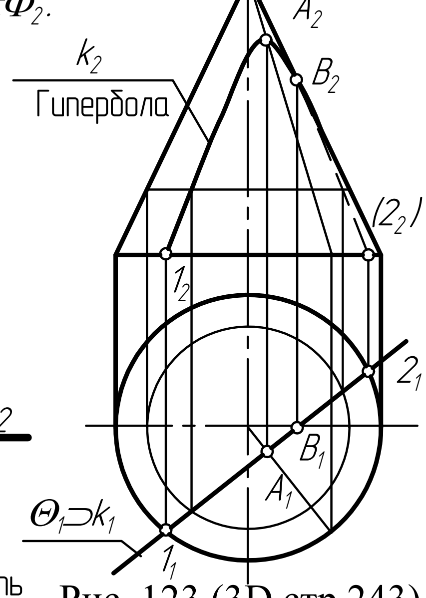


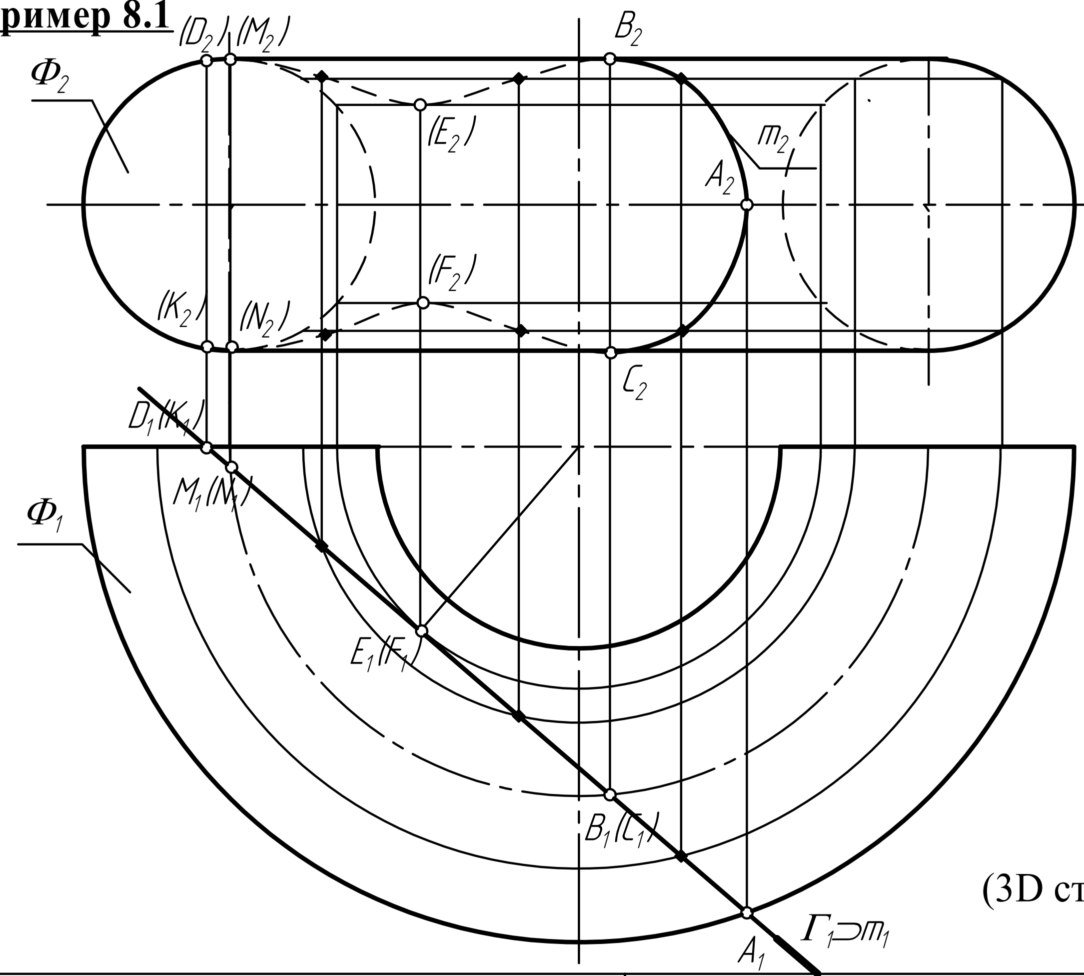
Рис. 123 (3D стр.243)

Конические сечения

При пересечении конуса с плоскостью получаются пять разновидностей линий. Если плоскость **(Г)** проходит через вершину – две прямые, перпендикулярно оси **(Δ)** – окружность, параллельно образующей **(Ψ)** – парабола, двум образующим **(Θ)** – гипербола, если пересекает все образующие **(Σ)** – эллипс.

Примеры решения задач на тему
«Пересечение поверхностей с проецирующей плоскостью»

Пример 8.1



$\Phi \cap \Gamma = m?$

$\Gamma \perp \Pi_1 \Rightarrow$

$m_1 \subset \Gamma_1;$

$m_2 \subset \Phi_2.$

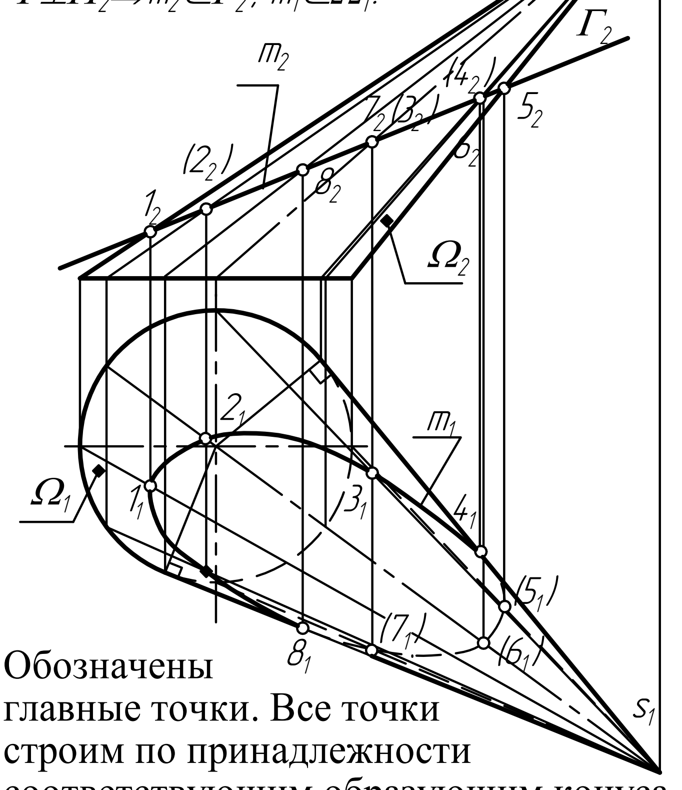
Обозначены главные точки

(3D стр. 244)

Пример 8.2 (3D стр. 245)

$\Gamma \cap \Omega = m?$

$\Gamma \perp \Pi_2 \Rightarrow m_2 \subset \Gamma_2;\ m_1 \subset \Omega_1.$



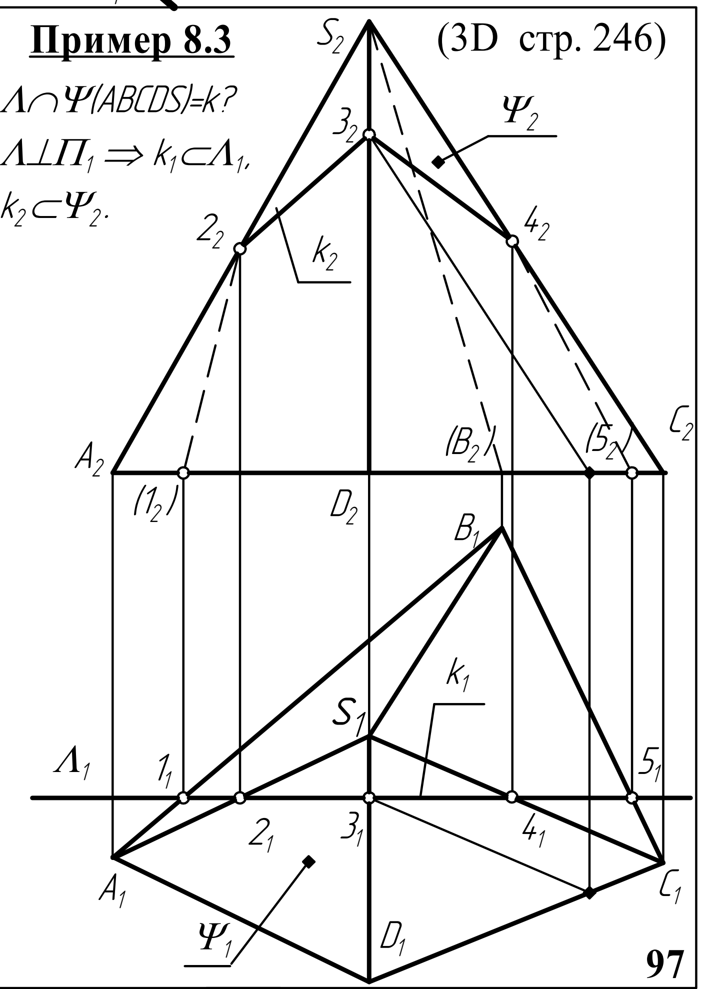
Обозначены главные точки. Все точки строим по принадлежности соответствующим образующим конуса.

Пример 8.3 (3D стр. 246)

$\Lambda \cap \Psi(ABCDS) = k?$

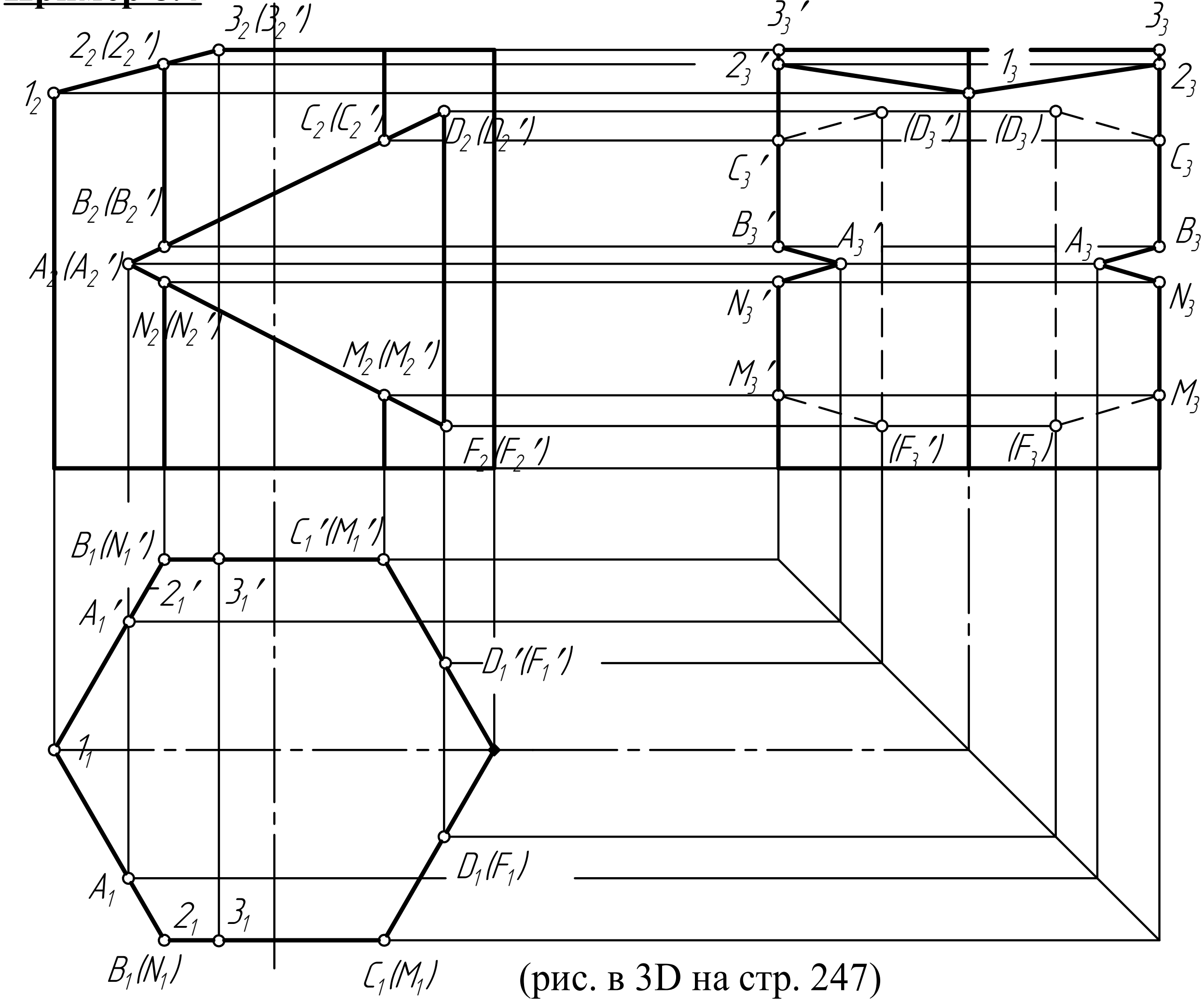
$\Lambda \perp \Pi_1 \Rightarrow k_1 \subset \Lambda_1,$

$k_2 \subset \Psi_2.$



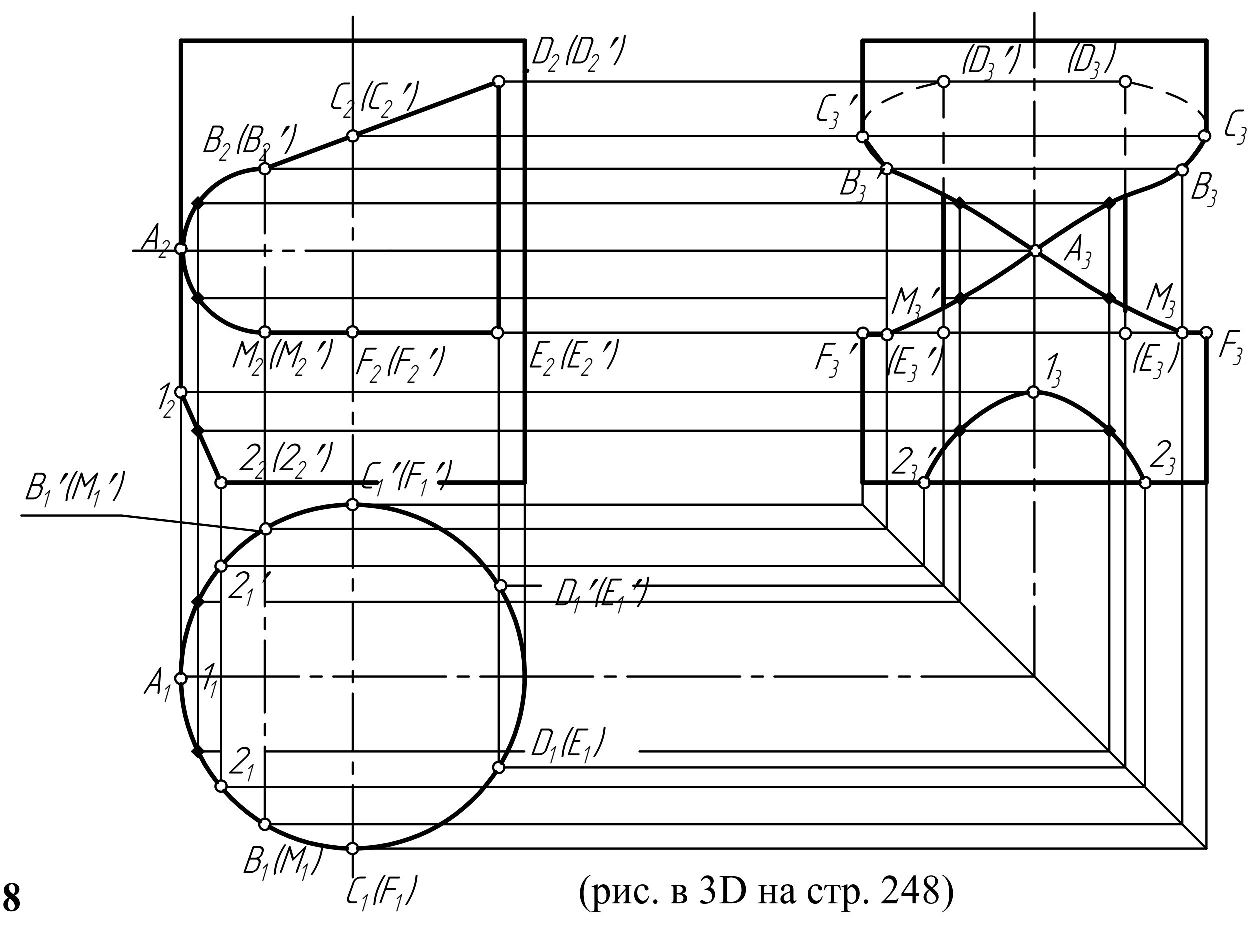
Построение недостающих проекций поверхностей со срезами и вырезами

Пример 8.4



(рис. в 3D на стр. 247)

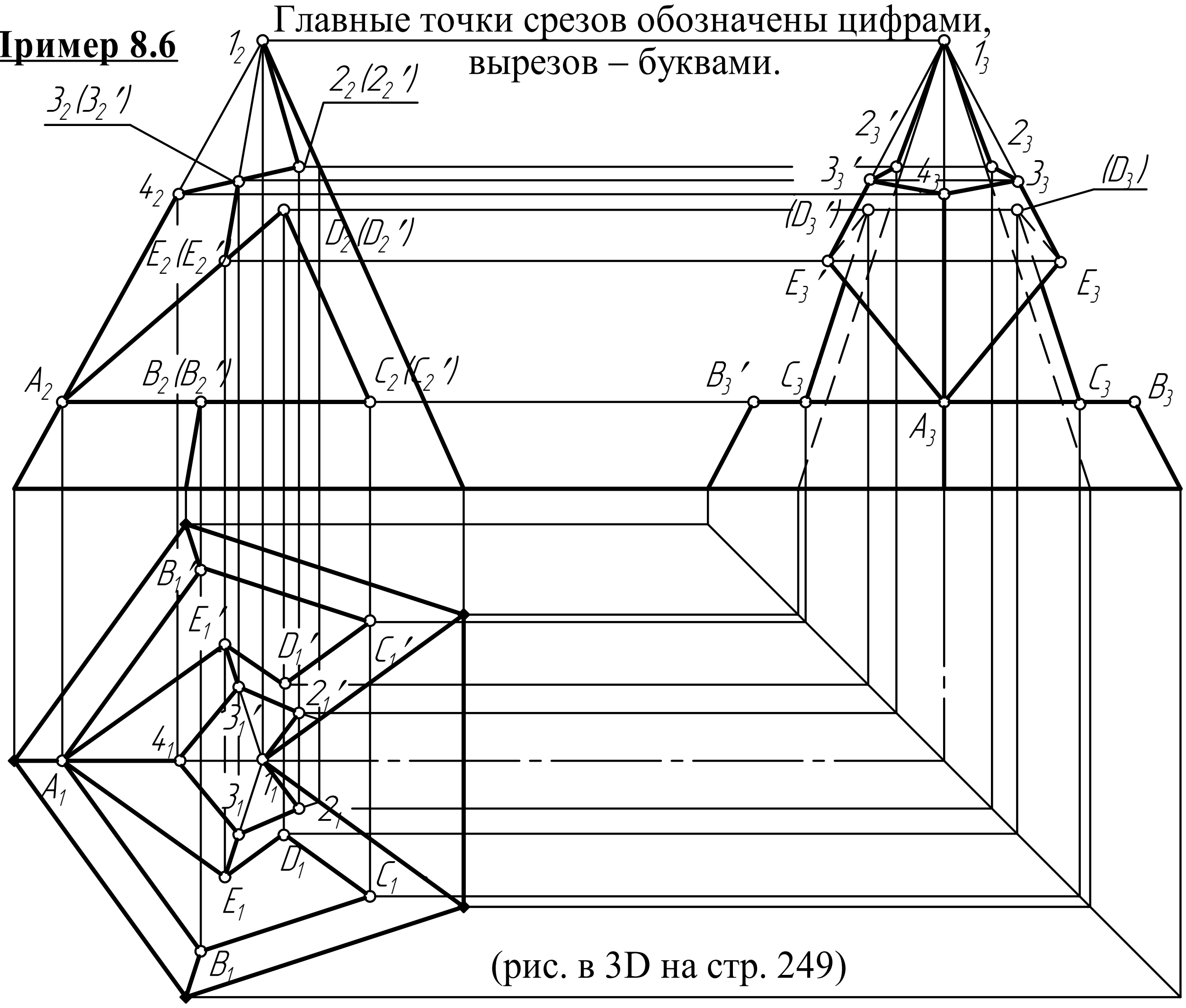
Пример 8.5 Главные точки срезов обозначены цифрами, вырезов – буквами.



(рис. в 3D на стр. 248)

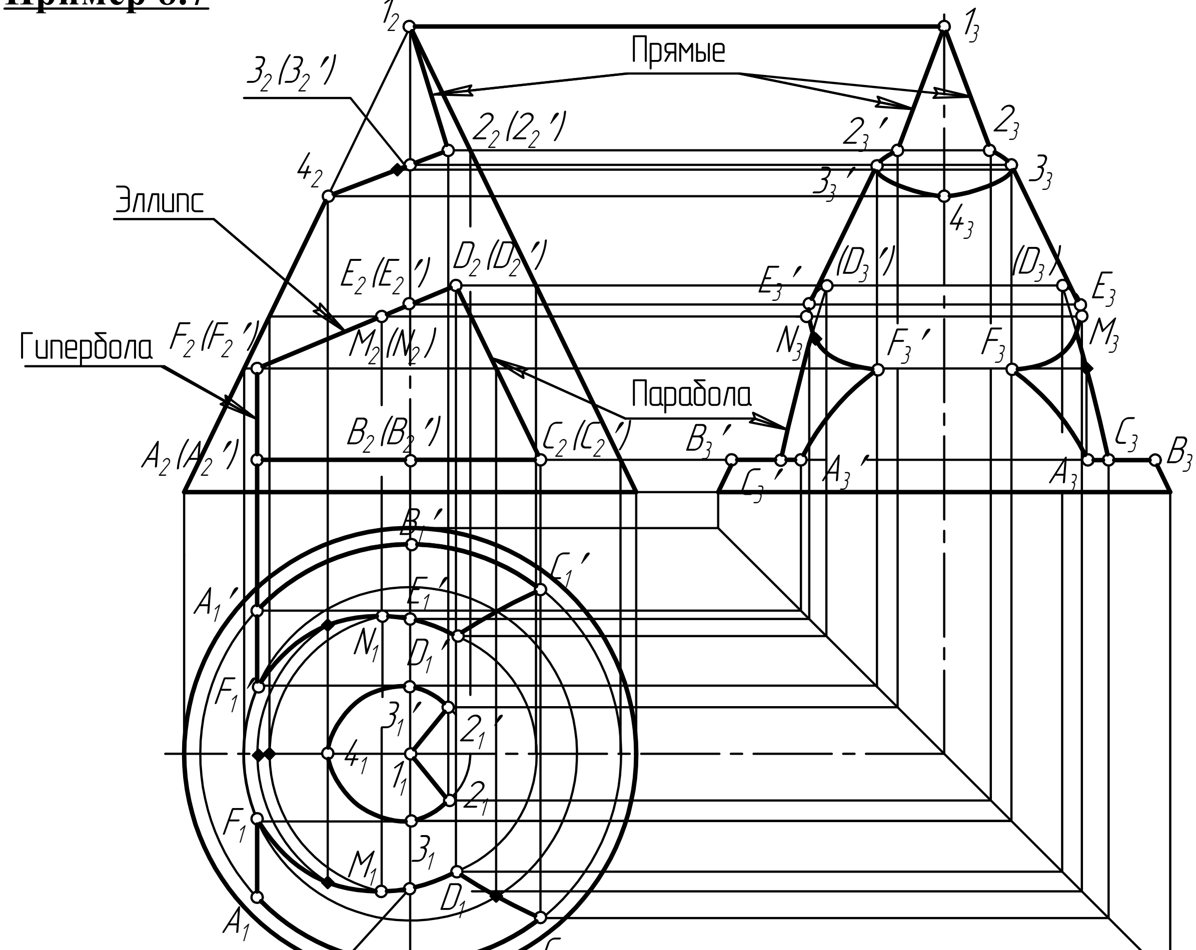
Пример 8.6

Главные точки срезов обозначены цифрами, вырезов – буквами.



(рис. в 3D на стр. 249)

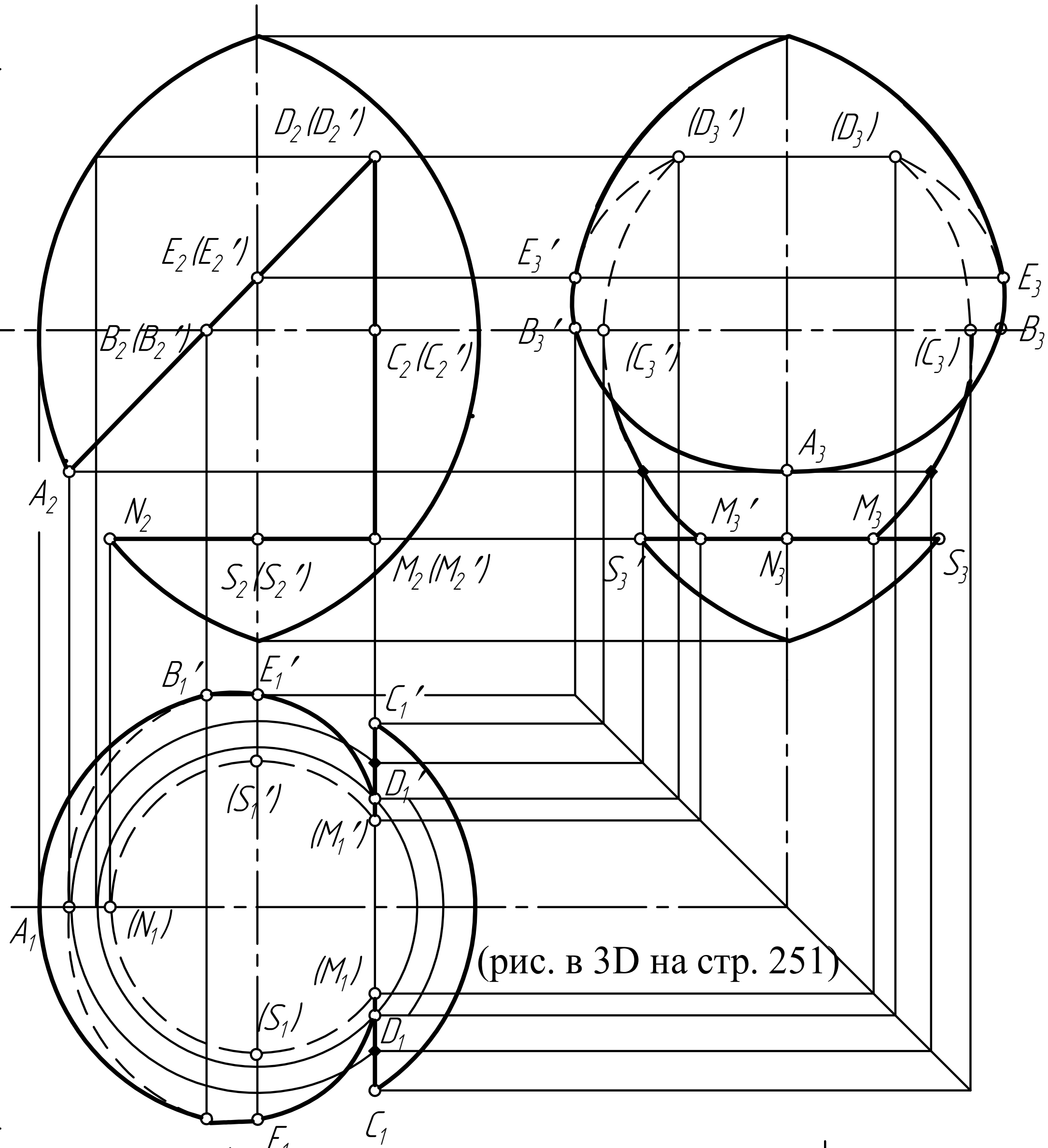
Пример 8.7



(рис. в 3D на стр. 250)

Пример 8.8

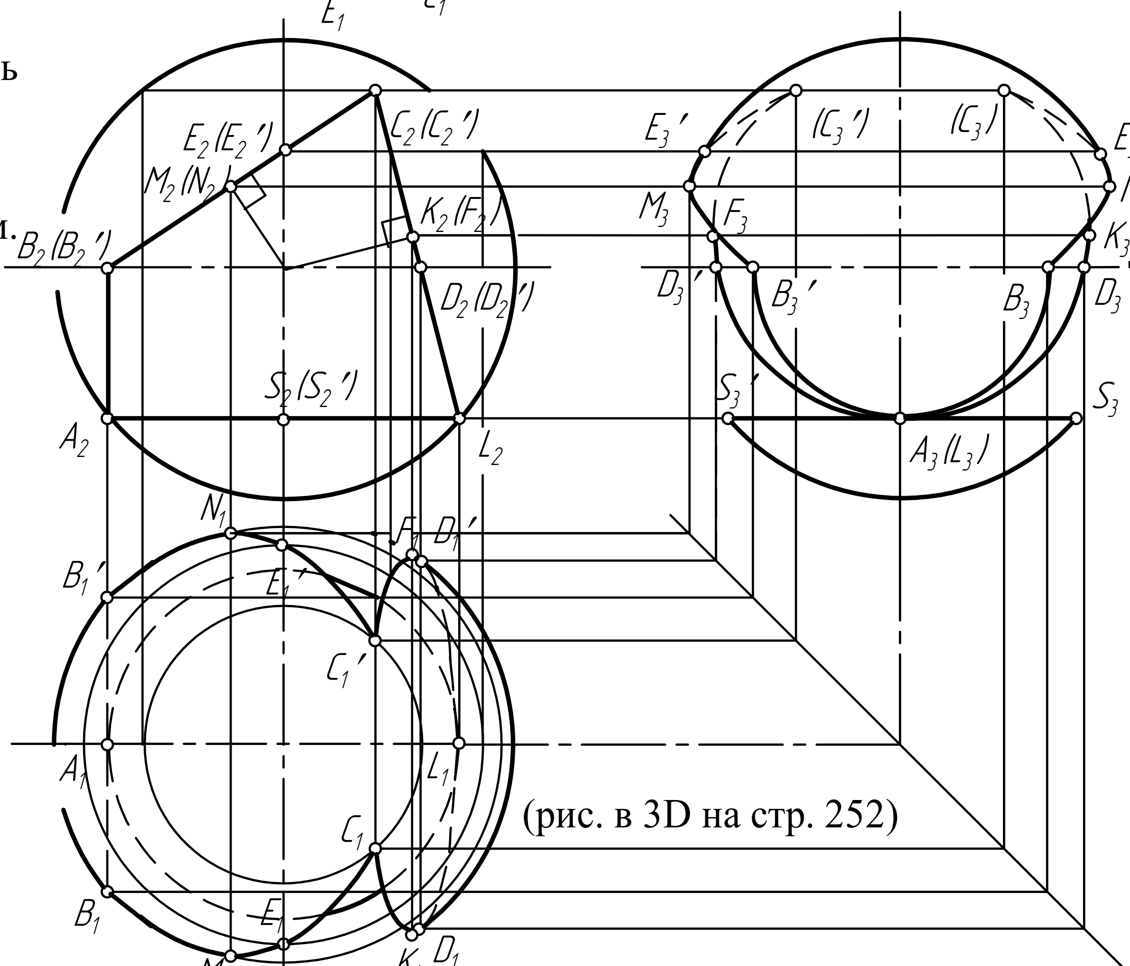
Построить
проекции
тора
с вырезом.



(рис. в 3D на стр. 251)

Пример 8.9

Построить
проекции
сферы
с вырезом.



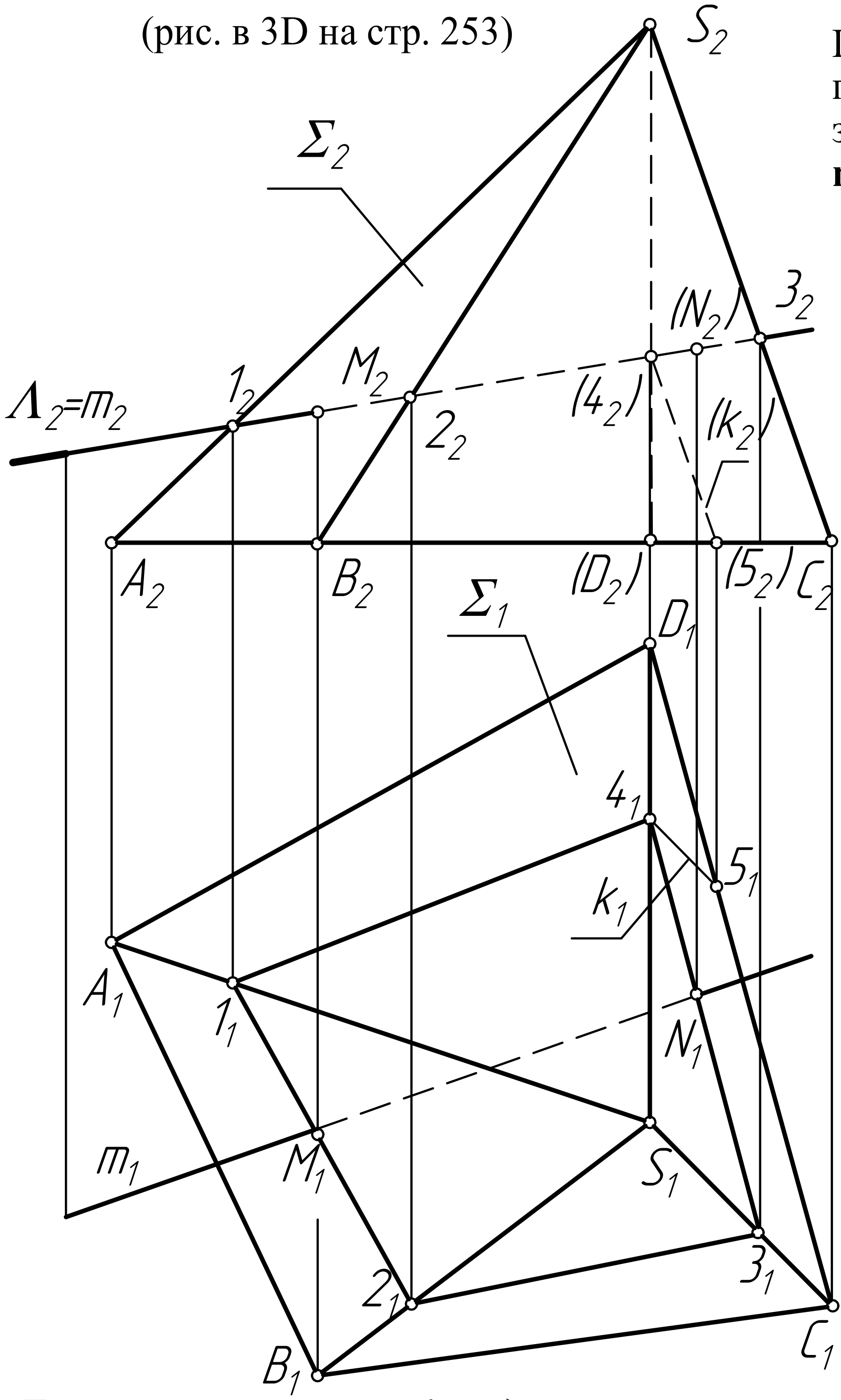
(рис. в 3D на стр. 252)

I ГПЗ в третьем случае взаимного расположения (*когда обе фигуры общего расположения)*

Пример 8.10

Построить проекции точек пересечения прямой **m** с заданной поверхностью **Σ**.
m $\cap$ **Σ** = ?

(рис. в 3D на стр. 253)



Решение

Перед нами стоит задача построить точки пересечения прямой ***m*** *с поверхностью четырёхгранной пирамиды* ***Σ (SABCD)****. Используем предлагаемый алгоритм решения.*

1. Прямую ***m*** *заключаем во вспомогательную плоскость* ***Λ****. Плоскость выбираем фронтально проецирующую, следовательно, главная проекция плоскости совпадёт с фронтальной проекцией прямой.*

2. Про прямую на мгновение забываем и строим линию пересечения введённой плоскости с исходной поверхностью пирамиды. ***Λ*** *пересекла все четыре ребра, значит, в сечении получим четырёхугольник* ***(1234).*** *Обратите внимание, как мы построили пересечение с профильным ребром* ***SD****.*

Для построения точки ***4*** *вводим вспомогательную прямую, параллельную одной из сторон треугольника* ***SDC****, в данном случае мы задали её параллельно ребру* ***SC*** *и, получив точку пересечения со стороной* ***DC,*** *достроили проекцию точки* ***4.***

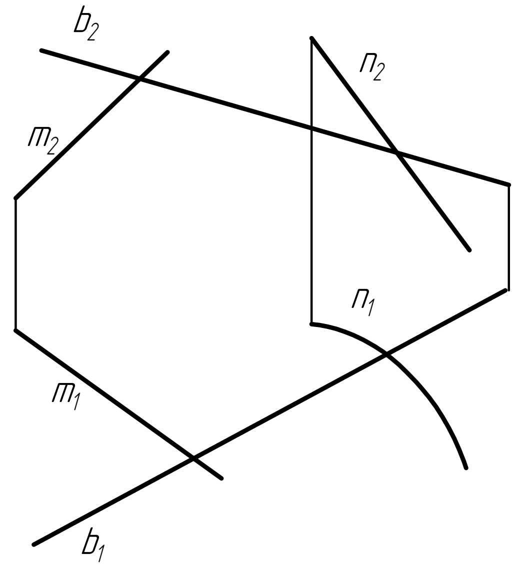
3. Горизонтальная проекция построенного четырёхугольника при пересечении с горизонтальной проекцией прямой дала горизонтальные проекции искомых точек ***MN****, фронтальные достраиваем по принадлежности прямой* ***m.***

Алгоритм

$m \cap \Sigma = M \wedge N$? **1)** $m \subset \Lambda \perp \Pi_2 \Rightarrow \Lambda_2 = m_2$; **2)** $\Lambda \cap \Sigma = (1234)$,
$\Lambda_2 \cap (A_2S_2) \rightarrow 1_2$, $\Lambda_2 \cap (B_2S_2) \rightarrow 2_2$, $\Lambda_2 \cap (C_2S_2) \rightarrow 3_2$, $\Lambda_2 \cap (D_2S_2) \rightarrow 4_2$,
$1_1 \subset (A_1S_1)$, $2_1 \subset (B_1S_1)$, $3_1 \subset (C_1S_1)$, $4_1 \rightarrow ?$ $4_2 \subset k_2 \parallel (C_2S_2)$, $k_2 \cap (D_2C_2) \rightarrow 5_2$,
$5_1 \subset (D_1C_1)$, $5_1 \subset k_1 \parallel (C_1S_1)$, $k_1 \cap (D_1S_1) \rightarrow 4_1$, *Определяем*
3) $(1_12_1) \cap m_1 \rightarrow M_1$, $(4_13_1) \cap m_1 \rightarrow N_1$, $M_2N_2 \subset m_2$. *Видимость.*

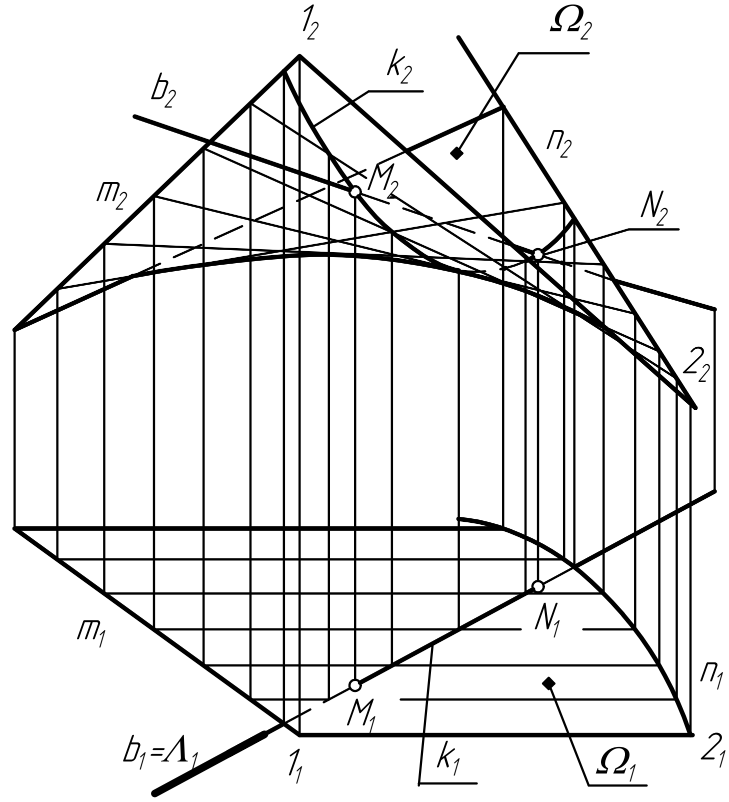
Пример 8.11

Найти точки пересечения прямой **b** с заданной поверхностью **Ω (m, n, Γ||Π₂)**.



Решение

(рис. в 3D на стр. 254)



*Перед нами стоит задача построить проекции точек пересечения прямой общего положения **b** с поверхностью коноида **Ω.** Поверхность задана проекциями определителя, для решения задачи необходимо в первую очередь достроить проекции поверхности. Плоскостью параллелизма является **Π_2** (фронтальная плоскость проекций). Все образующие перемещаются по двум направляющим параллельно фронтальной плоскости проекций. Построение фронтали всегда начинаем с горизонтальной проекции, проводя её перпендикулярно линии связи. Далее по точкам пересечения горизонтальной проекции образующей с горизонтальными проекциями направляющих ($1_1 \wedge 2_1$) достраиваем фронтальную проекцию образующей ($1_2 2_2$). Аналогично строим шесть или восемь образующих. Определяем видимость поверхности.*

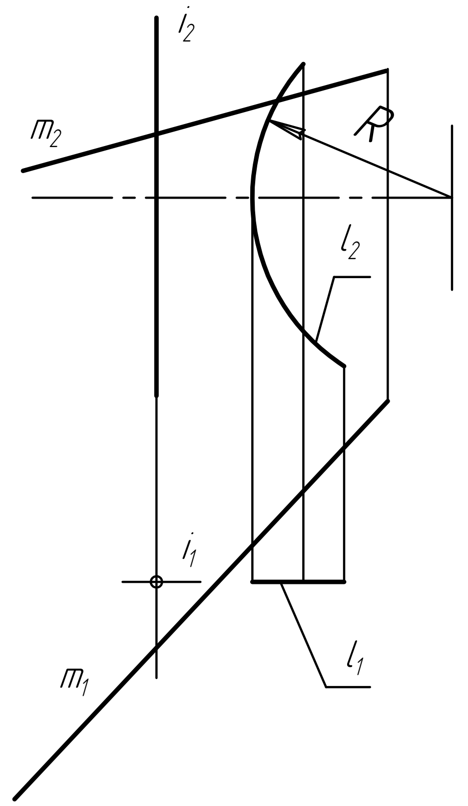
*Далее действуем по известному алгоритму. Заключаем прямую в плоскость. При таком задании поверхности удобнее использовать горизонтально проецирующую плоскость **Λ**. Горизонтальная проекция линии пересечения введённой плоскости с исходной поверхностью **(k_1)** уже есть на чертеже, она принадлежит главной проекции плоскости **$\Lambda(\Lambda_1)$,** недостающую фронтальную проекцию линии пересечения **(k_2)** достраиваем по принадлежности поверхности коноида. При пересечении фронтальной проекции линии **$k(k_2)$** с фронтальной проекцией прямой **$b(b_2)$** получаем фронтальные проекции искомых точек **M, N.** Недостающие проекции этих точек встречи достраиваем по принадлежности прямой **b.** Определяем видимость.*

Алгоритм решения

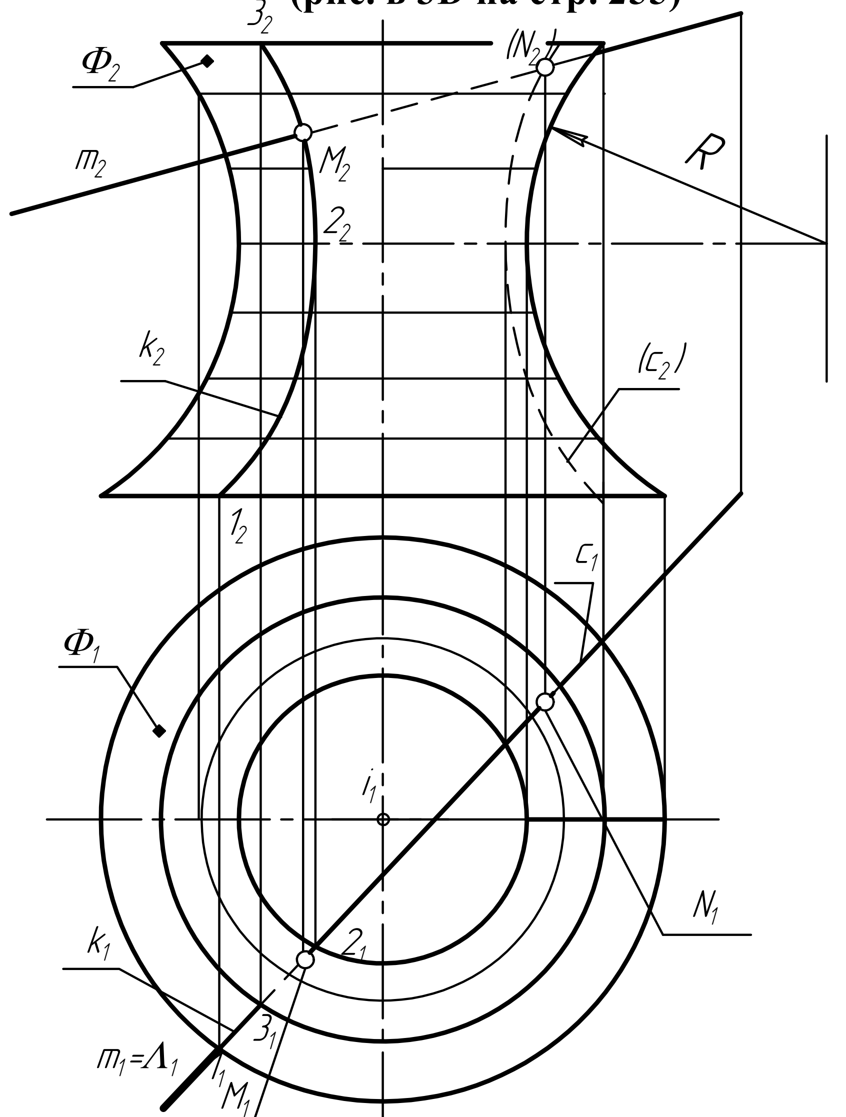
$b \cap \Omega \to ?$ $\Omega_1 \wedge \Omega_2 ?$ $l_1 \perp$ л.с.; $l_1 \cap m_1 \to 1_1$, $l_1 \cap n_1 \to 2_1$,
$1_2 \subset m_2$, $2_2 \subset n_2$, $l_2 (1_2 2_2)$, восемь образующих.
1) $b \subset \Lambda \perp \Pi_1 \Rightarrow \Lambda_1 = b_1$. 2) $\Lambda \cap \Omega \to k$, $k_1 \subset \Lambda_1$; $k_2 \subset \Omega_2$.
3) $k_2 \cap b_2 \to M_2 \wedge N_2$; $M_1 \wedge N_1 \subset b_1$. Определяем видимость прямой.

Пример 8.12

Построить пересечение прямой **m** с заданной поверхностью **Ф** (l,i).



Решение
(рис. в 3D на стр. 255)



Требуется построить проекции точек пересечения прямой общего положения ***m*** *с поверхностью глобоидного тора* ***Ф****. Очевидно, что для решения задачи сначала достраиваем проекции поверхности. При расположении* ***l*** *в одной фронтальной плоскости с осью вращения на* $\boldsymbol{\Pi_2}$ *мы имеем правый полумеридиан, достраиваем левый полумеридиан, равный и симметричный правому. Для построения точек встречи прямую* ***m*** *заключаем в горизонтально проецирующую плоскость* $\boldsymbol{\Lambda(\Lambda_1)}$*. Строим линии пересечения плоскости* $\boldsymbol{\Lambda}$ *с исходной поверхностью тора* ***k*** *и* ***c****. Горизонтальные проекции этих линий принадлежат главной проекции плоскости, а фронтальные достраиваем по принадлежности поверхности тора. Кривые строим как минимум по восьми точкам, обязательно включая точки, принадлежащие главным параллелям поверхности (1, 2, 3). Фронтальные проекции построенных линий при пересечении с фронтальной проекцией прямой дали нам фронтальные проекции искомых точек встречи* ***M*** *и* ***N****. Горизонтальные достраиваем по принадлежности прямой. Определяем видимость прямой.*

Алгоритм

$$m \cap \Phi \rightarrow M \wedge N\ ?$$

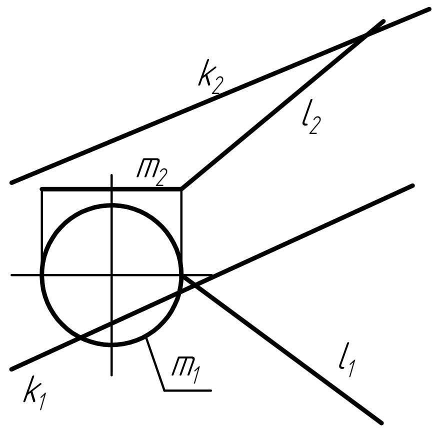
1) $m \subset \Lambda \perp \Pi_1 \Rightarrow m_1 = \Lambda_1;$

2) $\Lambda \cap \Phi \rightarrow k \wedge c,\ \ k_1 \wedge c_1 \subset \Lambda_1 \wedge \Phi_1;\ \ \ k_2 \wedge c_2 \subset \Phi_2;$

3) $k_2 \cap m_2 \rightarrow M_2,\ \ c_2 \cap m_2 \rightarrow N_2,\ \ \ M_1 \wedge N_1 \subset m_1.$

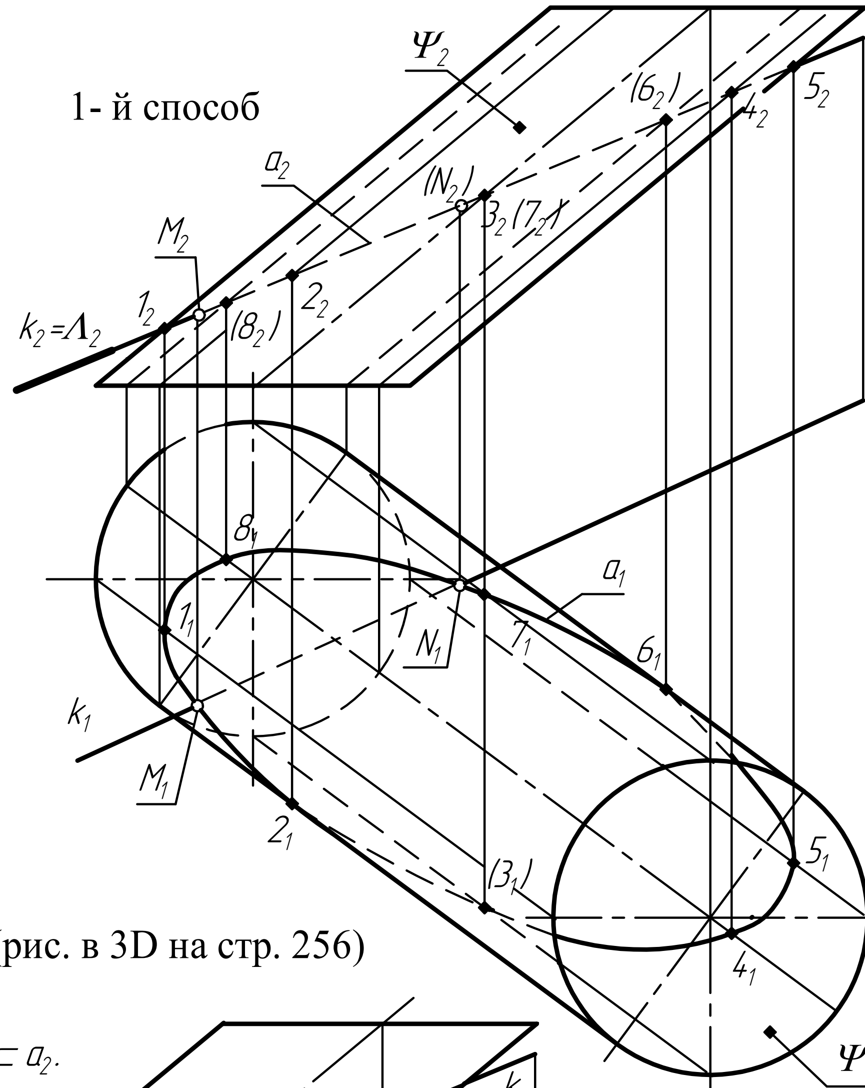
Пример 8.13

Найти точки пересечения прямой **k** с заданной поверхностью **Ψ (m, l)**.



Решение

1- й способ



Каждую точку строим по принадлежности образующей цилиндра!

Алгоритм решения
(1-й способ)

$k \cap \Psi \to M \wedge N?$

1) $k \subset \Lambda \perp \Pi_2 \Rightarrow k_2 = \Lambda_2$;

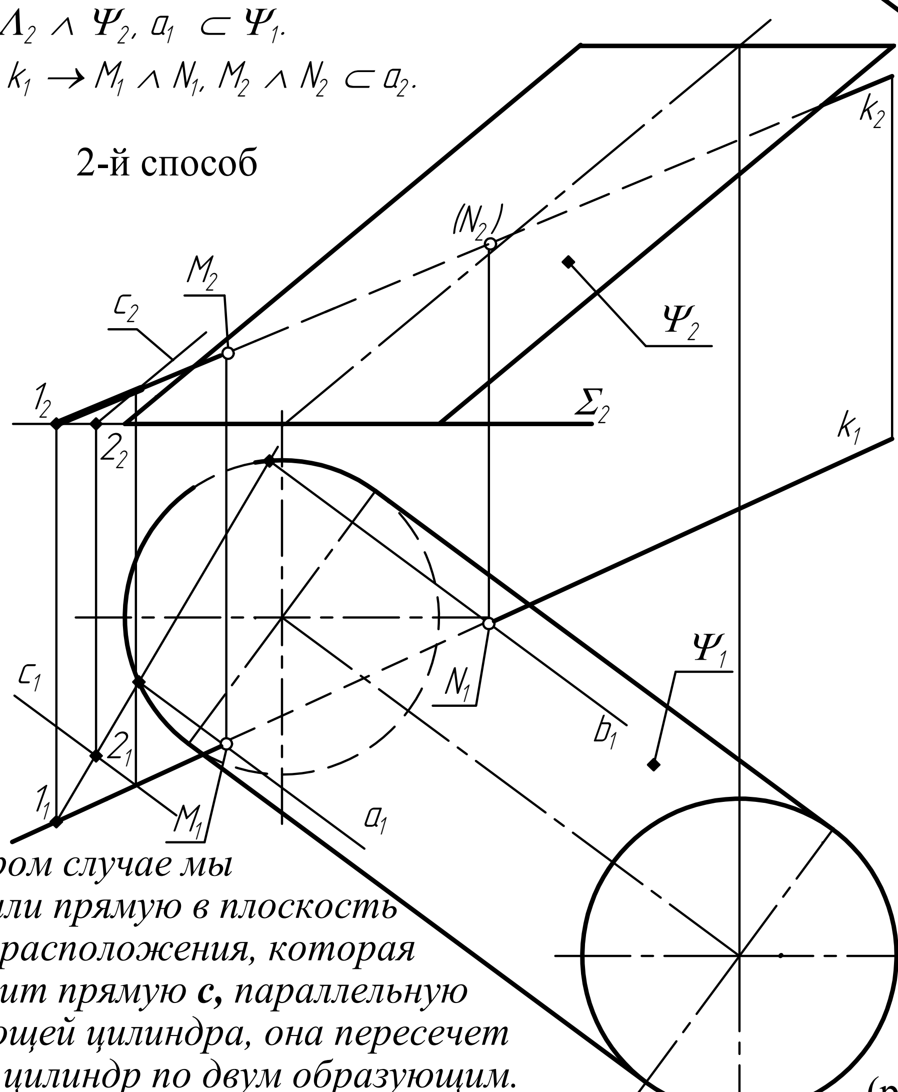
2) $\Lambda \cap \Psi \to a$ (12345678),

$a_2 \subset \Lambda_2 \wedge \Psi_2$, $a_1 \subset \Psi_1$.

3) $a_1 \cap k_1 \to M_1 \wedge N_1$, $M_2 \wedge N_2 \subset a_2$.

(рис. в 3D на стр. 256)

2-й способ



Алгоритм
(2-й способ)

$k \cap \Psi \to M \wedge N$?

1) $k \subset \Lambda (k \cap c \,||\, l)$;

2) $\Lambda \cap \Sigma \to (12)$,

$(1_1 2_1) \cap \Psi_1 \to a_1 \wedge b_1$;

3) $a_1 \cap k_1 \to M_1$,

$b_1 \cap k_1 \to N_1$;

$M_2 \wedge N_2 \subset k_2$.

Во втором случае мы заключили прямую в плоскость общего расположения, которая содержит прямую ***c****, параллельную образующей цилиндра, она пересечет цилиндр по двум образующим.*

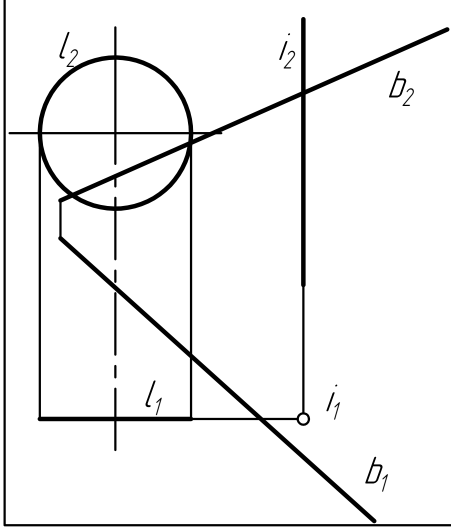
2-й способ проще и точнее!

(рис. в 3D на стр. 257)

<u>Пример 8.14</u>

Найти точки пересечения прямой **b** с заданной поверхностью кольца.

$\mathbf{b} \cap \mathbf{\Phi}(\mathbf{l}, \mathbf{i}) \rightarrow ?$



Алгоритм ***(1-й способ)***

$b \cap \Phi \rightarrow ?$

1) $b \subset \Lambda \perp \Pi_2 \Rightarrow \Lambda_2 = b_2$,

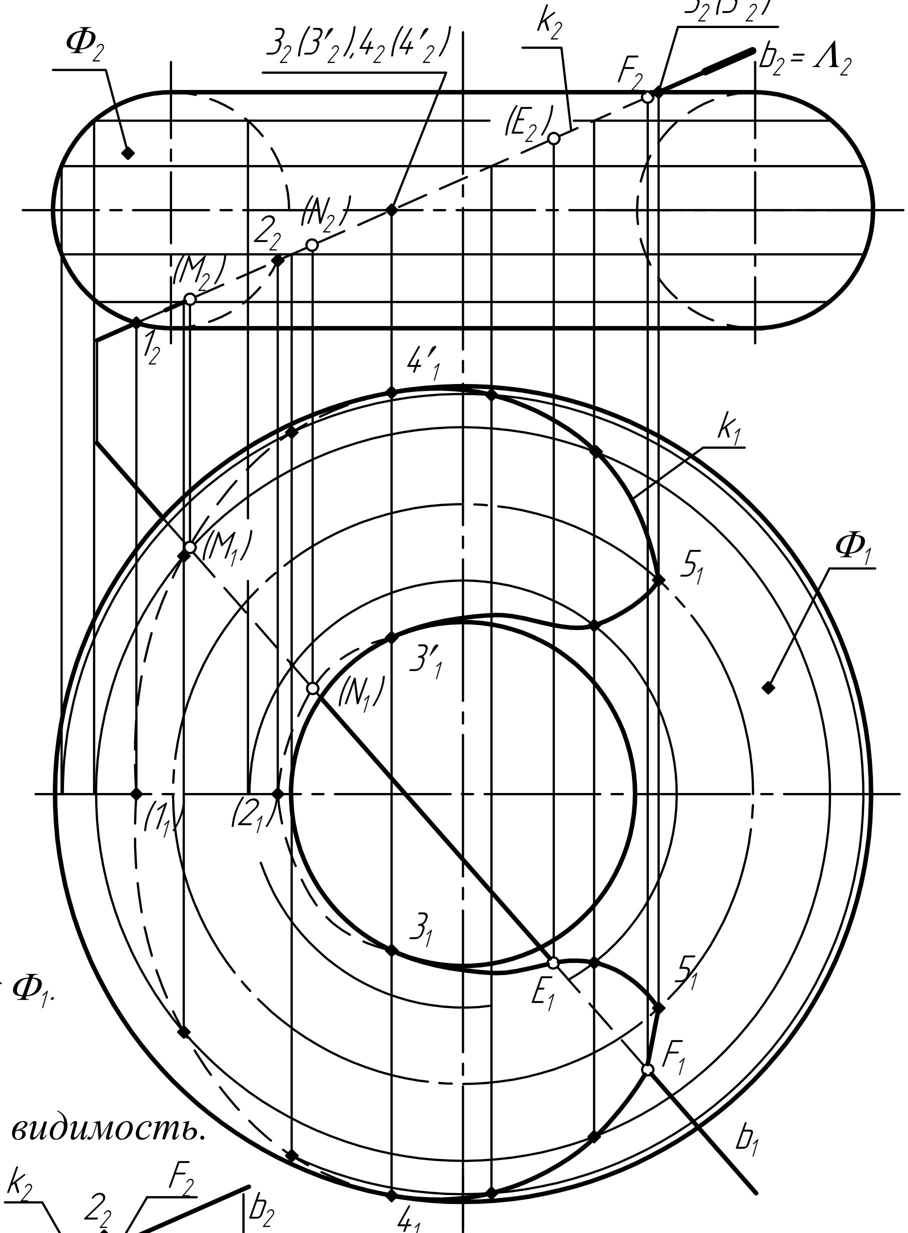
2) $\Lambda \cap \Phi \rightarrow k$, $k_2 \subset \Lambda_2 \wedge \Phi_2$, $k_1 \subset \Phi_1$.

Обозначены главные точки.

3) $k_1 \cap b_1 \rightarrow M_1, N_1, \wedge E_1, F_1$,

$M_2N_2 \wedge E_2F_2 \subset b_2$. *Определяем видимость.*

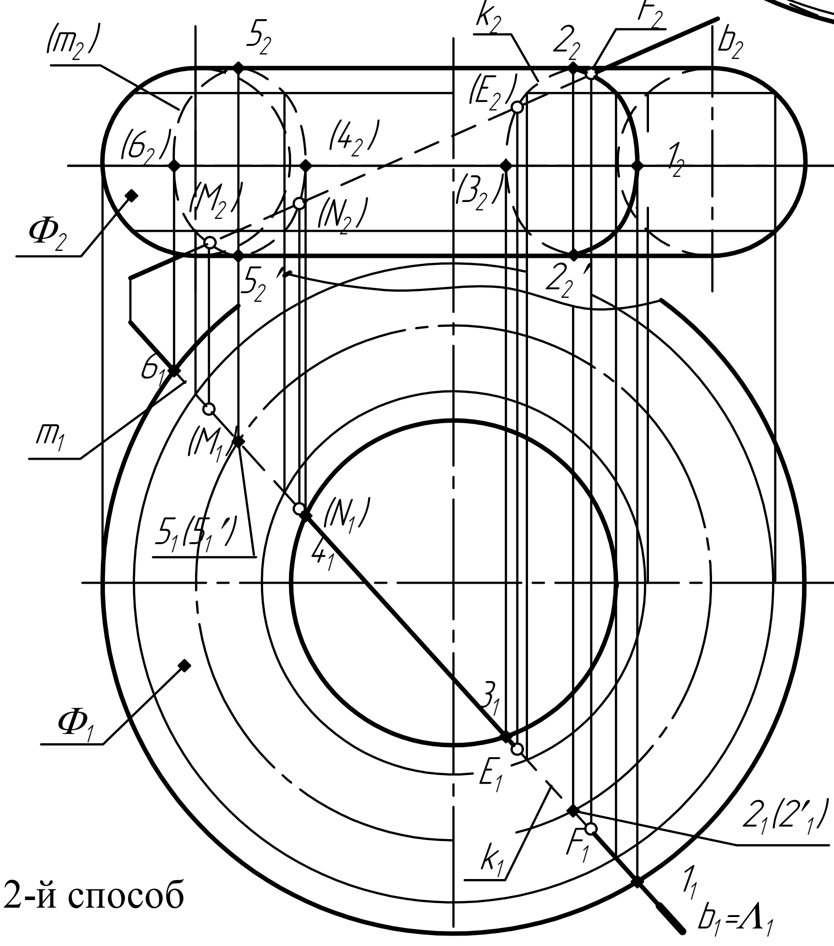
1-й способ



(рис. в 3D на стр. 258)

Алгоритм

(2-й способ)



$b \cap \Phi \rightarrow ?$

1) $b \subset \Lambda \perp \Pi_1 \Rightarrow \Lambda_1 = b_1$;

2) $\Lambda \cap \Phi \rightarrow m \wedge k$,

$m_1 \wedge k_1 \subset \Lambda_1 \wedge \Phi_1$,

$m_2 \wedge k_2 \subset \Phi_2$.

1, 2, 2′, 3 ∧ 4, 5, 5′, 6→главные точки

3) $m_2 \cap b_2 \rightarrow M_2 \wedge N_2$,

$k_2 \cap b_2 \rightarrow E_2 \wedge F_2$,

$M_1N_1 \wedge E_1F_1 \subset b_1$.

Определяем видимость.

(рис. в 3D на стр. 259)

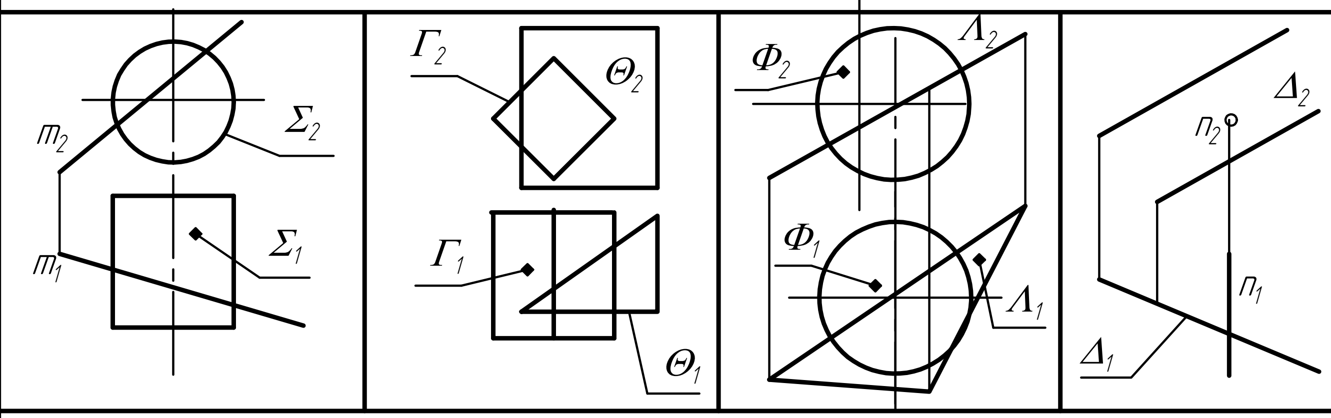
2-й способ

Проверьте себя!

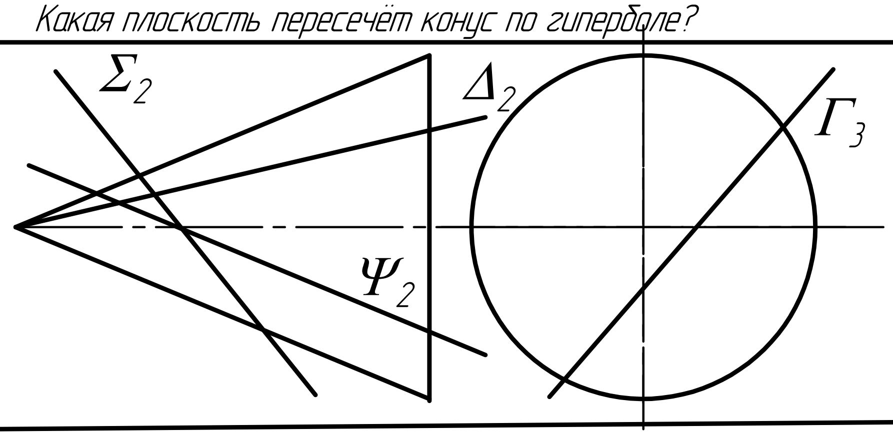
Обучающий тест 8.1 по теме

«Пересечение прямой с поверхностью, пересечение поверхностей»

№ п/п	Вопрос	1	2	3	4
1	Где обе проекции точки пересечения прямой с плоскостью уже заданы на чертеже?				
2	На каком чертеже одна проекция точек пересечения прямой с поверхностью уже определена?				
3	Где определена одна проекция линии пересечения плоскости с поверхностью?				
4	На каком чертеже обе проекции линии пересечения поверхностей уже заданы?				

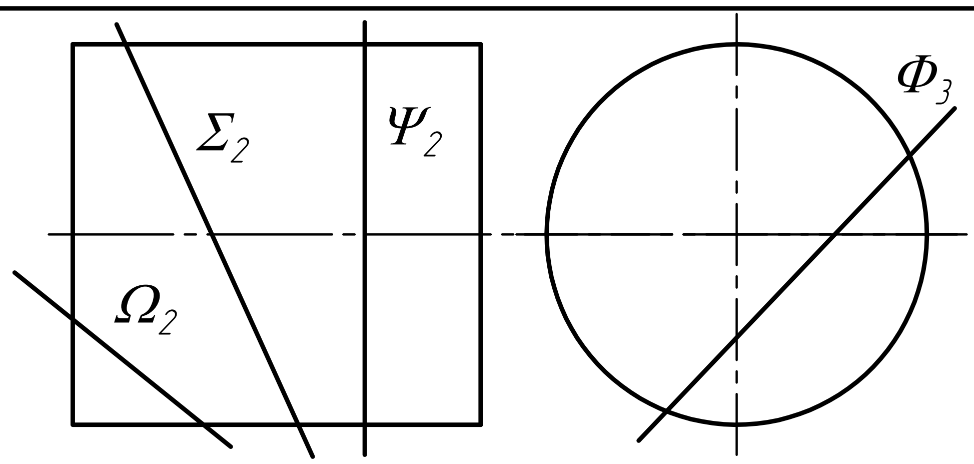


5	Какая плоскость пересекает конус по параболе?
6	Какая плоскость пересекает конус по эллипсу?
7	При пересечении с какой плоскостью получим две образующие?
8	Какая плоскость пересечёт конус по гиперболе?



1	Δ
2	Γ
3	Σ
4	Ψ

9	Какая плоскость пересекает цилиндр по двум прямым?
10	Какая плоскость пересекает цилиндр по полному эллипсу?



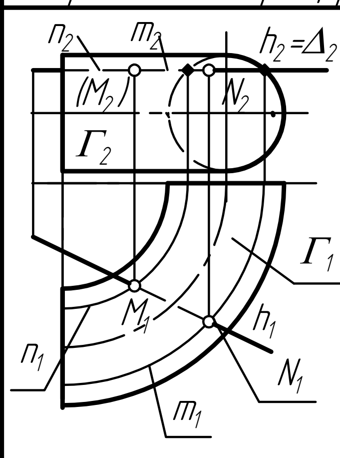
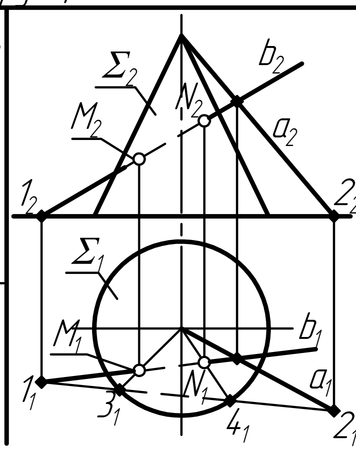
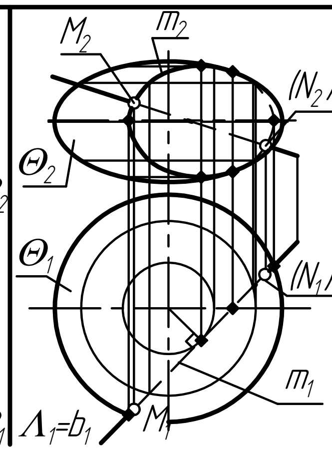
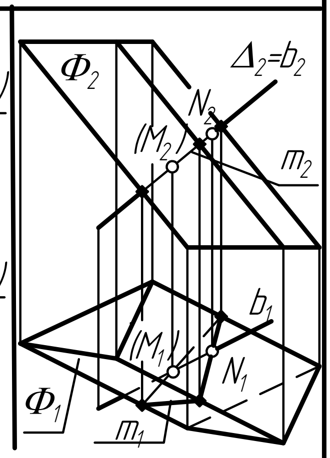
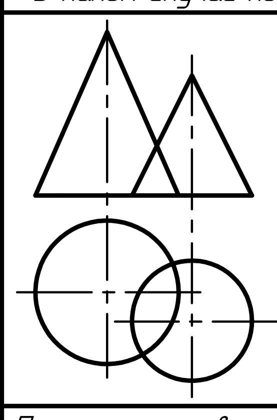
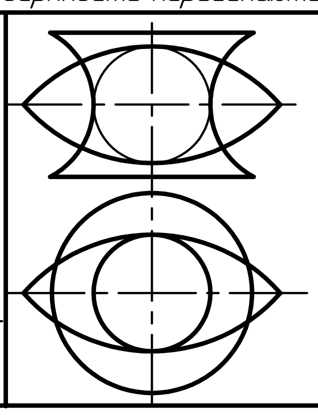
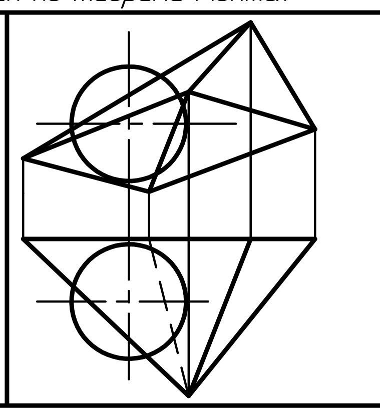
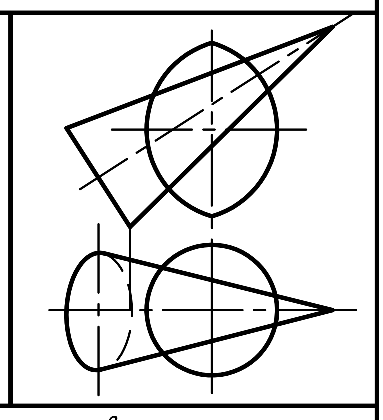
1	Ψ
2	Ω
3	Σ
4	Φ

Ответы: 4 1 3 2 4 3 1 2 4 3

Проверьте себя!

Обучающий тест 8.2 по теме

«Пересечение прямой с поверхностью, пересечение поверхностей»

№ п/п	Вопрос	1	2	3	4
1	В каком случае проекции точек пересечения прямой с поверхностью найдены при помощи фронтально проецирующей плоскости?				
2	На каком чертеже для определения точек встречи использовали горизонтальную плоскость?				
3	Где для нахождения точек встречи в качестве посредника применили плоскость общего положения?				
4	В каком случае точки пересечения прямой с поверхностью найдены с использованием горизонтально проецирующей плоскости?				
					
5	В каком случае линию пересечения поверхностей можно построить при помощи фронтальных плоскостей уровня?				
6	Линию пересечения каких поверхностей можно построить, используя горизонтальные плоскости уровня?				
7	В каком случае для построения линии пересечения возьмём концентрические сферы-посредники?				
8	В каком случае поверхности пересекаются по теореме Монжа?				
					
9	При каких условиях линия пересечения будет представлена одним пространственным замкнутым контуром из ломаных кривых?				
10	Когда в результате пересечения получатся два отдельных замкнутых контура из пространственных кривых?				
		Пересекаются конусы вращения, вмятие.	Пересекаются цилиндр и призма, вмятие.	Пересекаются тор-кольцо и проецирующий круговой цилиндр, проницание	Плоскость пересекает однополостный гиперболоид.

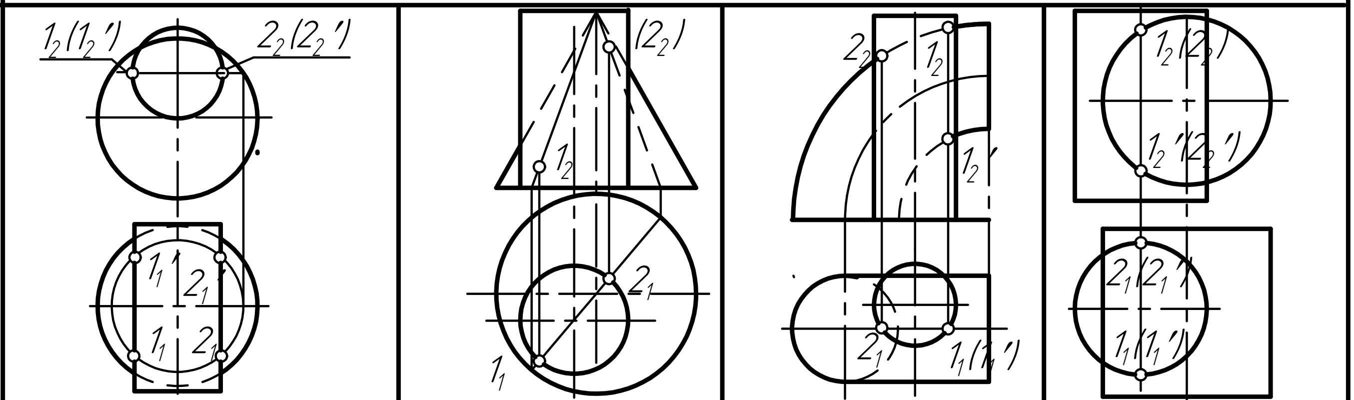
Ответы: 4 1 2 3 3 1 4 2 2 3

Проверьте себя!

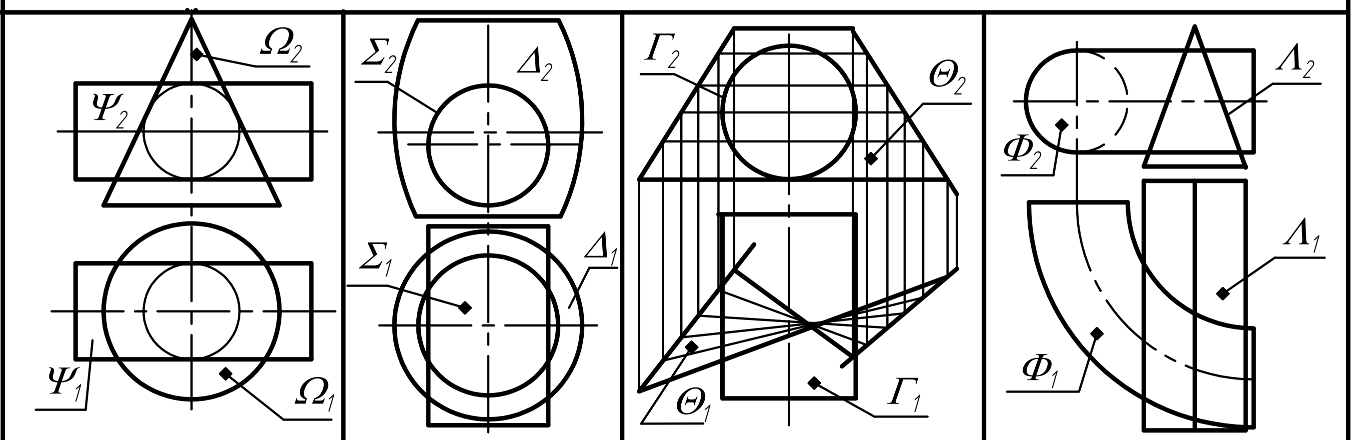
Обучающий тест 8.3 по теме

«Главные точки линий пересечения поверхностей, характер пересечений»

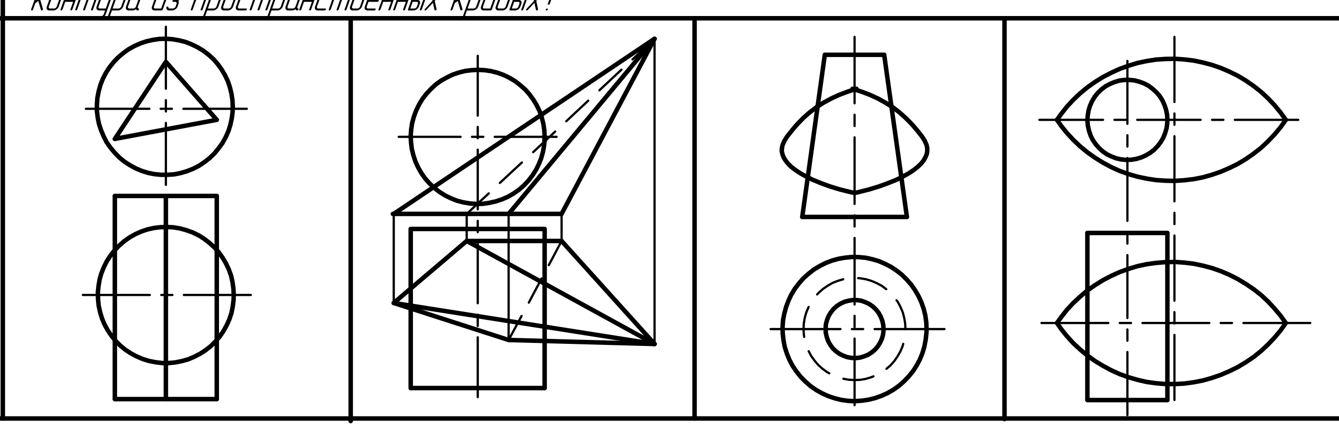
№ п/п	Вопрос	1	2	3	4
1	*В каком случае обозначенные точки являются границами видимости относительно Π_2?*				
2	*Где обозначенные точки являются высшей и низшей точками линии пересечения?*				
3	*На каком чертеже обозначенные точки являются границами видимости относительно Π_3?*				
4	*Где точки являются границами видимости относительно Π_1?*				



№ п/п	Вопрос	1	2	3	4
5	*В каком случае при построении линии пересечения поверхностей обязательно выделяем 10 главных точек?*				
6	*Какая линия пересечения содержит 4 главные (характерные, опорные) точки?*				
7	*При пересечении каких поверхностей необходимо построить 8 главных точек?*				
8	*На каком чертеже линия пересечения содержит 12 главных точек?*				



№ п/п	Вопрос	1	2	3	4
9	*Где поверхности пересекутся по двум окружностям?*				
10	*На каком чертеже линия пересечения будет представлять собой два отдельных замкнутых контура из пространственных кривых?*				



Ответы: 3 2 4 1 1 3 4 2 3 4

Главное –
не сдаваться!

Как же в этом
разобраться?

Тренировка 8.1 по теме «Пересечение прямой с поверхностью, пересечение поверхностей при проецирующем положении одной или обеих фигур»

Перед вами в хаотическом порядке расположены чертежи геометрических фигур. Если вы ответите правильно на поставленные вопросы и расположите изображения по предлагаемой схеме, *то в верхней горизонтальной строке вы прочтёте фамилию первого профессора кафедры технической графики, положившего много сил и энергии на внедрение в учебную практику средней образовательной школы изучения основ технического черчения. Его перу принадлежит учебник по начертательной геометрии, выдержавший свыше двадцати пяти переизданий, долгое время являвшийся основополагающим для большинства вузов. Нижняя строка познакомит с ещё одним известным автором учебной литературы по данному предмету.*

Найдите фронтальную и горизонтальную проекции:

1) где прямой круговой конус с горизонтально проецирующей осью пересекается с фронтально проецирующей призмой;

2) где фронтально проецирующий круговой цилиндр пересекается с горизонтально проецирующей призмой;

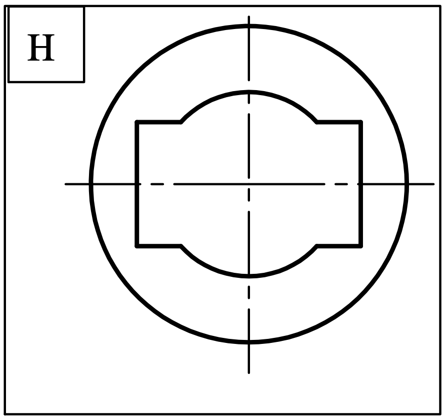
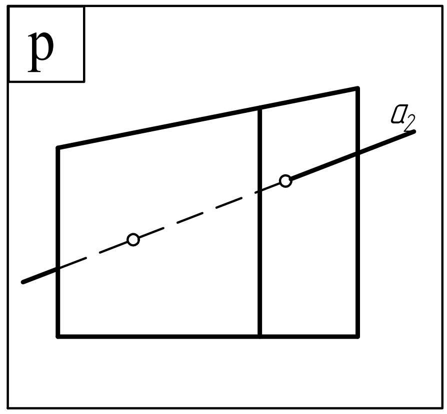
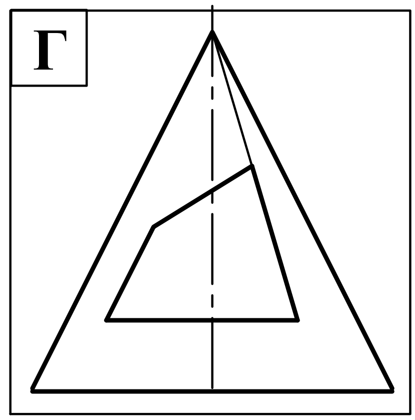
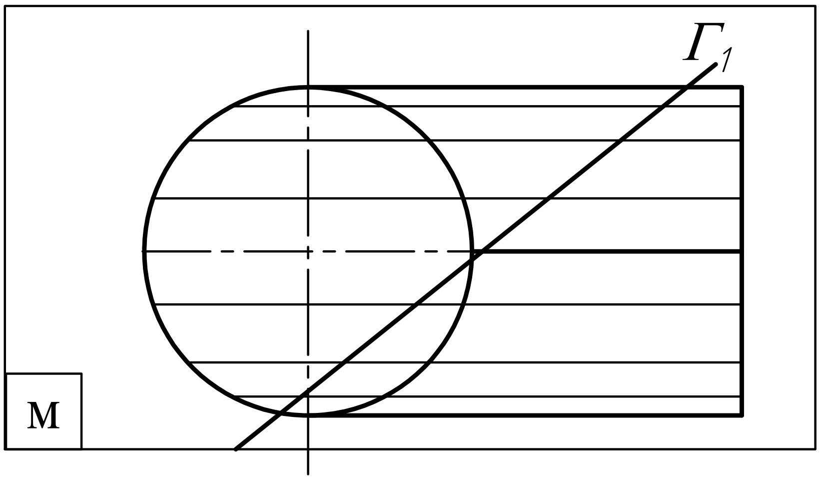
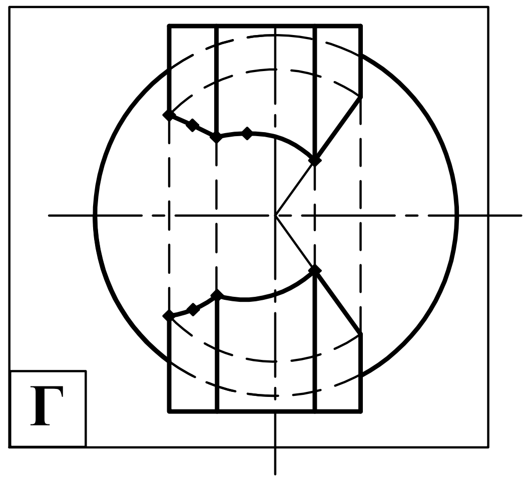
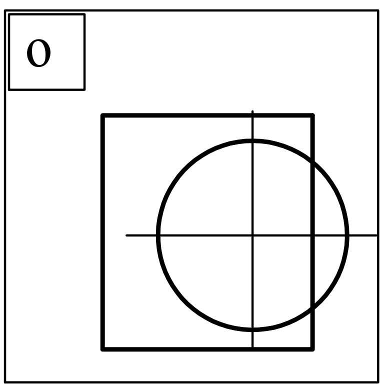
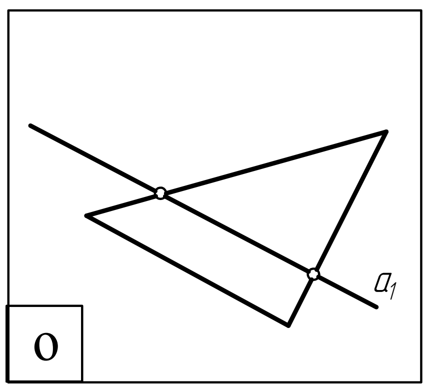
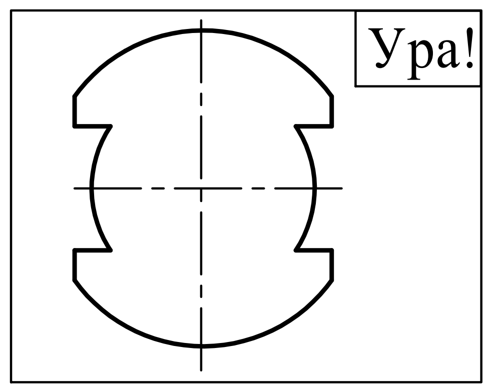
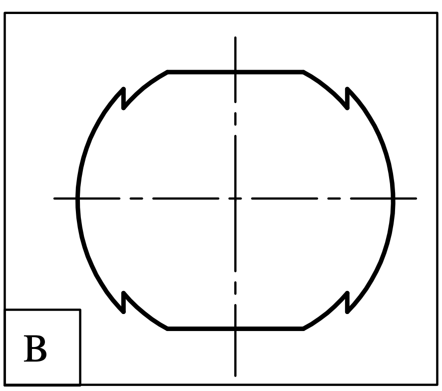
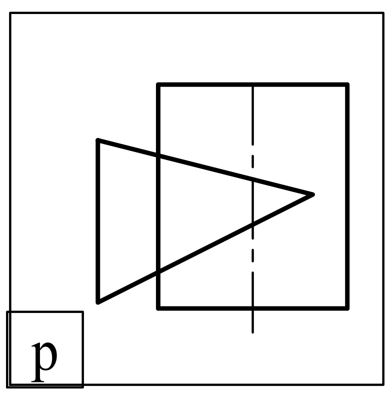
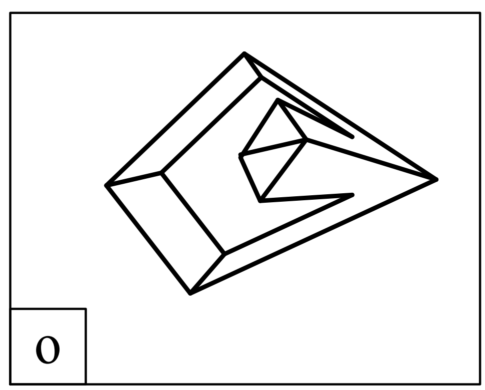
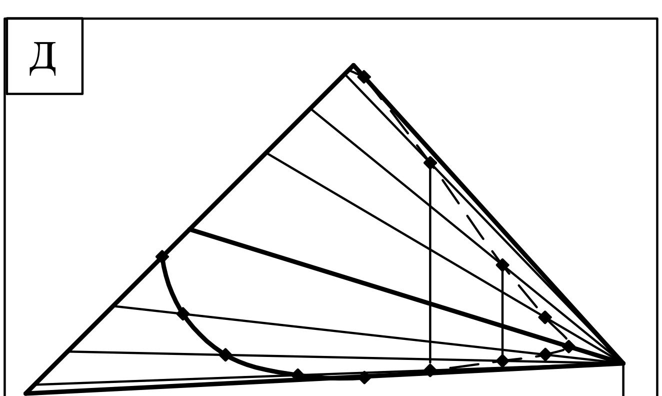
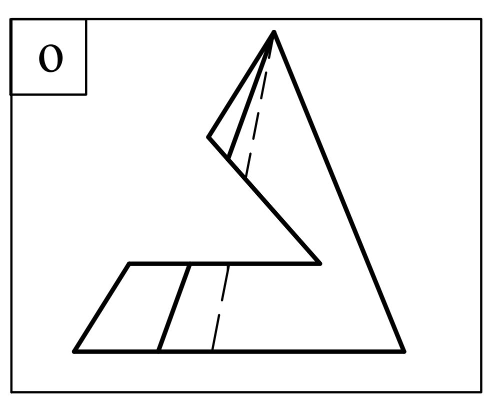
3) где прямая общего положения пересекается с горизонтально проецирующей призмой;

4) где горизонтально проецирующая плоскость пересекает коноид;

5) где изображена пирамида с вырезом, образованным фронтально проецирующими плоскостями;

6) где изображены три проекции сферы с вырезом.

1.1	2.1	3.1	4.1	5.1	6.1	Ура! 6.3
1.2	2.2	3.2	4.2	5.2	6.2	


н

р
a_2

Г

$Г_1$
м

Г

о

a_1
о

Ура!

в

р

о

д

о

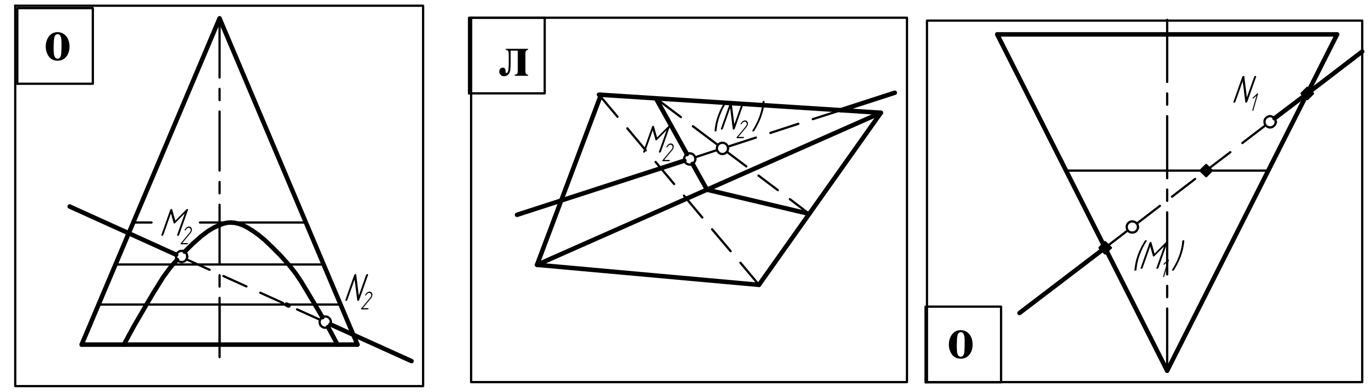
Тренировка 8.2 по теме
«Пересечение прямой с поверхностью при общем расположении обеих фигур»

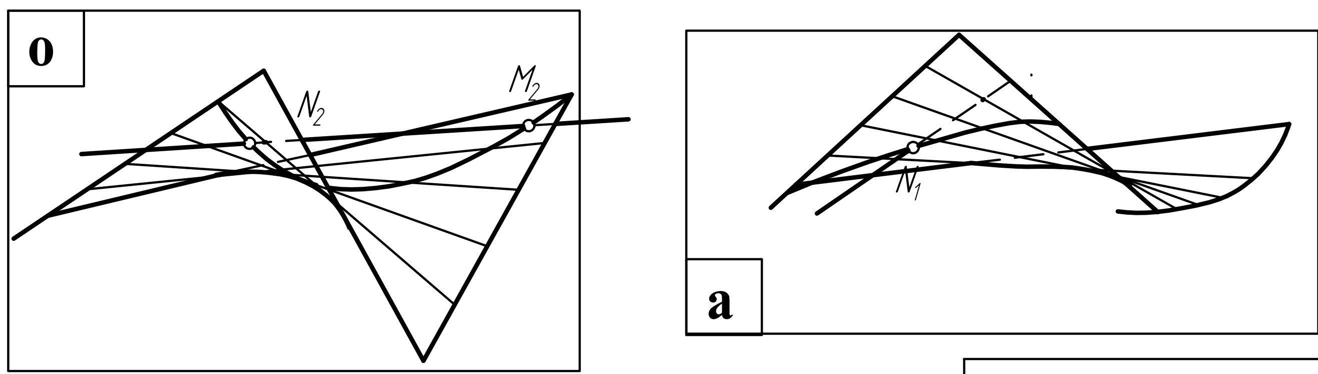
Вам в хаотическом порядке представлены фронтальная и горизонтальная проекции пересечения прямой с поверхностью, в общей сложности семь разных чётко решённых задач. Если вы правильно ответите на поставленные вопросы и расположите чертежи по предлагаемой схеме, то *в верхней строке вы прочтёте фамилию известного учёного, давшего теоретическое обоснование решений многих задач начертательной геометрии. В нижней – познакомитесь с автором, пожалуй, самого популярного сегодня учебника по данному предмету. Упорства и терпения! Эти качества помогут добиться успехов в жизни.*

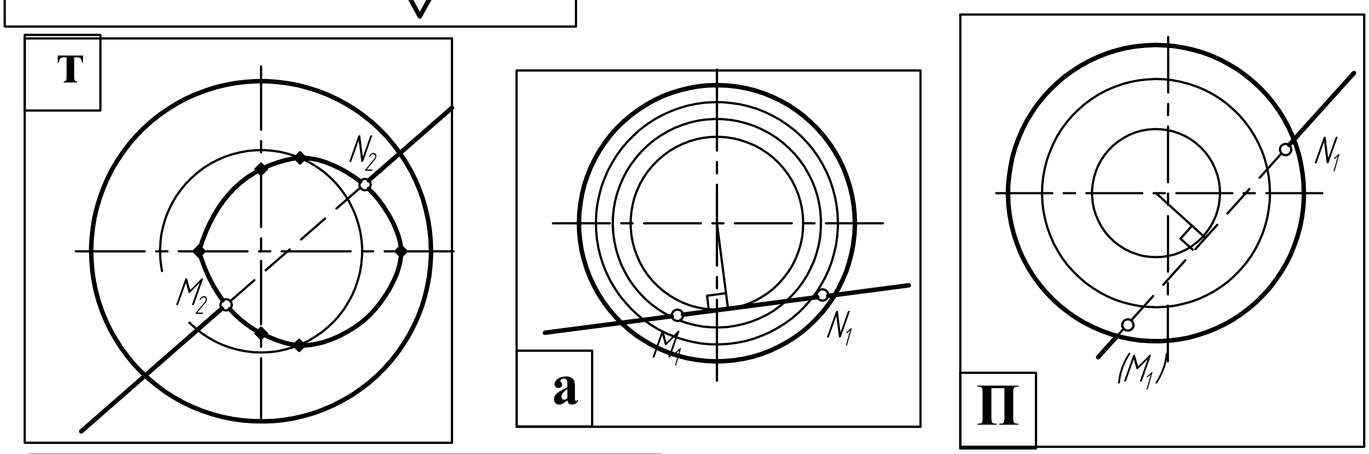
Найдите фронтальную и горизонтальную проекции, где прямая общего расположения пересекается:

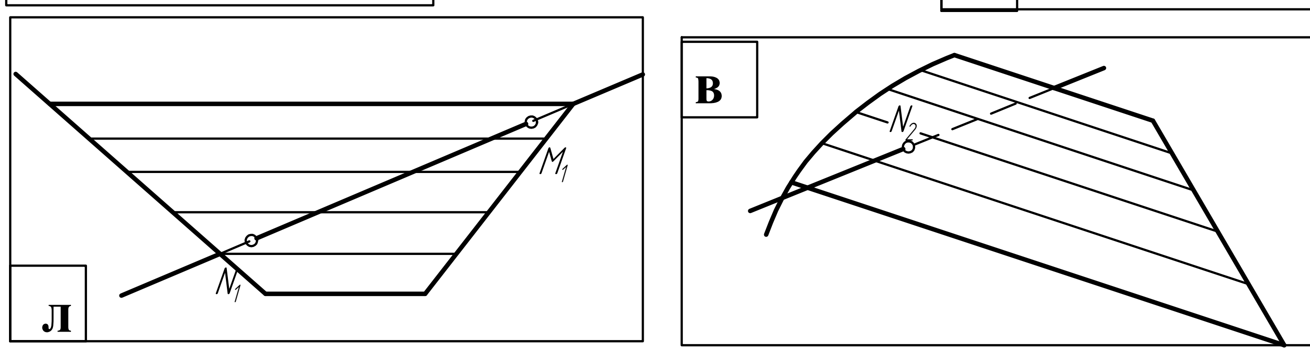
1) с вытянутым эллипсоидом и точки пересечения найдены при помощи горизонтально проецирующей плоскости;
2) с конусом вращения с горизонтально проецирующей осью, в качестве посредника использована горизонтально проецирующая плоскость, давшая в пересечении гиперболу;
3) с трехгранной пирамидой, прямую заключали в горизонтально проецирующую плоскость;
4) с гиперболическим параболоидом с фронтальной плоскостью параллелизма, плоскость- посредник перпендикулярна горизонтальной плоскости проекций;
5) с конусом вращения с фронтально проецирующей осью и горизонтально проецирующей плоскостью-посредником, которая пересекла конус по эллипсу;
6) с четырёхгранной призмой, прямая заключалась в горизонтально проецирующую плоскость;
7) с цилиндроидом, у которого плоскостью параллелизма является фронтально проецирующая плоскость, а посредником для нахождения точки встречи взята фронтально проецирующая плоскость.

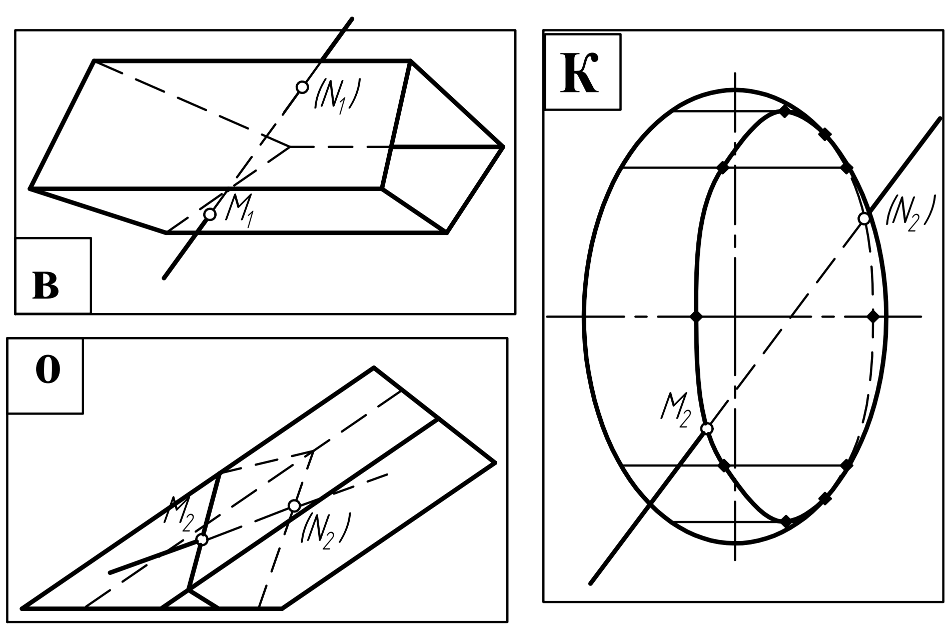
1.1	**2.1**	**3.1**	**4.1**	**5.1**	**6.1**	**7.1**
1.2	**2.2**	**3.2**	**4.2**	**5.2**	**6.2**	**7.2**

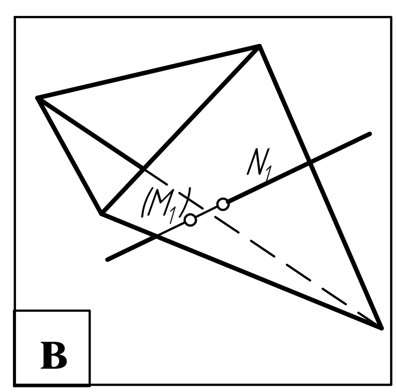












Поздравляем!

Тренировка 8.3 по теме
«Пересечение поверхностей при проецирующем положении одной из них»

На следующей странице вперемешку размещены двенадцать изображений четырёх правильно решённых задач на пересечение геометрических фигур. Расположите их по предлагаемой схеме и в верхней горизонтали *прочтёте фамилию известного русского учёного, с именем которого связывают расцвет начертательной геометрии в советский период. Организованный им знаменитый семинар долго и успешно функционировал, результатом его работы явились капитальные сборники трудов участников семинара. Учёный много работал в области проективной геометрии, оснований геометрии и теории геометрических построений. «Проективная геометрия», «Изображения фигур в курсе геометрии», «Аксонометрия» и отличный, написанный с четырьмя соавторами учебник по начертательной геометрии – это не весь перечень его трудов.* Внизу – *дата рождения учёного.*

Расположите в проекционной связи три проекции:

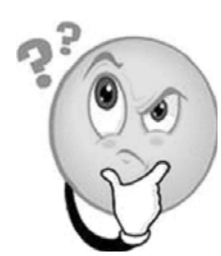
1) фронтально проецирующий круговой цилиндр пересекается с конусом вращения;

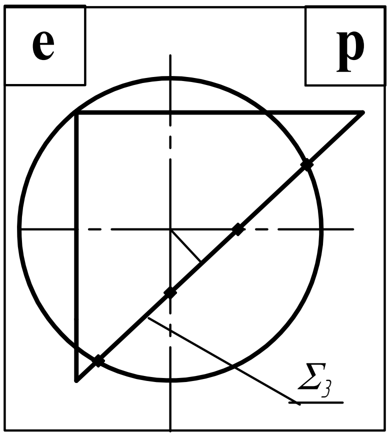
2) профильно проецирующая трёхгранная призма пересекается со сферой;

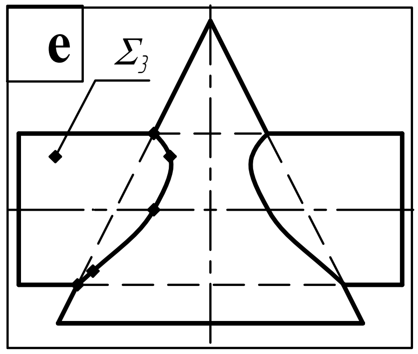
3) горизонтально проецирующий круговой цилиндр пересекается с закрытым тором;

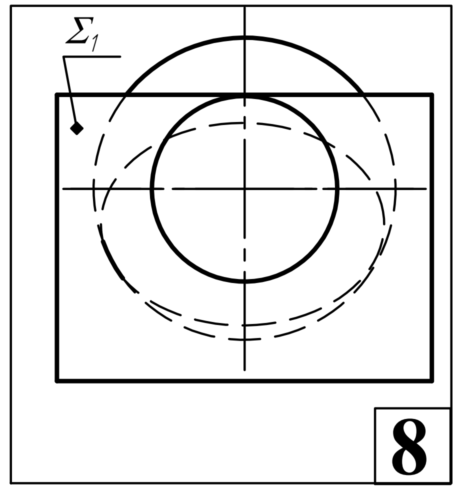
4) фронтально проецирующая трёхгранная призма пересекается со сжатым эллипсоидом.

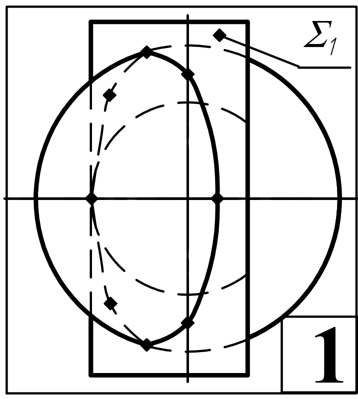
1.1	**1.2**	**2.1**	**2.2**	**3.1**	**3.2**	**4.1**	**4.2**
1.3		**2.3**		**3.3**		**4.3**	

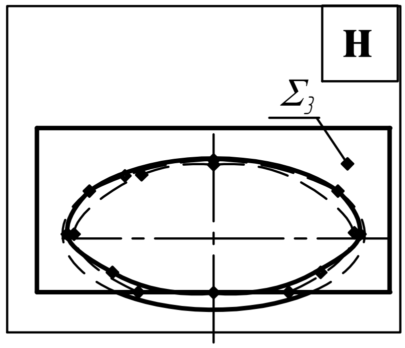


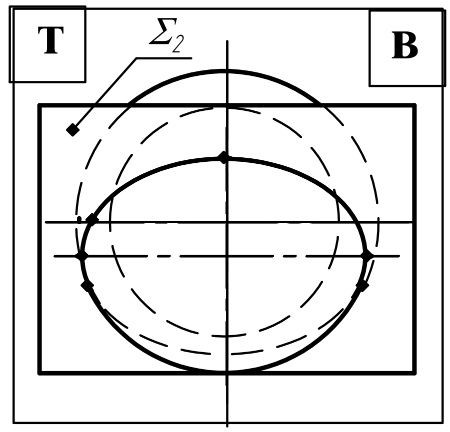

е
р
Σ_3

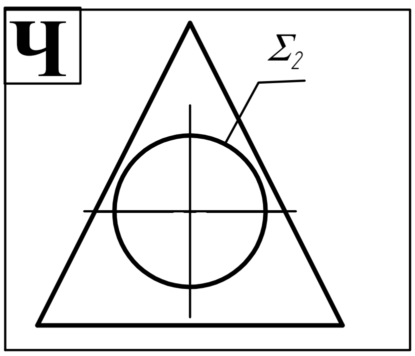

е
Σ_3

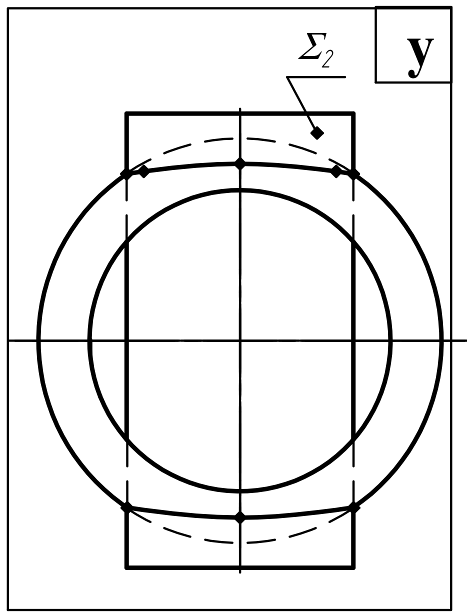

Σ_1
8

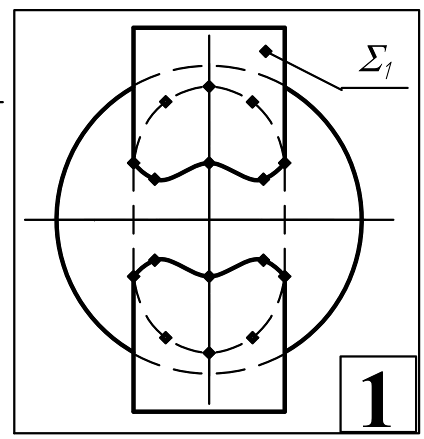

Σ_1
1

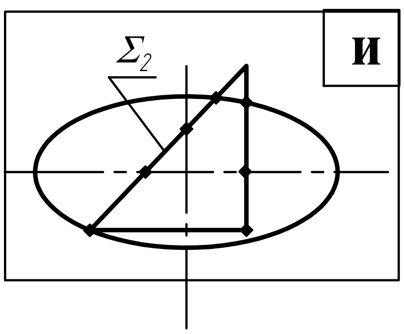

н
Σ_3

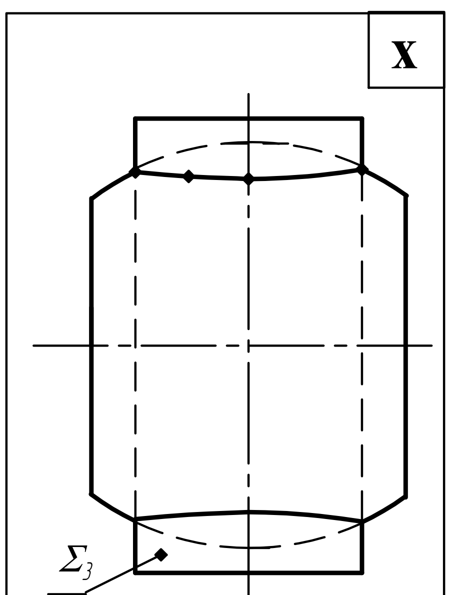

т
в
Σ_2

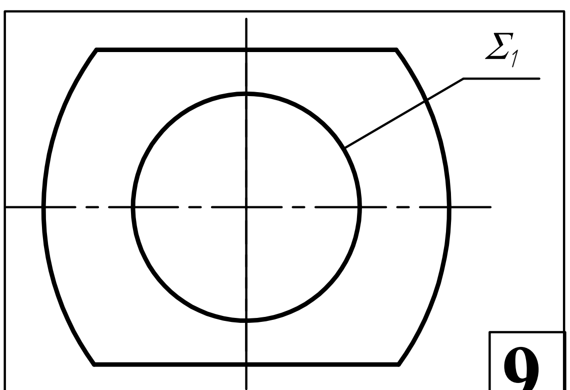

Ч
Σ_2


у
Σ_2


Σ_1
1


и
Σ_2

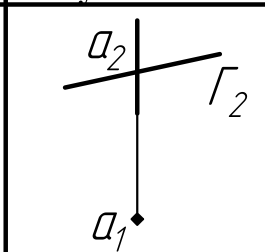
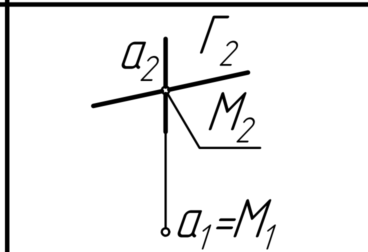
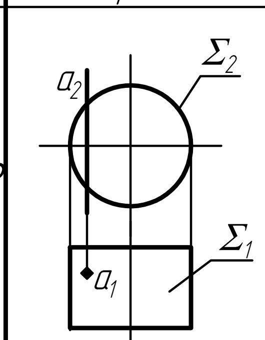
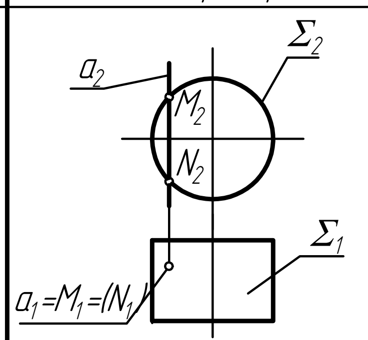
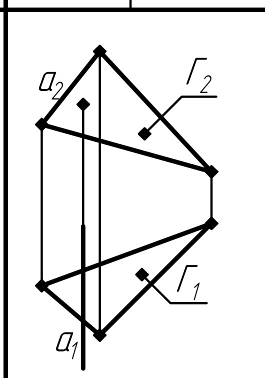
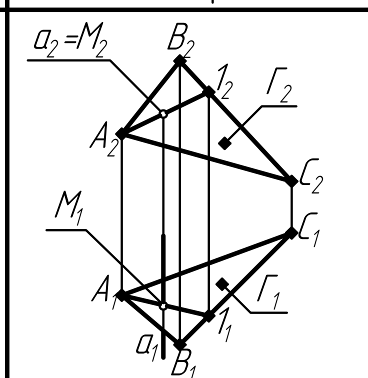
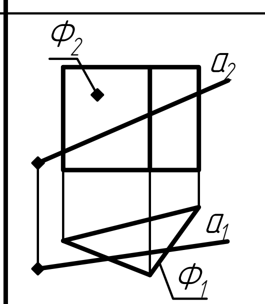
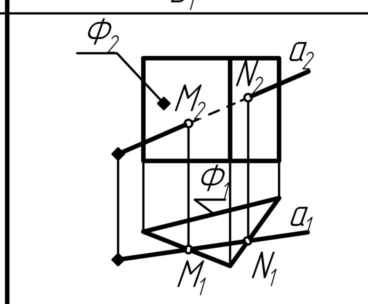
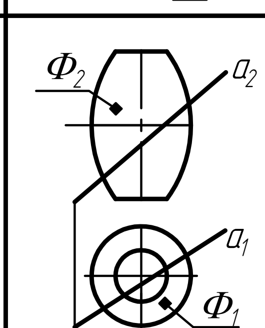
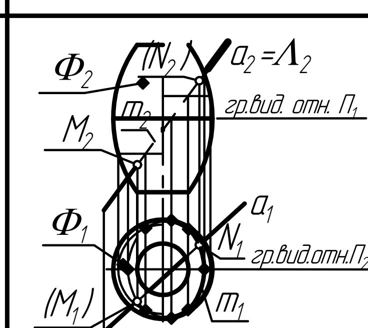
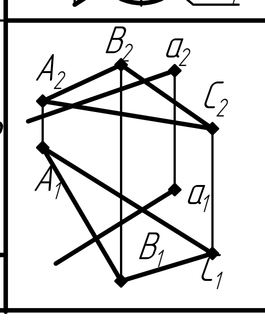
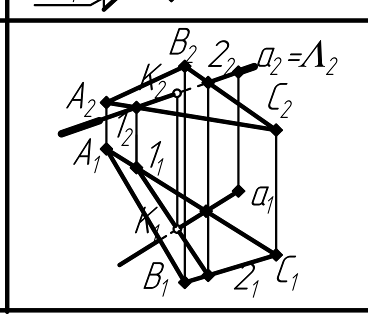

х
Σ_3


Σ_1
9

Ура!

Опорный конспект по теме «Позиционные задачи. Пересечение прямой с поверхностью. Пересечение поверхностей»

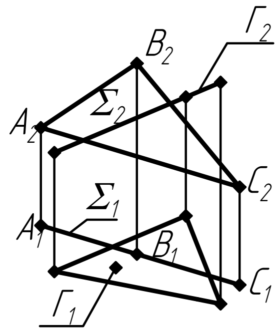
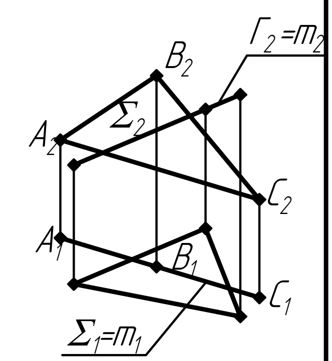
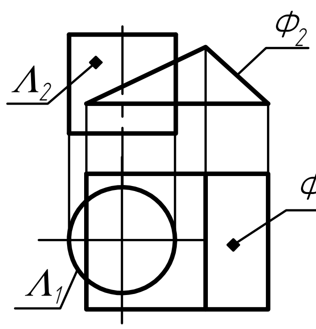
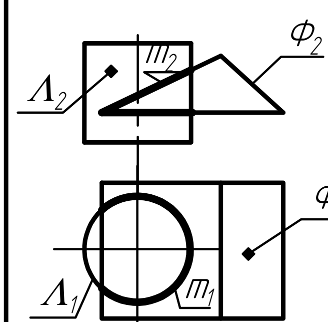
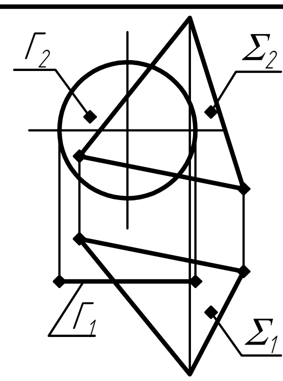
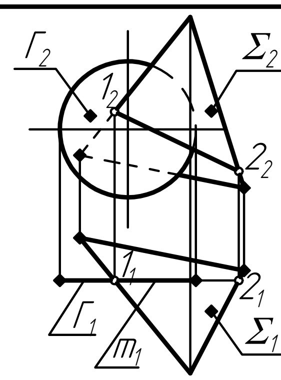
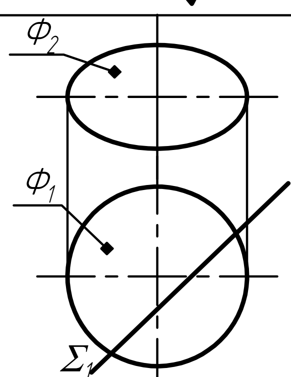
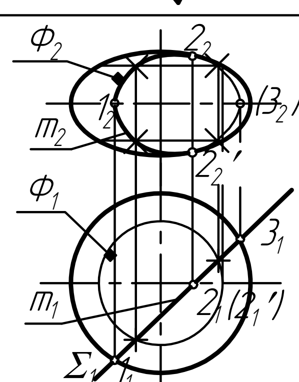
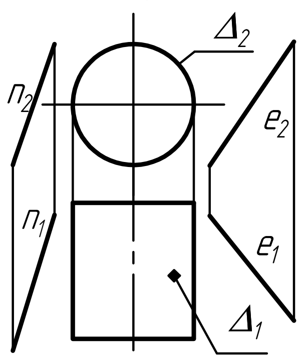
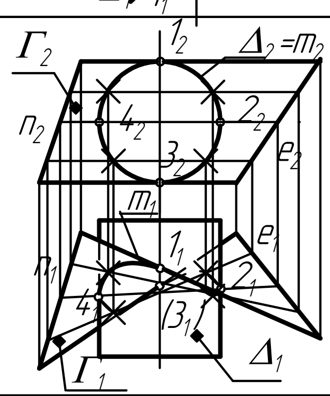
Канва 8.1

Первая главная позиционная задача		Условие	Графическое условие	Решение	Алгоритм решения
	1 случай	$a \cap \Gamma = M?$			$a \perp \Pi_1 \Rightarrow a_1 = M_1$ $\Gamma \perp \Pi_2 \Rightarrow \Gamma_2 \cap a_2 = M_2$
		$a \cap \Sigma = M, N?$			$a \perp \Pi_1 \Rightarrow a_1 = M_1 = N_1;$ $\Sigma \perp \Pi_2 \Rightarrow$ $\Rightarrow a_2 \cap \Sigma_2 = M_2, N_2.$
	2 случай	$a \cap \Gamma = M?$			$a \perp \Pi_2 \Rightarrow M_2 = a_2$ $M_1 \subset \Gamma_1;\ M_2 \subset (A_2 1_2)$ $M_2 \subset (A_1 1_1)$ (AB) выше "a".
		$a \cap \Phi = M, N?$			$\Phi \perp \Pi_1 \Rightarrow a_1 \cap \Phi_1 =$ $= M_1, N_1$ $M_2, N_2 \subset a_2$
	3 случай	$a \cap \Phi = M, N$?			1. $a \subset \Lambda \perp \Pi_2 \Rightarrow a_2 = \Lambda_2$ 2. $\Lambda \cap \Phi = m;$ $m_2 \subset \Lambda_2;\ m_1 \subset \Phi_1;$ 3. $m_1 \cap a_1 = M_1, N_1;$ $M_2, N_2 \subset a_2$
		$a \cap \Gamma(ABC) = K?$			1. $a \subset \Lambda \perp \Pi_2 \Rightarrow a_2 = \Lambda_2$ 2. $\Lambda \cap (ABC) = 1,2$ $(1_2 2_2) \subset \Lambda_2;\ (1_1 2_1) \subset \Gamma_1$ 3. $(1_1 2_1) \cap a_1 = K_1$ $K_2 \subset a_2$

II ГПЗ в первом и втором случаях взаимного расположения геометрических фигур

Канва 82

Вторая главная позиционная задача

Случай	Условие	Графическое условие	Решение	Алгоритм решения
1 случай	$\Gamma\cap\Sigma = m$			$\Gamma\perp\Pi_2 \Rightarrow m_2=\Gamma_2$, $\Sigma(ABC)\perp\Pi_1 \Rightarrow$ $\Rightarrow m_1=\Sigma_1$
1 случай	$\Phi\cap\Lambda=n$			$\Phi\perp\Pi_2 \Rightarrow m_2\subset\Phi_2$, $\Lambda\perp\Pi_1 \Rightarrow m_1\subset\Lambda_1$ Вмятие→ один замкнутый контур из плоских кривых
2 случай	$\Gamma\cap\Sigma=m$			$\Gamma\parallel\Pi_2 \Rightarrow m_1\subset\Gamma_1$ $m_1(1_1 2_1)$; $m_2(1_2 2_2)\subset\Sigma_2$
2 случай	$\Phi\cap\Sigma=m$			$\Sigma\perp\Pi_1 \Rightarrow m_1\subset\Sigma_1$ $m_2\subset\Phi_2$
2 случай	$\Delta\cap\Gamma=m$ $\Gamma(n;e;\Pi_1)$			$\Delta\perp\Pi_2\Rightarrow$ $\Rightarrow\Delta_2=m_2$, $m_1\subset\Gamma_1$, $l\parallel\Pi_1\Rightarrow l_2\perp$л.с. $l_1\subset\Gamma_1, 1_2\subset l_2, 1_1\subset l_1$

Вопросы для самопроверки

1. Какие задачи относят к **I ГПЗ** и какие ко **II ГПЗ**?
2. Охарактеризуйте три случая взаимного расположения фигур относительно плоскостей проекций при решении позиционных задач.
3. Сформулируйте алгоритмы решения **I** и **II ГПЗ** в первом и втором случаях.
4. Сформулируйте алгоритм решения **I ГПЗ** в третьем случае.
5. Как определяется видимость фигур относительно плоскостей проекций при решении задач на взаимное пересечение?

В н и м а н и е ! ***Итоговый тест*** **8.1**

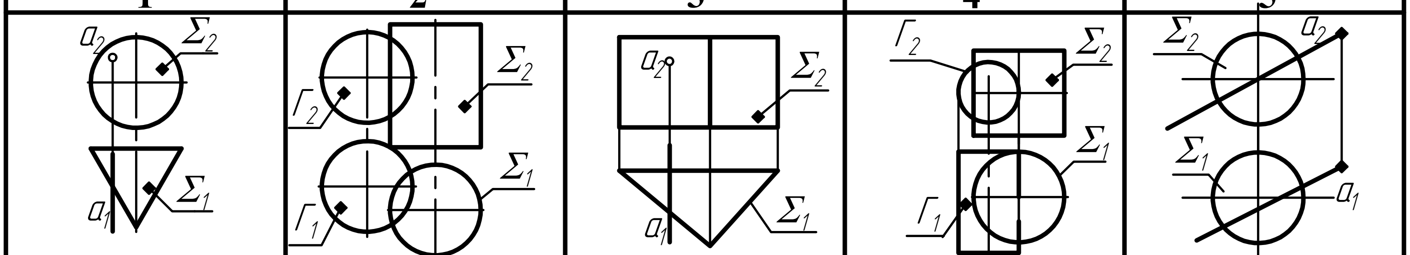
○ 1. Укажите **I ГПЗ** в первом случае взаимного расположения фигур.

⊗ 2. Где изображена **I ГПЗ** во втором случае?

⊖ 3 На каком чертеже вы видите **I ГПЗ** в третьем случае?

⊙ 4 На каком чертеже изображена **II ГПЗ** в первом случае, когда проекции линии пересечения поверхностей уже заданы?

⦶ 5 На каком чертеже изображена **II ГПЗ** во втором случае?



1	2	3	4	5
⊗	⦶	○	⊙	⊖

В н и м а н и е ! ***Итоговый тест*** **8.2**

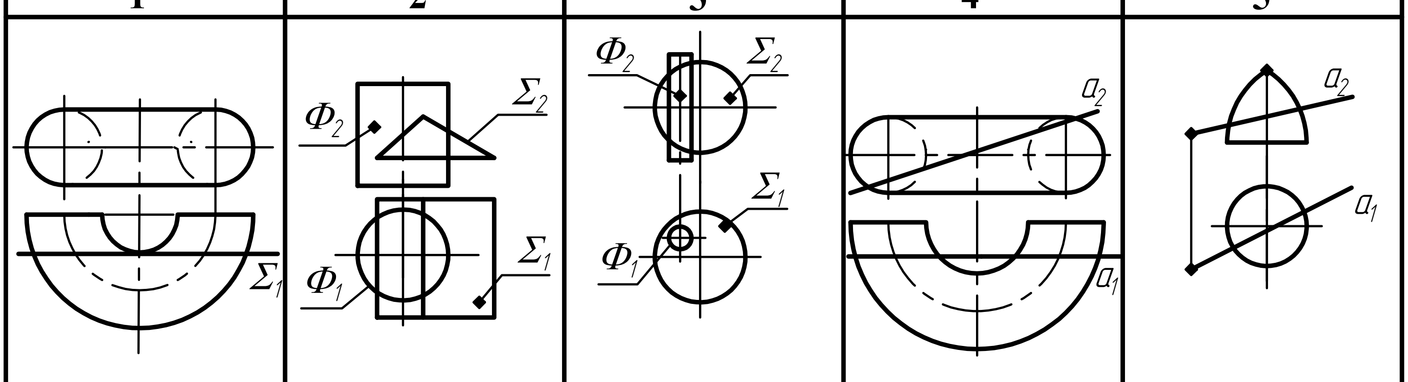
○ 1. В каком случае прямая **а** пересекает поверхность в четырех точках?

⊖ 2. В каком случае прямая **а** пересекает поверхность в двух точках?

⊗ 3. В каком случае линия пересечения представляет собой один замкнутый контур из плоских кривых?

⊙ 4. В каком случае линия пересечения представляет собой два отдельных замкнутых контура из пространственных кривых?

⦶ 5. На каком чертеже линия пересечения представляет собой плоскую кривую четвёртого порядка?

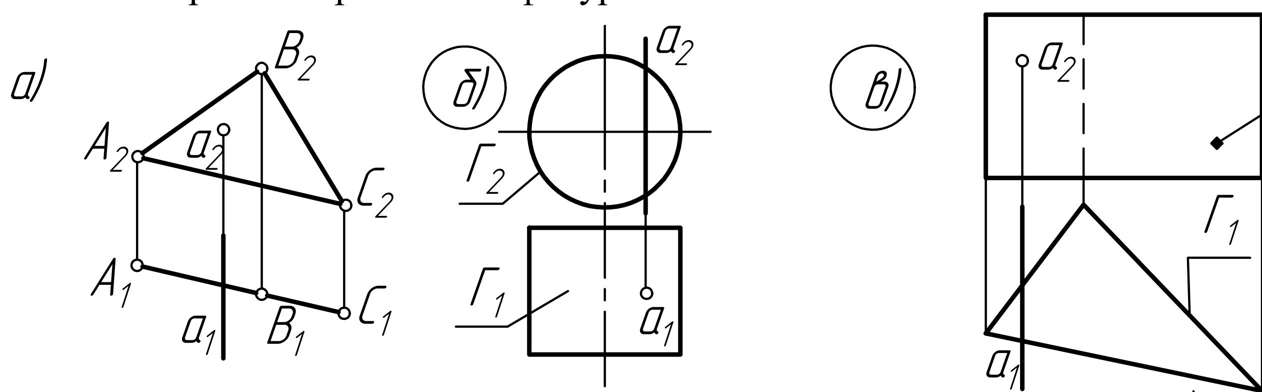


1	2	3	4	5
⦶	⊗	⊙	○	⊖

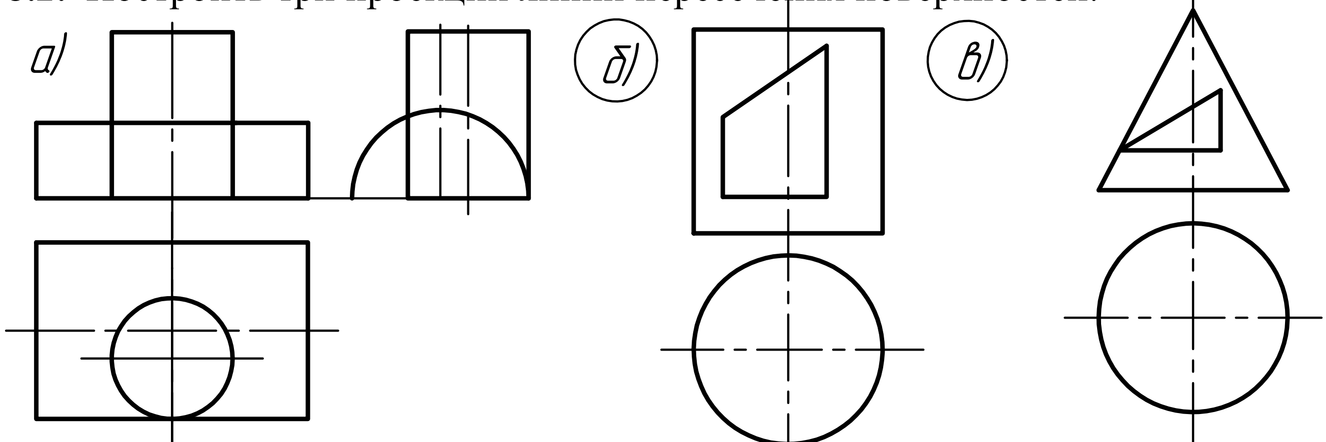
З А Н Я Т И Е   8

Пересечение прямой с поверхностью. Пересечение поверхностей в первом и втором случаях взаимного расположения фигур

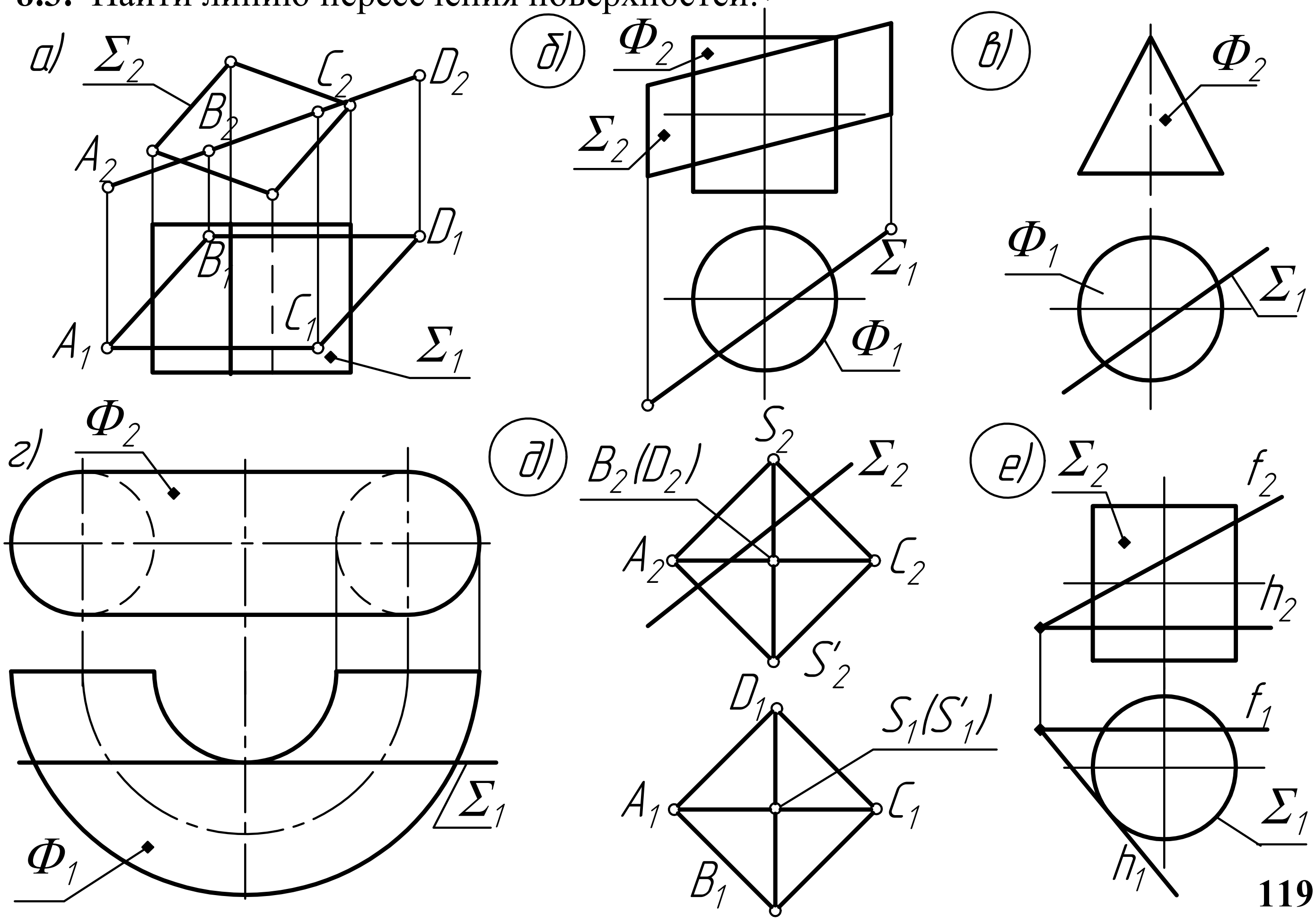
8.1. Построить пересечение фигур.



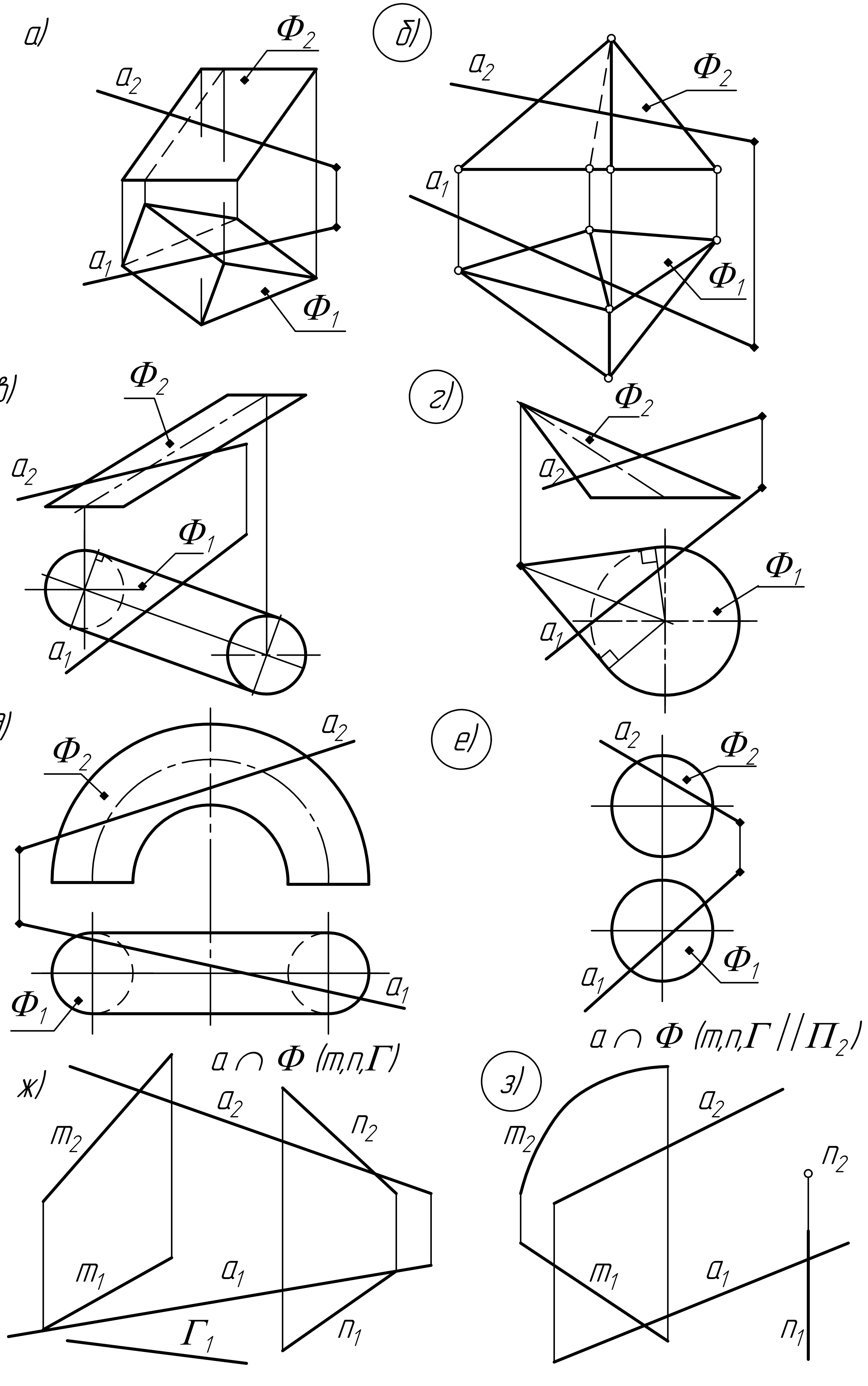
8.2. Построить три проекции линии пересечения поверхностей.



8.3. Найти линию пересечения поверхностей.

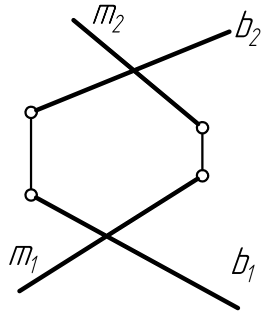


8.4. Найти точки пересечения прямой **a** с заданной поверхностью.



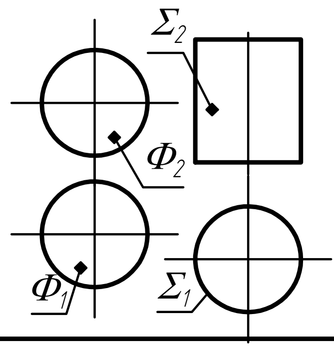
Задачи для лидеров

16Л



На прямой **m** найти точки, удаленные от прямой **b** на **30 мм.**

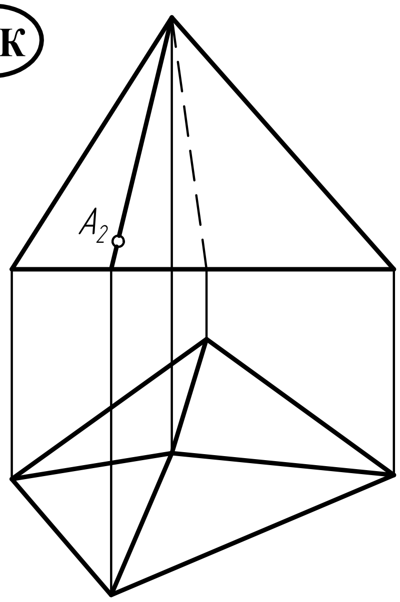
17Л



Построить все множество точек, удаленных от сферы на **20 мм**, а от цилиндра на **30 мм**. *(При каком расположении фигур решения не будет?)*

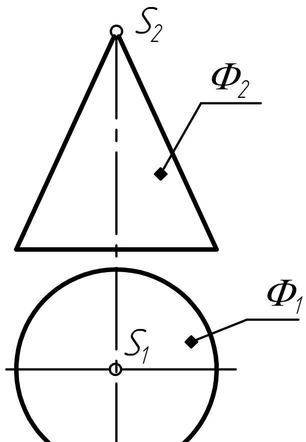
Задачки для самых крутых!

16К



Построить плоскость, пересекающую пирамиду по параллелограмму **ABCD**, с построением проекций параллелограмма.

17К



Построить фронтально проецирующую плоскость, пересекающую конус **Ф** по эллипсу, малая ось которого равна радиусу основания и расположена на высоте **10 мм.**

§ 9. II ГПЗ в третьем случае взаимного расположения фигур, когда обе поверхности общего расположения

Линия пересечения поверхностей при общем их расположении может быть найдена с использованием различных способов. Рассмотрим основные из них.

С П О С О Б ПЛОСКОСТЕЙ-ПОСРЕДНИКОВ – применим, когда в пересечении получаются простейшие в графическом построении линии ***(прямые, окружности)***.

КОНЦЕНТРИЧЕСКИХ СФЕР – применим, когда пересекаются поверхности вращения с общей плоскостью симметрии.
Оси поверхностей вращения пересекаются.

ЭКСЦЕНТРИЧЕСКИХ СФЕР – применим, когда пересекаются поверхности вращения и каждая несёт на себе семейство окружностей, по которым её может пересечь секущая сфера.

О С О Б Ы Е СЛУЧАИ:

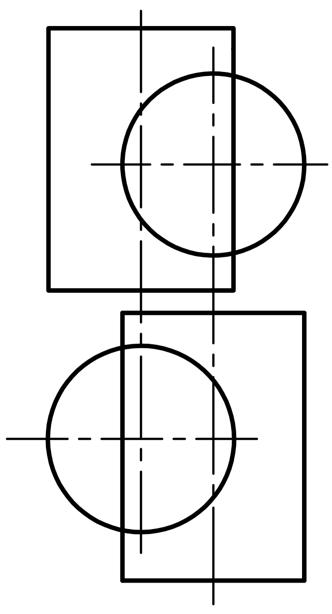
а) пересечение соосных поверхностей вращения;

б) теорема Монжа.

Обратите внимание ! *При пересечении поверхностей линия пересечения может быть представлена одним или двумя замкнутыми контурами. Это зависит от вида пересечения.*

Различают три вида пересечения:

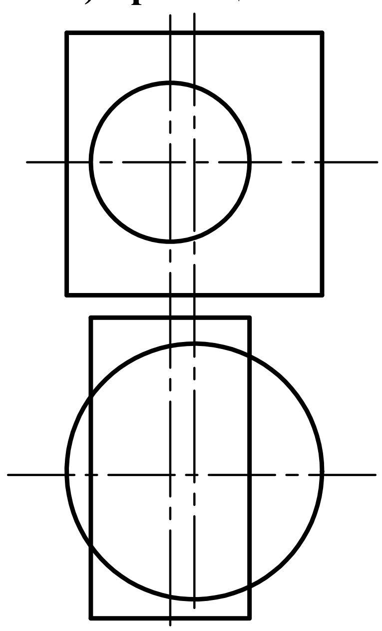
а) вмятие



Один замкнутый контур

Рис.124

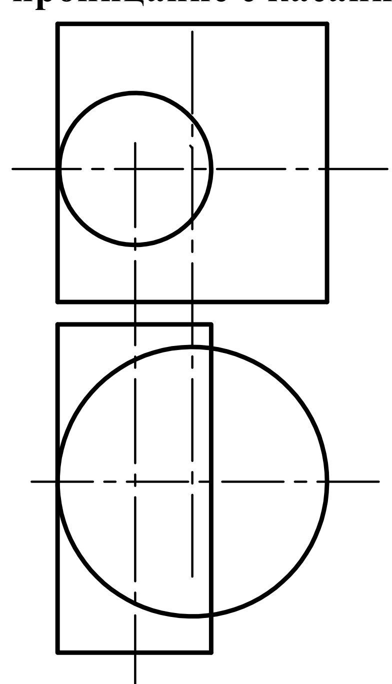
б) проницание



Два замкнутых контура

Рис.125

в) проницание с касанием

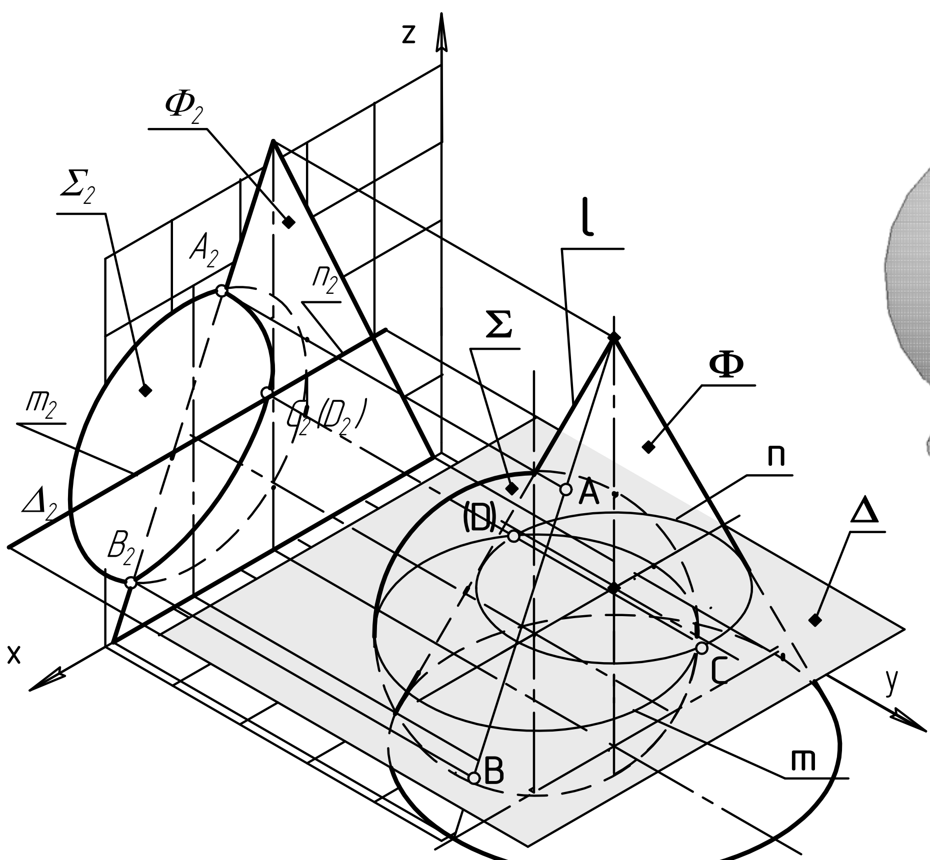


Два замкнутых контура с одной общей точкой

Рис.126

<u>С П О С О Б ПЛОСКОСТЕЙ-ПОСРЕДНИКОВ</u> применим, когда в пересечении получаются простейшие в графическом построении линии *(прямые, окружности)*.

Посредники – плоскости уровня



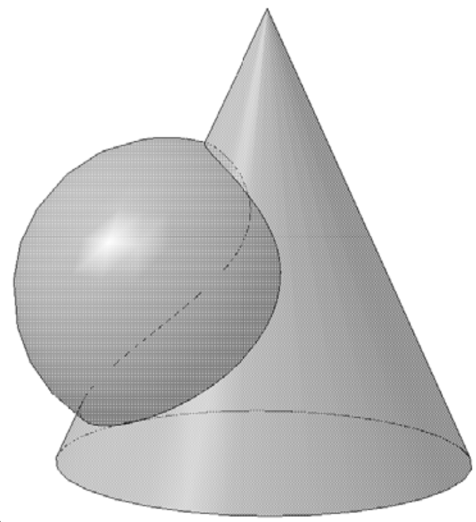


Рис. 129

Рис. 128

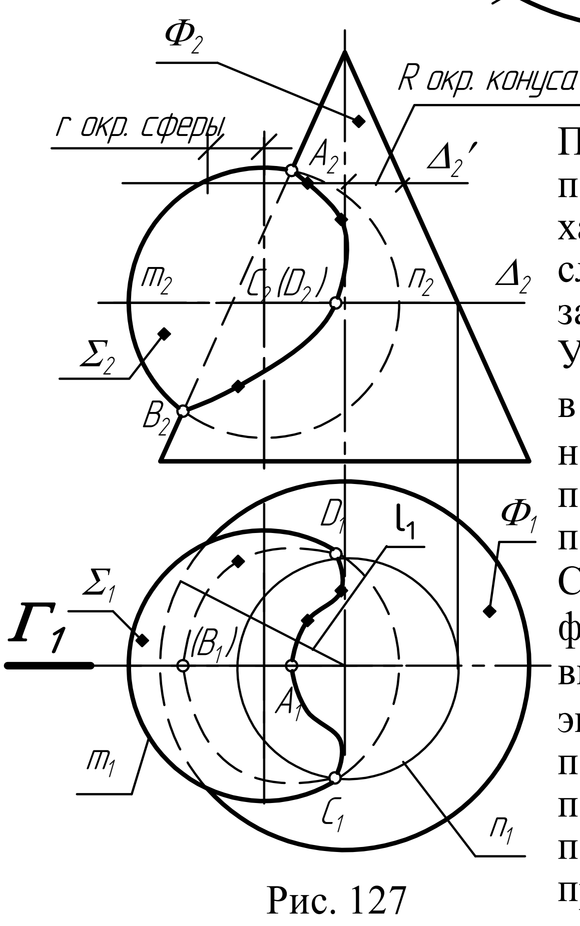
Алгоритм решения

$\Phi \cap \Sigma = k?$

$\Delta // \Pi_1;$

$\Delta \cap \Phi = n; \ \Delta \cap \Sigma = m;$

$m \cap n = C \wedge D \ ....$



При построении линии пересечения любых поверхностей в первую очередь определяем характер пересечения. Видим вариант *«вмятие»*, следовательно, линия представляет собой один замкнутый контур (*пространственная кривая*).
У поверхностей общая плоскость симметрии **Г(Г$_1$)**, в результате на **П$_2$** видимый контур наложится на невидимый и на фронтальную плоскость линия пересечения спроецируется в виде кривой второго порядка *(в данном случае в виде параболы)*.
Строим **главные точки**. **А, В** – точки пересечения фронтальных меридианов. **С**, **D** – точки – границы видимости относительно **П$_1$**, принадлежащие экватору сферы. Горизонтальные плоскости-посредники каждую из исходных поверхностей пересекают по окружностям. Окружности, пересекаясь между собой, дают точки, принадлежащие линии пересечения.

Рис. 127

Посредники – проецирующие плоскости

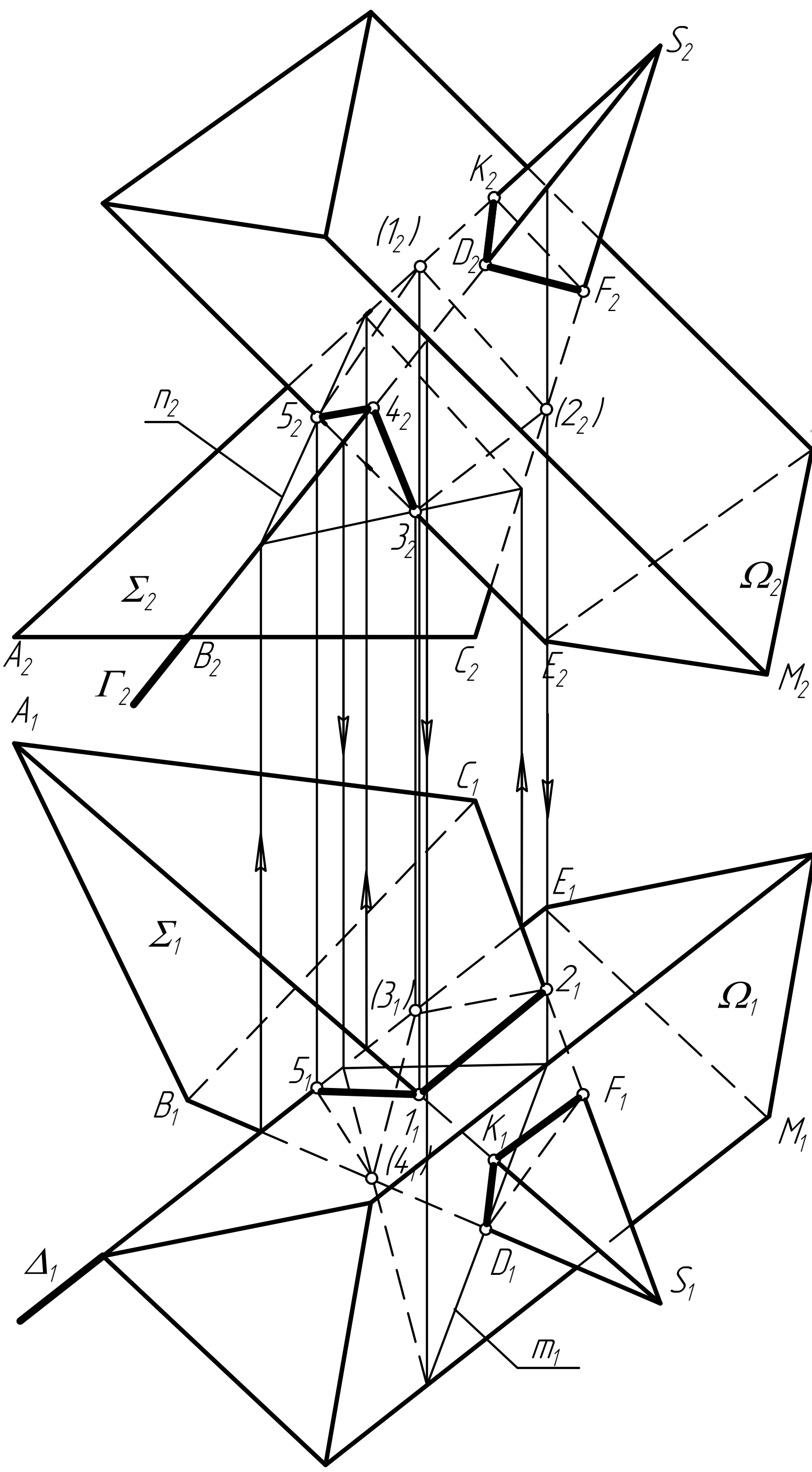


Рис. 130

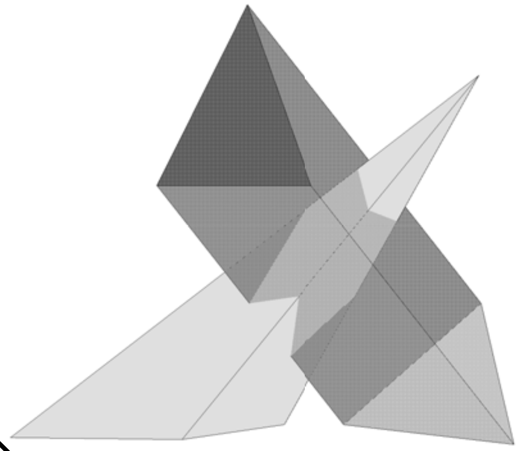


Рис. 131

$$\Sigma \cap \Omega = ?$$

Для построения линии пересечения пирамиды **Σ** и призмы **Ω** наиболее рационально свести задачу к последовательному построению точек встречи рёбер одной поверхности с другой. Например, для нахождения точек пересечения ребра **BS** с поверхностью призмы заключим его во фронтально проецирующую плоскость **Γ(Γ$_2$)**. *(Ранее нами было рассмотрено много подобных задач.)*

Фронтально проецирующая плоскость **Γ** при пересечении с призмой дала нам треугольник **m.** При пересечении этого треугольника с ребром **BS** нашли точки **4** и **D.** Аналогично строим точки пересечения остальных рёбер пирамиды с призмой. По расположению полученных точек видим необходимость определения точек пересечения ребра **E** призмы с поверхностью пирамиды. Заключаем ребро **E** в горизонтально проецирующую плоскость **Δ(Δ$_1$).** Полученная при пересечении с пирамидой линия **n(n$_2$)** позволила найти точки **5** и **3.** Итак, мы многократно решали I ГПЗ (*пересечение прямой с поверхностью*) в третьем случае, т. е. при общем расположении обеих фигур.

Определяем видимость.

Посредники – плоскости общего положения

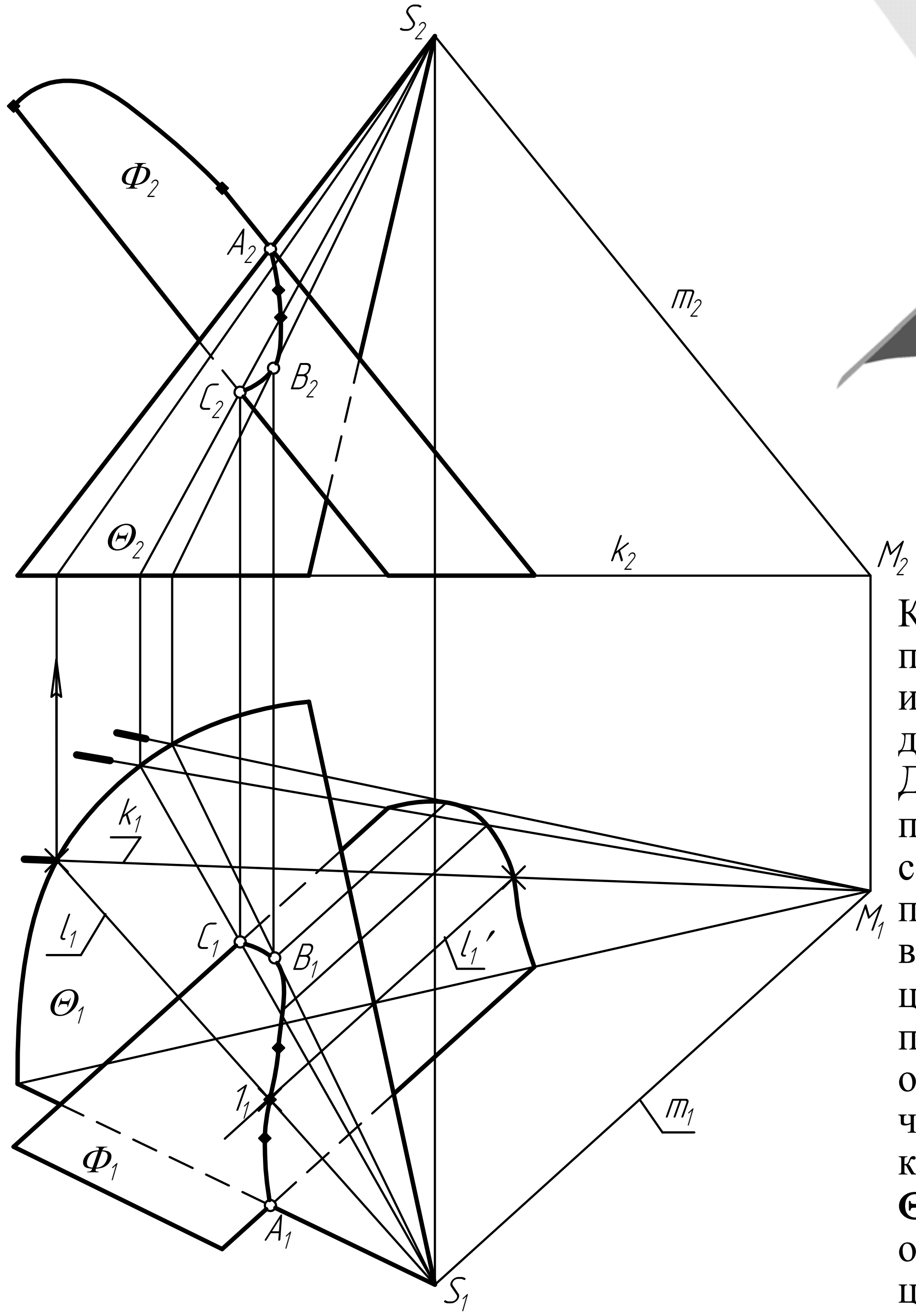


Рис. 132

Рис. 133

$\Phi \cap \Theta = ?$

Какая плоскость при пересечении с каждой из исходных поверхностей даёт прямые? Для конической поверхности – содержащая прямую, проходящую через её вершину, а для цилиндрической – прямую, параллельную образующей. Проводим через вершину отсека конической поверхности **Θ** прямую **m**, параллельную образующей цилиндрической поверхности **Ф.** Находим горизонтальный след **M** этой прямой. Прямая **m(SM)** является осью пучка плоскостей общего положения, которые при пересечении с каждой из исходных поверхностей дают образующие, пересекаясь между собой, образующие дают точки, принадлежащие линии пересечения. Горизонтальный след каждой из секущих плоскостей проходит через горизонтальный след **M** оси **m**. В первую очередь строим главные точки. **A, B, C** принадлежат крайним образующим поверхности **Ф**. Построение промежуточной точки **1** показано на рис. 132. Горизонтальная проекция следа $\mathbf{k_1}$ при пересечении с проекциями направляющих обеих поверхностей позволила построить прямые $\mathbf{l(l_1)}$ и $\mathbf{l'(l_1')}$, $\mathbf{l \cap l' = 1}$.Фронтальные проекции точек пересечения строим по принадлежности той поверхности, какой удобнее. В данном случае при помощи образующих конической поверхности. Обязательно определяем видимость.

При пересечении каких поверхностей ещё применим этот способ? Попробуйте сделать анализ и составить краткий обзор.

ОСОБЫЕ СЛУЧАИ пересечения

Соосные поверхности вращения пересекаются по окружностям, число окружностей определяется числом точек пересечения полумеридианов.

Поскольку любая прямая, проходящая через центр сферы, является её осью, делаем вывод: поверхность вращения, ось которой проходит через центр сферы, соосна с ней и, следовательно, пересекает сферу по окружности(ям). Именно это свойство позволяет использовать сферу в качестве посредника при построении линии пересечения поверхностей вращения.

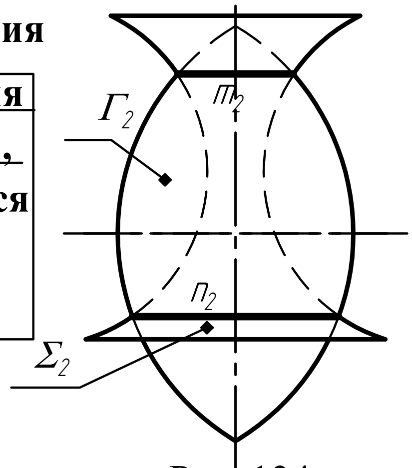


Рис. 134

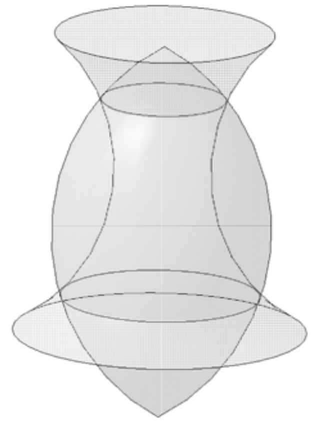


Рис. 135

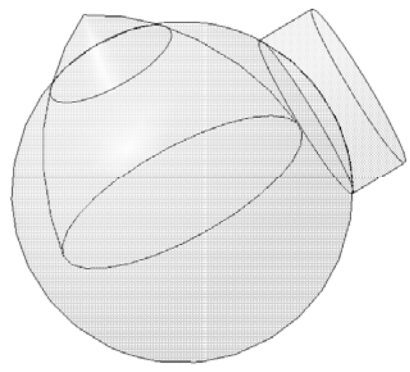
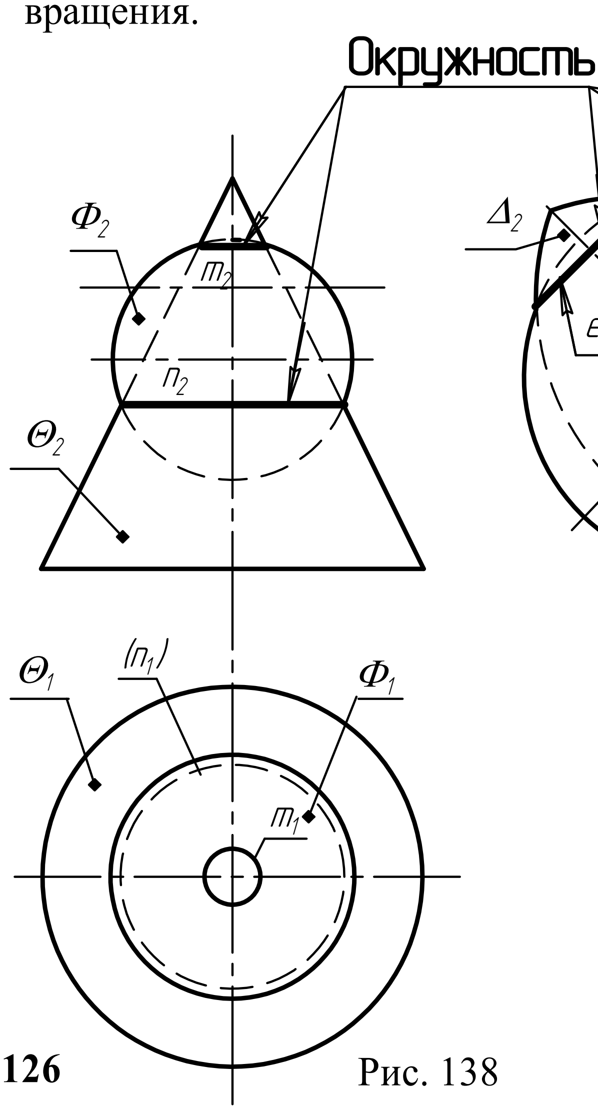


Рис. 137



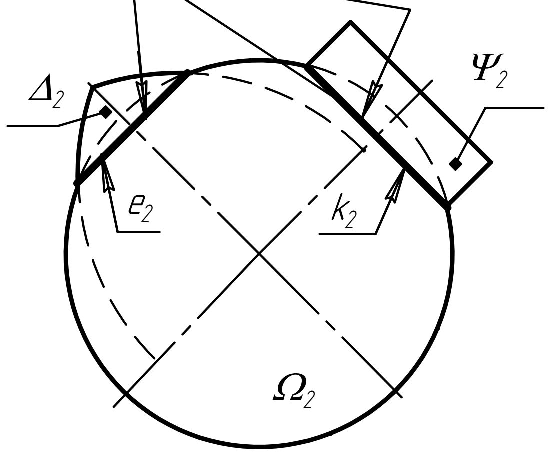


Рис. 136

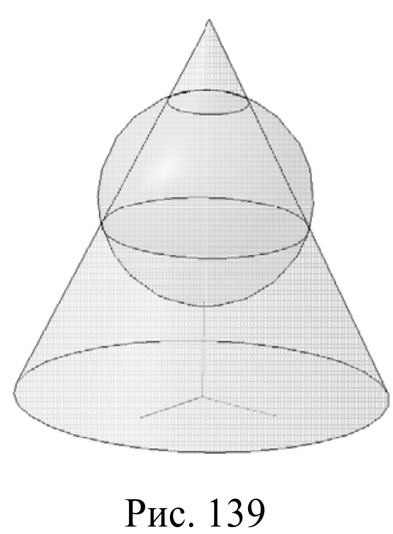


Рис. 139

Рис. 138

Теорема Монжа

Поверхности вращения второго порядка (квадрики), описанные около поверхности вращения второго порядка или вписанные в неё, пересекаются по плоским кривым второго порядка, плоскость каждой кривой проходит через прямую, соединяющую точки двойного касания.

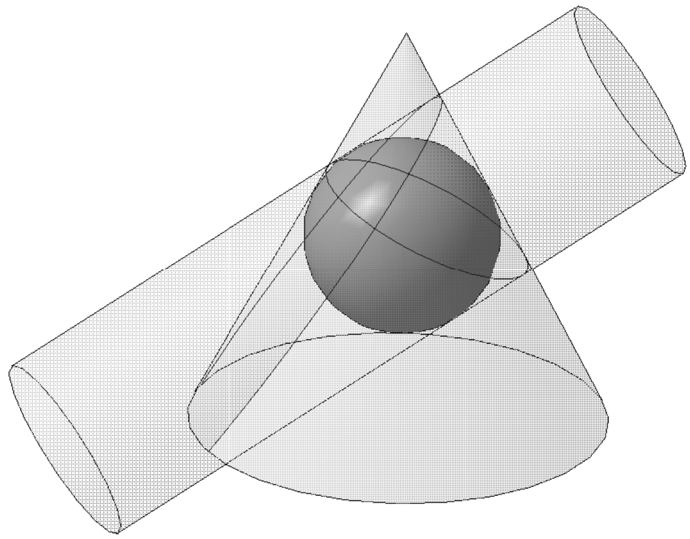


Рис. 141

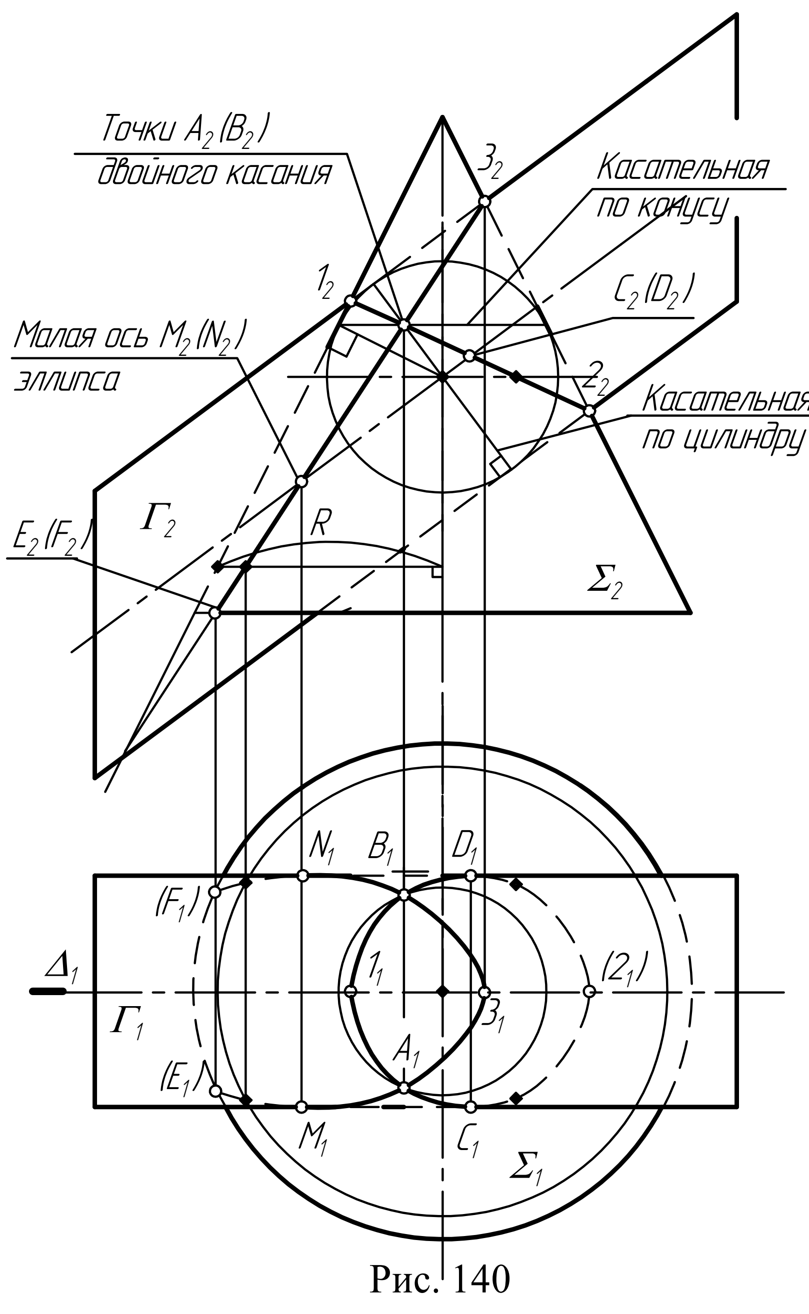


Рис. 140

$$\Sigma \cap \Gamma = ?$$

В первую очередь строим главные точки линии пересечения конуса и цилиндра. Поверхности имеют общую фронтальную плоскость симметрии $\Delta(\Delta_1)$, следовательно, фронтальные меридианы пересекаются **($1_2 2_2$ и 3_2...).** Если в пределах чертежа не определяется хотя бы одна точка пересечения фронтальных очерковых, то строим точки двойного касания как результат пересечения касательных окружностей **(AB)**. Точки, принадлежащие оси цилиндра, определяют малые оси эллипсов **MN** и **CD**. Все промежуточные точки линии пересечения строим по принадлежности конусу **Σ**.

Посредники – концентрические сферы,

способ применим, когда пересекаются поверхности вращения с общей плоскостью симметрии, параллельной одной из плоскостей проекций. Оси поверхностей вращения пересекаются.

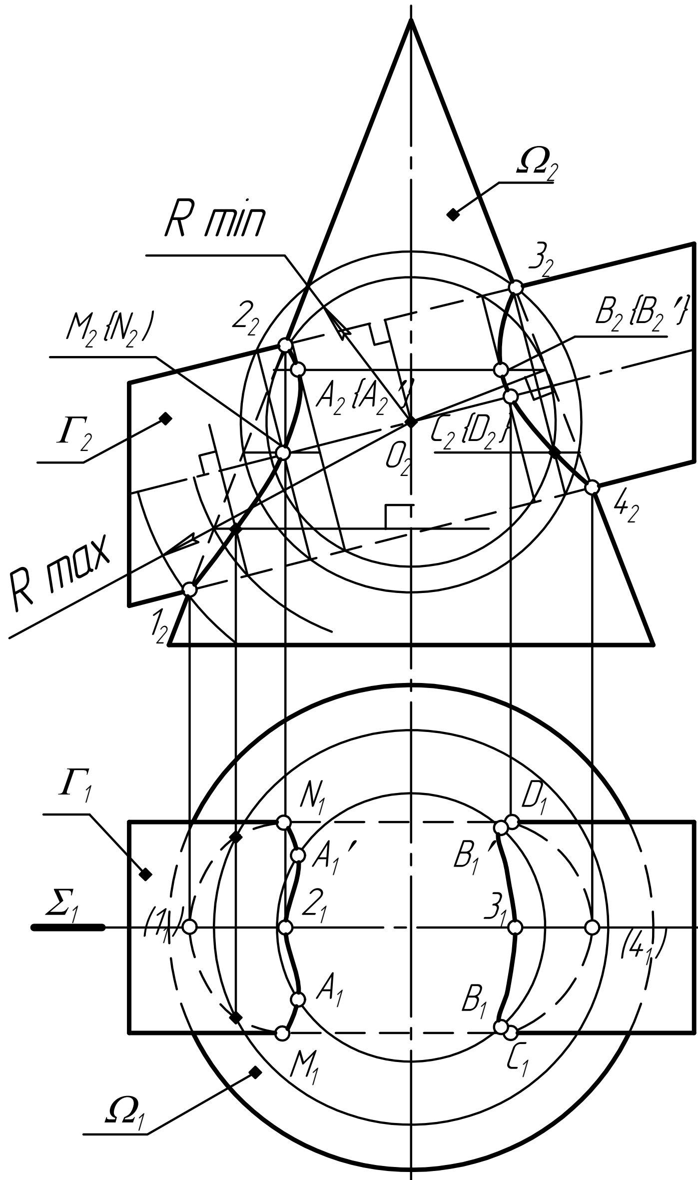


Рис. 142

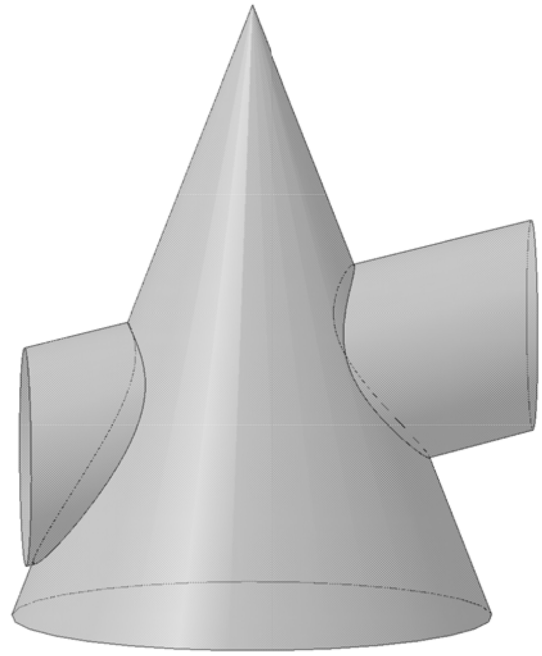


Рис. 143

$\Omega \cap \Gamma = ?$

Решение возможно на одной проекции!

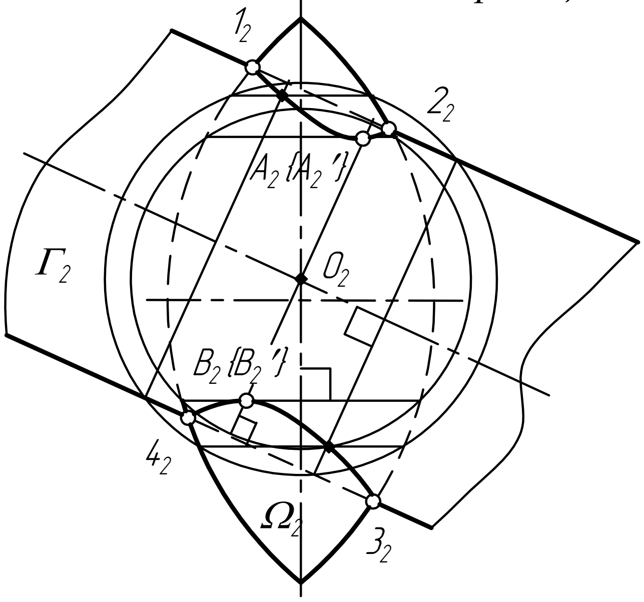


Рис. 144

Требуется построить линию пересечения прямого кругового конуса и наклонного цилиндра вращения. Поверхности **имеют общую фронтальную плоскость симметрии Σ**, их оси пересекаются. Точку пересечения осей принимаем за центр секущих сфер **O(O$_2$)**. Главные фронтальные меридианы пересекаются, получаем главные точки **1, 2, 3, 4.** Определяем диапазон радиусов секущих сфер. **Rmax** определится расстоянием от центра до самой удалённой точки пересечения фронтальных очерковых **/O1/-/O$_2$1$_2$/.** **Rmin** равна радиусу **большей вписанной сферы**, так как одной поверхности она коснётся, а другую пересечёт. **Касательная сфера даёт экстремальные точки** и показывает условно, какая из поверхностей больше, а значит, и определяет характер пересечения. Сравните линии на приведённых рисунках. В обеих задачах все главные точки обозначены.

Посредники – эксцентрические сферы,

способ применим для построения линии пересечения поверхностей вращения с общей плоскостью симметрии, параллельной одной из плоскостей проекций, при условии, если каждая из них несёт на себе семейство окружностей, по которым её может пересечь секущая сфера.

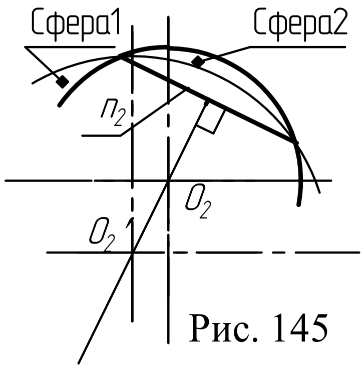


Рис. 145

Любая точка на перпендикуляре из центра окружности n может быть центром секущей сферы, которой принадлежит данная окружность.

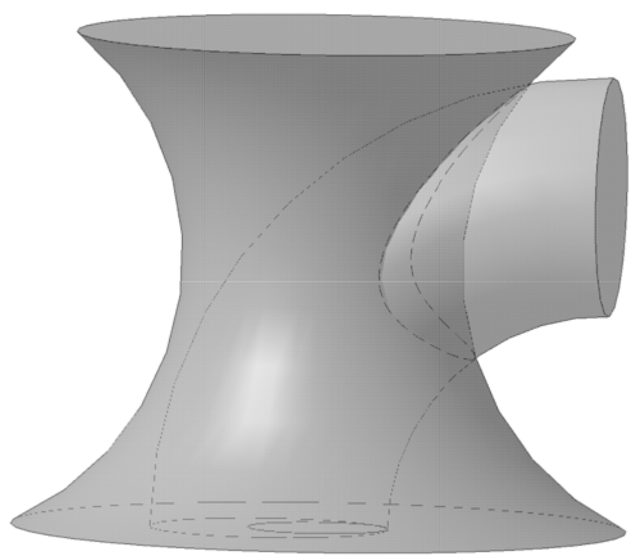


Рис. 147

$$\Gamma \cap \Theta = ?$$

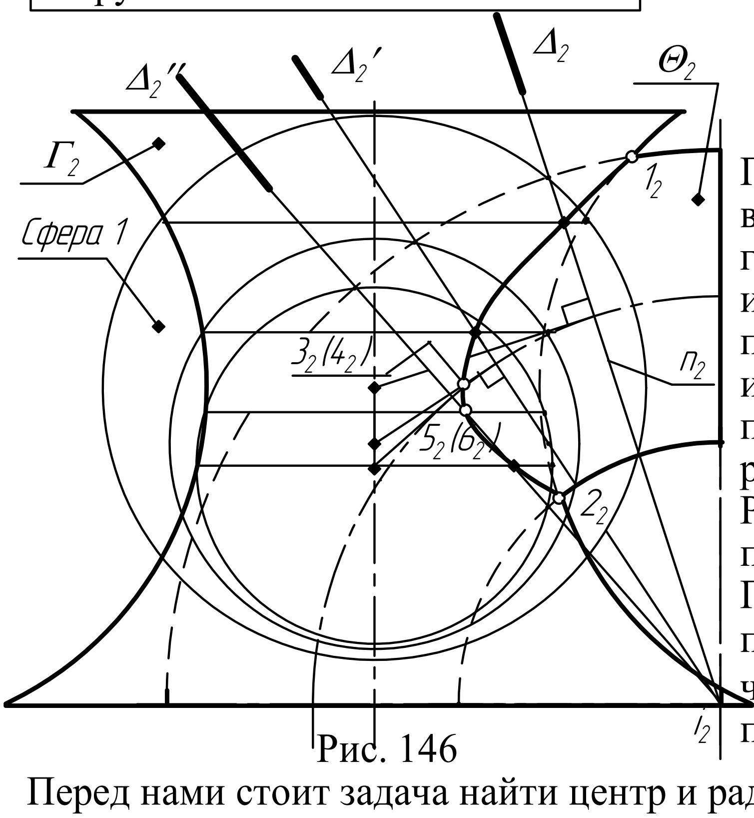


Рис. 146

Пересекаются поверхности вращения: глобоидный тор с горизонтально проецирующей осью и четверть кольца (тора) с фронтально проецирующей осью. Поверхности имеют общую фронтальную плоскость симметрии. Ранее рассмотренные способы непригодны. Решаем задачу при помощи сфер с перемещающимися центрами. Проводим фронтально проецирующую плоскость **Δ (Δ_2)** через ось вращения кольца. Она пересекает кольцо по окружности **n**.

Перед нами стоит задача найти центр и радиус сферы, которая пересекла бы кольцо по заведомо построенной окружности. Очевидно, что центр будет находиться на перпендикуляре, проведённом из центра окружности (рис. 145), а для того чтобы и глобоидный тор секущая сфера пересекла по окружности, перпендикуляр следует остановить на оси тора. Окружности, полученные при пересечении одной секущей сферы с каждой из исходных поверхностей, пересекаясь между собой, дадут точки линии пересечения. Строим несколько секущих плоскостей, желательно до получения сферы, касательной к тору. Главные точки обозначены. Точки **3, 4** – границы видимости относительно **Π_1**.

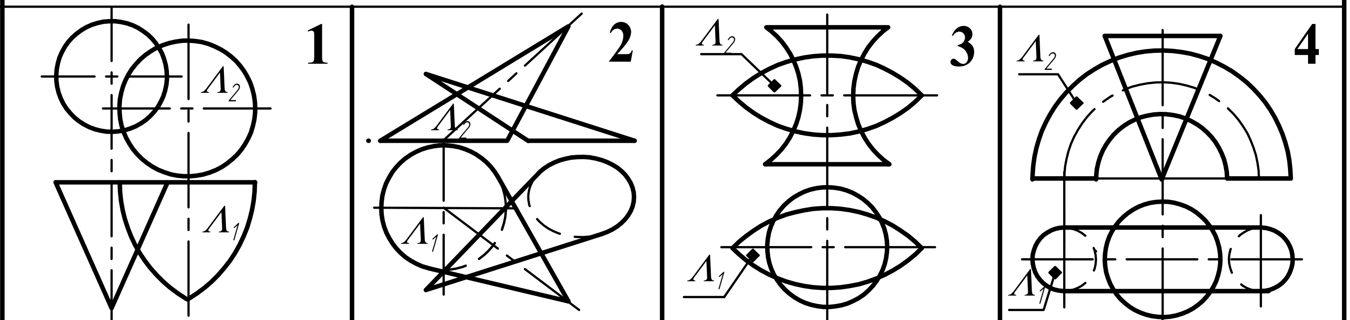
Проверьте себя!

Обучающий тест 9 по теме

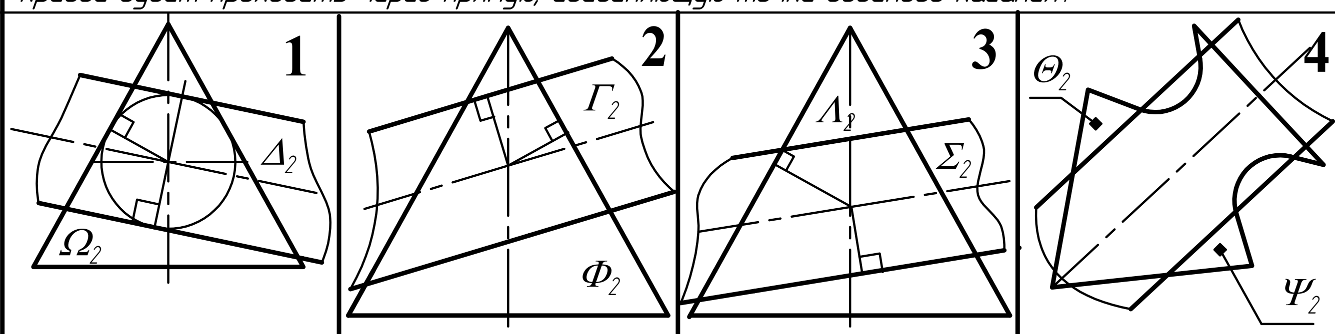
«Пересечение поверхностей при общем расположении обеих фигур»

№ п/п	Вопрос	1	2	3	4

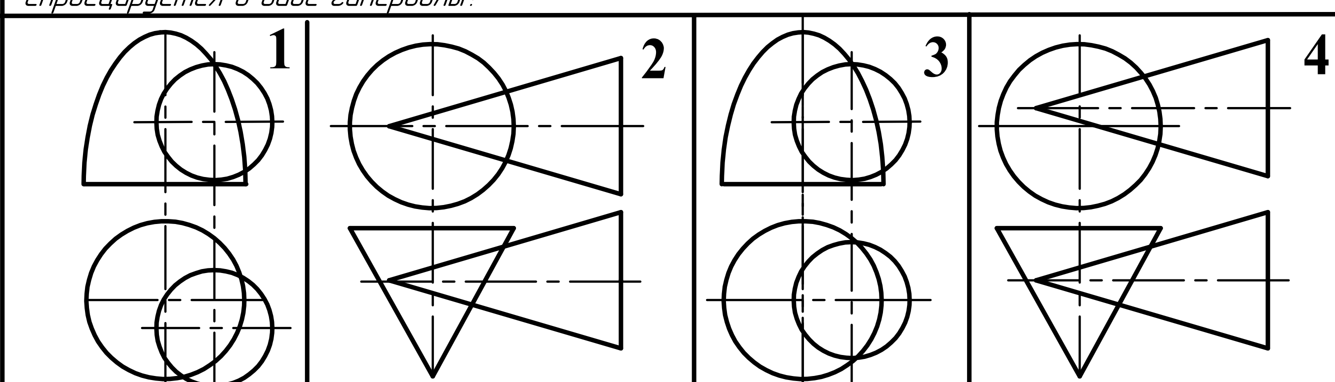
№ п/п	Вопрос
	В каком случае для построения линии пересечения поверхностей в качестве посредников следует использовать:
1	*концентрические сферы;*
2	*фронтальные плоскости уровня;*
3	*эксцентрические сферы;*
4	*плоскости общего расположения (пучок плоскостей)?*



№ п/п	Вопрос
	Пересекающиеся поверхности вращения имеют общую фронтальную плоскость симметрии.
5	*Найдите, где Rmin определяется по сфере, касательной к конусу, которая даёт самые правые и самые левые точки контуров линии пересечения.*
6	*В каком случае Rmin определяется по сфере, касательной к цилиндру, при этом определяются самые верхние и самые нижние точки контуров линии пересечения?*
7	*В каком случае поверхности пересеклись по трём окружностям?*
8	*В каком случае линия пересечения распадётся на две плоские кривые, причём плоскость каждой кривой будет проходить через прямую, соединяющую точки двойного касания?*

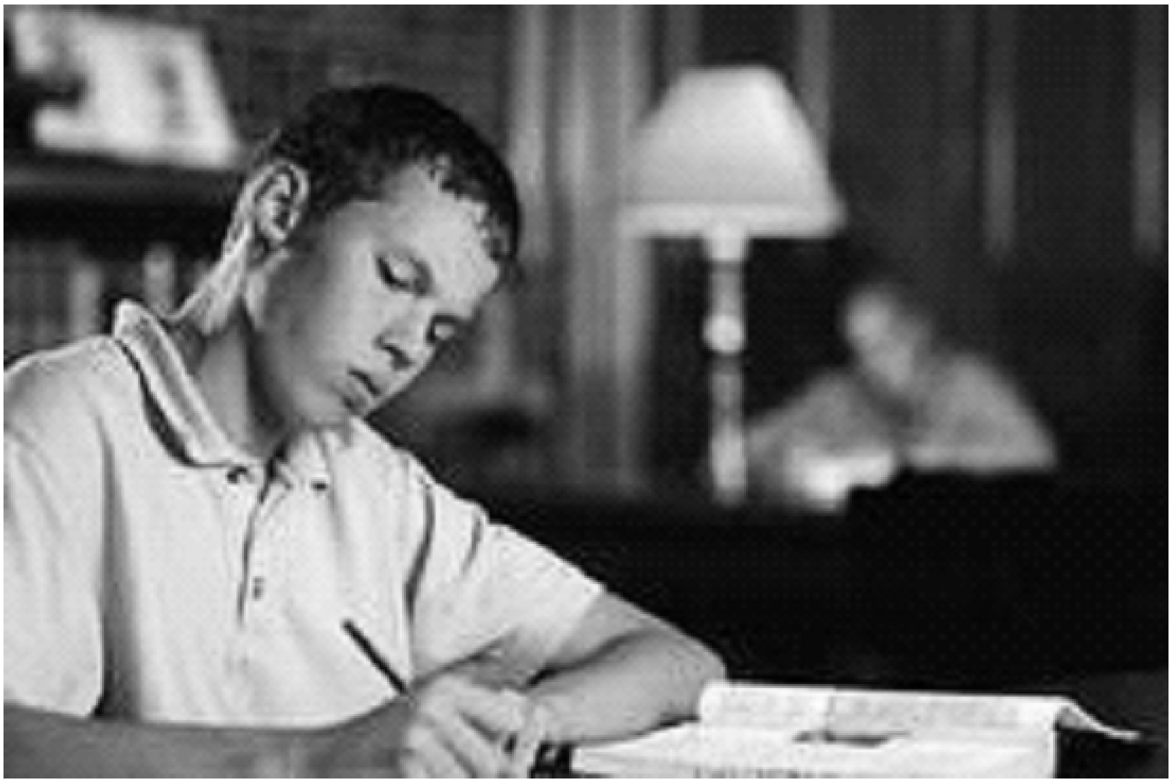


№ п/п	Вопрос
9	*В каком случае линия пересечения поверхностей (пространственная кривая) на фронтальную плоскость проекций спроецируется в виде параболы?*
10	*В каком случае линия пересечения поверхностей на горизонтальную плоскость проекций спроецируется в виде гиперболы?*



Ответы: 3 1 4 2 3 2 4 1 3 2

И не такое
одолевали!



У меня
всё
получится!

Тренировка 9 по теме «Пересечение поверхностей при общем расположении обеих фигур»

Вы подошли к изучению одной из самых важных тем курса. При создании многих конструкций придётся решать задачи на пересечение поверхностей. Ваша высокая грамотность – это ваш успех! Дерзайте!..

На следующей странице вперемешку размещены десять изображений пяти правильно решённых задач на пересечение геометрических фигур. Расположите их по предлагаемой схеме и в верхней горизонтали *прочтёте фамилию учёного, написавшего первый учебник по начертательной геометрии на русском языке. Он первым начал читать эту дисциплину на русском языке, стал первым русским профессором начертательной геометрии. Сколько было ему лет, когда присвоили это высокое звание, увидите в нижней строке.*

Расположите в указанной последовательности две проекции:

1) где линия пересечения конуса со сферой построена с помощью горизонтальных плоскостей уровня;

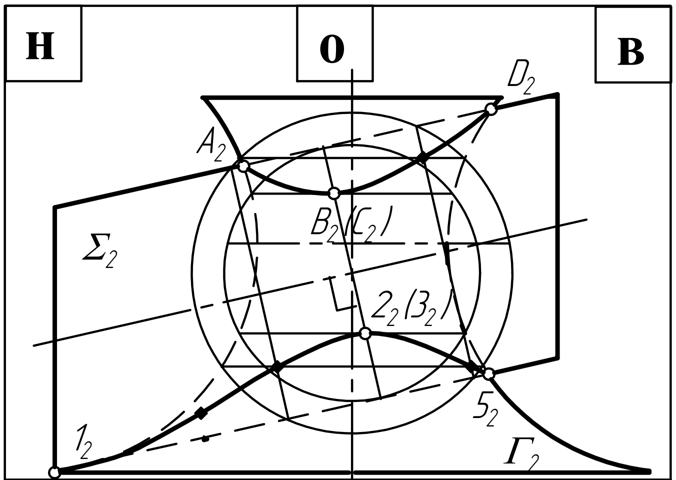
2) где линия пересечения конуса со сферой построена с помощью концентрических сфер-посредников;

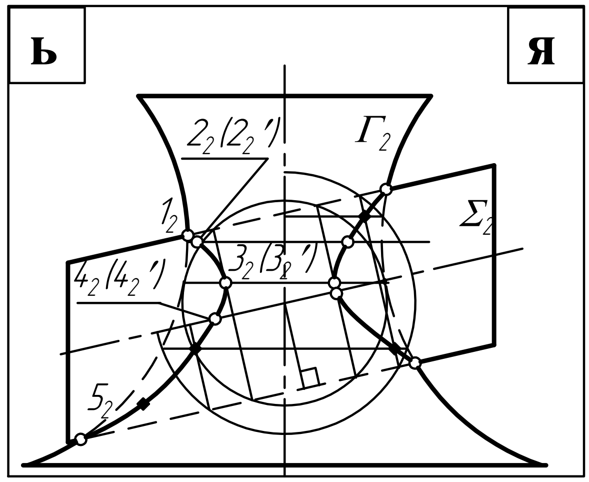
3) где линия пересечения конуса со сферой построена с помощью эксцентрических сфер-посредников;

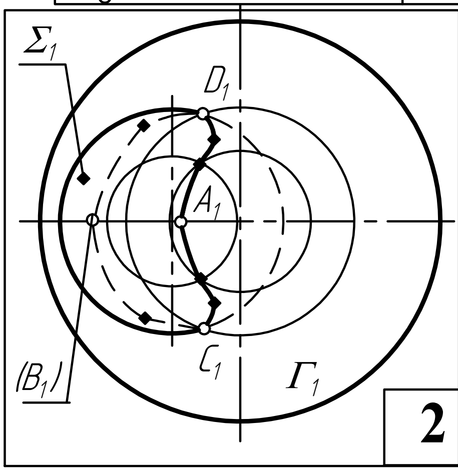
4) где при пересечении глобоидного тора с цилиндром цилиндр проницает в тор;

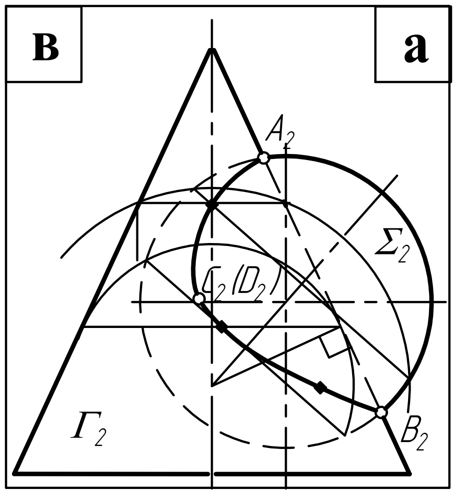
5) где при пересечении тора с цилиндром тор проницает в цилиндр.

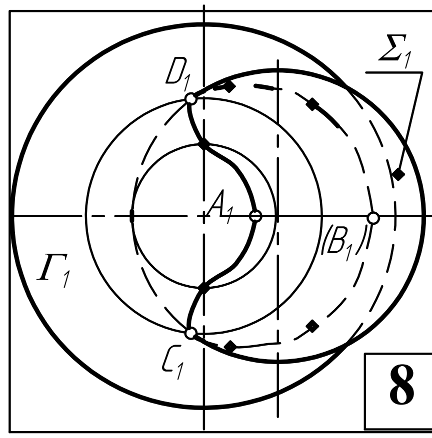
1.1	**2.1**	**3.1**	**4.1**	**5.1**
1.2	**2.2**	**3.2**	**4.2**	**5.2**

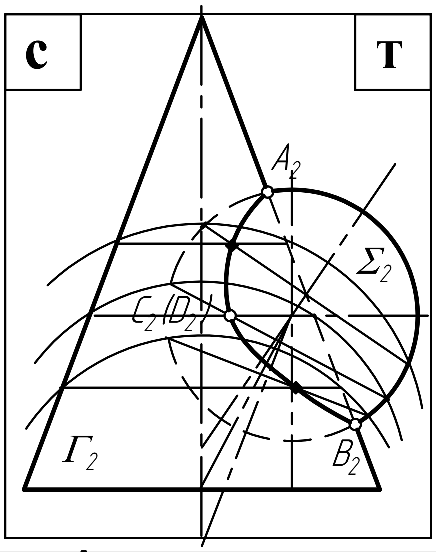

н
о
в
D_2
A_2
$B_2(C_2)$
Σ_2
$2_2(3_2)$
1_2
5_2
Γ_2

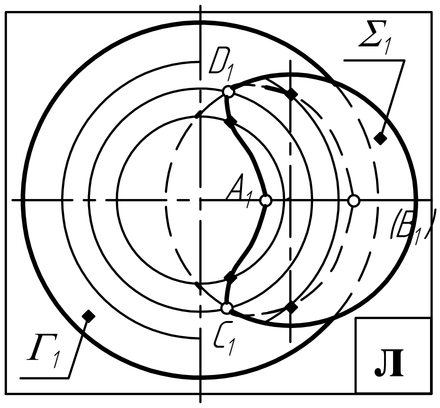

ь
я
$2_2(2_2')$
Γ_2
1_2
Σ_2
$4_2(4_2')$
$3_2(3_2')$
5_2

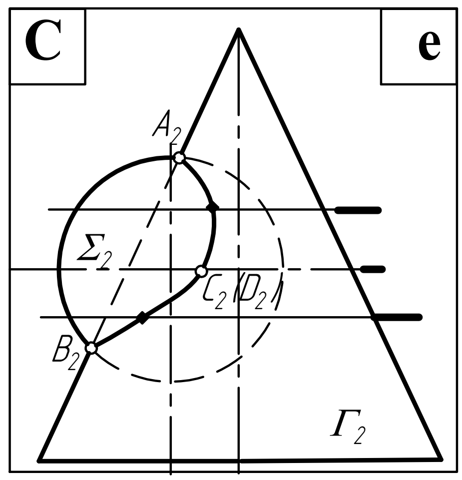

Σ_1
D_1
A_1
(B_1)
C_1
Γ_1
2

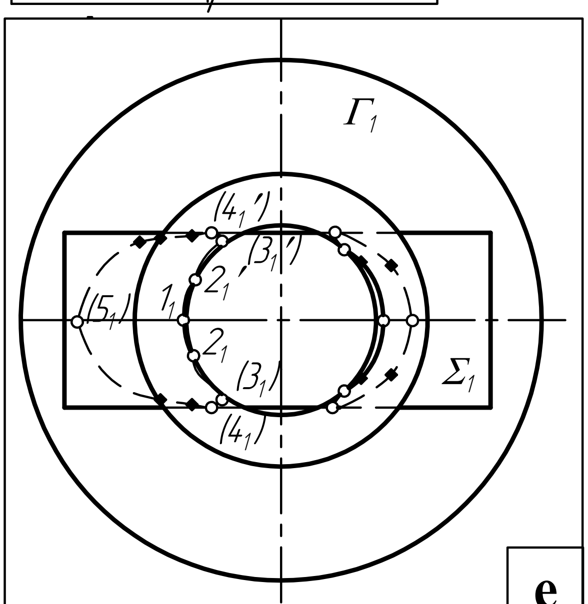

в
а
A_2
Σ_2
$C_2(D_2)$
Γ_2
B_2

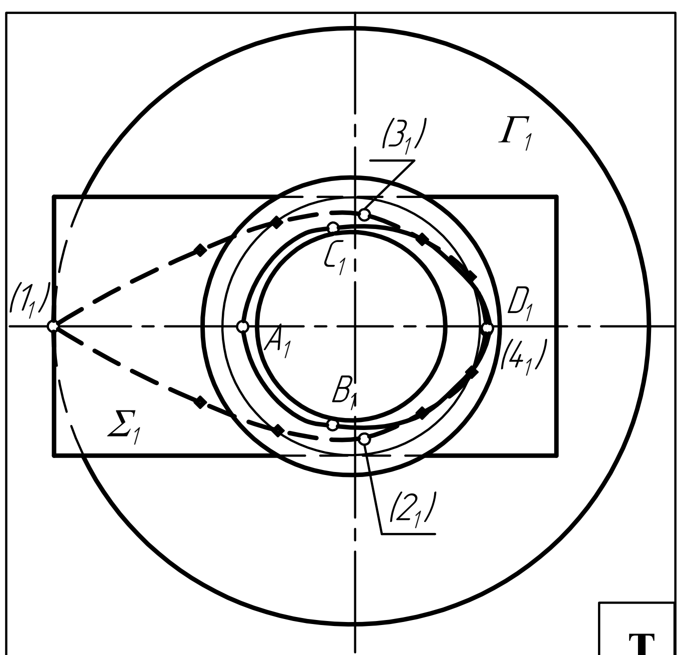

D_1
Σ_1
A_1
(B_1)
Γ_1
C_1
8


с
т
A_2
Σ_2
$C_2(D_2)$
Γ_2
B_2


D_1
Σ_1
A_1
(B_1)
Γ_1
C_1
л

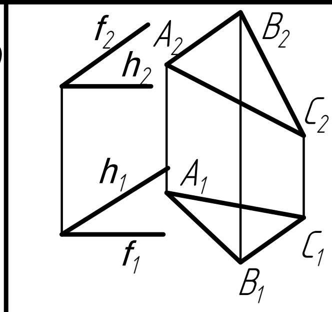
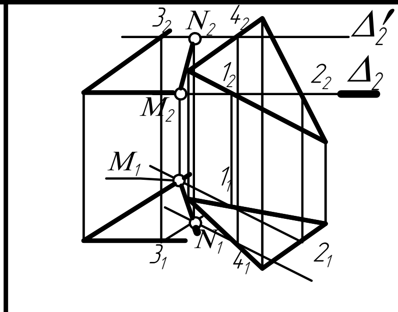
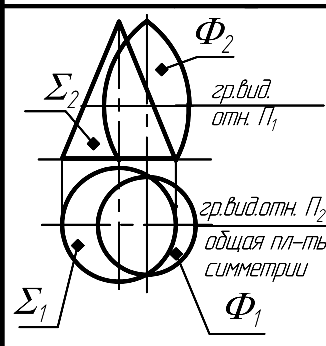
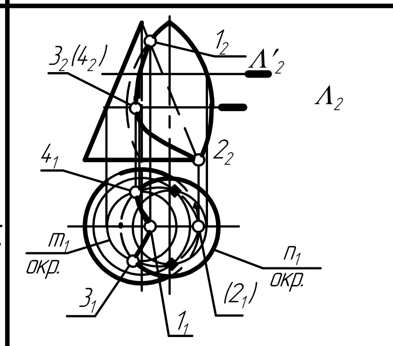
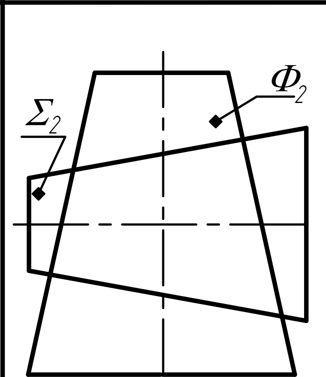
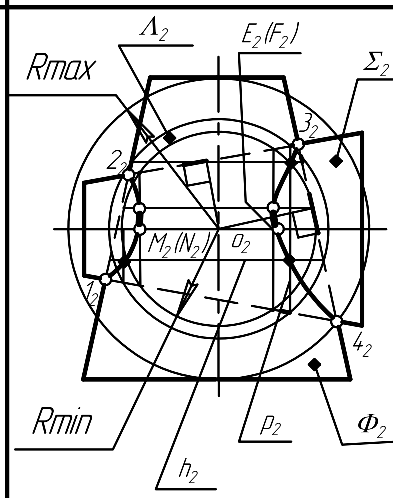
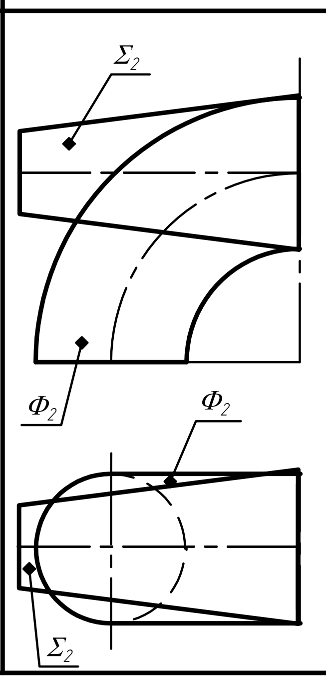
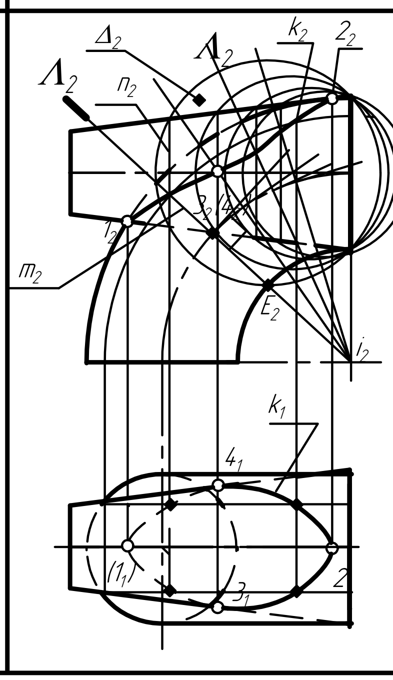

С
е
A_2
Σ_2
$C_2(D_2)$
B_2
Γ_2


Γ_1
$(4_1')$
$(3_1')$
$2_1'$
(5_1)
1_1
2_1
(3_1)
Σ_1
(4_1)
е


(3_1)
Γ_1
C_1
(1_1)
A_1
D_1
(4_1)
B_1
Σ_1
(2_1)
т

Опорный конспект по теме «Пересечение поверхностей при общем расположении обеих фигур»

Канва 9

		Условие	Графическое условие	Решение	Алгоритм решения
ВТОРАЯ ГПЗ в ТРЕТЬЕМ СЛУЧАЕ	Способ плоскостей-посредников	$\Gamma(f \cap h) \cap \Sigma(ABC) = (MN)$?			1) $h \subset \Delta \parallel \Pi_1 \Rightarrow \Delta_2 \equiv h_2$, 2) $\Delta \cap \Sigma = (1,2)$ $(1_1 2_1) \cap h_1 = M_1$ $M_2 \subset h_2$, 3) $\Delta'_2 \parallel \Delta_2$
		$\Sigma \cap \Phi = ?$			1,2–главные точки пересечения фр.мер. 3,4–гр.вид. отн. Π_1 $\Lambda // \Pi_1$; $\Lambda \cap \Sigma = m$ – окр. $\Lambda \cap \Phi = n$ – окр. $m \cap n$ =точки $\subset$ линии пересечения.
	Способ концентрических сфер	$\Phi \cap \Sigma =$ $= m \wedge n$	 $\Phi \wedge \Sigma$– имеют общую фронтальную плоскость симметрии.		1) 1,2,3,4,– точки пересечения фр.мер. 2) $i_2 \cap i_2' = o_2$. 3) Rmin–радиус большей вписанной сферы. M,N $\wedge$ EF – –точки видимости; 3) Rmax– $/O_2 4_2/$ 4) $\Lambda \cap \Sigma$–окр. p $\Lambda \cap \Phi$–окр. h $h \cap p$ =точки л.пер.
	Способ эксцентрических сфер	$\Sigma \cap \Phi = k$			1) 1,2 $\Rightarrow \cap$ фр.мер–ов 2) $\Lambda_2 \perp \Pi_2, \Lambda_2 \supset i_2$., $\Lambda_2 \cap \Phi_2 = m_2$, из центра окр. m восстанавливаем $\perp$ до пересечения с осью конуса,получаем центр первой секущей сферы, Rсферы равен расстоянию от центра до E_2. $\Delta_2 \cap \Sigma_2 = n_2$ $n \cap m$ = (точки)$\subset k$

Вопросы для самопроверки

1. Какие задачи относят ко второй **ГПЗ** в третьем случае взаимного расположения?
2. При решении каких задач применим:
   а) способ плоскостей-посредников;
   б) способ концентрических сфер;
   в) способ эксцентрических сфер?
3. По каким линиям пересекаются соосные поверхности вращения?
4. Сформулируйте теорему Монжа.
5. Какие точки при решении задач на пересечение поверхностей относят к главным?
6. Какой способ позволяет строить линию пересечения, используя только одну проекцию?

В н и м а н и е ! *Итоговый тест* **9**

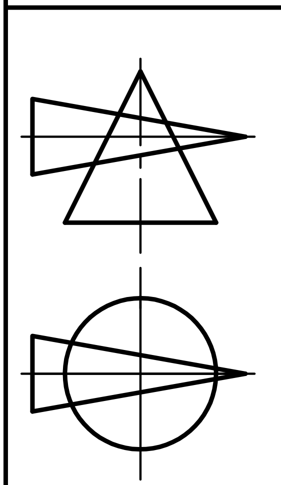
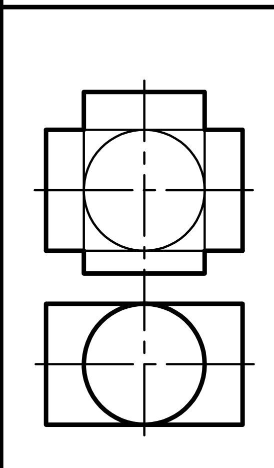
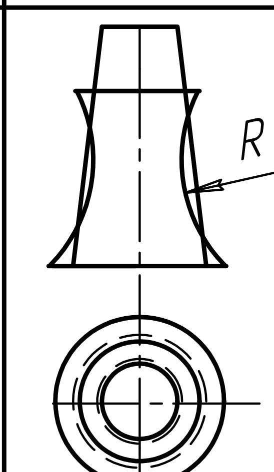
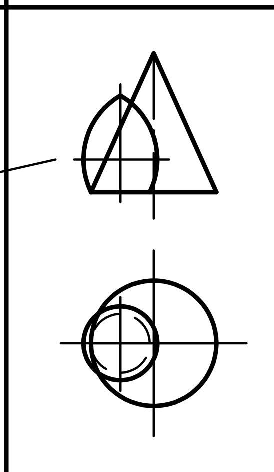
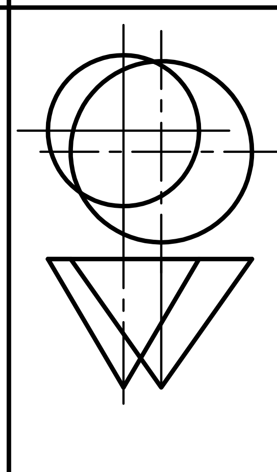
⊙ 1 . В каком случае линия пересечения поверхностей может быть построена при помощи горизонтальных плоскостей уровня?

○ 2. Укажите, какую задачу можно решить способом фронтальных плоскостей-посредников?

⦶ 3. В каком случае поверхности пересекаются по двум окружностям?

⊗ 4. В каком случае задача решается способом концентрических сфер?

⊖ 5. В каком случае поверхности пересекаются по двум эллипсам (теорема Монжа)?

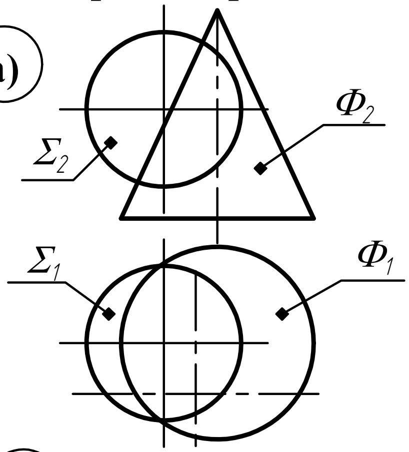
1	2	3	4	5
				
⊗	⊖	⦶	⊙	○

ЗАНЯТИЕ 9

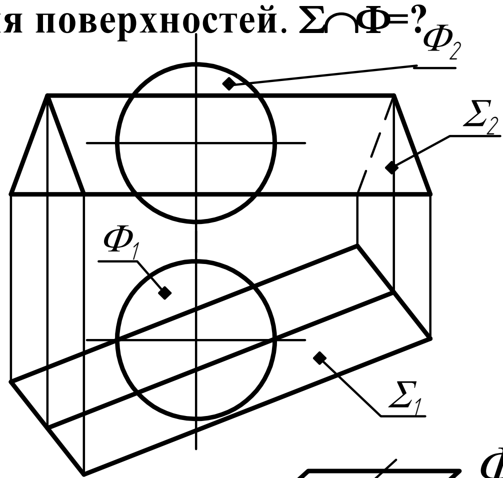
Пересечение поверхностей при общем расположении обеих фигур

9.1. Построить проекции линии пересечения поверхностей. $\Sigma \cap \Phi = ?$

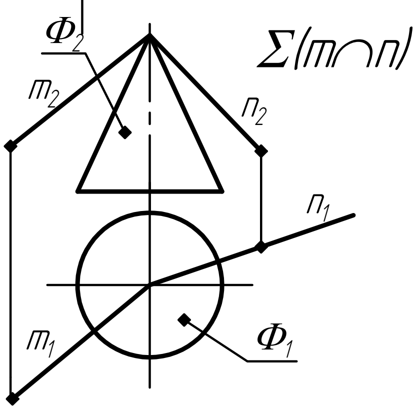
а)



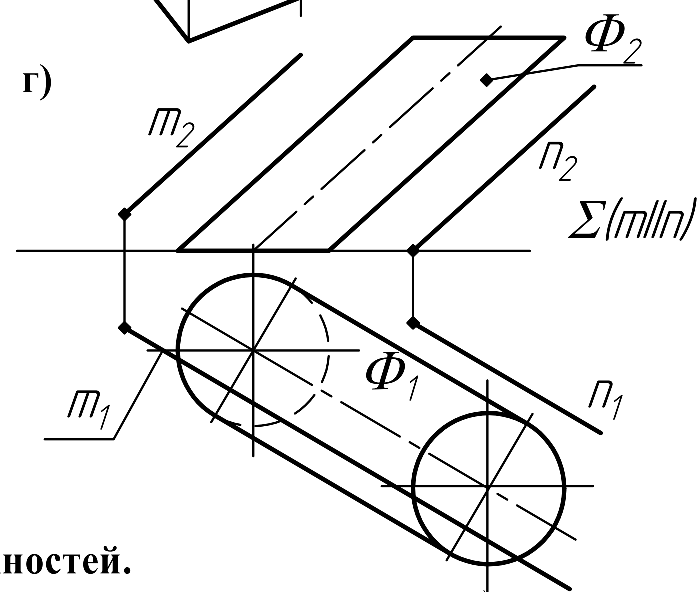
б)



в)



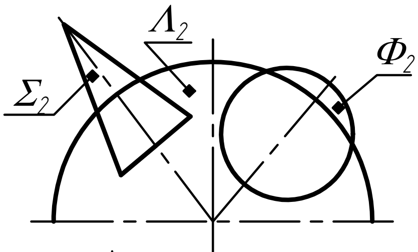
г)



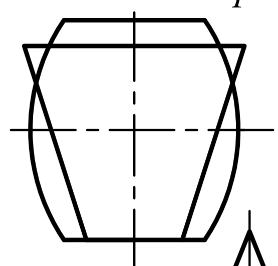
9.2. Найти линию пересечения поверхностей.

(*Поверхности имеют общую фронтальную плоскость симметрии.)*

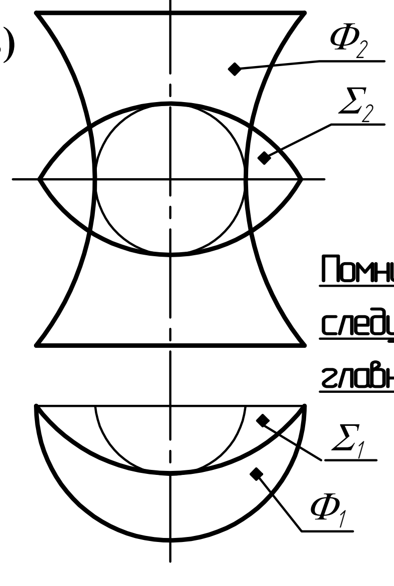
а)



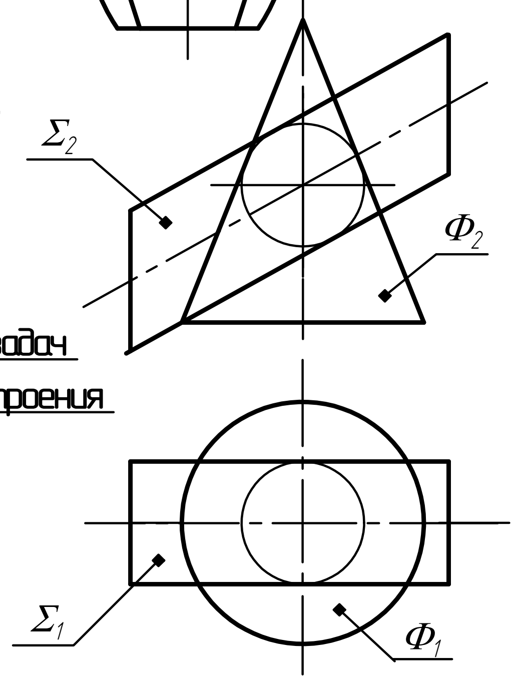
б)



в)



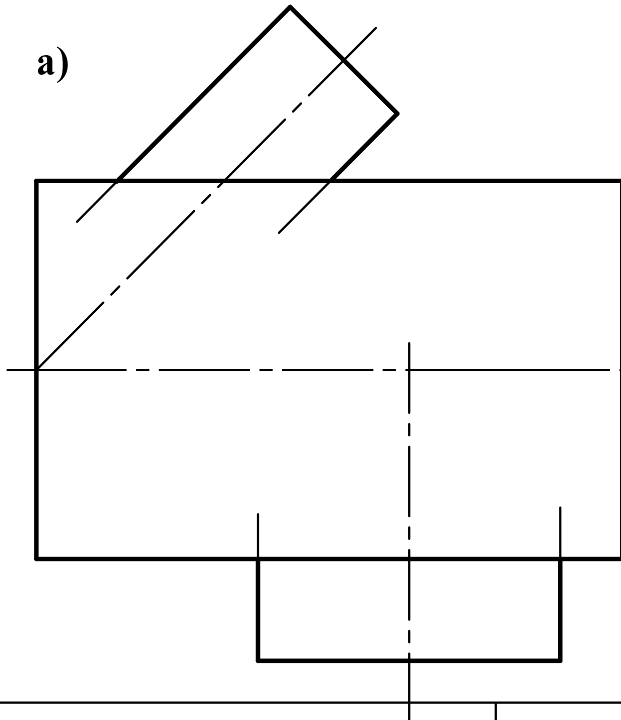
г)



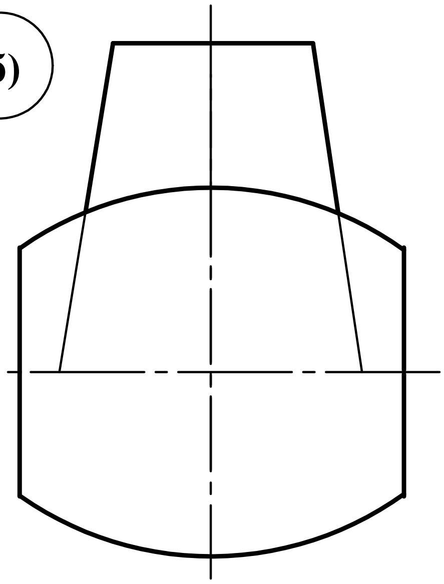
<u>Помните! Решение этих задач</u>
<u>следует начинать с построения</u>
<u>главных точек!</u>

9.3. Построить одну проекцию линии пересечения поверхностей, имеющих общую фронтальную плоскость симметрии.

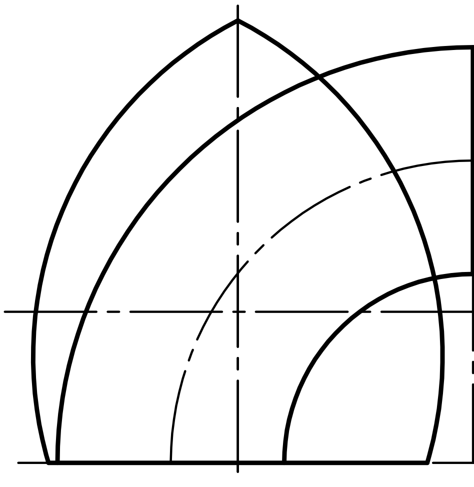
а)



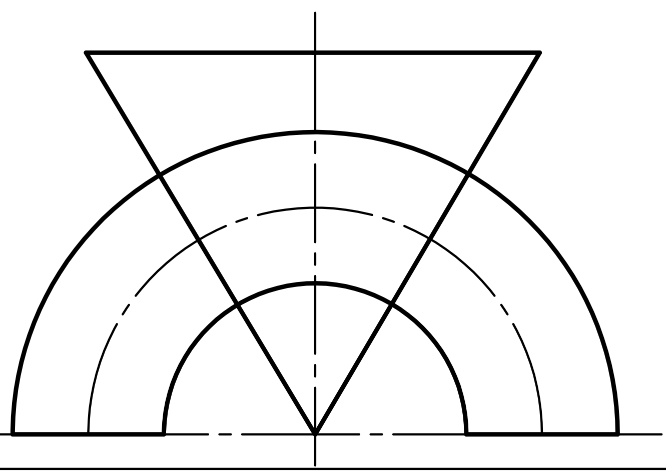
б)



в)

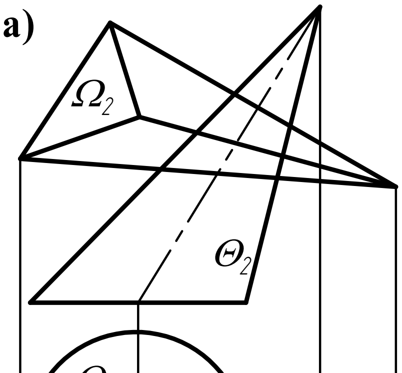


г)

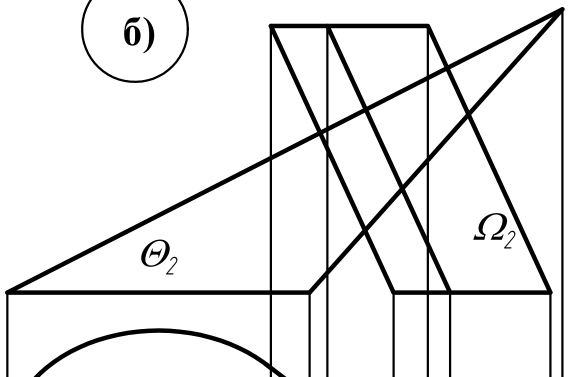


9.4. Построить две проекции линии пересечения заданных поверхностей.

а)

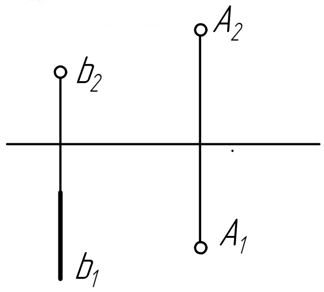


б)



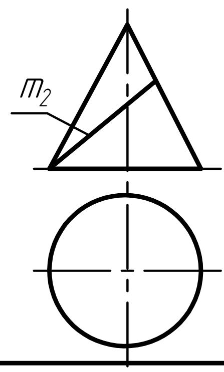
Задачи для лидеров

18Л



Найти все множество точек, удаленных от точки **A** на **30 мм** и равноудаленных от прямой **b** и плоскости $\mathbf{\Pi_1}$.

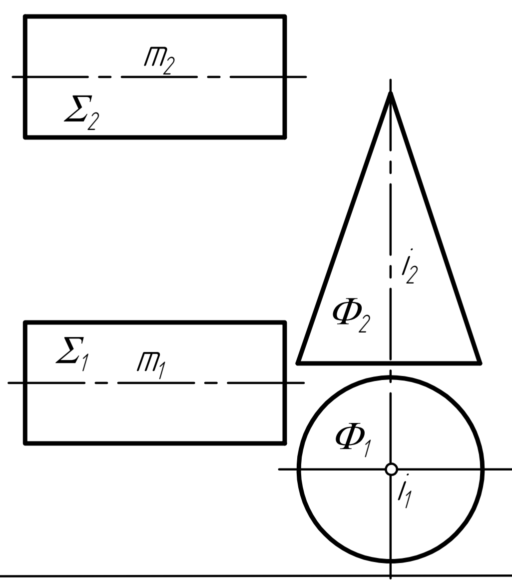
19Л



Построить цилиндр вращения, пересекающий конус по эллипсам, один из которых **m.**

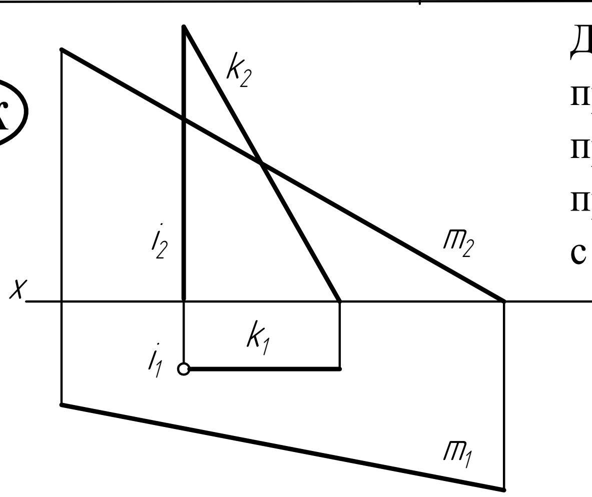
Задачки для самых крутых!

18К



Даны конус вращения **Φ** с осью $\mathbf{i \perp \Pi_1}$ и цилиндр вращения **Σ** с осью $\mathbf{m \perp \Pi_3}$. Построить такую плоскость **Г,** чтобы эллипсы **k** и **k′,** полученные при пересечении с ней, были равны. Построить эти эллипсы.

19К



Даны прямая $\mathbf{i \perp \Pi_1}$, пересекающая её прямая **k** и скрещивающаяся с ней прямая **m.** Построить точки пересечения прямой **k** с гиперболоидом вращения с осью **i** и образующей **m.**

§ 10. Метрические задачи

К метрическим относят задачи на определение истинных величин отрезков, углов, плоских фигур.

Все метрические задачи условно состоят из двух основных метрических задач.

<u>I ОМЗ – связана с определением истинной длины отрезка.</u>

<u>II ОМЗ – связана с построением перпендикуляра к плоскости.</u>

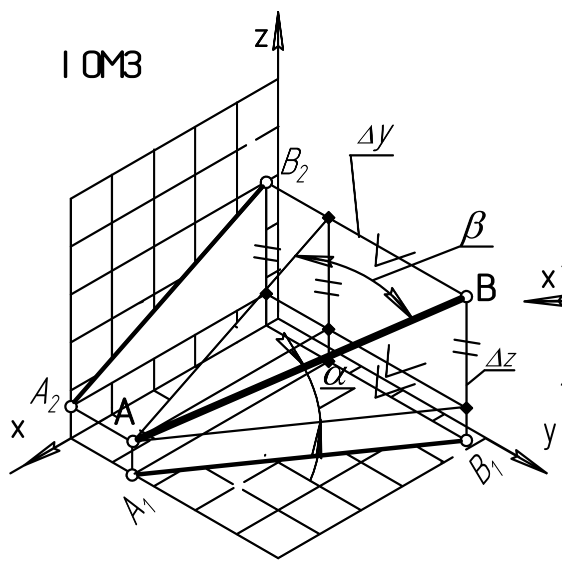


Рис. 148

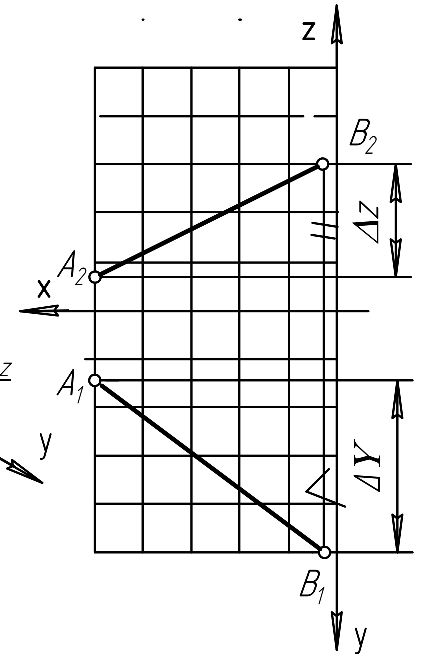


Рис. 149

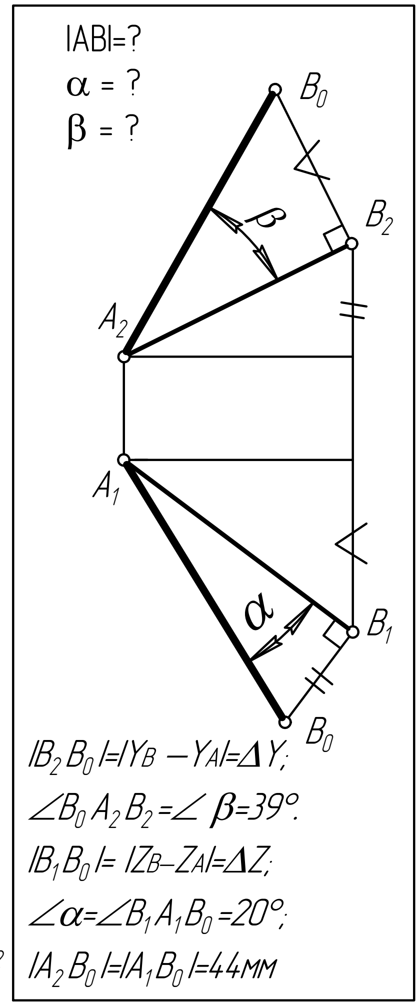
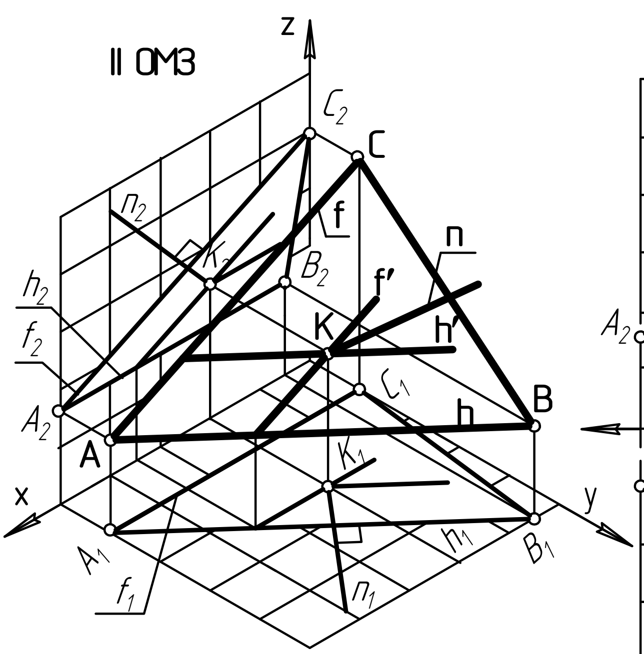


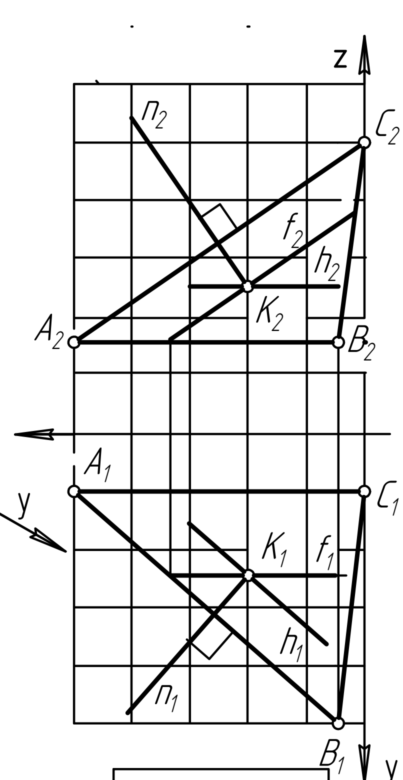
Рис. 150



$$n \perp f \wedge n \perp h \Rightarrow n \perp \Gamma(f \cap h)$$

$$\text{х.п.ч.} \rightarrow \boxed{n_2 \perp f_2;\ n_1 \perp h_1}$$

Рис. 151



$$\boxed{n_2 \perp f_2;\ n_1 \perp h_1}$$

Рис. 152

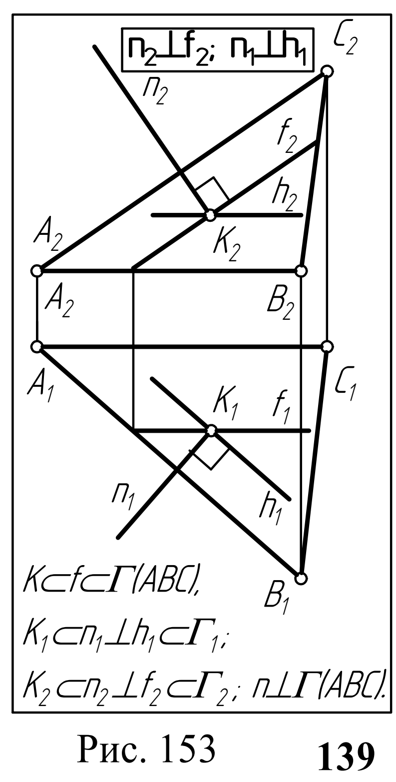
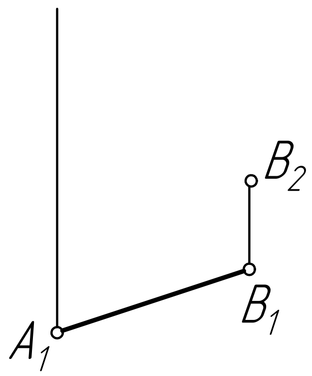


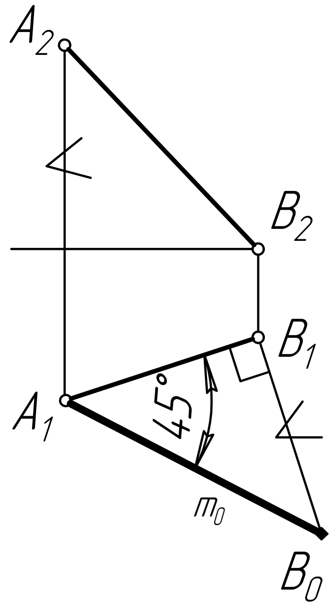
Рис. 153

Примеры решения задач по теме
«Метрические задачи»

<u>Пример 10.1.</u> Определить истинную длину отрезка **АВ** и достроить его фронтальную проекцию, если угол наклона его к $\Pi_1(\alpha)$ равен **45°** и точка **А** выше точки **В.**



Решение



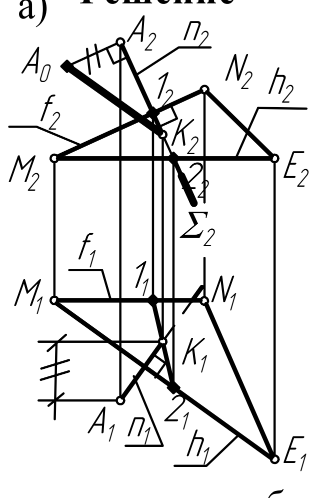
Алгоритм решения

1. $A_1 \subset m_0$ $(A_1B_1)=45°$,
$(B_1B_0) \perp (A_1B_1)$,
$|A_1B_0|=|AB|= 37$ мм.
$|Z_A - Z_B| = |B_1B_0|$

Правило прямоугольного треугольника по двум заданным характеристикам всегда позволяет найти три недостающие.

<u>Пример 10.2.</u> Определить расстояние от точки **А** до плоскости **Г.**

а) **Решение**

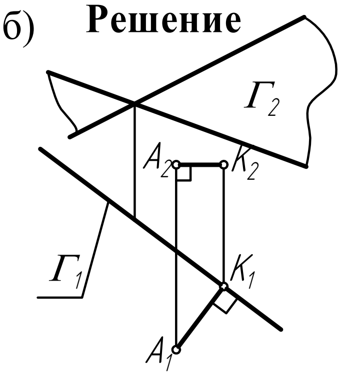


Алгоритм решения

1 $A_2 \subset n_2 \perp f_2 \subset \Gamma_2$;
$A_1 \subset n_1 \perp h_1 \subset \Gamma_1$;
$n_2 \perp f_2$; $n_1 \perp h_1$.
2 $n_2 \subset \Sigma_2 \perp \Pi_2$, $n_2 = \Sigma_2$,
$\Sigma_2 \cap \Gamma_2(M_2N_2E_2) = 1_22_2$,
$1_1 \subset (M_1N_1) \wedge 2_1 \subset (M_1E_1)$,
$(1_12_1) \cap n_1 = K_1$; $K_2 \subset n_2$;
3 $|AK| = |A_0K_2| = 15$ мм.

Если плоскость общего положения, то перпендикуляр к ней также прямая общего положения.

б) **Решение**



Алгоритм решения

$\Gamma \perp \Pi_1 \Rightarrow n \parallel \Pi_1$
$A_1K_1 \perp \Gamma_1$
$A_2K_2 \perp$ л.с.
$|A\Gamma| = |A_1K_1| = 10$ мм.

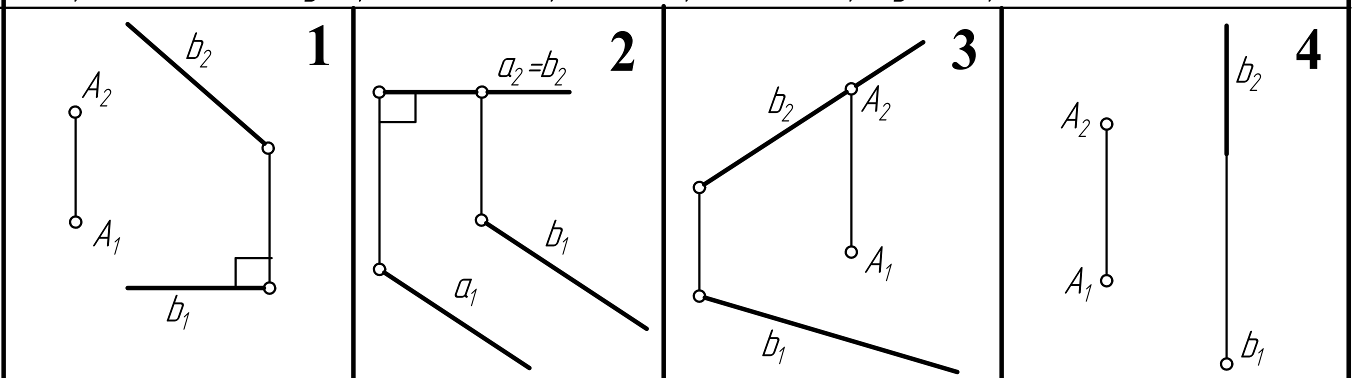
Если плоскость перпендикулярна Π_1, то прямая, перпендикулярная к ней, параллельна Π_1.

Анализируя исходные данные, нетрудно заметить, что есть проекции, удобные или неудобные для нахождения искомой метрической характеристики. Например, при проецирующем расположении плоскости расстояние до плоскости определяется сразу на чертеже. Условимся проекции, удобные для решения задачи, называть <u>решающими.</u> В опорном конспекте *(канва 10)* приведены примеры решения большинства метрических задач при общем расположении фигур и решающем.

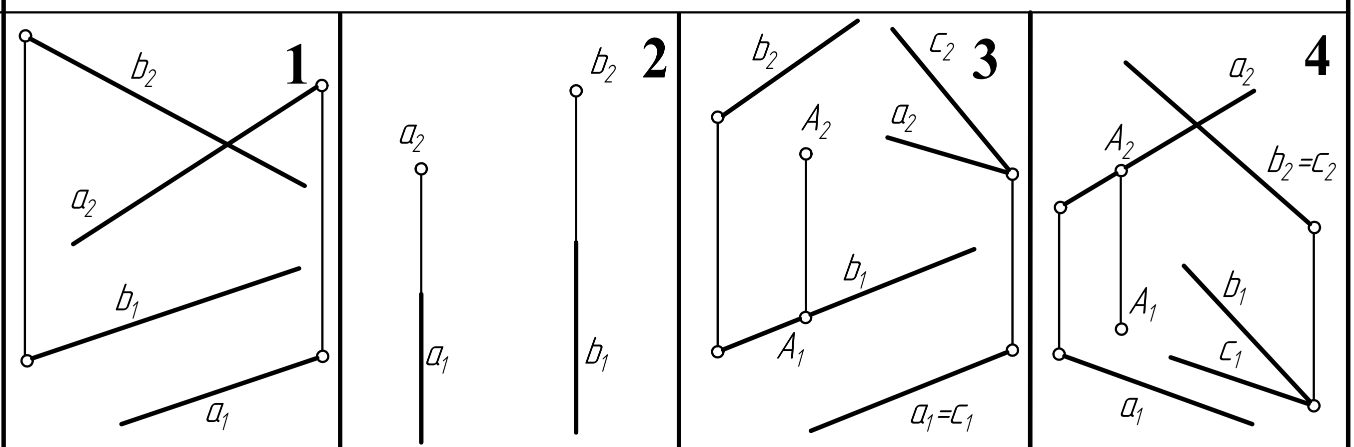
Проверьте себя!

Обучающий тест 10 по теме **«Метрические задачи»**

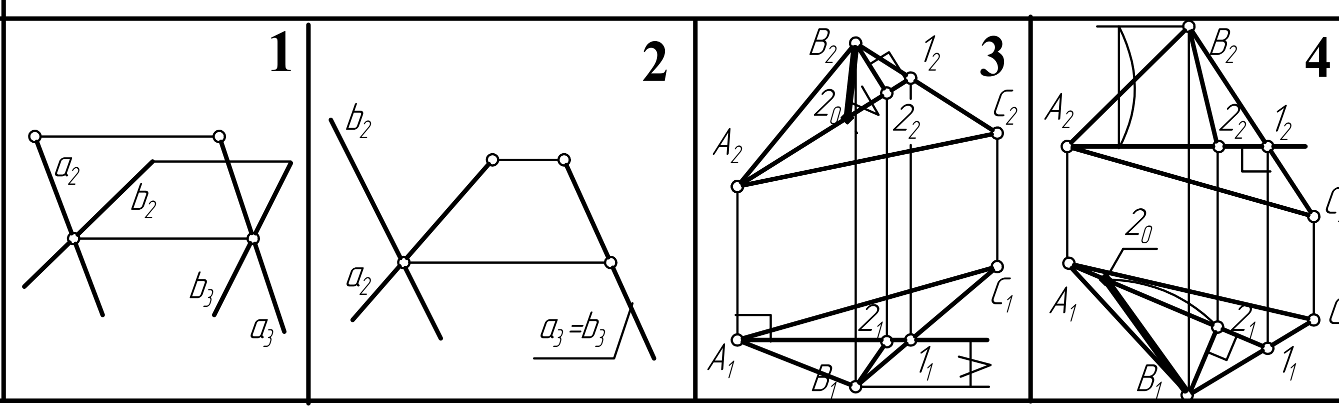
№ п/п	Вопрос	1	2	3	4
1	*В каком случае расстояние от точки до прямой определяется сразу на чертеже?*				
2	*На каком чертеже определяется угол наклона плоскости к Π_1 ($\angle\alpha$)?*				
3	*Где расстояние от точки до прямой определяется в два действия?*				
4	*Где расстояние между параллельными прямыми определится сразу на чертеже?*				



№ п/п	Вопрос				
5	*На каком чертеже определяется угол между плоскостями?*				
6	*На каком чертеже определяется расстояние между скрещивающимися прямыми?*				
7	*Где определяется расстояние между параллельными прямыми?*				
8	*В каком случае определяется расстояние между параллельными плоскостями?*				



№ п/п	Вопрос				
9	*В каком случае определяются сразу на чертеже углы наклона плоскости к двум плоскостям проекций (α и β)?*				
10	*На каком чертеже определён угол наклона плоскости общего положения к Π_2 ($\angle\beta$)?*				



Ответы: 4 3 1 2 4 1 2 3 2 3

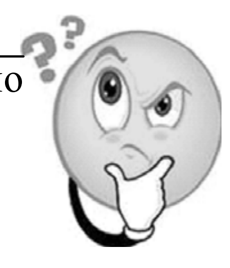
Тренировка 10 по теме «Метрические задачи»

Перед вами в хаотическом порядке чертежи метрических задач. В некоторых случаях их графическое решение выполнено, в некоторых задано только исходное графическое условие. При правильных ответах на первые шесть (1– 6) вопросов вы узнаете *фамилию известного учёного, автора нескольких учебных книг по этой дисциплине, сказавшего своё слово в области преобразований ортогональных проекций.* Из следующих пяти кадров (7 – 10+6) сложится *фамилия профессора одного из ведущих московских вузов, создавшего межвузовский семинар «Кибернетика графики».* Правильно выстроенные ответы на остальные вопросы познакомят вас с ещё *двумя известными авторами.*

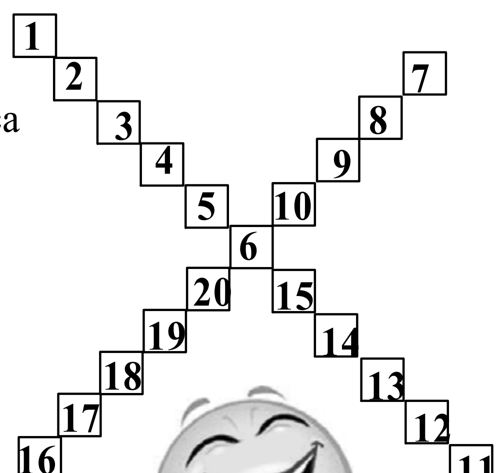
1. Где определено расстояние от точки до горизонтали?
2. Где построены проекции расстояния от точки до прямой общего положения?
3. Где определено расстояние от точки до горизонтально проецирующей прямой?
4. Где определено расстояние от точки до фронтально проецирующей плоскости?
5. Где определено расстояние между параллельными фронталями?
6. На каком чертеже определено расстояние между скрещивающимися прямыми, одна из которых фронтально проецирующая?

---

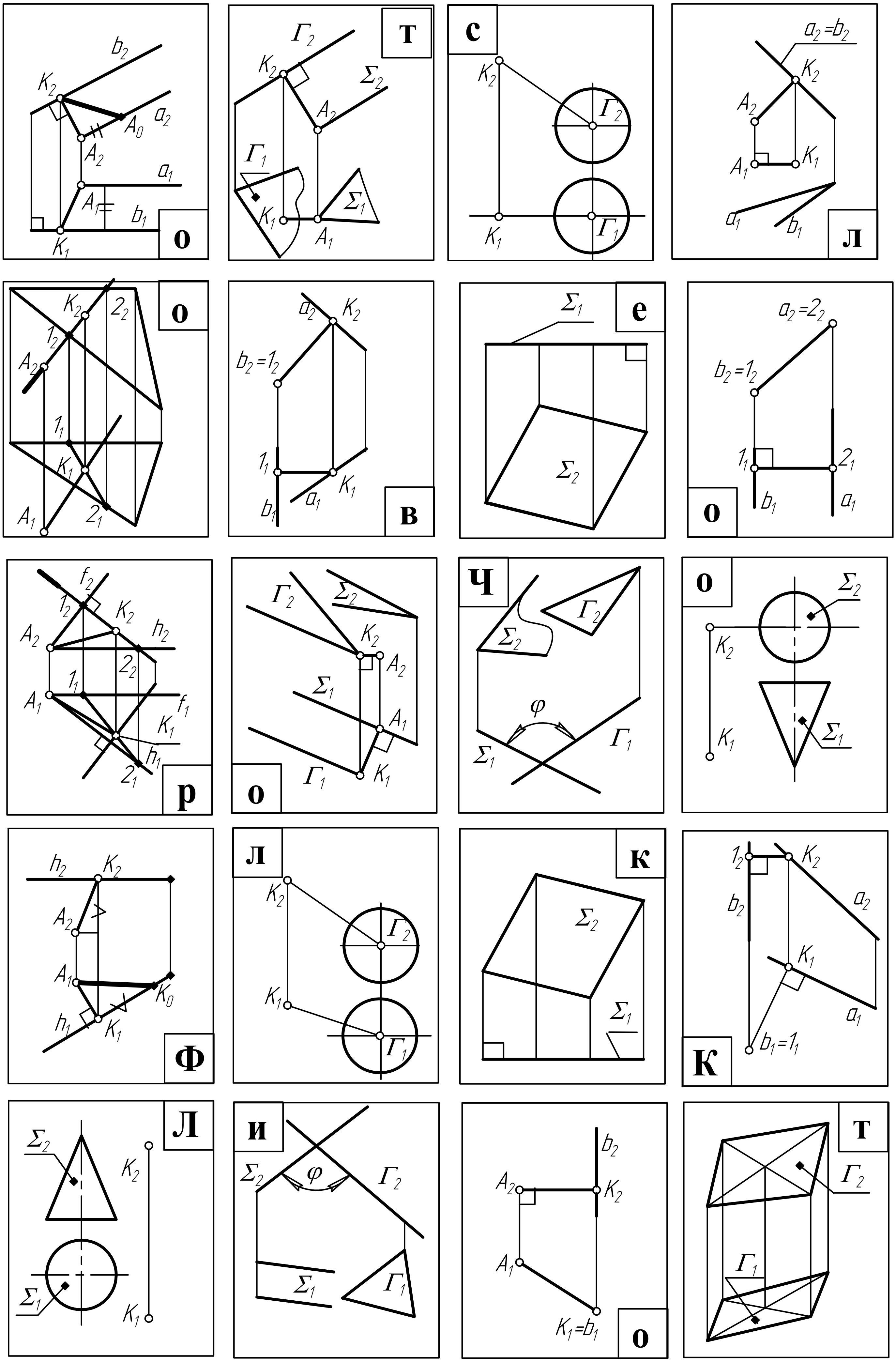
7. На каком чертеже определено расстояние между скрещивающимися прямыми, одна из которых горизонтально проецирующая прямая?
8. Где определено расстояние между фронтально проецирующими прямыми?
9. Где определено расстояние между параллельными между собой фронтально проецирующими плоскостями?
10. На каком чертеже видим расстояние между параллельными горизонтально проецирующими плоскостями?



11. Где определяется угол между пересекающимися горизонтально проецирующими плоскостями?
12. Где определяется угол между пересекающимися фронтально проецирующими плоскостями?
13. Где расстояние от точки до поверхности сферы определяется сразу?
14. Где расстояние от точки до поверхности сферы не определяется по чертежу?
15. Где сразу на чертеже определяется расстояние от точки до поверхности кругового конуса?

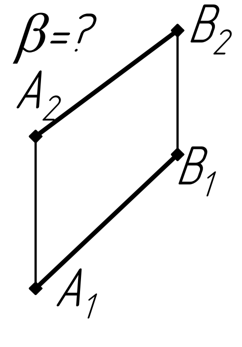
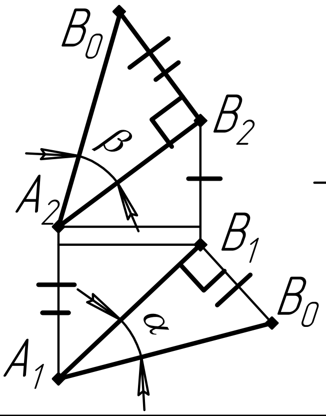
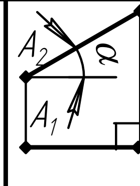
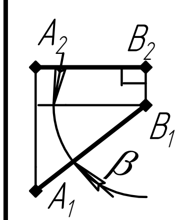
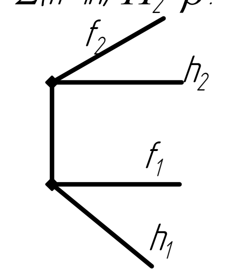
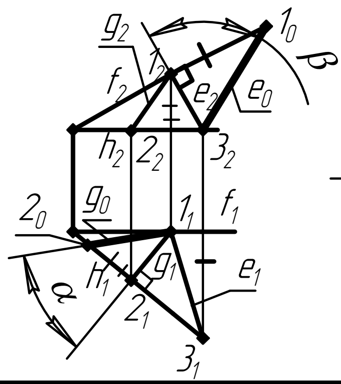
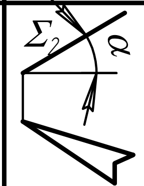
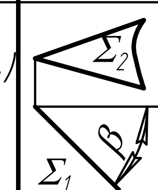
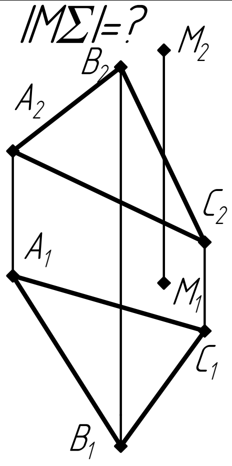
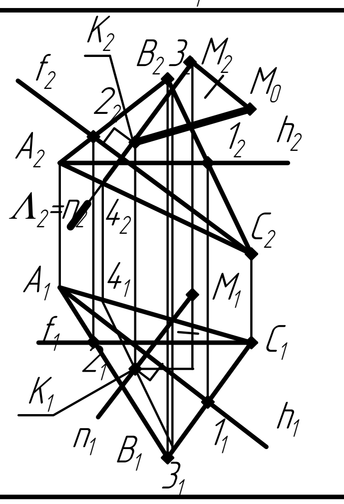
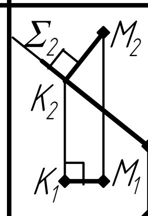
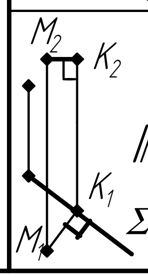
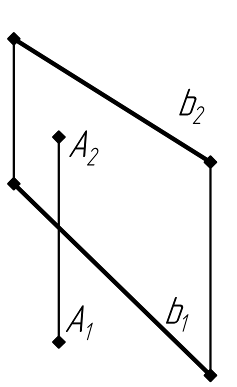
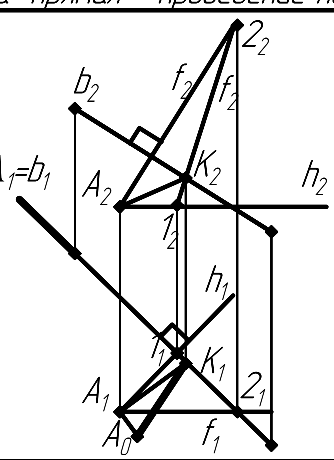
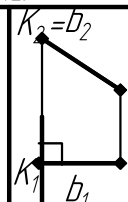
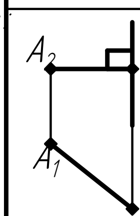


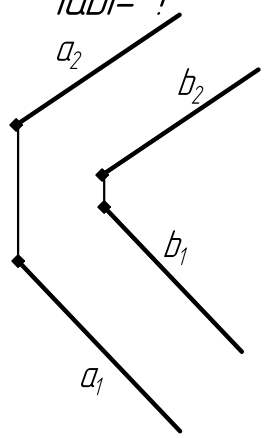
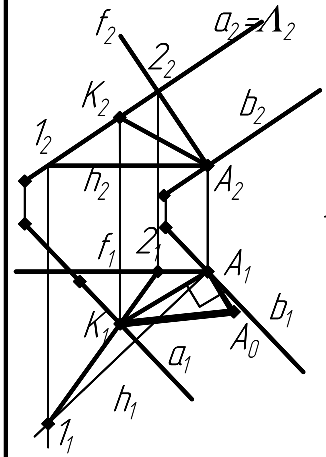
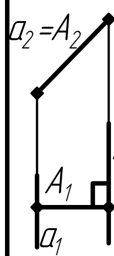
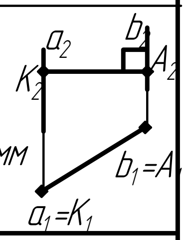
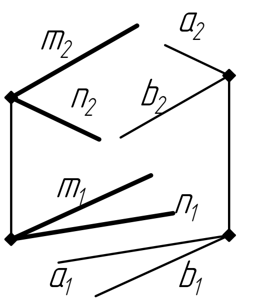
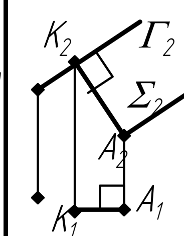
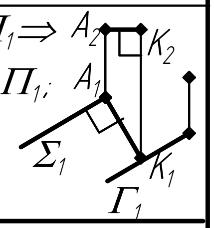
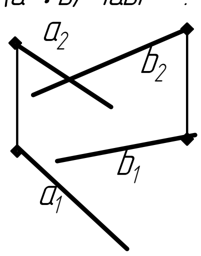
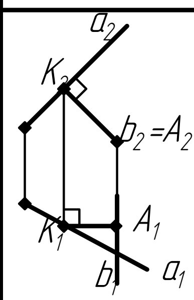
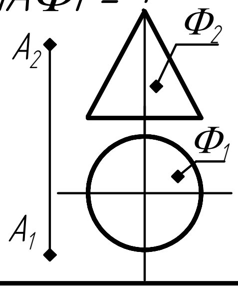
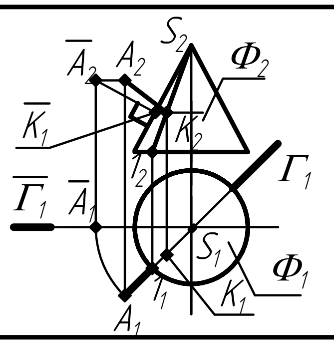
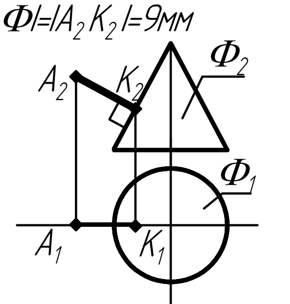
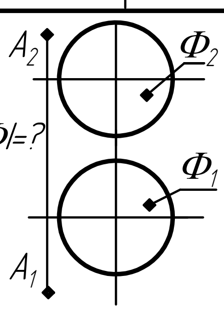
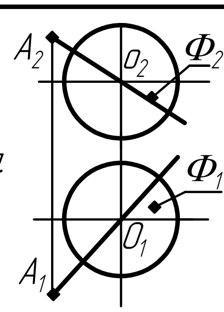
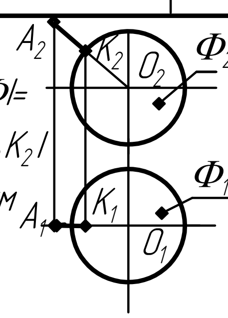
16. Где расстояние от точки до поверхности конуса сразу по чертежу не определяется?
17. Где построены проекции расстояния от точки до плоскости общего положения?
18. Где натуральная величина четырёхугольника определяется на Π_2?
19. Где натуральная величина четырёхугольника не определяется по чертежу?
20. Где натуральная величина четырёхугольника определяется на Π_1?


о
т
с
л
о
в
е
о
р
о
ч
о
ф
л
к
К
Л
и
о
т

Опорный конспект по теме «Метрические задачи»

Канва 10

№ п/п	Условие	Графическое решение и алгоритм при общем расположении фигур	Решающее положение
1	$\lvert AB\rvert=?,\alpha=?$ $\beta=?$ 	 1) $(B_2B_0)\perp(A_2B_2)$, $\lvert B_2B_0\rvert=\lvert Y_A-Y_B\rvert$? $\lvert A_2B_0\rvert=\lvert AB\rvert$, $\angle A_2=\beta$ 2) $(B_1B_0)\perp(A_1B_1)$ $\lvert B_1B_0\rvert=\lvert Z_B-Z_A\rvert$ $\lvert A_1B_0\rvert=\lvert AB\rvert$, $\angle A_1=\alpha$	 $(AB)\parallel\Pi_2$ $\lvert A_2B_2\rvert=\lvert AB\rvert$ $\angle A_2=\alpha$  $(AB)=\Pi_1$ $\lvert A_1B_1\rvert=\lvert AB\rvert$ $\beta=\angle B_1$
2	$\Sigma(f\cap h)\,\widehat{\Pi_1}=\alpha$? $\Sigma(f\cap h)\,\widehat{\Pi_2}=\beta$? 	 1) $g\subset\Sigma$, $g\perp h\subset\Sigma$ $g_1(1_12_1)\perp h_1$; $g_2(1_22_2)$ $\angle\alpha\to\widehat{g\,\Pi_1}=\angle 2_0 1_1 2_1$ 2) $e\subset\Sigma$; $e\perp f\subset\Sigma$; $e_2(1_23_2)\perp f_2$; $e_1(1_13_1)$ $\angle\beta\to\widehat{e\,\Pi_1}=\angle 1_0 3_2 1_2$	 $\Sigma\perp\Pi_2\Rightarrow$ $\Rightarrow\alpha\to\Pi_1$ $\angle\alpha=\widehat{\Sigma\,\Pi_1}$  $\Sigma\perp\Pi_1\Rightarrow$ $\Rightarrow\beta\to\Pi_2$, $\angle\beta=\widehat{\Sigma\,\Pi_2}$
3	$\lvert M\Sigma\rvert=?$ 	 1) $h(A1)\subset\Sigma$, $f(C2)\subset\Sigma$; $n\supset M$; $n\perp\Sigma$; $\boxed{n_2\perp f_2;\ n_1\perp h_1.}$ 2) $n\cap\Sigma=K$; $n\subset\Lambda\perp\Pi_2\Rightarrow\Lambda_2=n_2$ $\Lambda\cap\Sigma=(3,4)$; $(3,4)\cap n=K$; 3) $\lvert MK\rvert=\lvert M_0K_2\rvert=$ 16мм	 $\Sigma\perp\Pi_2\Rightarrow$ $\Rightarrow n\parallel\Pi_2$; $\lvert M\Sigma\rvert=\lvert M_2K_2\rvert=$ = 8 мм.  $\Sigma\perp\Pi_1\Rightarrow$ $\Rightarrow n\parallel\Pi_1$; $\lvert M\Sigma\rvert=\lvert M_1K_1\rvert=7$мм
		Задача прямая – проведение перпендикуляра к плоскости.	
4	$\lvert Ab\rvert=?$ 	 1) $A\subset\Gamma(f\cap h)\perp b$ $f_2\perp b_2$, $h_1\perp b_1$; 2) $b\cap\Gamma(f\cap h)=K$ $b\subset\Lambda\perp\Pi_1\Rightarrow\Lambda_1=b_1$ $\Lambda\cap\Gamma=(1,2)$; $(1,2)\cap b=K$; 3) $\lvert AK\rvert=\lvert A_0K_1\rvert=12$ мм.	 $A_2\ b\perp\Pi_2\Rightarrow$ $\Rightarrow\lvert A_2K_2\rvert=$ $=\lvert Ab\rvert=12$мм  $b\perp\Pi_1\Rightarrow$ $\Rightarrow\lvert A_1K_1\rvert=$ $=\lvert Ab\rvert=14$мм
		Задача обратная – построение плоскости, перпендикулярной прямой.	

№ п/п	Условие	Решение и алгоритм при общем расположении фигур	Решающее положение
5	$\|ab\|= ?$ 	 1) $A\subset b$ 2) $A \subset \Gamma(f\cap h)$; $\Gamma(f\cap h) \perp a$; 3) $a \cap \Gamma=K$ 4) $\|AK\| = \|ab\| =\|K_1A_0\|=15$ мм.	 1) $a \perp \Pi_2$ $\Rightarrow(AK)\|\|\Pi_2$, $\|A_2K_2\|=\|ab\|=$ 14мм 1) $a\perp\Pi_1\Rightarrow$ $\Rightarrow(AK)\|\| \Pi_1$, $\|A_1K_1\|=\|ab\|=16$мм 
6	$\Sigma(m\cap n) \|\| \Gamma(a \cap b)$ 	1) $A\subset\Sigma$; 2) $A \subset n \perp \Gamma$; $(n_2\perp f_2,\ n_1 \perp h_1)$ 3) $n \cap \Gamma = K$; I ГПЗ в третьем случае. 4) $\|AK\| = \|\Sigma\Gamma\|$	 1)$\Sigma\perp\Pi_2\Rightarrow$ $\Rightarrow(AK)\|\|\Pi_2$; $\|A_2K_2\| =$ $= \|\Sigma\Gamma\|=12$мм 1) $\Sigma \perp \Pi_1\Rightarrow$ $\Rightarrow(AK)\|\| \Pi_1$; $\|A_1K_1\|=$ $\|\Sigma\Gamma\|=9$мм 
7	$(a \dot{-} b)$ $\|ab\| = ?$ 	1) $a \subset \Gamma(a \cap b')$, $b' \|\| b$; 2) $b \subset \Sigma(b \cap a')$, $a' \|\| a$; 3) $\Gamma(a \cap b') \|\| \Sigma\ (b \cap a')$ $\|\Gamma\Sigma\| = ?$ (в 6-м ↑)	 1) $b \perp\Pi_2\Rightarrow$ $\Rightarrow(AK)\|\|\Pi_2$ $\|A_2K_2\|=\|ab\|=$ 12мм
8	$\|A\Phi\| = ?$ 	 1) $A \subset n \perp \Phi$; $n \subset \Gamma \supset S$; $\Gamma\perp\Pi_1$; 2) $\Gamma \cap \Phi = (S1)l$ 3) $\|AL\| = ?$ (в 4-м ↑)	$\|A\Phi\|=\|A_2K_2\|=9$мм 
9	$\|A\Phi\|=?$ 	1) $K \subset (AO)$ 2 $(AO) \cap \Phi =K$ I ГПЗ в третьем сл. 3) $\|AK\| = \|A\Phi\|$ 	$\|A\Phi\|=$ $=\|A_2K_2\|$ $=5$мм 

Вопросы для самопроверки

1. Какие задачи относятся к метрическим? Сформулируйте первую и вторую основные метрические задачи.
2. Как определяется в общем случае расстояние:
   - от точки до прямой;
   - между двумя параллельными прямыми;
   - между двумя скрещивающимися прямыми;
   - от точки до плоскости;
   - между двумя параллельными плоскостями;
   - от точки до поверхности?
3. Как в общем случае определить угол:
   - между прямой и плоскостью;
   - между плоскостями?
4. При каком положении геометрических фигур искомые расстояния и углы определяются сразу на чертеже (решающее положение)?

В н и м а н и е ! *Итоговый тест* **10**

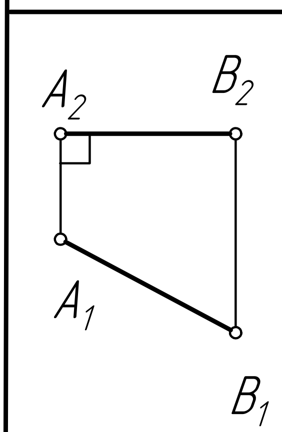
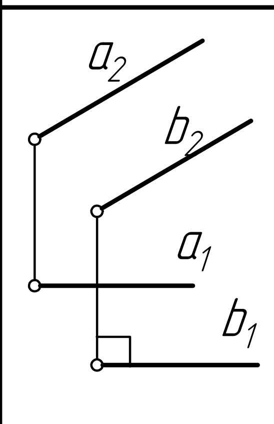
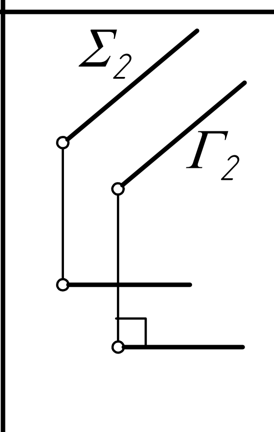
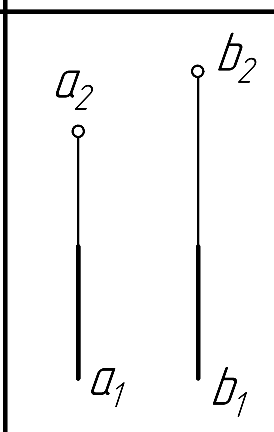
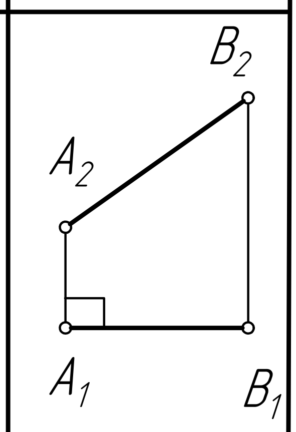
⊙ 1. Где расстояние между параллельными прямыми определяется сразу на чертеже?

⊕ 2. В каком случае расстояние между параллельными плоскостями определяется сразу на чертеже?

⦶ 3. На каком чертеже расстояние между параллельными прямыми сразу не определяется?

⊖ 4. На каком чертеже определяется истинная длина отрезка **AB** и угол наклона его к горизонтальной плоскости проекций?

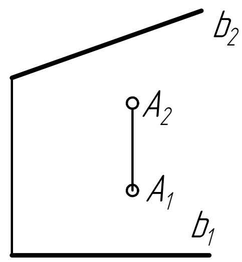
○ 5. На каком чертеже определяется истинная длина отрезка **AB** и угол наклона его к фронтальной плоскости проекций?

1	**2**	**3**	**4**	**5**
				
○	⦶	⊕	⊙	⊖

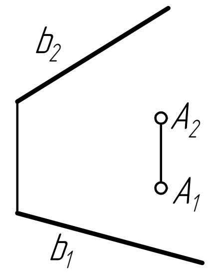
З А Н Я Т И Е   10
Метрические задачи

10.1. Определить расстояние от точки **A** до прямой **b**. **IAbI=?**

а)

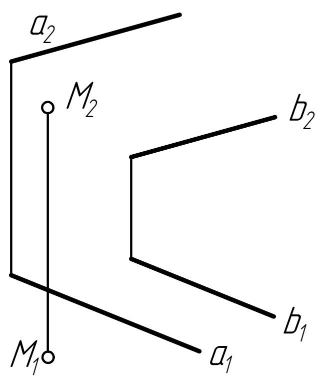


б)

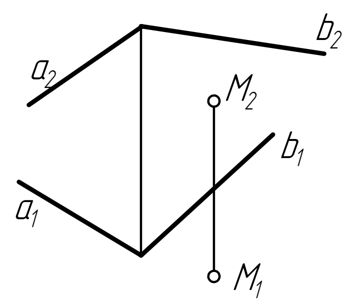


10.2. Определить расстояние от точки до плоскости. **IMГI=?**

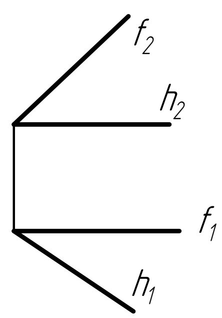
а)



б)

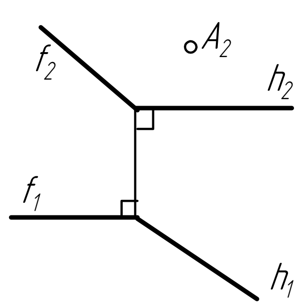


10.3



Построить всё множество точек, удалённых от плоскости **Σ(f⌒h)** на **30 мм.**

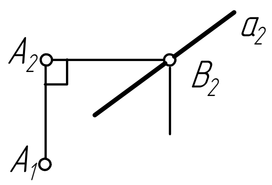
10.4



Построить недостающую проекцию точки **A**, отстоящей от плоскости **Σ(f⌒h)** на расстоянии **20 мм.**

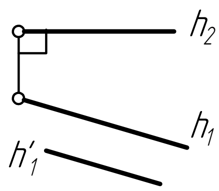
З а д а ч и   д л я   л и д е р о в

20Л



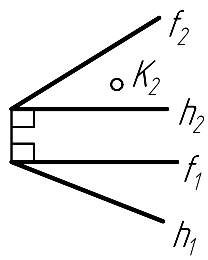
Найти горизонтальную проекцию прямой **a,** удалённой от точки **A** на расстояние **AB=40 мм.**
Точка **B** ближе к наблюдателю, чем точка **A.**

21Л



Найти фронтальную проекцию второй горизонтали, если расстояние между ними равно **25 мм,** горизонталь **h'_1** – нижняя.

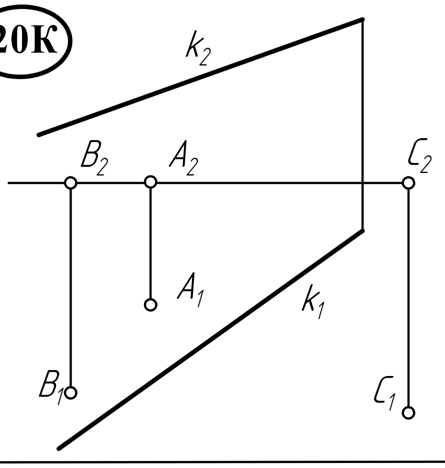
22Л



Построить проекции сферы **R=20 мм**, касательной плоскости **$\Gamma(f \cap h)$** в точке **K.**

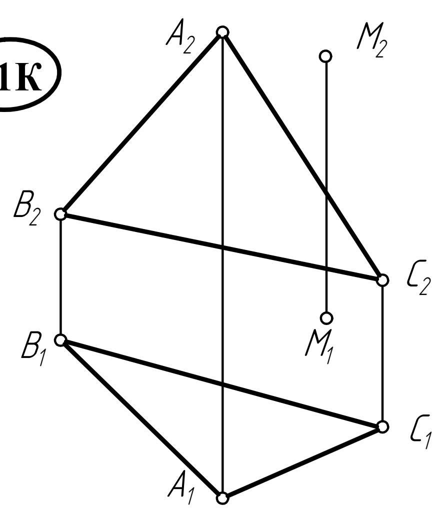
Задачки для самых крутых!

20К



Даны точки **A, B, C** и прямая **k.** Построить точку **$M \subset k$** так, чтобы сумма углов **MAB** и **MAC** была равной **180°.**

21К



Постройте точку **M′,** симметричную точке **M**относительно плоскости общего положения **Γ(ABC).**

§ 11. Способы преобразования чертежа

Все задачи курса можно разделить на **позиционные и метрические.** Рассматривая те и другие, приходим к выводу, что при **частном** расположении геометрических фигур решение их **упрощается.** Возникает вопрос: возможно ли получить удобные для решения задачи проекции при заданных неудобных исходных условиях? Оказывается, возможно. Существует несколько способов:

1) способ замены плоскостей проекций;

2) способ вращения вокруг проецирующих осей;

3) способ вращения вокруг прямых уровня;

4) способ плоскопараллельного перемещения.

СПОСОБ ЗАМЕНЫ ПЛОСКОСТЕЙ ПРОЕКЦИЙ

Сущность способа: фигура в пространстве неподвижна, меняется плоскость проекций, причём **взаимная перпендикулярность новой введённой и оставшейся плоскостей проекций никогда не нарушается.** Следовательно, в новой системе всегда сохраняется расстояние до оставшейся плоскости проекций.

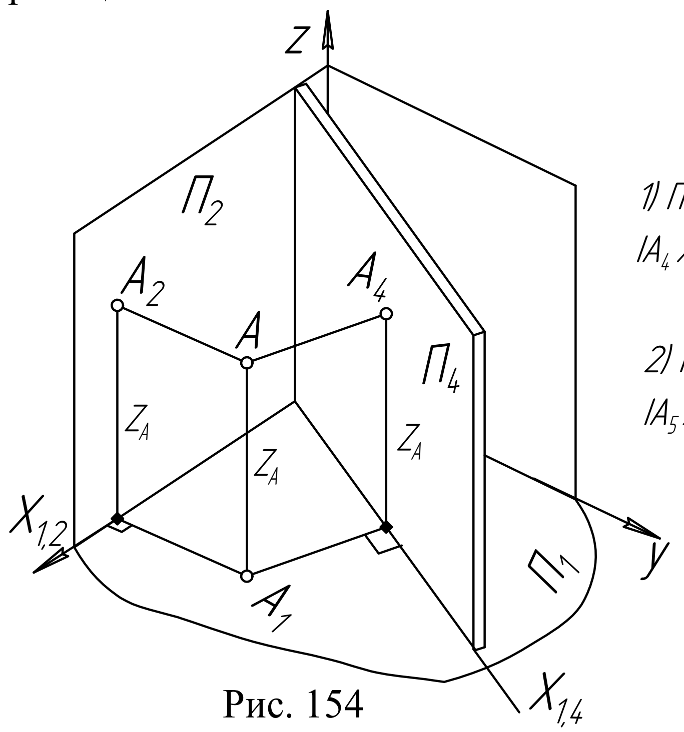


Рис. 154

1) $\Pi_1\Pi_2 \xrightarrow{\cancel{\Pi_2}} \Pi_1\Pi_4$

$|A_4X_{1,4}|=|X_{1,2}A_2|$

2) $\Pi_1\Pi_4 \xrightarrow{\cancel{\Pi_1}} \Pi_4\Pi_5$

$|A_5X_{4,5}|=|X_{1,4}A_1|$

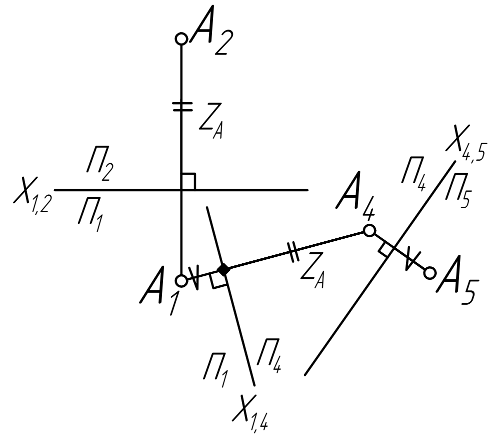


Рис. 155

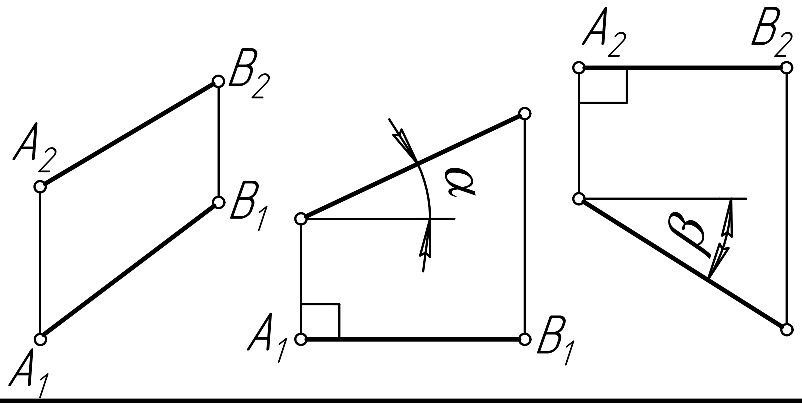
П О М Н И М ! 1. Проецирование ортогональное, поэтому линии связи всегда перпендикулярны осям.

2. Расстояние до данной плоскости проекций мы всегда видим на соседней плоскости от оси до проекции точки (***см. рис. 155)*** **$|A\Pi_1|=|A_2x_{12}|$, $|A\Pi_4|=|A_1x_{14}|$, $|A\Pi_5|=|A_4x_{45}|$.**

Способ замены, как все способы преобразования, служит для решения четырёх основных задач преобразования.

ЧЕТЫРЕ ЗАДАЧИ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

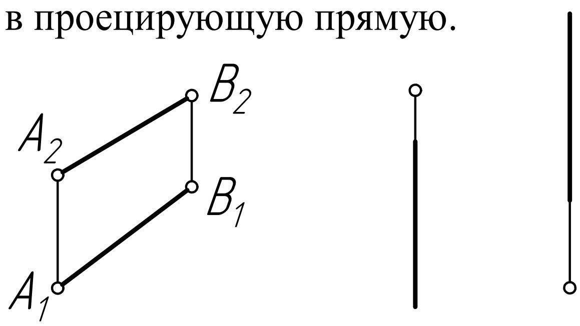
I. Прямую общего положения преобразуем в прямую уровня.



$$|AB| \rightarrow \begin{matrix} \alpha \rightarrow X_{1,4} \parallel (A_1B_1) \\ \beta \rightarrow X_{2,4} \parallel (A_2B_2) \end{matrix}$$

ОДНА ЗАМЕНА

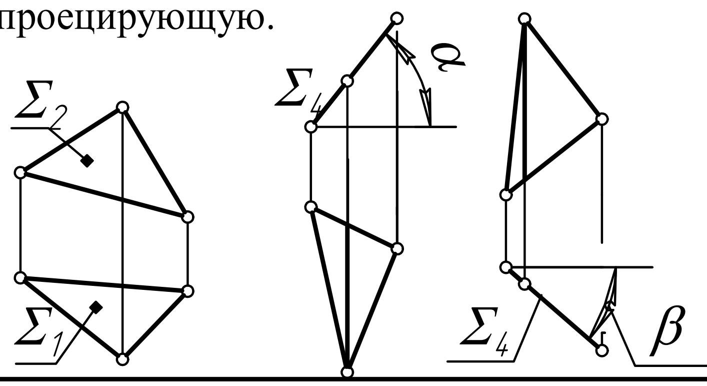
II. Прямую общего положения преобразуем в проецирующую прямую.



1–я задача + $X_{4,5} \perp A_4B_4$

ДВЕ ЗАМЕНЫ

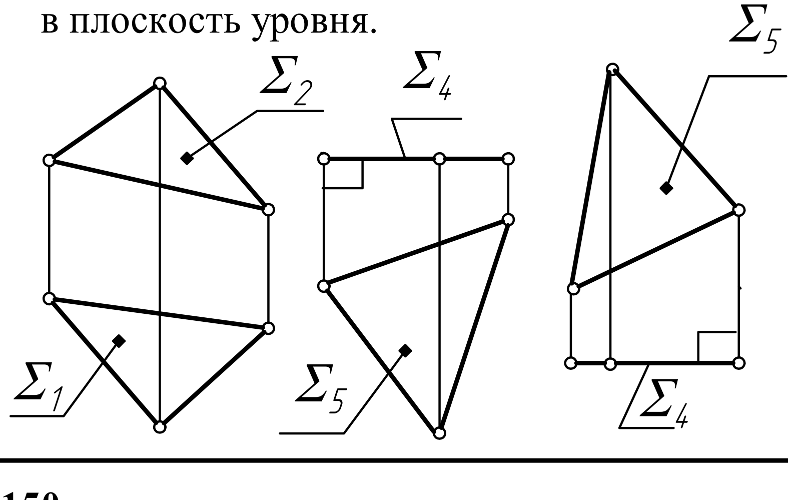
III. Плоскость общего положения преобразуем в проецирующую.



$$\Sigma \rightarrow \begin{matrix} \widehat{\Sigma\Pi_1} \rightarrow \alpha \rightarrow X_{1,4} \perp h_1 \\ \widehat{\Sigma\Pi_2} \rightarrow \beta \rightarrow X_{2,4} \perp f_2 \end{matrix}$$

ОДНА ЗАМЕНА

IV. Плоскость общего положения преобразуем в плоскость уровня.



3–я задача + $X_{4,5} \parallel \Sigma_4$

ДВЕ ЗАМЕНЫ

Решение задач преобразования способом замены плоскостей проекций

Для определения истинной длины отрезка в новой системе плоскостей проекций он должен расположиться параллельно введённой плоскости проекций, при этом не имеет значения, станет он фронталью или горизонталью. А вот для определения угла наклона к Π_1 он непременно должен стать фронталью. Именно поэтому заменяем фронтальную плоскость на новую Π_4, которую располагаем параллельно отрезку. На рис. 156 хорошо видно, какие координаты определят новую проекцию отрезка.

I, II...

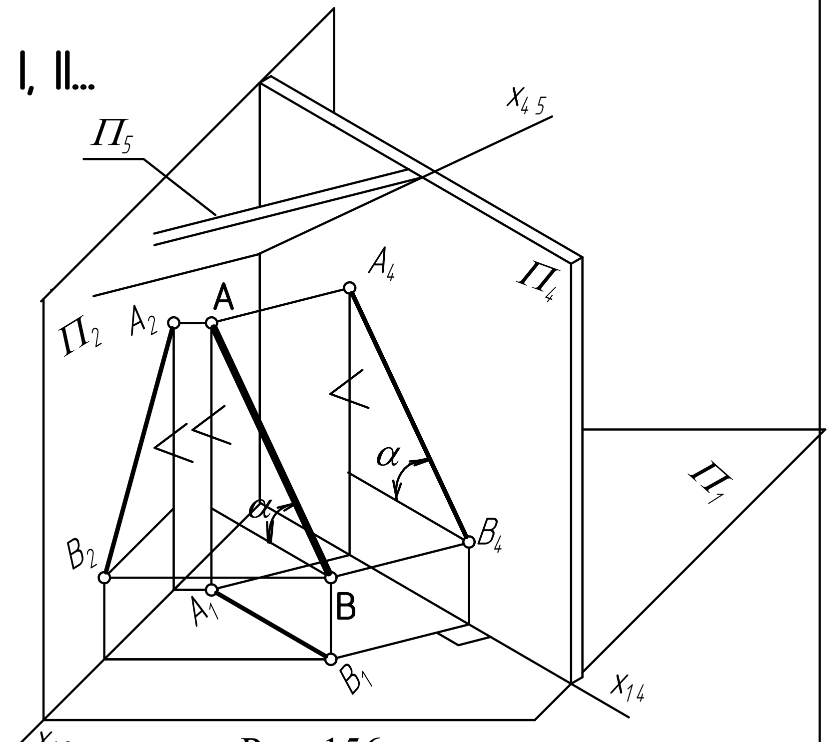
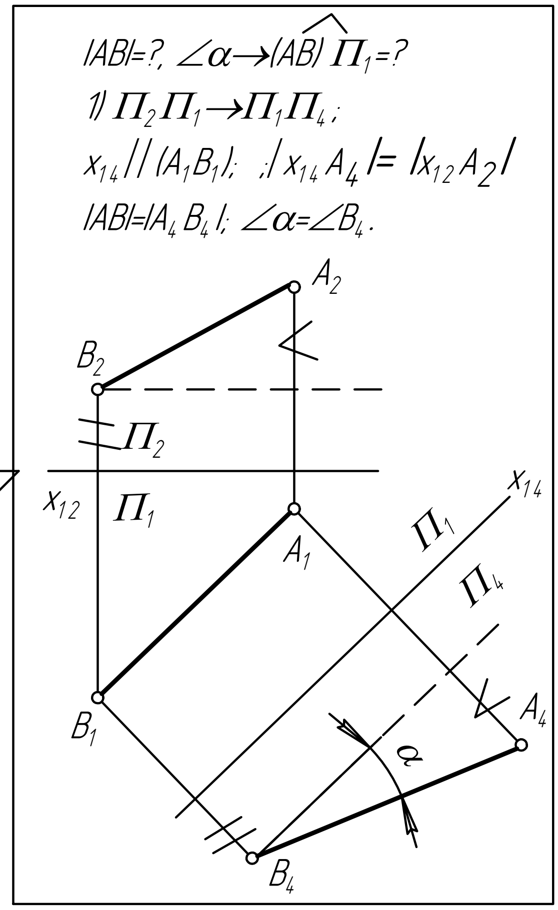


Рис. 156



Обратите внимание! Ось **ox** может быть задана рациональнее (*штриховая линия*). При решении второй задачи преобразования нужные расстояния (до Π_4) вы видите на Π_1 $|x_{14}A_1|$.

Рис. 157

III, IV...

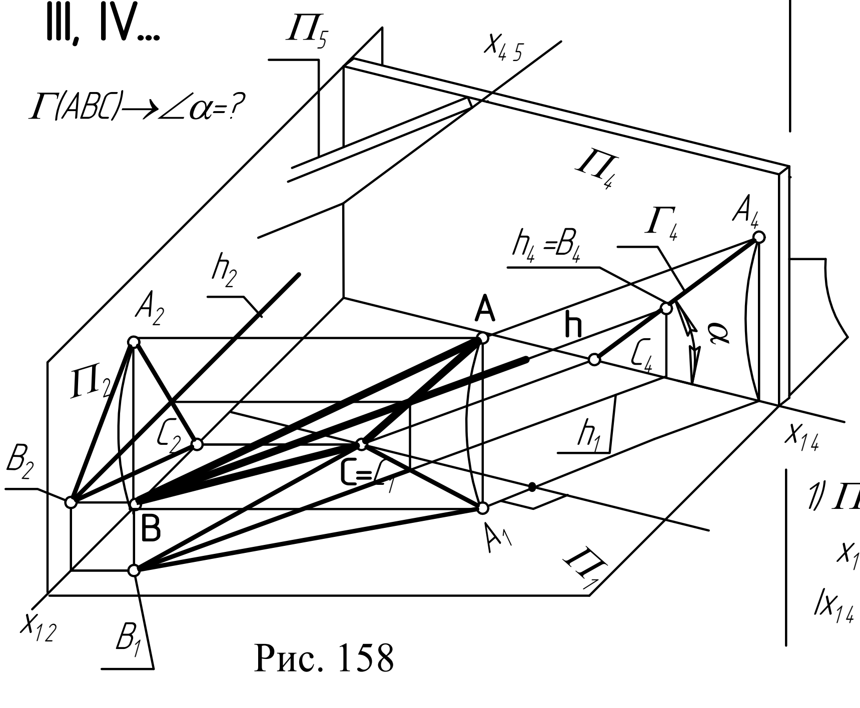


Рис. 158

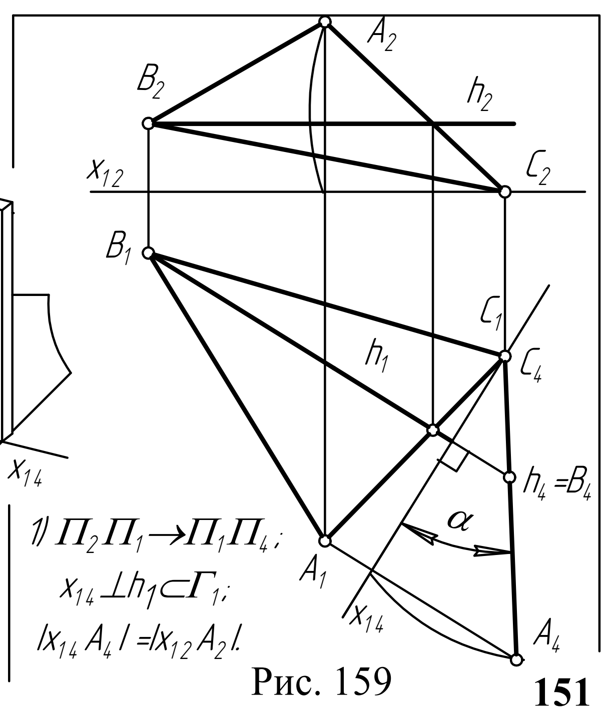
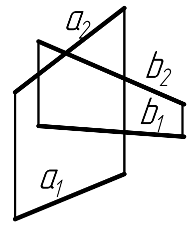


Рис. 159

Примеры решения задач с использованием преобразования
«Способ замены плоскостей проекций»

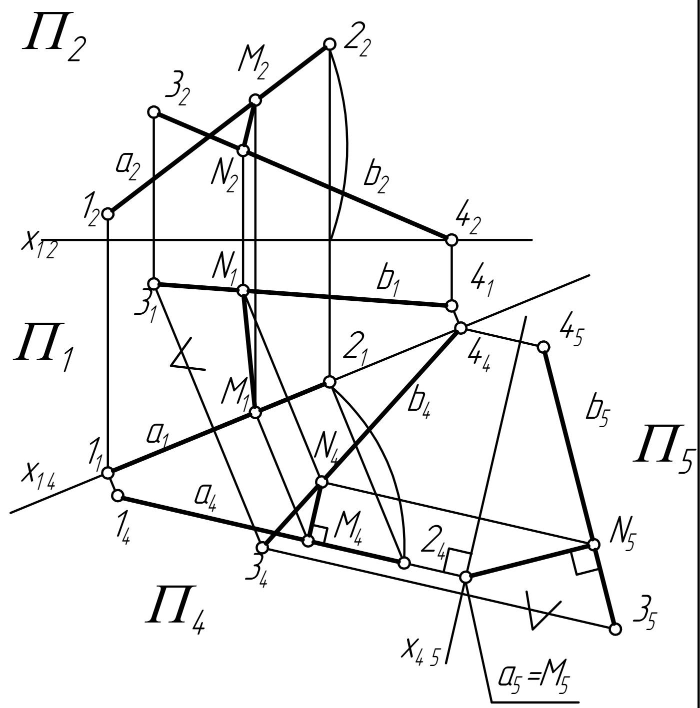
Пример 11.1

Определить расстояние между скрещивающимися прямыми. |**ab**|=?



Для нахождения искомого расстояния необходимо одну из прямых преобразовать в проецирующую. Выполняем две замены. Первую плоскость $\boldsymbol{\Pi_4}$ *вводим параллельно одной из прямых* ***(а),*** *соответственно на чертеже проводим ось параллельно одной из проекций выбранной прямой.*
В данном случае $\boldsymbol{x_{14} // a_1}$. *В новой системе плоскостей проекций прямая* ***a*** *стала прямой уровня (фронталью). При второй замене плоскость* $\boldsymbol{\Pi_5}$ *вводим перпендикулярно фронтали. На чертеже ось* $\boldsymbol{x_{45} \perp a_4}$. *Оси задаём рационально.*

Решение

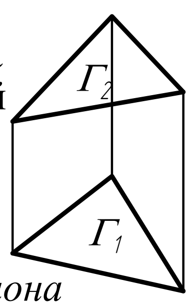


Алгоритм решения

1) $\Pi_2\Pi_1 \to \Pi_1\Pi_4$; $x_{14} // a_1$; $|x_{14} 2_4| = |x_{12} 2_2|$;
2) $\Pi_1\Pi_4 \to \Pi_4\Pi_5$; $x_{45} \perp a_4$; $|x_{45} 3_5| = |x_{14} 3_1|$.
$|M_5N_5| \perp b_5 \wedge |M_5N_5| = |ab| = 18$ мм.

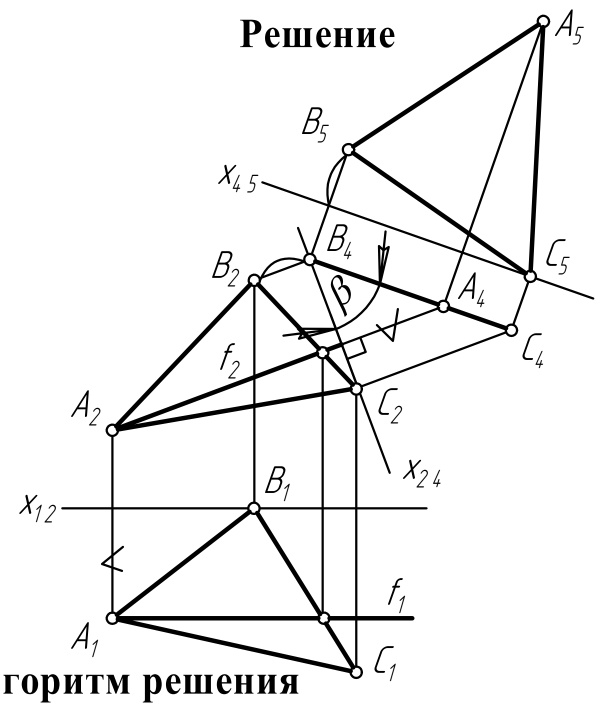
Пример 11.2

Определить угол наклона плоскости к фронтальной плоскости проекций и истинный вид фигуры.
Г(АВС)→н.в. ∧ ∠β=?



Для определения угла наклона к $\boldsymbol{\Pi_2}$ *достаточно одной замены. Вводим новую плоскость* $\boldsymbol{\Pi_4}$ *перпендикулярно фронтали (сохранив при этом* $\boldsymbol{\Pi_2}$*). Преобразовали плоскость в горизонтально проецирующую и определили угол наклона её к* $\boldsymbol{\Pi_2}$. *Вторую плоскость* $\boldsymbol{\Pi_5}$ *(*x_{45}*) задаём параллельно главной проекции плоскости* $\boldsymbol{\Gamma_4}$, *на* $\boldsymbol{\Pi_5}$ *получаем истинный вид треугольника.*

Решение



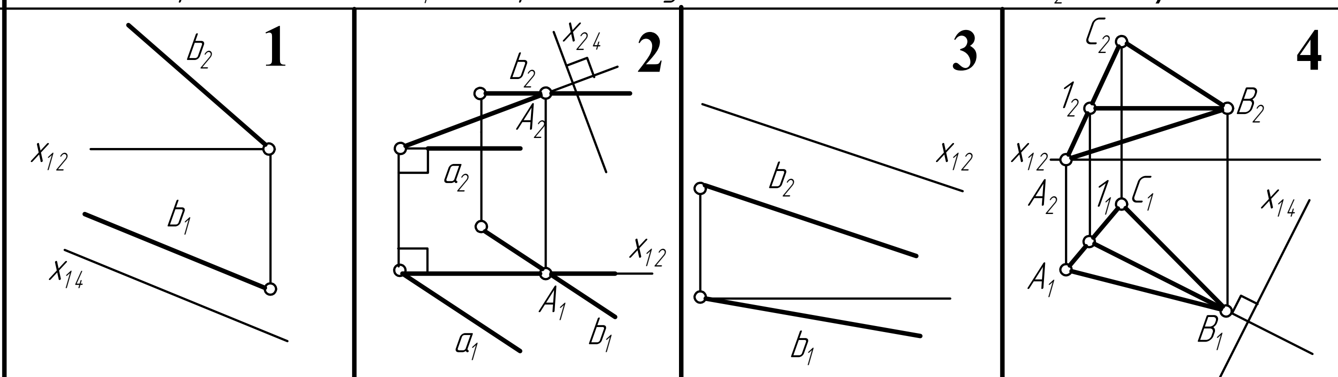
Алгоритм решения

1) $\Pi_2\Pi_1 \to \Pi_2\Pi_4$; $x_{24} \perp f_2 \subset \Gamma_2$; $|x_{24} A_4| = |x_{12} A_1|$.
2) $\Pi_2\Pi_4 \to \Pi_4\Pi_5$; $x_{45} // \Gamma_4 (A_4B_4C_4)$; $|x_{45} A_5| = |x_{24} A_2|$.
$\angle x_{24} B_4 A_4 C_4 = \angle\beta = 50°$; $\Gamma_5(A_5B_5C_5) \to$ н.в.

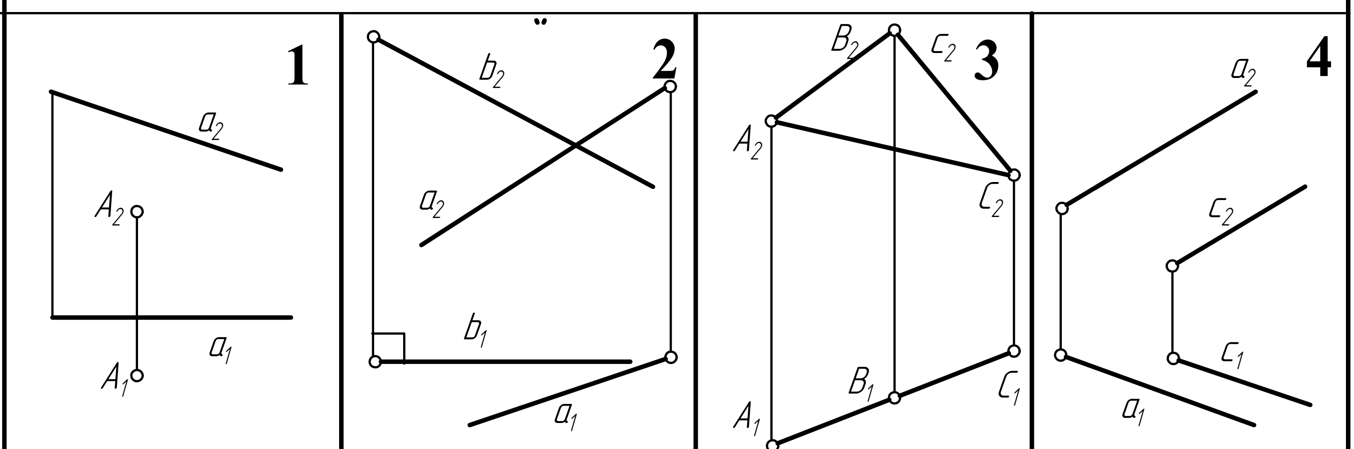
Проверьте себя!

Обучающий тест 11 по теме **«Способ замены плоскостей проекций»**

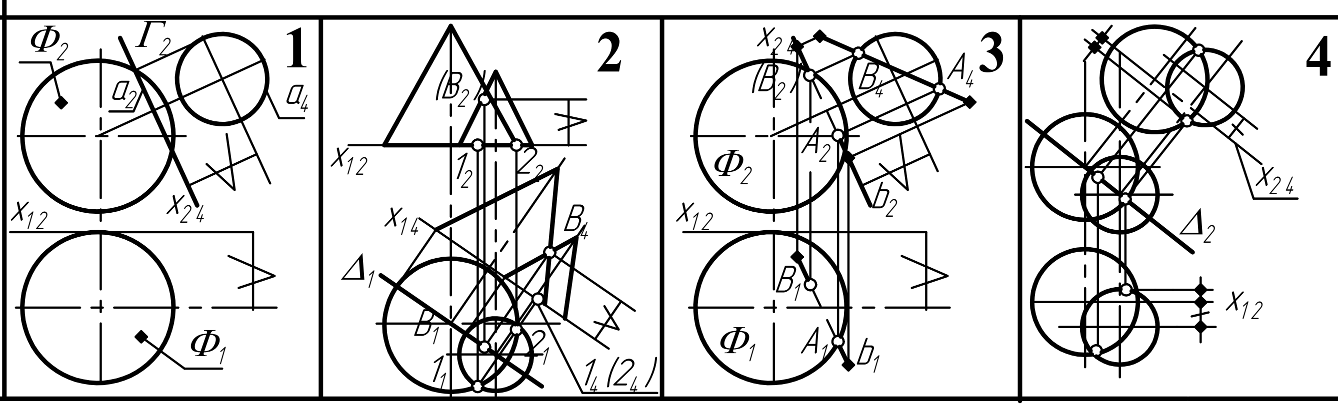
№ п/п	Вопрос	1	2	3	4
1	*В каком случае введена плоскость Π_4 для определения угла наклона прямой к Π_2?*				
2	*На каком чертеже заданная ось позволит определить угол наклона плоскости к Π_1 $\rightarrow(\angle\alpha)$?*				
3	*Где плоскость Π_4 введена для определения угла наклона прямой к Π_1?*				
4	*На каком чертеже введена Π_4 для определения угла наклона плоскости к Π_2 $\rightarrow(\angle\beta)$?*				



№ п/п	Вопрос	1	2	3	4
5	*Где расстояние между скрещивающимися прямыми определяется с помощью одной замены?*				
6	*На каком чертеже расстояние от точки до прямой определится одной заменой?*				
7	*Где для определения расстояния между параллельными прямыми требуется две замены?*				
8	*В каком случае для нахождения истинного вида плоской фигуры достаточно одной замены?*				



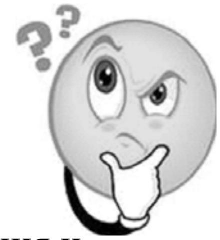
№ п/п	Вопрос	1	2	3	4
9	*В каком случае способом замены определены высшая и низшие точки линии пересечения?*				
10	*На каком чертеже определён истинный вид сечения проецирующей плоскостью?*				



Ответы: 3 4 1 2 2 1 4 3 2 1

Тренировка 11 по теме
«Способ замены плоскостей проекций»

На следующей странице – кадры с шестью правильно решёнными задачами с использованием способа замены плоскостей проекций. Расположите их в предлагаемой последовательности и вы прочтёте *фамилию автора одного из самых популярных учебников по начертательной геометрии. Написание этой книги позволило ему защитить докторскую диссертацию. Долгое время этот учёный возглавлял кафедру начертательной геометрии одного из московских вузов.*



<u>Найдите задачу:</u>

1) где построено расстояние от точки до плоскости общего положения и определён угол наклона плоскости к горизонтальной плоскости проекций (α);

2) где определено расстояние между параллельными прямыми двойной заменой;

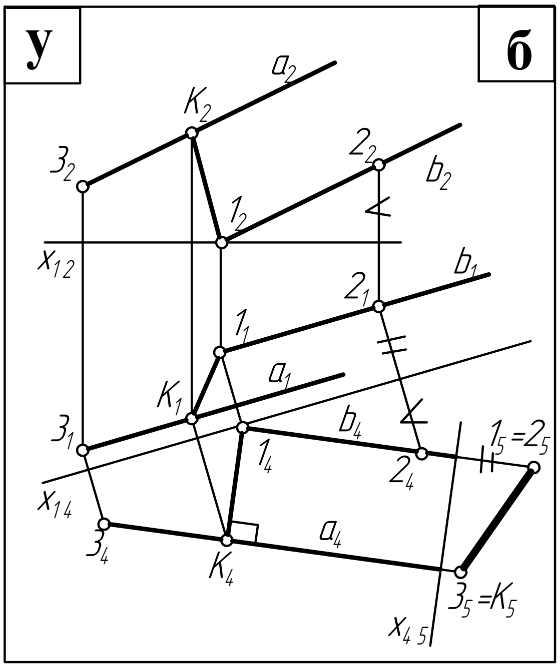
3) где определено расстояние между параллельными прямыми одной заменой;

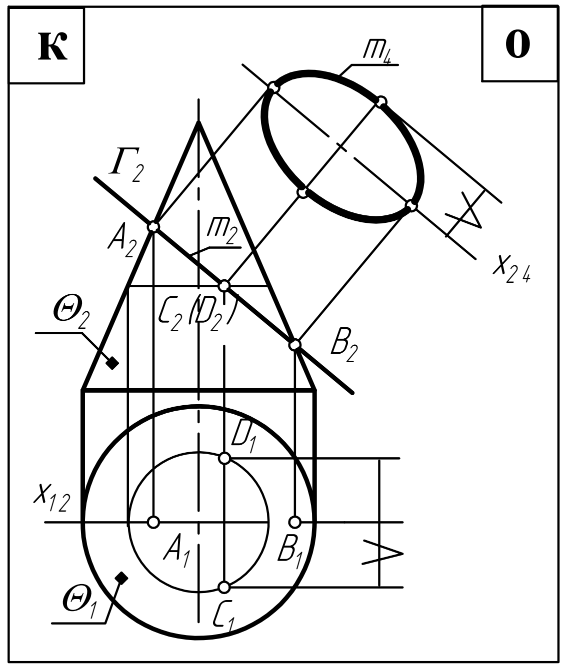
4) где построен истинный вид фигуры сечения горизонтально проецирующей плоскостью;

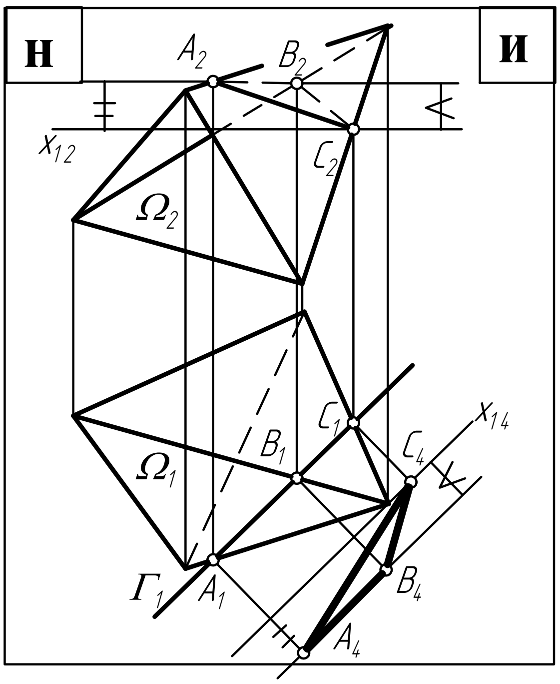
5) где выполнена натуральная величина сечения фронтально проецирующей плоскостью;

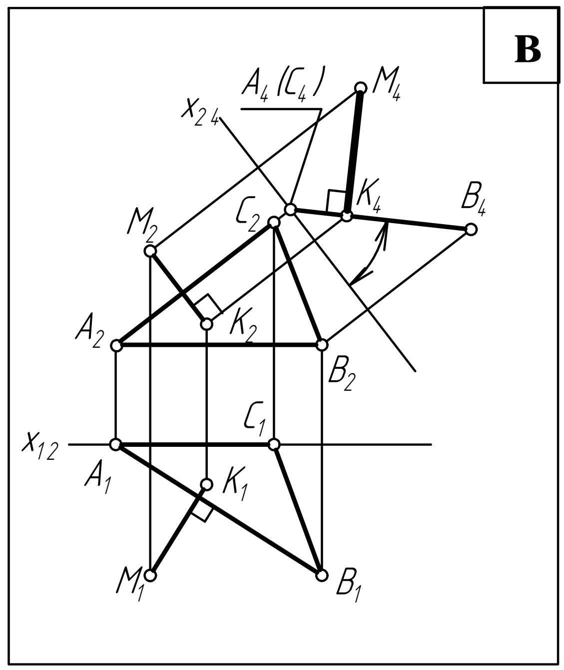
6) где найдено расстояние от точки до плоскости общего положения и определён её угол наклона к фронтальной плоскости проекций.

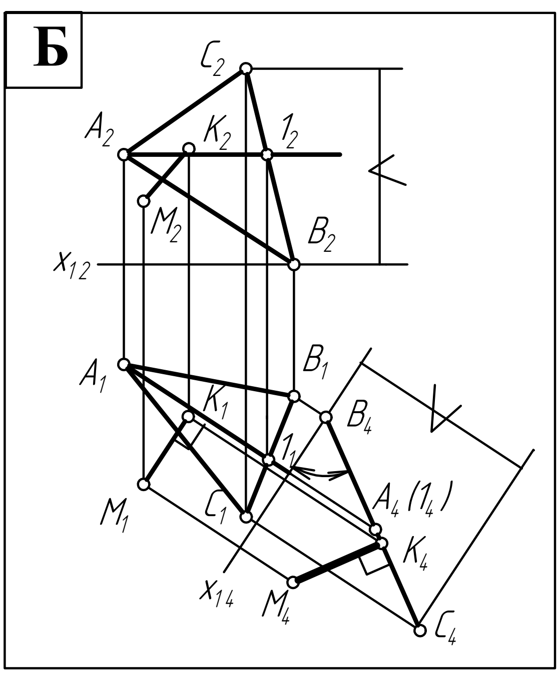
1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**

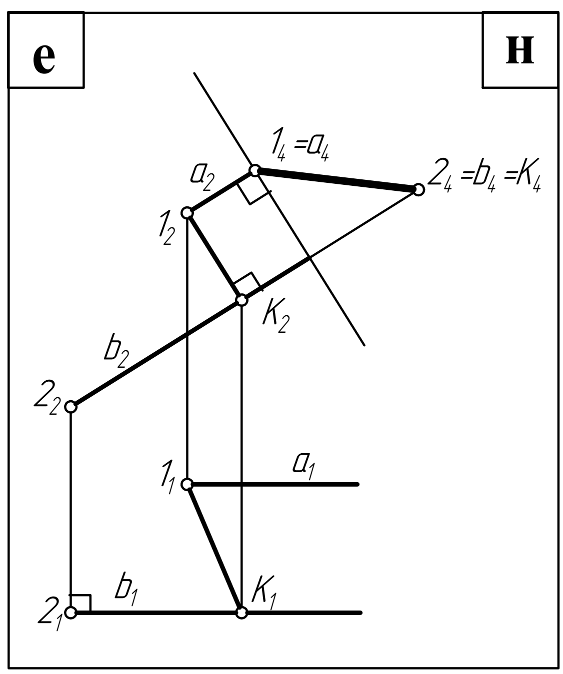

у
б
a_2
K_2
2_2
3_2
b_2
1_2
x_{12}
b_1
2_1
1_1
a_1
K_1
3_1
b_4
$1_5=2_5$
1_4
2_4
x_{14}
3_4
a_4
K_4
$3_5=K_5$
x_{45}


к
о
m_4
Γ_2
m_2
A_2
x_{24}
Θ_2
$C_2(D_2)$
B_2
D_1
x_{12}
A_1
B_1
Θ_1
C_1


н
и
A_2
B_2
x_{12}
C_2
Ω_2
C_1
x_{14}
B_1
C_4
Ω_1
B_4
Γ_1
A_1
A_4

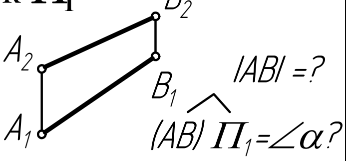
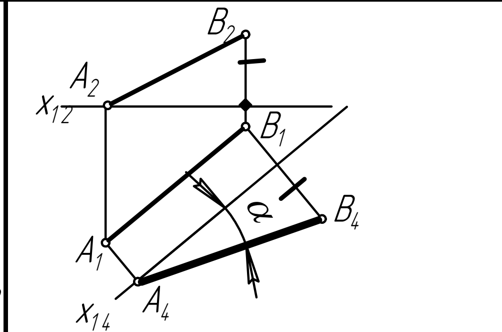
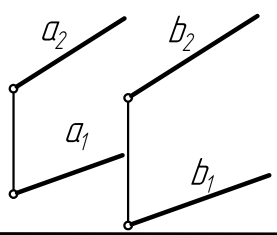
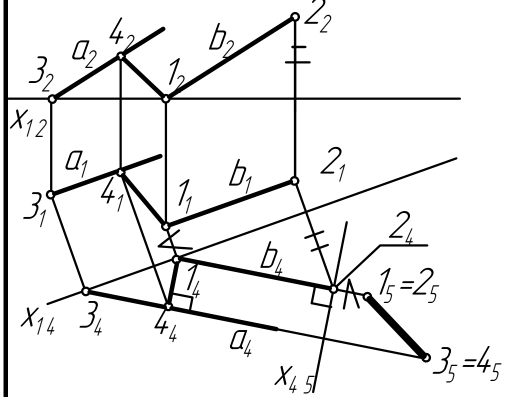
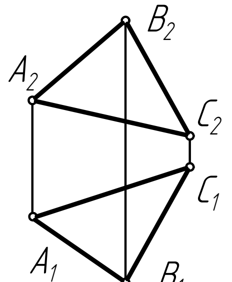
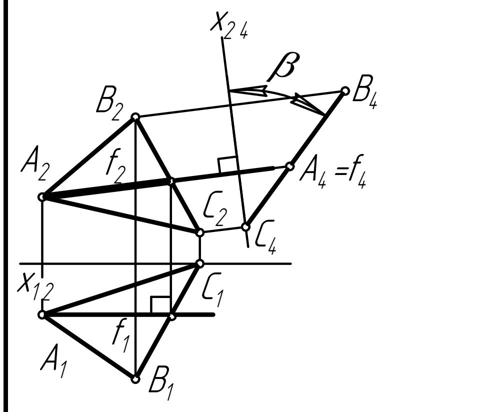
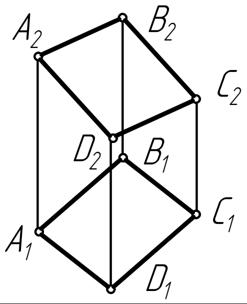
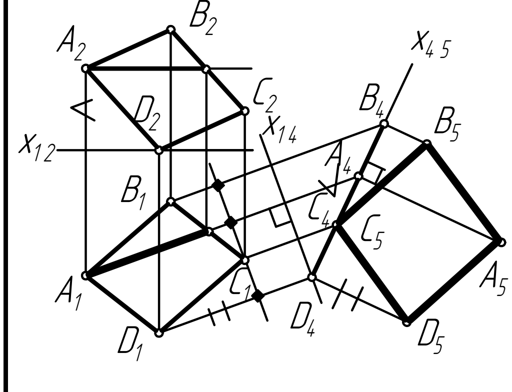

в
$A_4(C_4)$
M_4
x_{24}
K_4
B_4
M_2
C_2
K_2
A_2
B_2
C_1
x_{12}
A_1
K_1
M_1
B_1


Б
C_2
A_2
K_2
1_2
M_2
B_2
x_{12}
A_1
B_1
K_1
B_4
1_1
$A_4(1_4)$
M_1
C_1
K_4
x_{14}
M_4
C_4


е
н
$1_4=a_4$
a_2
$2_4=b_4=K_4$
1_2
K_2
b_2
2_2
1_1
a_1
b_1
K_1
2_1

Опорный конспект по теме
«Решение четырёх задач преобразования способом замены плоскостей проекций»

Канва 11

№ п/п	Исходное условие	Графическое решение	Алгоритм решения
1	Найти истинную длину отрезка |**AB**| и угол наклона его к $\mathbf{\Pi_1}$  $\|AB\| = ?$ $\widehat{(AB)\,\Pi_1} = \angle\alpha ?$		1) $\Pi_1\Pi_2 \to \Pi_1\Pi_4$ $x_{14} \parallel A_1B_1$ $\|x_{14}A_4\| = \|x_{12}A_2\|$ $\|A_4B_4\| = \|AB\| = 25$ мм $\angle\alpha = 20^\circ$
2	Определить расстояние между параллельными прямыми. $\|ab\| = ?$ 		1) $\Pi_2\Pi_1 \to \Pi_1\Pi_4$ $x_{14} \parallel a_1$ $\|x_{14}2_4\| = \|x_{12}2_2\|$ 2) $\Pi_1\Pi_4 \to \Pi_4\Pi_5$ $x_{45} \perp a_4$; $\|x_{45}2_5\| = \|x_{14}2_1\|$ $\|ab\| = 11$ мм
3	Определить угол наклона плоскости **Σ (ABC) к $\mathbf{\Pi_2}$** 		$\Pi_1\Pi_2 \to \Pi_2\Pi_4$ $x_{2,4} \perp f_2$ $\|x_{2,4}A_4\| = \|x_{1,2}A_1\|$ $\angle\beta = 43^\circ 15'$
4	Определить истинный вид плоской фигуры. 		1) $\Pi_2\Pi_1 \to \Pi_1\Pi_4$, $x_{14} \perp h_1$, $\|x_{14}A_4\| = \|x_{12}A_2\|$ 2) $\Pi_1\Pi_4 \to \Pi_4\Pi_5$ $x_{45} \parallel \|A_4B_4C_4D_4\|$ $\|x_{45}A_5\| = \|x_{14}A_1\|$ $\|A_5B_5C_5D_5\| = \|ABCD\|$

<u>В н и м а н и е !</u> 1. Ось **ох** всякий раз задаем с учетом удобства построений в последующей системе!

2. При определении угла сохраняется плоскость проекций, по отношению к которой он определяется.

Вопросы для самопроверки

1. Сущность способа замены плоскостей проекций.
2. Какие четыре задачи преобразования решаются в процессе преобразования чертежа?
3. Как всегда располагаются линии связи по отношению к оси проекций?
4. Возможно ли расстояние от точки до данной плоскости увидеть прямо на этой плоскости?

Внимание! *Итоговый тест* **11**

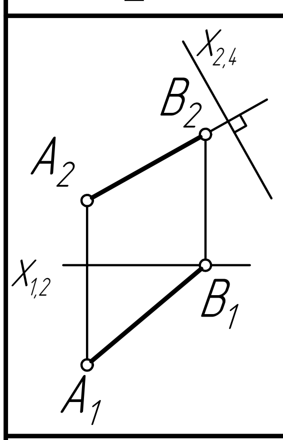
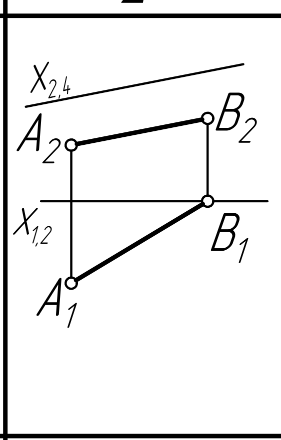
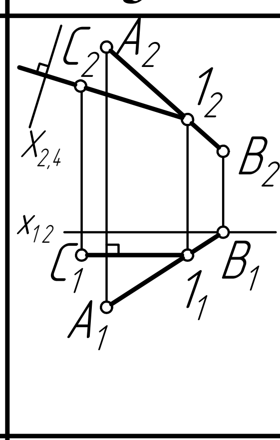
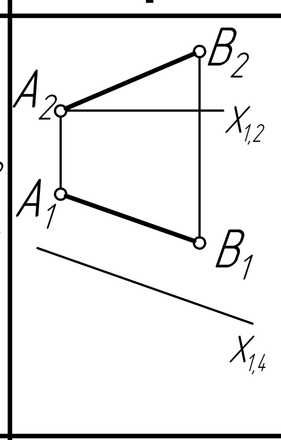
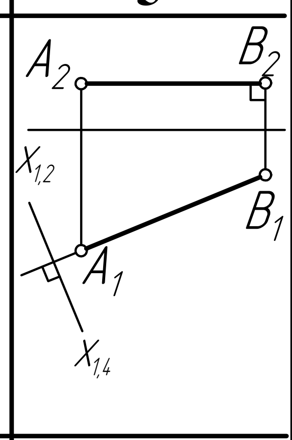
⊗ 1. На каком чертеже введена плоскость $\mathbf{\Pi_4}$ для определения угла наклона отрезка **AB** к $\mathbf{\Pi_1}$? $\mathbf{(\angle\alpha \to |AB|\ \Pi_1)}$

⦶ 2. На каком чертеже в результате замены будет определён $\mathbf{\angle\beta \to (AB)\ \Pi_2}$**?**

⊙ 3. На каком чертеже одной заменой возможно преобразование прямой в проецирующее положение?

○ 4. На каком чертеже для преобразования прямой в проецирующее положение ось задана неверно?

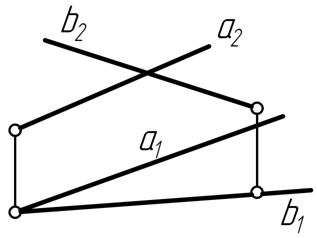
⊖ 5. На каком чертеже плоскость $\mathbf{\Pi_4}$ введена для определения угла наклона плоскости **Г(АВС)** к фронтальной плоскости проекций?

1	**2**	**3**	**4**	**5**
				
○	⦶	⊖	⊗	⊙

З А Н Я Т И Е   11

Способ замены плоскостей проекций

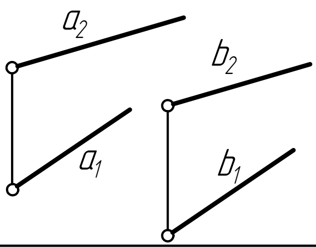
11.1



Определить расстояние между двумя скрещивающимися прямыми.

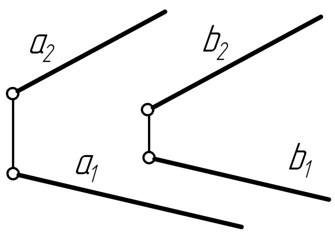
$(a \dot{-} b)$, $|ab| = ?$

11.2



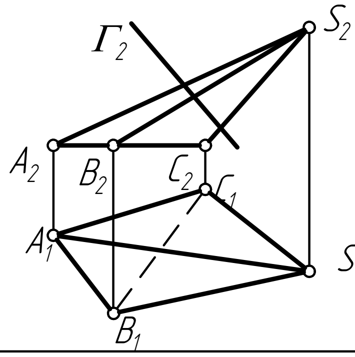
Определить расстояние между параллельными прямыми.
$(a \parallel b)$, $|a\,b| = ?$

11.3

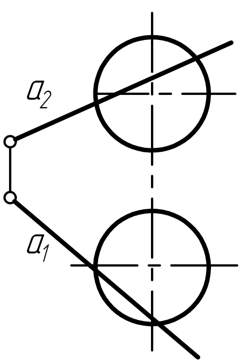


Пересечь параллельные прямые двумя прямыми так, чтобы получился квадрат.

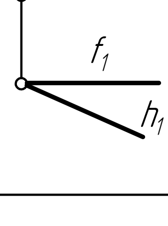
11.4 Определить истинный вид фигуры сечения плоскостью Г.



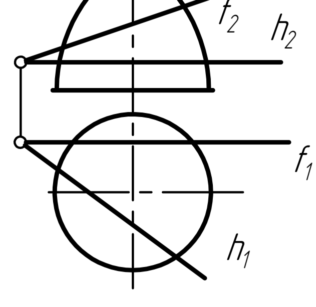
11.5 Найти точки пересечения прямой со сферой.



11.6 Определить угол наклона плоскости **$\Sigma(f \cap h)$** **к Π_2. $\angle\ \beta = ?$**

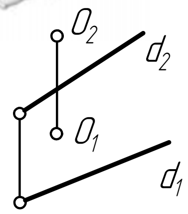


11.7 Построить линию пересечения плоскости **$\Gamma(f \cap h)$** с поверхностью тора.



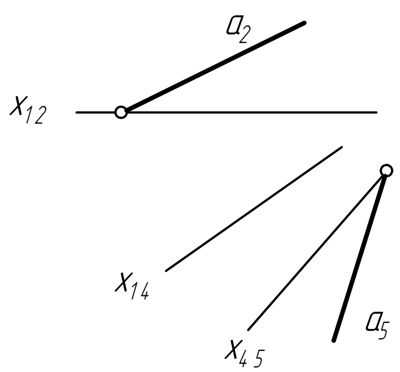
Задачи для лидеров

23Л

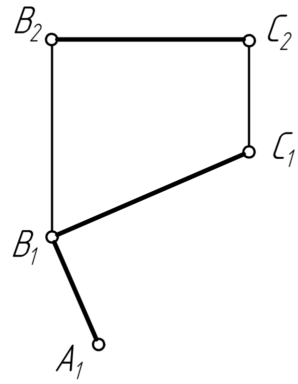


Описать из точки **O** сферу, отсекающую на прямой **d** отрезок длиной **30 мм.**

24Л Найти $\mathbf{a_1}$ и $\mathbf{a_4}$.

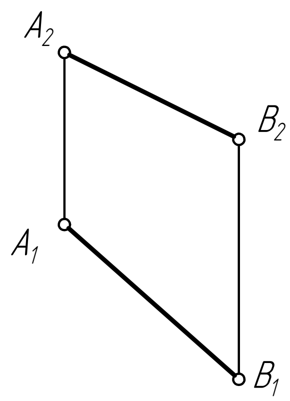


25Л Достроить куб **ABCDA′B′C′D′**, если **BC** – его нижнее ребро



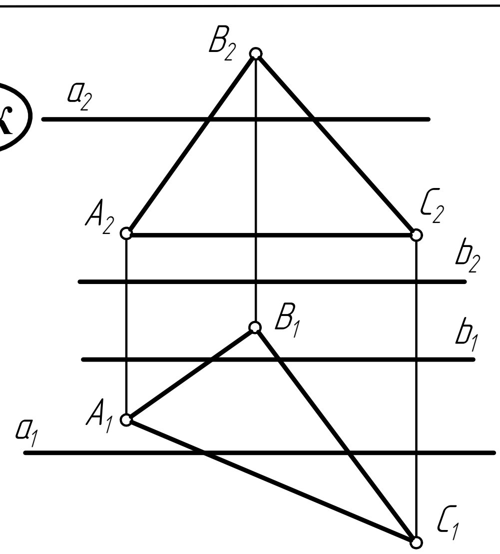
Задачки для самых крутых!

22К



Достроить равносторонний треугольник **ABC**, наклонённый к плоскости проекций $\mathbf{\Pi_1}$ под углом **30°**.

23К



Шар радиусом **R=20 мм** катится (под собственным весом) по плоскости **Σ(ABC)** и проходит через точку **B.** Найти центр шара в момент его касания плоскости **Г(a || b).**

§ 12. Способ вращения вокруг проецирующих осей и прямых уровня

<u>Сущность способа</u>: плоскости проекций неподвижны, вращается геометрическая фигура, при этом каждая точка движется по окружности в плоскости, перпендикулярной оси вращения. Следовательно, проекция траектории движения точки на плоскости, перпендикулярной оси, – всегда **<u>д у г а</u>** окружности радиуса от проекции оси до данной проекции точки, другая проекция траектории движения точки – **<u>п р я м а я</u>**, перпендикулярная проекции оси вращения.

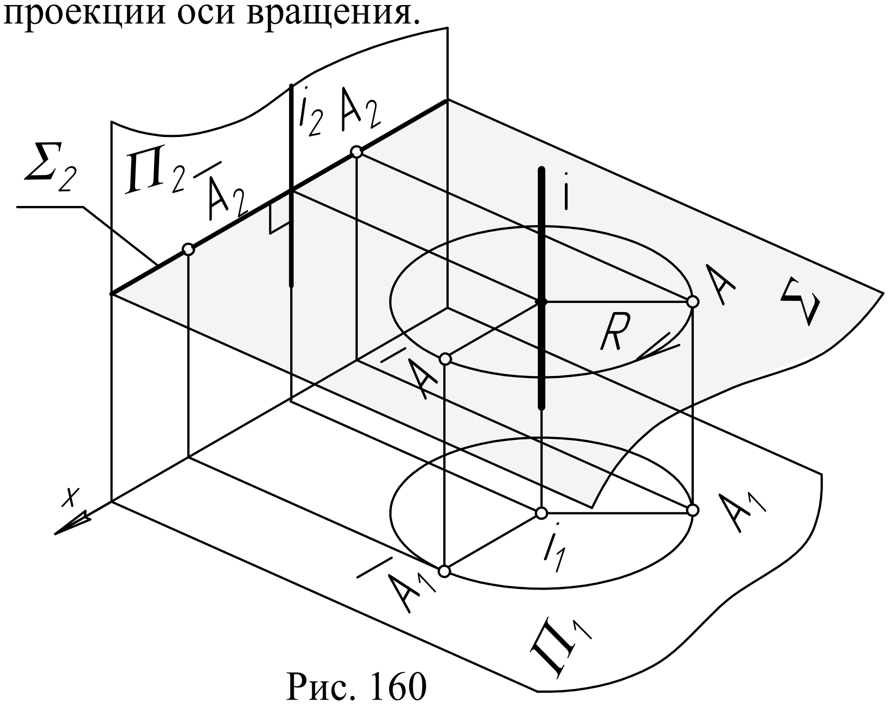


Рис. 160

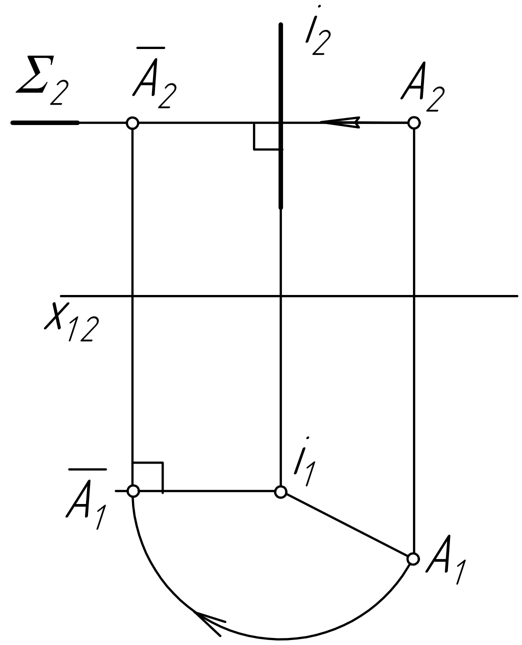


Рис. 161

Повернуть точку **А** вокруг оси **i** до одинакового уровня с осью от $\mathbf{\Pi_2}$.

1) $A \to \bar{A}_1 \to R\,|i_1A_1|$

2) $A_2 \to \bar{A}_2 \subset \Sigma_2 \perp i_2$

В н и м а н и е !

Определив характер движения точки относительно каждой из плоскостей проекций, легко осуществить перемещение любой геометрической фигуры относительно проецирующей оси. При этом помним основные

п р а в и л а:

1) **точки, принадлежащие оси, остаются неподвижными;**
2) **плоскости вращения остальных точек обязательно перпендикулярны оси вращения;**
3) **на плоскости проекций, перпендикулярной оси вращения, проекция перемещающейся фигуры не изменяется;**
4) **все вращающиеся точки поворачиваются в одну сторону и на один и тот же угол;**
5) **угол поворота оригинала всегда равен углу поворота его проекции.**

ВРАЩЕНИЕ ВОКРУГ ПРЯМЫХ УРОВНЯ

Четвёртая задача преобразования значительно рациональнее решается этим способом. Рассмотрим способ на примере точки.

Повернуть точку А вокруг горизонтали до уровня самой горизонтали.

Сущность способа:

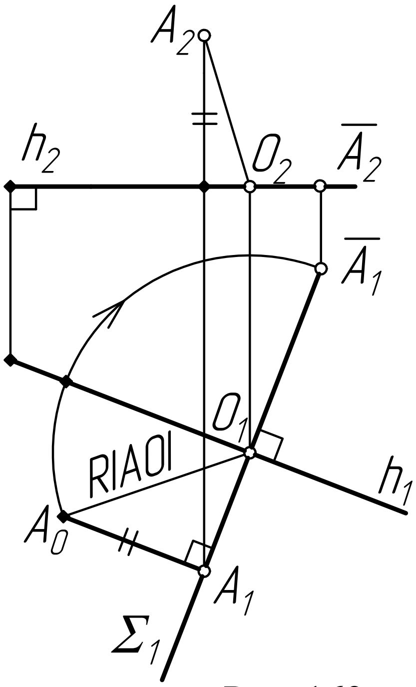


Рис. 162

а) точка при вращении движется по окружности в плоскости, перпендикулярной оси вращения;

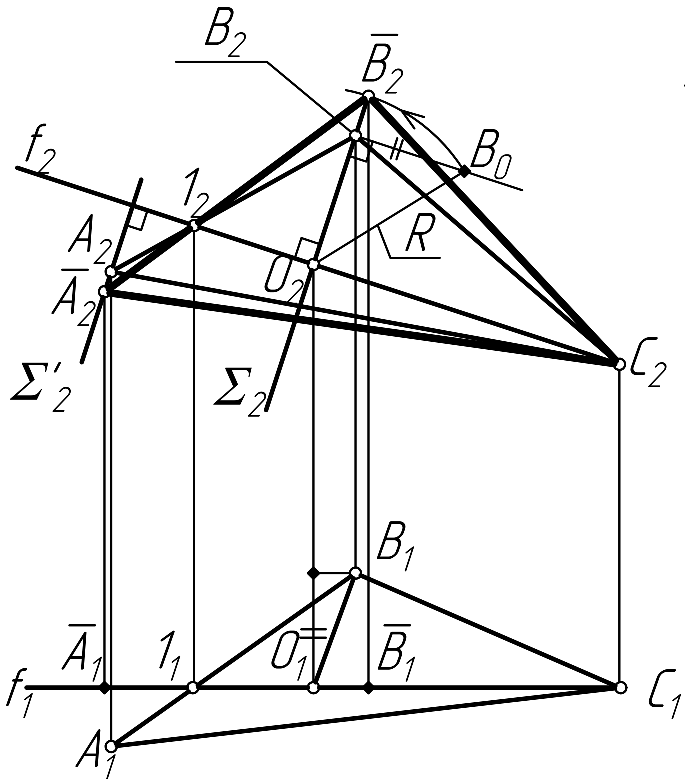
б) при вращении вокруг горизонтали эта плоскость проецируется в виде прямой, перпендикулярной горизонтальной проекции горизонтали, и в виде прямой, перпендикулярной $\mathbf{f_2}$, при вращении вокруг фронтали;

в) при пересечении этой прямой с осью вращения получим одну из проекций центра окружности вращения, достроив по принадлежности оси вращения недостающую его проекцию, получим проекции радиуса окружности вращения;

г) далее задача сводится к отысканию натуральной величины этого радиуса.

З А П О М Н И Т Е ! Новая проекция точки обязательно принадлежит главной проекции плоскости вращения этой точки.

Пример решения задачи с использованием способа «Вращение вокруг прямой уровня»



Определить истинный вид треугольника **(АВС)** вращением вокруг фронтали.

Алгоритм решения

1) $1 \subset f \subset (ABC)$, $f_1 \perp$ л.с.

$f_1(1_1C_1) \wedge f_2(1_2C_2)$;

2) $B_2 \to \bar{B}_2 \subset \Sigma_2 \perp f_2$

$\Sigma_2 \cap f_2 = O_2$; $O_1 \subset f_1$;

3) $R|BO| = |O_2B_0|$

4) $|O_2\bar{B}_2| = |O_2B_0|$

5) $(\bar{B}_2 1_2) \cap \Sigma'_2 = \bar{A}_2$

Способ вращения вокруг проецирующих осей без указания на чертеже осей вращения (способ плоскопараллельного перемещения)

В основе этого способа лежат два основных правила, присущие вращению вокруг проецирующих осей:

1) на плоскости, перпендикулярной оси вращения, **проекция геометрической фигуры не изменяется;**
2) проекции траекторий движения точек на другой плоскости – **прямые, параллельные оси.**

Решим **первую и вторую** задачи преобразования указанным способом. Требуется определить истинную длину отрезка общего положения и его угол наклона к фронтальной плоскости проекций, далее преобразовать его в проецирующую прямую.

Решение

Для определения угла наклона к Π_2 прямая должна стать горизонталью. Фронтальная проекция отрезка не изменяется и параллельна оси. На Π_1 проекции точек движутся по прямым, параллельным оси.

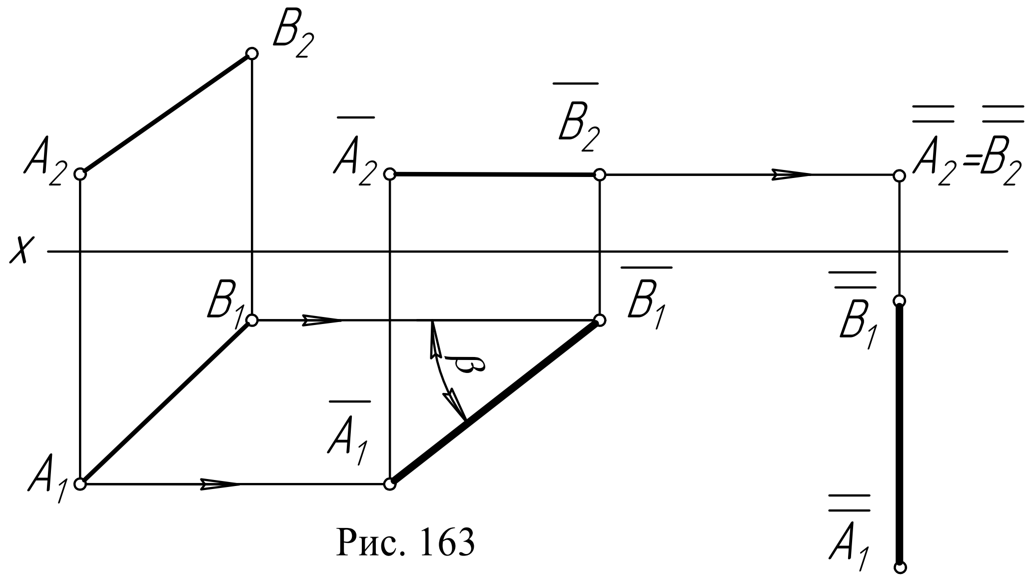


Рис. 163

Для преобразования прямой в проецирующую новую горизонтальную проекцию горизонтали переводим в положение, перпендикулярное оси.

Решение третьей и четвёртой задач преобразования плоскопараллельным движением

$\Sigma(ABC) \to \angle\alpha\,?\ (ABC) \to$ н.в.?

Алгоритм решения

1) $A \subset h\ (A1) \subset \Sigma$;
2) $\overline{h}_1 \perp ox$, $(A_1C_1B_1) = (\overline{A}_1\overline{C}_1\overline{B}_1)$; $A_2 \to \overline{A}_2 \subset l \parallel ox$,
3) $(\overline{\overline{B}}_2\overline{\overline{A}}_2\overline{\overline{C}}_2) \parallel ox$, $(\overline{\overline{B}}_2\overline{\overline{A}}_2\overline{\overline{C}}_2) = (\overline{B}_2\overline{A}_2\overline{C}_2)$, $\overline{A}_1 \to \overline{\overline{A}}_1 \subset l \parallel ox$.

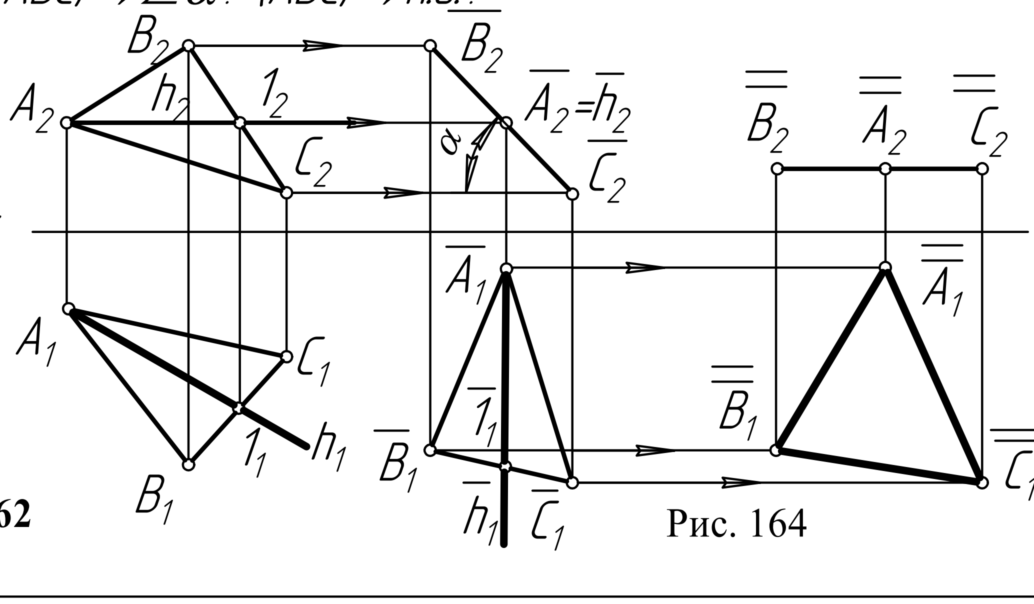
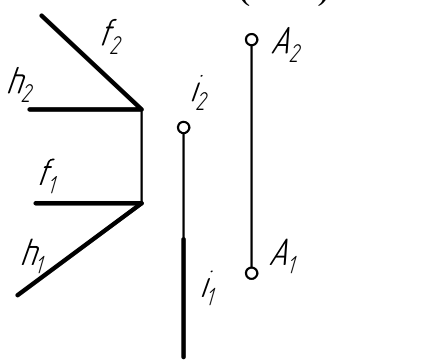


Рис. 164

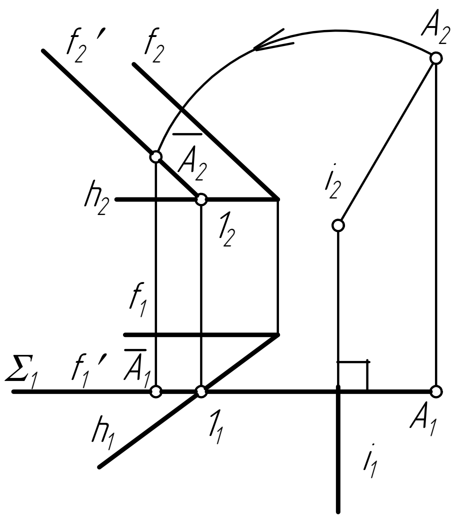
Примеры решения задач с использованием преобразования
«Вращение вокруг проецирующих осей»

Пример 12.1

Вращением вокруг оси **i** совместить точку **A** с плоскостью **Г(f⌒h).**



Решение



Ось перпендикулярна $\boldsymbol{\Pi_2}$*, следовательно, точка вращается во фронтальной плоскости уровня. Горизонтальная проекция траектории движения – прямая, перпендикулярная* $\boldsymbol{i_1}$ $(\boldsymbol{\Sigma_1})$*. Плоскость* $\boldsymbol{\Sigma(\Sigma_1)}$ *пересекается с исходной плоскостью* $\boldsymbol{\Gamma}$ *по фронтали* $\boldsymbol{f'}$*. На* $\boldsymbol{\Pi_2}$ *проекция траектории движения точки – дуга окружности* $\boldsymbol{R|i_2A_2|}$*. При пересечении дуги с построенной проекцией фронтали получим искомую проекцию точки.*

Алгоритм решения

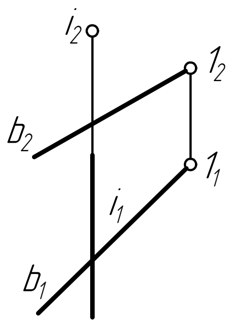
1) $A_1 \to \overline{A}_1 \subset \Sigma_1 \perp i_1;\ \ \Sigma_1 \cap \Gamma_1 = f_1' // f_1,$

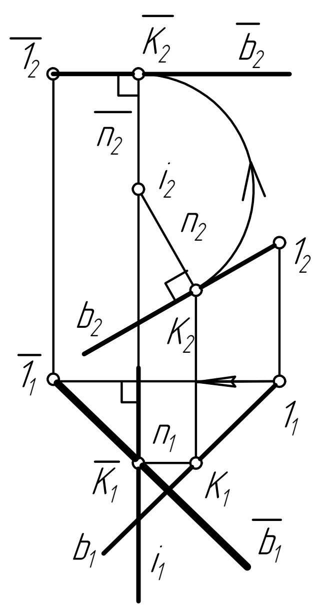
$\Sigma_1 \cap h_1 = 1_1,\ 1_2 \subset h_2,\ \ 1_2 \subset f_2' // f_2.;$

2) $A_2 \to \overline{A}_2 \to R|i_2A_2| \cap f_2' = \overline{A}_2.$

Пример 12.2

Вращением вокруг оси **i** преобразовать прямую **b** в горизонталь.





Решение

Прямая, перпендикулярная фронтально проецирующей оси, параллельна $\boldsymbol{\Pi_2}$*. Следовательно, на* $\boldsymbol{\Pi_2}$ *можем задать проекцию нормали к фронтальной проекции прямой. Повернув нормаль в горизонтально проецирующее положение, получим горизонтальное расположение прямой. На* $\boldsymbol{\Pi_1}$ *проекции точек движутся по прямым, перпендикулярным проекции оси.*

Алгоритм решения

1) $i_2 \subset n_2 \perp b_2,\ n_2 \cap b_2 = K_2,\ K_1 \subset b_1;$

2) $n_2 \to \overline{n}_2 \perp ox,\ \overline{K}_2\overline{1}_2 = K_2 1_2;$

3) $1_1 \to \overline{1}_1 \subset \Sigma_1 \perp i_1,\ \ K_1 \to \overline{K}_1;$

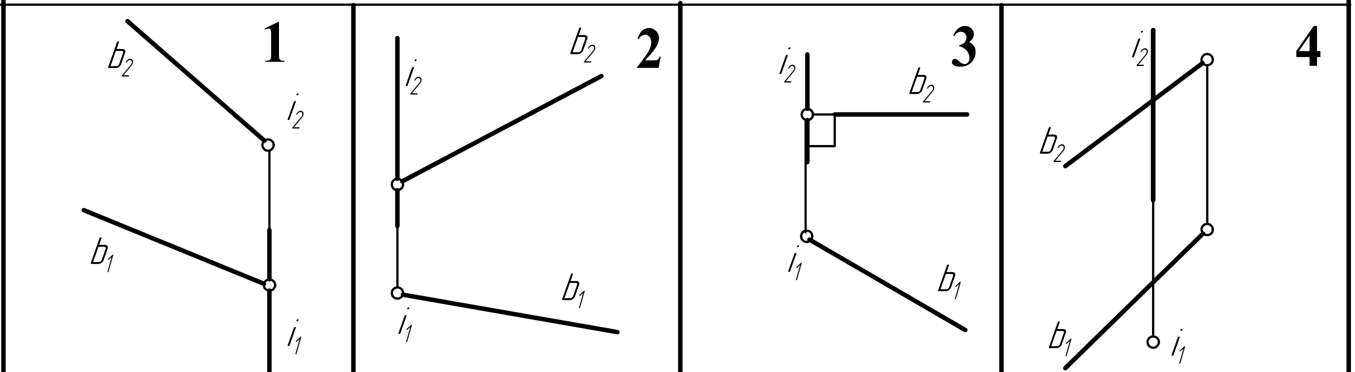
4) $\overline{b}_1\ (\overline{1}_1\overline{K}_1).$

Проверьте себя!

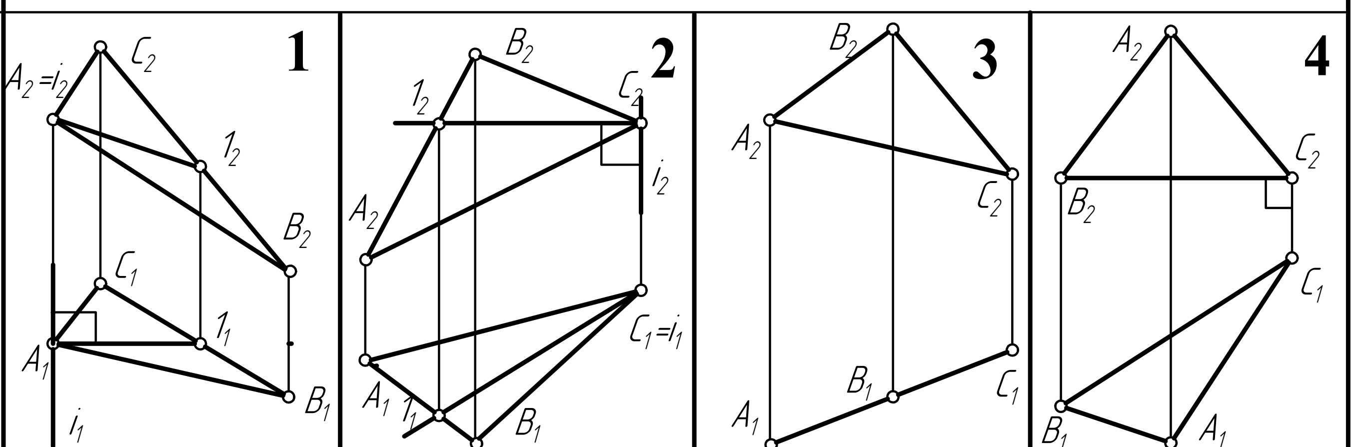
Обучающий тест 12 по теме

«Способ вращения вокруг проецирующих осей и прямых уровня»

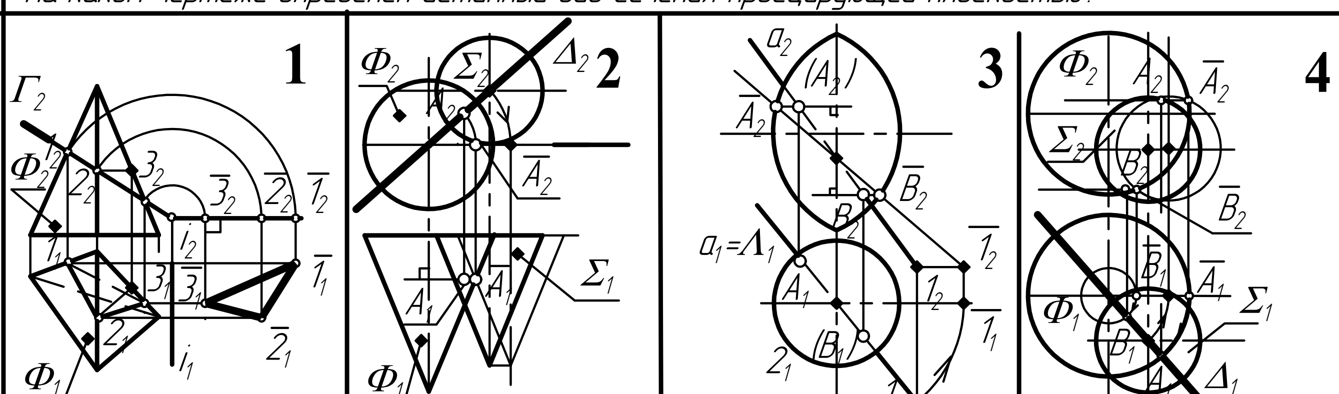
№ п/п	Вопрос	1	2	3	4
1	В каком случае для преобразования прямой общего пол. в прямую уровня необходима нормаль?				
2	На каком чертеже заданная ось позволит преобразовать прямую общего пол. в горизонталь?				
3	Где вращением вокруг оси прямую общего пол. можно перевести в положение фронтали?				
4	На каком чертеже одним вращением прямую возможно преобразовать в проецирующую?				



№ п/п	Вопрос
5	Где одним вращением вокруг проецирующей оси определяется истинный вид фигуры?
6	На каком чертеже одним вращением можно определить угол наклона $\beta \to \Gamma$(ABC) к Π_2?
7	Где выполнены начальные построения для определения угла наклона плоскости Γ(ABC) к Π_1?
8	Где вращением вокруг одной из сторон треугольника определяется его истинный вид?



№ п/п	Вопрос
9	В каком случае способом вращения определены высшая и низшая точки линии пересечения?
10	На каком чертеже определён истинный вид сечения проецирующей плоскостью?



Ответы: 1 4 4 2 1 3 3 2 1 4

Терпение
и труд
всё
перетрут!

Неужели
не смогу?

Тренировка 12 по теме
«Способ вращения вокруг проецирующих прямых»

На следующей странице представлены кадры с восемью правильно решёнными задачами с использованием способа вращения вокруг проецирующих осей. Расположив их в предлагаемой последовательности, вы познакомитесь *с профессором, автором многих учебных книг по начертательной геометрии и инженерной графике, работающим над проблемами автоматизации конструирования, формообразования и измерения сложных пространственных поверхностей. В нижней строке выстроенных кадров − количество опубликованных им трудов.*

1. В каком случае определён угол наклона прямой к горизонтальной плоскости проекций (α)?

2. На каком чертеже определён угол наклона прямой к фронтальной плоскости проекций (β)?

3. Где истинный вид фигуры сечения определён вращением вокруг фронтально проецирующей оси?

4. На каком чертеже истинный вид фигуры сечения определён вращением вокруг горизонтально проецирующей оси?

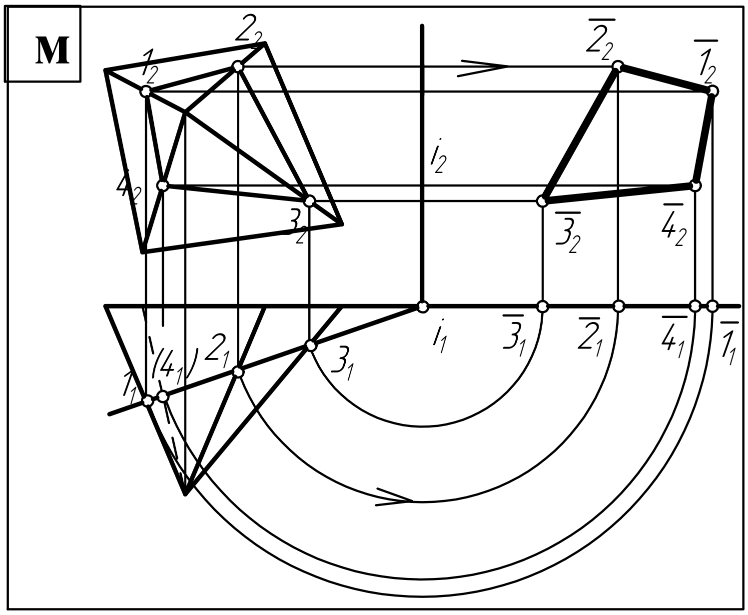
5. В каком случае определён угол наклона плоскости к горизонтальной плоскости проекций (α)?

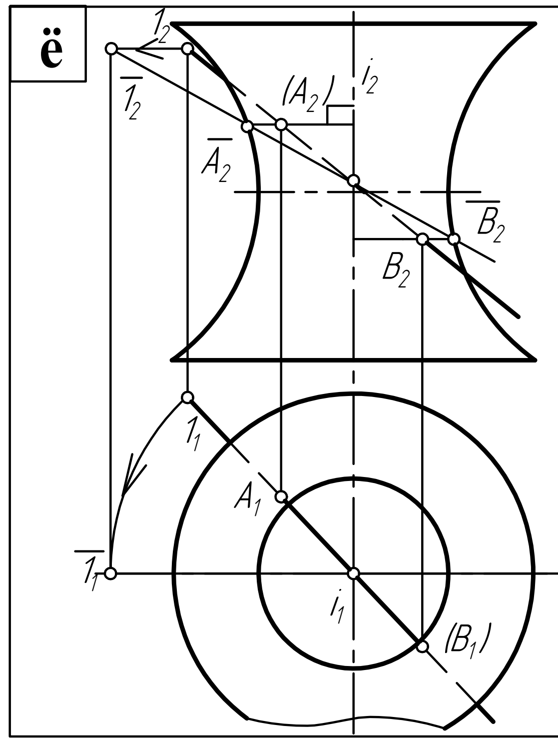
6. На каком чертеже определён угол наклона плоскости к фронтальной плоскости проекций?

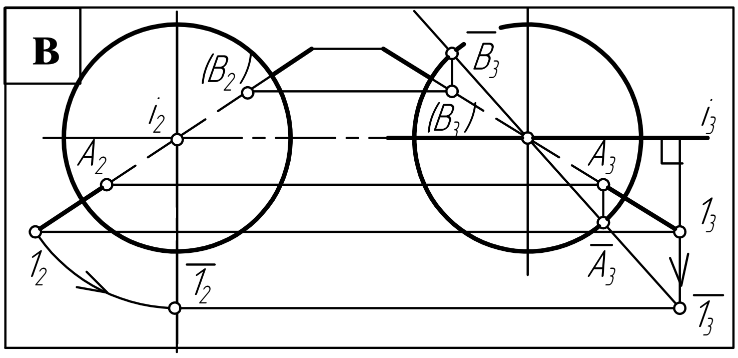
7. Где пересечение прямой с поверхностью определено с использованием вращения вокруг горизонтально проецирующей оси?

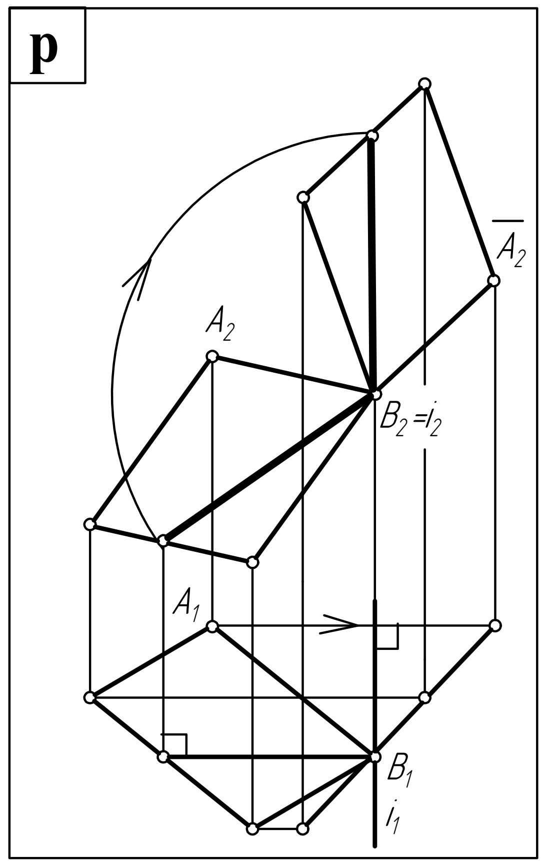
8. В каком случае пересечение прямой с поверхностью определено с использованием способа вращения вокруг фронтально проецирующей оси?

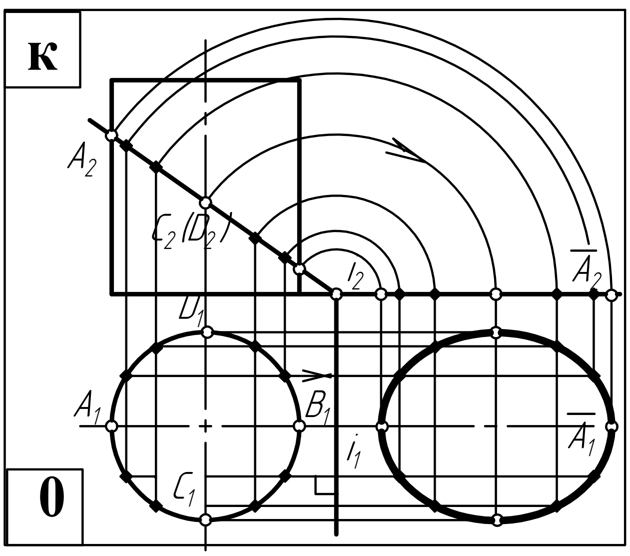
1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**

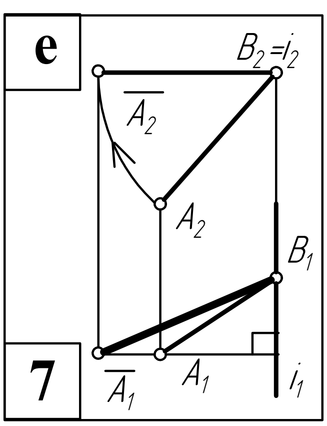

м

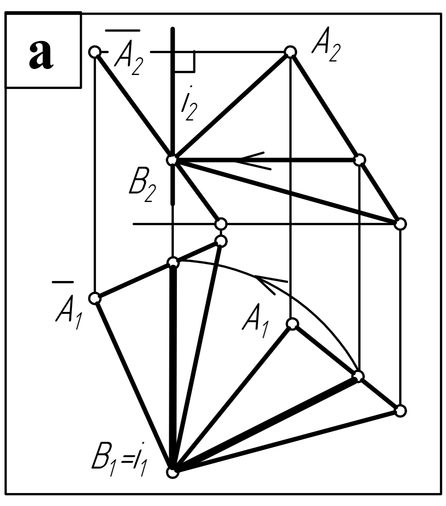

ё

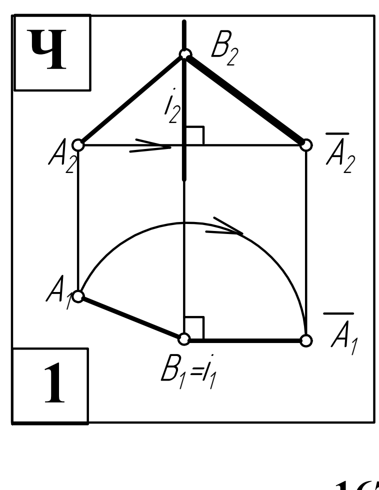

в


р


к
0

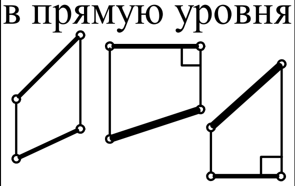
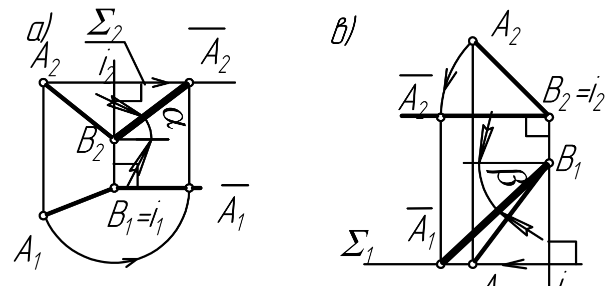
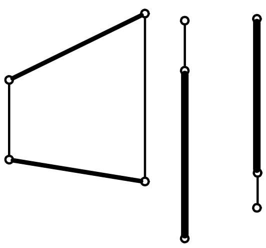
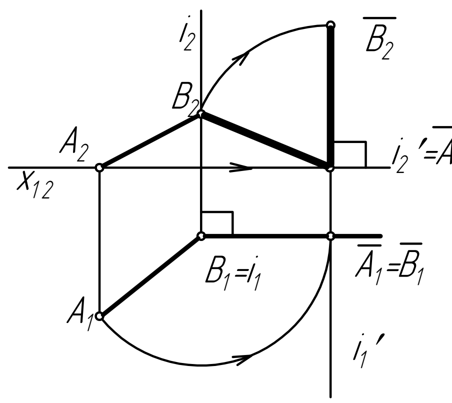
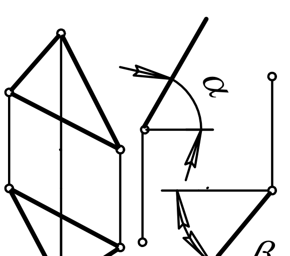
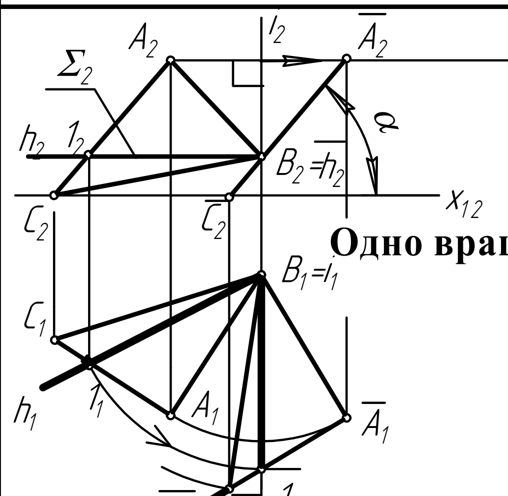
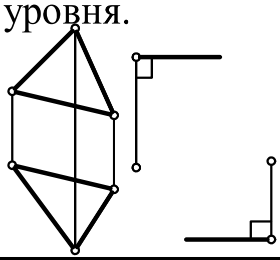
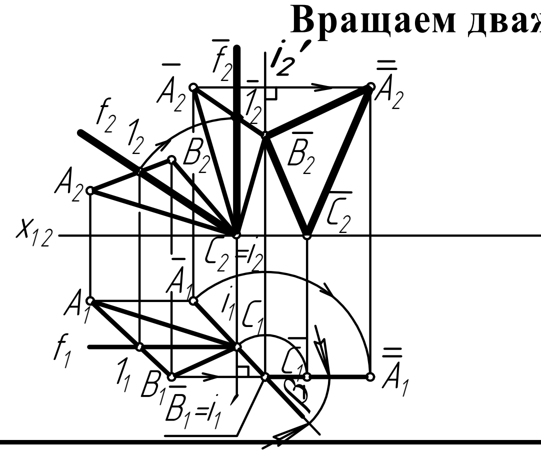

е
7


а


Ч
1

Опорный конспект по теме
«Решение четырёх задач преобразования способом вращения вокруг проецирующих прямых»

Канва 12

№п/п	Условие задачи	Графическое решение	Алгоритм решения
1	Преобразовать прямую общего положения в прямую уровня 	 **Одно вращение**	а) $\lvert AB\rvert=?,\ \alpha=?$ 1) $i\perp\Pi_1,\ i_1=B_1$ 2) $A_1\to\bar{A}_1\to R\lvert i_1A_1\rvert$ $(B_1\bar{A}_1)\perp$л.связи 3) $A_2\to\bar{A}_2\subset\Sigma_2\perp i_2$ $\lvert B_2\bar{A}_2\rvert=\lvert AB\rvert;\ \angle B_2=\alpha$
2	Преобразовать прямую общего положения в проецирующую. 	 **Вращаем дважды**	1) $i\perp\Pi_1,\ i\supset B,$ $A_1\to\bar{A}_1\to R\lvert B_1A_1\rvert,$ $(B_1\bar{A}_1)\perp$ линии связи (первая задача) 2) $i'\perp\Pi_2,\ i_2'=\bar{A}_2,$ $B_2\to\bar{B}_2\to R\lvert i_2'B_2\rvert$ $\lvert i_2'B_2\rvert\perp x_{12},\ \bar{A}_1=\bar{B}_1.$
3	Преобразовать плоскость общего положения в проецирующую. 	 **Одно вращение**	1) $h(B1)\subset(ABC)$ 2) $i\perp\Pi_1,\ i\supset B.$ 3) $1_1\to\bar{1}_1\to R\lvert B_1 1_1\rvert$ $(B_1\bar{1}_1)\perp x_{12}$ 4) $1_2\to\bar{1}_2\subset\Sigma_2(h_2)\perp i_2$ $(B_1C_1A_1)=(B_1\bar{C}_1\bar{A}_1)$ $\angle\bar{C}_2=\alpha$
4	Преобразовать плоскость общего положения в плоскость уровня. 	**Вращаем дважды.** 	1) $f(C1)\subset(ABC);$ 2) $i\perp\Pi_2;\ i\supset C;$ 3) $1_2\to\bar{1}_2\to R\lvert C_2 1_2\rvert;$ $\bar{f}_2(\bar{1}_2C_2)\perp x_{12};$ $(\bar{A}_1C_1\bar{B}_1)$– прямая. третья задача 4) $i'\perp\Pi_1;\ i_1'=\bar{B}_1;$ 5) $\bar{A}_1\to\bar{\bar{A}}_1\to R\lvert i_1'\bar{A}_1\rvert;$ $(\bar{B}_1\bar{C}_1\bar{\bar{A}}_1)\parallel x_{12};$ 6) $\bar{A}_2\to\bar{\bar{A}}_2\subset\Sigma_2\perp i_2'.$

Вопросы для самопроверки

1. В чем сущность способа вращения?

2. Какие четыре задачи преобразования решаются способом вращения?

3. Как выглядят проекции траекторий движения точки при вращении вокруг проецирующей прямой?

4. В чем сущность способа вращения вокруг прямой уровня?

5. Какие задачи удобнее всего решать при помощи способа вращения вокруг прямой уровня?

В н и м а н и е ! ***Итоговый тест*** **12**

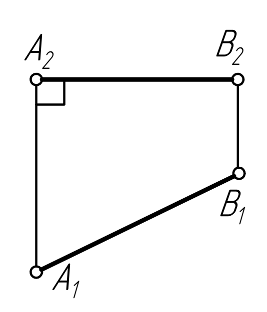
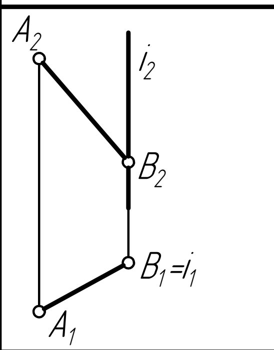
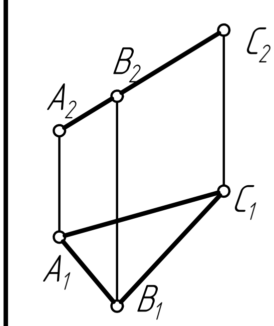
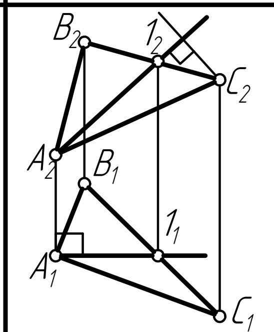
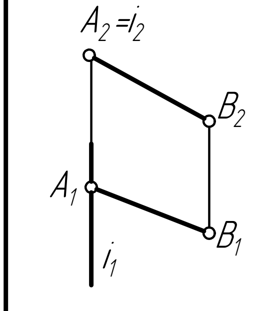
⊙ 1 . На каком чертеже вращением вокруг проецирующей оси определяется угол наклона прямой **AB** к горизонтальной плоскости проекций?

⊕ 2. На каком чертеже вращением вокруг проецирующей оси определяется угол наклона отрезка **AB** к $\mathbf{\Pi_2}$**?**

⦶ 3. На каком чертеже одним вращением возможно перевести отрезок **AB** в проецирующее положение?

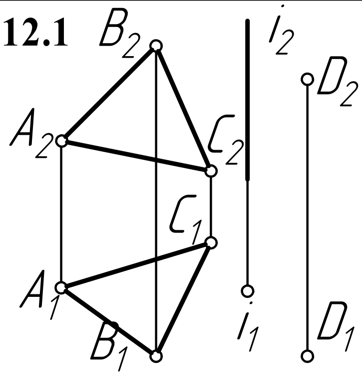
⊖ 4. В каком случае одним вращением возможно определение истинного вида треугольника?

⊗ 5. На каком чертеже определение истинного вида треугольника предусмотрено вращением вокруг фронтали?

1	2	3	4	5
				
⦶	⊙	⊖	⊗	⊕

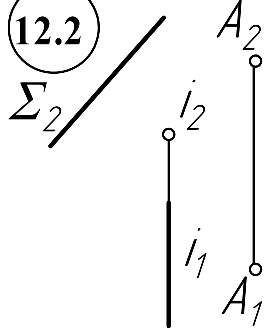
Способ вращения вокруг проецирующих прямых и прямых уровня

12.1



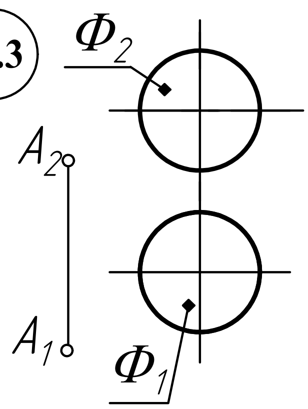
Вращением вокруг оси **i** ввести точку **D** в плоскость треугольника **ABC.**

12.2



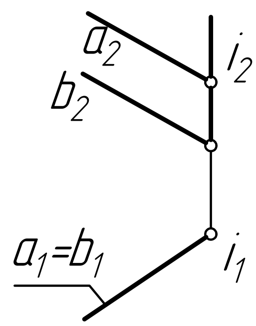
Вращением вокруг оси **i** точку **A** ввести в плоскость **Σ.** Сколько решений?

12.3



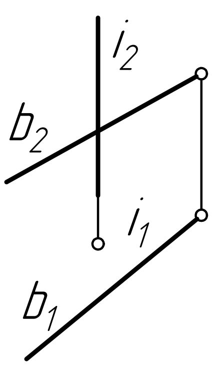
На поверхности сферы построить точку, наиболее близко расположенную к точке **A.**

12.4



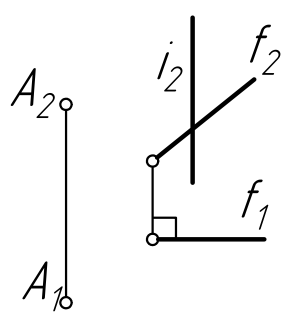
Определить расстояние между прямыми **a** и **b**.

12.5



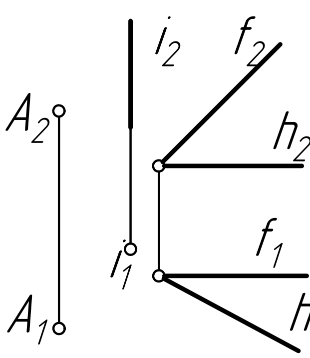
Вращением вокруг оси **i** преобразовать прямую **b** во фронталь.

12.6



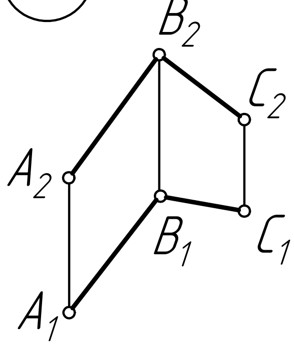
Достроить ось **i**, вращением вокруг которой точка **A** совместится с фронталью.

12.7



Вращением вокруг оси **i** совместить точку **A** с плоскостью **Σ(f⌒h).**

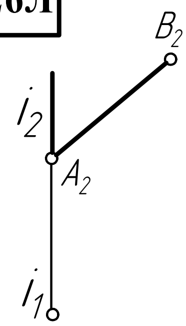
12.8



Вращением вокруг горизонтали определить натуральную величину угла **ABC.**

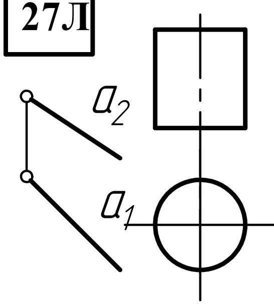
З а д а ч и д л я л и д е р о в

26Л



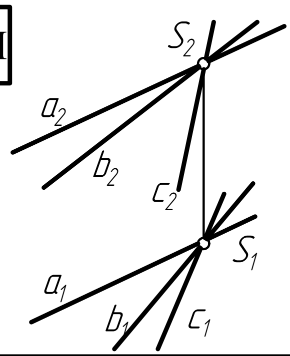
Вращением вокруг оси **i** найти $\mathbf{A_1B_1}$, если $\angle \alpha$**=30°.**

27Л



Через прямую **a** провести плоскость, пересекающую цилиндр по эллипсу с соотношением осей **1:2.**

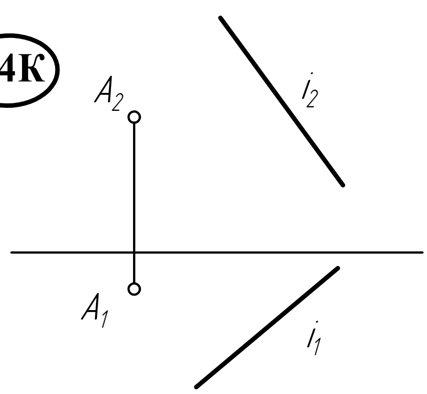
28Л



Прямые **a, b** и **c** образующие конуса вращения. Найти его ось. Сколько решений?

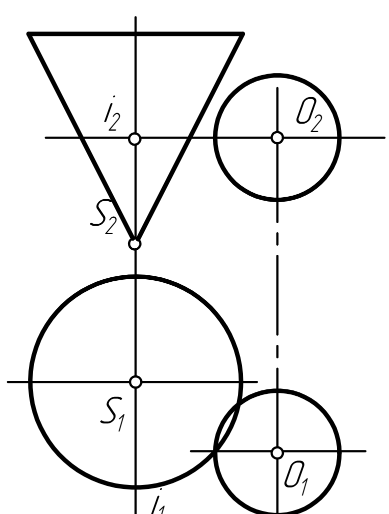
Задачки для самых крутых!

24К

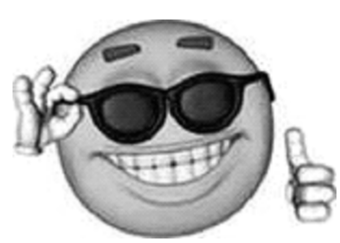


Повернуть точку **A** вокруг оси **i** до совмещения с фронтальной плоскостью проекций.

25К



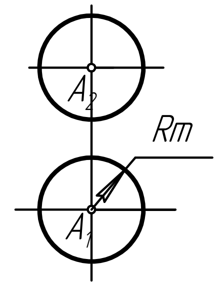
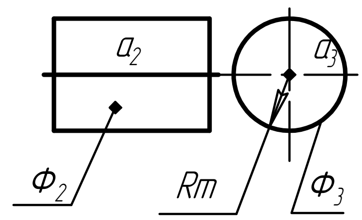
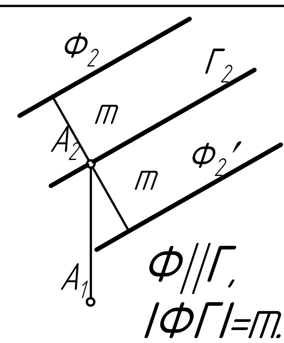
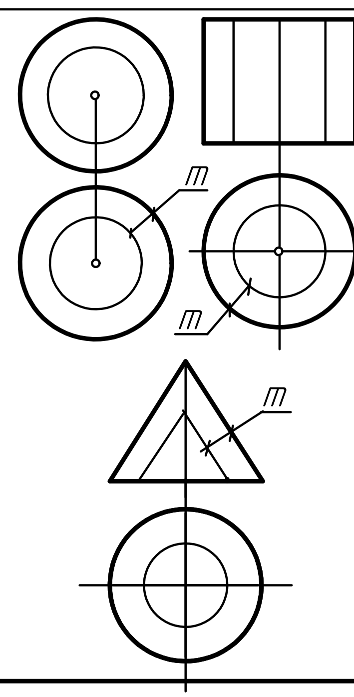
Дана сфера радиуса **R** с центром в точке **O** и конус вращения с вершиной **S**. Сфера вращается вокруг оси **i,** перпендикулярной фронтальной плоскости проекций, против часовой стрелки до касания с заданным конусом. Определить точку касания сферы и конуса.



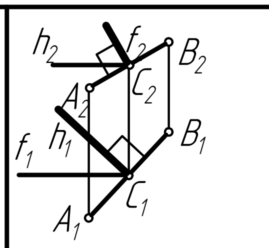
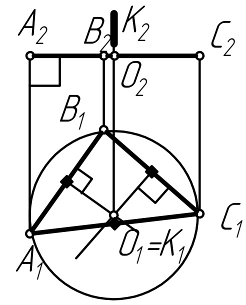
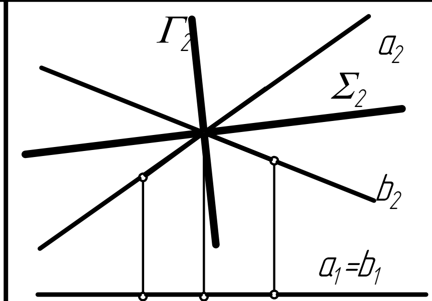
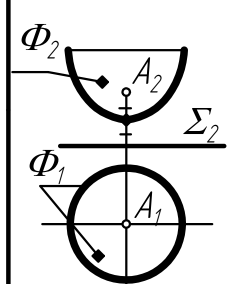
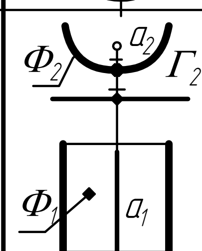
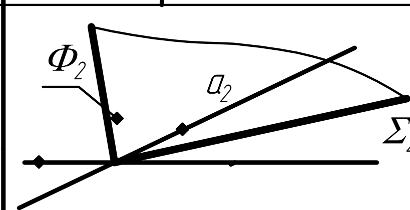
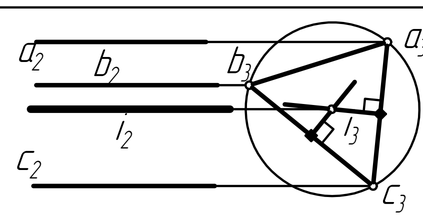
§ 13. Конструктивные задачи

К конструктивным относят задачи на построение геометрических фигур по наперёд заданным условиям.

Рассмотрим некоторые из них.

1. Что является всем множеством точек, удаленным на заданное расстояние m:		
а) от точки –	сфера с центром в заданной точке радиуса **m**	
б) от прямой –	круговой цилиндр, осью которого является эта прямая, радиуса **m**	
в) от плоскости –	две плоскости, параллельные данной и отстоящие от неё на заданном расстоянии	
г) от заданной поверхности –	либо концентричная поверхность на **m** большего размера, либо соосная поверхность	

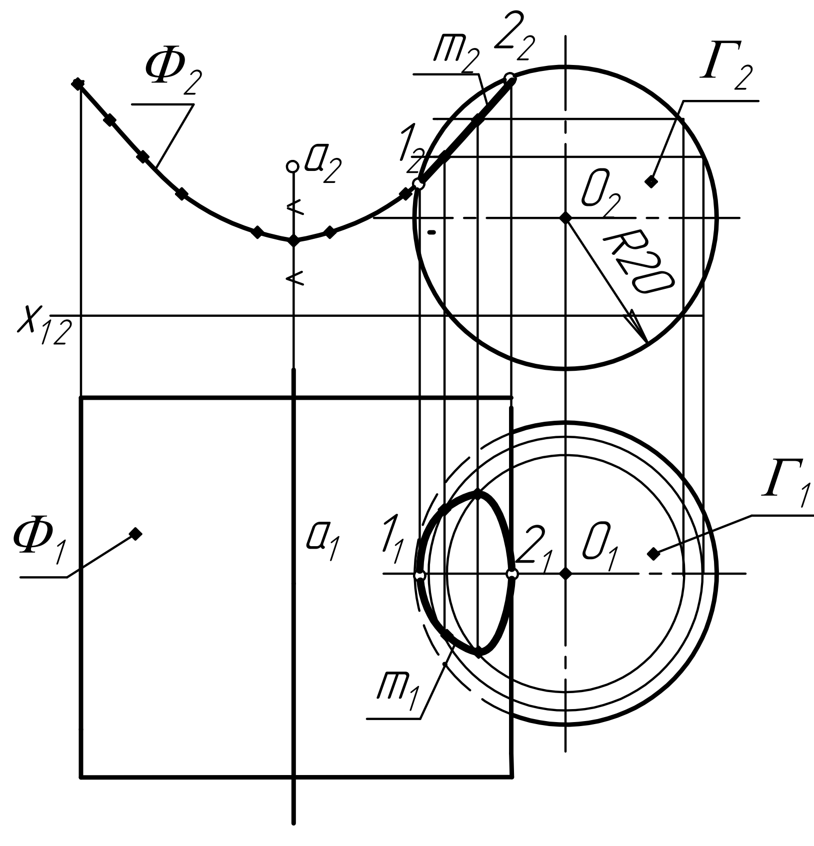
2. Что является всем множеством точек, равноудаленным:

а) от двух точек –	плоскость, проходящая через середину отрезка, соединяющего их, и перпендикулярная ему	 $C\subset(AB)$ $\lvert AC\rvert=\lvert CB\rvert$ $C\subset\Gamma(f\cap h)$ $\Gamma\perp(AB)$
б) от трех точек, (*вершин треугольника*) –	прямая, проходящая через центр описанной окружности и перпендикулярная плоскости треугольника	 $OK\perp(ABC)$
в) от сторон угла, г) от двух пересекающихся прямых, д) от двух пересекающихся плоскостей –	две биссекторные плоскости	
д) от точки и плоскости *(точка не принадлежит плоскости)* –	параболоид вращения	 *Ф* – параболоид простирается бесконечно.
е) от прямой и плоскости, параллельных между собой –	параболический цилиндр	 *Ф* – параболический цилиндр, простирается бесконечно
ж) от прямой и плоскости, пересекающихся между собой –	биссекторный эллиптический конус	
з) от трёх прямых, параллельных между собой –	ось цилиндра, три прямые – образующие этого цилиндра	

К конструктивным относят задачи на построение фигур, симметричных заданным относительно прямой или плоскости, задачи на построение проекций куба, квадрата и других правильных фигур по каким-то исходным условиям. Можно найти фигуру, равноудаленную и от двух, и от трех скрещивающихся прямых и т. д.

Проанализируем решение одной из конструктивных задач.

Пример 13. 1. Среди множества точек, равноудаленных от фронтально проецирующей прямой **a** и горизонтальной плоскости проекций, найти те, которые находятся на расстоянии **20 мм** от точки **O.**



1) **Ф** – фронтально проецирующий параболический цилиндр является всем множеством точек, равноудаленным от прямой **a** и Π_1;

2) **Г** – сфера **R20 мм** с центром в точке **O** есть все множество точек, удаленных от точки **O** на **20 мм;**

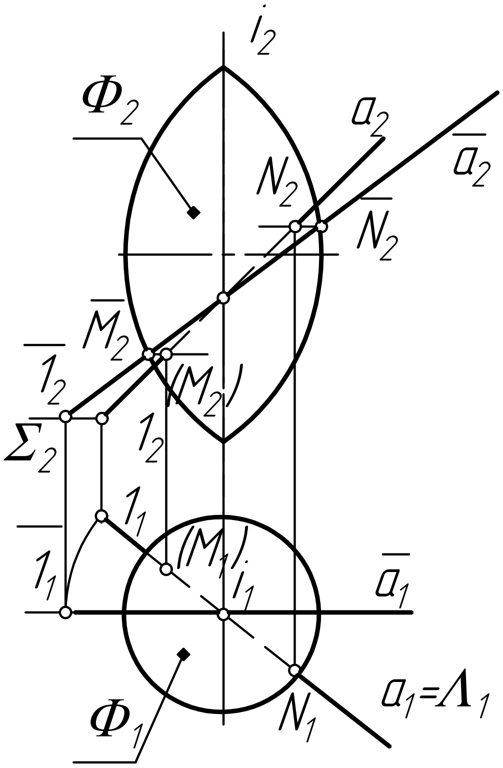
3) **m** – линия пересечения параболического цилиндра и сферы и будет искомой кривой, отвечающей заданному условию $Г \cap Ф = m$.

Ход решения конструктивных задач с применением способов преобразования чертежа

1. **Определяем геометрическую фигуру, являющуюся вообще всем множеством точек, удовлетворяющим заданному условию.**
2. **Определяем решающее положение, т. е. удобные проекции, при которых легко строится искомое множество.**
3. **Выбираем рациональный способ преобразования.**
4. **Строим подмножество n-множеств.** ***(Обычно это точка или точки пересечения, линия или линии пересечения и т. п.)***

Применение способов преобразования к решению позиционных задач

<u>Пример 1.</u> Найти пересечение прямой **a** с заданной поверхностью **Ф.**



Р е ш е н и е

1) $a \subset \Lambda \perp \Pi_1 \Rightarrow a_1 = \Lambda_1$;

2) $a \cap i \Rightarrow \Lambda \cap \Phi \rightarrow$ по меридиану;

3) $i \perp \Pi_1$; $i \cap a$; $1_1 \rightarrow \bar{1}_1 \rightarrow R|i_1\ 1_1|$;

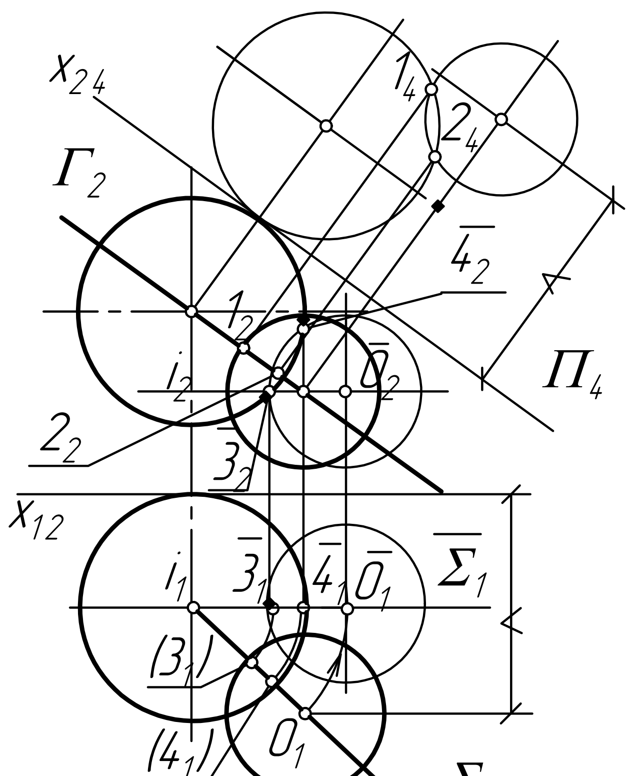
$1_2 \rightarrow \bar{1}_2 \subset \Sigma_2 \perp i_2$;

$\bar{a}_2 \cap \Phi_2$ (фронт. меридиан) $= \bar{M}_2 \wedge \bar{N}_2$;

$\bar{M}_2 \rightarrow M_2 \subset$ по прямой, $\perp$ оси;

$M_2 \wedge N_2 \subset a_2$.

<u>Пример 2.</u> Построить экстремальные точки линии пересечения заданных поверхностей.



Р е ш е н и е

1. В осевой фронтально проецирующей плоскости **Г(Г$_2$)** находятся ближняя и дальняя точки линии пересечения. Построение их осуществлено способом замены плоскостей проекций. **$\Pi_4 \| \Gamma$,** на чертеже **$x_{24} \| \Gamma_2$.**

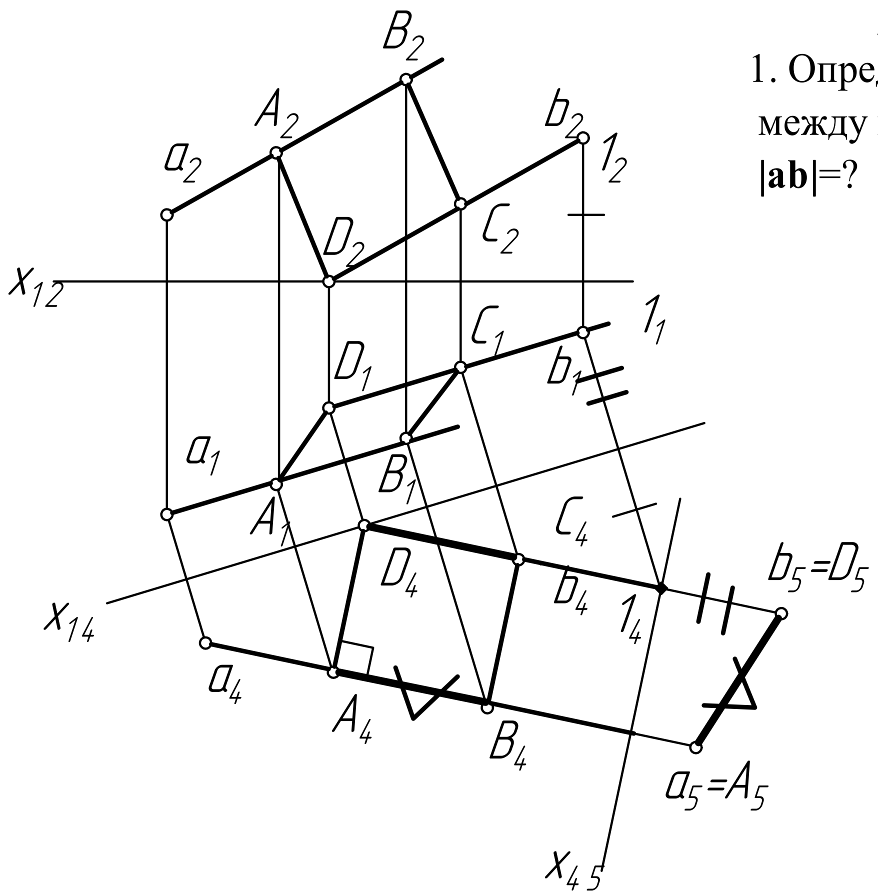
2. В осевой горизонтально проецирующей плоскости **$\Sigma(\Sigma_1)$** находятся высшая и низшая точки линии пересечения.

Построение их в качестве примера выполнено способом вращения вокруг горизонтально проецирующей оси.

Применение способов преобразования к решению метрических задач

<u>Пример</u>

Пересечь параллельные прямые **a** и **b** так, чтобы получился квадрат.



<u>Решение</u>

1. Определяем расстояние между параллельными прямыми. $|\mathbf{ab}|=?$

$$\Pi_2\Pi_1 \rightarrow \Pi_1\Pi_4$$

$$x_{14} \parallel a_1$$

$$|x_{14}\,1_4| = |x_{12}\,1_2|$$

$$\Pi_1\Pi_4 \rightarrow \Pi_4\Pi_5$$

$$x_{45} \perp a_4$$

$$|x_{45}\,1_5| = |x_{14}\,1_1|$$

2. $|A_4B_4| = |ab| = |A_5D_5|$

Ход решения метрических задач с применением способов преобразования чертежа

1. Определяем носитель метрической характеристики.

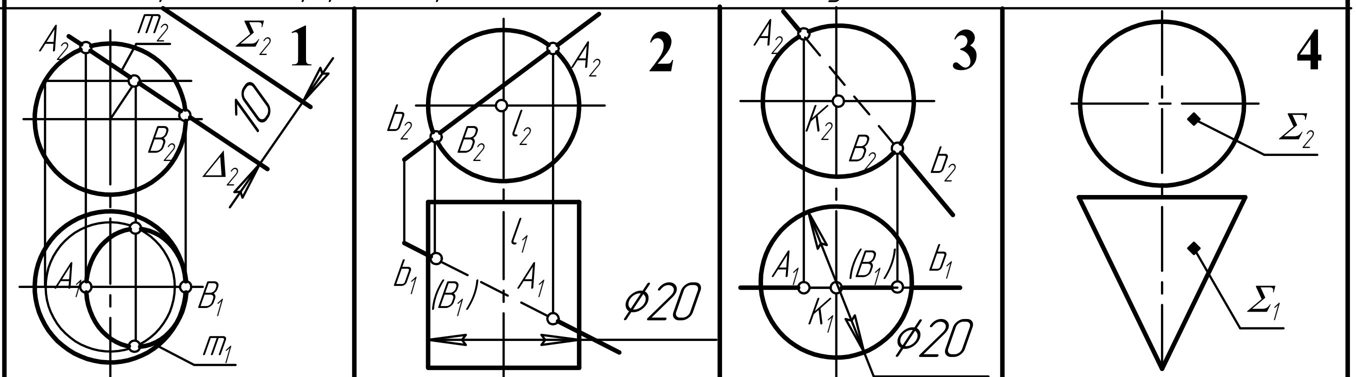
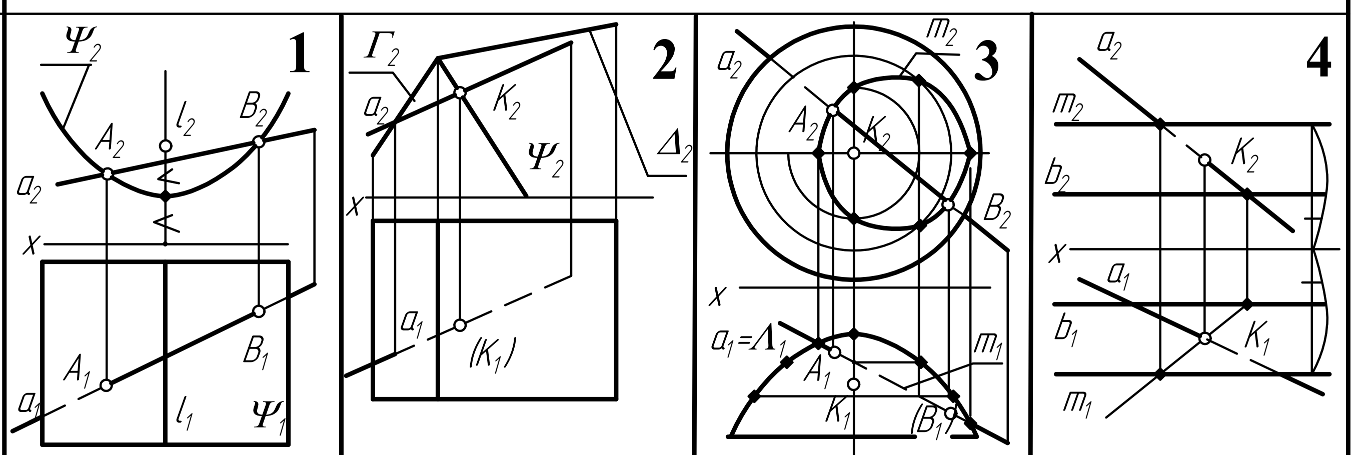
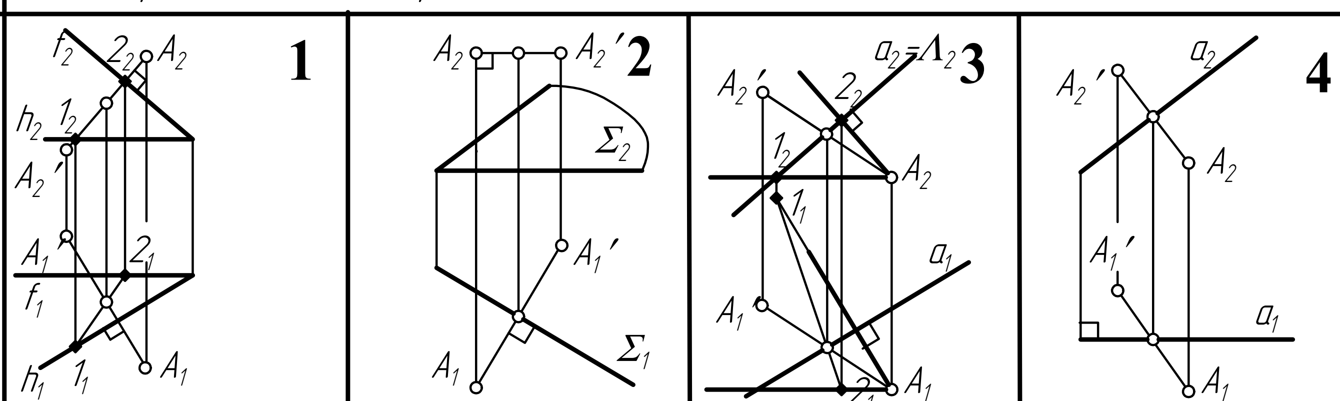
2. Определяем решающее положение, при котором искомая метрическая характеристика определяется сразу на чертеже.

3. Выбираем рациональный способ преобразования.

4. Выполняем построения в исходной системе плоскостей проекций.

Проверьте себя!

Обучающий тест 13 по теме **«Конструктивные задачи»**

<table>
<tr><th>№ п/п</th><th>Вопрос</th><th>1</th><th>2</th><th>3</th><th>4</th></tr>
<tr><td>1</td><td colspan="5">В каком случае на прямой b найдены точки, удалённые от точки K на 10 мм?</td></tr>
<tr><td>2</td><td colspan="5">На каком чертеже мы видим всё множество прямых, равнонаклонённых к Π_2?</td></tr>
<tr><td>3</td><td colspan="5">Где на прямой b найдены точки, удалённые от прямой l на 10 мм?</td></tr>
<tr><td>4</td><td colspan="5">Где на поверхности сферы построено всё множество точек, удалённых от плоскости Σ на 10 мм?</td></tr>
<tr><td></td><td colspan="5"></td></tr>
<tr><td>5</td><td colspan="5">Где на прямой a построена точка, равноудалённая от Π_2 и Π_1?</td></tr>
<tr><td>6</td><td colspan="5">На каком чертеже на прямой a найдены точки, равноудалённые от Π_2 и точки K?</td></tr>
<tr><td>7</td><td colspan="5">Где на прямой a построены точки, равноудалённые от Π_1 и прямой l?</td></tr>
<tr><td>8</td><td colspan="5">Где на прямой a найдена точка, равноудалённая от сторон двугранного угла?</td></tr>
<tr><td></td><td colspan="5"></td></tr>
<tr><td>9</td><td colspan="5">Найдите, где построена точка, симметричная точке A относительно прямой общего положения?</td></tr>
<tr><td>10</td><td colspan="5">Где построена точка, симметричная точке A относительно плоскости общего положения?</td></tr>
<tr><td></td><td colspan="5"></td></tr>
<tr><td colspan="6">Ответы: 3 4 2 1 4 3 1 2 3 1 177</td></tr>
</table>

Тренировка 13 по теме «Конструктивные задачи»

На следующей странице размещены кадры с шестью правильно выполненными задачами. Расположив их в предлагаемой последовательности, вы прочтете в верхней строке фамилию *современного классика начертательной геометрии, профессора, уникального геометра, написавшего незаурядные книги, которые наверняка по достоинству оценят грядущие поколения. Многие годы студенты – участники российских олимпиад по начертательной геометрии ломают головы над решением его трудных и интересных задач.*

В нижней строке фамилия *малоизвестного, талантливого преподавателя начертательной геометрии, работавшего на одной кафедре с автором пособия и сотворившего много задач повышенной трудности. Выпущенный им сборник таких задач пользуется заслуженным успехом у всех, кому интересна эта наука.*

1. Найдите, где в плоскости построено всё множество точек, равноудалённых от концов отрезка.

2. Где на прямой найдены точки, удалённые от заданной плоскости на **15 мм?**

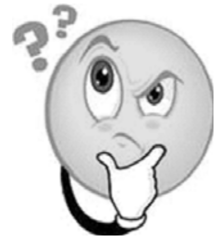
3. На каком чертеже построено всё множество точек, равноудалённых от трёх заданных точек?

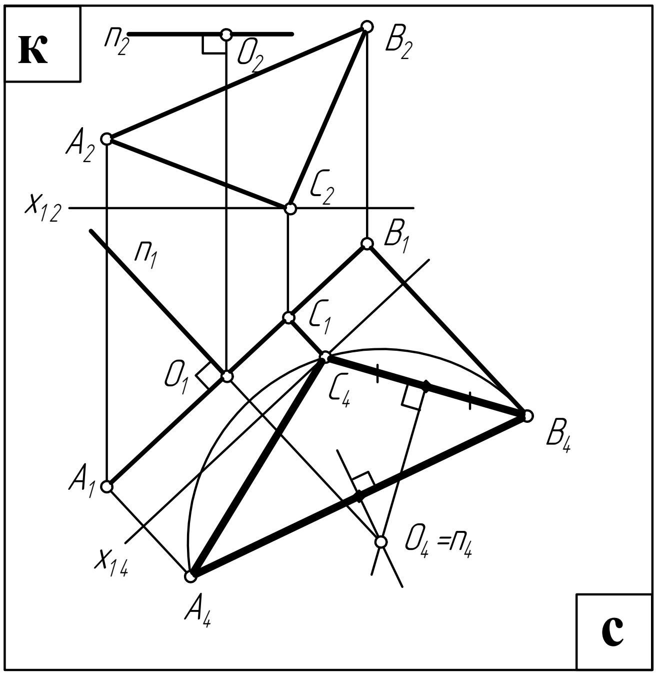
4. Где в плоскости построено всё множество точек, равноудалённых от Π_1 и Π_2?

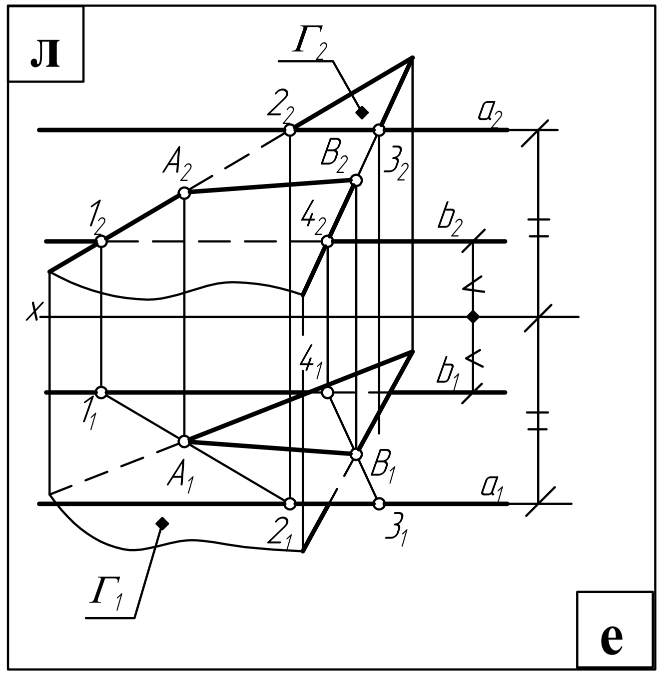
5. На каком чертеже на прямой найдены точки, равноудалённые от плоскости и прямого кругового цилиндра?

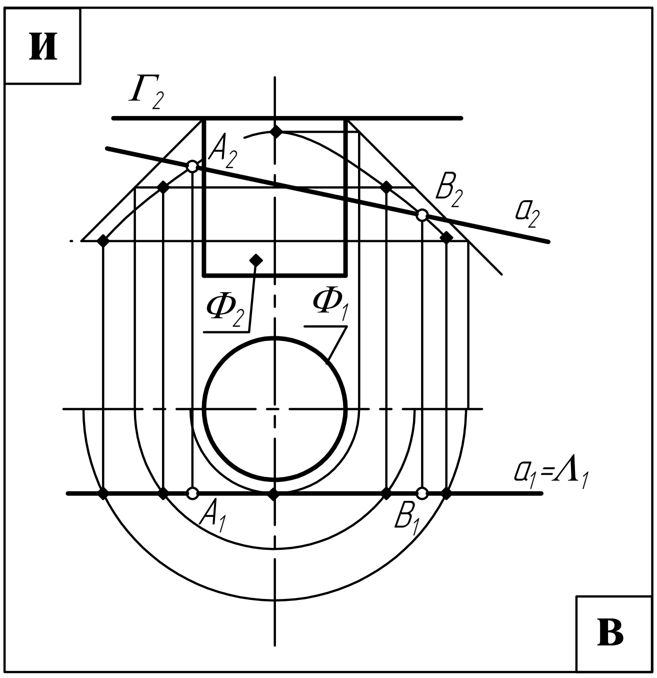
6. На каком чертеже в плоскости построено всё множество точек, равноудалённых от точки и горизонтальной плоскости проекций?

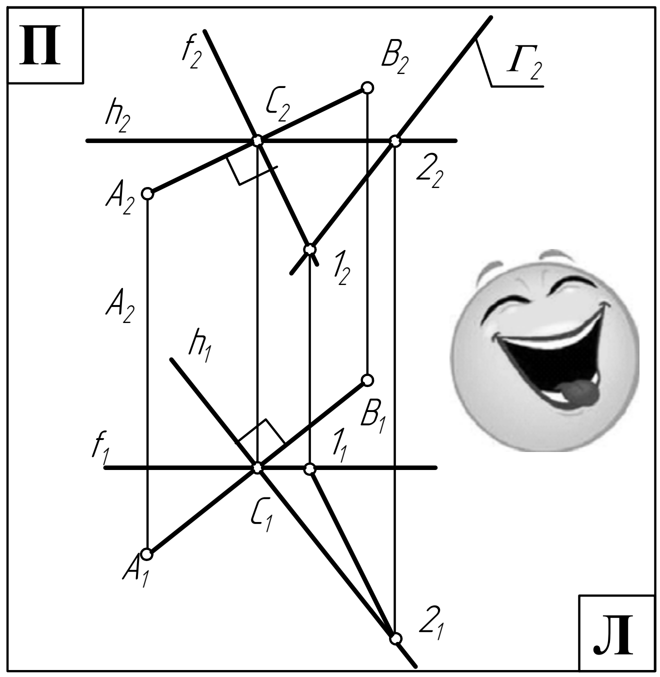
1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**

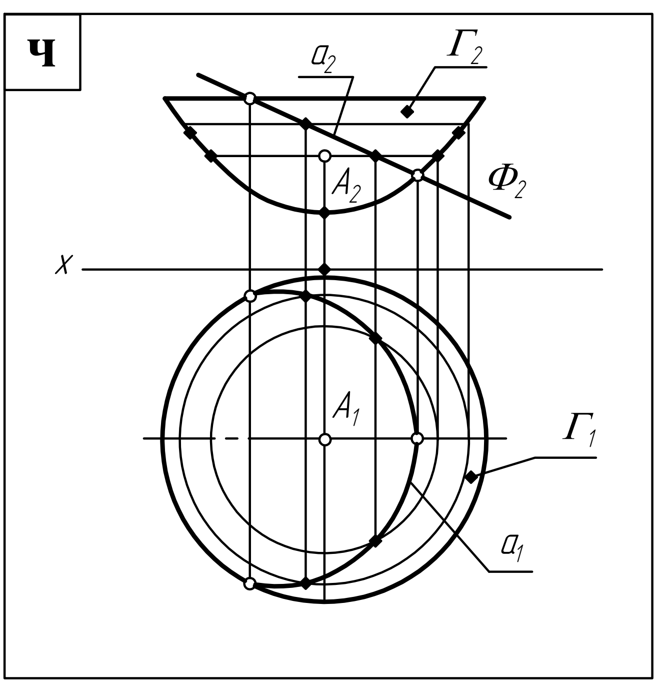


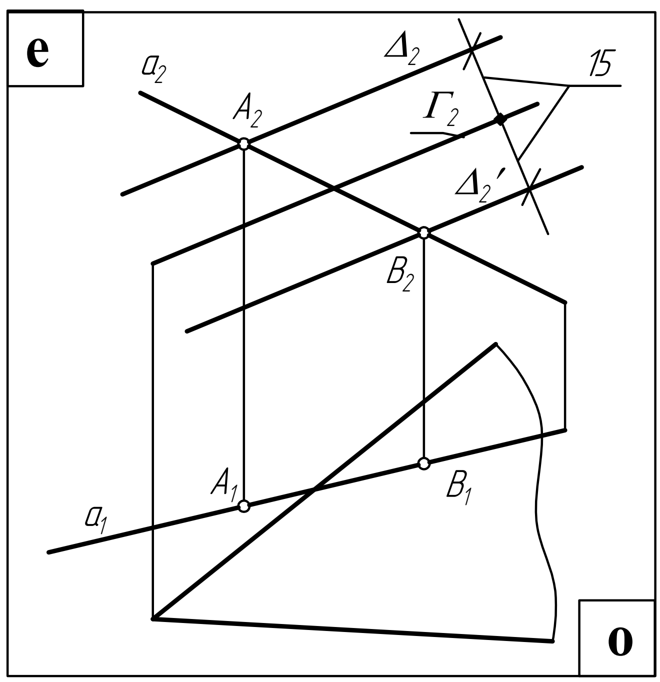

к
с
n_2
O_2
B_2
A_2
C_2
x_{12}
B_1
n_1
C_1
O_1
C_4
B_4
A_1
x_{14}
$O_4 = n_4$
A_4


л
е
Γ_2
2_2
a_2
A_2
B_2
3_2
1_2
4_2
b_2
x
4_1
b_1
1_1
A_1
B_1
a_1
2_1
3_1
Γ_1


и
в
Γ_2
A_2
B_2
a_2
Φ_2
Φ_1
$a_1 = \Lambda_1$
A_1
B_1


П
Л
f_2
B_2
Γ_2
C_2
h_2
2_2
A_2
1_2
A_2
h_1
B_1
f_1
1_1
C_1
A_1
2_1


ч
a_2
Γ_2
A_2
Φ_2
x
A_1
Γ_1
a_1


е
о
Δ_2
15
a_2
A_2
Γ_2
Δ_2'
B_2
A_1
B_1
a_1

Вопросы для самопроверки

1. Что является всем множеством точек, удалённым на заданное расстояние:
   а) от точки; б) прямой; в) плоскости; г) поверхности?
2. Что является всем множеством точек, равноудалённым:
   а) от двух точек; б) трёх точек, не принадлежащих одной прямой;
   в) трёх параллельных прямых; г) точки и плоскости (точка не принадлежит плоскости);
   д) прямой и плоскости, параллельных между собой и пересекающихся между собой;
   е) двух пересекающихся плоскостей?

В н и м а н и е ! *Итоговый тест* **13**

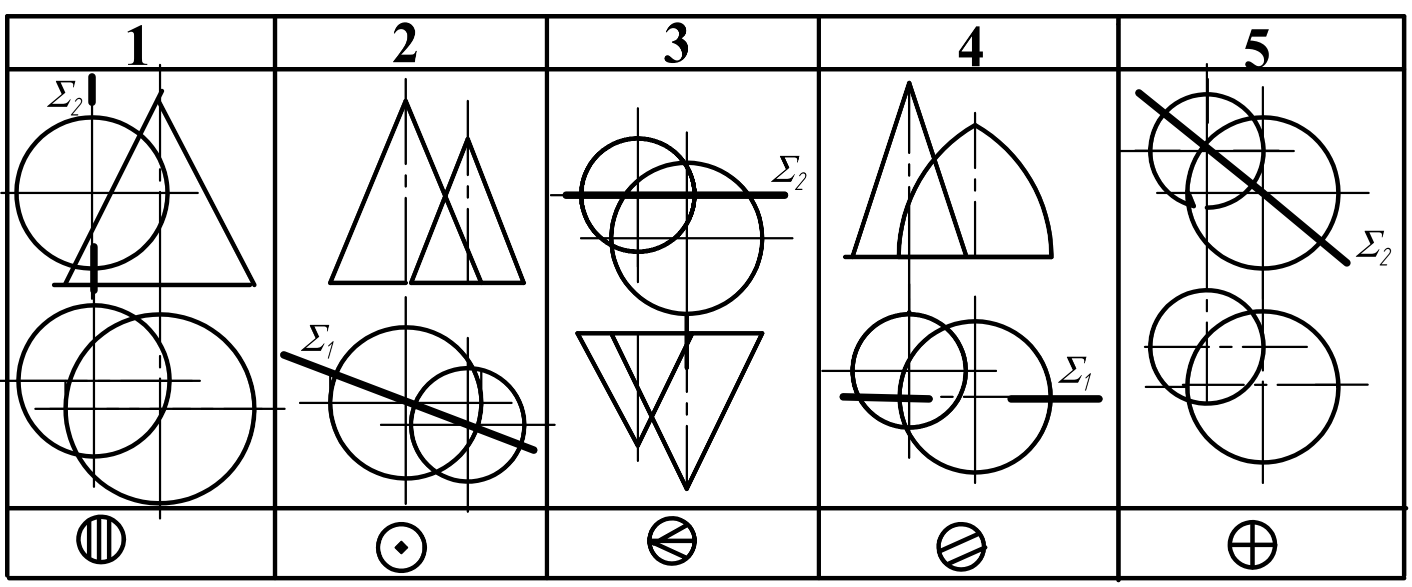
1. На каком чертеже плоскости **Σ** принадлежат высшая и низшая точки линии пересечения поверхностей?

2. На каком чертеже плоскости **Σ** принадлежат самая ближняя и самая дальняя по отношению к наблюдателю точки линии пересечения поверхностей?

3. На каком чертеже плоскости **Σ** принадлежат точки – границы видимости относительно $\mathbf{\Pi_1}$**?**

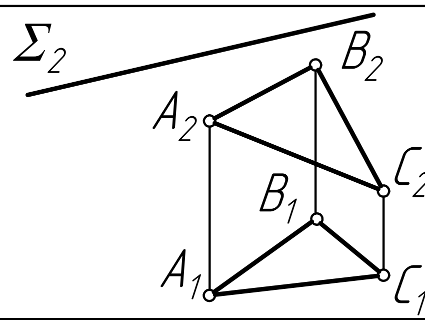
4. На каком чертеже плоскости **Σ** принадлежат точки – границы видимости относительно $\mathbf{\Pi_2}$**?**

5. На каком чертеже плоскости **Σ** принадлежат точки – границы видимости относительно $\mathbf{\Pi_3}$**?**

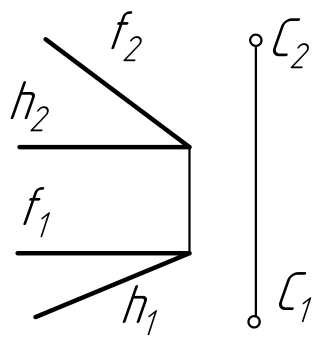


З А Н Я Т И Е   13
Конструктивные задачи

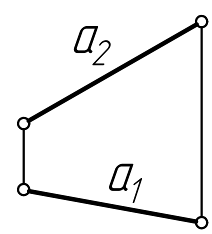
13.1. В плоскости **$\Sigma(\Sigma_2)$** построить все множество точек, удаленных от плоскости **Γ(ABC)** на **20 мм.**



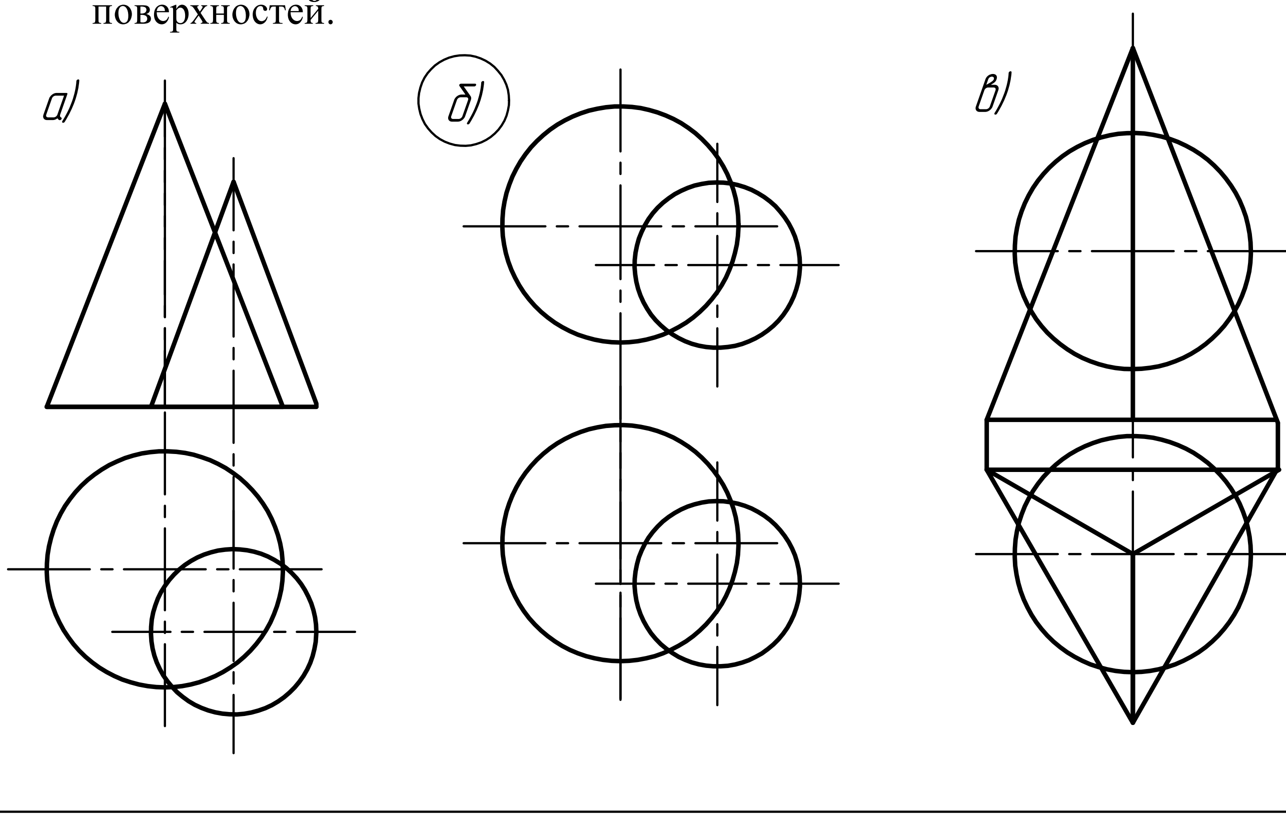
13.2 Построить все множество точек, удаленных от плоскости **$\Gamma(f \cap h)$** на **30 мм** и от точки **C** на **20 мм.**



13.3 На прямой **a** найти точку, равноудаленную от плоскостей проекций **Π_2** и **Π_1.**

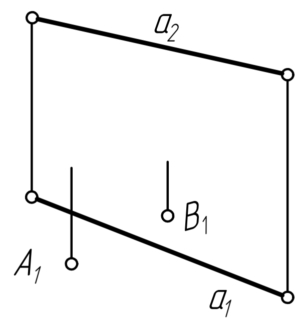


13.4. Построить экстремальные точки линий пересечения заданных поверхностей.



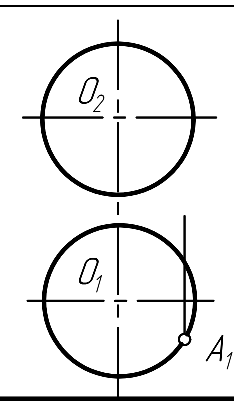
Задачи для лидеров

29Л



Точки **А** и **В** равноудалены от прямой **а**. Найти $\mathbf{B_2}$ и $\mathbf{A_2}$.

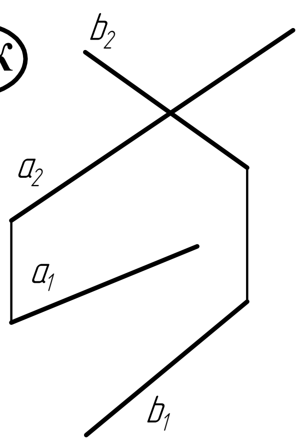
30Л



Через точку **А,** удалённую от сферы **Ф** на **10 мм** и расположенную выше её центра, провести фронталь, касательную к сфере.

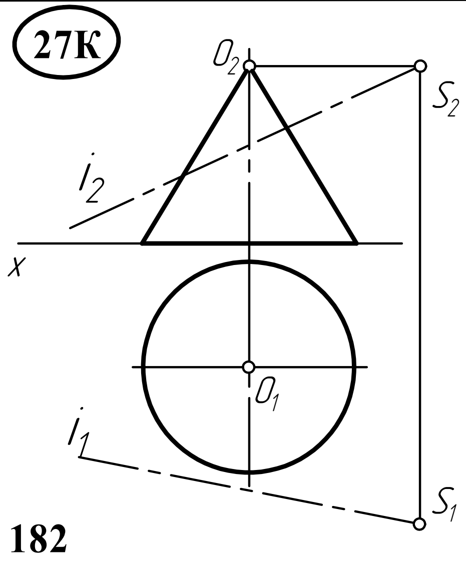
Задачки для самых крутых!

26К



Построить плоскость, равноудалённую от прямых **a** и **b.**

27К



Построить очерк конической поверхности вращения с вершиной **S** и осью **i**, имеющей с заданным конусом одну общую точку. Принять во внимание, что вершины заданного и искомого конусов удалены от горизонтальной плоскости проекций на одинаковое расстояние.

§ 14. Касательные плоскости

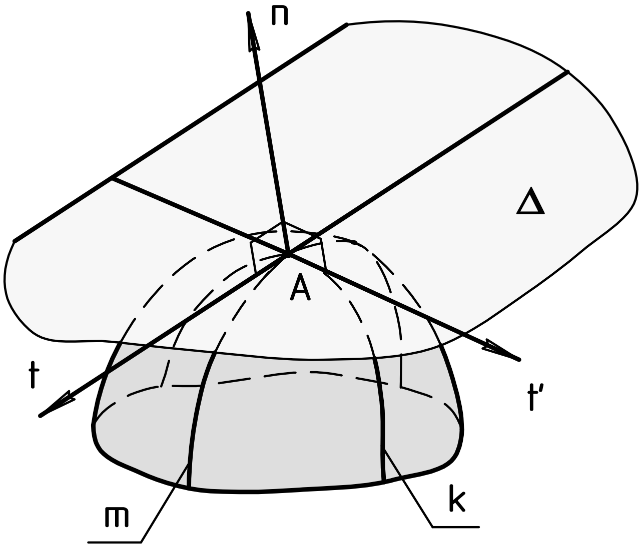
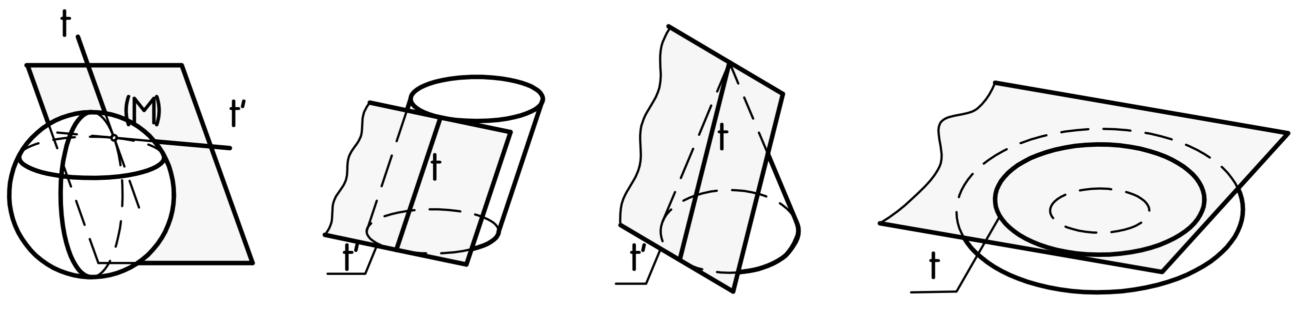


Рис. 165

Плоскость **Δ**, касательную к поверхности **Φ** в заданной точке **A,** можно однозначно определить двумя пересекающими прямыми **t** и **t′**, каждая из которых является касательной к кривой, проведенной по поверхности через точку **A**.

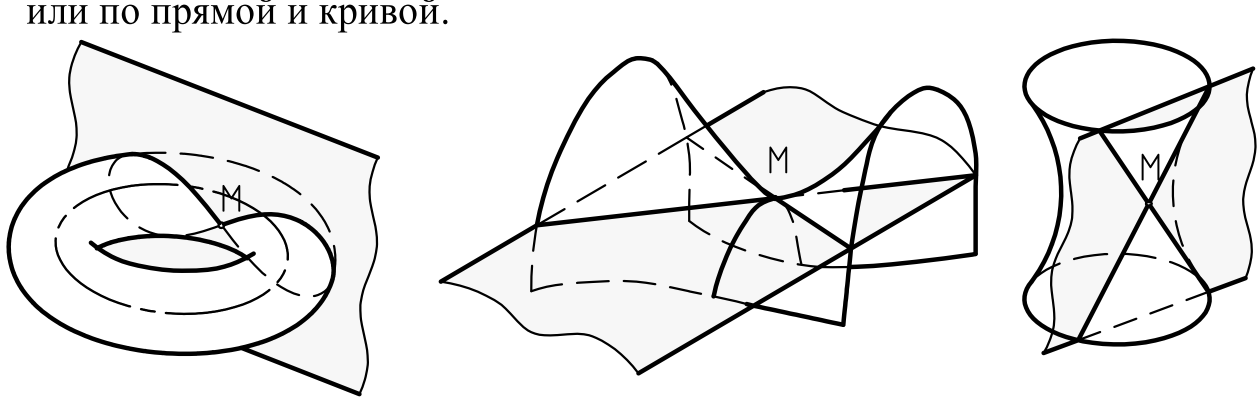
Перпендикуляр **n** к касательной плоскости в точке касания называется **нормалью** к поверхности в этой точке.

Плоскость может касаться поверхности либо в **точке** (рис. 166, а), либо по **прямой линии** (рис. 166, б, в), либо по **плоской кривой** (рис. 166, г).



а) б) в) г)

Касаясь поверхности в данной точке, плоскость может **пересекать поверхность по двум кривым** (рис. 166, д) или **двум прямым**(рис. 166, е,ж) или по прямой и кривой.



д) е) ж)

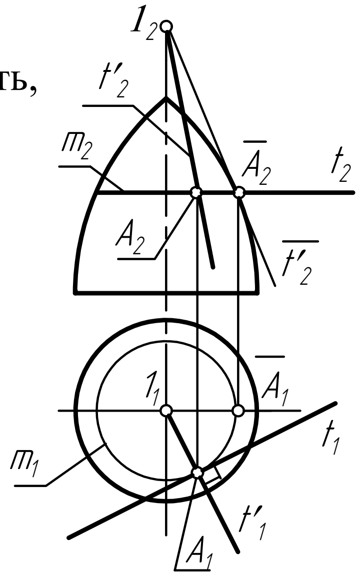
Рис. 166

Все задачи на проведение касательной плоскости делятся на две группы.

1. **Проведение плоскости, касательной к поверхности в заданной точке.**
2. **Проведение касательной плоскости при каком-нибудь условии, определяющем её положение:**
   а) через внешнюю точку, не принадлежащую поверхности;
   б) через прямую, не принадлежащую поверхности;
   в) параллельно прямой, не принадлежащей поверхности, параллельно заданной плоскости.

<u>Пример 14.1</u>

Построить плоскость, касательную к тору **Φ** в точке **A⊂Φ.**

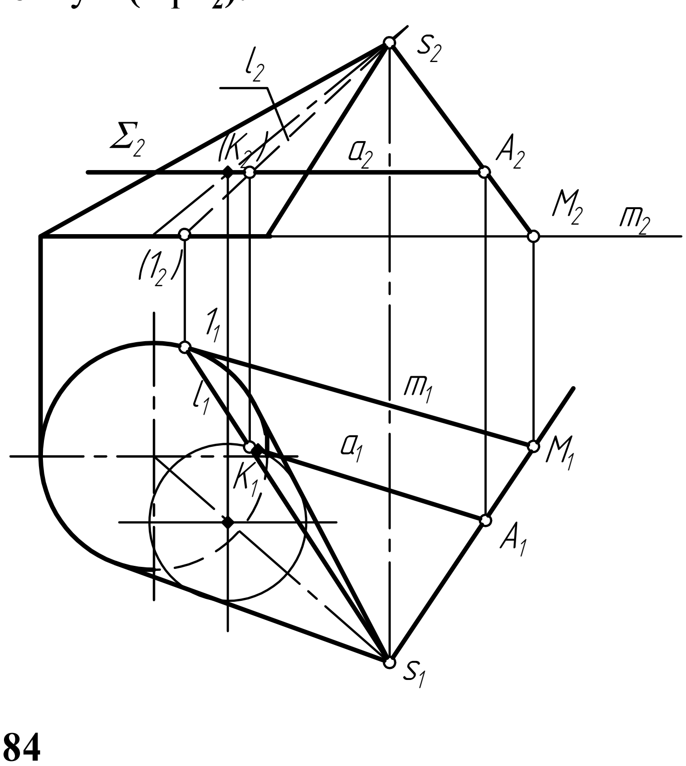


Р е ш е н и е

1. Через точку проведена параллель **m**, **t** – касательная к этой параллели.
2. **t′**– касательная к меридиану тора, для построения фронтальной проекции ее поворачиваем до совмещения с главным меридианом.

<u>Пример 14.2</u>

Построить плоскость, касательную к конусу и проходящую через заданную точку $\mathbf{A(A_1A_2)}$.



Р е ш е н и е

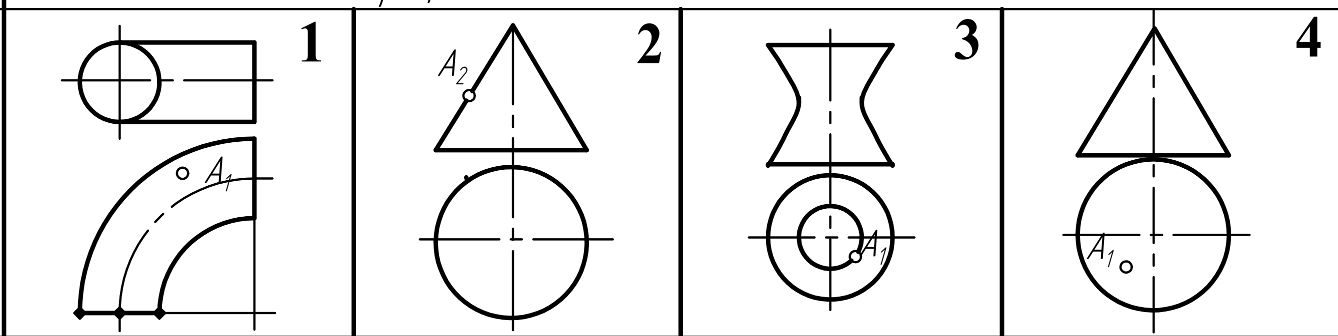
1. Проведем через $\mathbf{A(A_2)}$ плоскость $\mathbf{\Sigma(\Sigma_2), \| \Pi_1}$, которая пересечет конус по окружности. В этой плоскости можно построить две касательные из точки **A** к полученной окружности.
2. Образующая **l,** проходящая через вершину конуса и точку касания, а также построенная прямая **a** и определят искомую касательную плоскость $\mathbf{\Delta(a \cap l)}$.

Задача имеет два решения.

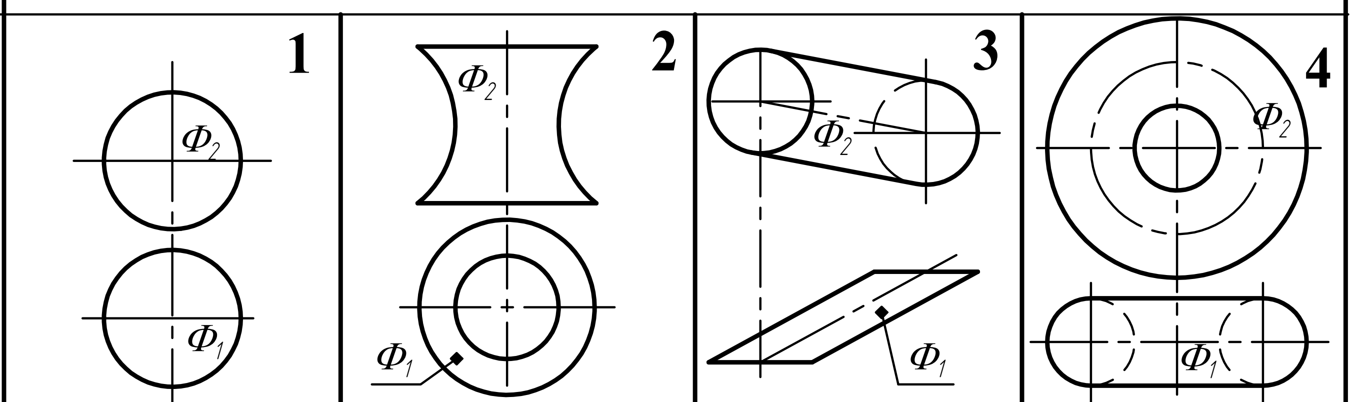
Проверьте себя!

Обучающий тест 14 по теме **«Касательные плоскости»**

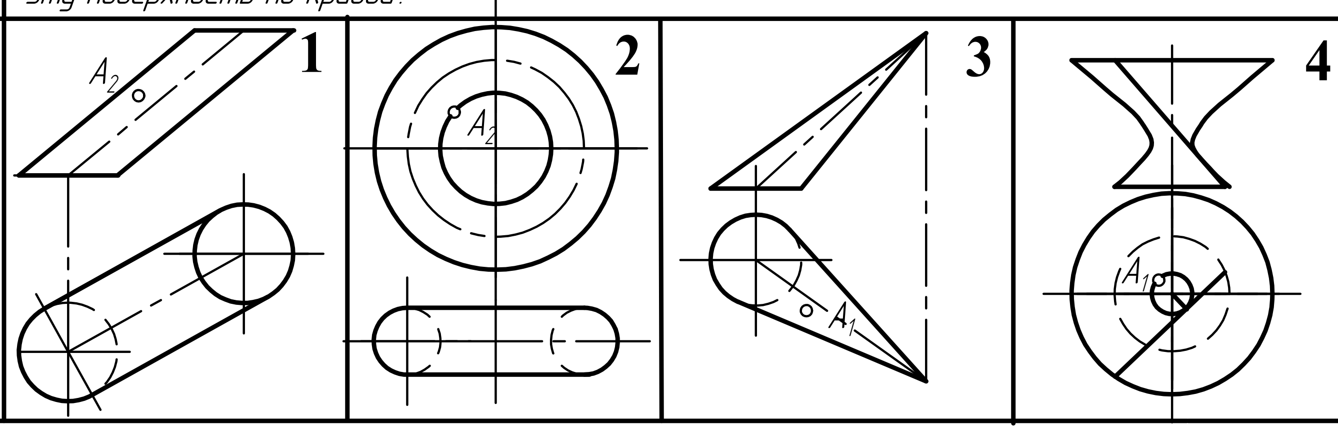
№ п/п	Вопрос	1	2	3	4
1	*В каком случае касательная плоскость, проведённая через точку A, будет перпендикулярна Π_2?*				
2	*Где касательная плоскость, проведённая через точку A, будет перпендикулярна Π_1?*				
3	*Где касательная плоскость, проведённая через точку A, будет плоскостью общего положения и строится сразу без преобразования чертежа?*				
4	*На каком чертеже касательная плоскость, проведённая через точку A, может быть построена с использованием способа вращения?*				



№ п/п	Вопрос
5	*Какая поверхность содержит только эллиптические точки?*
6	*Какая поверхность состоит только из параболических точек?*
7	*Какая поверхность содержит эллиптические, параболические и гиперболические точки?*
8	*Где изображена поверхность, состоящая только из гиперболических точек?*



№ п/п	Вопрос
9	*В каком случае касательная плоскость, проведённая через точку A, пересечёт поверхность по двум прямым?*
10	*На каком чертеже касательная плоскость, проведённая через точку A, пересечёт эту поверхность по кривой?*



Ответы: 2 3 4 1 1 3 4 2 4 2

Тренировка 14 по теме
«Касательные плоскости»

На следующей странице шесть кадров с правильно решёнными задачами по данной теме. Расположив их в предлагаемой последовательности, в верхней строке вы прочтёте *фамилию известного учёного, для перечисления всех титулов и званий которого не хватит и целой страницы. Его учебные книги и многочисленные научные труды и сегодня, и всегда будут востребованы.*

Но самым благодарным делом Учителя является продолжение его в своих учениках. В нижней строке вы увидите количество кандидатов и докторов наук, подготовленных лично этим выдающимся профессором.

1. На каком чертеже построена плоскость, касательная к поверхности, параллельно заданной прямой?

2. Где через точку, не принадлежащую поверхности конуса, построены две касательные плоскости?

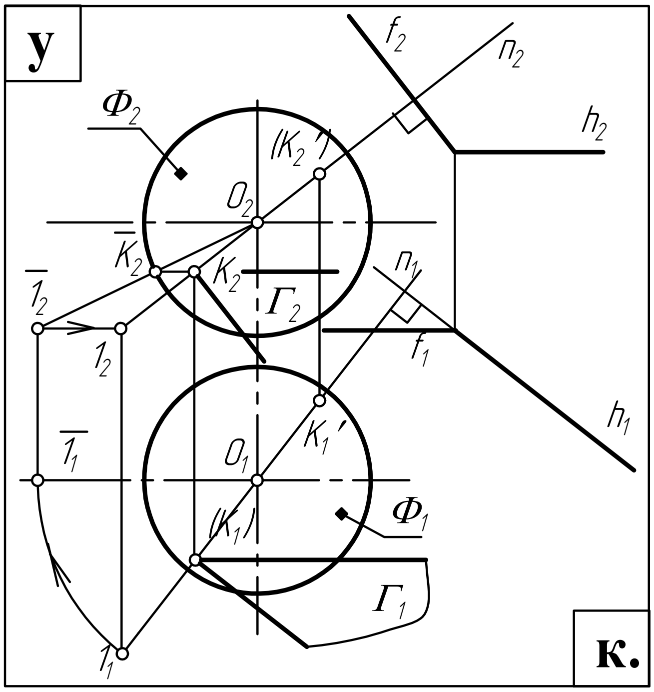
3. На каком чертеже к поверхности построена касательная плоскость параллельно заданной плоскости?

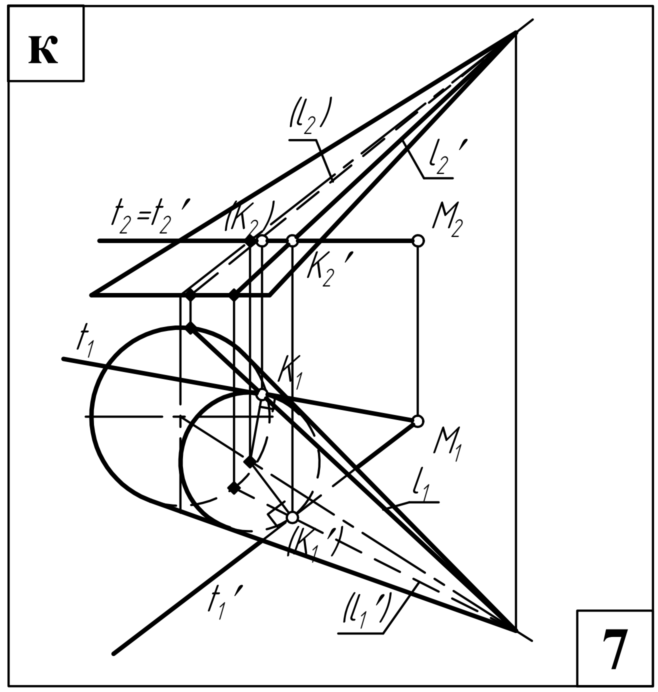
4. Где две касательные плоскости к поверхности цилиндра проведены через точку, расположенную вне его?

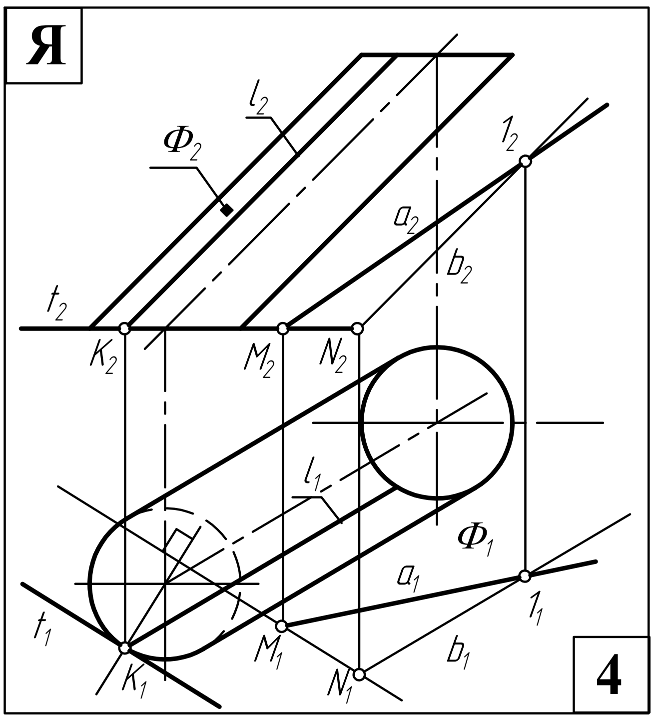
5. На каком чертеже построение касательной плоскости через точку на поверхности выполнено с использованием способа вращения?

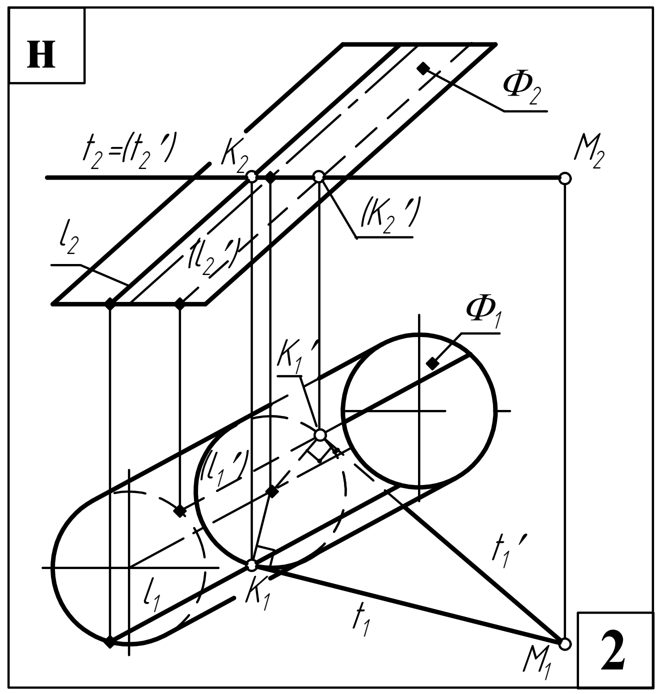
6. Где две касательные плоскости к поверхности, проведённые через прямую, занимают частное расположение?

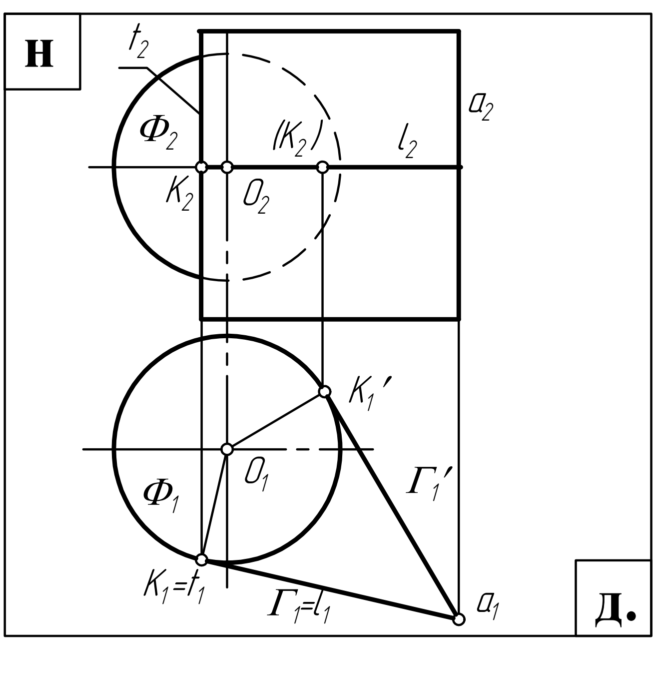
1	2	3	4	5	6

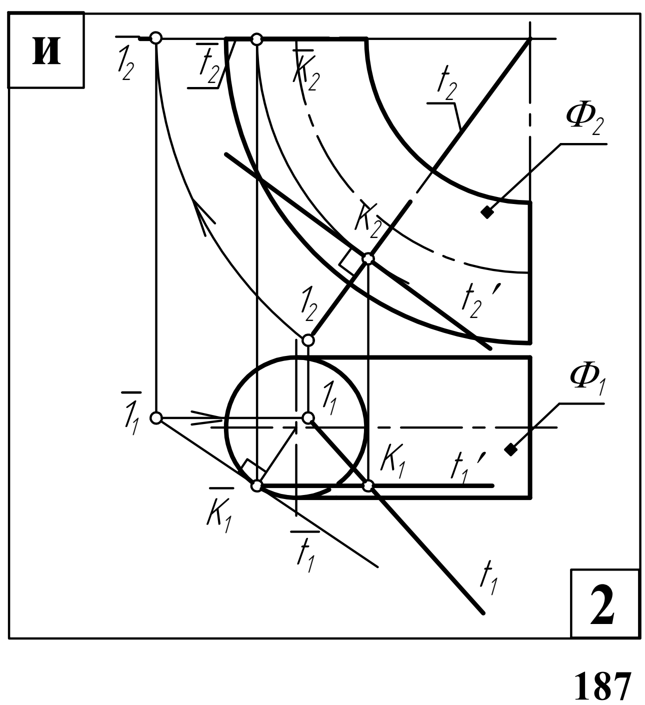

у
f2
n2
h2
Ф2
(K2′)
O2
K̄2
K2
Γ2
1̄2
12
n1
f1
h1
1̄1
O1
K1′
(K1)
Ф1
Γ1
11
к.


к
(l2)
l2′
t2=t2′
(K2)
M2
K2′
t1
K1
M1
l1
(K1′)
t1′
(l1′)
7


я
l2
Ф2
12
a2
b2
t2
K2
M2
N2
l1
Ф1
a1
11
t1
K1
M1
N1
b1
4

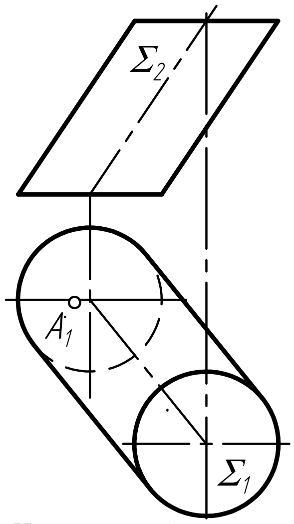
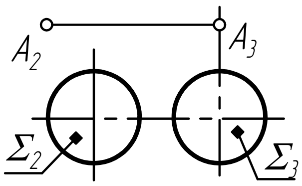
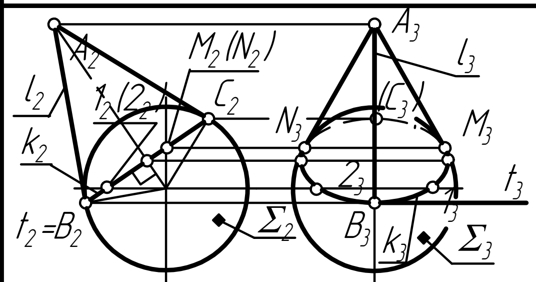
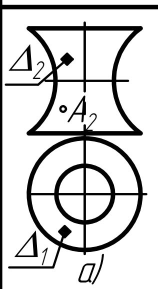
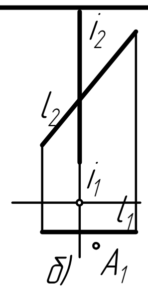
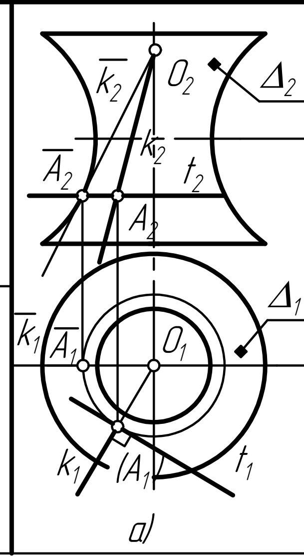
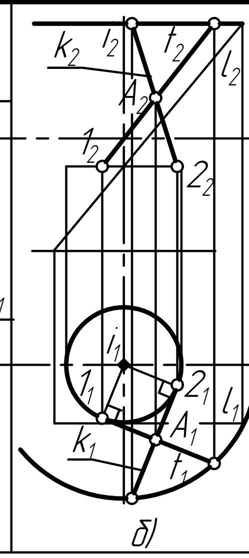
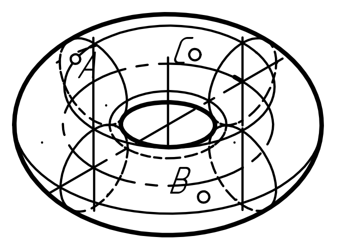

н
Ф2
t2=(t2′)
K2
M2
(K2′)
l2
(l2′)
Ф1
K1′
(l1′)
t1′
l1
K1
t1
M1
2


н
t2
a2
Ф2
(K2)
l2
K2
O2
K1′
Γ1′
O1
Ф1
K1=t1
Γ1=l1
a1
д.


и
12
t̄2
K̄2
t2
Ф2
K2
t2′
12
Ф1
1̄1
11
K1
t1′
K̄1
t̄1
t1
2

Опорный конспект по теме «Касательные плоскости»

Канва 14

№п/п	Условие задачи	Графическое решение	Определения и понятия
1	 Через точку $A \subset \Sigma$ провести касательную плоскость.	 Искомая плоскость определится образующей, проходящей через точку **A,** и касательной к окружности, которой принадлежит точка **A, Г(l∩t).**	**Обыкновенная точка** – точка поверхности, в которой может быть задана только **одна касательная плоскость.** **К особым** относят точки, в которых **касательная плоскость однозначно не определяется** *(вершина конуса, остроугольная вершина поверхности вращения, точки на ребре возврата).* **Параболические точки** *(названия связаны с кривизной поверхности и соответствуют индикатрисе Дюпена)* – поверхность и касательная плоскость **имеют общую линию, каждая точка которой является точкой их касания** *(цилиндр, конус, торс, кольцо)*.
2	 Через точку $A \not\subset \Sigma$ провести касательную плоскость. Сколько решений?	 Искомая плоскость может быть задана любой образующей касательного конуса и касательной к окружности **k** сферы в точке касания образующей, **Г(l∩t).** Решений ∞.	**Эллиптические точки** –поверхность расположена по одну сторону от касательной плоскости и **не имеет с ней общих точек, кроме точек касания.** Если у поверхности все точки эллиптические, то поверхность выпуклая *(сфера, тор-лимон, эллипсоид вращения, параболоид вращения, двуполостный гиперболоид).*
3	  Через точку **A,** принадлежащую данной поверхности, провести касательную плоскость, а) глобоид- тор $\Delta(\Delta_1,\Delta_2)$; б) однополостный гиперболоид Σ**(l,i).**	 	**Гиперболические точки–** поверхность расположена по обе стороны касательной плоскости. **Касаясь в точке, поверхность и плоскость пересекаются по двум линиям.** Поверхность, все точки которой гиперболические, имеет форму седла *(однополостный гиперболоид, косая плоскость, глобоидный тор).* *Тор-кольцо* центровая окружность делит на две половины. Со стороны экватора все точки будут **эллиптическими (B),** со стороны горла – **гиперболическими (C)**, точки очерковых параллелей – **параболические (A).** 

а) Искомая плоскость определится касательной **t** к окружности тора в точке **A** и касательной **k** к полумеридиану, найденной вращением вокруг оси тора, **Г(k∩t).** Плоскость **Г** пересекает **Δ** по двум кривым.
б) Искомая плоскость определится двумя образующими, проходящими через точку **A,** касательными к горлу гиперболоида, **Г(k∩t).** Очевидно, что касательная плоскость касается и пересекает гиперболоид по этим двум образующим.

Вопросы для самопроверки

1. Сколько касательных можно провести через данную точку поверхности?
2. Какие точки поверхности называются обыкновенными и какие особыми?
3. Что называют нормалью поверхности и как доказать, что нормаль, проведенная в любой точке поверхности вращения, пересекает ее ось?
4. Каких поверхностей касательная плоскость касается:
   а) в точке, **б)** по прямой, **в)** по окружности, **г)** по прямой и кривой, **д)** в точке и пересекает по двум образующим, **е)** в точке и пересекает по двум кривым?

В н и м а н и е ! ***Итоговый тест*** **14**

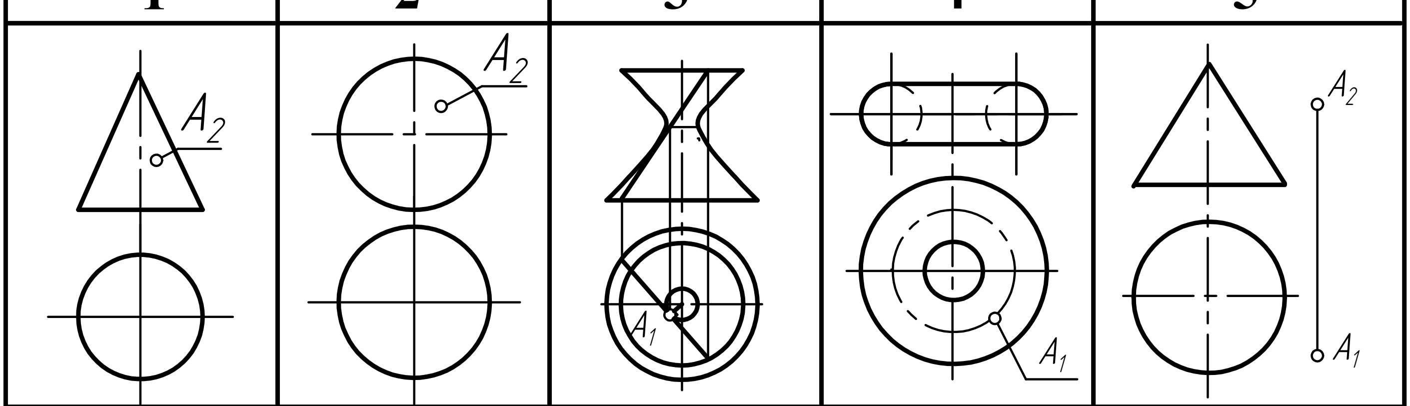
⊙ 1. На каком чертеже касательная плоскость, проведенная через точку **А,** будет иметь с поверхностью только одну общую точку?

◎ 2. На каком чертеже касательная плоскость, проведенная через точку **А,** пересечет поверхность по двум прямым?

⊕ 3. На каком чертеже касательная плоскость, проведенная через точку **А**, коснется этой поверхности по одной прямой?

⊖ 4. На каком чертеже через точку **А** можно провести две касательные плоскости?

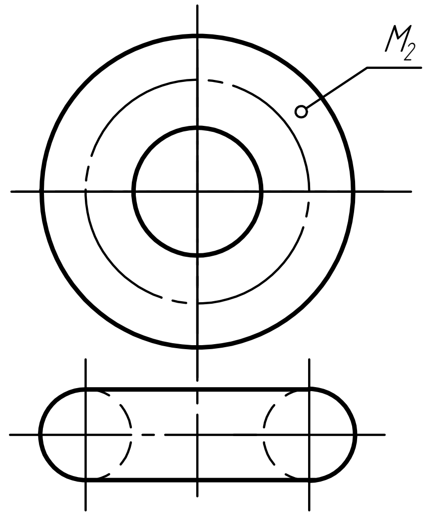
⦶ 5. На каком чертеже касательная плоскость, проведенная через точку **А**, коснется ее по окружности?



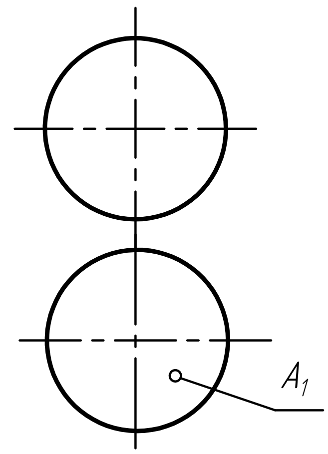
1	2	3	4	5
⊕	⊙	◎	⦶	⊖

З А Н Я Т И Е   14
Касательные плоскости

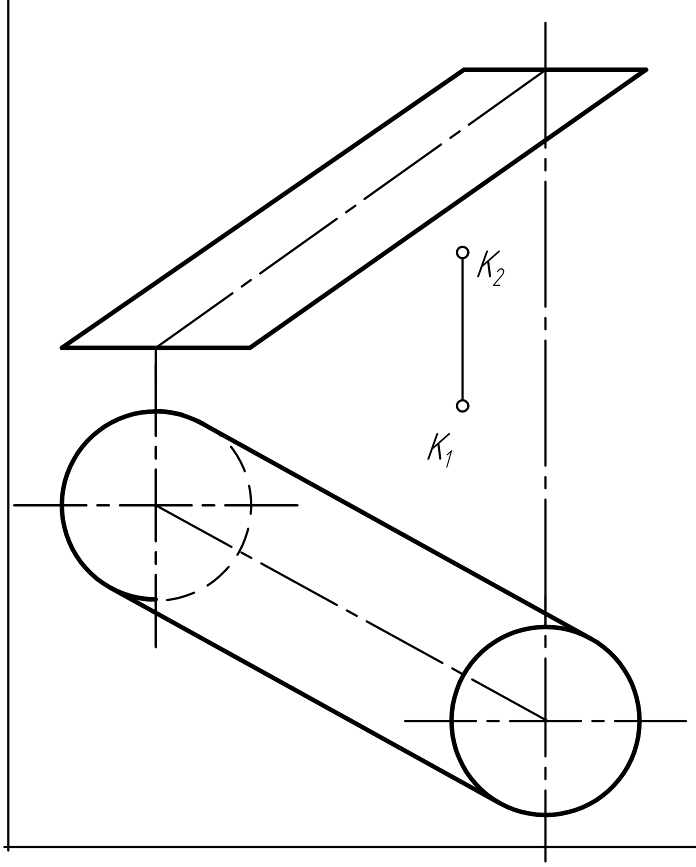
14.1 Постройте касательную плоскость к кольцу в заданной точке **М.**



14.2 Постройте касательную плоскость к сфере в заданной точке **А.**

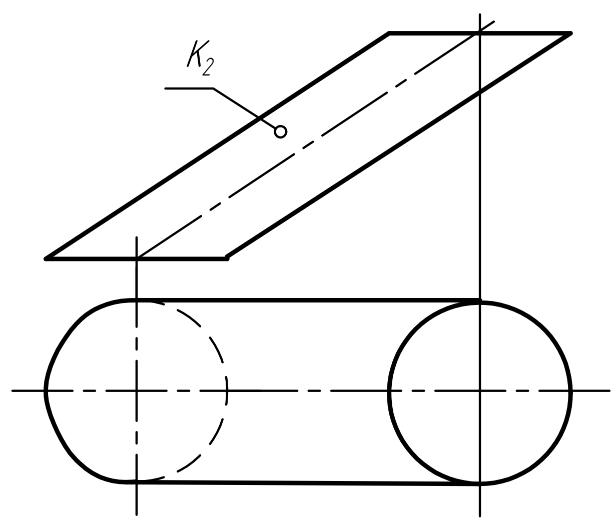


14.3 Через данную точку, находящуюся вне поверхности цилиндра, провести касательную плоскость.
Сколько решений?



14.4

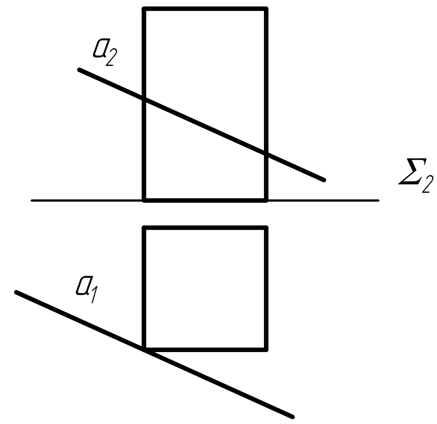
Через точку **К**, принадлежащую поверхности цилиндра, провести касательную плоскость.



Задачи для лидеров

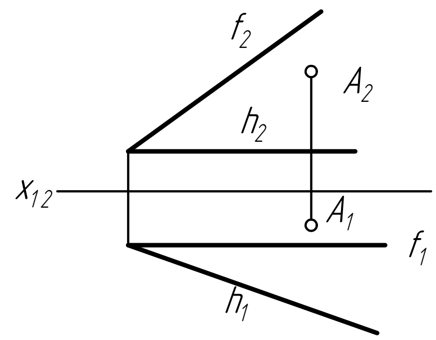
31Л

Построить сферу **Г** с центром $\mathbf{O} \subset a$,
если она касается передней грани
параллелепипеда и плоскости $\mathbf{\Sigma(\Sigma_2)}$.



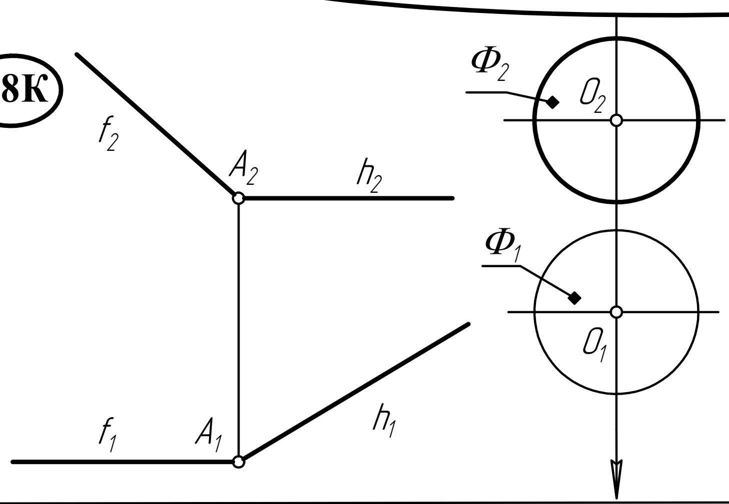
32Л

Вписать сферу наименьшего радиуса,
касающуюся двух плоскостей – плоскости
проекций $\mathbf{\Pi_1}$ и плоскости $\mathbf{\Omega(f \cap h)}$ –
и проходящую через точку **А.**



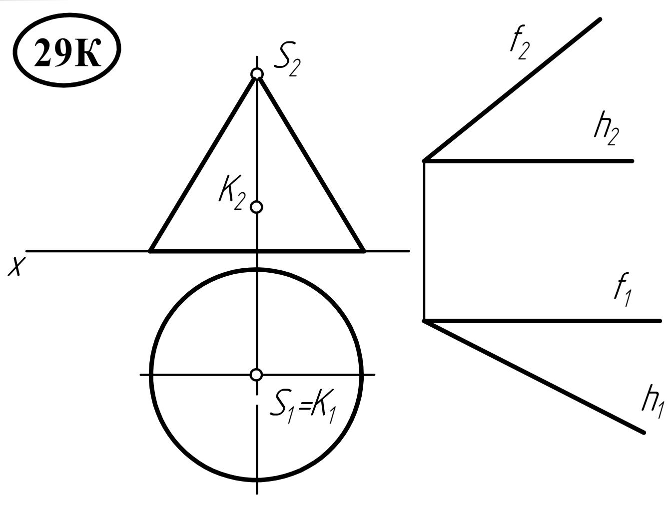
Задачки для самых крутых!

28К



Построить центр **О** сферы,
касающейся заданной сферы **Ф**
и заданной плоскости $\mathbf{\Sigma(f \cap h)}$
в точке **А.**

29К



Через точку **К** провести нормаль
к поверхности конуса, параллельную
плоскости $\mathbf{\Sigma(f \cap h)}$.
Сколько решений?

§ 15. Развёртки поверхностей

Развёртываемой называется поверхность, которая без складок и разрывов может быть совмещена с плоскостью.

Плоская фигура, получаемая в результате развёртывания поверхности на плоскости, называется **развёрткой.**

К **развёртывающимся** относятся следующие поверхности:

1) призматические, 2) пирамидальные,
3) цилиндрические, 4) конические,
5) торсовые.

Основные свойства развёрток поверхностей

1. Каждой точке (фигуре) на поверхности соответствует точка (фигура) на развёртке и наоборот.

2. Длины двух соответствующих линий поверхности и ее развёртки равны между собой, вследствие чего замкнутая линия на поверхности и соответствующая ей линия на развёртке ограничивают одинаковую площадь.

3. Угол между линиями на поверхности равен углу между соответствующими линиями на развёртке.

4. Прямой на поверхности соответствует также прямая на развёртке.

5. Параллельным прямым на поверхности соответствуют также параллельные прямые на развёртке.

6. Если линии, принадлежащей поверхности и соединяющей две точки поверхности, соответствует прямая на развёртке, то эта линия является геодезической, т. е. принадлежит поверхности и определяет кратчайшее расстояние между двумя точками этой поверхности.

Развёртки многогранных поверхностей

Для построения развёрток гранных поверхностей существуют три способа:

1) нормального сечения;

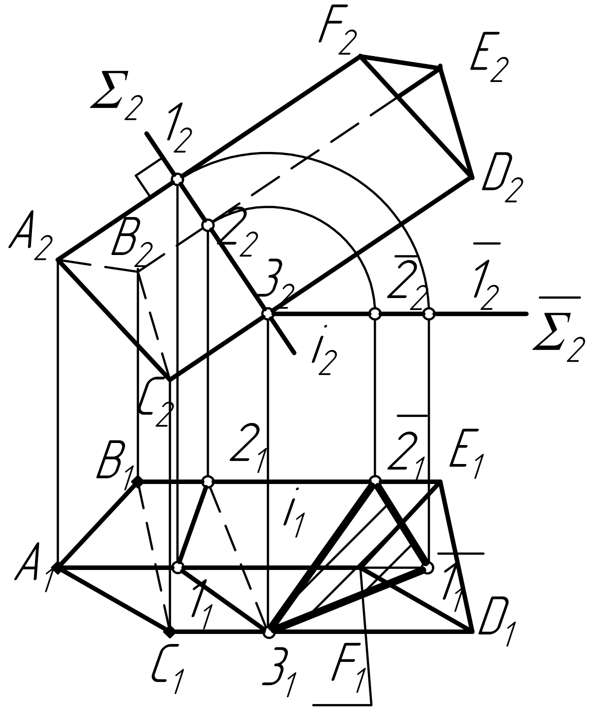
2) раскатки;

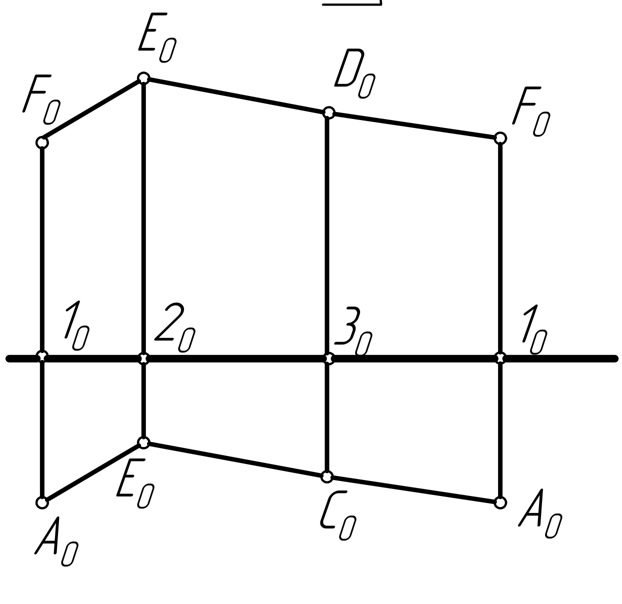
3) триангуляции (треугольников).

Первые два служат для развертки призматических поверхностей, третий – для пирамидальных.

Способ нормального сечения

<u>Пример 15.1.</u> Построить развёртку трехгранной призмы **ABCDEF.**





Решение

1. Проводим плоскость **Σ** перпендикулярно боковым рёбрам призмы, $\mathbf{\Sigma_2 \perp (A_2F_2)}$, строим фигуру, полученную в сечении.

2. Любым рациональным способом определяем истинный вид фигуры, полученной в сечении. В данном случае треугольник **(123)** поворачиваем вокруг фронтально проецирующей оси до положения уровня, $\mathbf{(\overline{\Sigma}_2)}$.

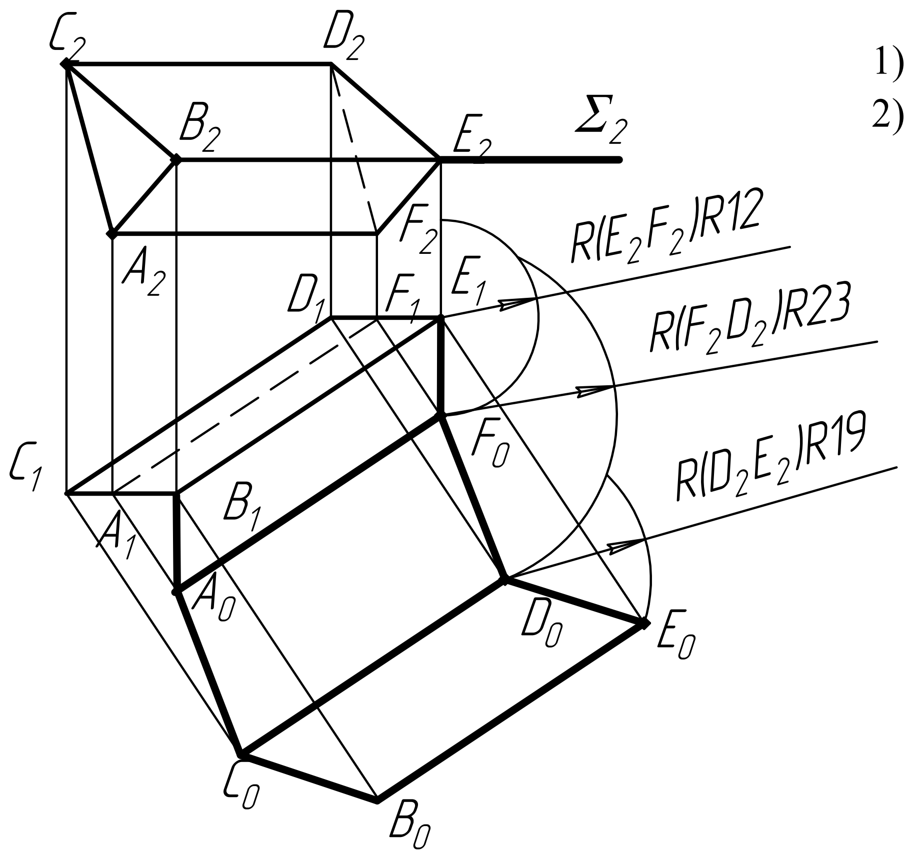
3. На свободном поле чертежа проводим горизонтальную прямую и от произвольной точки, которую считаем началом отсчета, откладываем отрезки, равные соответствующим сторонам истинного вида треугольника $\mathbf{3_1\overline{2}_1\overline{1}_1}$.

4. Через точки $\mathbf{1_0}$, $\mathbf{2_0}$, $\mathbf{3_0}$, $\mathbf{1_0}$ проводим прямые, перпендикулярные построенной прямой, и в строгой последовательности откладываем на них отрезки, равные действительным величинам ребер призмы.

С п о с о б   р а с к а т к и

Способ раскатки применяется для развёртки призм в том случае, когда ребра её параллельны одной плоскости проекций, а основания – другой.

__Пример 15.2.__ Построить развёртку призмы.



Р е ш е н и е

1) **BE** – в плоскости раскатки,

2) $\mathbf{F \rightarrow F_0 \subset \Delta_1 \perp B_1E_1}$;

3) $\mathbf{F_0 = R|EF| \cap \Delta_1}$

$\mathbf{|E_1F_0| = |E_2F_2|}$;

4) $\mathbf{A_0F_0} \rightarrow$ в плоскости раскатки, ось вращения.

$\mathbf{D_1 \rightarrow D_0 \subset \Delta_1' \perp A_0F_0}$,

$\mathbf{|F_0D_0| = |F_2D_2|}$;

5) $\mathbf{C_0D_0} \rightarrow$ в плоскости раскатки

$\mathbf{|D_0E_0| = |D_2E_2|}$.

1. Принимаем плоскость уровня, в которой находится ребро **BE**, за плоскость раскатки.

2. Грань **BAEF** поворачиваем вокруг горизонтали **BE** до совмещения с плоскостью раскатки. При этом точки будут перемещаться в плоскостях, перпендикулярных оси вращения. Значит, на $\mathbf{\Pi_1}$ эти плоскости вращения спроецируются в виде прямых, перпендикулярных $\mathbf{B_1E_1}$.

3. Из точки $\mathbf{E_1}$ радиусом, равным истинной длине отрезка **|EF|**, сделаем засечку, получим ребро **AF** в плоскости раскатки, $\mathbf{A_0F_0}$.

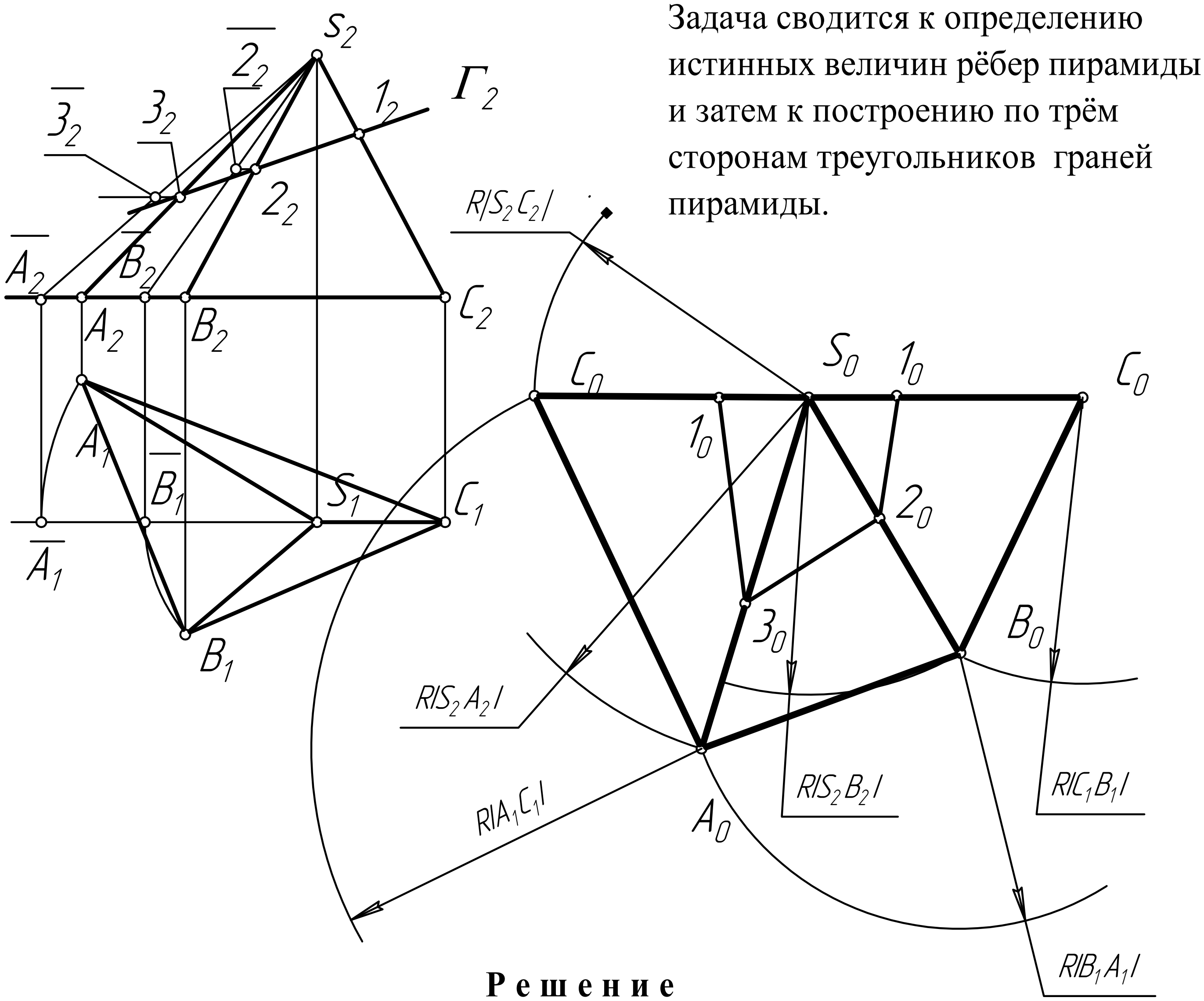
4. Перезададим ось вращения, теперь ею будет $\mathbf{A_0F_0}$, повернем вокруг нее до совмещения с плоскостью раскатки следующую смежную грань, далее построения аналогичны, см. чертеж.

Способ триангуляции

Способ треугольников применяют для построения развёрток пирамидальных поверхностей.

<u>Пример 15.3.</u> Построить развёртку боковой поверхности пирамиды **ABCS.**

Задача сводится к определению истинных величин рёбер пирамиды и затем к построению по трём сторонам треугольников граней пирамиды.



Р е ш е н и е

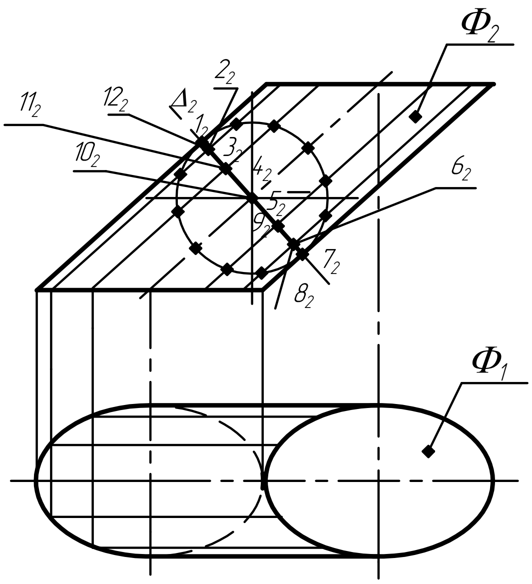
1. На свободном поле чертежа берем произвольно точку $\mathbf{S_0}$, откладываем в любом направлении $|\mathbf{S_0C_0}| = |\mathbf{S_2C_2}|$, так как ребро **SC** параллельно фронтальной плоскости проекций.

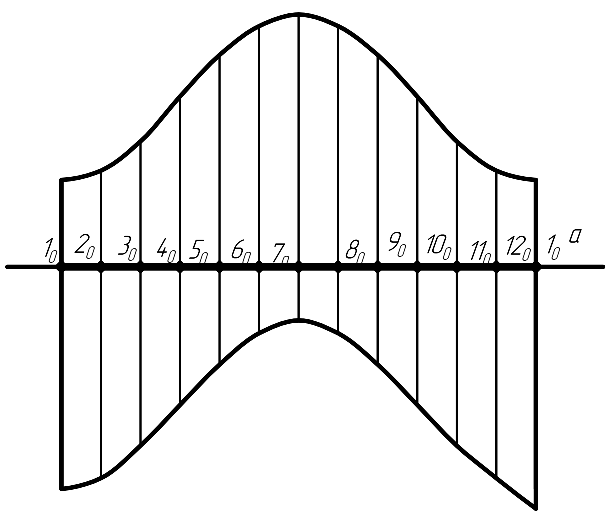
2. Из точки $\mathbf{C_0}$ радиусом, равным истинной длине отрезка $\mathbf{CB}=|\mathbf{C_1B_1}|$, описываем дугу. Из точки $\mathbf{S_0}$ проводим дугу радиусом, равным истинной длине ребра $\mathbf{SB} = |\mathbf{S_2B_2}|$, которую определили способом вращения вокруг горизонтально проецирующей оси, проведённой через вершину пирамиды. В пересечении этих дуг получили $\mathbf{B_0}$. Далее построения аналогичны.

Приближенные развёртки

Теоретически точно развёртываются только гранные, цилиндрические, конические и торсовые поверхности. В практике в связи с ограниченными размерами материалов, а также для удобства в изготовлении развёртываемые цилиндрические и конические поверхности заменяют вписанными в них призматическими или пирамидальными поверхностями. Этот прием носит название **аппроксимации.** Чем больше граней содержит вписанная поверхность, тем точнее развёртка, но она, соответственно, будет называться **приближенной.**

Пример 15.4. Выполнить приближенную развёртку цилиндрической поверхности.





Р е ш е н и е

1. Пересекаем цилиндрическую поверхность плоскостью **$\Delta(\Delta_2)$,** перпендикулярной оси цилиндра.

2. Делим окружность на одинаковое число частей, **n=12.**

3. Проводим на свободном поле чертежа прямую и откладываем на ней отрезок, равный длине окружности сечения. Делим его на **12** равных частей. (*Заменяем вписанной или описанной призматической поверхностью.)*

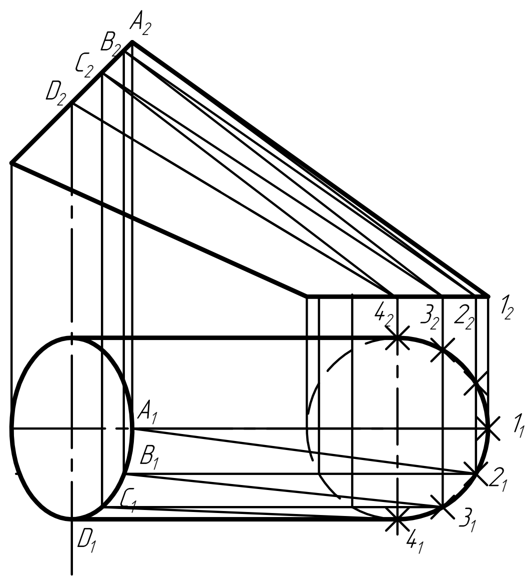
4. Проводим через полученные точки прямые, перпендикулярные первой прямой, и откладываем на них истинные длины соответствующих образующих цилиндра.

У с л о в н ы е   р а з в ё р т к и

Для построения развёрток неразвёртывающихся поверхностей их разбивают на части, которые можно приближенно заменить развёртывающимися поверхностями. Затем строят развёртки этих частей, которые в сумме дают **условную** развёртку.

Рассмотрим наиболее часто встречающиеся способы построения условных развёрток.

Пример 15.5. Выполнить развёртку поверхности цилиндроида.



Х о д   р е ш е н и я

Строим по принадлежности поверхности каркас из равномерно расположенных образующих параллельно плоскости параллелизма **(Π_2).**

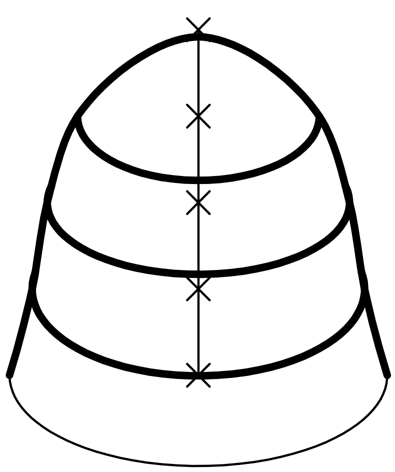
На участке между двумя смежными образующими проводим диагональ.

Полученные отсеки поверхности принимаем за плоские треугольники.

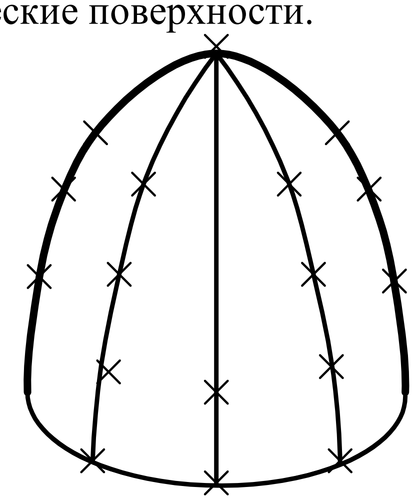
После этого осуществляем построение развёртки многогранной поверхности способом триангуляции.

Пример 15.6. Построение развёрток торовых поверхностей

При построении условных развёрток поверхностей вращения можно в качестве вспомогательных (*аппроксимирующих*) поверхностей использовать развёртывающиеся цилиндрические и конические поверхности.



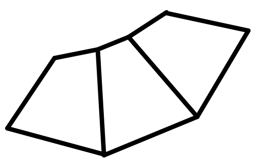
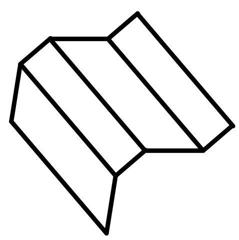
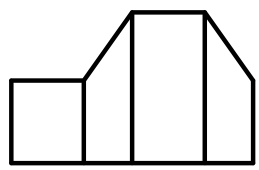
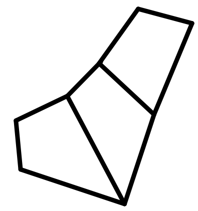
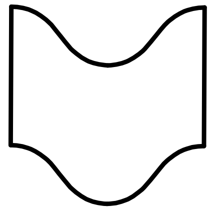
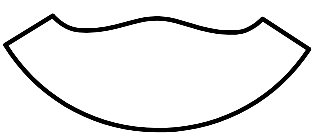
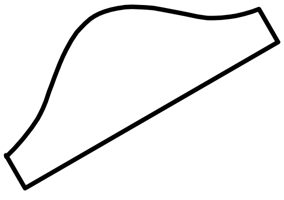
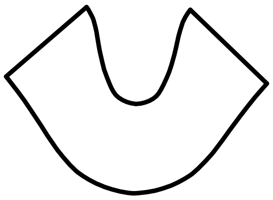
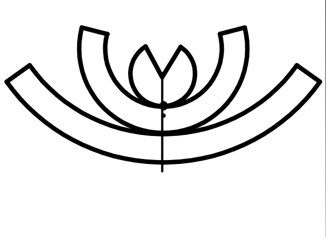
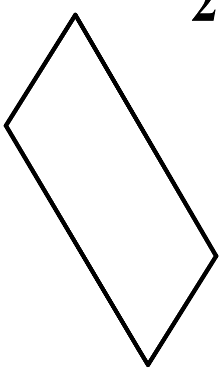
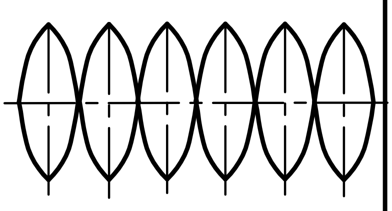
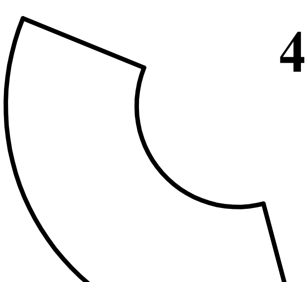
Поверхность параллелями разделена на ряд поясов, которые заменяют коническими поверхностями.



Поверхность разбита меридианами на равные доли, которые заменяют цилиндрическими поверхностями.

Проверьте себя!

Обучающий тест 15 по теме **«Развёртки»**

№ п/п	Вопрос	1	2	3	4
1	В каком случае изображена развёртка боковой поверхности прямой усечённой призмы?				
2	Где изображена развёртка боковой поверхности наклонной призмы?				
3	Найдите развертку боковой поверхности прямой усечённой пирамиды.				
4	На каком чертеже изображена развёртка наклонной усечённой пирамиды?				
		1 	**2** 	**3** 	**4** 
5	Где изображена развёртка боковой поверхности прямого усечённого кругового цилиндра?				
6	Найдите развёртку боковой поверхности наклонного цилиндра.				
7	Где изображена развёртка боковой поверхности прямого кругового усечённого конуса?				
8	Где изображена развёртка боковой поверхности наклонного усечённого конуса?				
		1 	**2** 	**3** 	**4** 
9	В каком случае дана условная развёртка сферы с использованием цилиндрических поверхностей?				
10	На каком чертеже изображена условная развёртка боковой поверхности тора с использованием аппроксимирующих конических поверхностей?				
		1 	**2** 	**3** 	**4** 

Ответы: 3 2 1 4 3 1 2 4 3 1

Это так интересно!

Геометрия, ты действительно увлекательная!

Тренировка 15 по теме «Развёртки»

На следующей странице размещены кадры с правильно решёнными задачами по рассматриваемой теме.

Расположите их по предлагаемой схеме и в верхней и нижней строках прочтёте *фамилии двух известных учёных, авторов популярной учебной литературы по предмету, посвятивших всю свою жизнь служению этой замечательной науке.*

Разместите в следующей последовательности:

1) проекции и развёртку прямой призмы со срезом;

2) проекции и развертку цилиндра с правой винтовой линией;

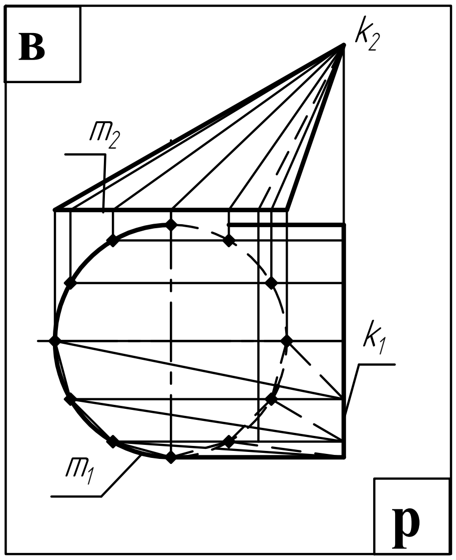
3) проекции коноида и его развертку, выполненную способом аппроксимирующих треугольников;

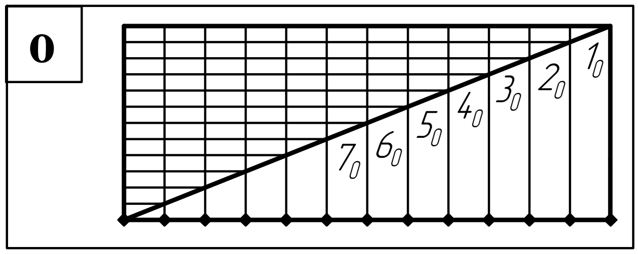
4) проекции цилиндра и его развёртку с левой винтовой линией;

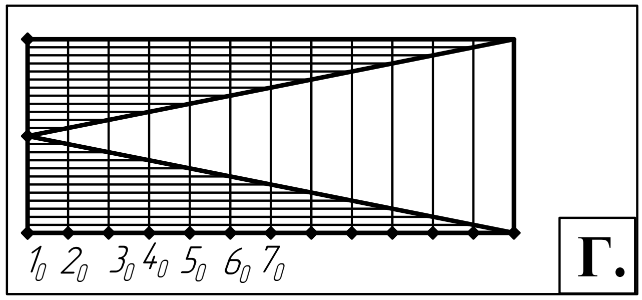
5) проекции конуса и его точную развёртку с нанесённой геодезической линией;

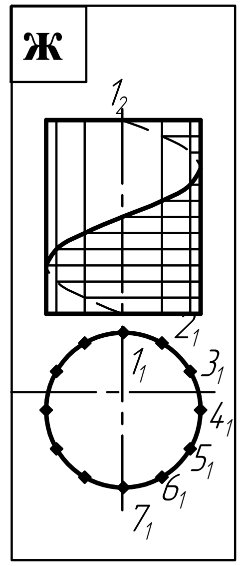
6) проекции и развёртку кругового цилиндра с правой и левой винтовыми линиями.

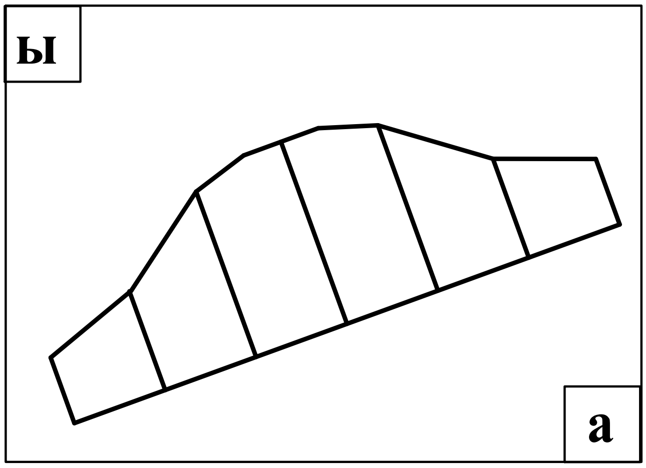
1.1	1.2	2.1	2.2	3.1	3.2	4.1	4.2	5.1	5.2	6.1	6.2

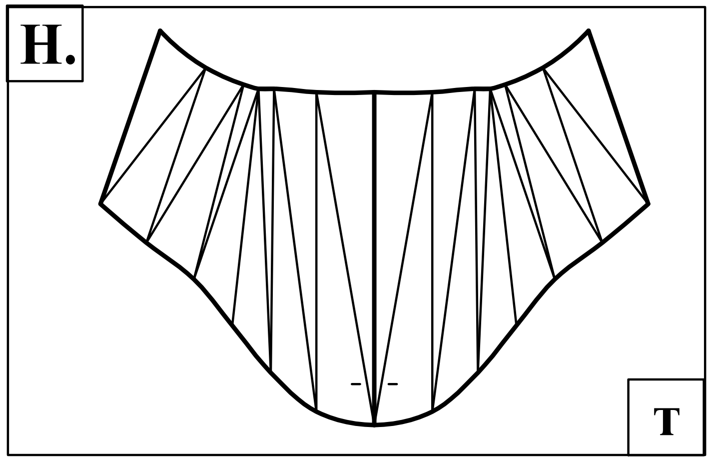

в
k2
m2
k1
m1
р

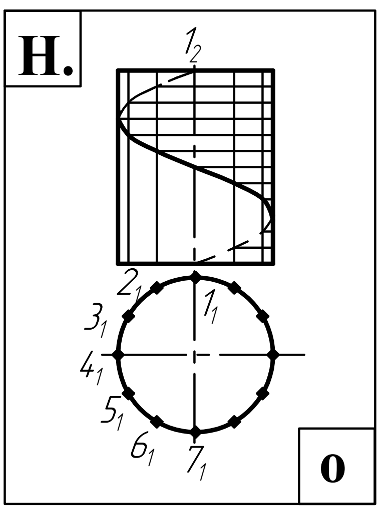

о
1_0 2_0 3_0 4_0 5_0 6_0 7_0

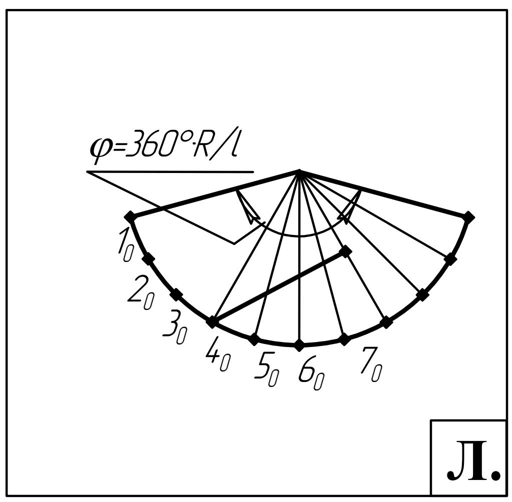

1_0 2_0 3_0 4_0 5_0 6_0 7_0
Г.

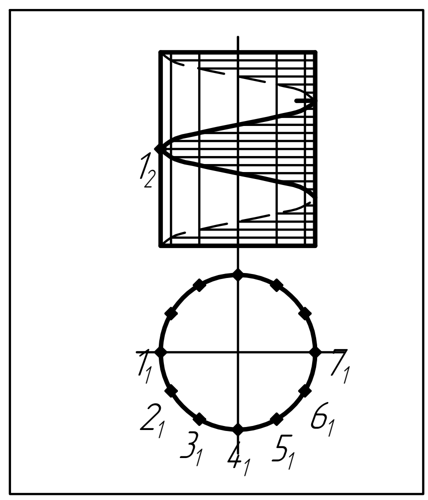

ж
1_2
1_1 2_1 3_1 4_1 5_1 6_1 7_1

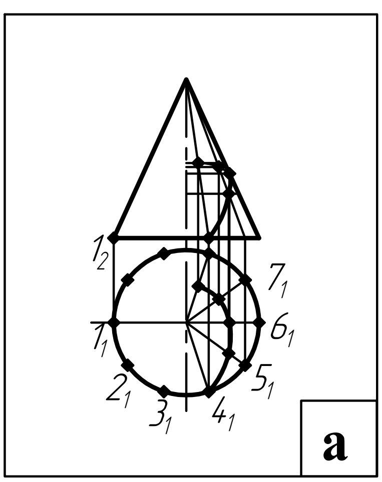

ы
а

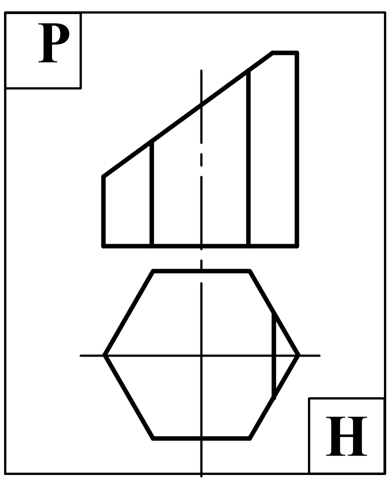

Н.
т

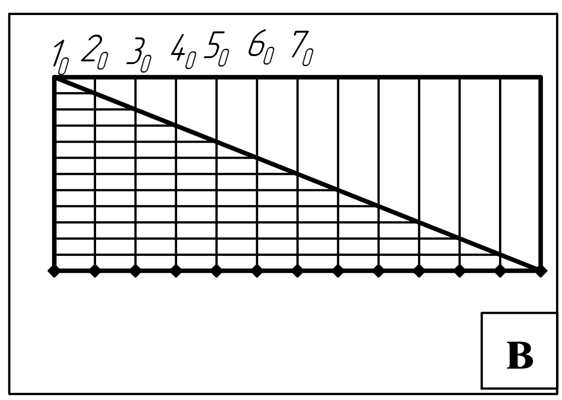

Н.
1_2
1_1 2_1 3_1 4_1 5_1 6_1 7_1
о


φ=360°·R/l
1_0 2_0 3_0 4_0 5_0 6_0 7_0
Л.


1_2
1_1 7_1
2_1 3_1 4_1 5_1 6_1


1_2
7_1
6_1
1_1
5_1
2_1 3_1 4_1
а


Р
Н


1_0 2_0 3_0 4_0 5_0 6_0 7_0
в

Опорный конспект по теме «Развёртки»

<u>Канва 15</u>

№п/п	Поверхности, наименования	Способы получения развёрток		Понятия и определения
1	**<u>Точные развёртки</u> возможны для:**		Точные	К развёртывающимся относятся поверхности, которые без складок и разрывов могут быть совмещены с плоскостью
	призматических, цилиндрических,	**Нормального сечения, раскатки;**		Плоская фигура, полученная в результате совмещения, носит название развёртки
	пирамидальных, конических,	**триангуляции *(треугольников)***		
	торсовых поверхностей.	триангуляции		
2	*Конические* *Цилиндрические* *Торсовые*	аппроксимируют пирамидальными аппроксимируют призматическими аппроксимируют треугольниками	Приближённые	**Аппроксимация** – замена вписанными или описанными гранными поверхностями или поверхностями вращения **Приближённая развёртка** – развёртываемую поверхность заменяют вписанной гранной
3	Неразвёртываемые поверхности вращения: *сфера, эллипсоиды, торовые, гиперболоиды и др.*	Аппроксимируют либо описанными, либо вписанными коническими или цилиндрическими поверхностями (их отсеками)	Условные	**Условная развёртка** – неразвёртывающиеся поверхности заменяют фрагментами гранных, конических или цилиндрических поверхностей, в некоторых случаях треугольниками
4	Поверхности Каталана: *цилиндроид, коноид, косая плоскость*	Аппроксимируют треугольниками		

Вопросы для самопроверки

1. Какие поверхности называют развертываемыми? Перечислите развертывающиеся поверхности.
2. Какие развёртки называют приближёнными, что означает слово «аппроксимация»?
3. Какие развёртки называют условными и для каких поверхностей их выполняют?
4. Перечислите знакомые виды линейчатых поверхностей, для которых не могут быть построены приближенные развёртки.
5. В чём сущность способа нормального сечения и для каких поверхностей он применим?
6. В чём сущность способа триангуляции и для каких поверхностей он применим?
7. Какую линию на развёртке называют геодезической?

В н и м а н и е ! ***Итоговый тест*** **15**

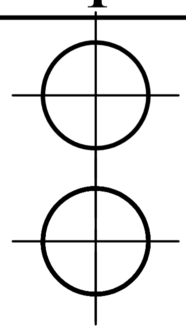
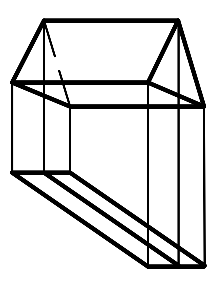
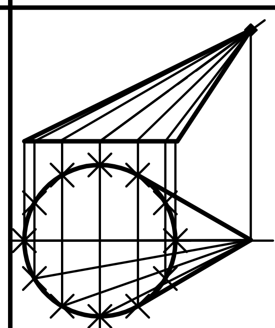
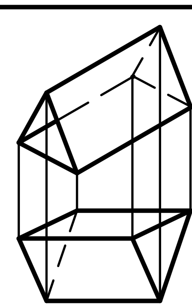
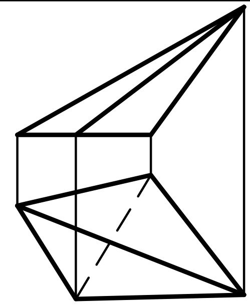
⊖ 1. На каком чертеже изображена поверхность, точную развёртку которой выполняют способом триангуляции (треугольников)?

⦶ 2. В каком случае для построения точной развёртки поверхности самым рациональным является способ раскатки?

⊕ 3. Укажите чертеж поверхности, для построения точной развёртки которой рационально применить способ нормального сечения.

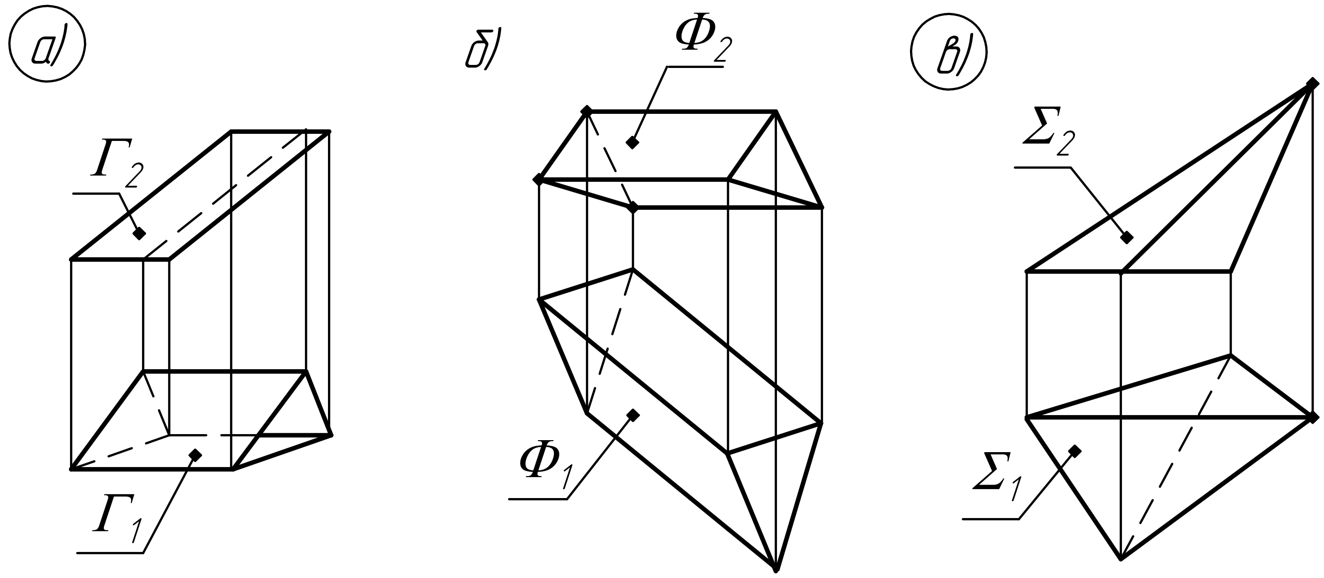
⊘ 4. Для какой поверхности возможно построение только условной развертки?

◎ 5. На каком чертеже выполнены предварительные построения для выполнения приближенной развертки ?

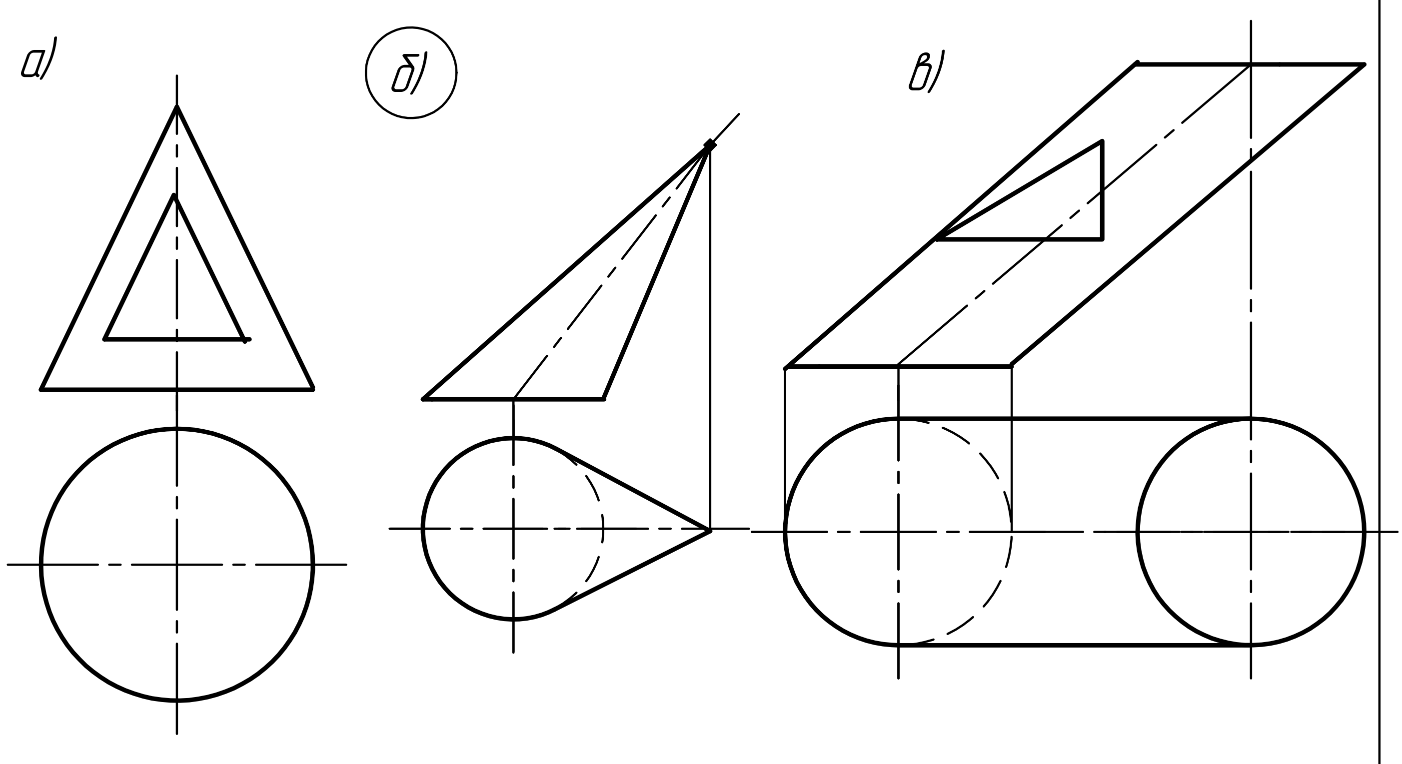
1	2	3	4	5
				
⊘	⦶	◎	⊕	⊖

З А Н Я Т И Е   15
Развёртки

15.1. Выполнить развертки заданных поверхностей.

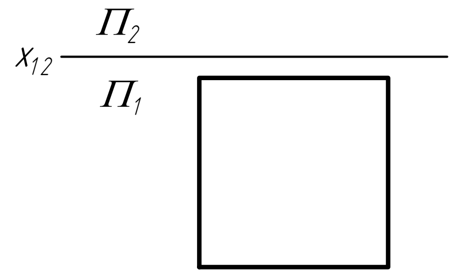


15.2. Выполнить приближенные развёртки заданных поверхностей.



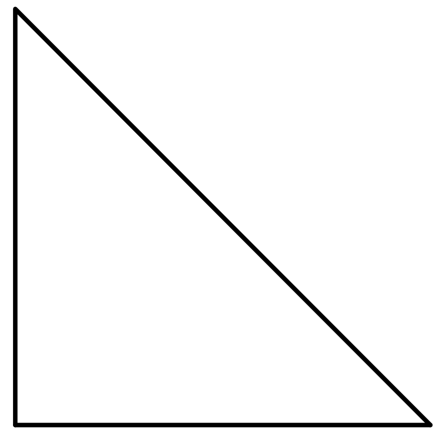
Задачи для лидеров

33Л



Дана совмещённая с плоскостью $\mathbf{\Pi_1}$ развёртка треугольной пирамиды. Построить её проекции. Сколько решений?

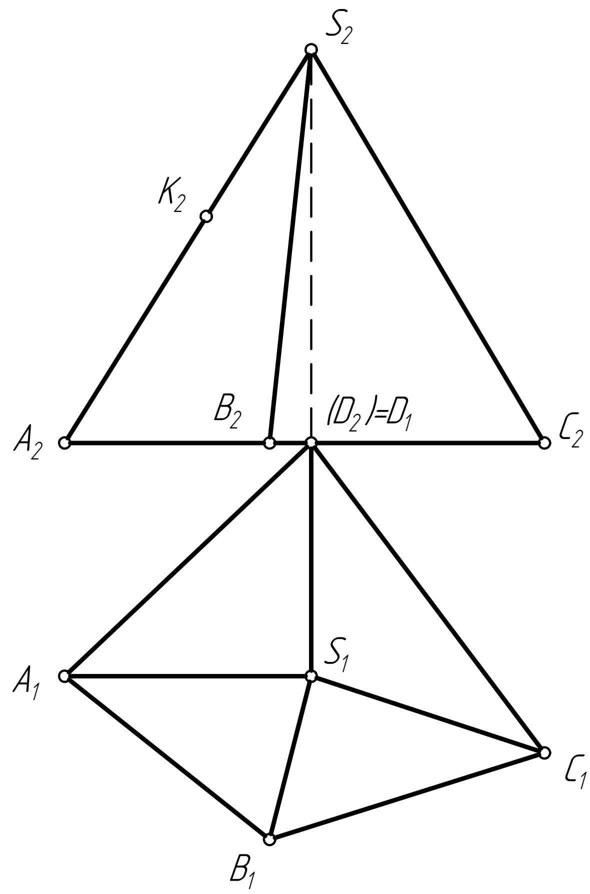
34Л



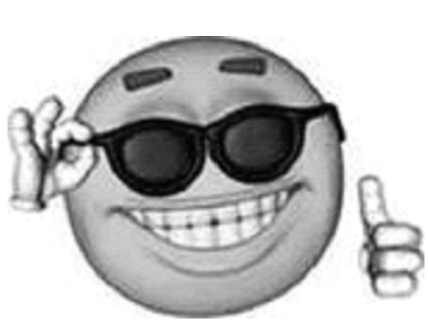
Дана развёртка боковой поверхности пирамиды с правильным основанием. Построить её проекции.

Задачки для самых крутых!

30К



Построить проекции линии, принадлежащей поверхности и соединяющей кратчайшим путём две точки на поверхности: точку **К**, принадлежащую ребру **SA,** и точку **М**, принадлежащую грани **BSC** и удалённую от точек **S** и **C** на **40 мм.**



§ 16. А к с о н о м е т р и я

Общие сведения

Аксонометрические изображения широко применяются благодаря хорошей наглядности.

<u>Аксонометрия</u> – древнегреческое слово, **аксон** – ***ось***, **метрео** – ***измеряю***, в переводе – ***измерение по осям.***

Способ аксонометрического проецирования состоит в том, что данная фигура вместе с осями прямоугольных координат, к которым она отнесена в пространстве, параллельно проецируется на некоторую плоскость, принятую за плоскость аксонометрических проекций (эту плоскость также называют картинной плоскостью). При этом направление проецирования не должно совпадать ни с одной из координатных осей. Для обеспечения взаимной однозначности между точками пространства и точками картинной плоскости проецируют и точку **A** и одну из её проекций (обычно горизонтальную $\mathbf{A_1}$). $\mathbf{A_1'}$ называют вторичной проекцией.

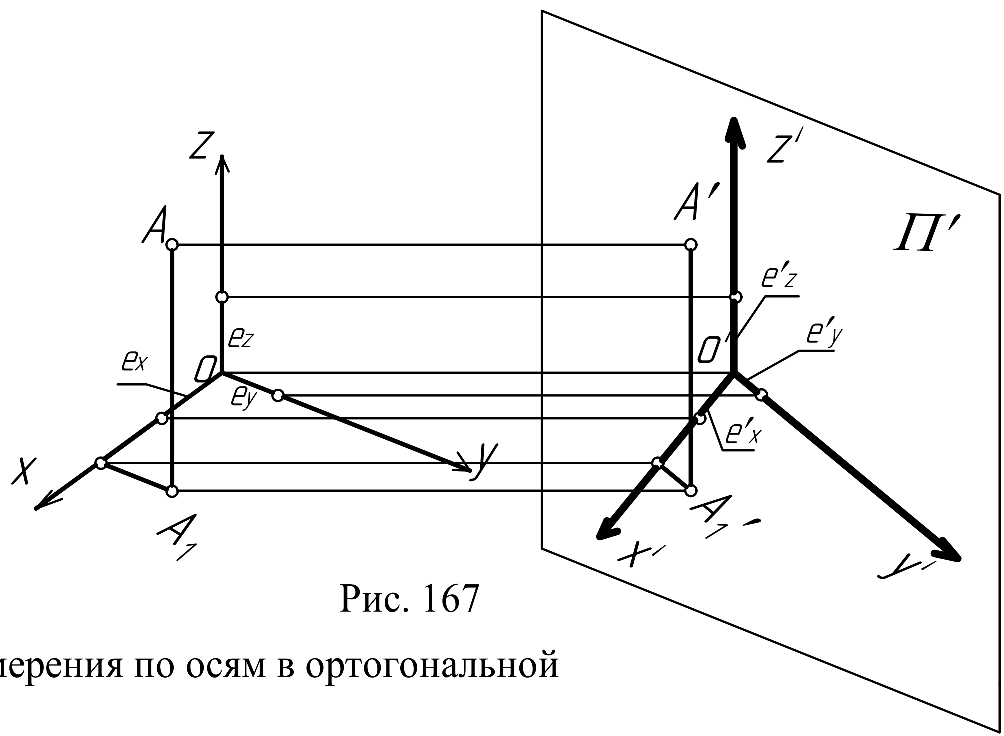


Рис. 167

e – единица измерения по осям в ортогональной системе.

$\mathbf{e_x = e_y = e_z}$ – равные взаимно перпендикулярные отрезки.

$\mathbf{e'_x = e'_y = e'_z}$ – проекции этих отрезков по соответствующим осям на аксонометрической плоскости проекций.

$$\mathbf{e'_x/e_x = u, \quad e'_y/e_y = v, \quad e'_z/e_z = w}$$

<u>Отношение аксонометрической проекции отрезка к самому отрезку называется коэффициентом искажения (показателем искажения) по данной оси.</u>

Классификация аксонометрических проекций

В зависимости от **направления проецирования** аксонометрические проекции бывают:

1) **прямоугольные** – направление проецирования **90°**,
2) **косоугольные** – направление проецирующих лучей ≠ **90°.**

По соотношению коэффициентов искажения:

1) изометрия → u = v = w– все коэффициенты искажения равны между собой;

2) диметрия → u = w ≠v – по двум осям коэффициенты искажения равны между собой;

3) триметрия → u ≠ v ≠w – все коэффициенты различные.

Основная формула аксонометрии

Для прямоугольных аксонометрических проекций сумма квадратов коэффициентов искажения равна:

$$U^2 + V^2 + W^2 = 2.$$

Для косоугольных аксонометрических проекций сумма квадратов коэффициентов искажения равна:

$$U^2 + V^2 + W^2 = 2 + ctg^2 \varphi,$$

где φ – угол направления проецирования.

Основная теорема аксонометрии
(теорема Карла Польке)

Три отрезка произвольной длины, принадлежащих одной плоскости и выходящих из одной точки под произвольными углами друг к другу, представляют параллельную проекцию трёх равных отрезков, отложенных на прямоугольных осях координат от начала.

На основании теоремы Карла Польке утверждаем, что аксонометрических проекций бесчисленное множество. На практике пользуются стандартными аксонометрическими проекциями.

Стандартные аксонометрии
(ГОСТ 2317 – 69*)

Данный стандарт рекомендует к применению на чертежах пять видов аксонометрий: две ортогональные (изометрическую и диметрическую) и три косоугольные (фронтальную и горизонтальную изометрические и фронтальную диметрическую).

В машиностроении и в вузовском курсе черчения в основном применяют **ортогональные изометрию и диметрию.**

Ортогональная изометрия

Расчетный показатель искажения по каждой из осей **U=V=W= 0,82.** Для упрощения пользуются **приведёнными** показателями искажения **U=V=W=1,** в результате изображение увеличивается **в 1,22 раза.**

Оси равнорасположены.

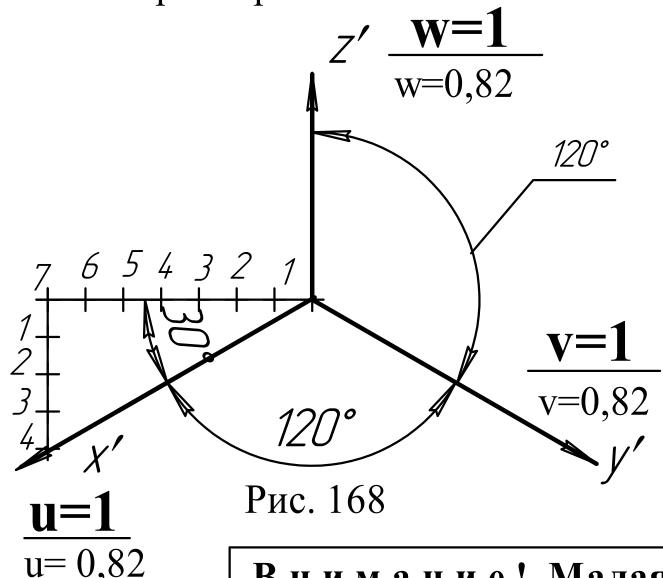


Рис. 168

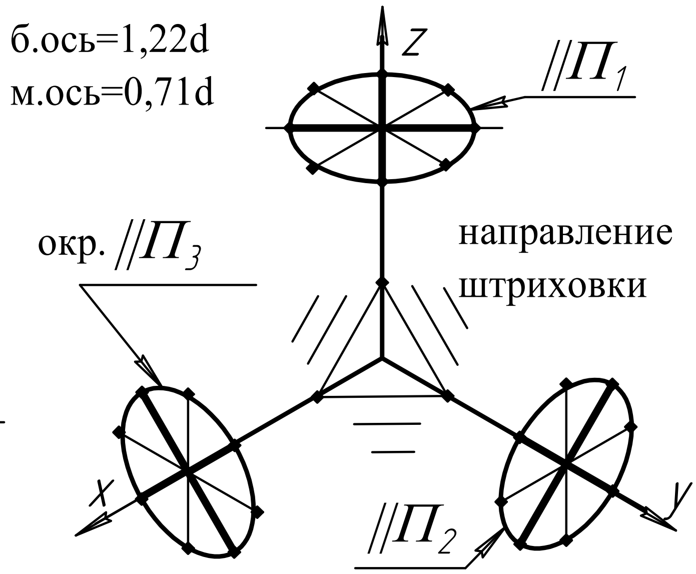


Рис. 169

В н и м а н и е ! Малая ось располагается на аксонометрической оси, перпендикулярной плоскости круга, большая ей перпендикулярна.

Прямоугольная диметрия

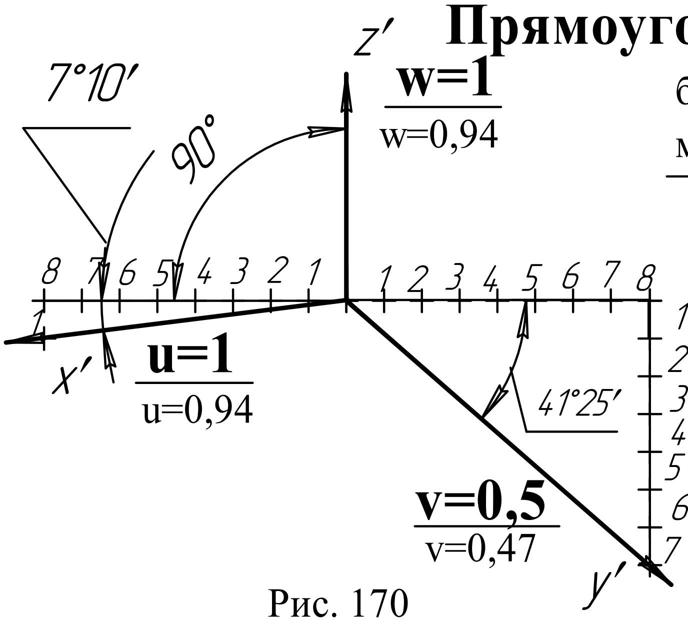


Рис. 170

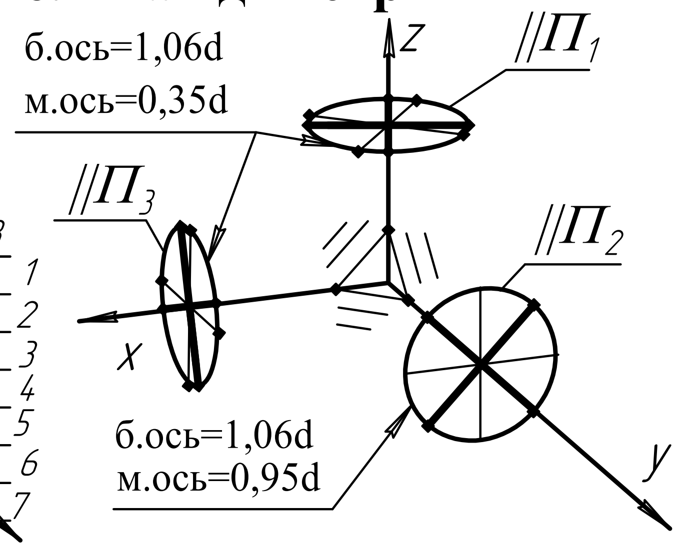


Рис. 171

Косоугольные аксонометрические проекции

1. Косоугольная фронтальная диметрия
(*кабинетная проекция*)

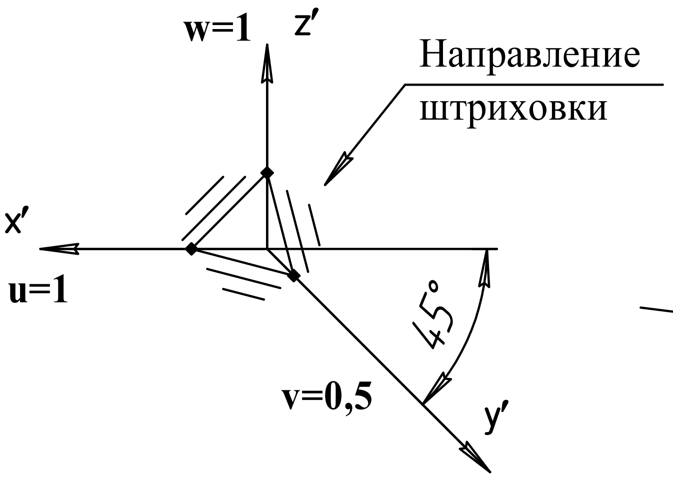


Рис. 172

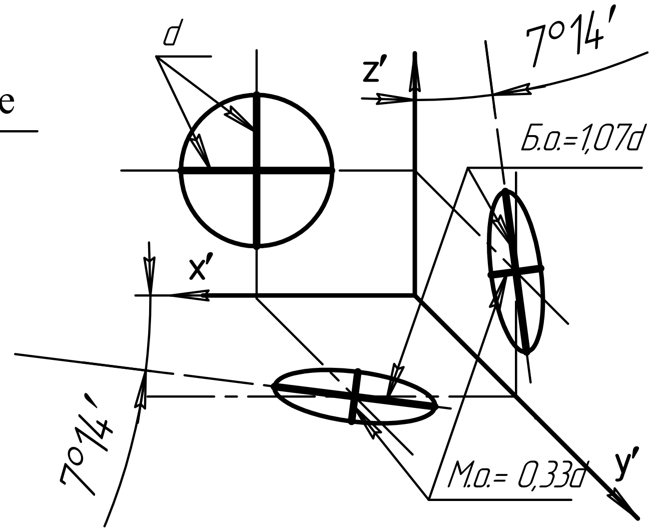


Рис. 173

2. Косоугольная фронтальная изометрия
(кавальерная проекция или кавальерная перспектива)

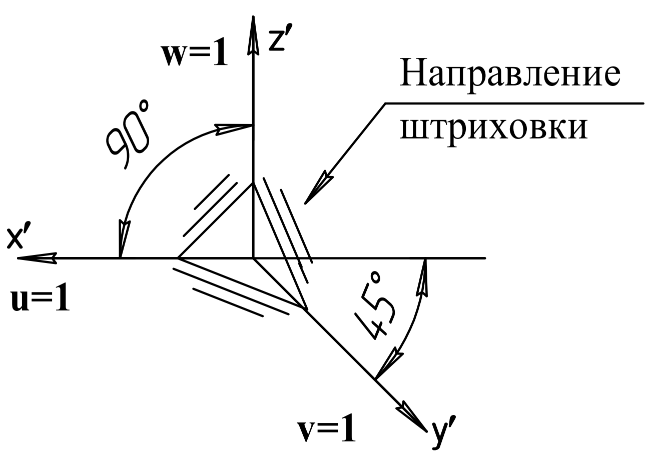


Рис. 174

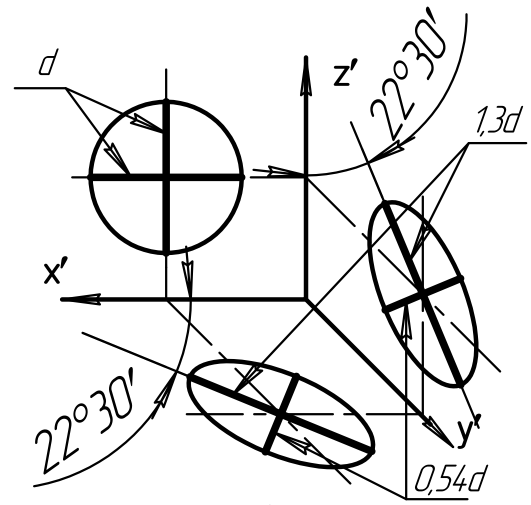


Рис. 175

3. Горизонтальная косоугольная изометрия
(при виде на предмет сверху называется ***"зенитной"*** перспективой, а при виде снизу – ***"лягушачьей"*** перспективой).

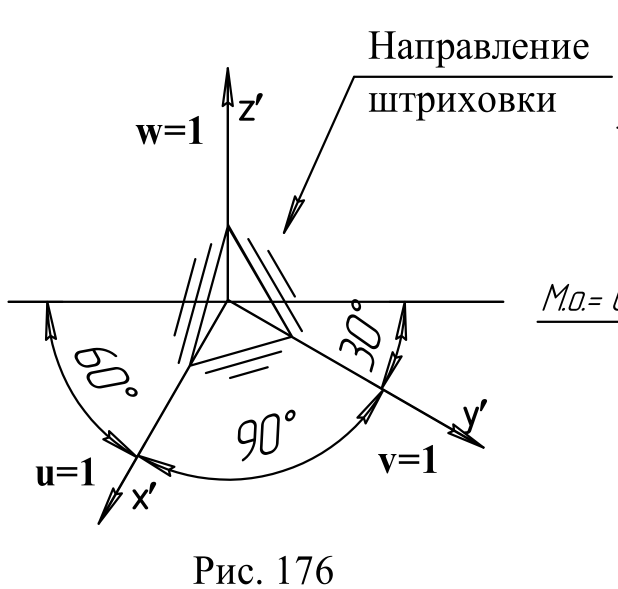


Рис. 176

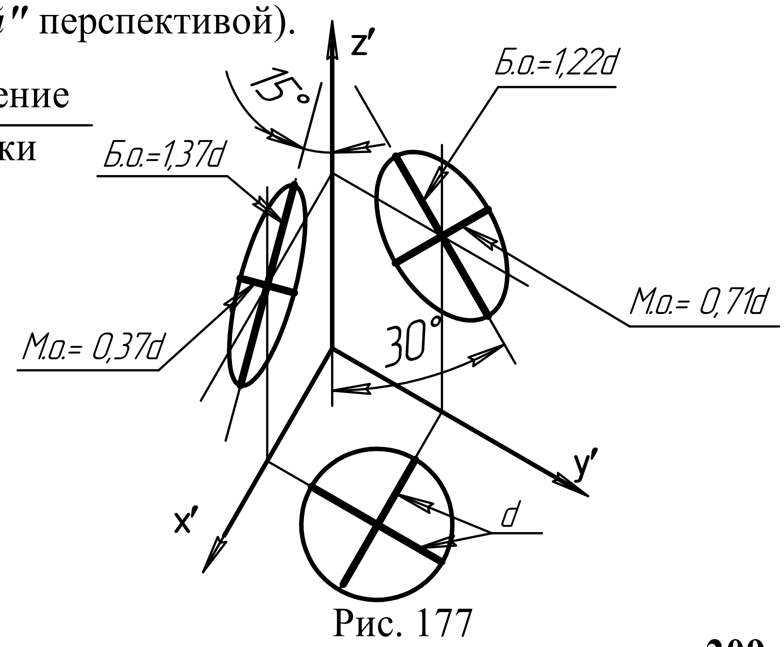
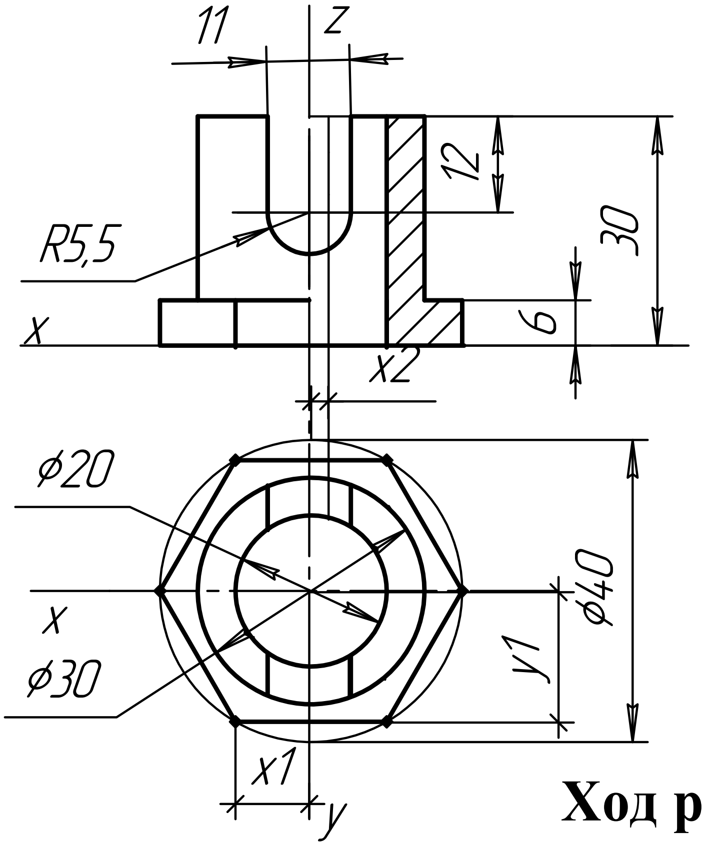
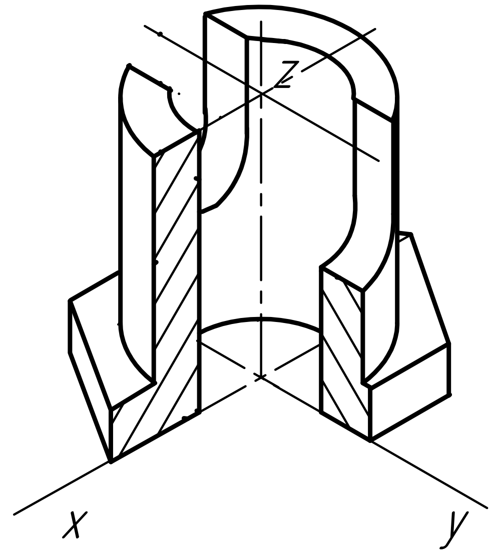


Рис. 177

Построение аксонометрических проекций

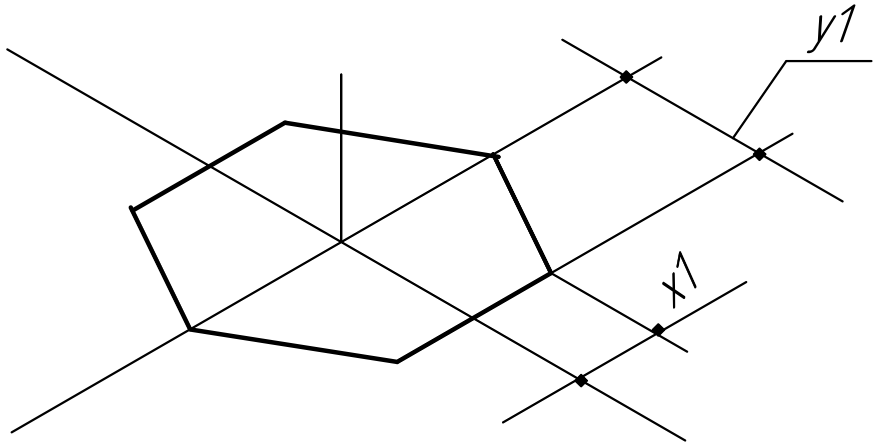
<u>П р и м е р 16.1.</u> Выполнить прямоугольную изометрию заданной на чертеже геометрической фигуры.





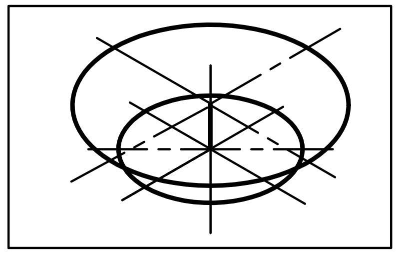
Ход решения

1. Вводим обозначение аксонометрических осей на чертеже детали.
2. На свободном поле чертежа проводим аксонометрические оси в изометрии под углом **120°** друг к другу.
3. Точку пересечения осей принимаем за центр нижнего основания шестигранной призмы и начинаем построения в изометрии строго параллельно аксонометрическим осям.

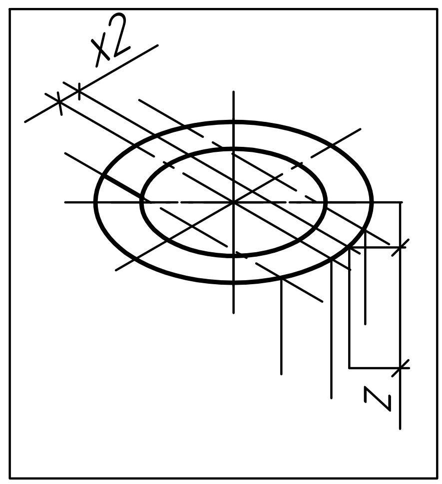


4. Отложив вверх по оси **OZ** высоту призмы **6** мм, выполняем аналогичные построения.

5. В плоскости нижнего шестиугольника строим эллипс внутреннего цилиндрического отверстия диаметром **20 мм,** большая ось его равна **1,22 × 20 = 24,4 мм**, малая ось равна **0,71 × 20=14,2 мм**.
   В плоскости верхнего шестиугольника строим эллипс по размерам наружного цилиндра, большая ось равна **1,22 ×30=36,6 мм**, малая ось равна **0,71 ×30=21,3** мм. Окружности параллельны Π_1, поэтому малую ось располагаем на оси **OZ,** а большую ей перпендикулярно.
   Затем, отложив по оси **OZ** высоту детали, получаем точку, в которой выполняем построение обоих эллипсов.



6. Построение паза выполняем, строго соблюдая параллельность его элементов основным аксонометрическим осям. Точки линии пересечения полуцилиндрического участка паза с наружным и внутренним цилиндрами строим при помощи образующих этих цилиндров. Сначала на заданном расстоянии по оси **OX** фиксируем точку, затем через нее проводим прямую, параллельную оси **OY,** до пересечения с эллипсом, от точки пересечения откладываем размер образующей по оси **OZ.**



7. При построении стандартных аксонометрий разрешается эллипсы заменять овалами.

Общие правила при выполнении аксонометрических проекций

1. Обозначаем оси в ортогональных проекциях.

2. Все построения проводим строго параллельно осям. Отрезки, непараллельные осям, строим по координатам концов отрезка. Кривые линий пересечения строим по координатам всех главных и нескольких промежуточных точек линий пересечения.

3. Разрез, как правило, выполняем плоскостями, обращенными к наблюдателю. Разрез в половину детали запрещен.

4. Ребра жесткости, тонкие стенки, спицы колёс, попадая в продольный разрез, режутся и штрихуются. Направление и угол штриховки должны соответствовать данной аксонометрии.

Тренировка 16 по теме
«Аксонометрия»

На следующей странице выполнены чертёж и аксонометрические проекции одной и той же геометрической фигуры. Расположив их в предлагаемой последовательности, вы прочтёте *самую популярную русскую фамилию.*

Несколько учёных с такой фамилией оставили свой значительный след в начертательной геометрии. Изучайте их работы и труды других авторов, решайтесь на собственный поиск, делайте свои открытия!

В начертательной геометрии ещё много неизвестного и очень интересного! Она ждёт ваших побед!

Найдите, где выполнены:

1) комплексный чертёж заданной фигуры;

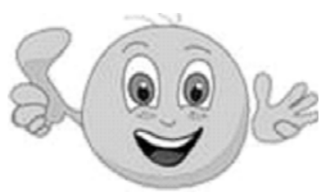
2) прямоугольная диметрия заданной фигуры;

3) косоугольная фронтальная диметрия заданной фигуры;

4) косоугольная фронтальная изометрия заданной фигуры;

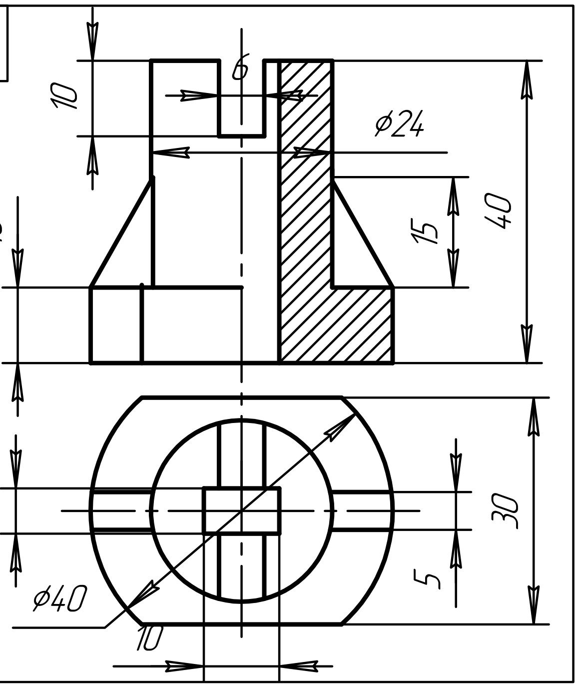
5) прямоугольная изометрия заданной фигуры;

6) косоугольная горизонтальная изометрия заданной фигуры.

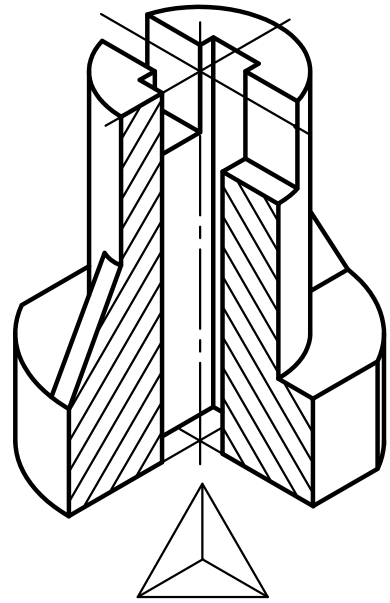


1	2	3	4	5	6

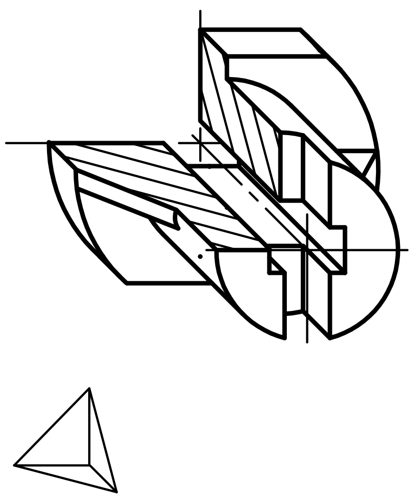
И



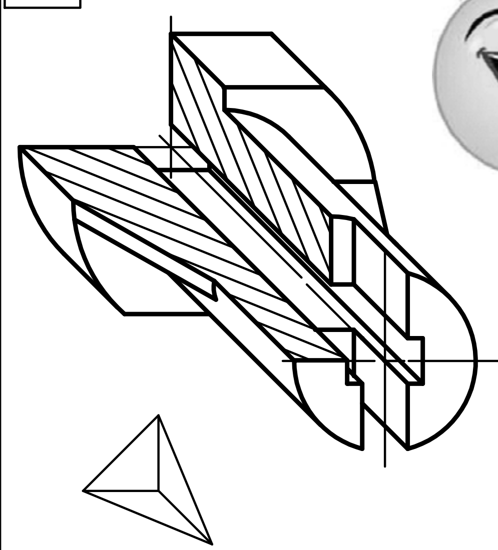
о



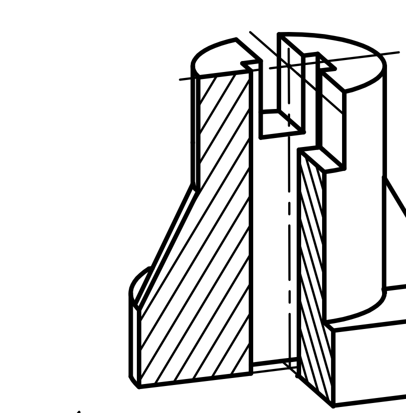
а



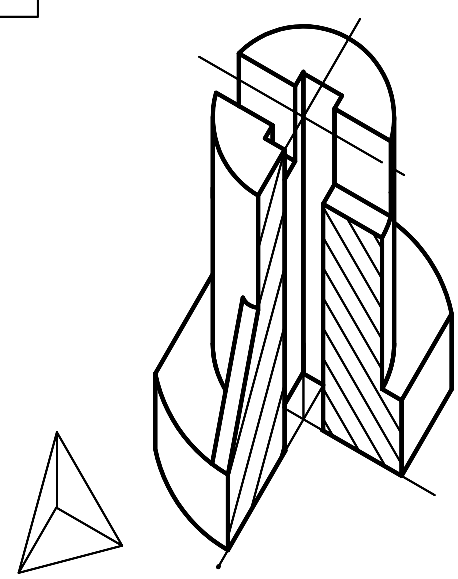
н



в

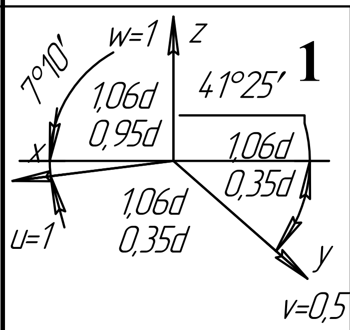
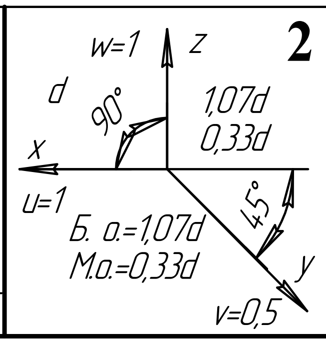
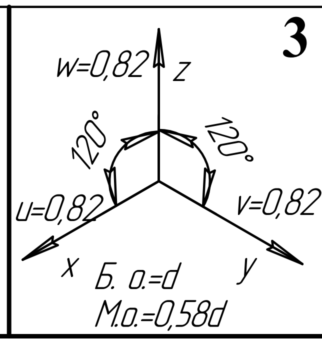
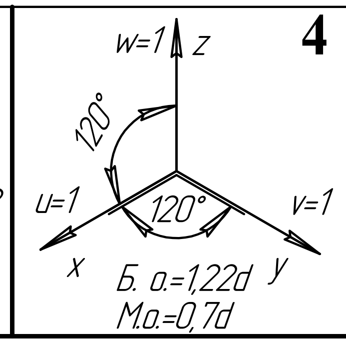


в



Проверьте себя!

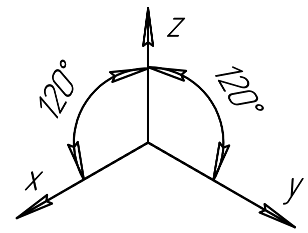
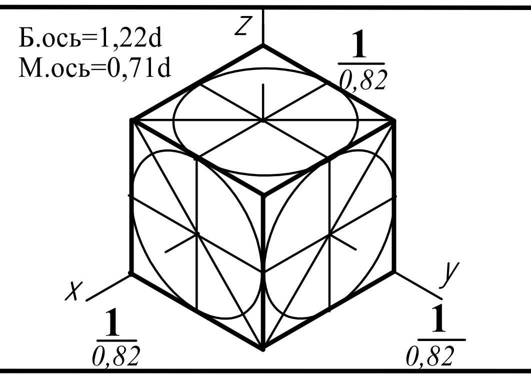
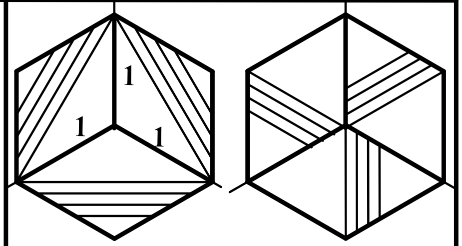
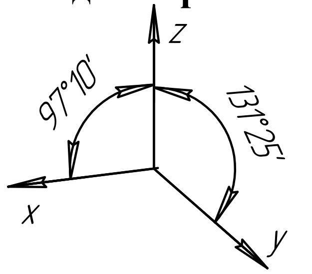
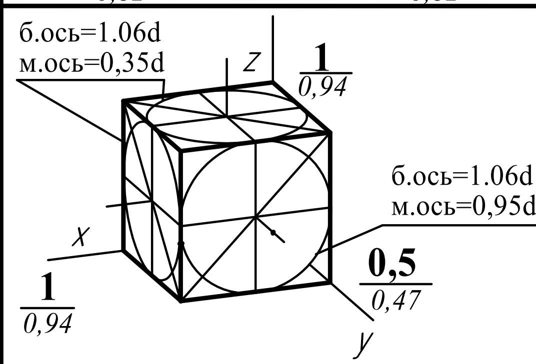
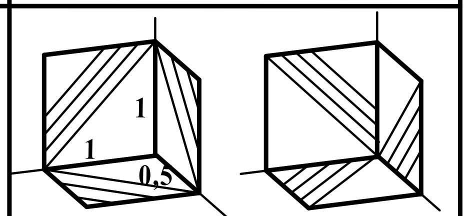
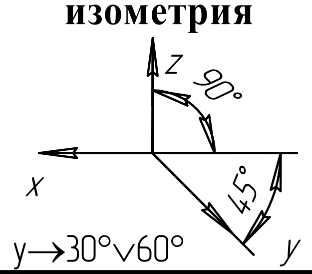
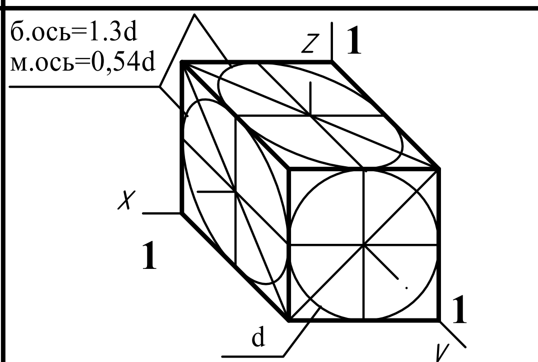
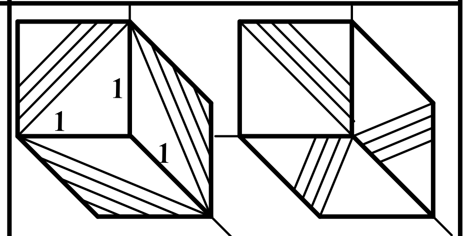
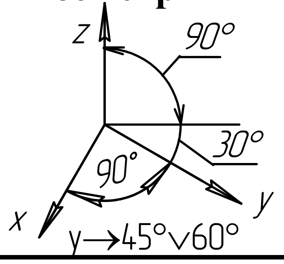
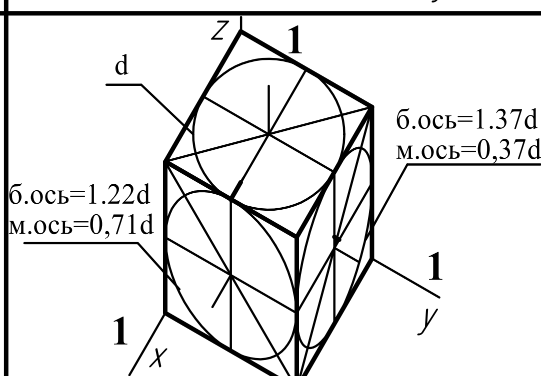
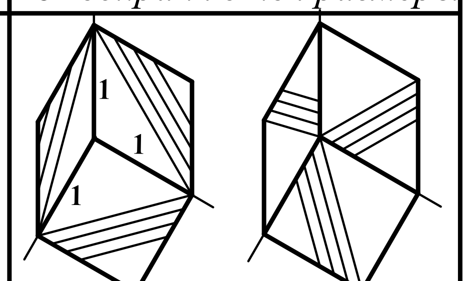
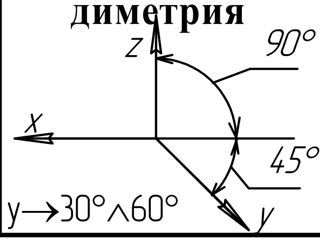
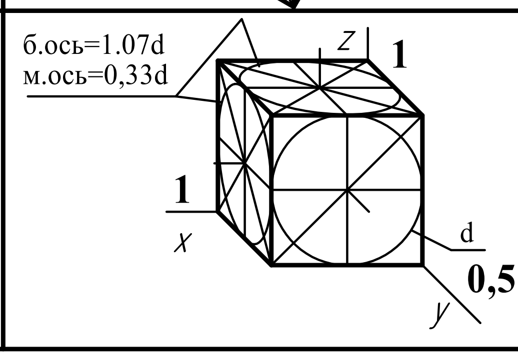
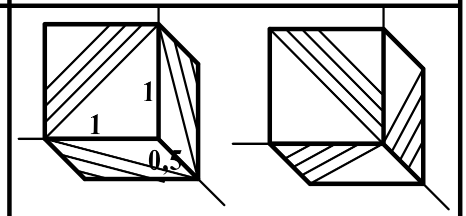
Обучающий тест 16 по теме **«Аксонометрия»**

№ п/п	Вопрос	1	2	3	4
1	*В каком случае вы видите данные точной прямоугольной изометрии?*				
2	*Где заданы атрибуты приведённой прямоугольной диметрии?*				
3	*Где изображены оси и заданы коэффициенты искажения приведённой прямоугольной изометрии?*				
4	*На каком чертеже заданы оси и коэффициенты искажения для косоугольной фронтальной диметрии?*				
					
5	*Где заданы размеры большой и малой осей эллипса в приведённой прямоугольной изометрии для окружности, параллельной Π_2?*				
6	*Где заданы размеры большой и малой осей эллипса в приведённой прямоугольной диметрии для окружности, параллельной фронтальной плоскости проекций?*				
7	*Где заданы размеры большой и малой осей эллипса в приведённой прямоугольной диметрии для окружности, параллельной горизонтальной плоскости проекций?*				
8	*Где заданы размеры большой и малой осей эллипса во фронтальной косоугольной диметрии для окружности, параллельной профильной плоскости проекций?*				
		Б. о.=1,22d М.о.=0,7d	Б. о.=1,07d М.о.=0,33d	Б. о.=1,06d М.о.=0,94d	Б. о.=1,06d М.о.=0,35d
9	*При решении практических задач для изображения фасада здания или детали, ограниченной преимущественно поверхностями вращения, рекомендуется использовать...*				
10	*Какую аксонометрию используют для изображения планов зданий, сооружений, планировки площадей и т. п.?*				
		Горизонтальную косоугольную изометрию	Точную прямоугольную изометрию	Фронтальную косоугольную изометрию	Приведённую прямоугольную диметрию

Ответы: 3 1 4 2 1 3 4 2 3 1

Опорный конспект по теме «Аксонометрия»

Канва 16

№п/п	Расположение осей	Куб и окружности в заданной аксонометрии	Штриховка в разрезах. Область применения
1	**Прямоугольная изометрия** 		 *Для пропорциональных фигур*
2	**Прямоугольная диметрия** 		 *Для фигур, диспропорциональных по ширине и глубине*
3	**Косоугольная фронтальная изометрия** 		 *Для фигур вращения, фасадов зданий, когда на* **xoz** *сохраняются размеры*
4	**Косоугольная горизонтальная изометрия** 		 *Для планов зданий, парков, площадей и т. д.*
5	**Косоугольная фронтальная диметрия** 		 *Для фасадов зданий и деталей вращения.*

Вопросы для самопроверки

1. В чем заключается способ аксонометрического проецирования?

2. Что называется коэффициентами (или показателями) искажения?

3. Как различаются аксонометрические проекции в зависимости от направления проецирования и от соотношения коэффициентов искажения?

4. Сформулируйте основную теорему аксонометрии и основную формулу аксонометрии для прямоугольного проецирования.

5. Какие стандартные аксонометрические проекции вы знаете?

6. Как располагается малая ось эллипса в прямоугольных изометрии и диметрии?

В н и м а н и е ! ***Итоговый тест*** **16**

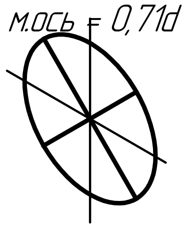
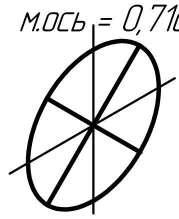
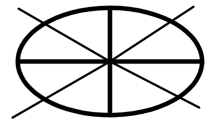
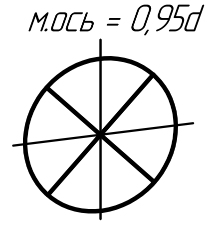
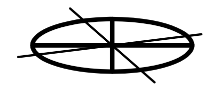
⊙ 1. На каком чертеже изображена окружность, параллельная Π_1, в приведённой прямоугольной изометрии?

⊖ 2. На каком чертеже изображена окружность, параллельная Π_2, в приведённой прямоугольной диметрии?

⦶ 3. На каком чертеже изображена окружность, параллельная Π_3, в приведённой прямоугольной изометрии?

⊘ 4. На каком чертеже изображена окружность, параллельная Π_2, в приведённой прямоугольной изометрии?

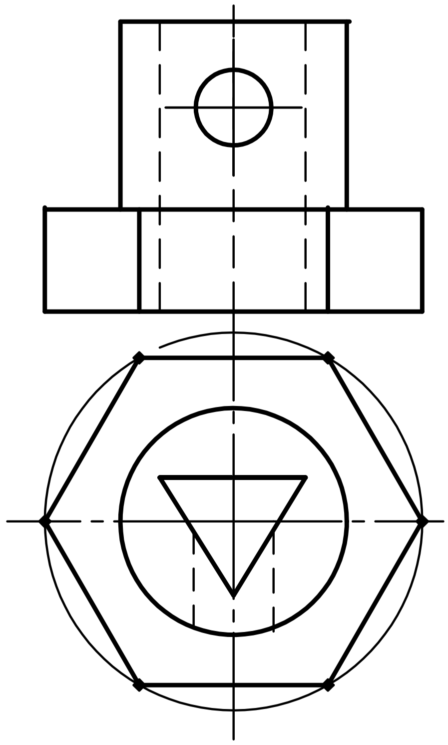
⊕ 5. На каком чертеже изображена окружность, параллельная Π_1, в прямоугольной приведённой диметрии?

1	2	3	4	5
б.ось = 1.22d м.ось = 0,71d 	б.ось = 1.22d м.ось = 0,71d 	б.ось = 1.22d м.ось = 0,71d 	б.ось = 1,06d м.ось = 0,95d 	б.ось = 1,06d м.ось = 0,35d 
⦶	⊘	⊙	⊖	⊕

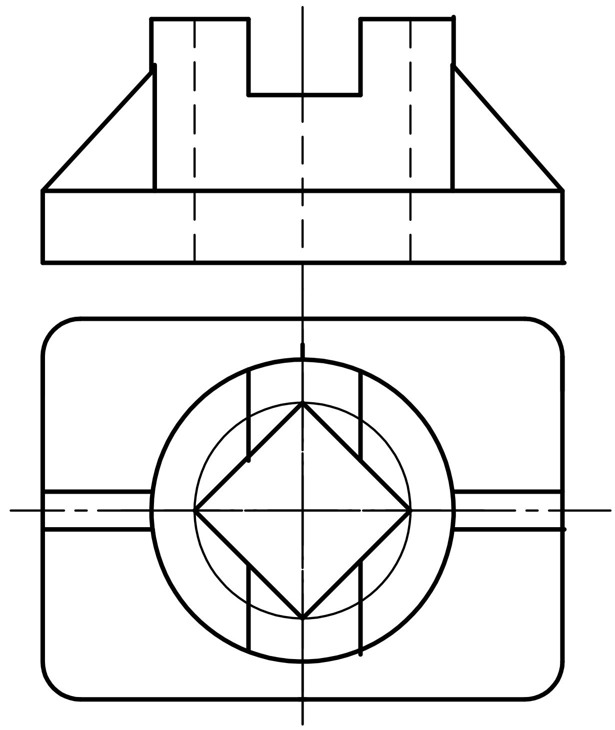
З А Н Я Т И Е 16

Аксонометрия

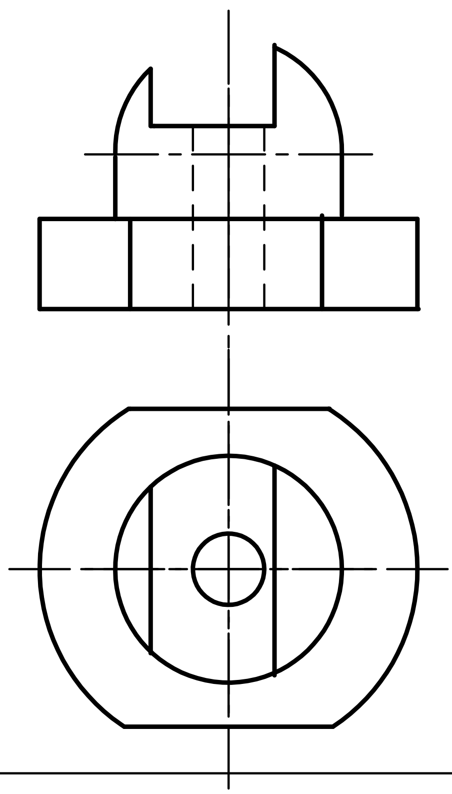
16.1 Выполнить прямоугольную изометрию данной фигуры.



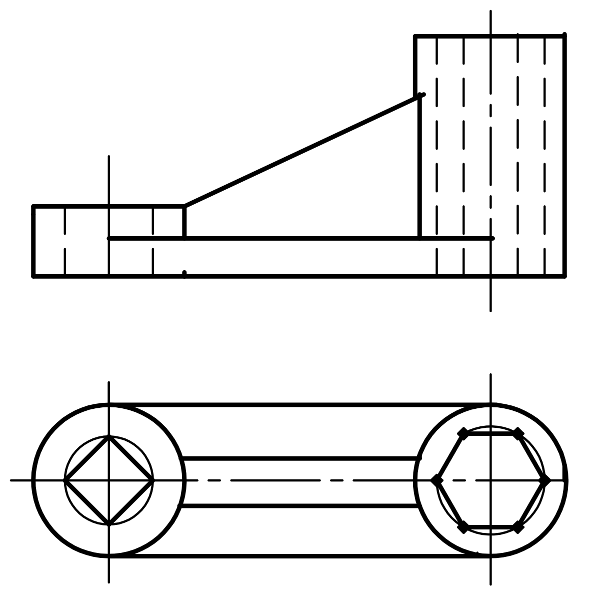
16.2 Выполнить прямоугольную диметрию данной фигуры.



16.3 Выполнить прямоугольную изометрию данной фигуры.



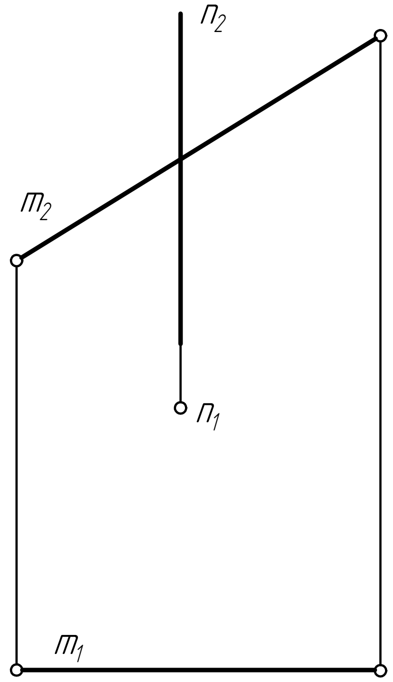
16.4 Выполнить прямоугольную диметрию данной фигуры.



Вырез на аксонометрии выполняем в четверть, обращенную к наблюдателю.

З а д а ч и д л я л и д е р о в

35Л



Даны проекции определителя гиперболического параболоида (косой плоскости) $\mathbf{\Sigma[m,n,\Gamma||\Pi_1]}$.

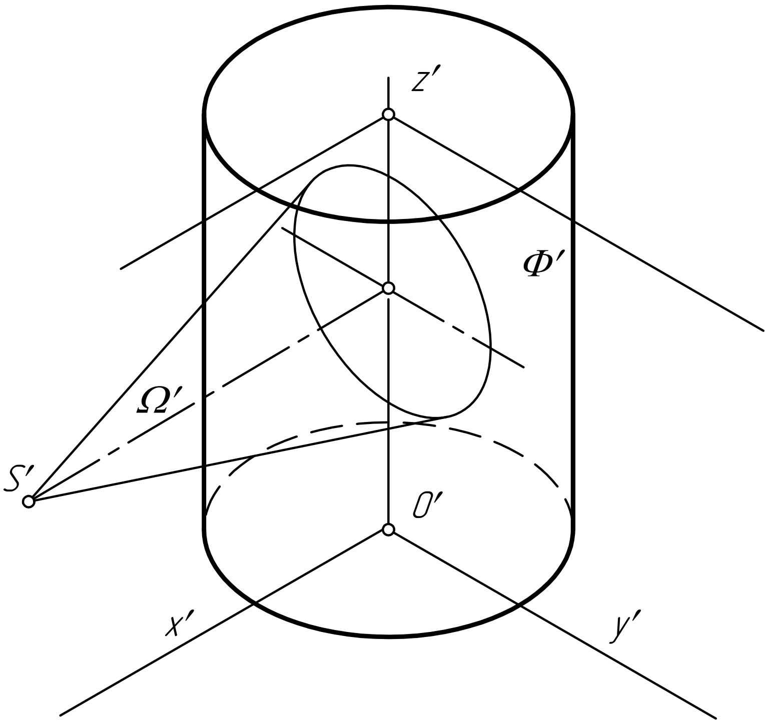
Построить прямоугольную изометрию заданной поверхности, предварительно выполнив построение её проекций.

Задачки для самых крутых!

31К

Построить линию пересечения цилиндра вращения $\mathbf{\Phi}$ и конуса вращения $\mathbf{\Omega}$. Ось цилиндра совпадает с осью **z**, ось конуса параллельна оси **x** и лежит в плоскости **xz**, а его основание – в плоскости **yz.**

К ортогональным проекциям не прибегать.



Объем и содержание задания 1

(Эпюр № 1)

По мере изучения используемого в задании материала и не позднее **<u>седьмого занятия</u>** следует приступить к выполнению контрольного домашнего задания – эпюра №1.

Задание состоит из **трех задач.**

<u>Первая задача –</u> задана какая-то плоскость, задана одна проекция кривой **m,** принадлежащей этой плоскости, требуется достроить недостающую проекцию этой кривой по четырем точкам.

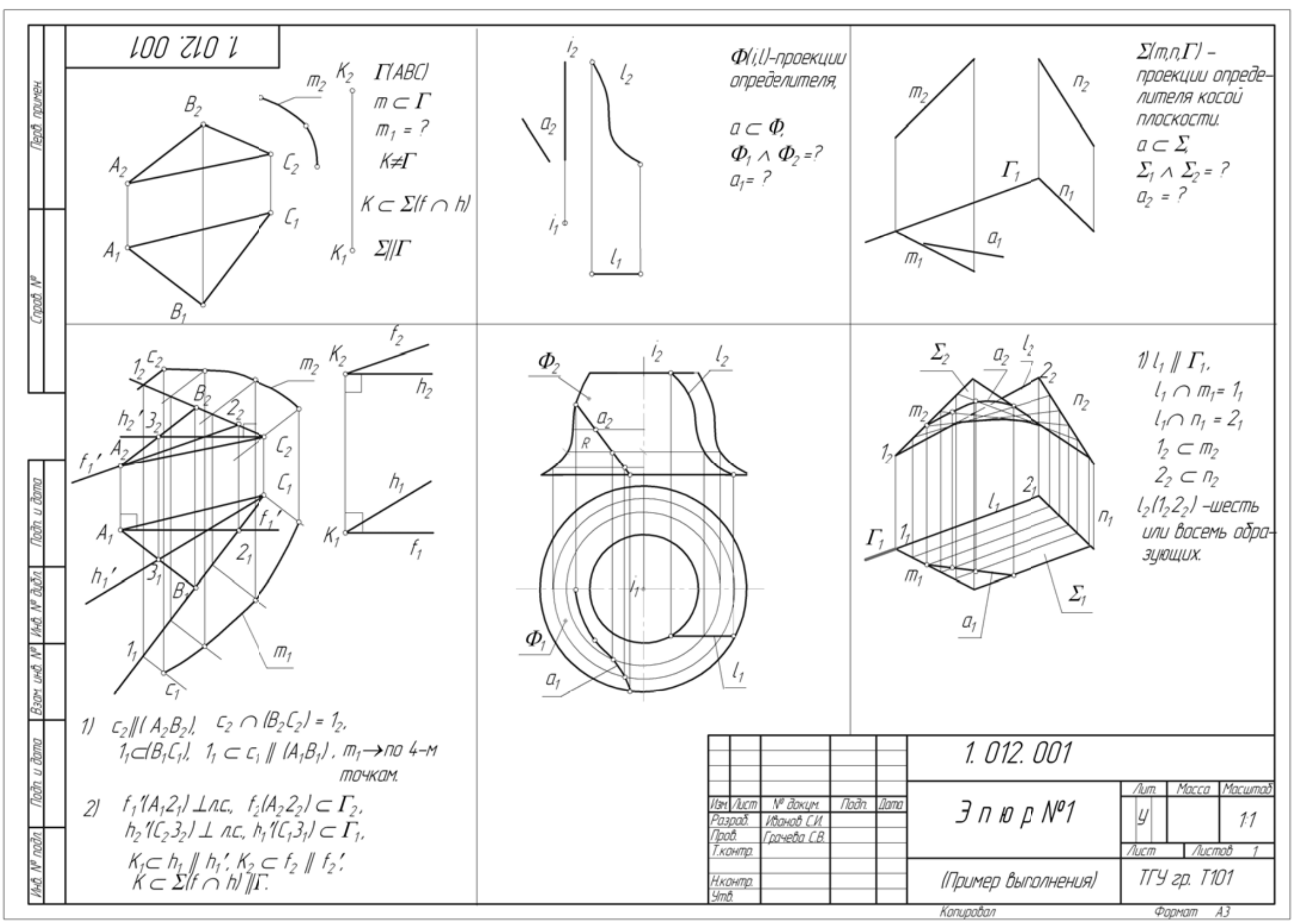
Точка **К** не принадлежит этой плоскости, через неё следует провести плоскость, параллельную исходной, задав её так, как указано в каждом варианте.

<u>Вторая задача</u> – поверхность вращения задана проекциями определителя, требуется достроить проекции поверхности и недостающую проекцию линии, ей принадлежащей.

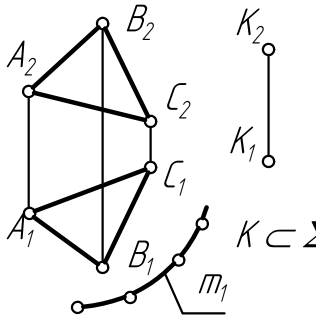
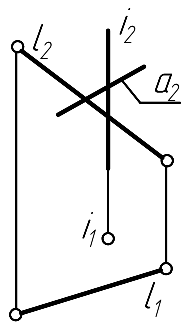
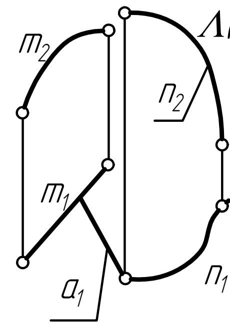
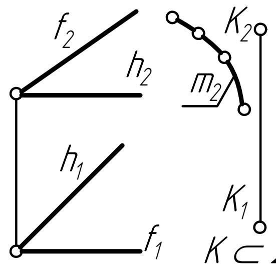
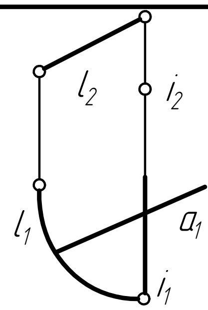
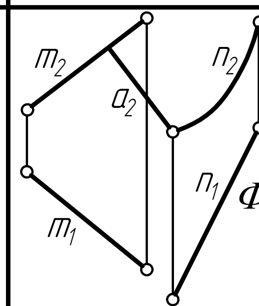
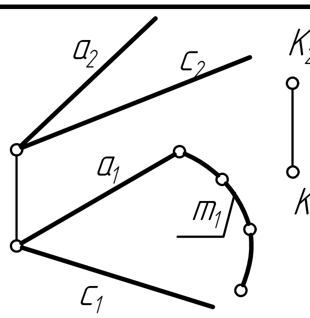
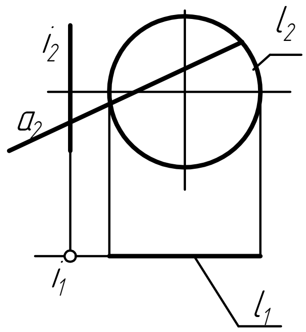
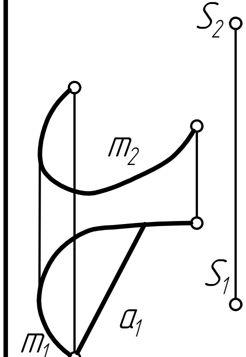
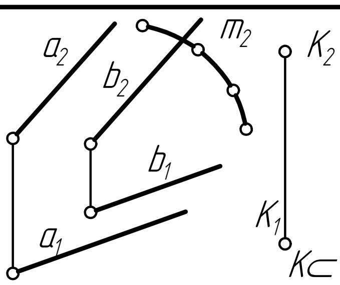
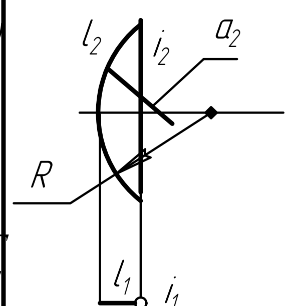
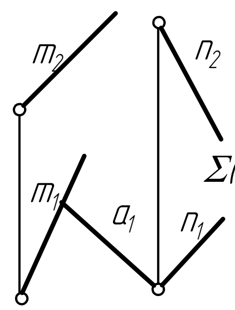
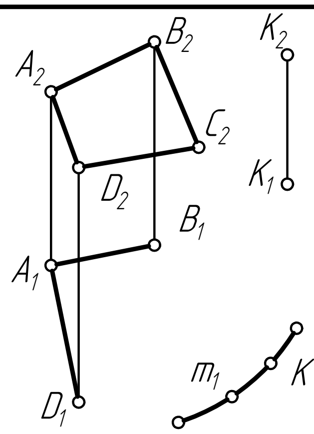
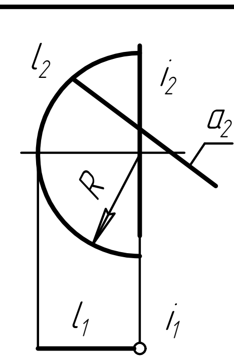
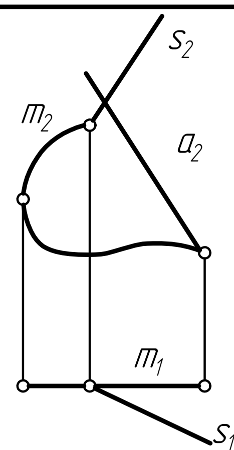
<u>Третья задача</u> – линейчатая поверхность задана проекциями определителя, требуется достроить проекции поверхности и достроить недостающую проекцию линии, ей принадлежащей.

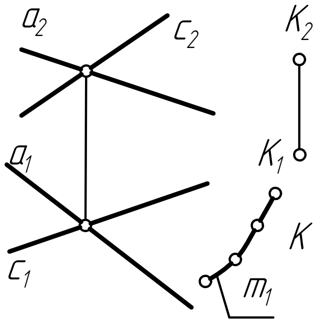
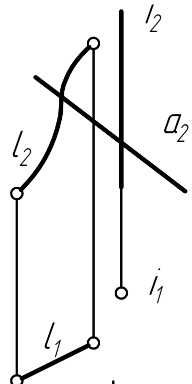
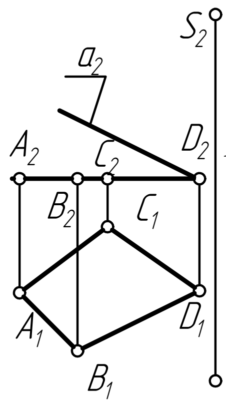
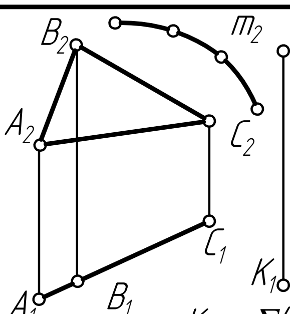
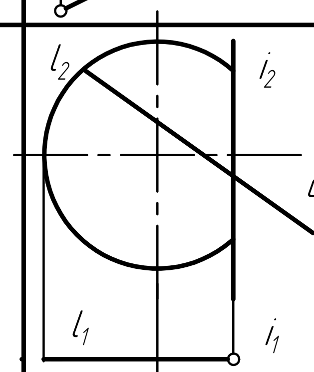
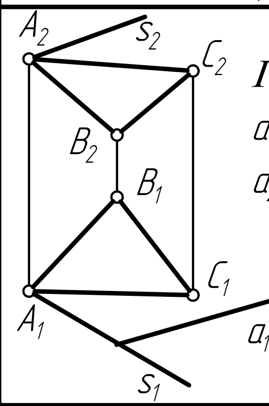
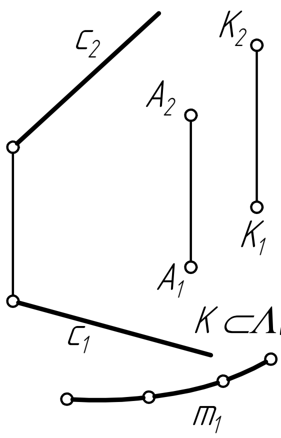
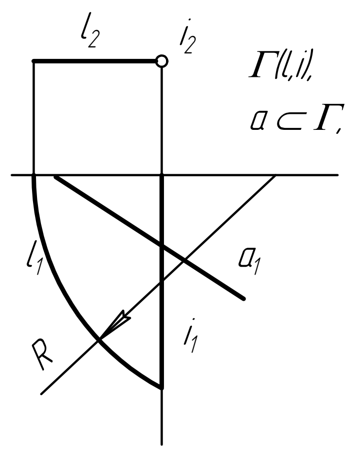
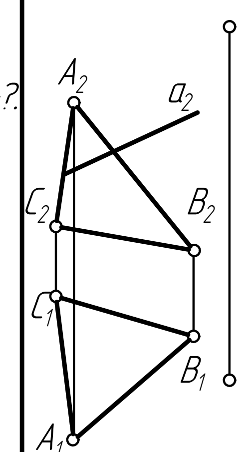
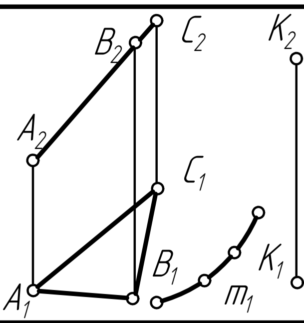
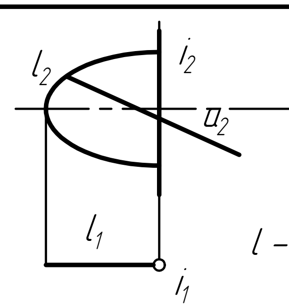
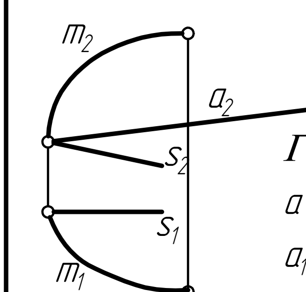
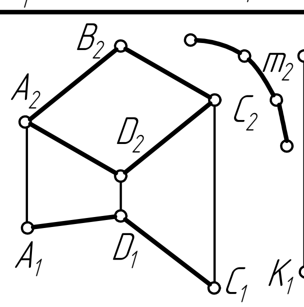
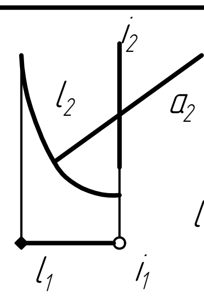
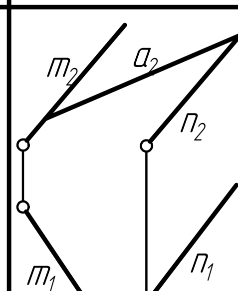
Задание выполняется на чертёжной бумаге формата А3.

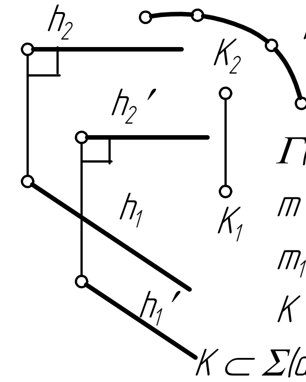
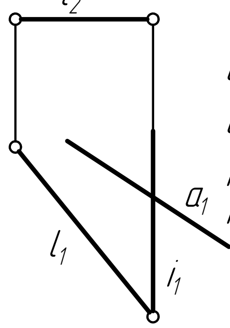
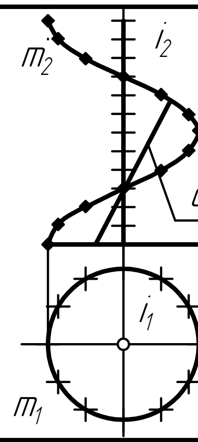
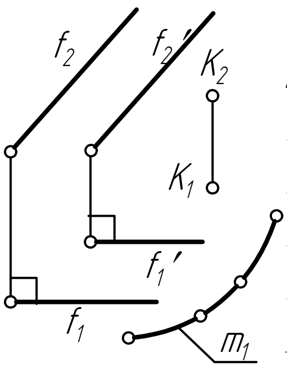
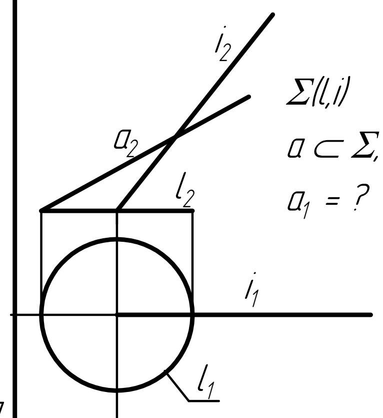
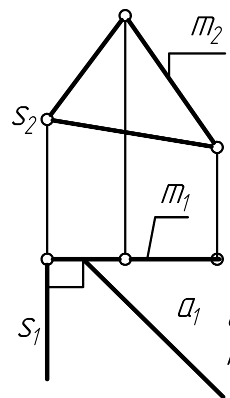
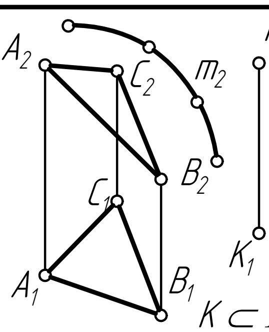
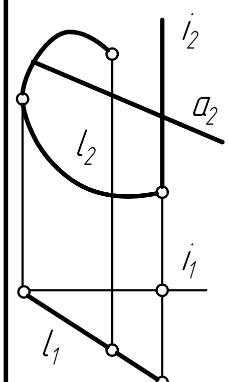
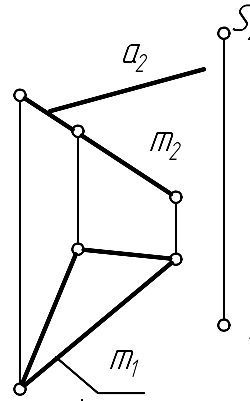
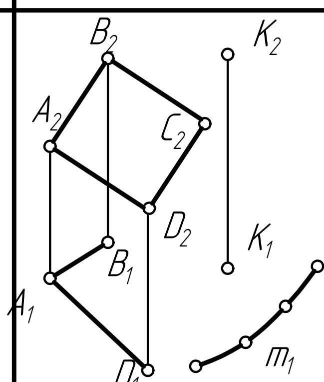
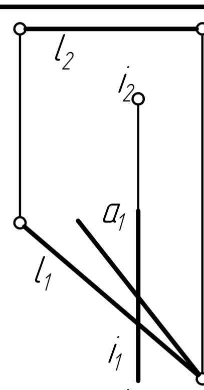
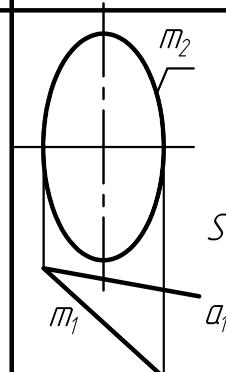
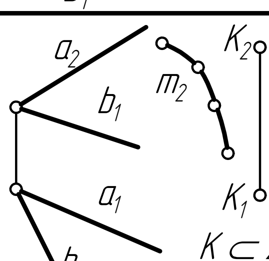
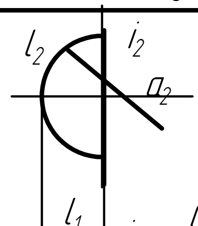
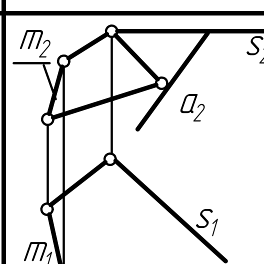
Ниже в масштабе уменьшения приведён пример выполнения эпюра.

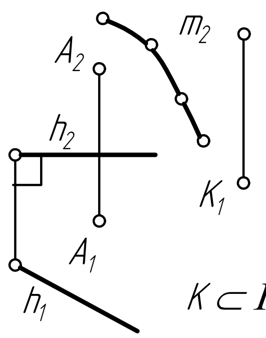
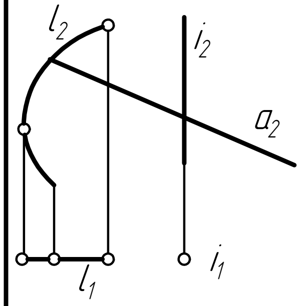
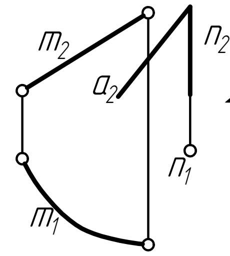
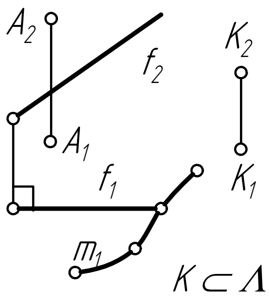
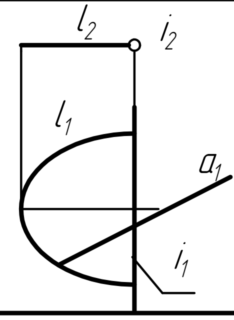
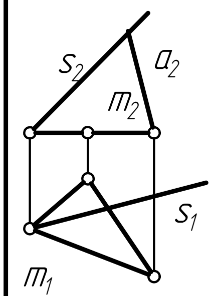
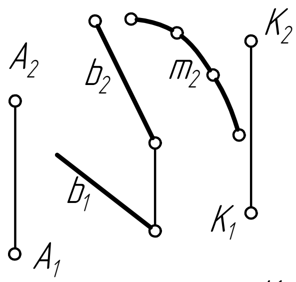
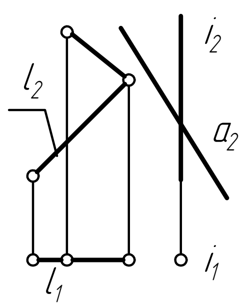
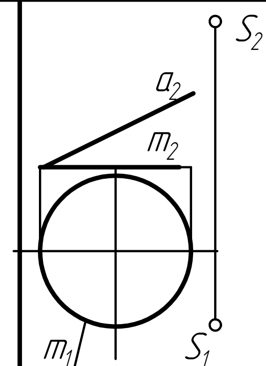
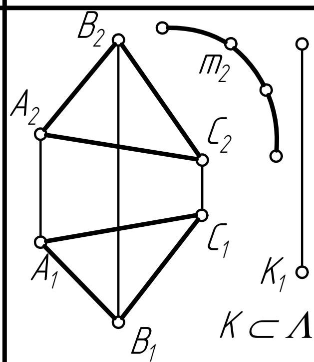
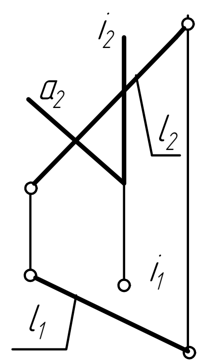
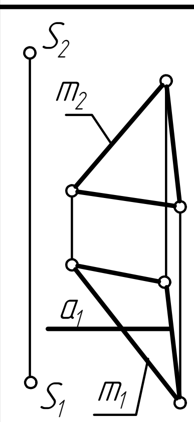
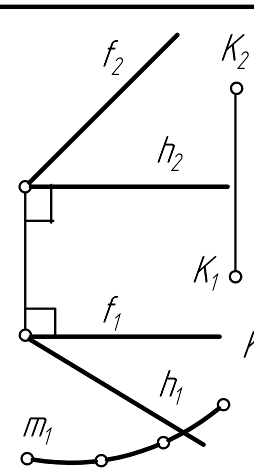
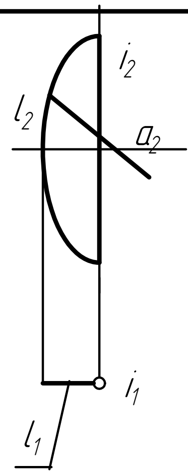
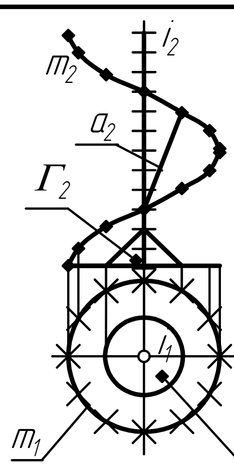


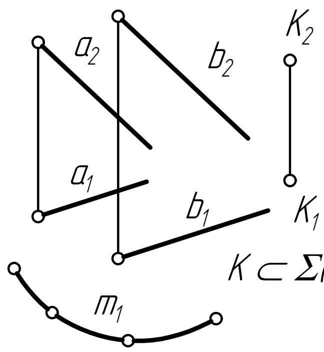
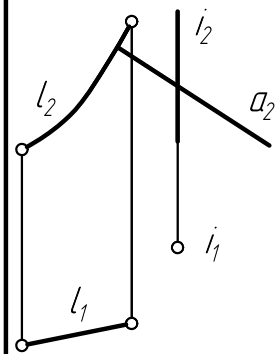
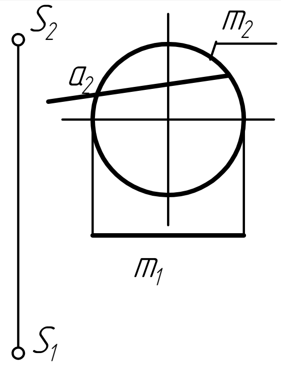
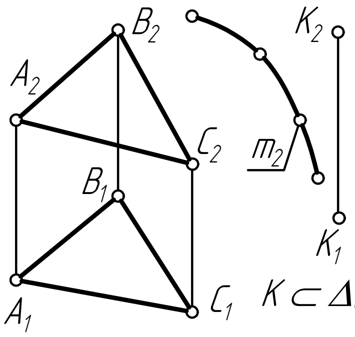
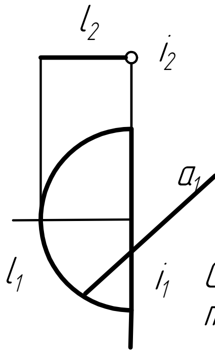
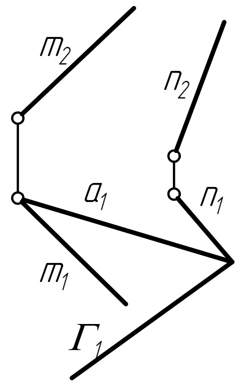
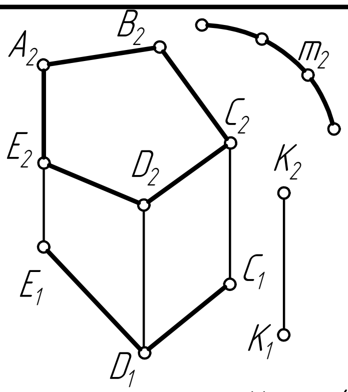
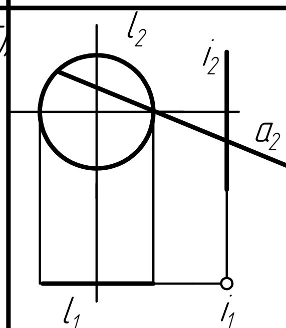
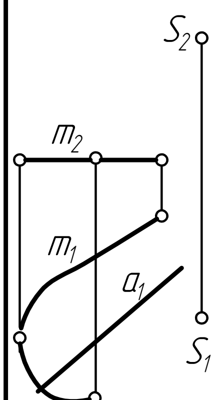
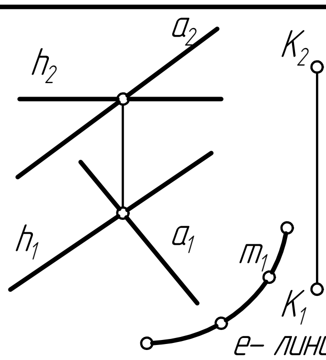
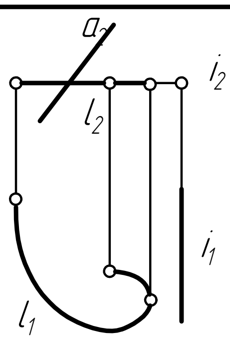
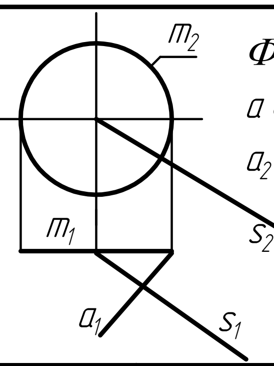
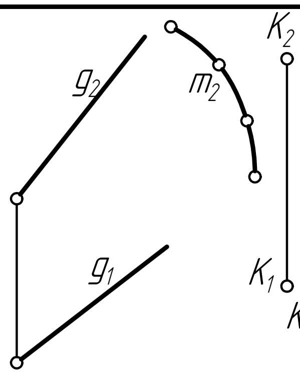
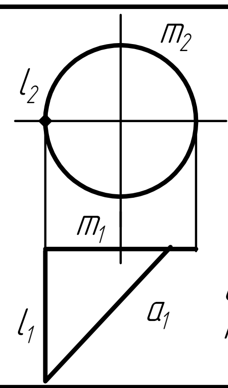
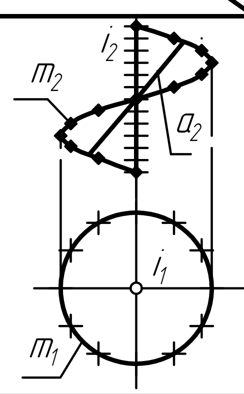
Задания на эпюр №1

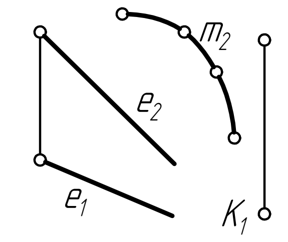
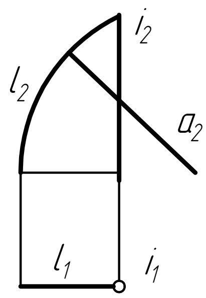
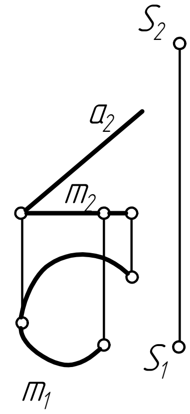
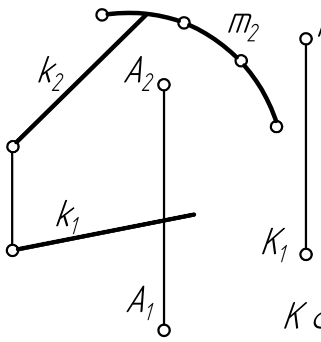
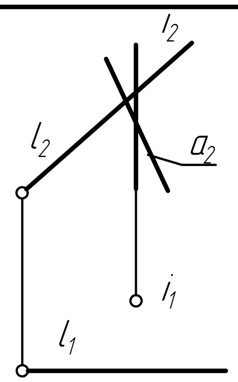
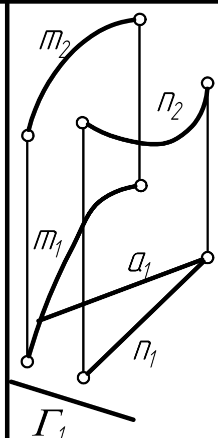
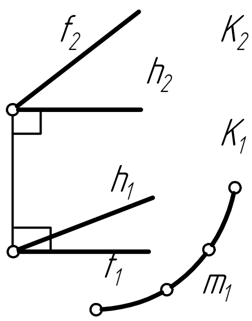
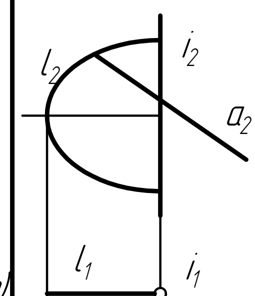
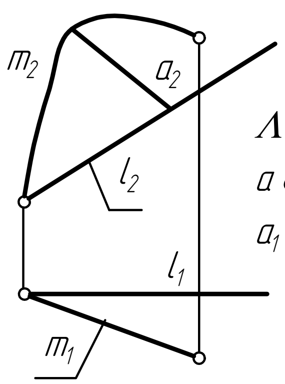
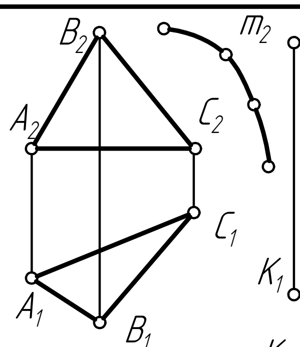
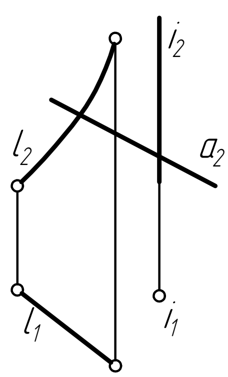
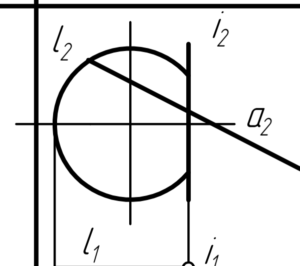
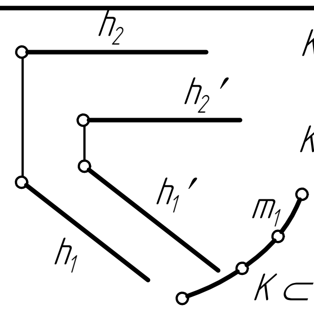
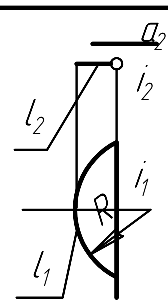
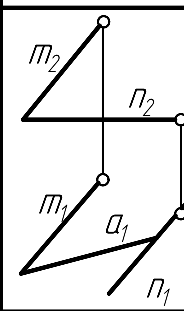
Вари-ант	Первая задача	Вторая задача	Третья задача
1	2	3	4
1	 $\Gamma(ABC)$ $m \subset \Gamma$ $m_2 = ?$ $K \notin \Gamma$ $K \subset \Sigma(f \cap h) \parallel \Gamma$	 $\Phi(l,i)$ $a \subset \Phi$ $a_1 = ?$	 $\Lambda(m,n,\Pi_2)$ $a \subset \Lambda$ $a_2 = ?$
2	 $\Gamma(f \cap h)$ $m \subset \Gamma$ $m_1 = ?$ $K \notin \Gamma$ $K \subset \Sigma(a \cap b) \parallel \Gamma$	 $\Sigma(l,i)$ $a \subset \Sigma$ $a_2 = ?$	 $\Phi(m,n,\Pi_1)$ $a \subset \Phi$ $a_1 = ?$
3	 $\Lambda(a \cap c)$ $m \subset \Lambda,$ $m_2 = ?$ $K \notin \Lambda$ $K \subset \Phi(f \cap h) \parallel \Lambda$	 $\Phi(l,i)$ $a \subset \Phi$ $a_1 = ?$	 $\Phi(m,S)$ $a \subset \Phi$ $a_2 = ?$
4	 $\Gamma(a \parallel b)$ $m \subset \Gamma,$ $m_1 = ?$ $K \notin \Gamma$ $K \subset \Sigma(g) \parallel \Gamma$ g– линия ската	 $\Lambda(l,i)$ $a \subset \Lambda,$ $a_1 = ?$	 $\Sigma(m,n,\Pi_2)$ $a \subset \Sigma,$ $a_2 = ?$
5	 $\Delta(ABCD)$ $C_1 = ?$ $m \subset \Delta$ $m_2 = ?$ $K \notin \Delta,$ $K \subset \Gamma(e) \parallel \Delta$	 $\Phi(l,i)$ $a \subset \Phi,$ $a_1 = ?$	 $\Sigma(m,s)$ $a \subset \Sigma,$ $a_1 = ?$

1	2	3	4
6	 $\Sigma(a \cap c)$ $m \subset \Sigma$, $m_2 = ?$ $K \subset \Lambda(e) \parallel \Sigma$. e – линия наибольшего наклона к Π_2.	 $\Phi(l,i)$ $a \subset \Phi$ $a_1 = ?$	 $\Lambda(ABCDS)$ $a \subset \Lambda$ $a_1 = ?$
7	 $\Gamma(ABC)$ $m \subset \Gamma$ $m_1 = ?$ $K \notin \Gamma$, $K \subset \Sigma(f \cap h) \parallel \Gamma$.	 $\Delta(l,i)$ $a \subset \Delta$ $a_1 = ?$	 $\Gamma(ABCs)$ $a \subset \Gamma$ $a_2 = ?$
8	 $\Sigma(A,c)$ $m \subset \Sigma$, $m_2 = ?$ $K \notin \Sigma$, $K \subset \Lambda(f \cap h) \parallel \Sigma$	 $\Gamma(l,i)$, $a \subset \Gamma$, $a_2 = ?$.	 $\Delta(ABCS)$ $a \subset \Delta$, $a_1 = ?$.
9	 $\Lambda(ABC)$, $m \subset \Lambda$, $m_2 = ?$, $K \notin \Lambda$, $K \subset \Gamma(f \cap h)$, $\Gamma \parallel \Lambda$.	 $\Sigma(l,i)$ $a \subset \Sigma$ $a_1 = ?$. l – эллипс	 $\Gamma(m,s)$ $a \subset \Gamma$ $a_1 = ?$
10	 $\Omega(ABCD)$, $m \subset \Omega$ $m_1 = ?$ $K \notin \Omega$, $K \subset \Gamma(f \cap h)$, $\Gamma \parallel \Omega$.	 $\Phi(l,i)$ $a \subset \Phi$, $a_1 = ?$ l – парабола	 $\Lambda(m,n,\Pi_1)$ $a \subset \Lambda$, $a_1 = ?$

1	2	3	4
11	 $\Gamma(h \parallel h')$, $m \subset \Gamma$, $m_1 = ?$ $K \notin \Gamma$, $K \subset \Sigma(a \cap k) \parallel \Gamma$.	 $\Phi(l,i)$ $a \subset \Phi$, $a_2 = ?$ построить три проекции.	 $\Sigma(m,i,\Pi_1)$ $a \subset \Sigma$, $a_1 = ?$ m – винтовая линия, строить.
12	 $\Omega(f \parallel f')$, $m \subset \Omega$, $m_2 = ?$ $K \notin \Omega$, $K \subset \Gamma(g)$, $\Gamma \parallel \Omega$. g – линия ската.	 $\Sigma(l,i)$ $a \subset \Sigma$, $a_1 = ?$	 $\Lambda(m,s)$ $a \subset \Lambda$, $a_2 = ?$ Строить три проекции.
13	 $\Delta(ABC)$ $m \subset \Delta$, $m_1 = ?$ $K \notin \Delta$, $K \subset \Gamma(f \cap h) \parallel \Delta$	 $\Phi(l,i)$ $a \subset \Phi$, $a_1 = ?$	 $\Gamma(m,S)$, $a \subset \Gamma$, $a_1 = ?$
14	 $\Phi(ABCD)$, $C_1 = ?$ $m \subset \Phi$, $m_2 = ?$ $K \notin \Phi$, $K \subset \Lambda(e)$, $\Lambda \parallel \Phi$.	 $\Sigma(l,i)$ $a \subset \Sigma$, $a_2 = ?$	 $\Phi(m,S)$, $a \subset \Phi$ $a_2 = ?$
15	 $\Gamma(a \cap b)$, $m \subset \Gamma$, $m_1 = ?$ $K \notin \Gamma$, $K \subset \Delta(f \cap h) \parallel \Gamma$.	 $\Sigma(l,i)$ $a \subset \Sigma$, $a_1 = ?$ Строить три проекции.	 $\Delta(m,s)$, $a \subset \Delta$, $a_1 = ?$

1	2	3	4
16	 $\Phi(h,A)$ $m \subset \Phi$, $m_1 = ?$ $K \not\subset \Phi$, $K \subset \Gamma(f \cap k) \parallel \Phi$.	 $\Lambda(l,i)$ $a \subset \Lambda$, $a_1 = ?$	 $\Sigma(m,n,\Pi_1)$ $a \subset \Sigma$, $a_1 = ?$
17	 $\Omega(f,A)$ $m \subset \Omega$, $m_2 = ?$ $K \not\subset \Omega$, $K \subset \Lambda(h \cap k) \parallel \Omega$.	 $\Gamma(l,i)$ $a \subset \Gamma$, $a_2 = ?$	 $\Gamma(m,s)$, $a \subset \Gamma$, $a_1 = ?$
18	 $\Delta(A,b)$, $m \subset \Delta$, $m_1 = ?$ $K \not\subset \Delta$, $K \subset \Gamma(g) \parallel \Delta$. g–линия ската.	 $\Phi(l,i)$ $a \subset \Phi$, $a_1 = ?$	 $\Sigma(m,S)$ $a \subset \Sigma$, $a_1 = ?$
19	 $\Phi(ABC)$ $m \subset \Phi$, $m_1 = ?$, $K \not\subset \Phi$, $K \subset \Lambda(f \cap h) \parallel \Phi$.	 $\Gamma(l,i)$, $a \subset \Gamma$, $a_1 = ?$	 $\Sigma(m,S)$ $a \subset \Sigma$ $a_2 = ?$
20	 $\Sigma(f \cap h)$, $m \subset \Sigma$, $m_2 = ?$ $K \not\subset \Sigma$, $K \subset \Lambda(a \cap b)$, $\Lambda \parallel \Sigma$.	 $\Phi(l,i)$ $a \subset \Phi$, $a_1 = ?$	 $\Phi(m,i,\Gamma)$ $a \subset \Phi$, $a_1 = ?$ m –винтовая линия.

1	2	3	4
21	 $\Gamma(a \parallel b)$, $m \subset \Gamma$, $m_2 = ?$ $K \not\subset \Gamma$, $K \subset \Sigma(f \cap h) \parallel \Gamma$.	 $\Phi(l,i)$, $a \subset \Phi$, $a_1 = ?$	 $\Lambda(m,S)$, $a \subset \Lambda$, $a_1 = ?$
22	 $\Sigma(ABC)$, $m \subset \Sigma$, $m_1 = ?$ $K \not\subset \Sigma$, $K \subset \Delta(g) \parallel \Sigma$. g – линия ската.	 $\Omega(l,i)$, $a \subset \Omega$, $a_2 = ?$ Строить три проекции.	 $\Phi(m,n,\Gamma)$, $a \subset \Phi$, $a_2 = ?$
23	 $\Delta(ABCDE)$, $A_1 = ?$ $B_1 = ?$ $m \subset \Delta$, $m_1 = ?$ $K \not\subset \Delta$, $K \subset \Gamma(f \cap h) \parallel \Delta$	 $\Sigma(l,i)$ $a \subset \Sigma$, $a_1 = ?$	 $\Phi(m,S)$, $a \subset \Phi$, $a_2 = ?$
24	 $\Lambda(a \cap h)$, $m \subset \Lambda$, $m_2 = ?$ $K \not\subset \Lambda$, $K \subset \Gamma(e)$, $\Gamma \parallel \Lambda$. e– линия н.н. к Π_2.	 $\Lambda(l,i)$ $a \subset \Lambda$, $a_1 = ?$	 $\Phi(m,s)$ $a \subset \Phi$, $a_2 = ?$
25	 $\Phi(g)$, $m \subset \Phi$, $m_1 = ?$ $K \not\subset \Phi$, $K \subset \Gamma(f \cap h)$, $\Gamma \parallel \Phi$.	 $\Gamma(m,l)$ $a \subset \Gamma$, $a_2 = ?$ Строить три проекции.	 $\Sigma(m,i,\Pi_1)$ $a \subset \Sigma$, $a_1 = ?$

1	2	3	4
26	 $\Sigma(e)$, $m \subset \Sigma$, $m_1 = ?$ $K \not\subset \Sigma$, $K \subset \Gamma(f \cap h) \parallel \Sigma$. e – линия наибольшего наклона к Π_2.	 $\Phi(l,i)$, $a \subset \Phi$, $a_1 = ?$	 $\Delta(m,S)$, $a \subset \Delta$, $a_1 = ?$
27	 $\Omega(k,A)$, $m \subset \Omega$, $m_1 = ?$ $K \not\subset \Omega$, $K \subset \Gamma(g) \parallel \Omega$. g – линия ската.	 $\Gamma(l,i)$, $a \subset \Gamma$, $a_1 = ?$	 $\Phi(m,n,\Gamma)$, $a \subset \Phi$, $a_2 = ?$
28	 $\Phi(f \cap h)$, $m \subset \Phi$, $m_2 = ?$ $K \not\subset \Phi$, $K \subset \Gamma(a \cap b)$, $\Gamma \parallel \Phi$.	 $\Sigma(l,i)$, $a \subset \Sigma$, $a_1 = ?$	 $\Lambda(m,l)$, $a \subset \Lambda$, $a_1 = ?$
29	 $\Sigma(ABC)$, $m \subset \Sigma$, $m_1 = ?$ $K \not\subset \Sigma$, $K \subset \Gamma(f \cap k) \parallel \Sigma$.	 $\Delta(l,i)$, $a \subset \Delta$, $a_1 = ?$	 $\Gamma(l,i)$, $a \subset \Gamma$, $a_1 = ?$
30	 $\Phi(h \parallel h')$, $m \subset \Phi$, $m_2 = ?$ $K \not\subset \Phi$, $K \subset \Gamma(f \cap a) \parallel \Phi$.	 $\Sigma(l,i)$, $a \subset \Sigma$, $a_1 = ?$	 $\Lambda(m,n,\Pi_2)$, $a \subset \Lambda$, $a_2 = ?$

Объем и содержание задания 2
(Эпюр № 2)

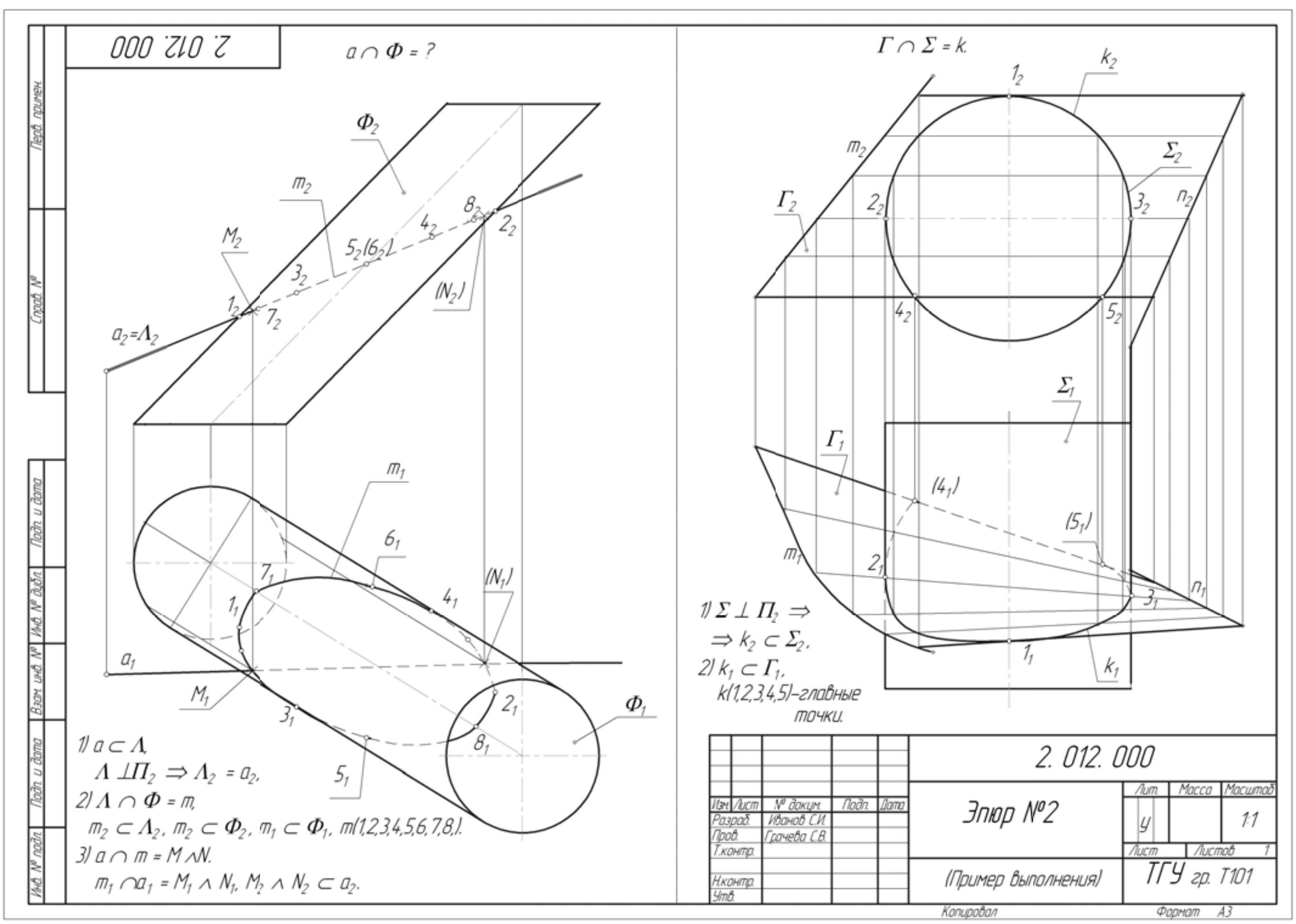
После восьмого занятия следует приступить к выполнению контрольного домашнего задания – эпюра №2.

Задание состоит из **двух задач.**

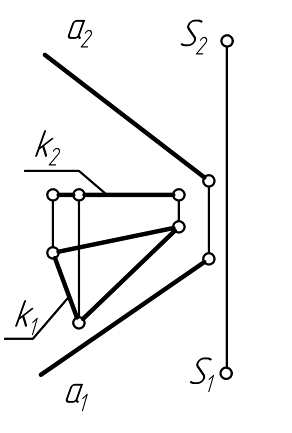
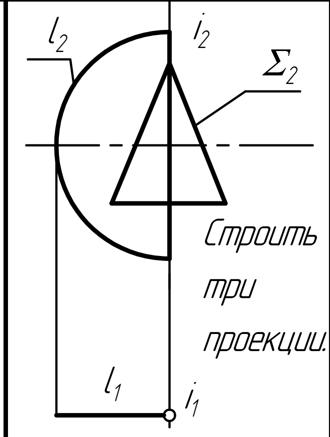
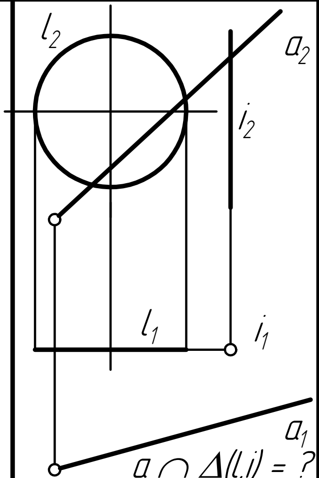
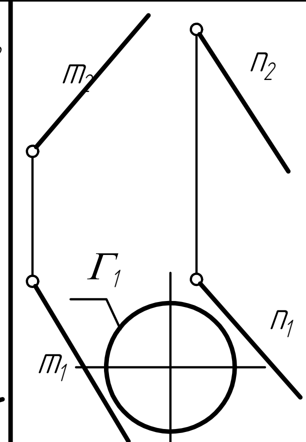
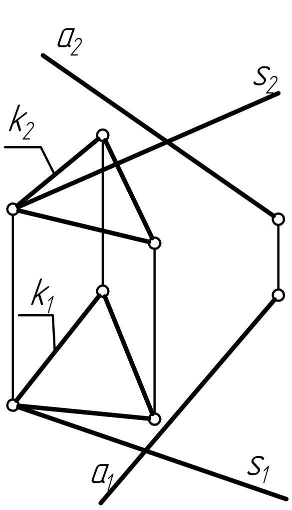
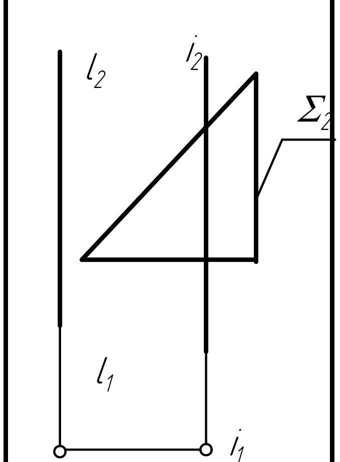
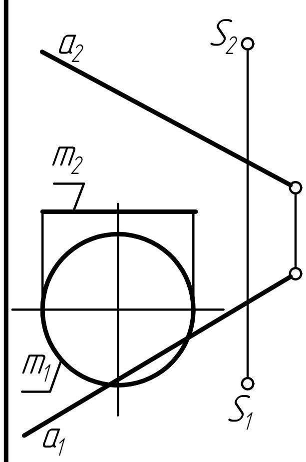
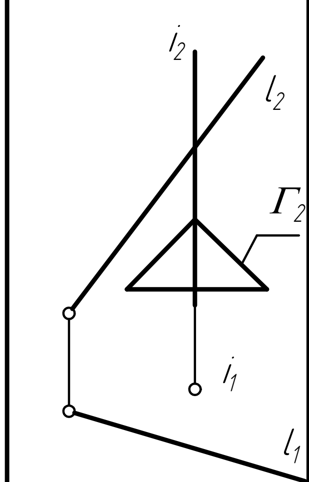
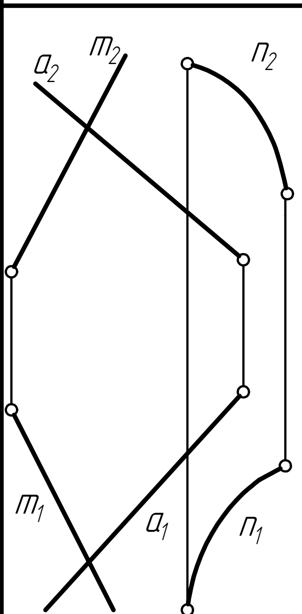
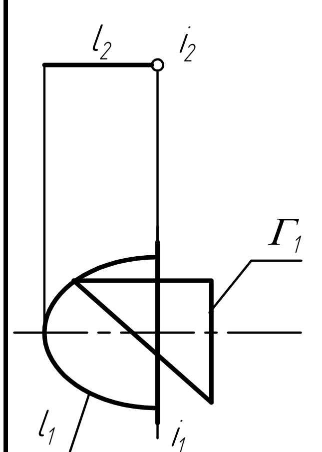
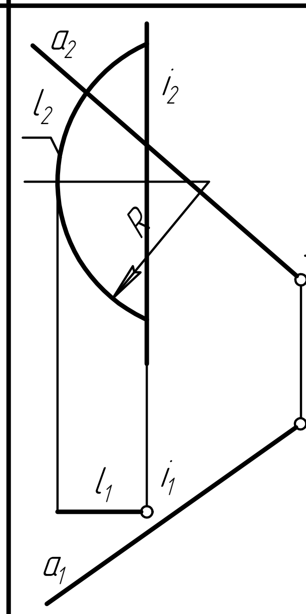
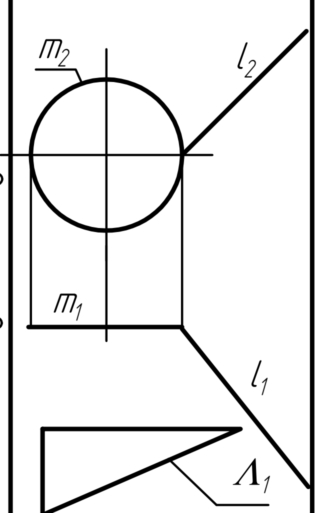
<u>Первая задача –</u> задана какая-то поверхность проекциями определителя, задана прямая, не принадлежащая этой поверхности. Требуется достроить проекции поверхности и найти точки пересечения прямой с поверхностью, учитывая видимость.

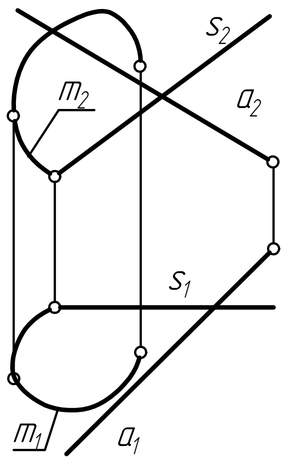
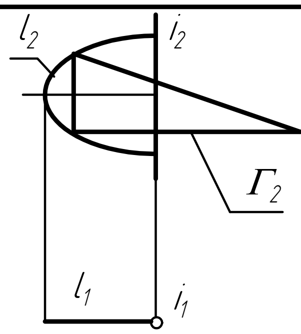
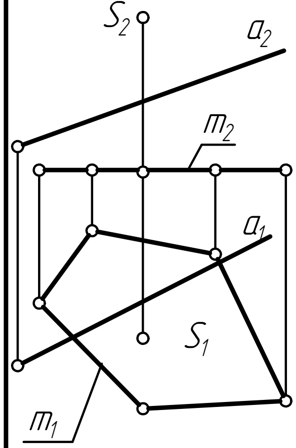
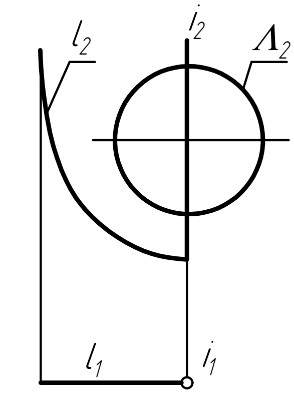
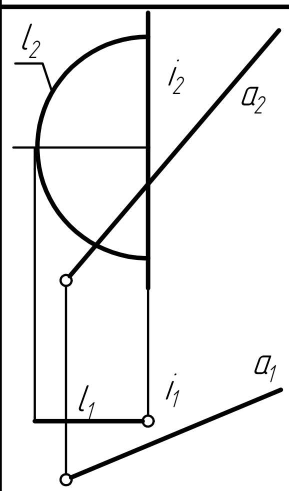
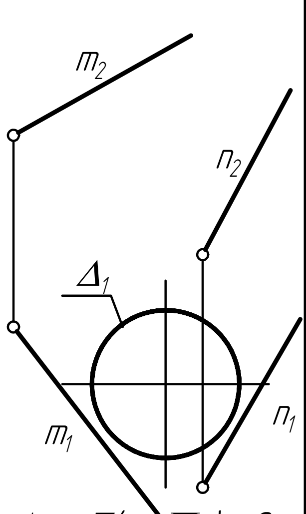
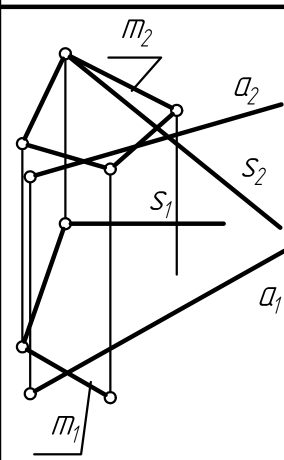
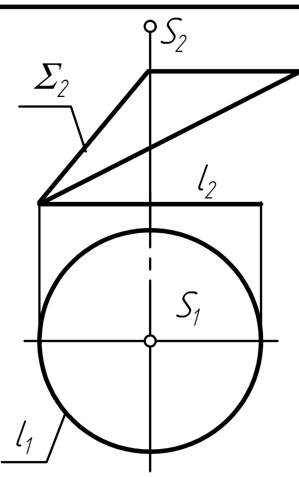
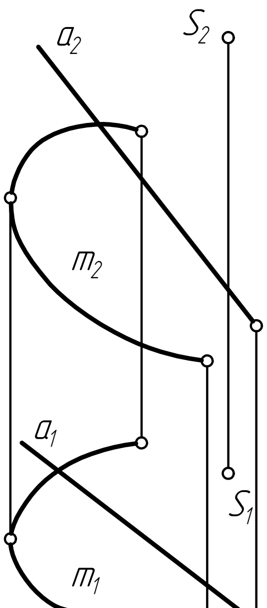
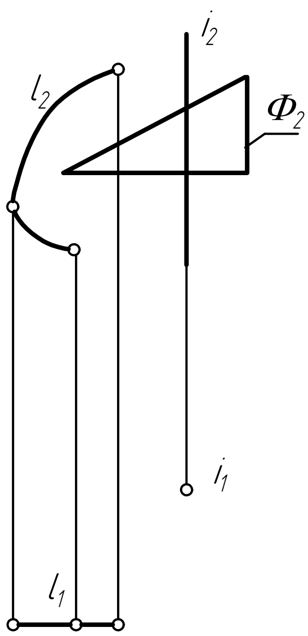
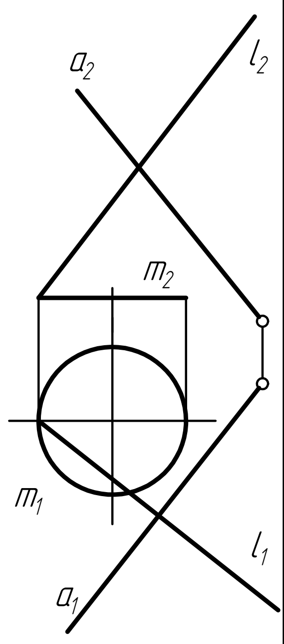
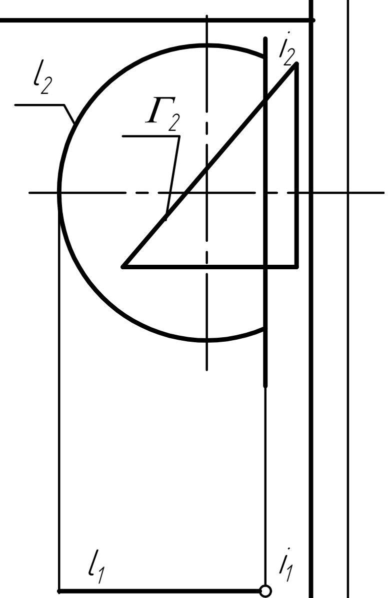
<u>Вторая задача –</u> одна из поверхностей задана проекциями определителя, другая занимает проецирующее положение и задана главной проекцией. Требуется построить проекции линии пересечения поверхностей, предварительно достроив проекции поверхностей. Учитывать видимость поверхностей.

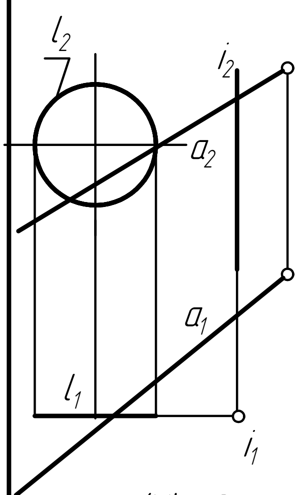
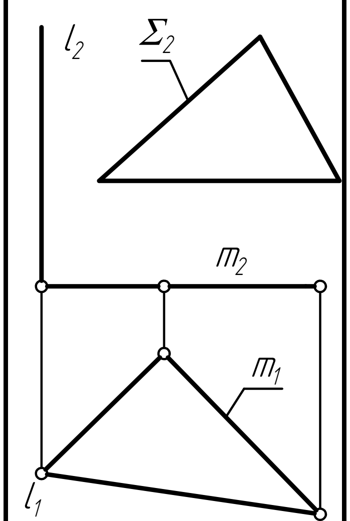
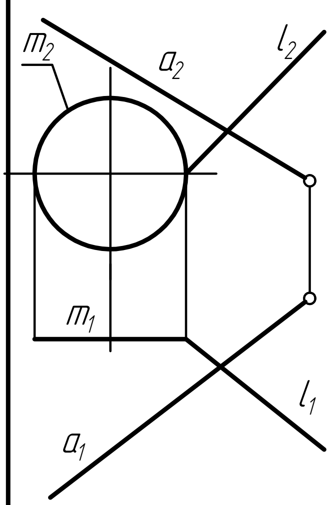
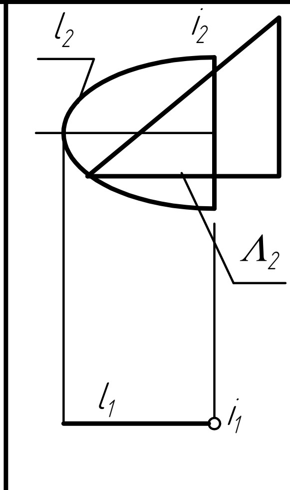
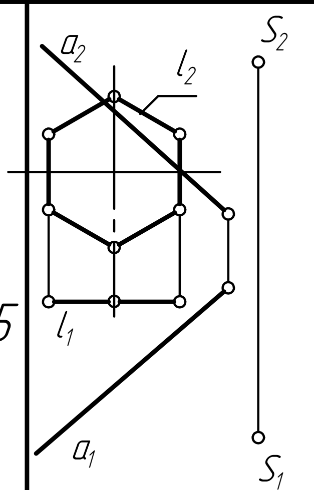
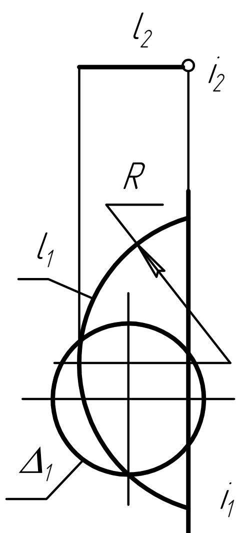
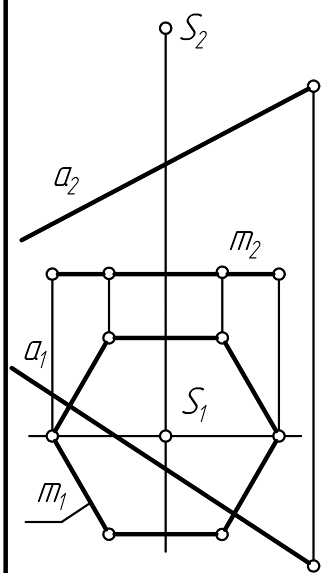
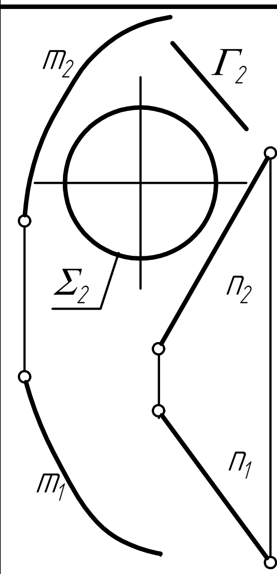
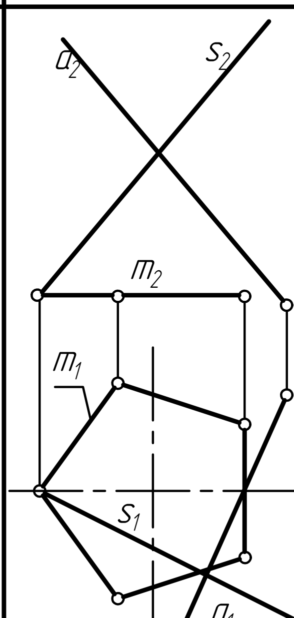
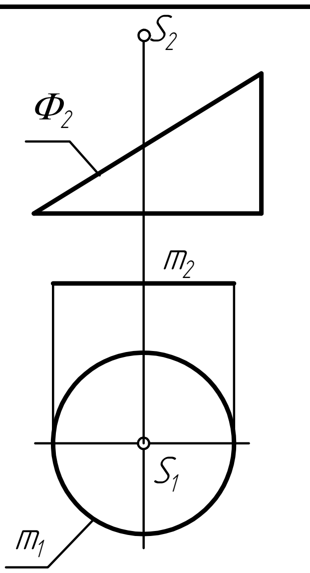
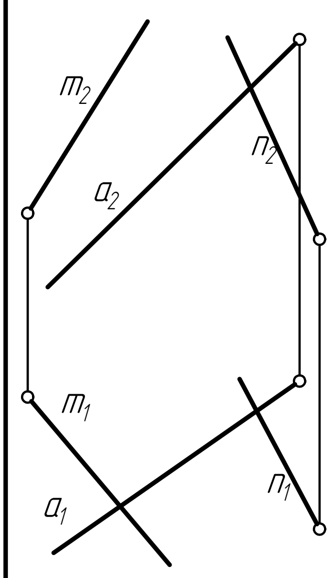
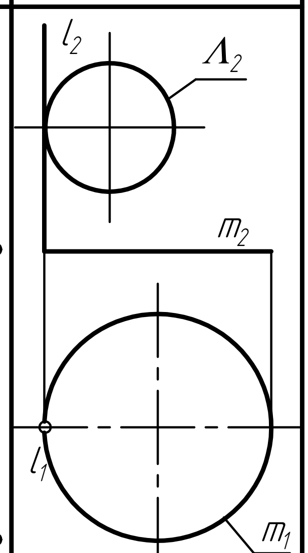
Задание выполняется на чертёжной бумаге формата А3. Изображения должны быть крупными, наглядными, с алгоритмической записью решения. Ниже в масштабе уменьшения приведен пример выполнения эпюра.

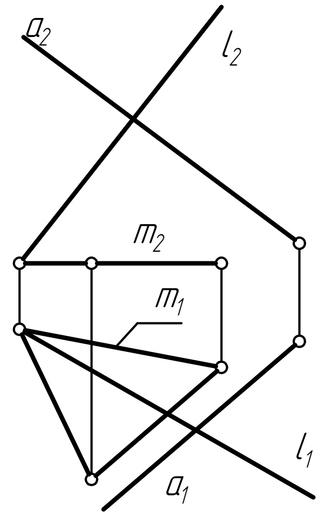
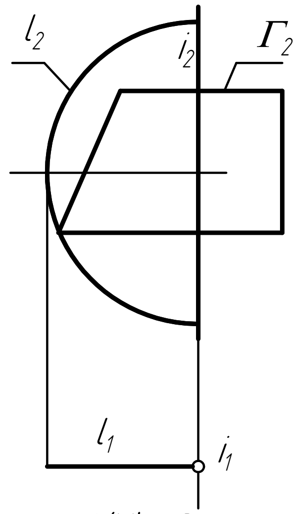
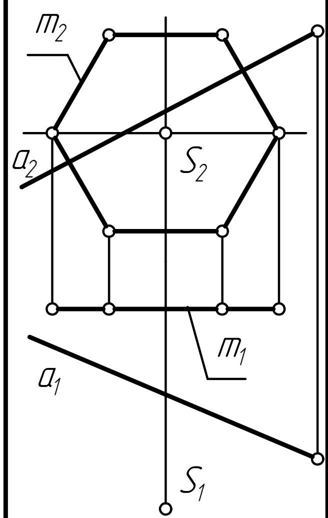
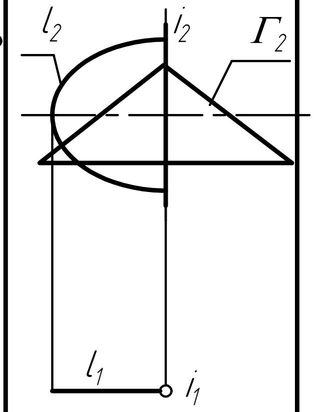
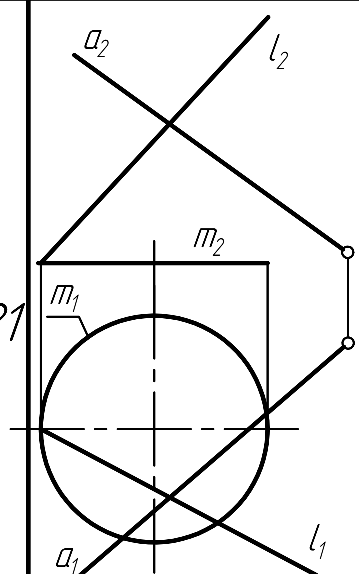
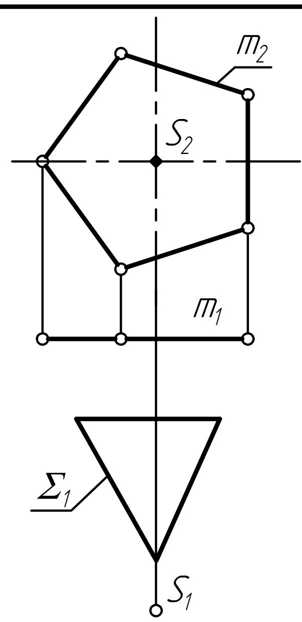
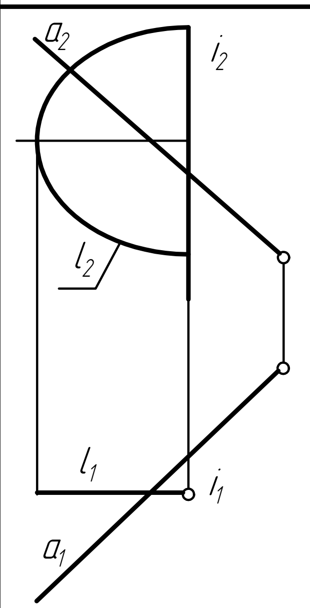
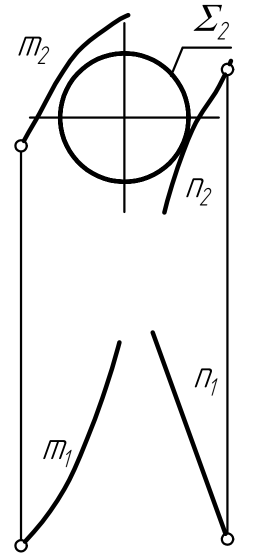
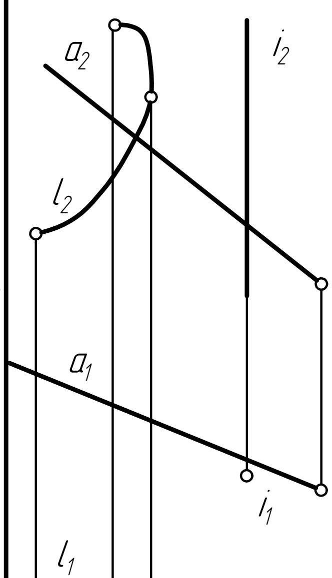
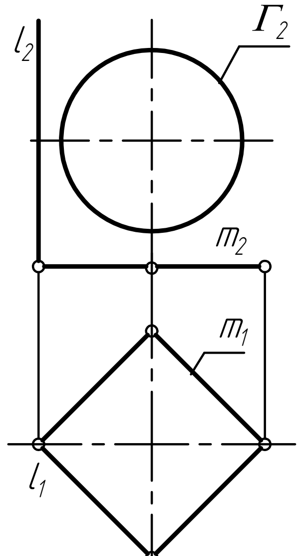
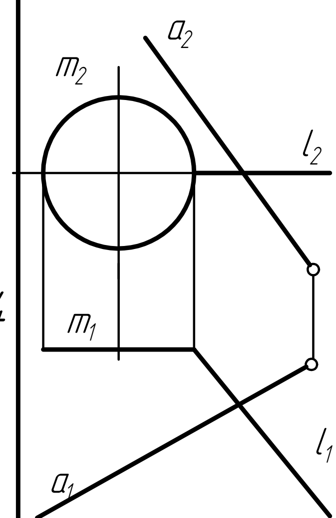
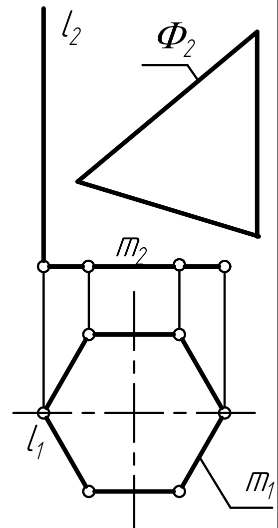


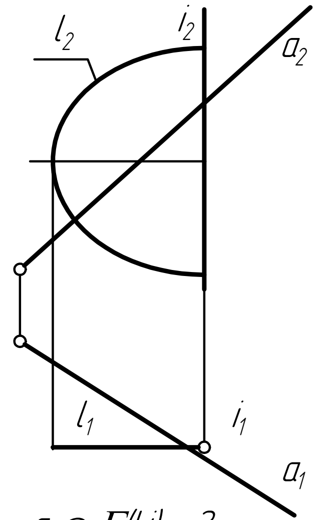
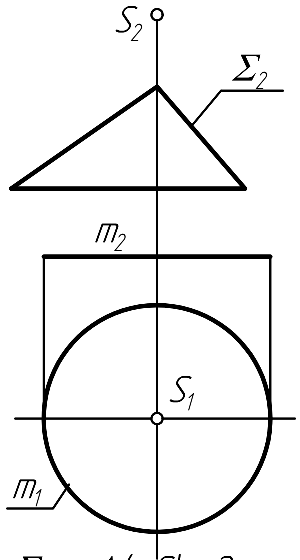
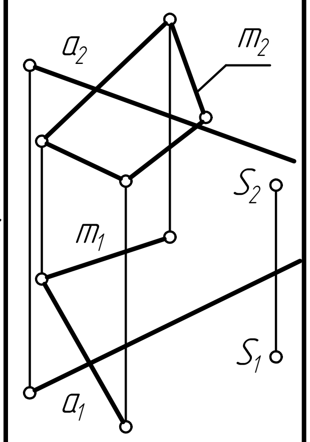
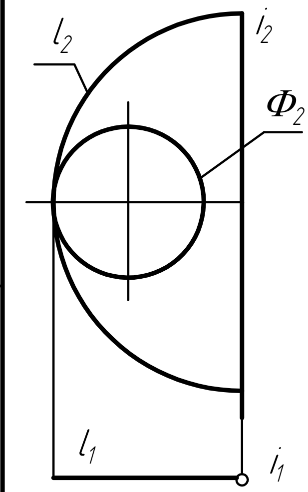
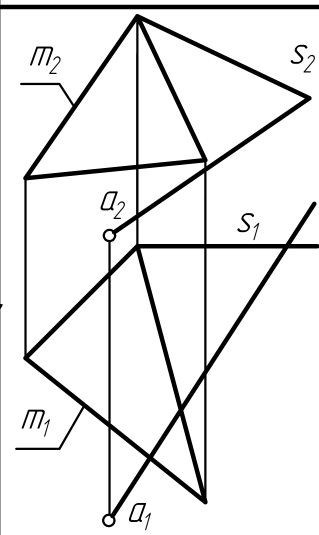
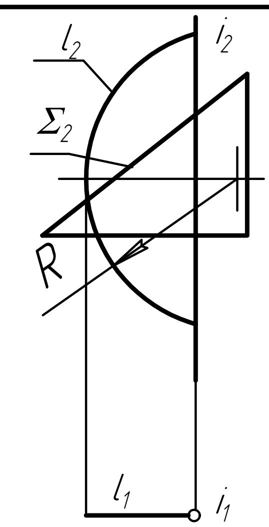
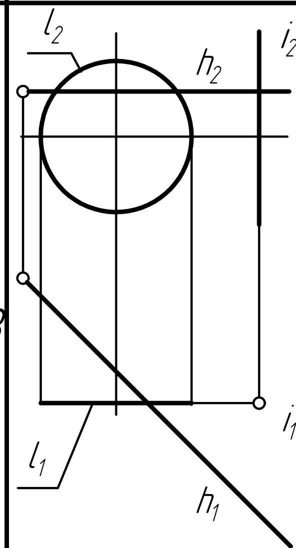
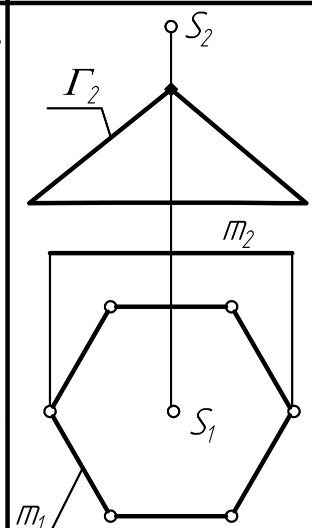
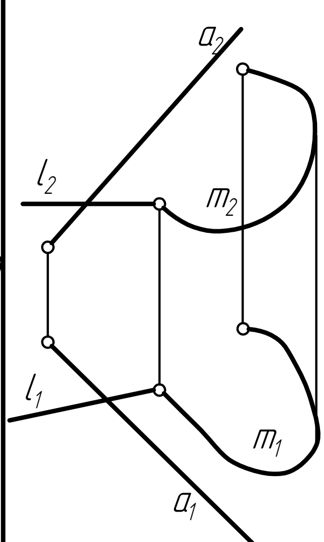
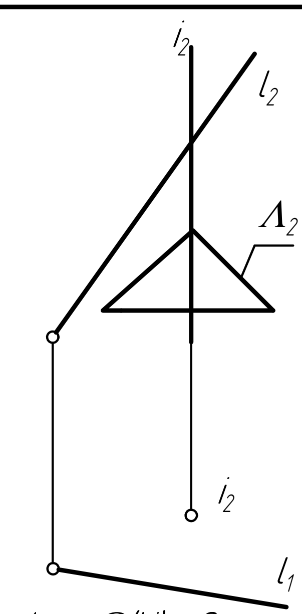
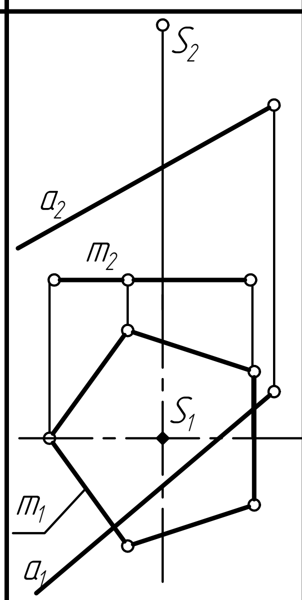
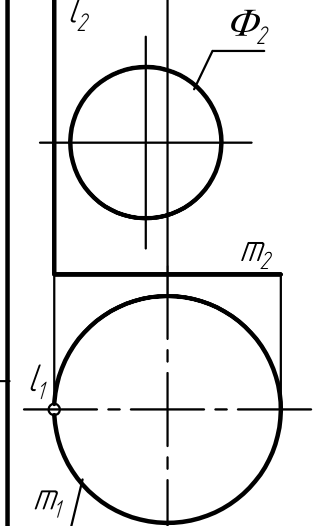
Задания на эпюр №2

Вари-ант	Первая задача	Вторая задача	Вари-ант	Первая задача	Вторая задача
1	2	3	1	2	3
1	 $a \cap \Phi(k,S) = ?$	 Строить три проекции. $\Sigma \cap \Gamma(l,i) = ?$	2	 $a \cap \Delta(l,i) = ?$	 $\Gamma \cap \Sigma(m,n,\Pi_2) = ?$
3	 $a \cap \Phi(k,s) = ?$	 $\Sigma \cap \Delta(l,i) = ?$ Строить три проекции.	4	 $a \cap \Sigma(m,S) = ?$	 $\Gamma \cap \Lambda(l,i) = ?$
5	 $a \cap \Delta(m,n,\Pi_2) = ?$	 $\Gamma \cap \Phi(l,i) = ?$	6	 $a \cap \Gamma(l,i) = ?$	 $\Lambda \cap \Phi(m,l) = ?$

1	2	3	1	2	3
7	 $a \cap \Sigma(m,s) = ?$	 $\Gamma \cap \Phi(l,i) = ?$	8	 $a \cap \Sigma(m,S) = ?$	 $\Lambda \cap \Gamma(l,i) = ?$ l – парабола, строить.
9	 $a \cap \Phi(l,i) = ?$	 $\Delta \cap \Sigma(m,n,\Pi_2) = ?$	10	 $a \cap \Lambda(m,s) = ?$	 $\Sigma \cap \Gamma(l,i) = ?$
11	 $a \cap \Lambda(m,S) = ?$	 $\Phi \cap \Sigma(l,i) = ?$	12	 $a \cap \Sigma(m,l) = ?$	 $\Gamma \cap \Lambda(l,i) = ?$

1	2	3	1	2	3
13	 $a \cap \Phi(l,i) = ?$	 $\Sigma \cap \Phi(m,l) = ?$ Строить три проекции.	14	 $a \cap \Gamma(m,l) = ?$	 $\Lambda \cap \Gamma(l,i) = ?$
15	 $a \cap \Gamma(l,S) = ?$	 $\Delta \cap \Gamma(l,i) = ?$	16	 $a \cap \Sigma(m,S) = ?$	 $\Sigma \cap \Phi(m,n,\Gamma) = ?$
17	 $a \cap \Gamma(m,s) = ?$	 $\Phi \cap \Sigma(m,S) = ?$	18	 $a \cap \Delta(m,n,\Pi_1) = ?$	 $\Lambda \cap \Gamma(m,l) = ?$ Строить три проекции.

1	2	3	1	2	3
19	 $a \cap \Sigma(m,l) = ?$	 $\Gamma \cap \Delta(l,i) = ?$ Строить три проекции.	20	 $a \cap \Phi(m,S) = ?$	 $\Gamma \cap \Sigma(l,i) = ?$
21	 $a \cap \Lambda(m,l) = ?$	 $\Sigma \cap \Delta(m,S) = ?$	22	 $a \cap \Lambda(l,i) = ?$	 $\Sigma \cap \Gamma(m,n,\Pi_1) = ?$
23	 $a \cap \Phi(l,i) = ?$	 $\Gamma \cap \Phi(l,m) = ?$ Строить три проекции.	24	 $a \cap \Lambda(m,l) = ?$	 $\Phi \cap \Gamma(l,m) = ?$ Строить три проек-ции.

1	2	3	1	2	3
25	 $a \cap \Gamma(l,i) = ?$	 $\Sigma \cap \Lambda(m,S) = ?$	26	 $a \cap \Delta(m,S) = ?$	 $\Phi \cap \Sigma(l,i) = ?$ Строить три проекции
27	 $a \cap \Gamma(m,s) = ?$	 $\Sigma \cap \Phi(l,i) = ?$	28	 $h \cap \Phi(l,i) = ?$	 $\Gamma \cap \Phi(m,S) = ?$ Строить три проекции.
29	 $a \cap \Gamma(m,l) = ?$	 $\Lambda \cap \Omega(l,i) = ?$	30	 $a \cap \Sigma(m,S) = ?$	 $\Phi \cap \Gamma(m,l) = ?$ Строить три проекции.

Объем и содержание задания 3
(Эпюр №3)

Эпюр № 3 ─ контрольное домашнее задание выполняется после девятого занятия на чертёжной бумаге формата А3.

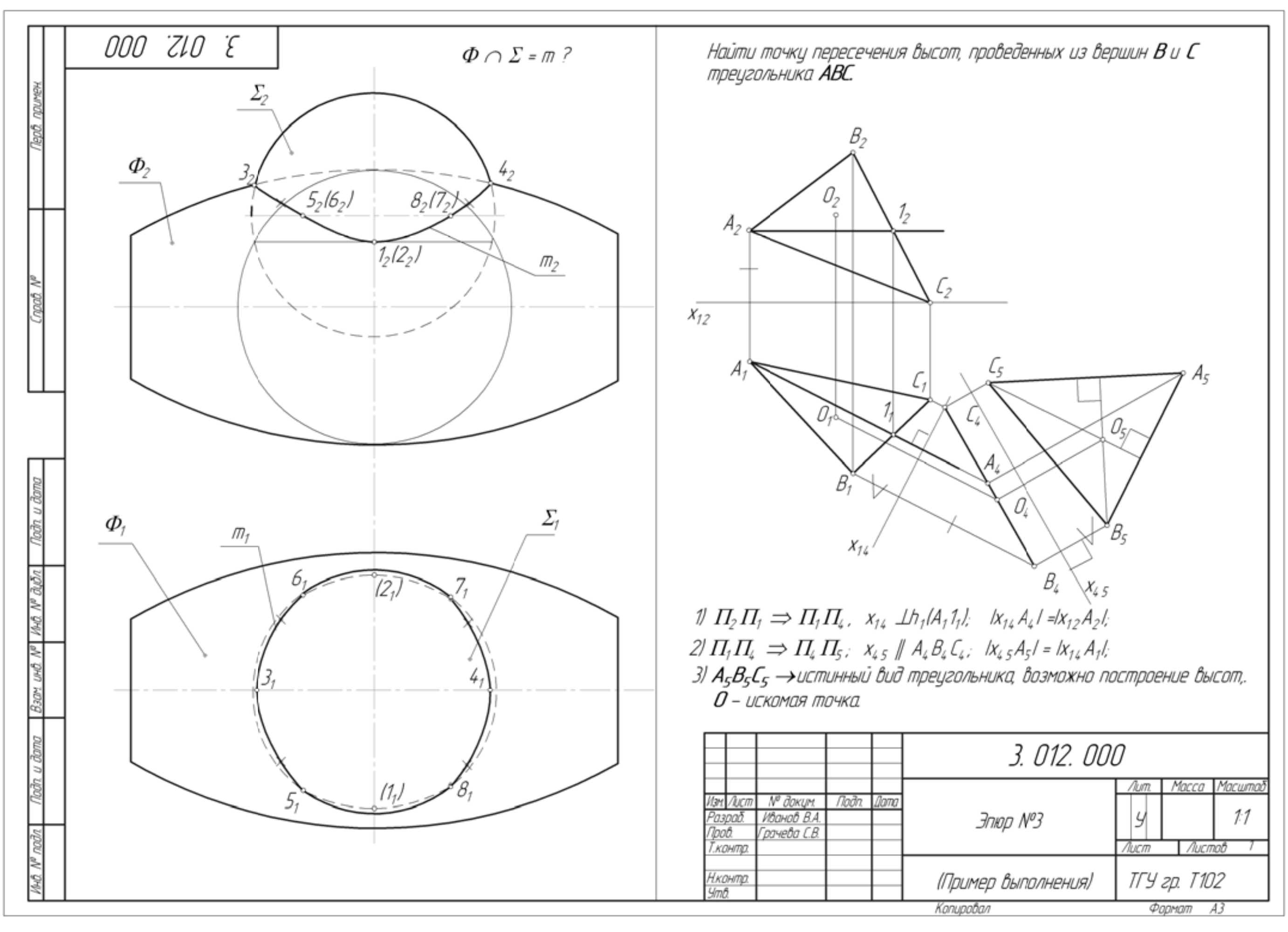
Задание состоит из двух задач.

<u>Первая задача на пересечение поверхностей</u> в третьем случае их взаимного расположения, когда обе поверхности занимают общее положение по отношению к обеим плоскостям проекций. Изображения даны без учета видимости поверхностей и без размеров, перечерчивать в масштабе увеличения, при решении учитывать видимость.Для построения линии пересечения применяется либо способ параллельных секущих плоскостей, либо способ концентрических сфер. В некоторых вариантах поверхности пересекаются по теореме Монжа.

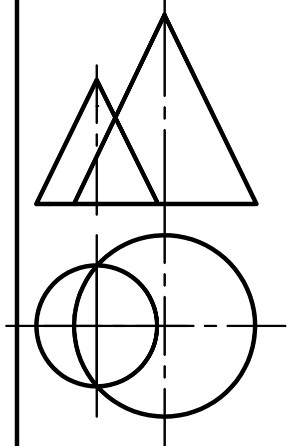
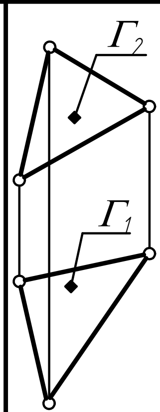
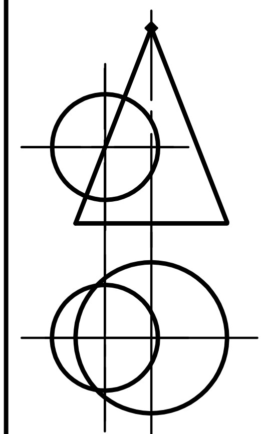
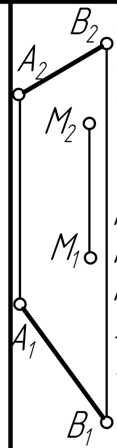
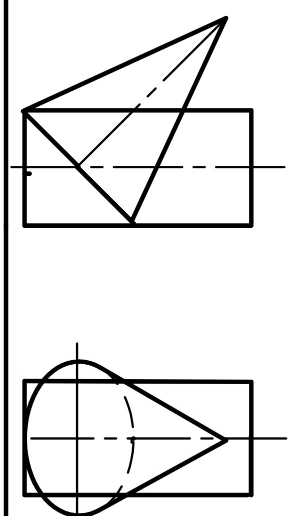
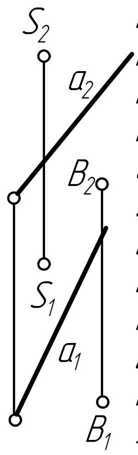
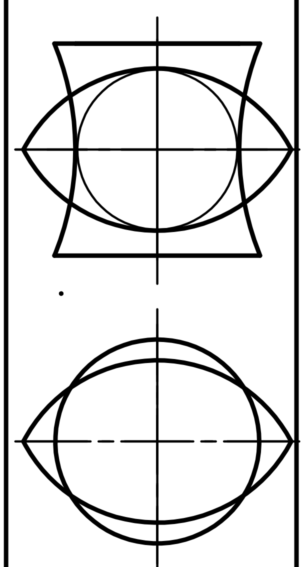
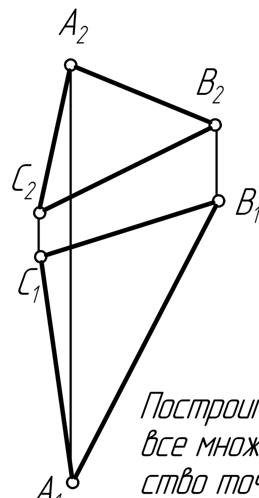
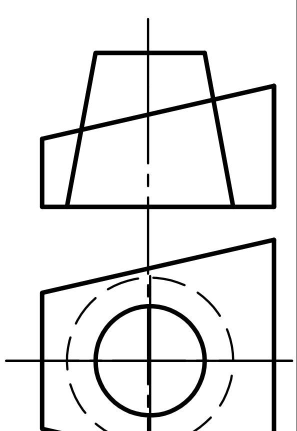
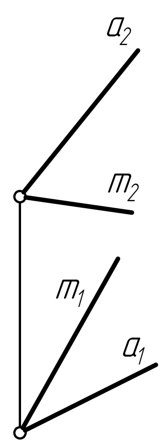
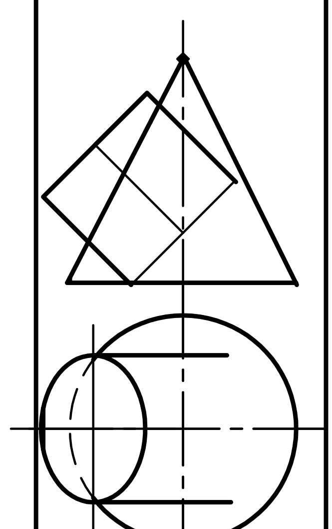
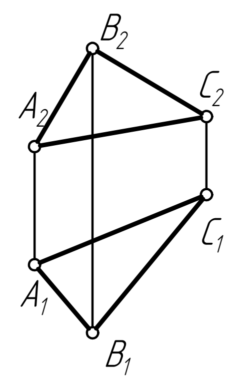
Построение всех главных точек с обозначением обязательно.

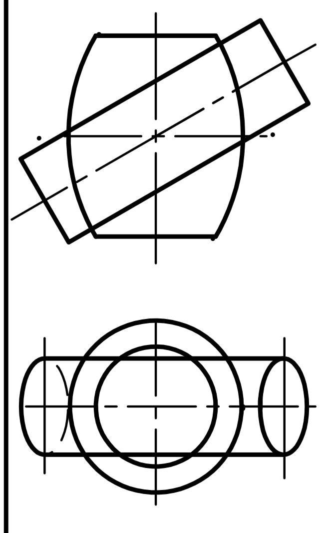
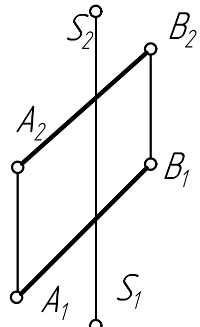
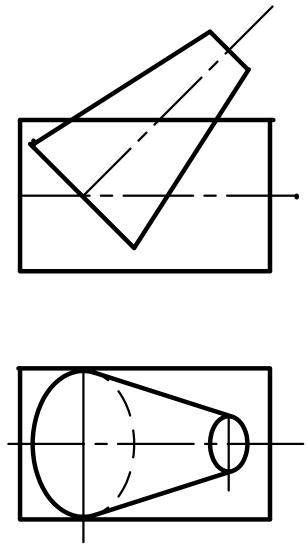
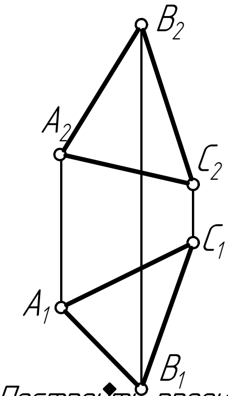
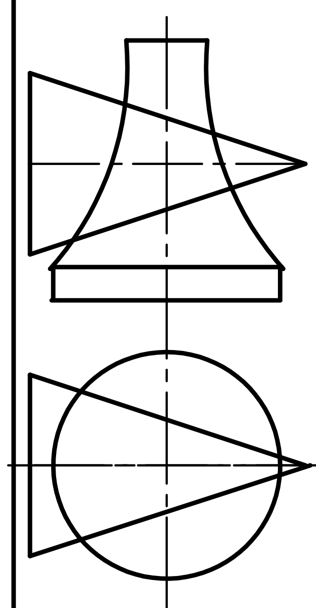
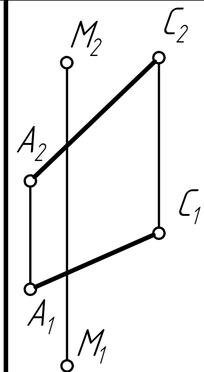
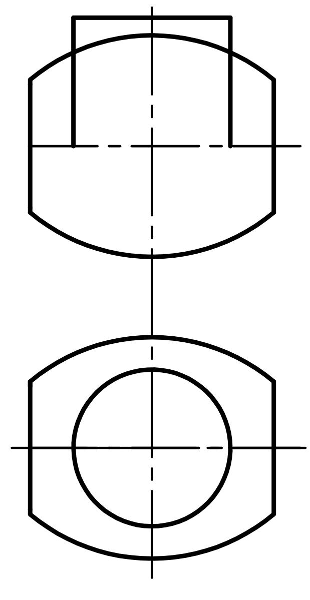
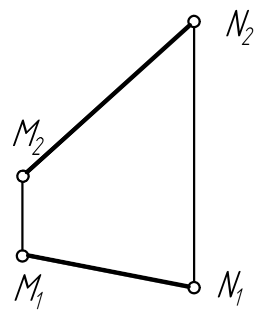
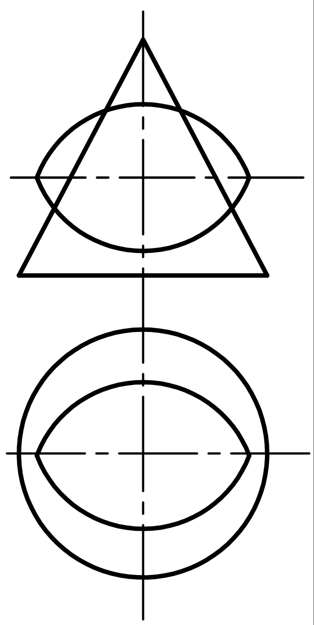
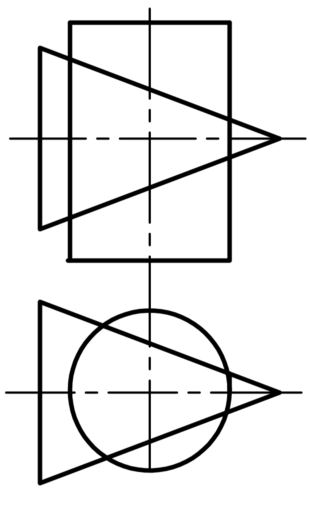
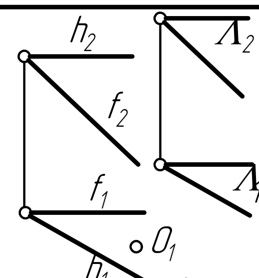
<u>Вторая задача метрическая, или конструктивная,</u> решается с применением способов преобразования чертежа. Запись алгоритма решения обязательна, искомые геометрические фигуры, если это возможно, необходимо достраивать в исходной системе плоскостей проекций.

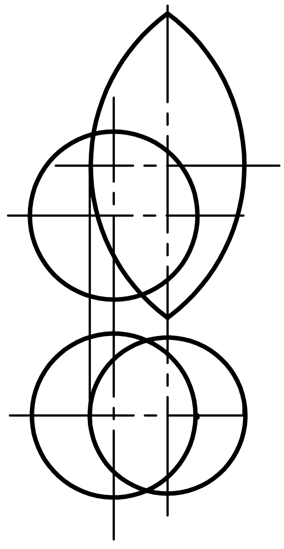
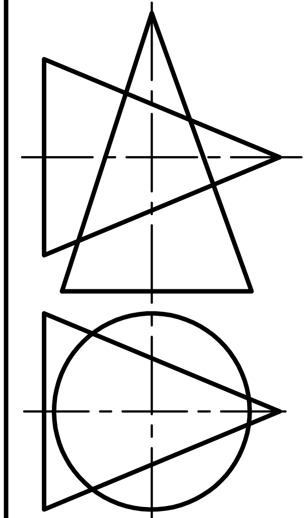
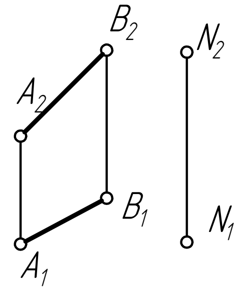
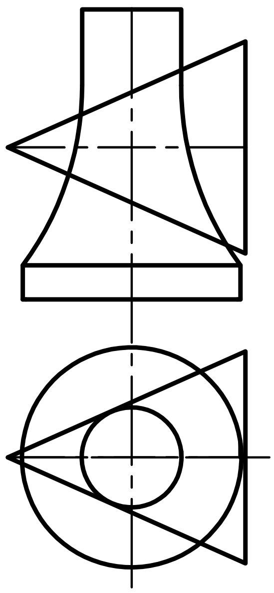
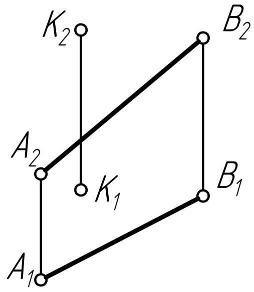
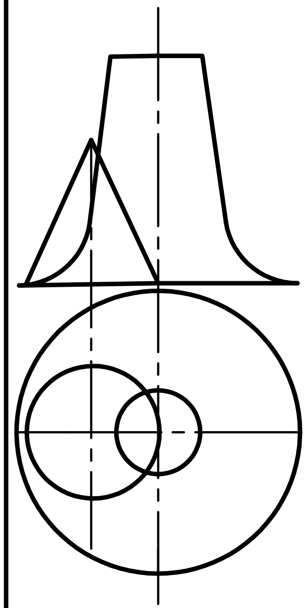
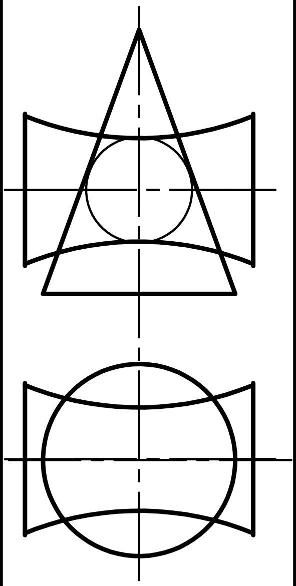
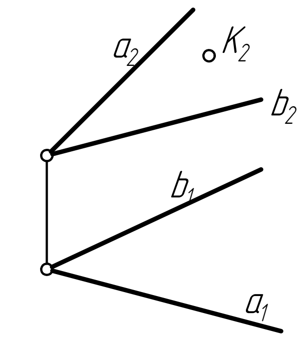
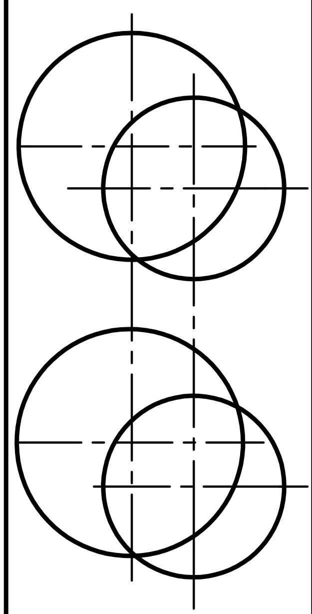
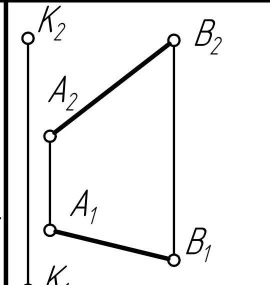
Ниже в масштабе уменьшения приведён пример выполнения.

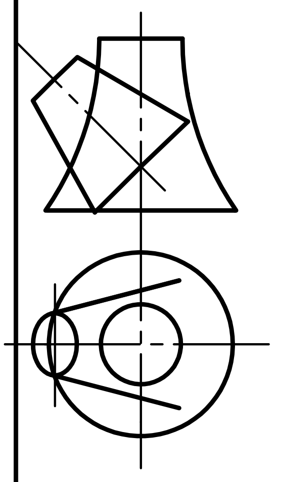
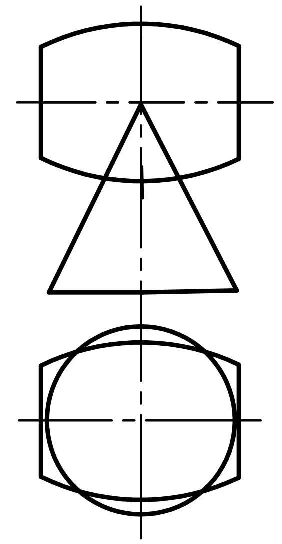
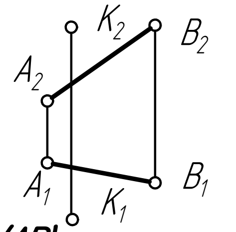
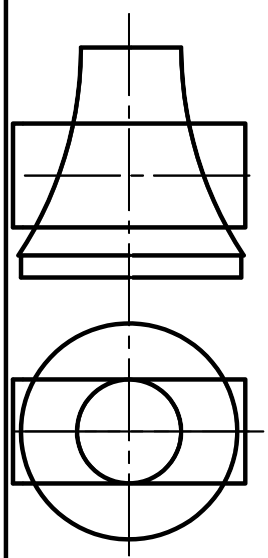
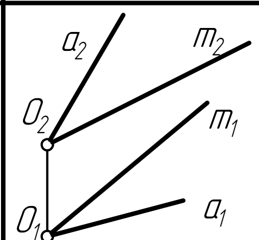
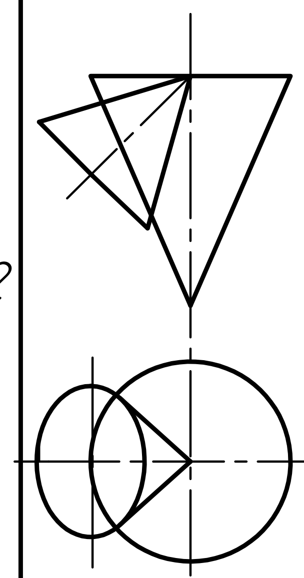
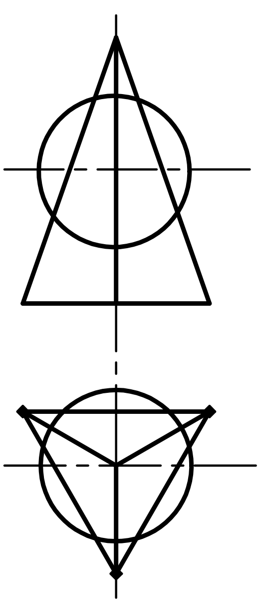
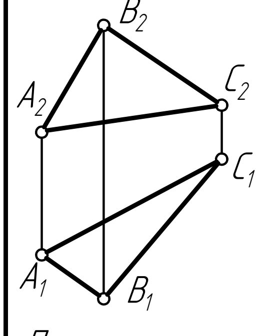
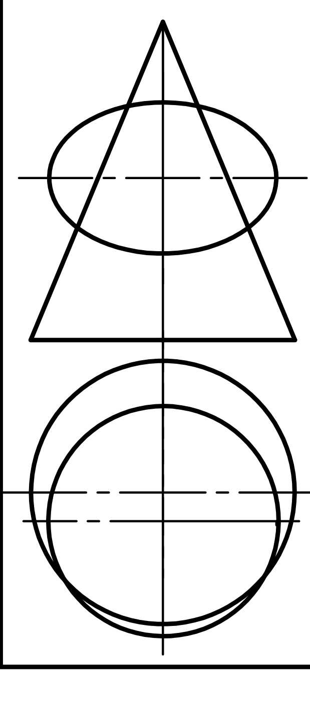
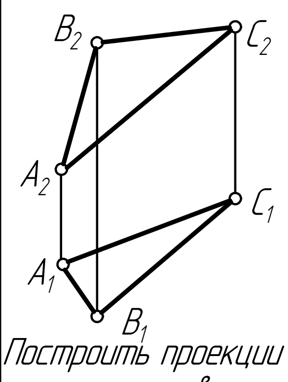


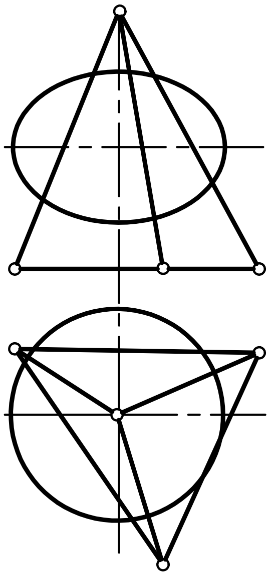
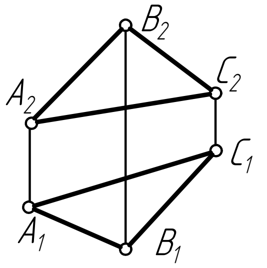
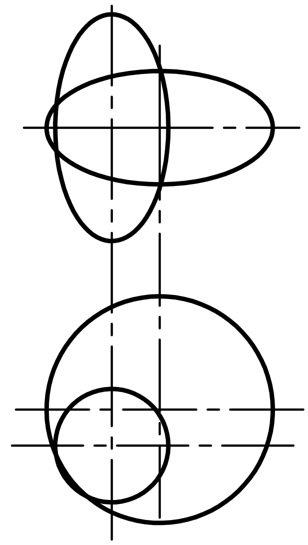
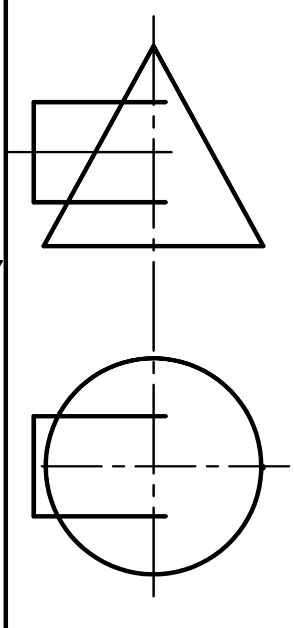
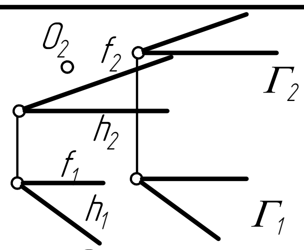
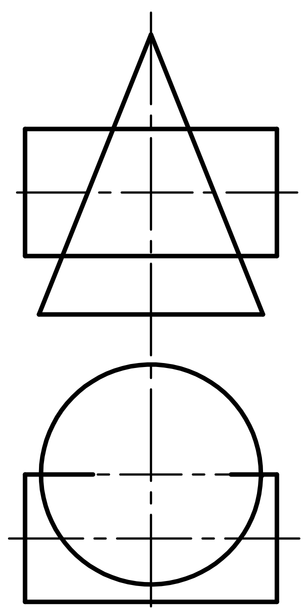
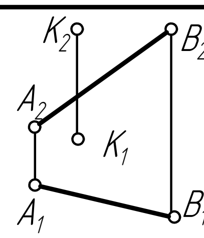
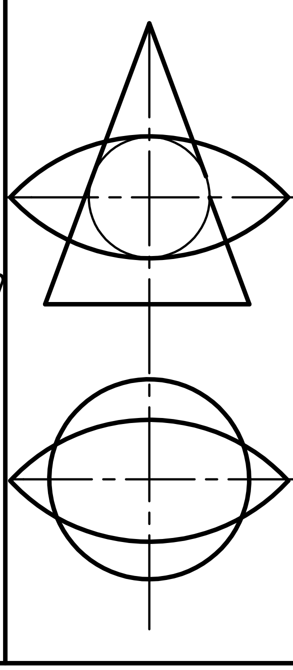
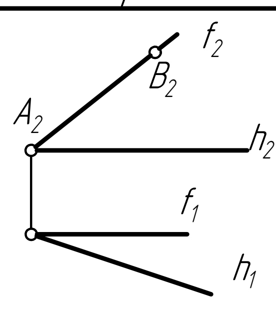
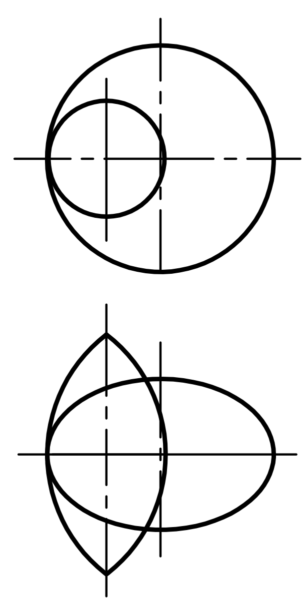
Задания на эпюр №3

Вари-ант	Первая задача	Вторая задача	Вари-ант	Первая задача	Вторая задача
1	2	3	1	2	3
1		 Найти центр описанной окружности треугольника Г.	2		 Построить проекции пирамиды **SABC**, основанием которой является равносторонний треугольник **ABC⊂Δ(ABM)**, высота равна **40** мм. Дать одно решение.
3		 Построить проекции кругового конуса с вершиной **S**, окружность основания которого **R25** мм принадлежит плоскости **Г(a,B)**.	4		 Построить все множество точек, равноудаленных от точек **ABC**.
5		 Определить угол между прямыми **a** и **m**	6		 Построить проекции цилиндра с осью **AC**, точка **B** принадлежит боковой поверхности цилиндра.

1	2	3	1	2	3
7		 Построить проекции квадрата **SMNK**, если **|SM|** равна расстоянию от **S** до **(AB)** и квадрат принадлежит **Γ(SAB)**. Дать одно решение.	8		 Построить проекции прямого кругового конуса, если **ABC** принадлежат основанию, а высота равна **40** мм. Дать одно решение.
9		 **(AC)** – диагональ квадрата, достроить проекции квадрата, если точка **M** принадлежит плоскости квадрата.	10		 **(MN)** – ось прямого кругового цилиндра с радиусом окружности **20** мм, построить проекции цилиндра, если точки **M** и **N** являются центрами оснований.
11		S (55, 10, 50) A (35, 60, 25) B (5, 25, 10) C (25, 15, 55) По заданным координатам точек построить проекции пирамиды **SABC**, определить ее высоту и натуральную величину основания.	12		 Плоскость **Γ(f ∩ h) ∥ Λ**, точка **O** является центром основания окружности **R25** мм прямого кругового цилиндра, перпендикулярного плоскостям, высота цилиндра равна **|ΓΛ|**. Построить цилиндр.

1	2	3	1	2	3
13		S (70, 50, 5) A (75, 15, 55) B (35, 0 , 0) C (10, 45,, 20) По зааданным координатам точек построить проекции пирамиды **SABC** и найти расстояние между ребрами **AB** и **SC**.	14		 **(AB)**–сторона правильного шестиугольника,принадлежащего плоскости **Г(ABN)**. построить проекции шестиугольника. Дать одно решение.
15		 Равносторонний треугольник **ABC** принадлежит плоскости **Δ(ABK)** и является основанием прямой правильной пирамиды с высотой **40** мм.Построить проекции пирамиды. Дать одно решение.	16		S (60, 45, 55) A (75, 25, 0) B (30, 15,50) C (10, 50, 20) По заданным координатам точек построить проекции пирамиды **SABC** и определить величину двухгранного угла при ребре **AS**.
17		 $K \subset Г(a \cap b)$. Построить проекции сферы, касательной плоскости **Г** в точке **K** радиусом **30** мм. Дать одно решение.	18		 **(AB)** – сторона квадрата, находящегося в одной плоскости с точкой **K**. Построить проекции прямой призмы с основанием **ABCD** (квадрат) высотой **40** мм. Дать одно решение.

1	2	3	1	2	3
19		S (75, 25, 20) A (60, 65, 20) B (45, 10, 60) C (5, 10, 20) По заданным координатам точек построить проекции пирамиды **SABC** и найти её высоту и натуральную величину основания **ABC**.	20		 **(AB)** – сторона правильного пятиугольника, точка **K** принадлежит его плоскости. Построить прямую правильную пирамиду высотой **40** мм на полученном основании. Дать одно решение.
21		 Построить проекции окружности радиусом **30** мм с центром в точке **O**, принадлежащей плоскости **$\Lambda(a \cap m)$**.	22		S (60, 10, 20) A (45, 15, 55) B (0, 5, 25) C (60, 60, 10) По заданным координатам точек построить проекции пирамиды **SABC** и найти величину двухгранного угла при ребре **BS**.
23		 Построить проекции пирамиды **SABC**, если вершина **S** равноудалена от точек **ABC** и находится на расстоянии **40** мм от плоскости **ABC**. Дать одно решение.	24		 Построить проекции прямого кругового конуса, если точки **ABC** принадлежат окружности основания, а вершина **S** удалена от него на **50** мм. Дать одно решение.

1	2	3	1	2	3
25		 Найти центр вписанной окружности треугольника **ABC** и построить её проекции.	26		S (10, 0 , 15) A (80, 20, 10) B (45, 0, 70) C (0, 45, 40) По заданным координатам точек построить проекции пирамиды **SABC** и найти её высоту и угол наклона основания **ABC** к горизонтальной плоскости проекций.
27		 Точка **O** принадлежит плоскости $\boldsymbol{\Lambda(f \cap h)}$ и является центром окружности **R25** мм основания прямого кругового цилиндра, высота которого равна расстоянию между плоскостями Λ и Γ. Построить проекции цилиндра. $\Lambda \parallel \Gamma$ Дать одно решение..	28		 **(AB)** – сторона квадрата **ABCD**, точка **K** принадлежит плоскости квадрата. Построить проекции квадрата. Дать одно решение.
29		 **(AB)** – сторона равностороннего треугольника **ABC**, принадлежащего плоскости $\Gamma(f \cap h)$ построить проекции пирамиды **SABC** с высотой **50** мм. Дать одно решение.	30		S (60, 10, 20) A (45, 15, 55) B (0, 5, 25) C (60, 60, 10) По заданным координатам точек построить проекции пирамиды **SABC** и найти её высоту, истинную величину основания **ABC** и угол наклона его к фронтальной плоскости проекций.

Библиографический список

1. Бубенников, А.В. Начертательная геометрия : учебник для втузов / А.В. Бубенников. – 3-е изд., перераб. и доп. – М. : Высш. шк., 1985.– 288 с.

2. Гордон, В.О. Курс начертательной геометрии : учеб. пособие для втузов / В.О. Гордон, М.А. Семенцов-Огиевский; под ред. Ю.Б. Иванова. – 23-е изд., перераб. – М. : Наука, 1988. – 272 с.

3. Грачёва, С.В. Задачник по начертательной геометрии (с элементами теории и примерами решения задач) : учеб. пособие для втузов /С.В.Грачёва. – Тольятти : ТГУ, 2003. – 108 с.

4. Иванов, Г.С. Сборник задач по начертательной геометрии : учеб. пособие для втузов / Г.С. Иванов, Е.И. Желонкин. – Йошкар-Ола, 1992. – 112 с.

5. Локтев, О.В. Задачник по начертательной геометрии : учеб. пособие для втузов / О.В. Локтев, П.А. Числов. – 4-е изд., стер. – М. : Высш. шк., 2002. – 104 с.

6. Лосев, Н.В. 200 олимпиадных задач по начертательной геометрии : практ. пособие / Н.В. Лосев. – М. : Высш. шк., 1992. – 144 с.

7. Нартова, Л.Г. Начертательная геометрия : учеб. для вузов / Л.Г. Нартова, В.И. Якунин. – М. : Дрофа, 2003. – 208 с.

8. Павлова, А.А. Начертательная геометрия : учеб. для студентов высш. учеб. заведений / А.А. Павлова. – М. : Астрель : АСТ, 2001. – 304 с.

9. Пеклич, В.А. Начертательная геометрия : учеб. для вузов /В.А. Пеклич. – М. : АСВ, 2000. – 248 с.

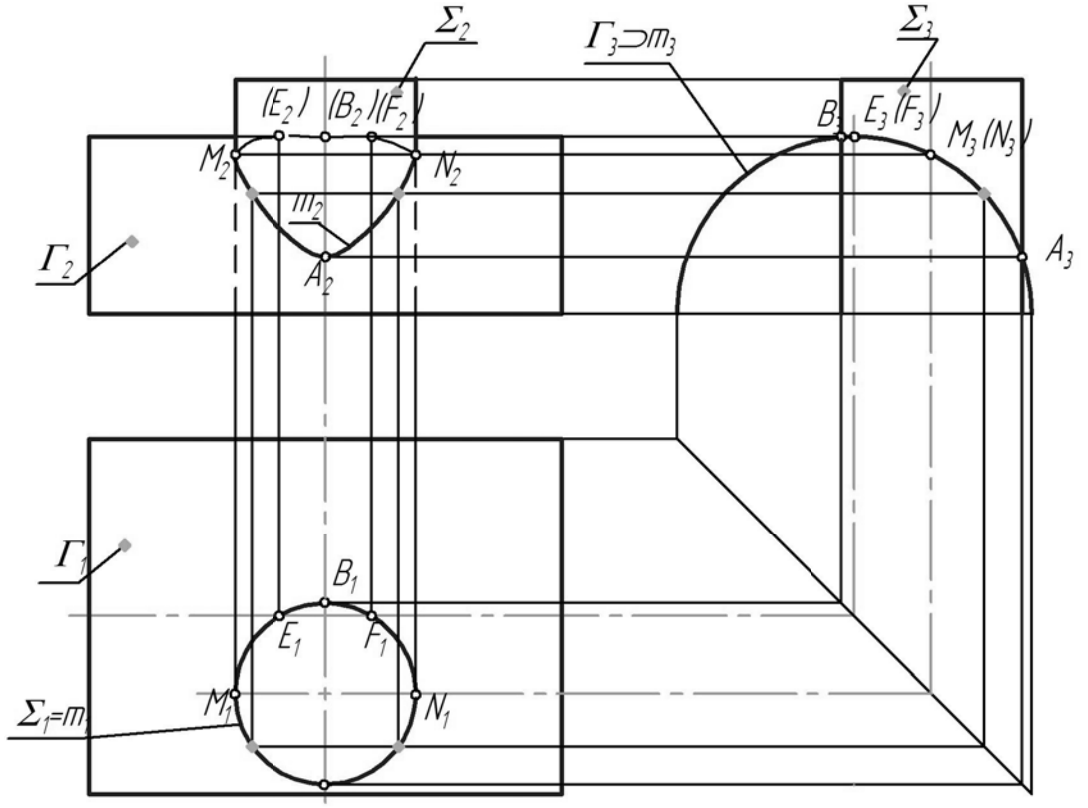
10. Пеклич, В.А. Упражнения и задачи по начертательной геометрии : учеб. пособие / В.А. Пеклич. – М. : АСВ, 2002. – 328 с.

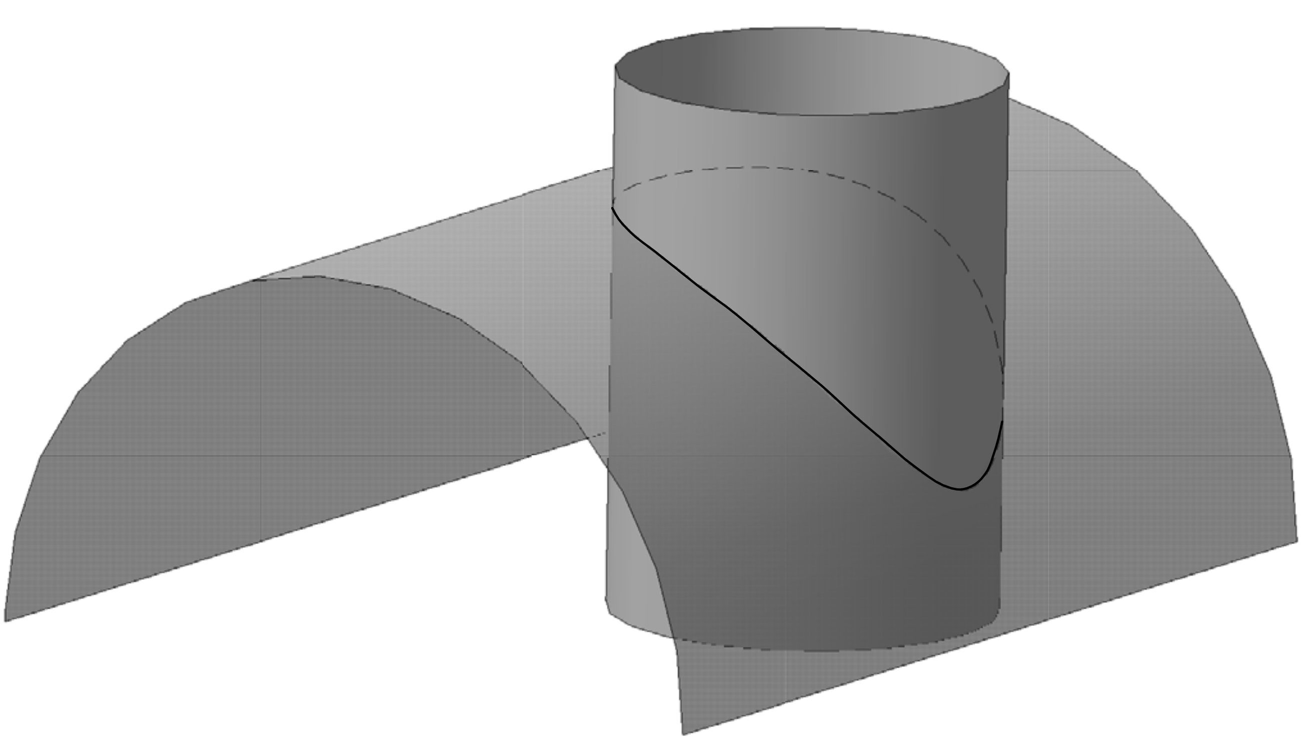
11. Пеклич, В.А. Задачи по начертательной геометрии : учеб. пособие / В.А. Пеклич. – М. : АСВ, 1997. – 230 с.

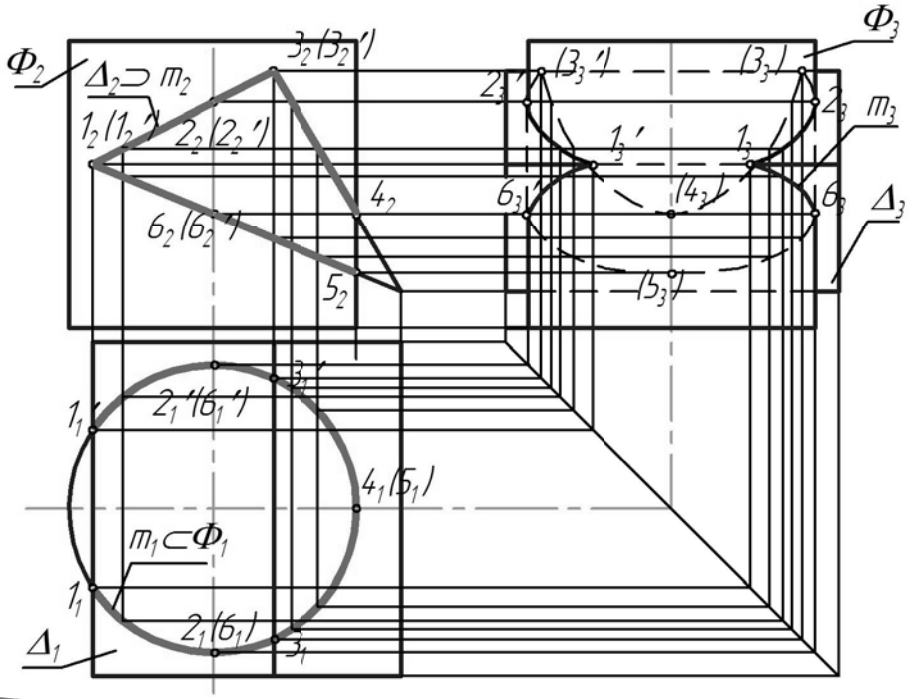
12. Фролов, С.А. Начертательная геометрия : учеб. для втузов / С.А. Фролов. – 2-е изд., перераб. и доп. – М. : Машиностроение, 1983. – 240 с.

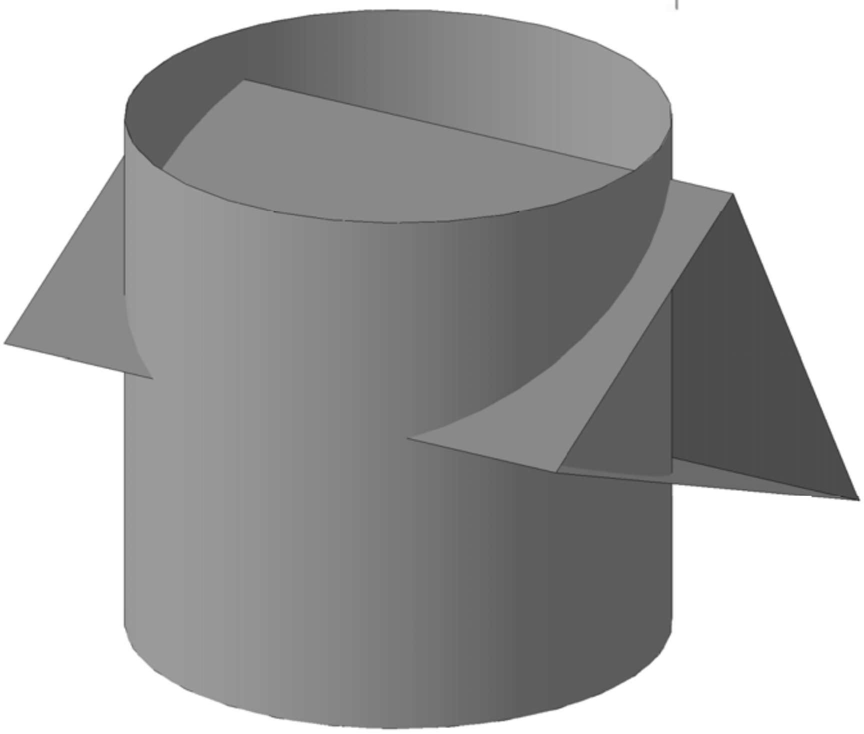
13. Чекмарёв, А.А. Начертательная геометрия и черчение : учеб. для студ. высш. учеб. заведений / А.А. Чекмарёв. – 2-е изд., перераб. и доп. – М. : ВЛАДОС, 2003. – 472 с.

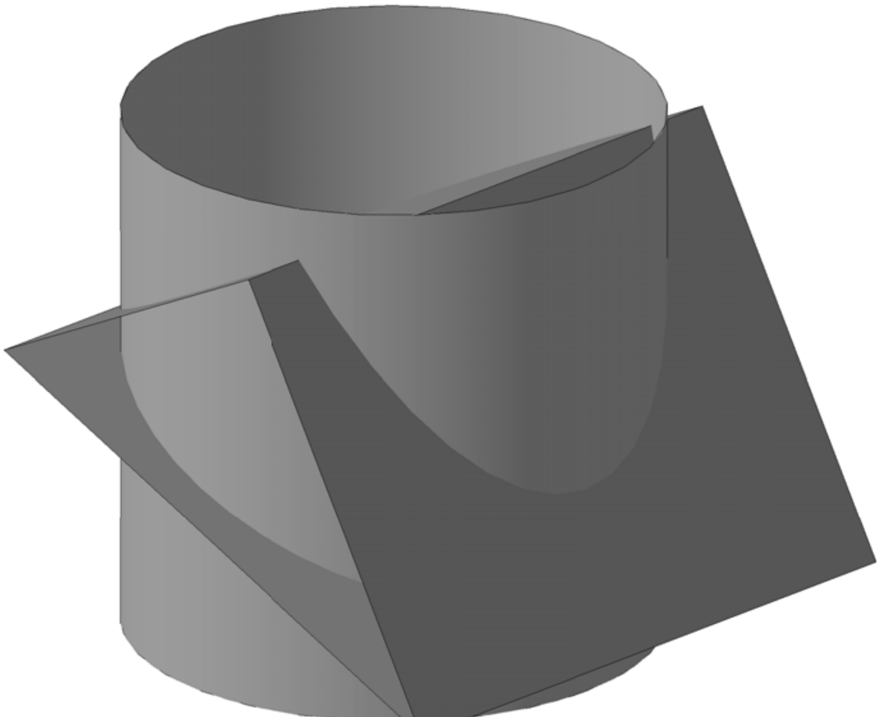
П Р И Л О Ж Е Н И Е
(рисунки в 3D)

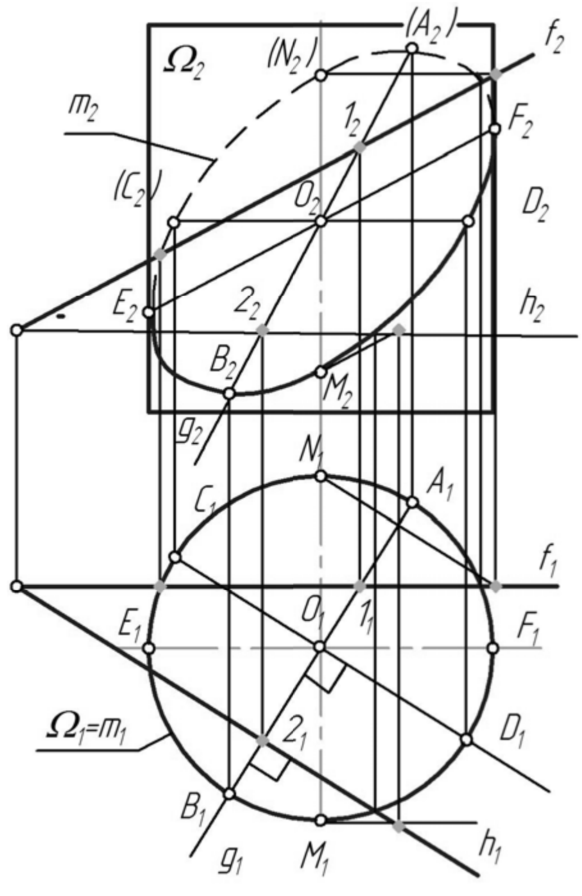




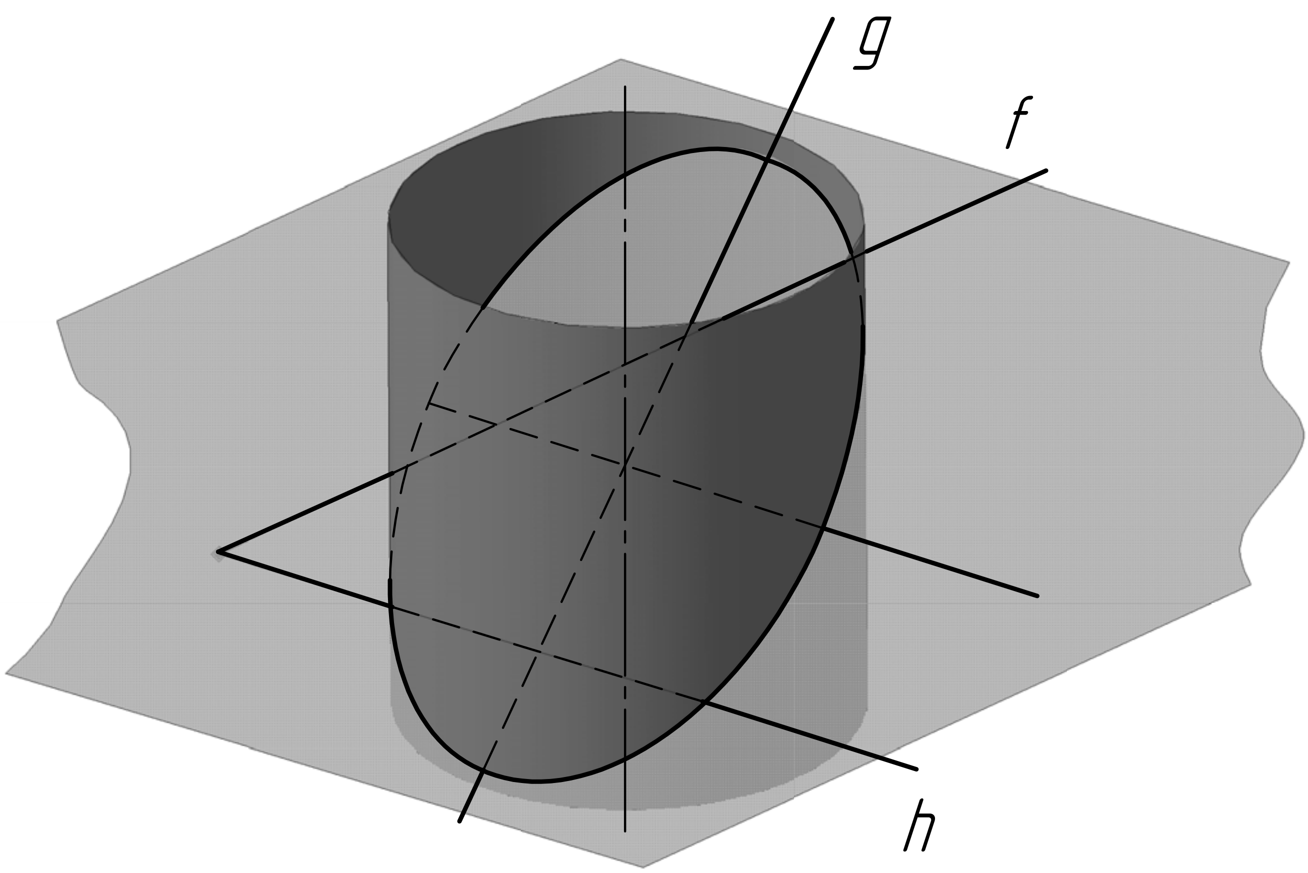

Φ2
Δ2⊃m2
Φ3
m3
Δ3
m1⊂Φ1
Δ1



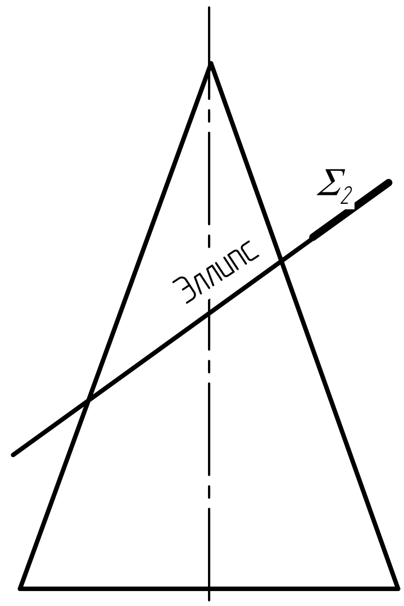


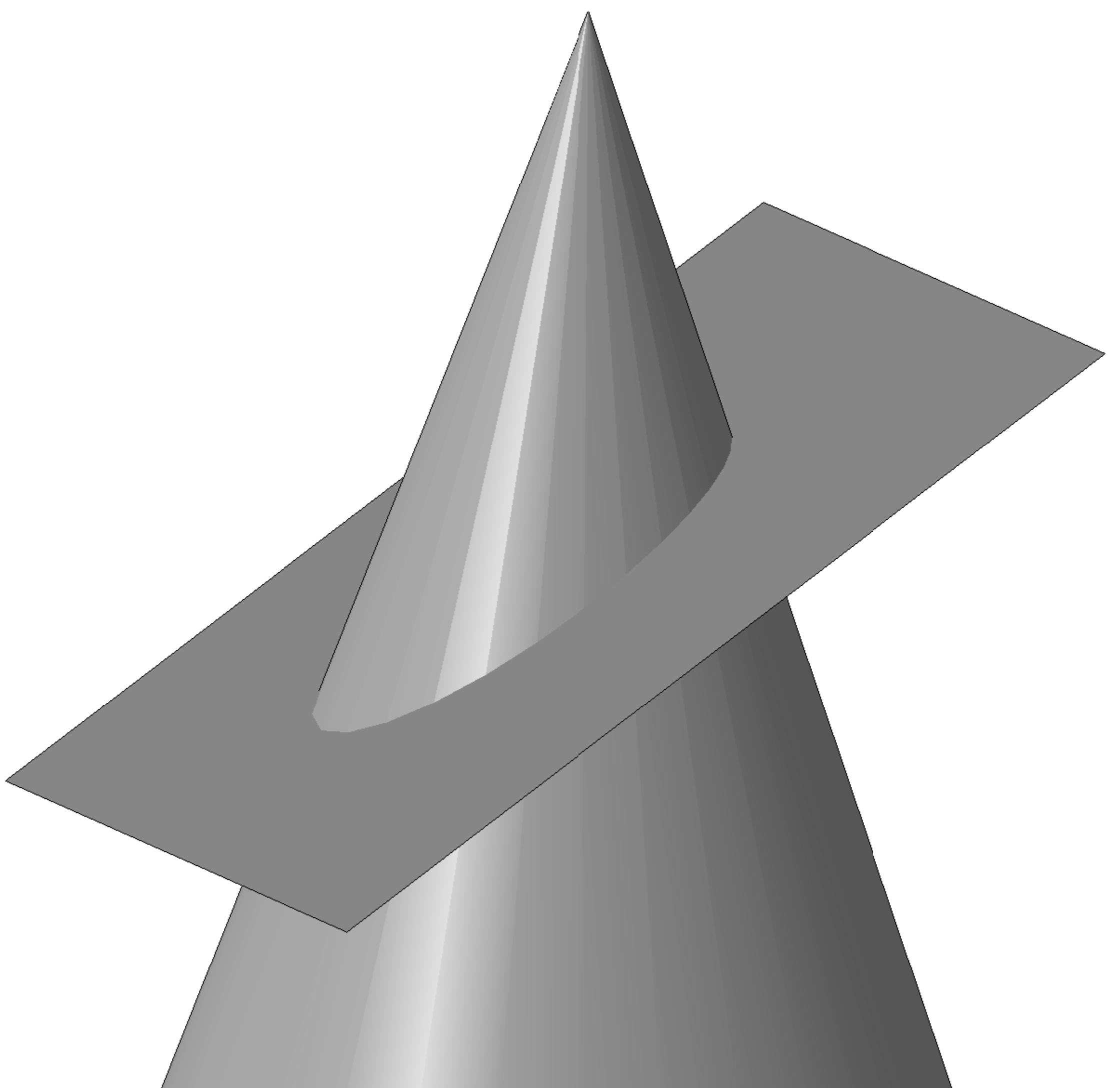


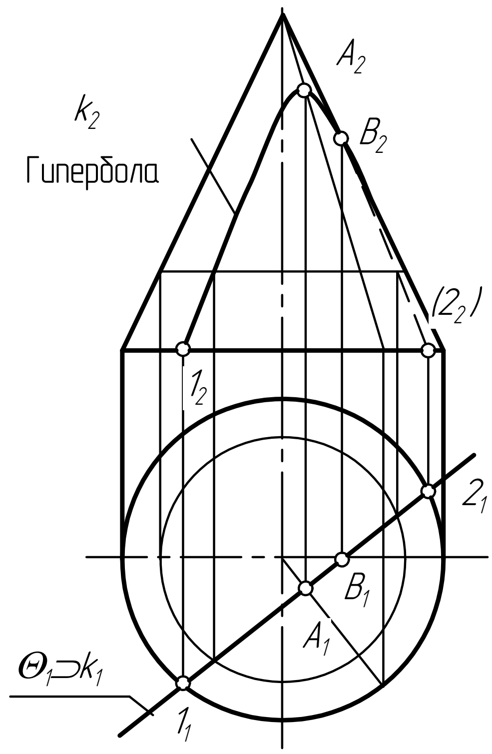
(A2)
(N2)
Ω2
f2
m2
12
F2
(C2)
O2
D2
E2
22
h2
B2
M2
g2
N1
A1
C1
f1
E1
O1
11
F1
Ω1=m1
21
D1
B1
g1
M1
h1

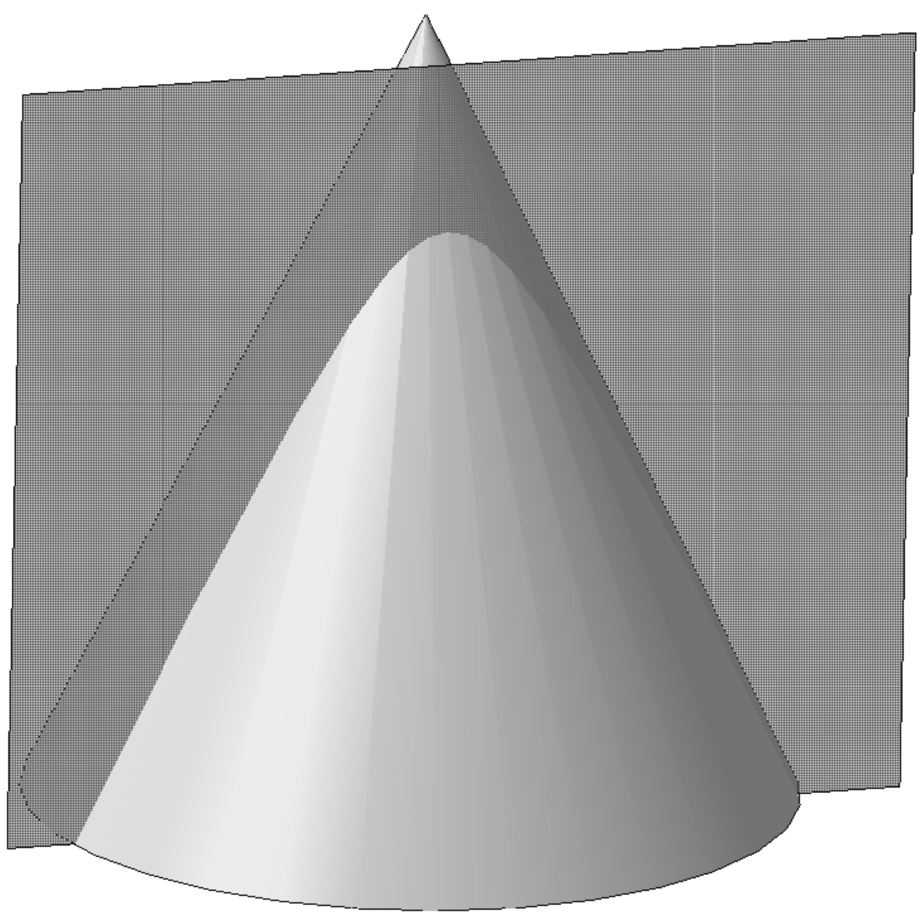


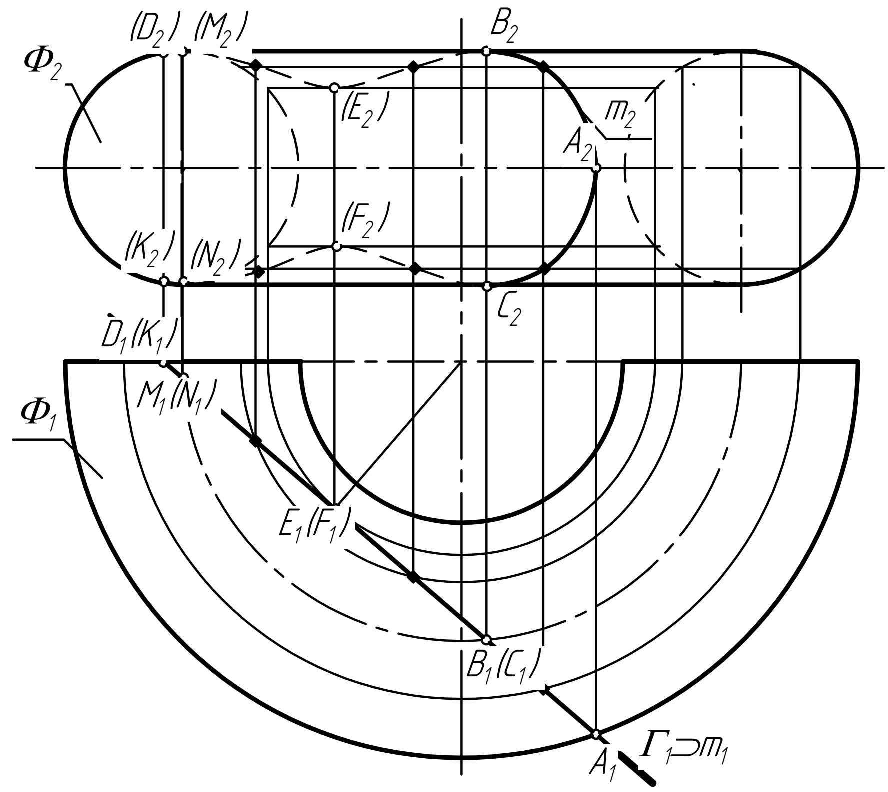
g
f
h

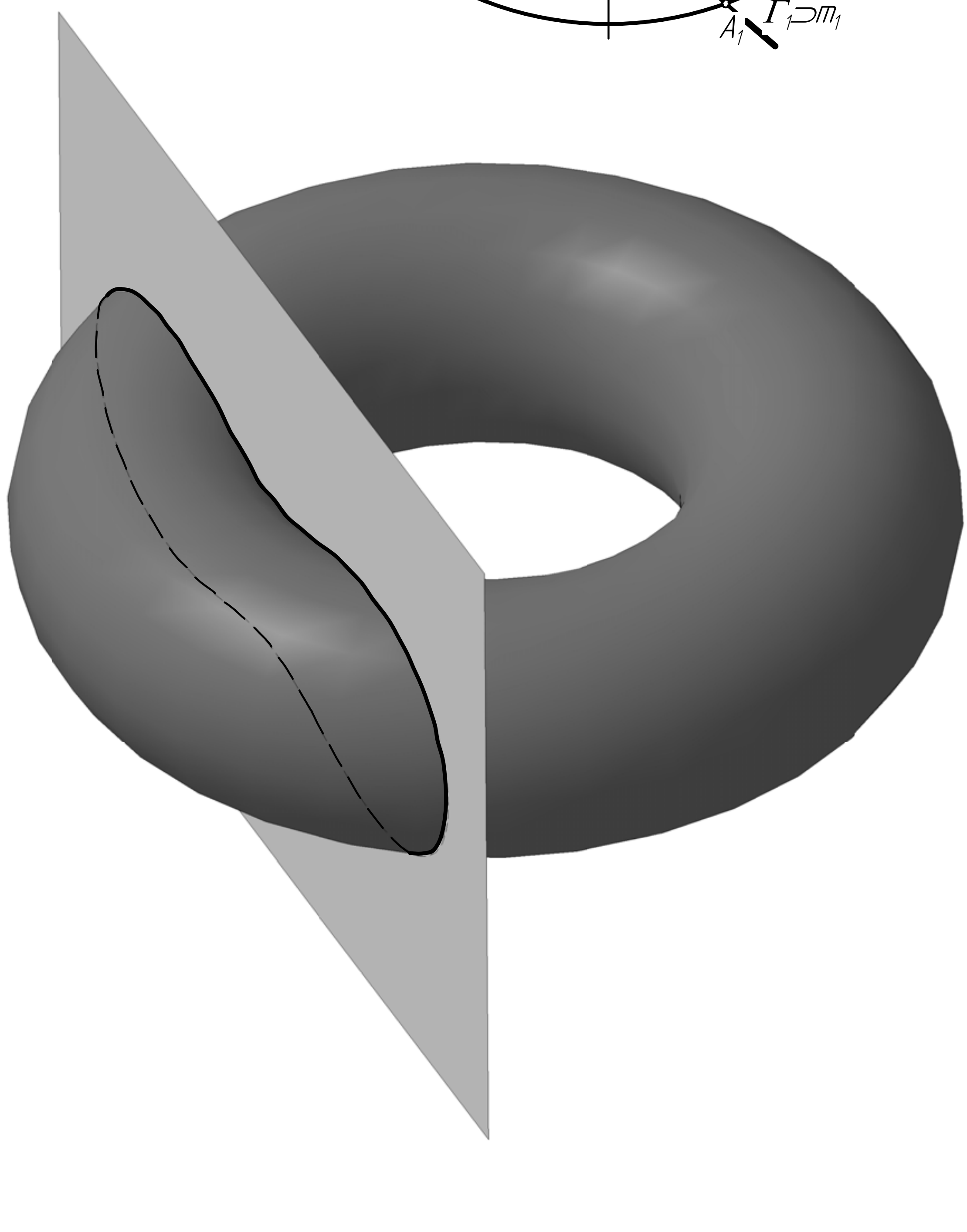

Σ_2
Эллипс

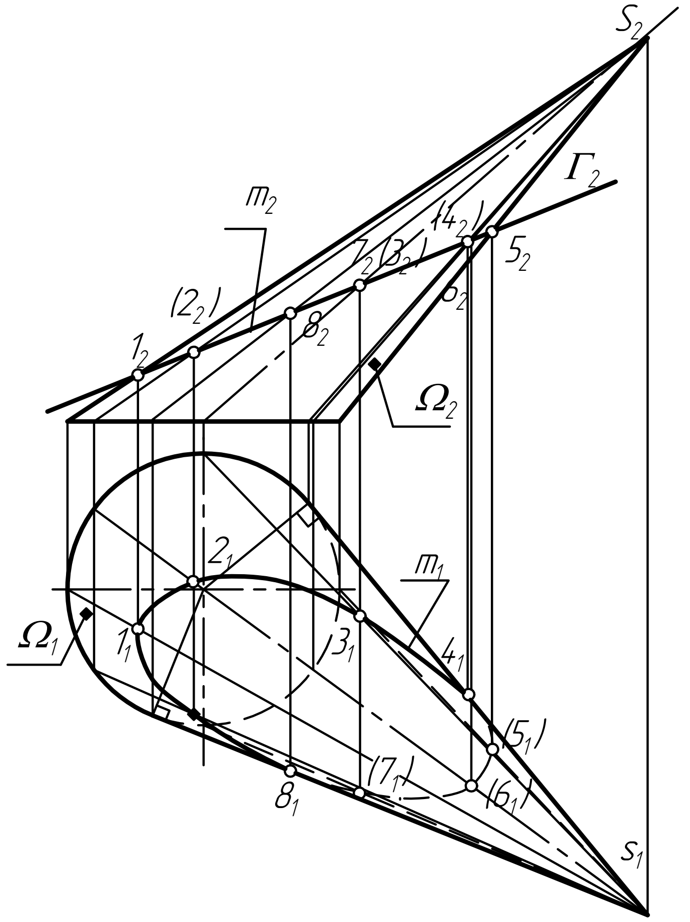


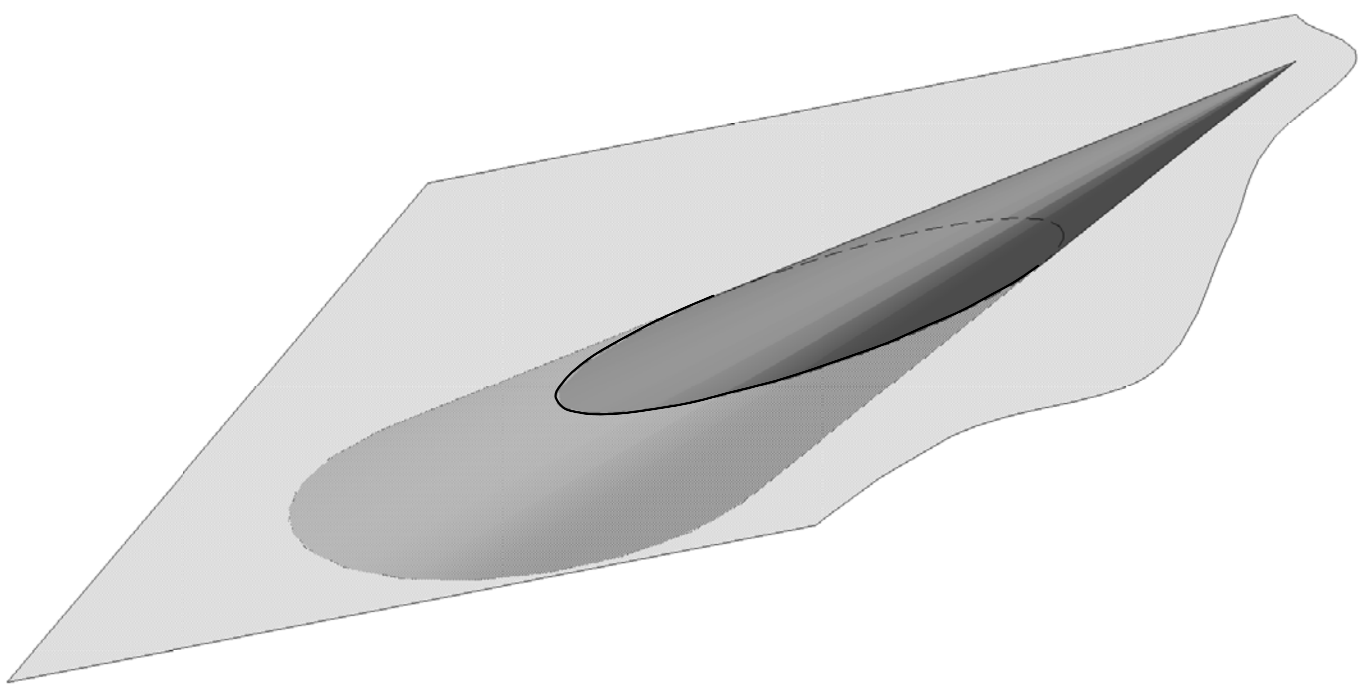

A_2
k_2
B_2
Гипербола
(2_2)
1_2
2_1
B_1
A_1
$\Theta_1 \supset k_1$
1_1

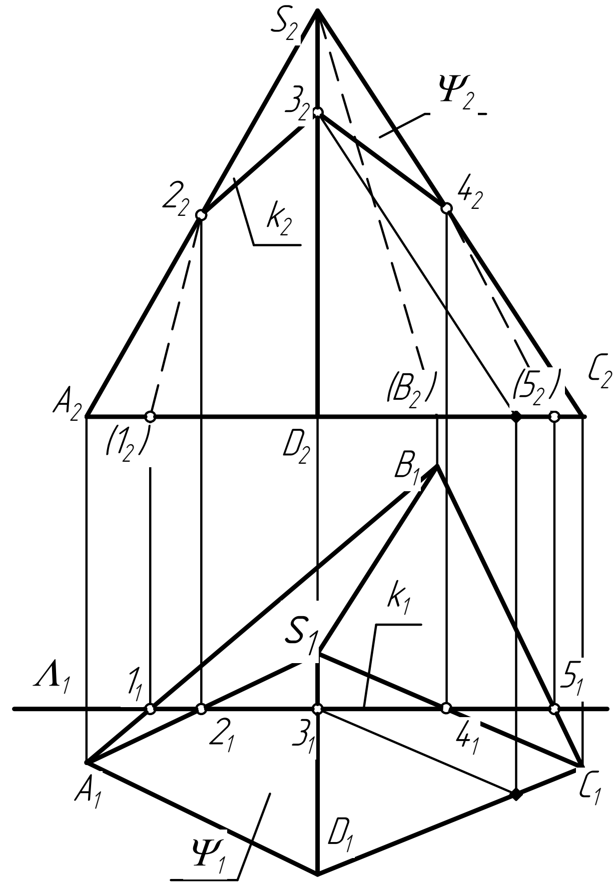



(D_2) (M_2)
B_2
Φ_2
(E_2)
m_2
A_2
(F_2)
(K_2) (N_2)
C_2
$D_1(K_1)$
$M_1(N_1)$
Φ_1
$E_1(F_1)$
$B_1(C_1)$
A_1
$\Gamma_1 \supset m_1$

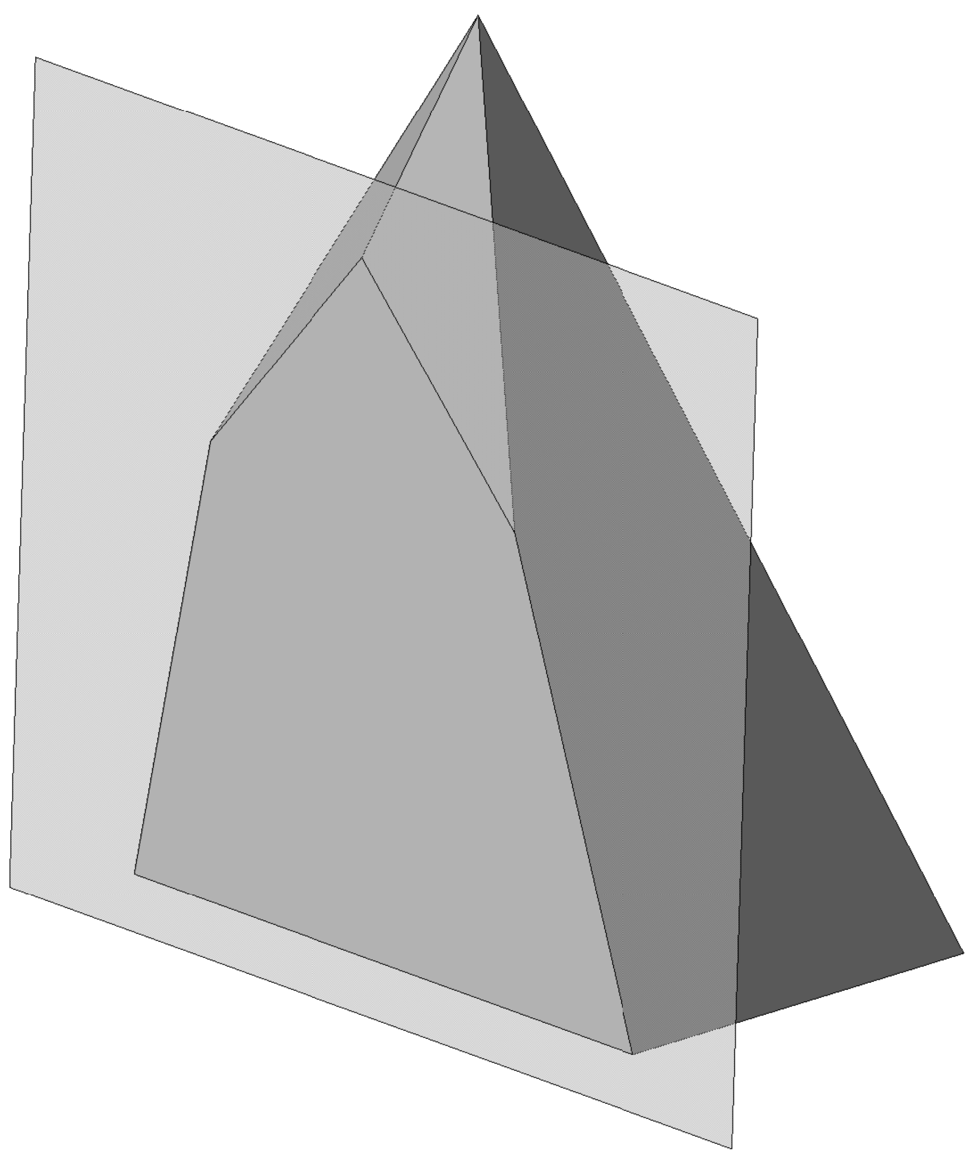


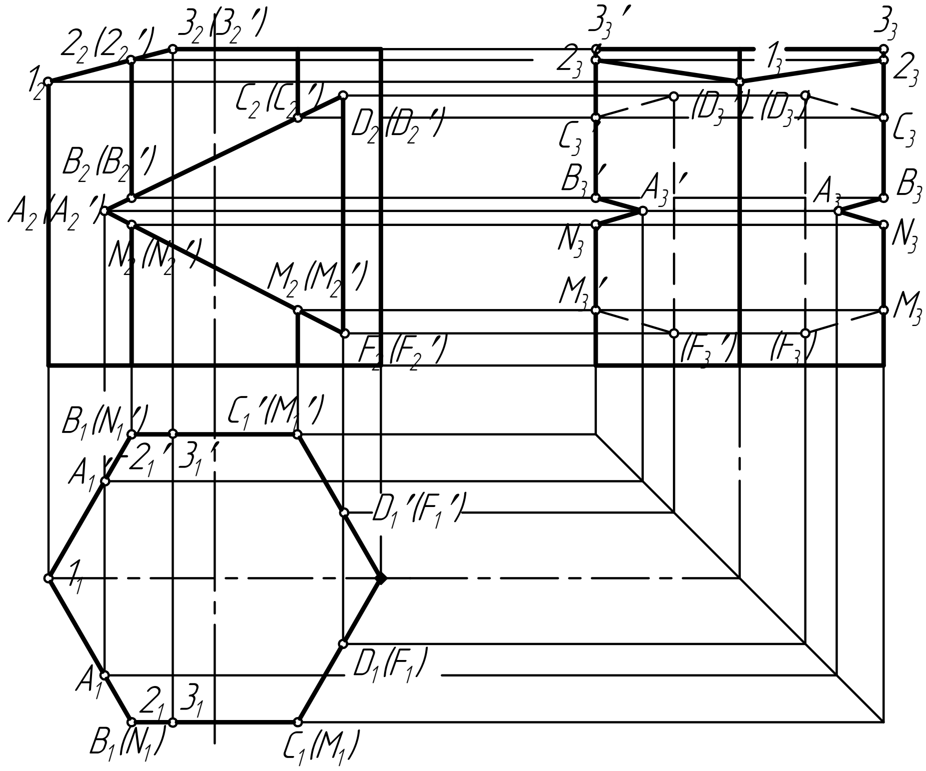

S_2
Γ_2
m_2
(4_2)
7_2
(3_2)
5_2
(2_2)
6_2
8_2
1_2
Ω_2
2_1
m_1
Ω_1
1_1
3_1
4_1
(5_1)
(7_1)
(6_1)
8_1
s_1



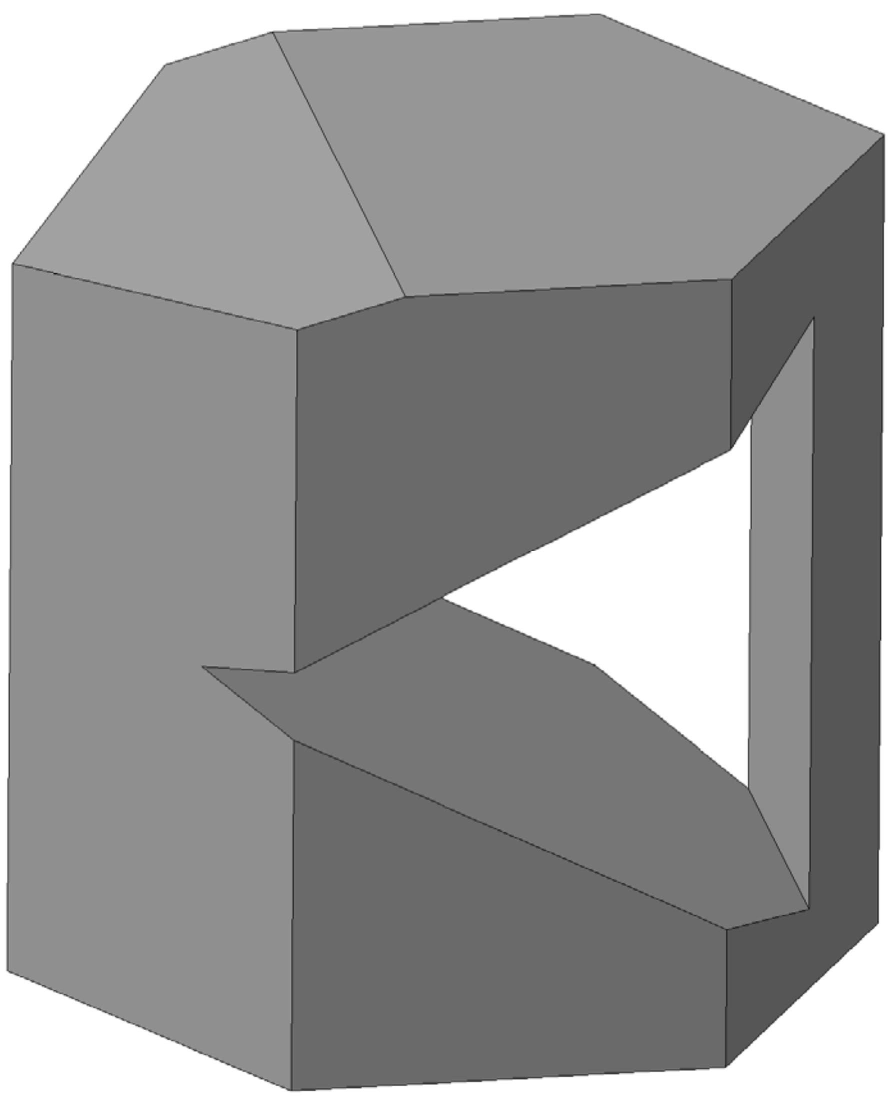


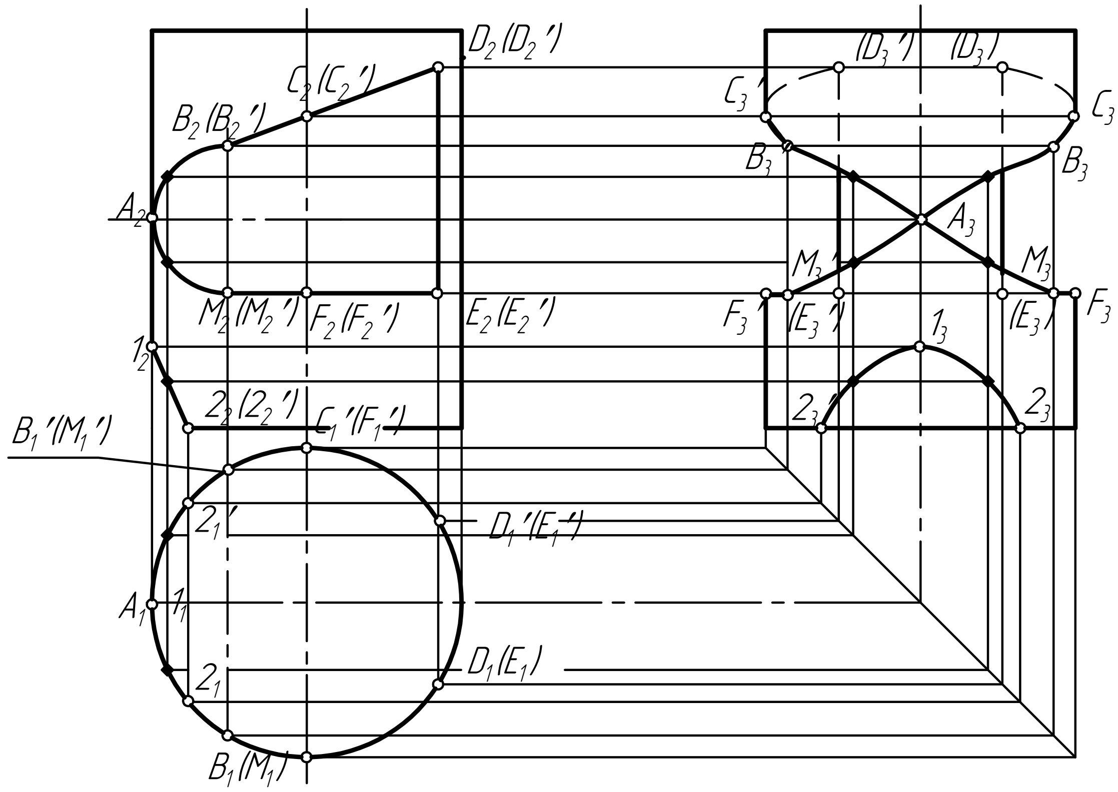
S_2
Ψ_2
3_2
2_2
k_2
4_2
A_2
(1_2)
D_2
(B_2)
(5_2)
C_2
B_1
k_1
S_1
Λ_1
1_1
2_1
3_1
4_1
5_1
A_1
D_1
C_1
Ψ_1

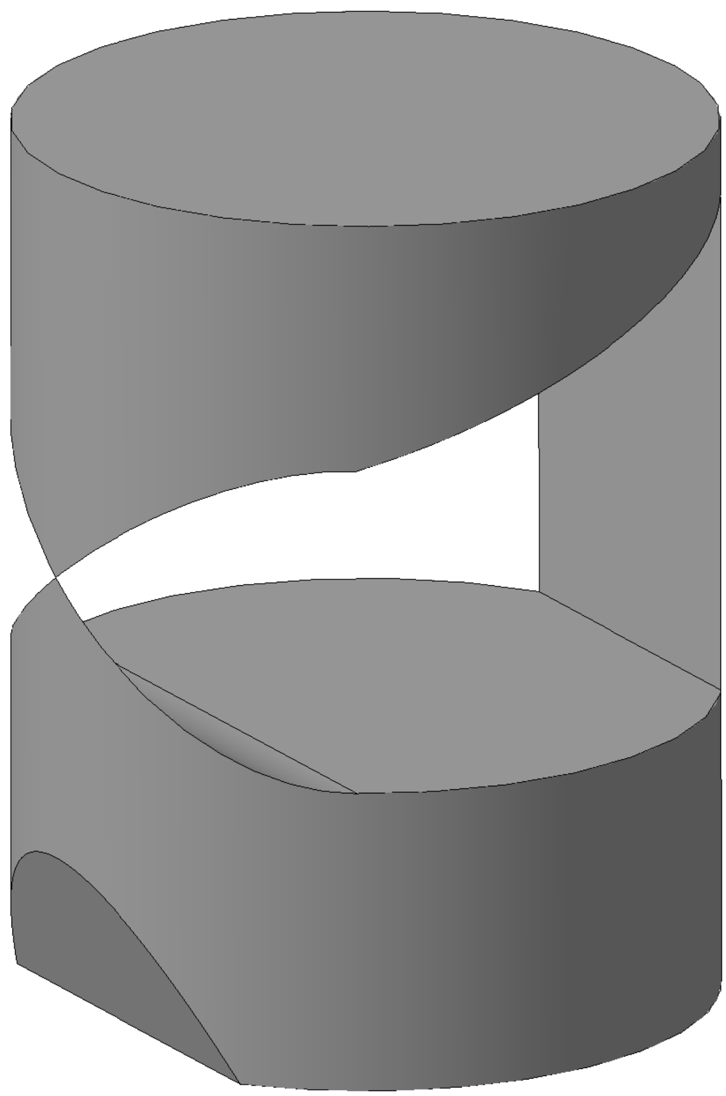


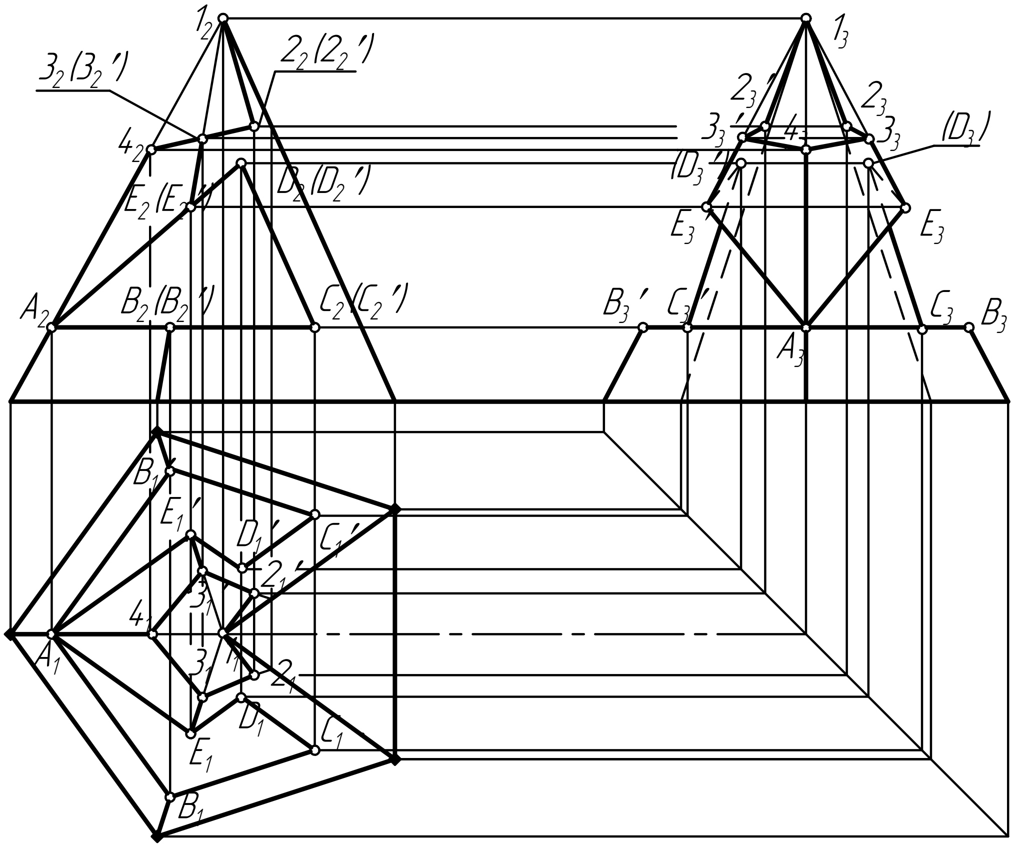


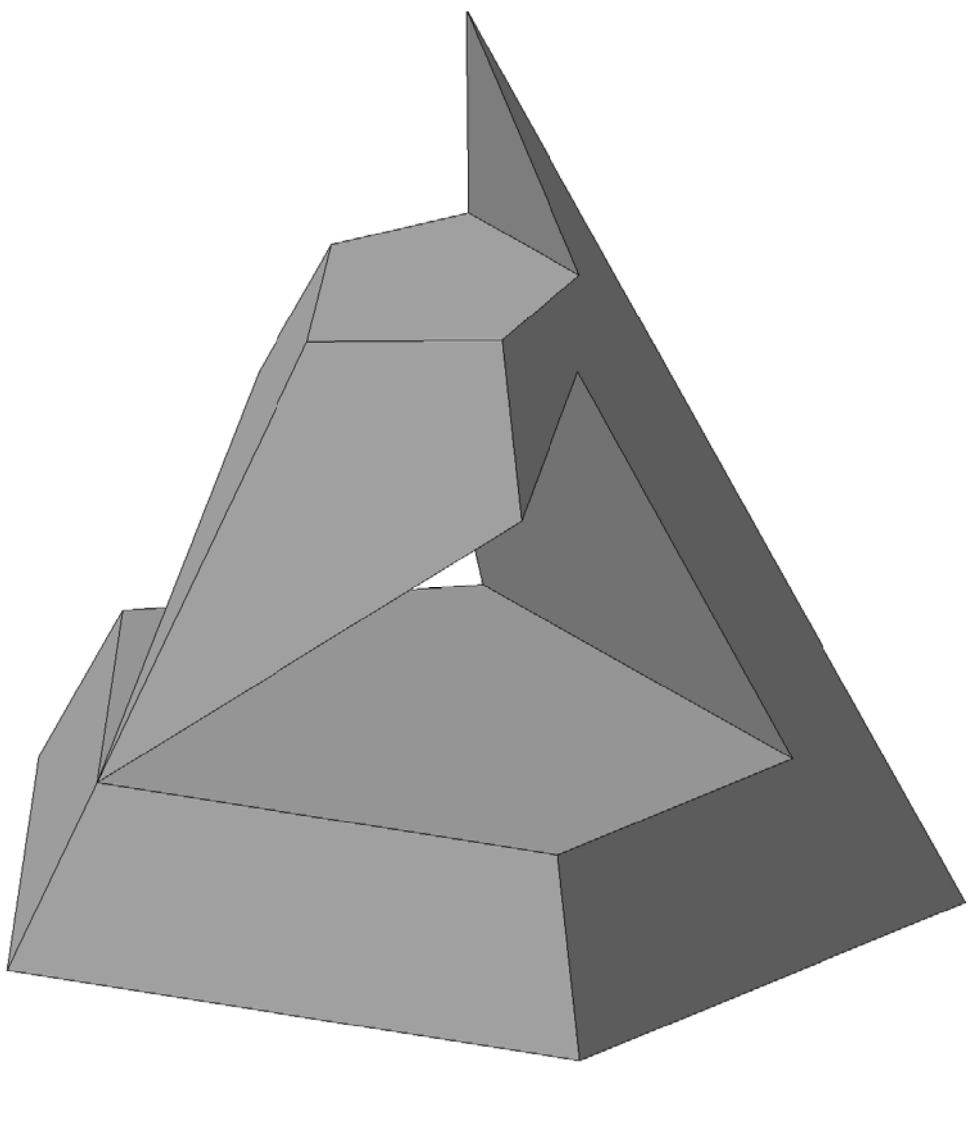
1₂
2₂ (2₂′)
3₂ (3₂′)
C₂ (C₂′)
D₂ (D₂′)
B₂ (B₂′)
A₂ (A₂′)
N₂ (N₂′)
M₂ (M₂′)
F₂ (F₂′)
3₃′
3₃
2₃
1₃
2₃
(D₃′)
(D₃)
C₃
C₃
B₃′
A₃′
A₃
B₃
N₃
N₃
M₃′
M₃
(F₃′)
(F₃)
B₁(N₁′)
C₁′(M₁′)
2₁′
3₁′
A₁′
D₁′(F₁′)
1₁
D₁(F₁)
A₁
2₁
3₁
B₁(N₁)
C₁(M₁)

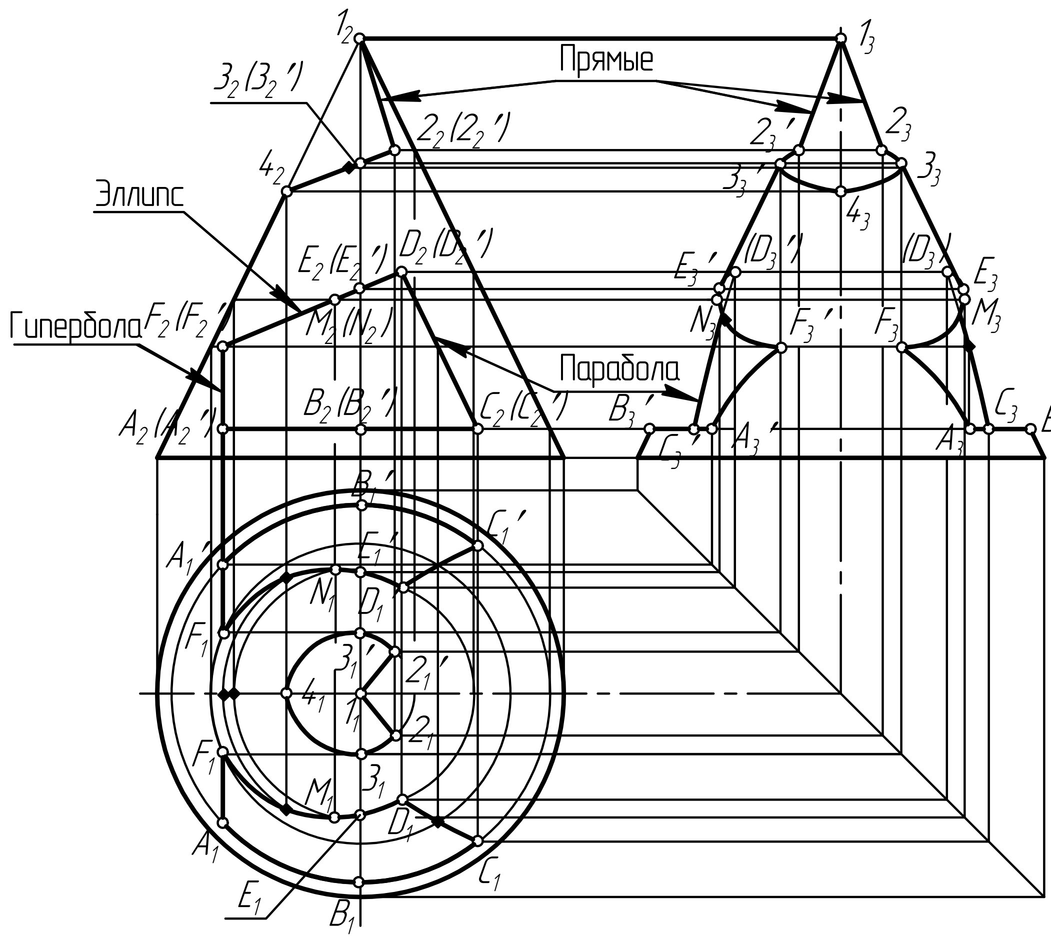


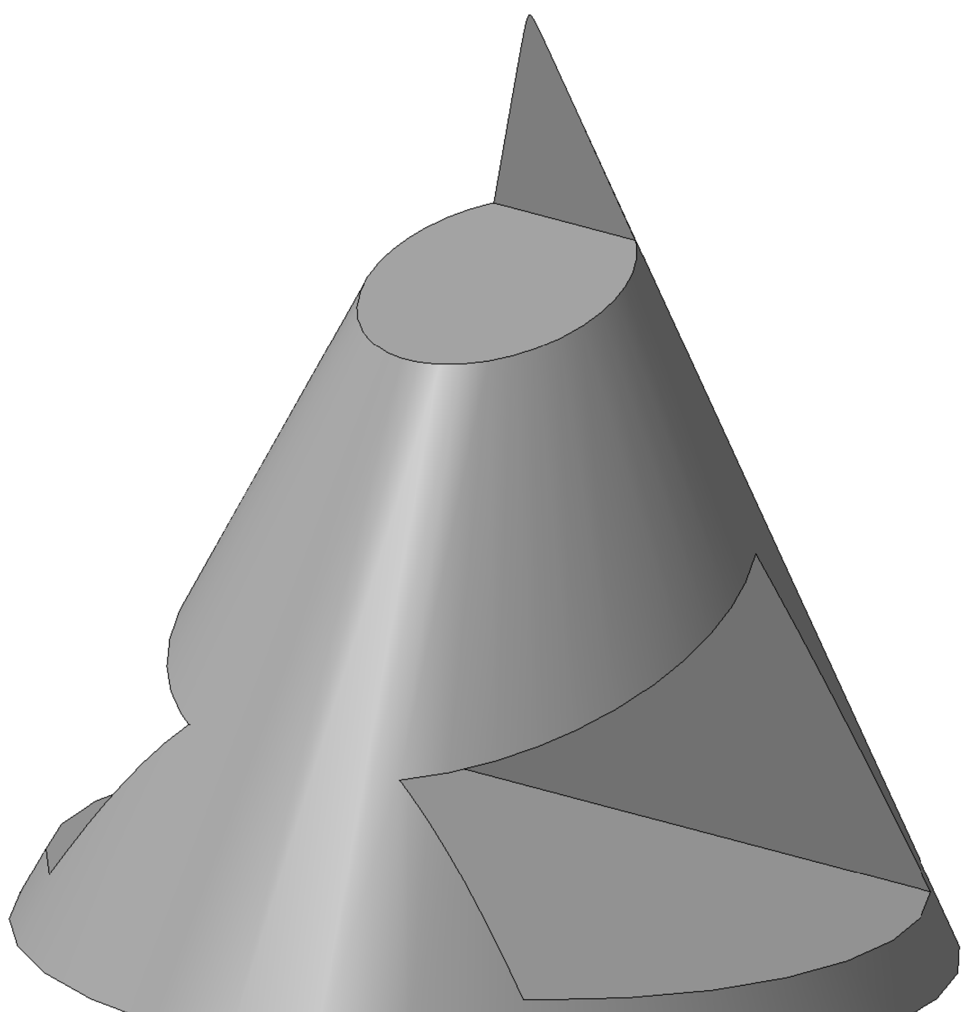

D2(D2')
C2(C2')
B2(B2')
A2
M2(M2')
F2(F2')
E2(E2')
12
22(22')
B1'(M1')
C1'(F1')
21'
D1'(E1')
A1
11
21
D1(E1)
B1(M1)
(D3')
(D3)
C3'
C3
B3
B3
A3
M3'
M3
F3'
(E3')
(E3)
F3
13
23'
23

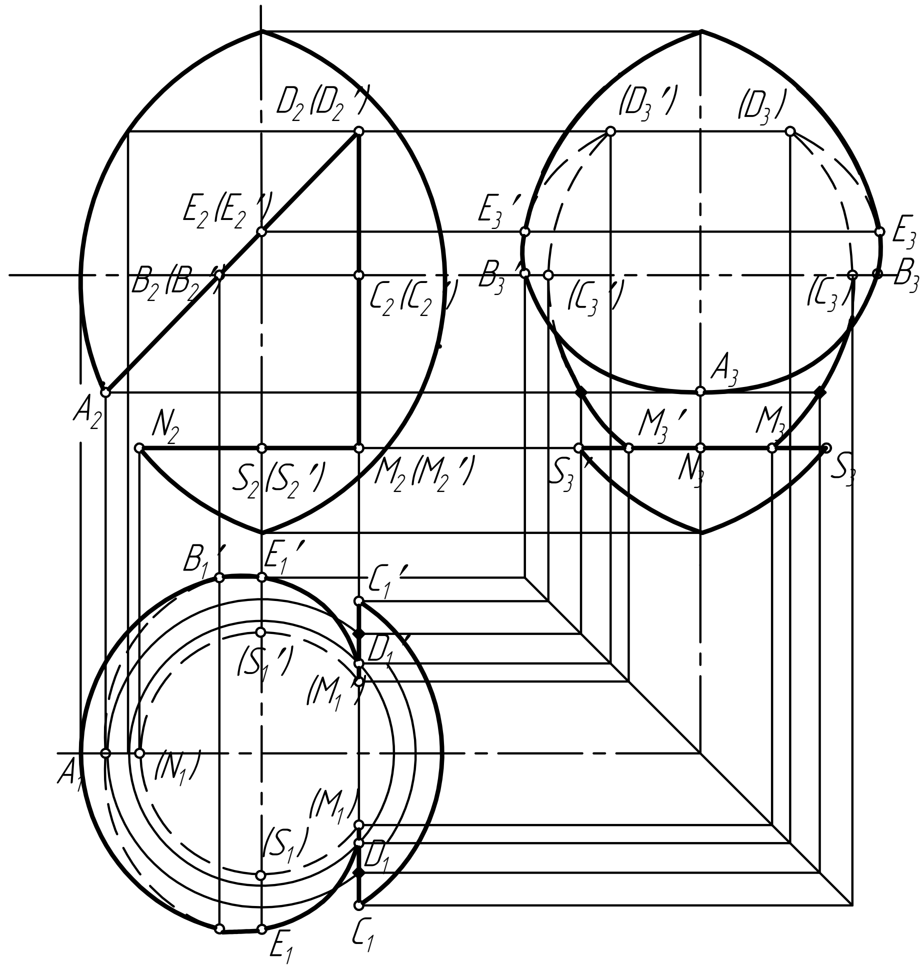


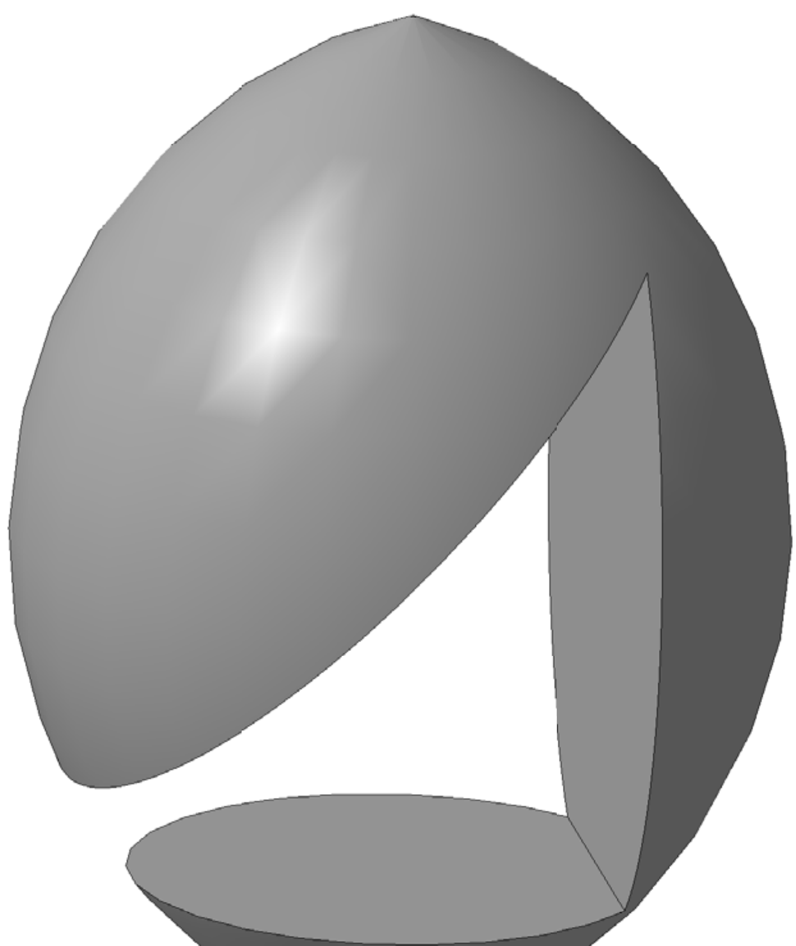

1₂
2₂ (2₂′)
3₂ (3₂′)
4₂
E₂ (E₂′)
D₂ (D₂′)
A₂
B₂ (B₂′)
C₂ (C₂′)
1₃
2₃′
2₃
3₃′
4₃
3₃
(D₃)
(D₃′)
E₃′
E₃
B₃′
C₃′
A₃
C₃
B₃
B₁′
E₁′
D₁′
C₁′
2₁′
3₁′
4₁
1₁
A₁
3₁
2₁
D₁
E₁
C₁
B₁

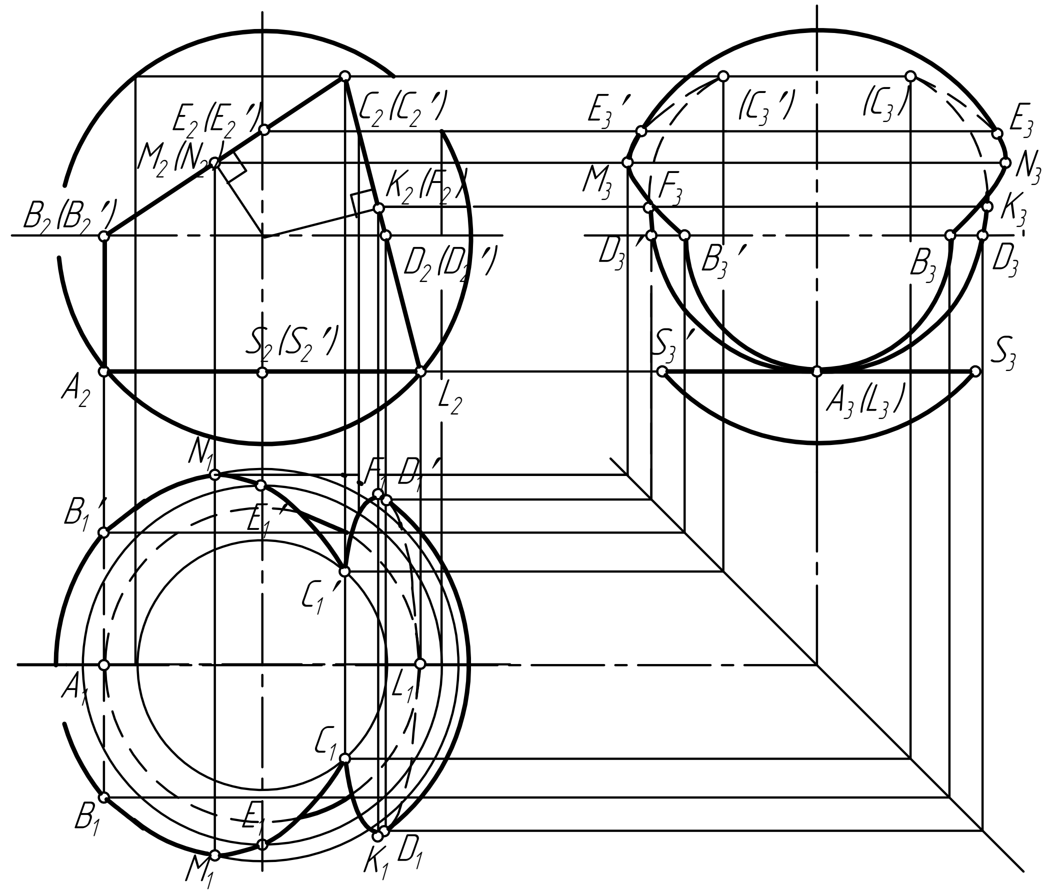


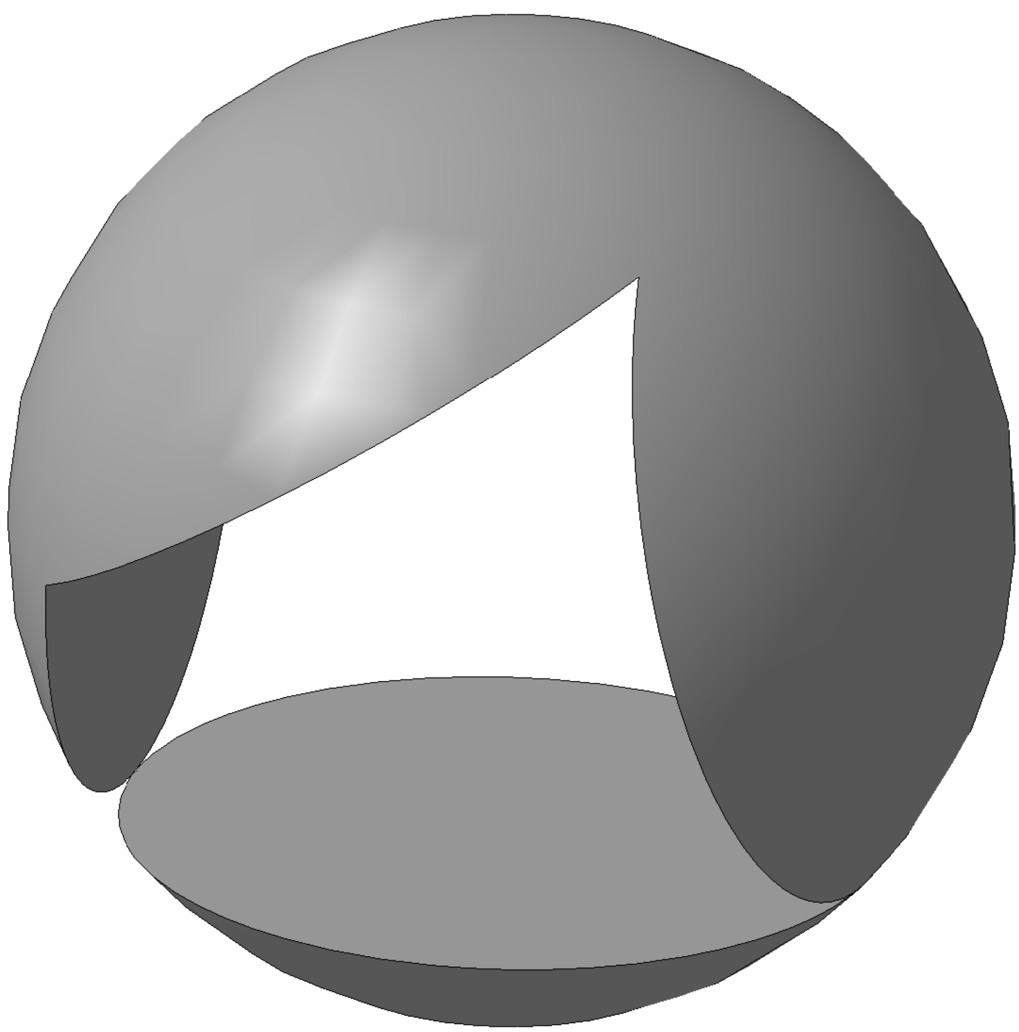

Прямые
Эллипс
Гипербола
Парабола

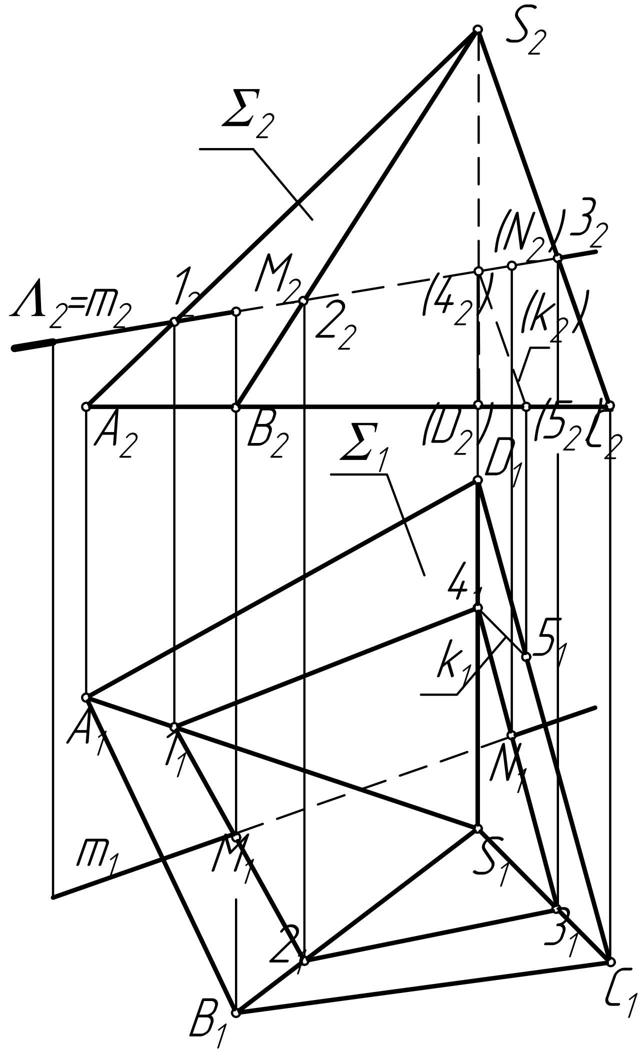



$D_2 (D_2')$
(D_3')
(D_3)
$E_2 (E_2')$
E_3'
E_3
$B_2 (B_2')$
$C_2 (C_2')$
B_3'
(C_3')
(C_3)
B_3
A_3
A_2
N_2
M_3'
M_3
$S_2 (S_2')$
$M_2 (M_2')$
S_3'
M_3
S_3
B_1'
E_1'
C_1'
D_1'
(S_1')
(M_1')
A_1
(N_1)
(M_1)
(S_1)
D_1
E_1
C_1

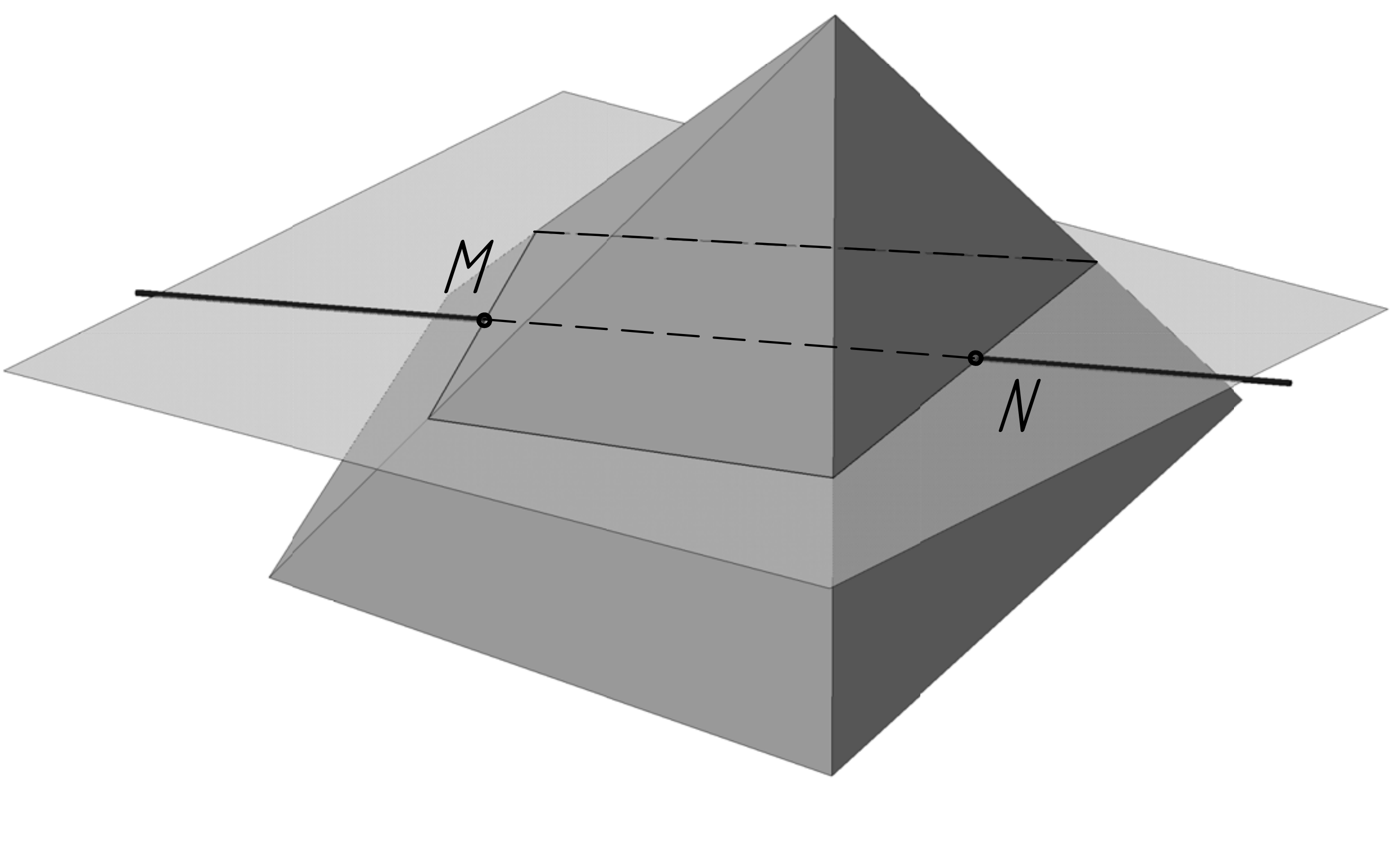



E₂(E₂′)
C₂(C₂′)
M₂(N₂)
K₂(F₂)
B₂(B₂′)
D₂(D₂′)
S₂(S₂′)
A₂
L₂
E₃′
(C₃′)
(C₃)
E₃
M₃
N₃
F₃
K₃
D₃′
B₃′
B₃
D₃
S₃′
S₃
A₃(L₃)
N₁
F₁
D₁′
B₁′
E₁′
C₁′
A₁
L₁
C₁
B₁
E₁
M₁
K₁
D₁

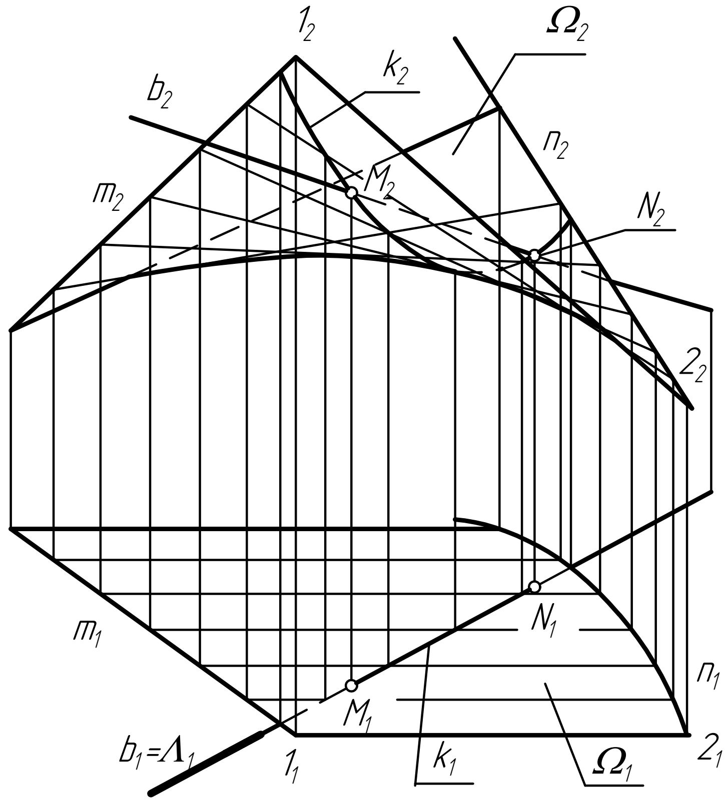




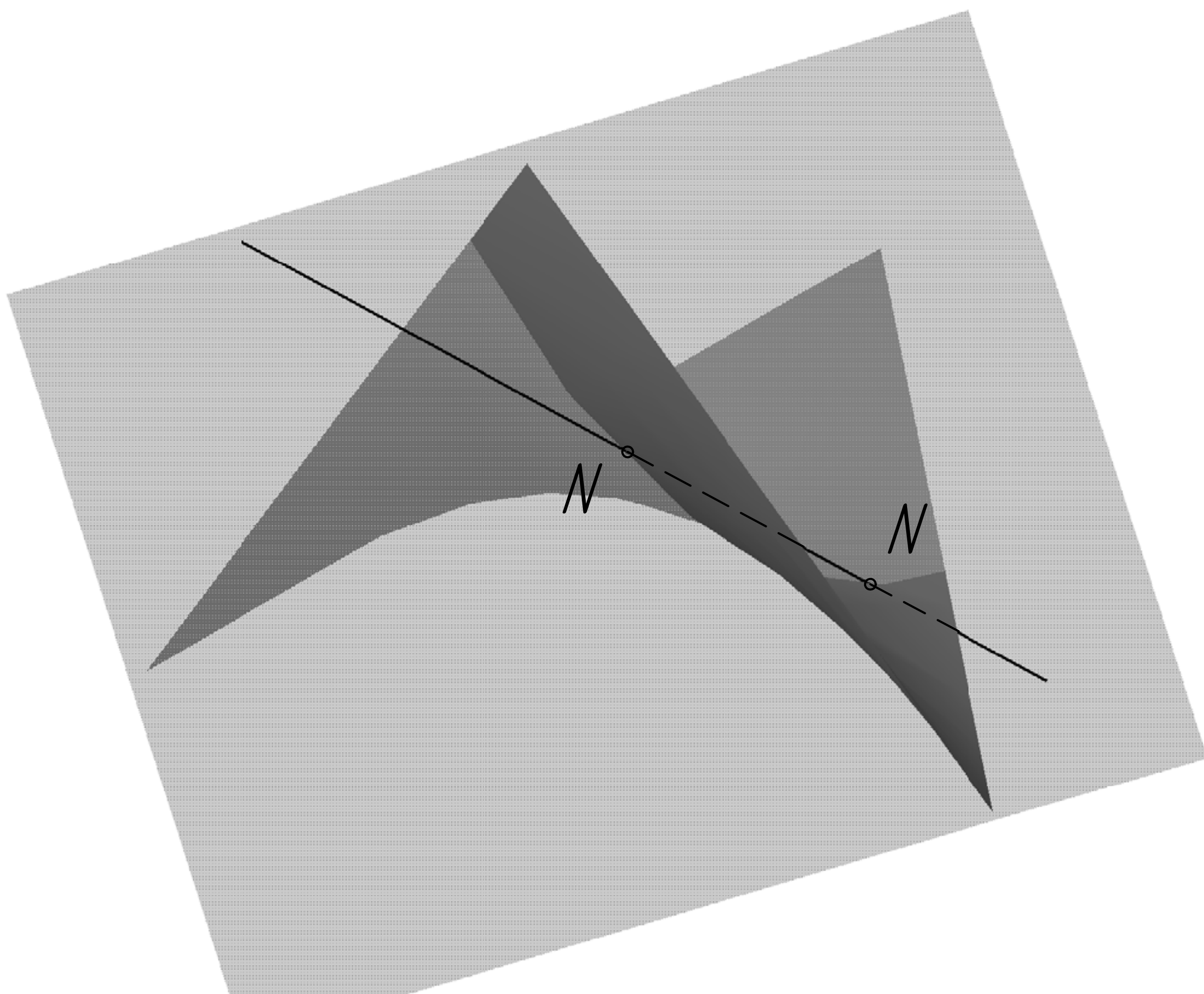
S2
Σ2
(N2)
32
Λ2=m2
12
M2
(42)
(k2)
22
A2
B2
(D2)
(52)
C2
Σ1
D1
41
51
k1
A1
11
N1
m1
M1
S1
21
31
B1
C1



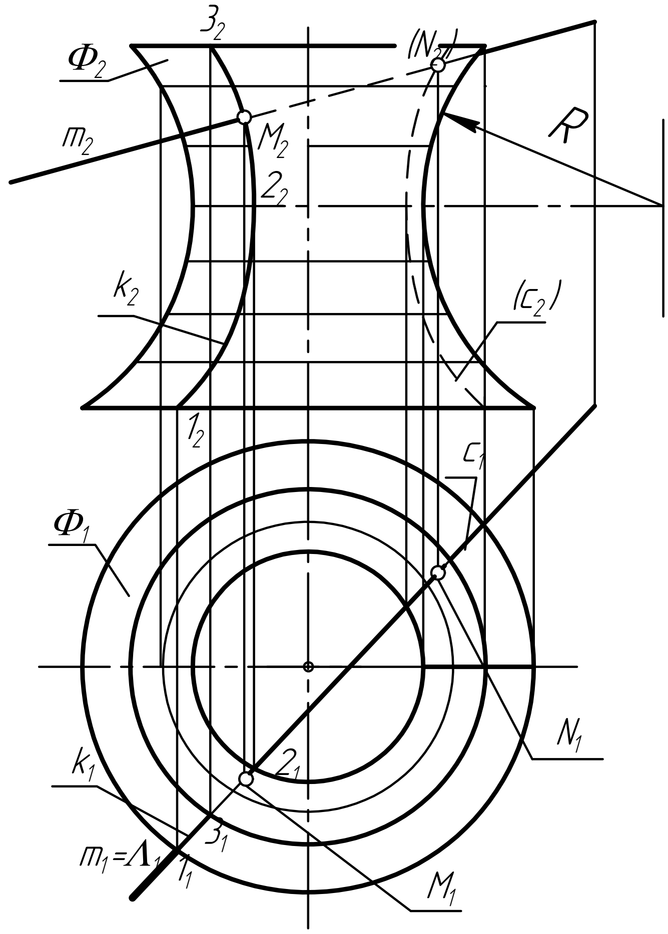
M
N

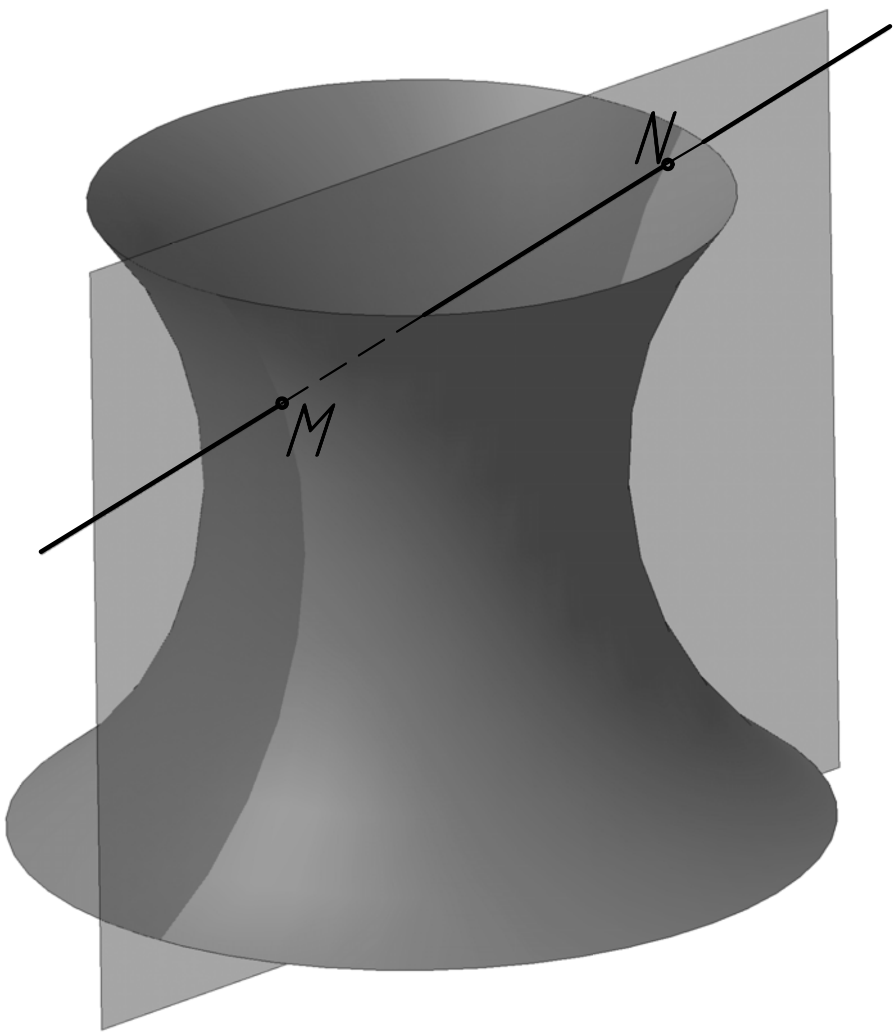


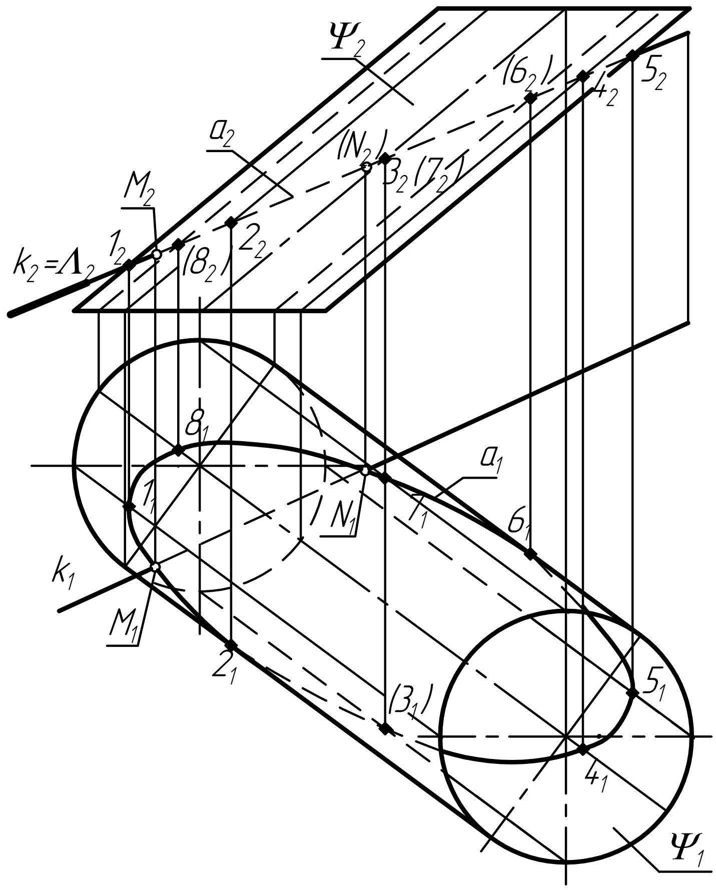
1_2
Ω_2
k_2
b_2
n_2
M_2
m_2
N_2
2_2
m_1
N_1
n_1
M_1
$b_1=\Lambda_1$
1_1
k_1
Ω_1
2_1

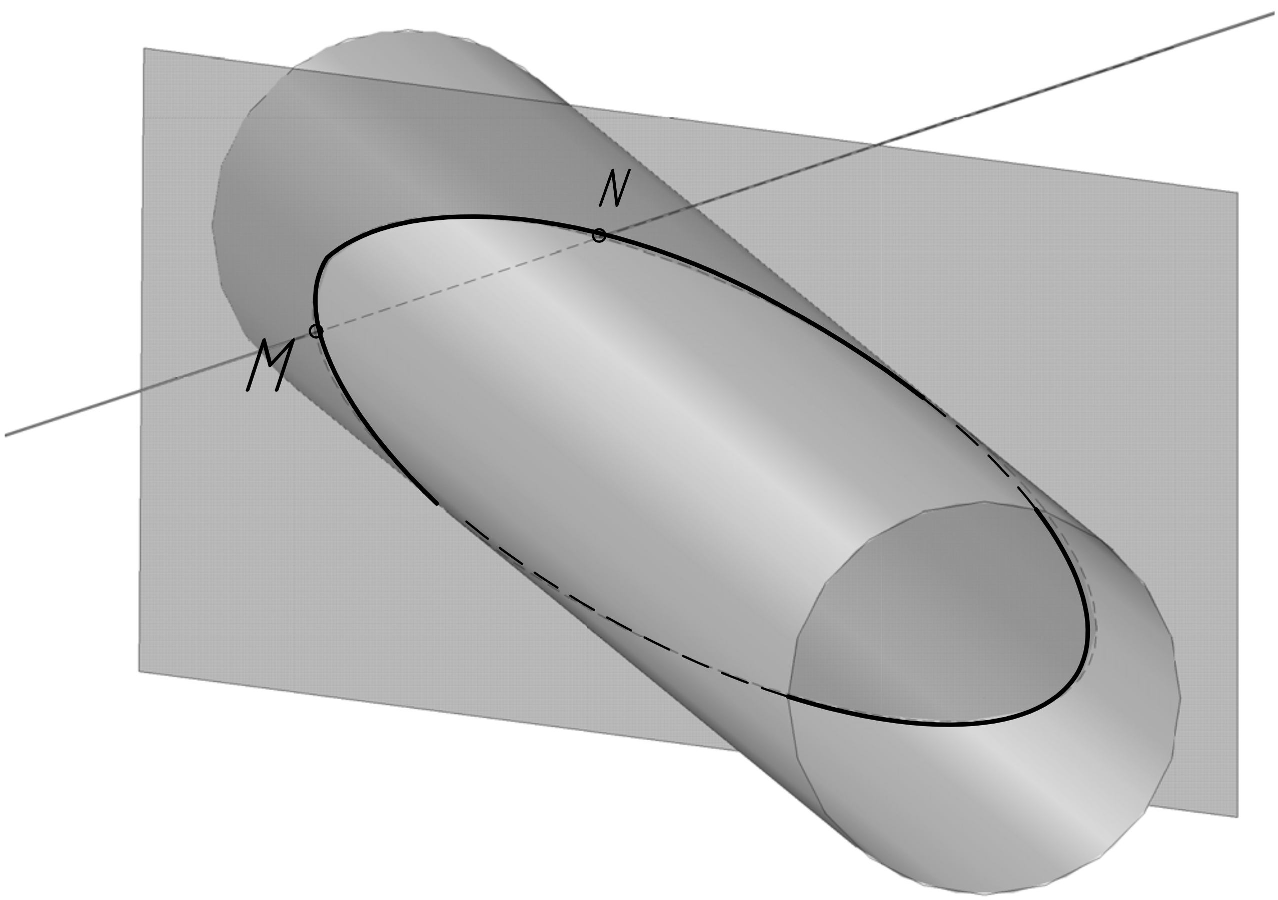


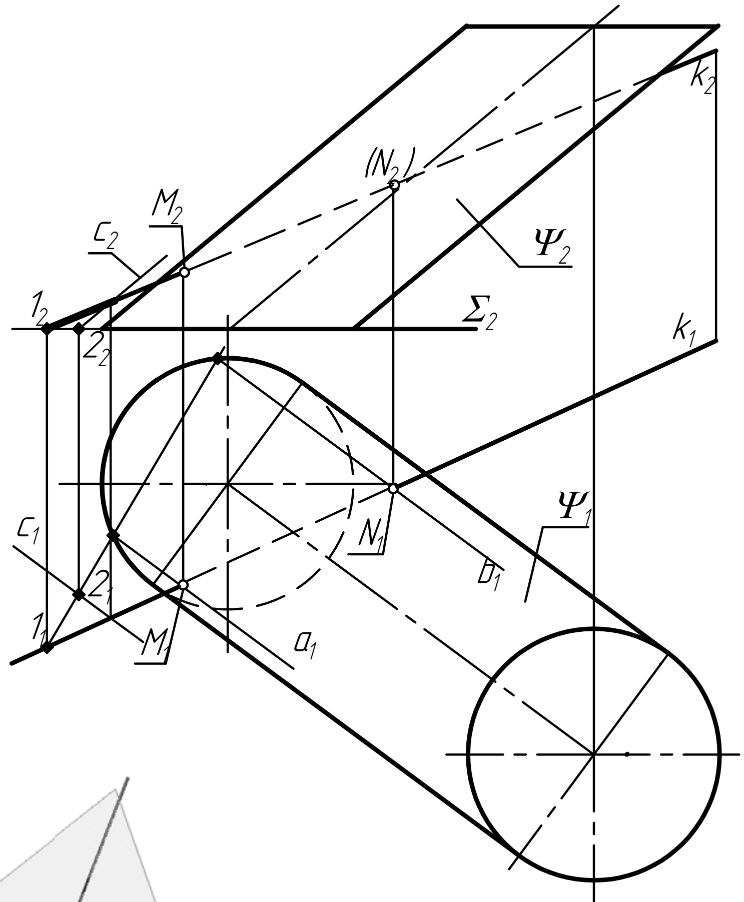
N
N

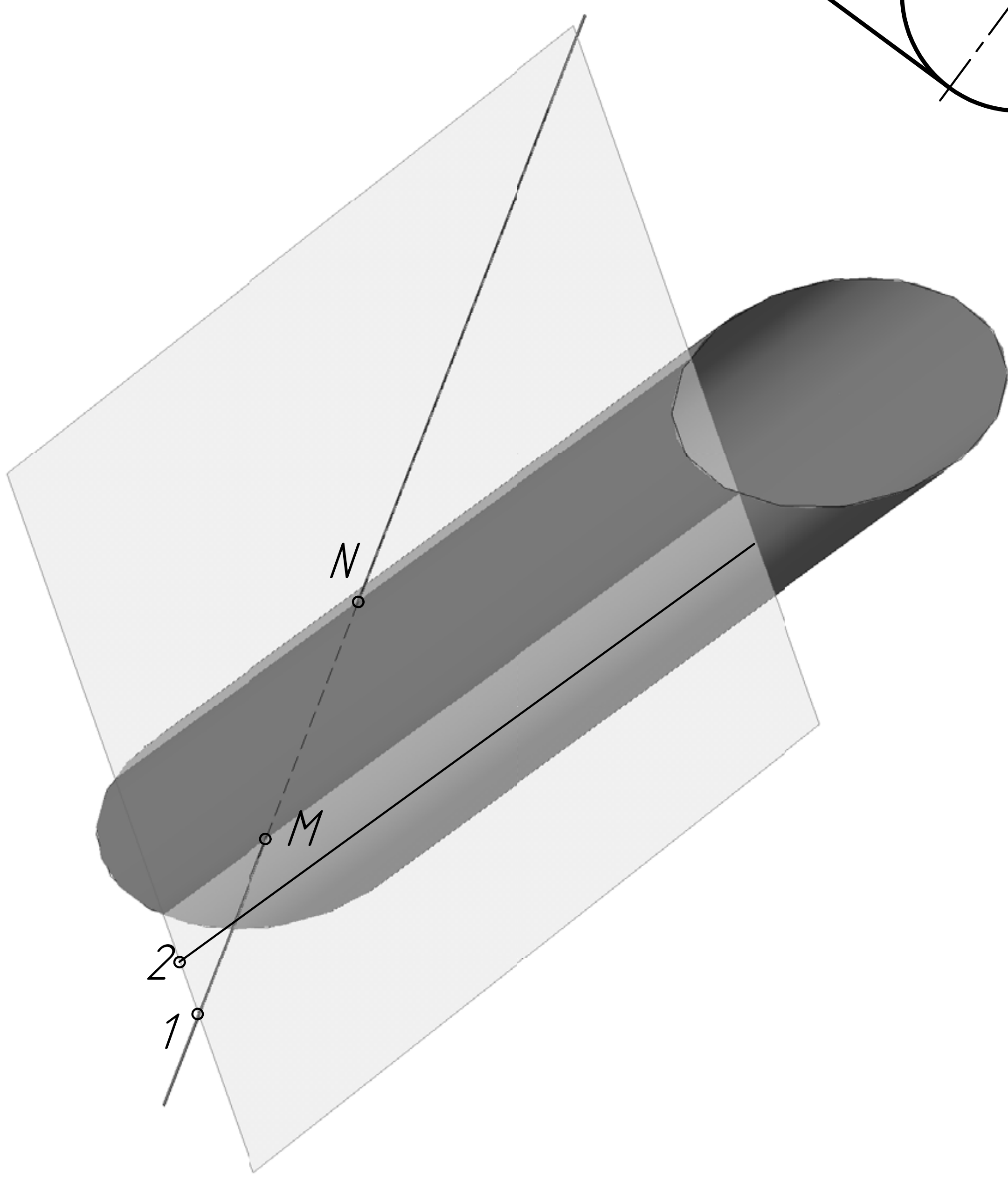

Φ2
3₂
(N₂)
m₂
M₂
2₂
R
k₂
(c₂)
1₂
c₁
Φ1
N₁
k₁
2₁
3₁
m₁=Λ₁
1₁
M₁

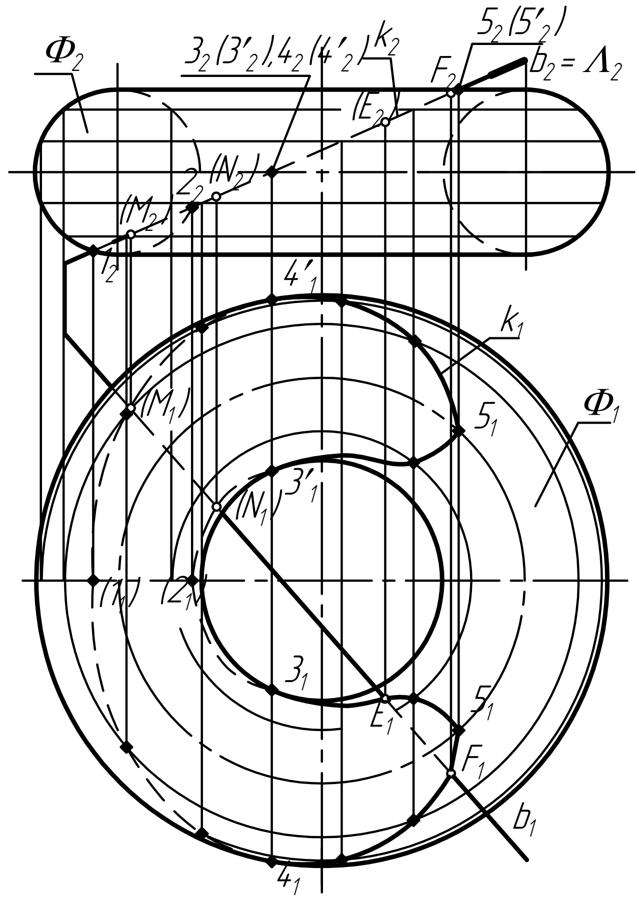

N
M

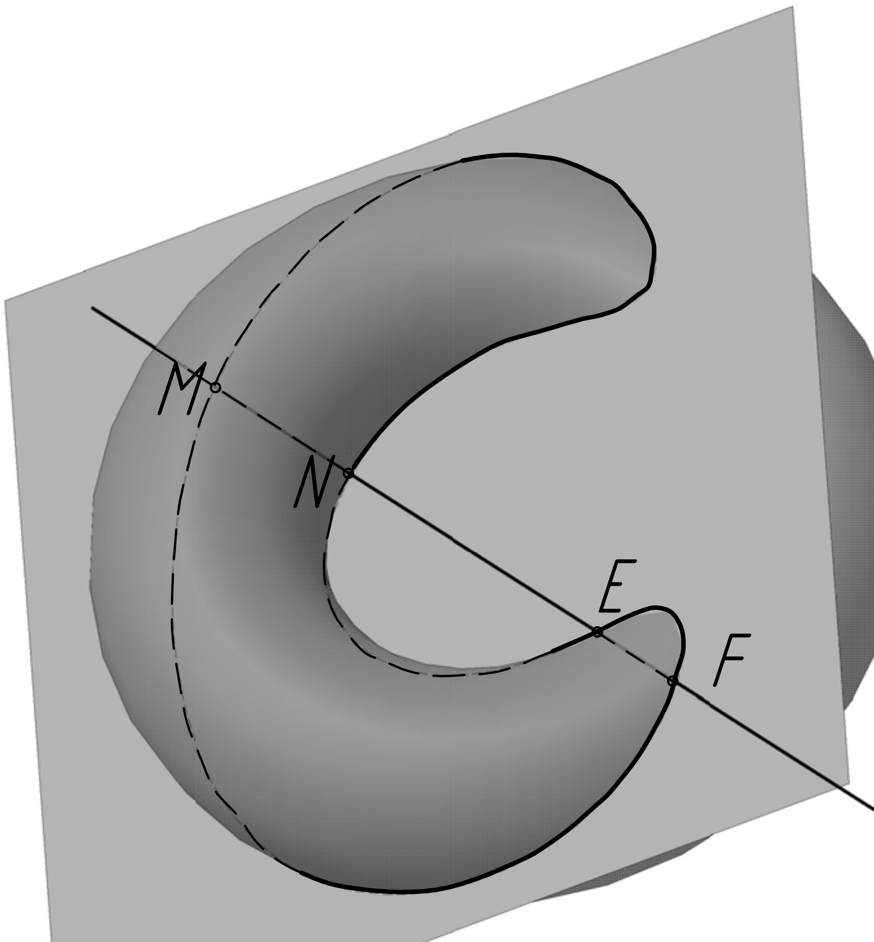

Ψ2
a2
M2
(N2)
(62)
42
52
32 (72)
12
(82)
22
k2 = Λ2
81
a1
11
N1
71
61
k1
M1
21
(31)
51
41
Ψ1

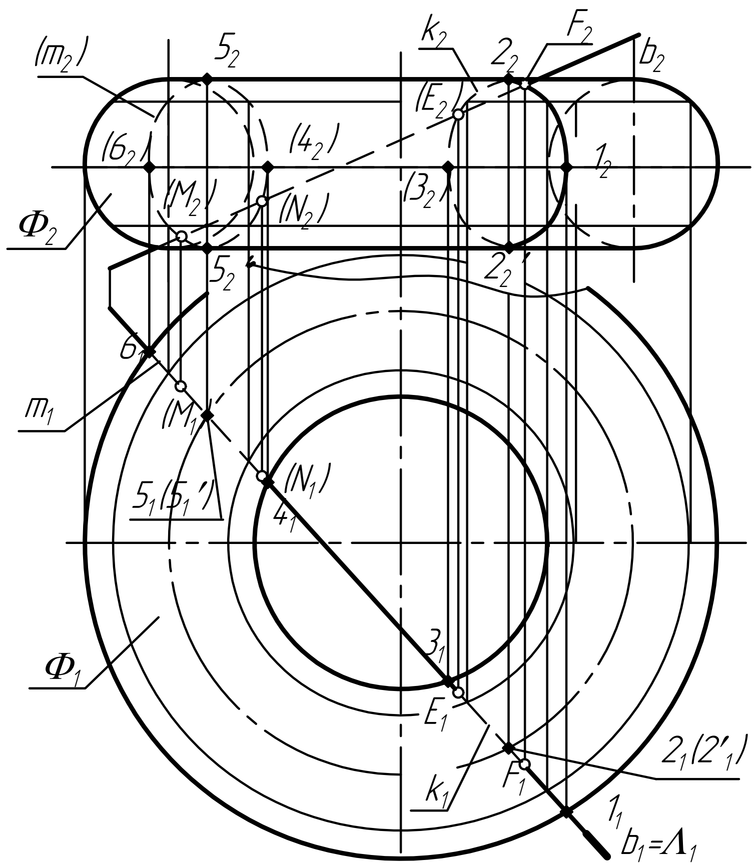

N
M


(N2)
M2
c2
Ψ2
k2
12
22
Σ2
k1
Ψ1
N1
b1
c1
21
11
M1
a1

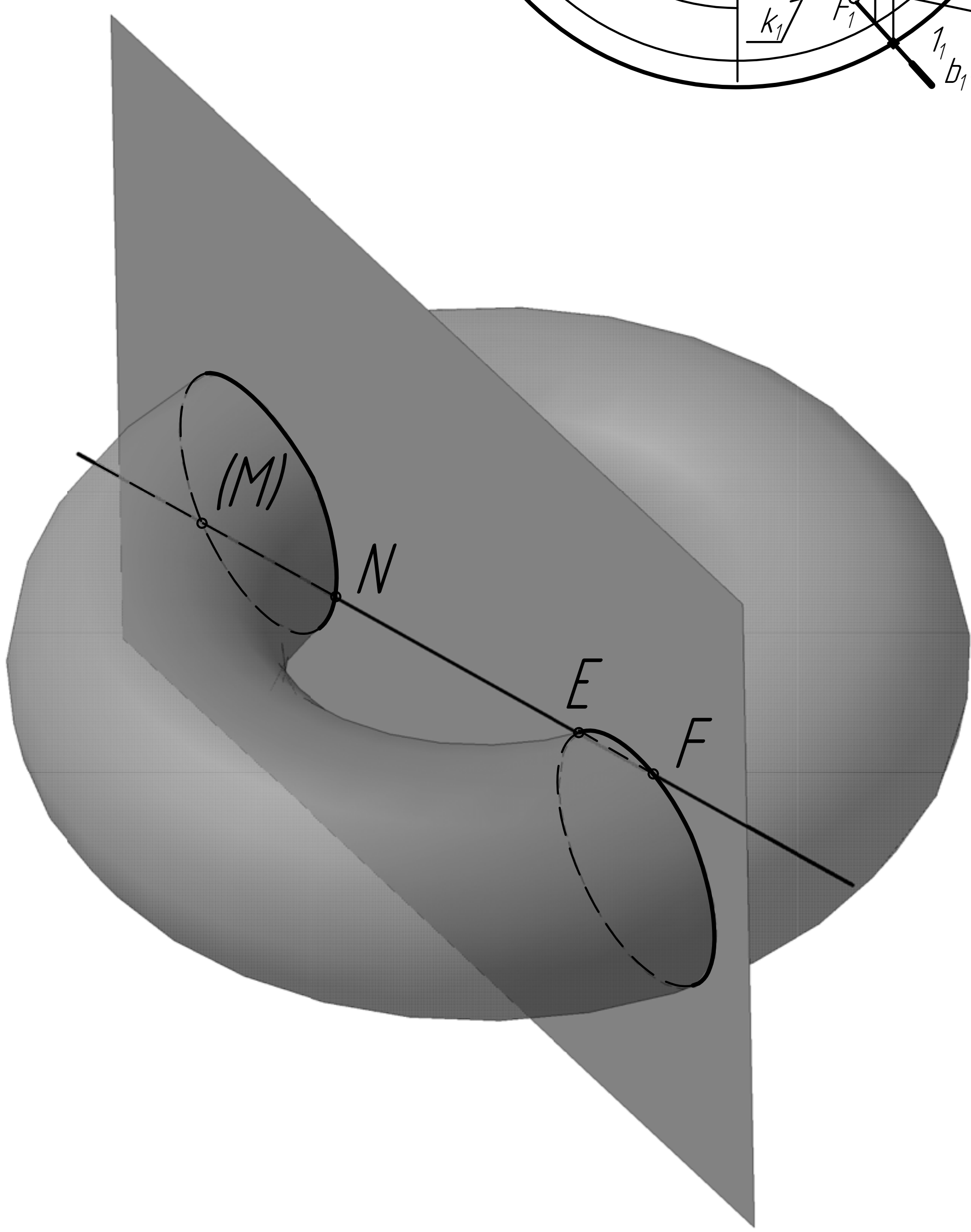

N
M
2
1


Φ2
3₂(3′₂),4₂(4′₂)
k2
5₂(5′₂)
F2
b₂ = Λ₂
(E2)
2₂
(N2)
(M2)
1₂
4′₁
k1
(M1)
5₁
Φ1
3′₁
(N1)
(1₁)
(2₁)
3₁
E1
5₁
F1
b1
4₁


M
N
E
F



(m_2)
5_2
k_2
2_2
F_2
b_2
(E_2)
(6_2)
(4_2)
1_2
(M_2)
(N_2)
(3_2)
Φ_2
5_2
$2_2'$
6_1
m_1
(M_1)
(N_1)
$5_1(5_1')$
4_1
3_1
Φ_1
E_1
$2_1(2'_1)$
F_1
k_1
1_1
$b_1=\Lambda_1$



(M)
N
E
F

СОДЕРЖАНИЕ