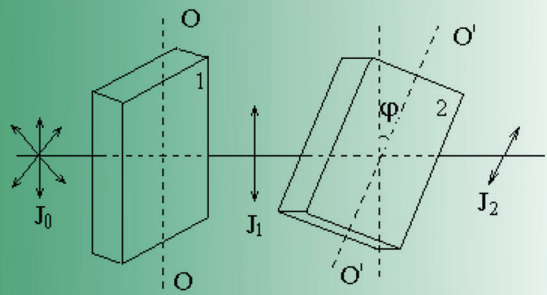
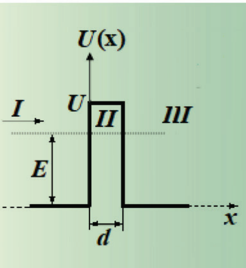
Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Тольяттинский государственный университет
Институт математики, физики и информационных технологий

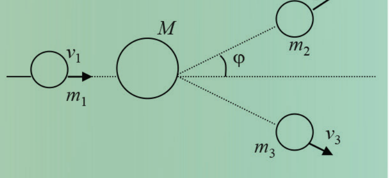
С.Н. Потемкина, В.А. Сарафанова

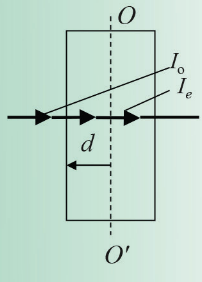
КОЛЕБАНИЯ И ВОЛНЫ. ОПТИКА. АТОМ. ЯДРО

Электронное учебно-методическое пособие









ISBN 978-5-8259-1109-0

УДК 534+535+535.1
ББК 22.3+22.34+22.38

Рецензенты:
канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры
«Экономическая кибернетика» Саратовского
государственного аграрного университета *А.В. Розанов*;
д-р физ.-мат. наук, доцент, профессор кафедры
«Общая и теоретическая физика» Тольяттинского
государственного университета *А.П. Воленко*.

Потемкина, С.Н. Колебания и волны. Оптика. Атом. Ядро : электронное учебно-методическое пособие / С.Н. Потемкина, В.А. Сарафанова. – Тольятти : Изд-во ТГУ, 2022. – 1 оптический диск. – ISBN 978-5-8259-1109-0.

Учебно-методическое пособие по организации и проведению практических занятий по курсу «Физика-3» содержит теоретический и практический материал, направленный на формирование у студентов знаний о физических явлениях, законах и методах расчета физических величин, а также умений применять их для решения качественных и расчетных задач.

Предназначено для студентов, обучающихся по всем техническим направлениям подготовки бакалавров очной и заочной форм обучения высшего образования.

Текстовое электронное издание.

Рекомендовано к изданию научно-методическим советом Тольяттинского государственного университета.

Минимальные системные требования: IBM PC-совместимый компьютер: Windows XP/Vista/7/8/10; PIII 500 МГц или эквивалент; 128 Мб ОЗУ; SVGA; CD-ROM; Adobe Acrobat Reader.

Редактор *Е.В. Пилясова*

Технический редактор *Н.П. Крюкова*

Компьютерная верстка: *Л.В. Сызганцева*

Художественное оформление,
компьютерное проектирование: *И.И. Шишкина*

В оформлении пособия использовано
изображение от rawpixel.com на freepik

Дата подписания к использованию 07.10.2022.
Объем издания 5,2 Мб.
Комплектация издания: компакт-диск,
первичная упаковка.
Заказ № 1-62-21.

Издательство Тольяттинского государственного университета
445020, г. Тольятти, ул. Белорусская, 14,
тел. 8 (8482) 44-91-47, www.tltsu.ru

Содержание

Введение

Учебно-методическое пособие предназначено для студентов технических специальностей и направлений подготовки Тольяттинского государственного университета и составлено с учетом требований государственных образовательных стандартов и рабочей программы по курсу «Физика-3». В структуре подготовки специалиста технического профиля физика является важной общеобразовательной дисциплиной, на основе которой будет далее строиться его специализация. Пособие включает совокупность универсальных методов, законов и моделей, демонстрирует специфику рационального метода познания окружающего мира и нацелено на формирование у студентов общего физического мировоззрения и развитие физического мышления.

Дисциплина «Физика» должна представлять собой целостный и фундаментальный курс, единый в своих частях и демонстрирующий роль этой науки как основы всего современного естествознания. В основе современной естественно-научной картины мира лежат физические принципы и концепции, в этой связи роль физики как основы всего естествознания трудно переоценить. С другой стороны, физика является теоретической базой, без которой невозможна успешная деятельность выпускника вуза в области знаний «Технические науки».

Данное пособие отражает современное состояние физики. В нем естественным образом сочетаются макро- и микроскопические подходы. В его разделах раскрыты внутренние логические связи. Порядок расположения материала соответствует современной структуре физики как науки и отражает мировой педагогический опыт.

Цели курса «Физика-3»:

- изучение основных физических явлений; овладение фундаментальными понятиями, законами и теориями классической и современной физики, а также методами физического исследования;
- овладение общими приемами и методами решения задач из различных областей физики;
- формирование начальных навыков и умений выделять конкретное физическое содержание в прикладных задачах будущей деятельности студентов.

В электронном учебно-методическом пособии «Колебания и волны. Оптика. Атом. Ядро» рассматриваются следующие разделы курса общей физики: колебания и волны, интерференция, дифракция, поляризация, квантовая физика, ядро.

Цель пособия – оказать помощь студентам технических специальностей в изучении курса «Физика-3», организации их работы на практических занятиях и самостоятельном изучении дисциплины при обучении по индивидуальным образовательным траекториям.

Содержание практических занятий направлено на формирование у студентов знаний физических явлений, законов, формул, единиц измерения физических величин, навыков применения различных методов расчета искомых величин, умений графически представить и проанализировать полученные результаты. Решение задач формирует навыки самостоятельного мышления.

В данном учебно-методическом пособии подобраны задания, предназначенные для организации аудиторной, внеаудиторной самостоятельной работы студентов и для самоконтроля при подготовке к итоговому тестированию.

Каждое практическое занятие содержит:

1) основные формулы по теме занятия;
2) методические указания для решения задач;
3) примеры решения задач разного уровня сложности;
4) задания для аудиторной самостоятельной работы;
5) билеты для контроля усвоения темы.

Длительность курса «Физика-3» – 12 недель.

Общая трудоемкость – 4 ЗЕТ.

Учебный курс разбит на 2 учебных модуля длительностью 6 недель.

Содержание и основные понятия курса «Физика-3»

Модуль	Дидактические единицы	Тема	Понятия
Модуль 5. Колебания и волны. Волновая оптика	ДЕ 4. Механические и электромагнитные колебания	Свободные и вынужденные колебания	Амплитуда, фаза, циклическая частота, свободные гармонические колебания, гармонический осциллятор, затухающие колебания, коэффициент затухания, логарифмический декремент затухания, вынужденные колебания, механический резонанс
		Сложение гармонических колебаний	Сложение гармонических колебаний одного направления и одинаковой частоты, амплитуда результирующего колебания, фаза результирующего колебания. Сложение взаимно перпендикулярных гармонических колебаний, фигуры Лиссажу
		Волны. Уравнение волны. Энергия волны	Стоячая волна. Электромагнитная волна. Бегущая волна. Уравнение волны. Плотность потока энергии
	ДЕ 5. Волновые явления	Интерференция и дифракция света	Когерентные волны, оптическая разность хода, интенсивность, условие максимума и минимума интенсивности света при интерференции, ширина интерференционной полосы. Дифракция света, дифракционная решетка, период дифракционной решетки, условия максимума и минимума интенсивности света при дифракции
		Поляризация и дисперсия света	Естественный свет, поляризованный свет, степень поляризации. Поляризаторы, анализаторы. Поляризация света при отражении от границы раздела двух диэлектриков. Угол Брюстера, двойное лучепреломление, обыкновенный и необыкновенный лучи

Модуль	Дидактические единицы	Тема	Понятия
Модуль 6. Квантовая оптика. Элементы ядерной физики и физики элементарных частиц	ДЕ 6. Квантовая оптика	Тепловое излучение. Фотоэффект	Тепловое излучение, энергетическая светимость, спектральная плотность энергетической светимости, спектральная поглощательная способность, универсальная функция Кирхгофа, яркостная. Фотоэффект и его виды: внешний, внутренний, вентильный. Работа выхода, красная граница внешнего фотоэффекта, ВАХ. Эффект Комптона. Световое давление
		Атом водорода	Спектральные серии. Граница спектральной серии
	ДЕ 7. Ядерная физика	Дуализм свойств микрочастиц. Соотношение неопределенностей Гейзенберга	Неопределенность координаты, импульса, энергии, временного интервала
		Уравнение Шредингера	Волновая функция. Стационарное уравнение Шредингера. Его решение
		Ядро. Элементарные частицы	Электрон, протон, нейтрон, альфа-частица. Нуклоны
		Ядерные реакции	Зарядовое число, массовое число. Законы сохранения зарядовых и массовых чисел
		Фундаментальные свойства взаимодействия	

Формой контроля знаний студентов по курсу «Физика-3» является экзамен.

Критерии оценки

Традиционная шкала рейтинговых баллов (РБ):

1. Оценка «отлично» – 80–100 баллов.
2. Оценка «хорошо» – 60–79 баллов.
3. Оценка «удовлетворительно» – 40–59 баллов.
4. Оценка «неудовлетворительно» – 0–39 баллов.

Для студентов, изучающих курс «Физика-3», действует следующая принципиальная схема распределения рейтинговых баллов по видам учебной деятельности студента.

Принципиальная схема распределения РБ

Тип курса	Составляющие аудиторной нагрузки по учебному плану	Формы контроля	Примерное распределение баллов по учебным мероприятиям	
			Наименование учебных мероприятий	Кол-во баллов
«ПТ»	Лекции, практические, лабораторные занятия	Текущий контроль (60 %)	Самостоятельная аудиторная работа:	max – 84 б.
			1. Лабораторный практикум.	3 б. · 8 = 24 б.
			2. СР на практических занятиях в аудитории	2 б. · 10 = 20 б.
			3. Коллоквиумы.	20 б. · 2 = 40 б.
			4. Бонусы	16 б.
		Итоговый тест		max = 100 б.
Итого за семестр: 100 б.				

Каждый учебный модуль состоит из 6 практических занятий, на которых повторяется и закрепляется теоретический материал, изученный на лекционных, практических, лабораторных занятиях и самостоятельно.

На каждом практическом занятии преподаватель знакомит студентов с различными методами решения физических задач, рассматривает примеры решения избранных задач по теме занятия, организует индивидуальную самостоятельную аудиторную работу студентов в виде экспресс-опросов (пятиминуток) или работу по билетам для самоконтроля, которая оценивается в рейтинговых баллах.

Билет для самостоятельной работы состоит из 4 заданий: в него включаются определения, формулировки законов и теорем, формулы связи, одна или две простые задачи. Каждое задание – 0,5 балла, всего – 2 РБ. Максимальное количество РБ за практические занятия в семестре – 20.

В каждом модуле проводится один коллоквиум – 20 РБ.

Студент, работающий по индивидуальной образовательной траектории, должен самостоятельно проработать все темы практических занятий, выполнить и сдать преподавателю индивидуальное задание по каждой теме.

Семестровый рейтинг студента, изучающего курс «Физика-3» на основе модульной системы, складывается из следующих рейтинговых баллов:

1) практические занятия – Пр_i;
2) лабораторные работы – ЛР_i;
3) коллоквиумы – Кол_i;
4) бонусные баллы – Бонусы;
5) итоговое тестирование – ИТ.

Итоговый рейтинговый балл (ИРБ) за семестр рассчитывается по формуле:

$$\text{ИРБ} = \frac{\sum_{i-1}^{N=12} \text{Пр}_i + \sum_{i=1}^{N=12} \text{ЛР}_i + \sum_{i=1}^{2} \text{Кол}_i + \text{Бонусы} + \text{ИТ}}{2}.$$

Если итоговый рейтинговый балл студента оказывается ≥ 40, то экзаменационная оценка выставляется согласно приведенным выше критериям.

Рейтинговые баллы за практические занятия проставляются преподавателем на образовательном портале ТГУ.

Отметка за экзамен выставляется в ведомость и зачетную книжку студента экзаменатором – лектором потока.

Если же после прохождения ИТ у студента ИРБ окажется менее 40 баллов, то студент направляется к преподавателю для ликвидации академической задолженности.

Практическое занятие 1
ГАРМОНИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ

Основные формулы

Уравнение гармонических колебаний:

$$x = A\cos(\omega_0 t + \varphi) \quad \text{или} \quad x = A\sin(\omega_0 t + \varphi), \tag{1.1}$$

где x – смещение колеблющейся точки от положения равновесия; t – время; A – амплитуда – максимальное смещение точки от положения равновесия; ω_0 – круговая (циклическая) частота; φ – начальная фаза колебаний; $(\omega_0 t + \varphi)$ – фаза колебаний в момент t.

Циклическая частота колебаний:

$$\omega_0 = 2\pi\nu \tag{1.2}$$

или

$$\omega_0 = 2\pi / T, \tag{1.3}$$

где ν и T – частота и период колебаний.

Скорость точки, совершающей гармонические колебания:

$$V = \dot{x} = -A\omega_0 \sin(\omega_0 t + \varphi). \tag{1.4}$$

Амплитуда скорости:

$$V_{\max} = \pm A\omega_0. \tag{1.5}$$

Ускорение:

$$a = \ddot{x} = -A{\omega_0}^2 \cos(\omega_0 t + \varphi). \tag{1.6}$$

Амплитуда ускорения:

$$a_{\max} = \pm A\omega_0^2. \tag{1.7}$$

Дифференциальное уравнение гармонических колебаний:

$$\ddot{x} + {\omega_0}^2 x = 0. \tag{1.8}$$

Кинетическая энергия материальной точки:

$$W_k = \frac{mV^2}{2} = \frac{mA^2\omega_0^2 \sin^2(\omega_0 t + \varphi)}{2} = \frac{mA^2\omega_0^2}{4}\left[1 - \cos 2(\omega_0 t + \varphi)\right]. \tag{1.9}$$

Потенциальная энергия материальной точки, совершающей гармонические колебания под действием упругой силы:

$$W_p = \frac{kx^2}{2} = \frac{mA^2\omega_0^2\cos^2(\omega_0 t + \varphi)}{2} = \frac{mA^2\omega_0^2}{4}\left[1 + \cos 2(\omega_0 t + \varphi)\right]. \qquad (1.10)$$

Полная энергия материальной точки, совершающей гармонические колебания:

$$W = W_k + W_p = \frac{1}{2} mA^2 \omega_0{}^2. \qquad (1.11)$$

Период колебаний тела, подвешенного на пружине (пружинный маятник):

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}, \qquad (1.12)$$

где m – масса тела; k – жесткость пружины.

Формула (1.1) справедлива для упругих колебаний в пределах, когда выполняется закон Гука (при малой массе пружины в сравнении с массой тела).

Период колебаний математического маятника:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}, \qquad (1.13)$$

где l – длина маятника; g – ускорение свободного падения.

Период колебаний физического маятника:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}} = 2\pi\sqrt{\frac{J}{mga}}, \qquad (1.14)$$

где J – момент инерции колеблющегося тела относительно оси колебаний; a – расстояние центра масс маятника от оси колебаний; $L = J\,/\,(ma)$ – приведенная длина физического маятника.

Приведенные формулы являются точными для случая бесконечно малых амплитуд. При конечных амплитудах эти формулы дают лишь приближенные результаты. При амплитудах не более $\approx 3^\circ$ ошибка в значении периода не превышает 1 %.

Период колебаний тела, подвешенного на упругой нити:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{J}{k}}, \qquad (1.15)$$

где J – момент инерции тела относительно оси, совпадающей с упругой нитью; k – вращательный коэффициент жесткости упругой нити.

Упругая сила:

$$F = -kx = -m\omega_0^2 A\cos(\omega_0 t + \varphi). \qquad (1.16)$$

Амплитуда упругой силы:

$$F_{max} = -mA\omega_0^2. \qquad (1.17)$$

Методические указания

Колебательные процессы широко распространены в природе и технике. Физическая природа колебаний может быть разной, например, различают колебания механические и электромагнитные.

Различные колебательные процессы описываются одинаковыми характеристиками и уравнениями.

Простейшим типом колебаний являются гармонические колебания, в них колеблющаяся величина изменяется с течением времени по закону синуса или косинуса.

Рассмотрение гармонических колебаний важно по двум причинам:

1) колебания, встречающиеся в природе и технике, часто имеют вид, близкий к гармоническим колебаниям;
2) различные периодические процессы можно представить как наложение гармонических колебаний.

При решении задач по этой теме необходимо учитывать следующее.

Если в задаче точно не указан закон гармонических колебаний, то необходимо проверить оба вида колебаний (по закону синуса и косинуса) и выбрать закон, подходящий условиям задачи.

При гармонических колебаниях упругая сила консервативна, поэтому выполняется закон сохранения полной механической энергии.

Если заданы графики изменения координаты или скорости колебаний, то основные параметры колебаний удобно найти из графиков. Из формул (1.7) и (1.8) следует, что кинетическая и потенциальная энергии изменяются с частотой $2\omega_0$, т. е. с частотой, которая в два раза превышает частоту гармонических колебаний.

Так как $\langle \sin^2\alpha \rangle = \langle \cos^2\alpha \rangle = \frac{1}{2}$, то $\langle W_k \rangle = \langle W_p \rangle = \frac{1}{2} W_{\text{полн}}$.

Если в задаче совершает колебания физический маятник, то сначала необходимо определить по теореме Штейнера его момент инерции, затем его положение центра масс, а уже потом рассчитывать период колебаний.

Если в задаче рассматриваются электромагнитные колебания заряда в колебательном контуре, а характеристики конденсатора и катушки индуктивности заданы в условии задачи, то сначала необходимо выразить величины емкости и индуктивности через их параметры (емкость конденсатора – через его геометрические размеры: расстояние между обкладками, площадь обкладок и характеристику диэлектрика, а индуктивность катушки – через ее длину, площадь поперечного сечения сердечника катушки и площадь поперечного сечения обмотки катушки), а затем рассчитать искомые в задаче величины.

Примеры решения задач

Пример 1. Материальная точка совершает гармонические колебания с амплитудой A = 4 см и периодом T = 2 с. Напишите уравнение движения точки, если ее движение начинается из положения x_0 = 2 см.

Дано:	*Решение*
$A = 4$ см $= 4 \cdot 10^{-2}$ м $T = 2$ с $x_0 = 2$ см $= 2 \cdot 10^{-2}$ м	Запишем уравнение гармонических колебаний: $$x = A\cos(\omega_0 t + \varphi).$$
$x(t) = ?$	В начальный момент времени $t = 0$ положение точки: $$x_0 = A\cos\varphi.$$

Отсюда найдем начальную фазу:

$$\cos\varphi = \frac{x_0}{A} = 0{,}5; \quad \varphi = \frac{\pi}{3}.$$

Зная период, можно найти угловую частоту колебаний:

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T} = \pi\ \text{с}^{-1}.$$

Подставляя значения амплитуды, угловой частоты и начальной фазы в уравнение колебаний, получаем:

$$x = 0{,}04\cos\left(\pi t + \frac{\pi}{3}\right) \text{ м.}$$

Ответ: $x = 0{,}04\cos\left(\pi t + \frac{\pi}{3}\right)$ м.

Пример 2. Напишите уравнение гармонического колебания точки, если его амплитуда A = 15 см, максимальная скорость колеблющейся точки V_{max} = 30 см/с, начальная фаза φ =10°.

Дано:	*Решение*
A = 15 см = 0,15 м V_{max} = 30 см/с = 0,3 м/с φ = 10°	Запишем уравнение гармонических колебаний: $x = A\cos(\omega_0 t + \varphi)$.
$x(t)$ = ?	Скорость по определению: $V = \frac{dx}{dt} = -A\omega_0 \sin(\omega_0 t + \varphi)$.

Таким образом, максимальное значение скорости:

$$V_{\max} = \left|A\omega_0\right|.$$

Из этого выражения найдем циклическую частоту:

$$\omega_0 = \frac{V_{\max}}{A} = 2 \text{ с}^{-1}.$$

Ответ: $x = 0{,}15\cos\left(2t + \frac{\pi}{18}\right)$ м.

Пример 3. Материальная точка массой m = 20 г совершает гармонические колебания по закону $x = 0{,}1\cos\left(4\pi t + \frac{\pi}{4}\right)$ м. Определите полную энергию E этой точки.

Дано:	*Решение*
m = 20 г = 2 · 10^{-2} кг $x = 0{,}1\cos\left(4\pi t + \frac{\pi}{4}\right)$ м	Полная энергия складывается из кинетической T и потенциальной П энергий: $E = T + \Pi$.
E = ?	

Кинетическая энергия по определению:

$$T = \frac{mV^2}{2} = \frac{mA^2\omega_0^2}{2}\sin^2(\omega_0 t + \varphi).$$

Потенциальная энергия по определению:

$$\Pi = \frac{kx^2}{2} = \frac{mA^2\omega_0^2}{2}\cos^2(\omega_0 t + \varphi).$$

Таким образом, полная энергия:

$$E = \frac{mA^2\omega_0^2}{2} = 15{,}8 \text{ мДж},$$

где $\omega_0 = 4\pi$ с$^{-1}$.

Ответ: E = 15,8 мДж.

Пример 4. Точка массой m = 10 г совершает гармонические колебания по закону $x = 0{,}1\cos\left(4\pi t + \frac{\pi}{4}\right)$ м. Определите максимальные значения: 1) возвращающей силы; 2) кинетической энергии.

Дано:	*Решение*
m = 10 г = 10^{-2} кг $x = 0{,}1\cos\left(4\pi t + \frac{\pi}{4}\right)$ м	Запишем уравнение гармонических колебаний в общем виде: $x = A\cos(\omega_0 t + \varphi)$. Уравнение движения в нашей задаче: $x = 0{,}1\cos\left(4\pi t + \frac{\pi}{4}\right)$.
F_{max} = ? T_{max} = ?	

Сравнивая уравнения, находим:

$$A = 0{,}1 \text{ м}, \ \omega_0 = 4\pi \text{ с}^{-1}.$$

Скорость по определению:

$$V = \frac{dx}{dt} = -A\omega_0\sin(\omega_0 t + \varphi).$$

Максимальное значение скорости:

$$V_{max} = |A\omega_0|.$$

Ускорение по определению:

$$a = \frac{d\upsilon}{dt} = -A\omega_0^2\cos(\omega_0 t + \varphi); \quad a_{max} = A\omega_0^2.$$

Сила по второму закону Ньютона равна:

$$F = ma.$$

Максимальное значение силы найдем, подставив в формулу максимальное значение ускорения:

$$F_{max} = ma_{max} = mA\omega_0^2 = 0{,}158 \text{ Н}.$$

Кинетическая энергия равна:

$$T = \frac{mV^2}{2}.$$

Максимальное значение кинетической энергии:

$$T_{max} = \frac{mV_{max}^2}{2} = \frac{mA^2\omega_0^2}{2} = 7{,}89 \text{ мДж}.$$

Ответ: $F_{max} = 0{,}158$ Н; $T_{max} = 7{,}89$ мДж.

Пример 5. Материальная точка совершает гармонические колебания согласно уравнению $x = 0{,}02\cos\left(\pi t + \frac{\pi}{2}\right)$ м. Определите: 1) амплитуду колебаний; 2) период колебаний; 3) начальную фазу колебаний; 4) максимальную скорость точки; 5) максимальное ускорение точки; 6) через сколько времени после начала отсчета точка будет проходить через положение равновесия.

Дано:	*Решение*
$x = 0{,}02\cos\left(\pi t + \frac{\pi}{2}\right)$ м	Запишем уравнение гармонических колебаний в общем виде: $x = A\cos(\omega_0 t + \varphi)$.
$A = ?$ $T = ?$ $\varphi = ?$ $V_{max} = ?$ $a_{max} = ?$ $t = ?$	Сравнивая его с нашим уравнением, находим: $A = 0{,}02$ м, $\varphi = \frac{\pi}{2}$, $\omega_0 = \pi$ с$^{-1}$.

Зная циклическую частоту ω_0, можем найти период колебаний:

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2 \text{ с}.$$

Скорость по определению:

$$V = \frac{dx}{dt} = -0{,}02\pi\sin\left(\pi t + \frac{\pi}{2}\right),\ V_{max} = 0{,}02\pi \text{ м/с}.$$

Ускорение по определению:

$$a = \frac{dV}{dt} = -0{,}02\pi^2\cos\left(\pi t + \frac{\pi}{2}\right),\ a_{max} = 0{,}02\pi^2 \text{ м/с}^2.$$

Положение равновесия – это нулевое смещение точки. Подставим $x = 0$ в уравнение движения и найдем время:

$$0{,}02\cos\left(\pi t + \frac{\pi}{2}\right) = 0;\ \pi t + \frac{\pi}{2} = (2m+1)\frac{\pi}{2};\ t = \frac{m\pi}{\pi} = m\ (m = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \ldots).$$

Ответ: $A = 2$ см; $T = 2$ с; $\varphi = \frac{\pi}{2}$; $V_{\max} = 6{,}28$ см/с; $a_{\max} = 19{,}7$ см/с^2; $t = m$.

Пример 6. Материальная точка колеблется согласно уравнению $x = A\cos\omega t$, где $A = 5$ см и $\omega = \frac{\pi}{12}$ с$^{-1}$. Когда возвращающая сила F в первый раз достигает значения –12 мН, потенциальная энергия П точки оказывается равной 0,15 мДж. Определите: 1) этот момент времени t; 2) соответствующую этому моменту фазу ωt.

Дано:	*Решение*
$x = A\cos\omega t$ $A = 5$ см $= 5 \cdot 10^{-2}$ м $\omega = \frac{\pi}{12}$ с$^{-1}$ $F = -12$ мН $= -1{,}2 \cdot 10^{-2}$ Н $П = 0{,}15$ мДж $= 1{,}5 \cdot 10^{-4}$ Дж $t = ?\ \omega t = ?$	Возвращающая сила по определению: $F = -kx = -Ak\cos\omega t.$ Потенциальная энергия при гармонических колебаниях определяется формулой $П = \frac{kx^2}{2} = \frac{kA^2}{2}\cos^2\omega t.$

Возьмем отношение

$$\frac{П}{F} = -\frac{A}{2}\cos\omega t.$$

Из этой формулы можно определить время и фазу:

$$t = \frac{1}{\omega}\arccos\left(-\frac{2П}{AF}\right) = 4\ \text{с};\qquad \omega t = \arccos\left(-\frac{2П}{AF}\right) = \frac{\pi}{3}\ \text{рад}.$$

Ответ: $t = 4$ с; $\omega t = \frac{\pi}{3}$ рад.

Пример 7. Спиральная пружина обладает жесткостью $k = 25$ Н/м. Определите, тело какой массы m должно быть подвешено к пружине, чтобы за $t = 1$ мин совершалось 25 колебаний.

Дано:	*Решение*
$k = 25$ Н/м $t = 1$ мин $= 60$ с $N = 25$ $m = ?$	По определению период равен: $T = \frac{t}{N}.$

Период также может быть выражен через массу тела и жесткость пружины:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}.$$

Объединяя формулы, найдем массу:

$$m = k\left(\frac{T}{2\pi}\right)^2 = \frac{kt^2}{4\pi^2 N^2} = 3{,}65 \text{ кг}.$$

Ответ: m = 3,65 кг.

Пример 8. Если увеличить массу груза, подвешенного к спиральной пружине, на 600 г, то период колебаний груза возрастает в 2 раза. Определите массу первоначально подвешенного груза.

Дано:	*Решение*
Δm = 600 г = 0,6 кг	Период колебаний в первом случае:
$T_2 = 2T_1$	$$T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}.$$
m = ?	

Во втором:

$$T_2 = 2\pi\sqrt{\frac{m+\Delta m}{k}}.$$

Если взять отношение периодов, то жесткость сократится и мы сможем выразить массу через известные величины:

$$\frac{T_1}{T_2} = \sqrt{\frac{m+\Delta m}{m}} = 2,\ 4m = m + \Delta m,\ m = \frac{\Delta m}{3} = 200 \text{ г}.$$

Ответ: m = 200 г.

Пример 9. На горизонтальной пружине жесткостью k = 900 Н/м укреплен шар массой M = 4 кг, лежащий на гладком столе, по которому он может скользить без трения. Пуля массой m = 10 г, летящая с горизонтальной скоростью V_0 = 600 м/с и имеющая в момент удара скорость, направленную вдоль оси пружины, попала в шар и застряла в нем. Пренебрегая массой пружины и сопротивлением воздуха, определите: 1) амплитуду колебаний шара; 2) период колебаний шара.

Дано:
$k = 900$ Н/м
$M = 4$ кг
$m = 10$ г $= 10^{-2}$ кг
$V_0 = 600$ м/с

$A = ?\ T = ?$

Решение

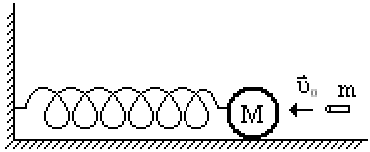
Воспользуемся законом сохранения импульса:

$$mV_0 = (M + m)V.$$

Выразим скорость:

$$V = \frac{mV_0}{M + m}.$$

Запишем закон сохранения энергии:



$$\frac{(M+m)V^2}{2} = \frac{kA^2}{2}.$$

Выразим из него амплитуду колебания шара:

$$A = \sqrt{\frac{m^2V_0^2}{(M+m)k}} = \frac{mV_0}{\sqrt{(M+m)k}} = 10 \text{ см}.$$

Теперь найдем период колебания шара:

$$\frac{(M+m)A^2\omega^2}{2} = \frac{kA^2}{2};\ \omega = \sqrt{\frac{k}{M+m}};\ T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{M+m}{k}} = 0{,}419 \text{ с}.$$

Ответ: $A = 10$ см; $T = 0{,}419$ с.

Пример 10. На чашку весов массой M, подвешенную на пружине жесткостью k, с высоты h падает небольшой груз массой m. Удар груза о дно чашки является абсолютно неупругим. Чашка в результате падения груза начинает совершать колебания. Определите амплитуду A этих колебаний.

Дано:
M
k
h
m

$A = ?$

Решение

Запишем закон сохранения энергии для груза:

$$\frac{mV_1^2}{2} = mgh.$$

Выразим скорость V_1 груза в момент удара:

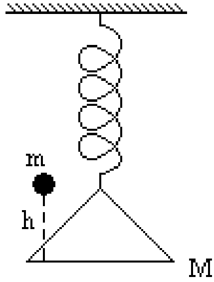
$$V_1 = \sqrt{2gh}.$$

Воспользуемся законом сохранения импульса:

$$mV_1 = (m + M)V.$$

Выразим скорость V чашки с грузом после удара:

$$V = \frac{m}{m+M}\sqrt{2gh}\,.$$



При ненагруженной чашке имеем:

$$Mg = kl,$$

где $l = \dfrac{Mg}{k}$ – начальное растяжение пружины.

$$\frac{1}{2}(m+M)V^2 + (M+m)g(x_0 - l) = \int\limits_l^{x_0} kx\,dx,$$

где x_0 – максимальное растяжение пружины.

$$\frac{1}{2}(m+M)\frac{m^2}{(m+M)^2}\cdot 2gh + (M+m)g(x_0 - l) = \frac{1}{2}k(x_0^2 - l^2)\,.$$

Решаем уравнение относительно x_0:

$$x_0 = \frac{(m+M)}{k}g \pm \sqrt{\frac{m^2g^2}{k^2} + \frac{2m^2gh}{(m+M)k}}\,.$$

При нагруженной чашке:

$$(m + M)g = kl'.$$

Отсюда

$$l' = \frac{(m+M)}{k}g\,.$$

Найдем амплитуду:

$$A = x_0 - l' = \sqrt{\frac{m^2g^2}{k^2} + \frac{2m^2gh}{(m+M)k}}\,.$$

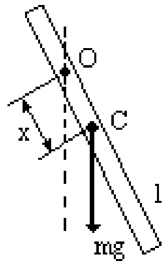
Ответ: $A = \sqrt{\dfrac{m^2g^2}{k^2} + \dfrac{2m^2gh}{(m+M)k}}\,.$

Пример 11. Физический маятник представляет собой тонкий однородный стержень длиной 35 см. Определите, на каком расстоянии от центра масс должна быть точка подвеса, чтобы частота колебаний была максимальной.

Дано:	*Решение*
l = 35 см = 0,35 м	Период колебаний физического маятника:
$\omega = \omega_{max}$	$$T = 2\pi\sqrt{\frac{J}{mgx}}\,.$$
$x = ?$	

Найдем частоту колебаний:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \sqrt{\frac{mgx}{J}}.$$



Момент инерции определим по теореме Штейнера:

$$J = \frac{ml^2}{12} + mx^2.$$

Подставим момент инерции в формулу для частоты:

$$\omega = \sqrt{\frac{mgx}{\frac{ml^2}{12} + mx^2}} = \left(\frac{12gx}{l^2 + 12x^2}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Искомое расстояние x найдем из равенства нулю производной:

$$\frac{d\omega}{dx} = \frac{\sqrt{3g}(l^2 - 12x^2)}{\sqrt{x(l^2 + 12x^2)^3}} = 0; \qquad l^2 - 12x^2 = 0; \qquad x = \frac{l}{2\sqrt{3}} = 10{,}1 \text{ см.}$$

Ответ: $x = 10{,}1$ см.

Пример 12. Маятник состоит из стержня ($l = 30$ см, $m = 50$ г), на верхнем конце которого укреплен маленький шарик (материальная точка массой $m' = 40$ г), на нижнем – шарик ($R = 5$ см, $M = 100$ г). Определите период колебания этого маятника около горизонтальной оси, проходящей через точку О в центре стержня.

Дано:	*Решение*
$l = 30$ см $= 0{,}3$ м	Запишем формулу для периода физического маятника: $T = 2\pi\sqrt{\frac{J}{m_{общ}gd}}$,
$m = 50$ г $= 0{,}05$ кг	где d – расстояние между центром стержня и центром масс маятника: $d = OC$.
$m' = 40$ г $= 0{,}04$ кг	
$R = 5$ см $= 0{,}05$ м	
$M = 100$ г $= 0{,}1$ кг	
$T = ?$	

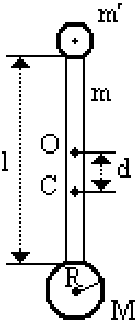
Используя теорему Штейнера, найдем момент инерции J:

$$J = \frac{ml^2}{12} + m'\left(\frac{l}{2}\right)^2 + \frac{2}{5}MR^2 + M\left(\frac{l}{2} + R\right)^2.$$

Масса маятника:

$$m_{\text{общ}} = m + m' + M\ .$$

Для центра масс имеет место равновесие:



$$md + m'\left(\frac{l}{2} + d\right) = M\left(\frac{l}{2} - d + R\right).$$

Отсюда выражаем *d*:

$$d = \frac{M\left(\frac{l}{2} + R\right) - m'\frac{l}{2}}{m + m' + M}\ .$$

Подставляя выражения для J, d и $m_{\text{общ}}$ в формулу для периода, получаем итоговую формулу:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\frac{ml^2}{12} + m'\left(\frac{l}{2}\right)^2 + \frac{2}{5}MR^2 + M\left(\frac{l}{2} + R\right)^2}{g\cdot\left[M\left(\frac{l}{2} + R\right) - m'\frac{l}{2}\right]}}\ .$$

Подставляя данные величины, находим:

$$T = 1{,}24\ \text{с}.$$

Ответ: $T = 1{,}24$ с.

Пример 13. Колебательный контур состоит из катушки индуктивностью L = 0,2 мГн и конденсатора площадью пластин S = 155 см², расстояние между которыми d = 1,5 мм. Зная, что контур резонирует на длину волны λ = 630 м, определите диэлектрическую проницаемость среды, заполняющей пространство между пластинами конденсатора.

Дано:	*Решение*
$L = 0{,}2$ мГн $= 2\cdot 10^{-4}$ Гн $S = 155$ см² $= 1{,}55\cdot 10^{-2}$ м² $d = 1{,}5$ мм $= 1{,}5\cdot 10^{-3}$ м $\lambda = 630$ м	Электрическая емкость плоского конденсатора: $$C = \frac{\varepsilon_0\varepsilon S}{d}\ .$$
$\varepsilon = ?$	

Период колебаний в колебательном контуре:

$$T = 2\pi\sqrt{LC}\ .$$

Длина волны определяется формулой

$$\lambda = cT = 2\pi c\sqrt{L\frac{\varepsilon_0\varepsilon S}{d}}.$$

Выразим диэлектрическую проницаемость:

$$\varepsilon = \left(\frac{\lambda}{2\pi c}\right)^2 \frac{d}{\varepsilon_0 LS}.$$

Подставляя известные величины из условия задачи, получаем:

$$\varepsilon = 6{,}11.$$

Ответ: $\varepsilon = 6{,}11$.

Пример 14. Энергия свободных незатухающих колебаний, происходящих в колебательном контуре, составляет 0,2 мДж. При медленном раздвигании пластин конденсатора частота колебаний увеличилась в $n = 2$ раза. Определите работу, совершенную против сил электрического поля.

Дано:	*Решение*
$W_1 = 0{,}2$ мДж $= 2 \cdot 10^{-4}$ Дж $n = 2$	Частота колебаний:
$A = ?$	$$\nu = \frac{1}{T},$$ где T – период колебаний – определяется по формуле

$$T = 2\pi\sqrt{LC}.$$

По условию задачи:

$$\frac{\nu_2}{\nu_1} = n.$$

При раздвигании пластин меняется емкость конденсатора:

$$\sqrt{\frac{C_1}{C_2}} = \frac{\nu_2}{\nu_1} = n.$$

Выразим вторую емкость:

$$\frac{C_1}{C_2} = n^2, \ C_2 = \frac{C_1}{n^2}.$$

Заряд не меняется:

$$Q = C_1\varphi_1 = C_2\varphi_2 = \text{const}.$$

Выразим φ_2:

$$\varphi_2 = \frac{C_1}{C_2}\varphi_1 = n^2\varphi_1 .$$

Начальная энергия:

$$W_1 = \frac{C_1\varphi_1^2}{2} .$$

Энергия после раздвигания пластин:

$$W_2 = \frac{C_2\varphi_2^2}{2} = n^2 W_1 .$$

Найдем работу:

$$A = W_2 - W_1 = n^2 W_1 - W_1 = (n^2 - 1)W_1 .$$

Произведя вычисления по этой формуле, получим:

$$A = 0{,}6 \text{ мДж}.$$

Ответ: A = 0,6 мДж.

Задачи для аудиторной работы

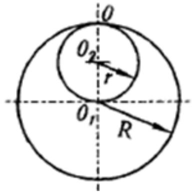
Задача 1. Колебательный контур содержит катушку индуктивностью L = 25 мГн, конденсатор емкостью С = 10 мкФ и резистор сопротивлением R = 1 Ом. Заряд конденсатора Q = 1 мкКл. Определите: 1) коэффициент затухания; 2) период колебаний контура; 3) логарифмический декремент затухания колебаний.

Задача 2. Тело массой m = 5 г совершает затухающие колебания. В течение времени t = 50 с тело потеряло 60 % своей энергии. Определите коэффициент сопротивления.

Задача 3. Амплитуда колебаний математического маятника длиной 1 м за время Δt = 10 мин уменьшилась в 2 раза. Определите логарифмический декремент затухания.

Задача 4. Гиря массой 500 г подвешена к пружине жесткостью k = 25 Н/м и совершает колебания в некоторой среде. Логарифмический декремент колебаний равен 0,004. Определите: 1) число полных колебаний, которые должна совершить гиря, чтобы амплитуда колебаний уменьшилась в 2 раза; 2) за какое время это уменьшение амплитуды произойдет.

Задача 5. Из тонкого однородного диска радиусом $R = 20$ см вырезана часть, имеющая форму круга радиусом $R_1 = 10$ см, так, как это показано на рисунке. Оставшаяся часть диска колеблется относительно горизонтальной оси Ox, совпадающей с одной из образующих цилиндрической поверхности диска. Найдите период колебаний такого диска.



Задача 6. Физический маятник представляет собой тонкий однородный стержень массой m с укрепленными на нем двумя маленькими шариками массой $m_1 = m$, $m_2 = 2m$. Маятник совершает колебания около горизонтальной оси, проходящей через точку O на стержне. Определите период колебаний маятника.

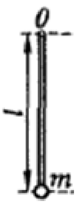
Билеты для контроля усвоения темы

Билет 1

1. Запишите определения: 1) гармонического осциллятора; 2) пружинного маятника.

2. Запишите формулы: 1) периода колебаний физического маятника; 2) дифференциального уравнения колебаний математического маятника.

3. Физический маятник представляет собой тонкий однородный стержень длиной $l = 1$ м, массой m с укрепленным на нем маленьким шариком массой m. Маятник совершает колебания около горизонтальной оси, проходящей через точку O. Определите период гармонических колебаний маятника.



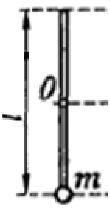
4. Колебательный контур состоит из катушки индуктивностью $L = 10^{-2}$ Гн и конденсатора емкостью $C = 0{,}405$ мкФ. Определите линейную и циклическую частоты колебаний этого контура.

Билет 2

1. Запишите определения: 1) приведенной длины физического маятника; 2) математического маятника.

2. Запишите формулы: 1) периода колебаний пружинного маятника; 2) дифференциального уравнения колебаний физического маятника.

3. Физический маятник представляет собой тонкий однородный стержень длиной $l = 1$ м, массой m с укрепленным на нем маленьким шариком массой m. Маятник совершает колебания около горизонтальной оси, проходящей через точку О. Определите период гармонических колебаний маятника.



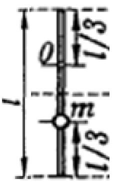
4. Материальная точка совершает гармонические колебания. Период колебаний $T = 2$ с; амплитуда – 50 мм, начальная фаза равна 0. Найдите скорость точки в момент времени, когда смещение от положения равновесия $x = 25$ мм.

Билет 3

1. Запишите определения: 1) физического маятника; 2) колебательного контура.

2. Запишите формулы: 1) периода колебаний в простейшем колебательном контуре; 2) дифференциального уравнения колебаний пружинного маятника.

3. Физический маятник представляет собой тонкий однородный стержень длиной $l = 1$ м, массой m с укрепленным на нем маленьким шариком массой m. Маятник совершает колебания около горизонтальной оси, проходящей через точку O. Определите период гармонических колебаний маятника.



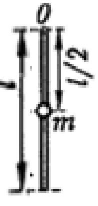
4. Найдите отношение длин двух математических маятников, если отношение периодов их колебаний равно 1,5.

Билет 4

1. Запишите определения: 1) гармонического осциллятора; 2) пружинного маятника.

2. Запишите формулы: 1) циклической частоты колебаний пружинного маятника; 2) собственной циклической частоты свободных электромагнитных колебаний.

3. Физический маятник представляет собой тонкий однородный стержень длиной $l = 1$ м, массой m с укрепленным на нем маленьким шариком массой m. Маятник совершает колебания около горизонтальной оси, проходящей через точку O. Определите период гармонических колебаний маятника.



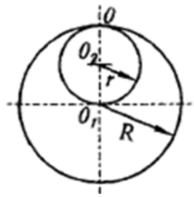
4. Найдите возвращающую силу в момент $t = 1$ с и полную энергию материальной точки, совершающей колебания по закону: $x = A\cos(\omega t)$, где $A = 20$ см, $\omega = 2\pi / 3\ с^{-1}$, $m = 10$ г.

Билет 5

1. Запишите единицы измерения: 1) момента инерции математического маятника; 2) амплитуды колебаний.

2. Запишите формулы: 1) собственной циклической частоты колебаний пружинного маятника; 2) собственной циклической частоты колебаний математического маятника.

3. Из тонкого однородного диска радиусом 20 см вырезана часть, имеющая вид круга радиусом 10 см, так, как это показано на рисунке. Оставшаяся часть диска колеблется относительно горизонтальной оси O, совпадающей с одной из образующих цилиндрической поверхности диска. Найдите период колебаний такого маятника.



4. Колебания точки происходят по закону: $x = A\cos(\omega t + \varphi)$. В некоторый момент времени смещение точки $x = 5$ см, ее скорость $V = 20$ см/с, а ее ускорение $a = -80$ см/с^2. Найдите амплитуду, циклическую частоту, период колебаний и фазу колебаний в рассматриваемый момент времени.

Билет 6

1. Запишите: 1) определение физического маятника; 2) единицу измерения момента возвращающей силы.

2. Запишите формулы: 1) потенциальной энергии пружинного маятника; 2) циклической частоты колебаний пружинного маятника.

3. Диск радиусом 24 см колеблется около горизонтальной оси, проходящей чрез середину одного из радиусов перпендикулярно плоскости диска. Определите приведенную длину и период колебаний такого диска.

4. Катушка индуктивностью $L = 1$ мГн и воздушный конденсатор, состоящий из двух круглых пластин диаметром $D = 20$ см каждая с расстоянием $d = 0,5$ см между ними, соединены параллельно. Определите период колебаний.

Практическое занятие 2
ЗАТУХАЮЩИЕ, ВЫНУЖДЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ. СЛОЖЕНИЕ КОЛЕБАНИЙ

Основные формулы

Дифференциальное уравнение затухающих колебаний:

$$\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega_0^2 x = 0, \tag{2.1}$$

где δ – коэффициент затухания колебаний; ω_0 – собственная частота колебаний.

Решение уравнения (2.1):

$$x = A(t)\cos\omega t, \tag{2.2}$$

где $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$ – частота затухающих колебаний; $A(t) = A_0 e^{-\delta t}$ – изменяющаяся со временем амплитуда; $\delta = \dfrac{1}{\tau}$ – коэффициент затухания, где τ – время релаксации (промежуток времени, через который амплитуда уменьшается в *e* раз).

Логарифмический декремент затухания колебаний:

$$\Theta = \ln\frac{A(t)}{A(t+T)} = \ln\frac{A_0 e^{-\delta t}}{A_0 e^{-\delta(t+T)}} = \delta T. \tag{2.3}$$

Добротность:

$$Q = 2\pi\frac{E(t)}{\Delta E(T)} = 2\pi\frac{E(t)}{E(t) - E(t+T)}. \tag{2.4}$$

Добротность связана с логарифмическим декрементом формулой:

$$Q = \frac{\pi}{\Theta}. \tag{2.5}$$

Дифференциальное уравнение вынужденных колебаний:

$$\ddot{x} + 2\delta\cdot\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m}\cos\omega t, \tag{2.6}$$

где $F = F_0 = \cos\omega t$ – периодическая вынуждающая сила.

Решение уравнения (2.6):

$$x = A\cos(\omega t + \varphi), \tag{2.7}$$

где $A = \dfrac{F_0}{m\sqrt{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + 4\delta^2\omega^2}}$ — амплитуда вынужденных колебаний; $\varphi = \operatorname{arctg}\dfrac{2\delta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}$ — начальная фаза вынужденных колебаний.

Частота вынужденных колебаний при резонансе:

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - 2\delta^2}\,. \qquad (2.8)$$

Колебание, получающееся при сложении двух одинаково направленных колебаний одинаковой частоты $x_1 = A_1\cos(\omega t + \varphi_1)$ и $x_2 = A_2\cos(\omega t + \varphi_2)$, описывается уравнением

$$x = A\cos(\omega t + \varphi), \qquad (2.9)$$

где $A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(\varphi_2 - \varphi_1)}$ — амплитуда результирующего колебания; $\operatorname{tg}\varphi = \dfrac{A_1\sin\varphi_1 + A_2\sin\varphi_2}{A_1\cos\varphi_1 + A_2\cos\varphi_2}$ — тангенс начальной фазы колебания.

Уравнение биений:

$$x = A(t)\cos\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}t\right), \qquad (2.10)$$

где $A(t) = 2A\cos\left(\dfrac{\omega_1 - \omega_2}{2}t\right)$ — закон изменения амплитуды.

Период биений:

$$T_б = \frac{T_A}{2} = \frac{2\pi}{\omega_1 - \omega_2}\,. \qquad (2.11)$$

Частота биений:

$$\omega_б = \omega_1 - \omega_2\,. \qquad (2.12)$$

Уравнение траектории материальной точки, участвующей одновременно в двух взаимно перпендикулярных колебаниях одинаковой частоты $x = A_1\cos(\omega t + \varphi_1)$ и $y = A_2\cos(\omega t + \varphi_2)$:

$$\frac{x^2}{A_1^2} + \frac{y^2}{A_2^2} - 2\frac{xy}{A_1A_2}\cos(\varphi_2 - \varphi_1) = \sin^2(\varphi_2 - \varphi_1)\,. \qquad (2.13)$$

Собственная частота колебательного контура:

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}\,. \qquad (2.14)$$

Коэффициент затухания колебательного контура:

$$\delta = \frac{R}{2L}. \qquad (2.15)$$

Методические указания

При решении задач по данной теме необходимо:

1. Выяснить вид колебаний (затухающие или вынужденные), которые совершает колеблющаяся величина.

2. Установить, какая величина совершает колебания.

3. Записать определения тех физических величин (ФВ), которые необходимо найти по условию задачи.

4. Если искомая величина может быть найдена из ее определения, то следует рассчитать ее численное значение. Если определения ФВ недостаточно, то следует искать формулы связи между искомой ФВ и известными в задаче величинами.

5. Записать соответствующее для вида (затухающие или вынужденные) уравнение колебаний.

6. Если колеблющееся тело участвует в нескольких колебательных процессах, тогда необходимо найти результирующее колебание и его характеристики.

Если складываются колебания одного направления и одной частоты, то необходимо найти амплитуду и фазу результирующего колебания.

Если два складываемых колебания одного направления мало отличаются по частоте, то возникают биения. Амплитуда биений имеет частоту в два раза больше частоты изменения косинуса: $\omega_{\text{биен}} = \Delta\omega$.

При сложении взаимно перпендикулярных колебаний уравнением колебаний является уравнение эллипса. Ориентация эллипса и размеры его осей зависят от амплитуд складываемых колебаний и разности фаз α.

Если частоты складываемых взаимно перпендикулярных колебаний различны, то замкнутая траектория результирующего колебания имеет сложный вид, называемый фигурами Лиссажу. Вид этих кривых зависит от соотношения амплитуд, частот и разности фаз складываемых колебаний. На рис. 1 представлен вид фигур Лиссажу для различных частот и разностей фаз.

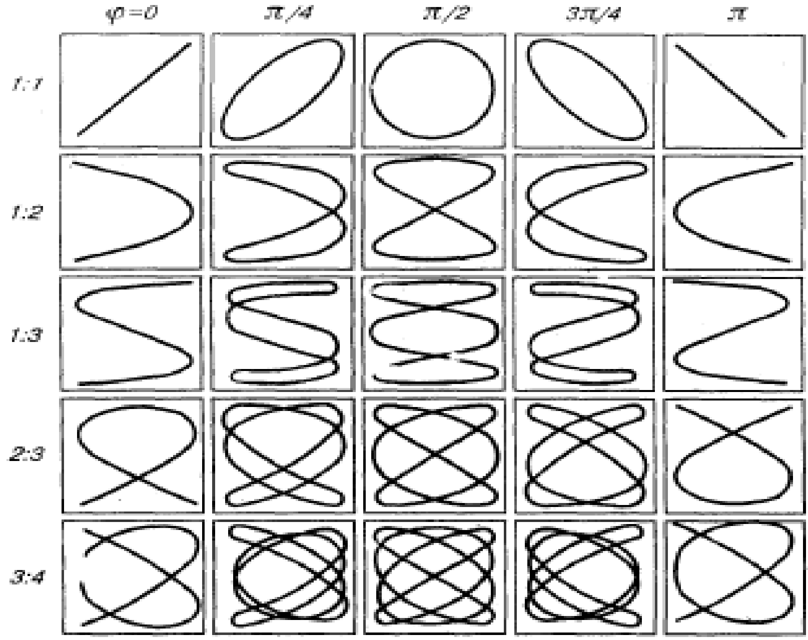


Рис. 1. Фигуры Лиссажу [7]

Примеры решения задач

Пример 1. Складываются два гармонических колебания одного направления, описываемых уравнениями $x_1 = 3\cos 2\pi t$ см и $x_2 = 3\cos(2\pi t + \pi/4)$ см. Определите для результирующего колебания: 1) амплитуду; 2) начальную фазу. Запишите уравнение результирующего колебания и представьте векторную диаграмму сложения амплитуд.

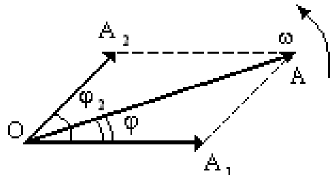
Дано:	Решение
$x_1 = 3\cos 2\pi t$ см	Запишем уравнения колебаний в общем
$x_2 = 3\cos(2\pi t + \pi/4)$ см	виде:
$A = ?$ $\varphi = ?$ $x(t) = ?$	$x_1 = A_1\cos(\omega t + \varphi_1)$; $x_2 = A_2\cos(\omega t + \varphi_2)$.

Сравнивая с уравнениями из условия, находим:

$$\omega = 2\pi;\ \ A_1 = A_2 = 3 \text{ см};\ \ \varphi_1 = 0,\ \varphi_2 = \frac{\pi}{4}.$$

Разность фаз:

$$\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 = \frac{\pi}{4}.$$



Уравнение результирующего колебания:

$$x = A\cos(\omega t + \varphi).$$

Начальную фазу определим по формуле:

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{A_1\sin\varphi_1 + A_2\sin\varphi_2}{A_1\cos\varphi_1 + A_2\cos\varphi_2} = \frac{\sin\varphi_1 + \sin\varphi_2}{\cos\varphi_1 + \cos\varphi_2}.$$

Формула для амплитуды:

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos\Delta\varphi} = A_1\sqrt{2(1+\cos\Delta\varphi)}.$$

Подставляя значения, находим:

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{\sin 0 + \sin\frac{\pi}{4}}{\cos 0 + \cos\frac{\pi}{4}} = 0{,}414; \quad \varphi = \frac{\pi}{8}; \quad A = 3\cdot\sqrt{2\left(1+\cos\frac{\pi}{4}\right)} = 5{,}54\,\text{см};$$

$$x = 5{,}54\cos\left(2\pi t + \frac{\pi}{8}\right)\ \text{см}.$$

Ответ: $A = 5{,}54$ см; $\varphi = \frac{\pi}{8}$; $x = 5{,}54\cos\left(2\pi t + \frac{\pi}{8}\right)$ см.

Пример 2. Результирующее колебание, получающееся при сложении двух гармонических колебаний одного направления, описывается уравнением вида: $x = A\cos t\cos 45t$ (t – время в секундах). Определите: 1) циклические частоты складываемых колебаний; 2) период биений результирующего колебания.

Дано:	*Решение*
$x = A\cos t\cos 45t$	Результирующее колебание:
$\omega_1 = ?\ \omega_2 = ?$	$x = x_1 + x_2,$
$T_б = ?$	или

$$x = 2A\cos\frac{\omega_1-\omega_2}{2}t\cos\left(\frac{\omega_1+\omega_2}{2}t+\varphi\right).$$

Сравнивая с уравнением из условия, определяем:

$$\frac{\omega_1-\omega_2}{2} = 1;\ \omega_1-\omega_2 = 2;$$

$$\frac{\omega_1+\omega_2}{2} = 45;\ \omega_1+\omega_2 = 90.$$

Решая совместно полученные уравнения, находим ω_1 и ω_2:

$$2\omega_1 = 92; \quad \omega_1 = 46\ \text{с}^{-1}; \quad \omega_2 = 44\ \text{с}^{-1}.$$

Период биений вычисляем по формуле:

$$T_б = \frac{2\pi}{\Delta\omega} = \frac{2\pi}{2c^{-1}} = 3{,}14\ \text{с}.$$

Ответ: $\omega_1 = 46\ \text{с}^{-1}$; $\omega_2 = 44\ \text{с}^{-1}$; $T_б = 3{,}14$ с.

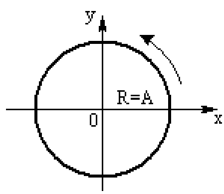
Пример 3. Точка участвует одновременно в двух гармонических колебаниях одинаковой частоты, происходящих во взаимно перпендикулярных направлениях и описываемых уравнениями $x = A\sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)$ и $y = B\sin\omega t$. Определите уравнение траектории точки и вычертите ее с нанесением масштаба, указав направление ее движения по этой траектории.

Дано:	*Решение*
$x = A\sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)$	Преобразуем уравнение для колебаний вдоль оси x:
$y = B\sin\omega t$	$x = A\sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) = A\cos\omega t$.
$y(x) = ?$	

Возведя оба уравнения $x(t)$ и $y(t)$ в квадрат и сложив их, избавимся от параметра t и получим искомое уравнение траектории:

$$x^2 + y^2 = A^2\cos^2\omega t + A^2\sin^2\omega t = A^2\left(\cos^2\omega t + \sin^2\omega t\right) = A^2.$$

Уравнение $x^2 + y^2 = A^2$ является уравнением окружности радиуса A.



Определим направление движения:

$t = 0$: $x = A$, $y = 0$;

$t = \frac{T}{4}$: $x = 0$, $y = A$;

$t = \frac{T}{2}$: $x = -A$, $y = 0$;

$t = \frac{3T}{4}$: $x = 0$, $y = -A$,

направление движения – против часовой стрелки.

Ответ: $x^2 + y^2 = A^2$, против часовой стрелки.

Пример 4. Период затухающих колебаний $T = 1$ с, логарифмический декремент затухания $\Theta = 0{,}3$, начальная фаза равна нулю. Смещение точки при $t = 2T$ составляет 5 см. Запишите уравнение движения этого колебания.

Дано:	*Решение*
$T = 1$ с	Запишем уравнение затухающих колебаний, учитывая, что $\varphi = 0$:
$\Theta = 0{,}3$	$$x = A_0 e^{-\delta t}\cos \omega t\,.$$
$\varphi = 0$	Циклическая частота:
$t = 2T$	$$\omega = \frac{2\pi}{T}.$$
$x_1 = 5$ см $= 0{,}05$ м	
$x(t) = ?$	

Коэффициент затухания δ найдем из соотношения:

$$\Theta = \delta T;\ \delta = \frac{\Theta}{T}.$$

В момент времени $t = 2T$:

$$x_1 = A_0 e^{-\delta\cdot 2T}\cos\frac{2\pi}{T}\cdot 2T = A_0 e^{-2\Theta}.$$

Отсюда амплитуда в начальный момент времени:

$$A_0 = x_1 e^{2\Theta}.$$

Таким образом, наше уравнение предстает в виде:

$$x = A_0 e^{-\delta\frac{\Theta}{T}}\cos\frac{2\pi}{T}t\,.$$

Подставляя численные значения, получаем:

$$x = 9{,}1e^{-0{,}3t}\cos 2\pi t \text{ см}.$$

Ответ: $x = 9{,}1e^{-0{,}3t}\cos 2\pi t$ см.

Пример 5. При наблюдении затухающих колебаний выяснилось, что для двух последовательных колебаний амплитуда второго меньше амплитуды первого на 60 %. Период затухающих колебаний $T = 0{,}5$ с. Определите: 1) коэффициент затухания δ; 2) для тех же условий частоту ν_0 незатухающих колебаний.

Дано:	*Решение*
$A_2 = 0{,}4A_1$	Логарифмический декремент колебаний
$T = 0{,}5$ с	по определению:
$\delta = ?\ \nu_0 = ?$	$$\Theta = \ln\frac{A_1}{A_2}.$$

Логарифмический декремент связан с коэффициентом затухания δ соотношением

$$\Theta = \delta T.$$

Выразим δ:

$$\delta = \frac{1}{T}\ln\frac{A_1}{A_2}.$$

Циклическая частота затухающих колебаний:

$$\omega = \frac{2\pi}{T}.$$

С другой стороны:

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}.$$

Отсюда выражаем циклическую частоту незатухающих колебаний:

$$\omega_0 = \sqrt{\omega^2 + \delta^2}.$$

Частота незатухающих колебаний:

$$\nu_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 + \left(\frac{1}{T}\ln\frac{A_1}{A_2}\right)^2} = \frac{1}{2\pi T}\sqrt{(2\pi)^2 + \left(\ln\frac{A_1}{A_2}\right)^2}.$$

Подставляя данные величины в выражения для δ и ν_0, получаем:

$$\delta = 1{,}83\ \text{с}^{-1};\ \nu_0 = 2{,}02\ \text{Гц}.$$

Ответ: $\delta = 1{,}83$ с$^{-1}$; $\nu_0 = 2{,}02$ Гц.

Пример 6. За время, в течение которого система совершает $N = 50$ полных колебаний, амплитуда уменьшается в 2 раза. Определите добротность Q системы.

Дано:	Решение
$N = 50$	Добротность связана с логарифмическим декрементом формулой
$\dfrac{A_0}{A_N} = 2$	$$Q = \frac{\pi}{\Theta}.$$
$Q = ?$	

Логарифмический декремент:

$$\Theta = \delta T.$$

Амплитуда через N колебаний:

$$A_N = A_0 e^{-\delta t} = A_0 e^{-\delta N T} = A_0 e^{-\Theta N}.$$

Выразим Θ:

$$\frac{A_0}{A_N} = e^{\Theta N} = 2; \ \Theta N = \ln 2; \quad \Theta = \frac{\ln 2}{N}.$$

Подставим Θ в формулу для добротности:

$$Q = \frac{\pi N}{\ln 2}.$$

Произведя расчет, получим: $Q = 227$.

Ответ: $Q = 227$.

Пример 7. Определите минимальное активное сопротивление при разрядке лейденской банки, при котором разряд будет апериодическим. Емкость C лейденской банки равна 1,2 нФ, а индуктивность проводов составляет 3 мкГн.

Дано:	*Решение*
$C = 1{,}2$ нФ $= 1{,}2 \cdot 10^{-9}$ Ф	При апериодическом разряде:
$L = 3$ мкГн $= 3 \cdot 10^{-6}$ Гн	$T \to \infty,\ \omega \to 0.$
$R = ?$	

Циклическая частота затухающих колебаний:

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}.$$

Условие стремления к нулю выполняется при $\omega_0 = \delta$.

Собственная частота колебательного контура:

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}.$$

Коэффициент затухания:

$$\delta = \frac{R}{2L}.$$

Подставляем формулы для ω_0 и δ в равенство $\omega_0 = \delta$ и выражаем R:

$$\frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{R}{2L}; \ R = \frac{2L}{\sqrt{LC}} = 2\sqrt{\frac{L}{C}}.$$

Подставляя численные значения, получаем:

$$R = 100 \text{ Ом}.$$

Ответ: $R = 100$ Ом.

Пример 8. Гиря массой m = 0,5 кг, подвешенная на спиральной пружине жесткостью k = 50 Н/м, совершает колебания в вязкой среде с коэффициентом сопротивления r = 0,5 кг/с. На верхний конец пружины действует вынуждающая сила, изменяющаяся по закону $F = 0{,}1 \cos \omega t$, Н. Определите для данной колебательной системы: 1) коэффициент затухания δ; 2) резонансную амплитуду $A_{рез}$.

Дано:	*Решение*
m = 0,5 кг k = 50 Н/м r = 0,5 кг/с $F = 0{,}1 \cos \omega t$ Н	Второй закон Ньютона для данной системы: $m\ddot{x} = -kx - r\dot{x} + F_0 \cos\omega t$. После преобразования получаем дифференциальное уравнение вынужденных колебаний:
δ = ? $A_{рез}$ = ?	

$$\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m}\cos\omega t,$$

где $\delta = \dfrac{r}{2m}$ – коэффициент затухания; $\omega_0^2 = \dfrac{k}{m}$.

Уравнение вынуждающей силы в общем виде:

$$F = F_0 \cos \omega t.$$

Сравнивая с данным уравнением, определяем:

$$F_0 = 0{,}1 \text{ Н}.$$

Амплитуда вынужденных колебаний находится по формуле:

$$A = \frac{F_0}{m\sqrt{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + 4\delta^2\omega^2}}.$$

При резонансе:

$$\omega = \omega_{рез} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\delta^2}.$$

Подставляя $\omega_{рез}$ в формулу для амплитуды, получаем:

$$A_{рез} = \frac{F_0}{2\delta m\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}} = \frac{F_0}{2\left(\dfrac{r}{2m}\right)\cdot m\sqrt{\dfrac{k}{m} - \dfrac{r^2}{4m^2}}} = \frac{F_0}{r\sqrt{\dfrac{k}{m} - \dfrac{r^2}{4m^2}}}.$$

Подставляя данные величины, находим:

$$\delta = 0{,}5 \text{ с}^{-1};\ A_{рез} = 2 \text{ см}.$$

Ответ: δ = 0,5 $с^{-1}$; $A_{рез}$ = 2 см.

Задачи для аудиторной работы

Задача 1. Два одинаково направленных гармонических колебания одинакового периода с амплитудами $A_1 = 4$ см и $A_2 = 8$ см имеют разность фаз $\varphi = 45°$. Определите амплитуду результирующего колебания.

Задача 2. Амплитуда результирующего колебания, получающегося при сложении двух одинаково направленных колебаний одинаковой частоты, обладающих разностью фаз $\varphi = 60°$, равна $A_{рез} = 6$ см. Определите амплитуду A_2 второго колебания, если $A_1 = 5$ см.

Задача 3. Складываются два гармонических колебания одного направления, описываемых уравнениями

$$x_1 = 3\cos 2\pi t \text{ см} \quad \text{и} \quad x_2 = 3\cos\left(2\pi t + \frac{\pi}{4}\right) \text{ см}.$$

Определите для результирующего колебания: 1) амплитуду; 2) начальную фазу.

Задача 4. Частоты колебаний двух одновременно звучащих камертонов настроены на 560 и 560,5 Гц. Определите период биений.

Задача 5. Точка участвует одновременно в двух гармонических колебаниях, происходящих во взаимно перпендикулярных направлениях и описываемых уравнениями

$$x = 3\cos \omega t \text{ см} \quad \text{и} \quad y = 4\cos \omega t \text{ см}.$$

Определите уравнение траектории точки.

Задача 6. Точка участвует одновременно в двух гармонических колебаниях, происходящих во взаимно перпендикулярных направлениях и описываемых уравнениями

$$x = 3\cos 2\omega t \text{ см} \quad \text{и} \quad y = 4\cos(2\omega t + \pi) \text{ см}.$$

Определите уравнение траектории точки и начертите в масштабе.

Задача 7. Гиря массой $m = 500$ г подвешена к спиральной пружине жесткостью $k = 20$ Н/м и совершает упругие колебания в некоторой среде. Логарифмический декремент затухания колебаний равен $\lambda = 0{,}004$. Определите число полных колебаний, которые должна совершить пружина, чтобы амплитуда колебаний уменьшилась в 2 раза. За какое время это произойдет?

Задача 8. Колебательный контур содержит катушку индуктивностью $L = 25$ мГн, конденсатор емкостью С = 10 мкФ и резистор сопротивлением $R = 1$ Ом. Заряд конденсатора $q = 1$ мкКл. Определите: 1) коэффициент затухания; 2) период колебаний контура; 3) логарифмический декремент затухания колебаний.

Задача 9. Тело массой $m = 5$ г совершает затухающие колебания. В течение времени $t = 50$ с тело потеряло 60 % своей энергии. Определите коэффициент сопротивления.

Задача 10. Амплитуда колебаний математического маятника длиной 1 м за время $\Delta t = 10$ мин уменьшилась в 2 раза. Определите логарифмический декремент затухания.

Билеты для контроля усвоения темы

Билет 1

1. Запишите определения: 1) добротности; 2) времени релаксации.

2. Запишите: 1) формулу для расчета амплитуды результирующего колебания при сложении двух одинаково направленных колебаний одной частоты; 2) дифференциальное уравнение свободных затухающих электромагнитных колебаний и его решение.

3. Два гармонических колебания, направленных по одной прямой и имеющих одинаковые амплитуды и периоды, складываются в одно колебание той же амплитуды. Найдите разность фаз складываемых колебаний.

4. Биения возникают при сложении двух колебаний:

$$s_1 = \cos 4999\pi t \quad \text{и} \quad s_2 = \cos 5001\pi t.$$

Найдите период биений и условный период почти синусоидального колебания.

Билет 2

1. Запишите определения: 1) биений; 2) механического резонанса.

2. Запишите формулы для расчета: 1) амплитуды затухающих колебаний; 2) фазы результирующего колебания, если накладываются два одинаково направленных гармонических колебания одной частоты.

3. Найдите время, за которое амплитуда колебаний тока в контуре с добротностью $Q = 5000$ уменьшится в 2 раза, если частота колебаний $\nu = 2{,}2$ МГц.

4. Точка участвует одновременно в двух гармонических колебаниях, происходящих во взаимно перпендикулярных направлениях по закону: $x = A\cos\omega t$; $y = B\sin\omega t$. Найдите уравнение траектории.

Билет 3

1. Запишите определения: 1) линейной колебательной системы; 2) статистического отклонения.

2. Запишите формулы: 1) связи между временем релаксации и коэффициентом затухания; 2) коэффициента затухания для простейшего колебательного контура.

3. Математический маятник длиной $L = 24{,}7$ см совершает затухающие колебания с логарифмическим декрементом затухания $\Theta = 0{,}01$. Через сколько времени энергия колебания уменьшится в 9,4 раза?

4. Определите амплитуду A и начальную фазу результирующего колебания, возникающего при сложении двух колебаний одинакового направления и частоты: $x_1 = A_1 \sin\omega t$ и $x_2 = \mathrm{A}_2 \sin\omega(t + \tau)$, где $A_1 = A_2 = 1$ см; $\omega = \pi$ с$^{-1}$; $\tau = 0{,}5$ с. Запишите уравнение результирующего колебания.

Билет 4

1. Запишите определения: 1) затухающих механических колебаний; 2) механического резонанса.

2. Запишите формулы: 1) резонансной частоты вынужденных колебаний; 2) амплитуды биений.

3. Индуктивность контура $L = 0{,}5$ мГн. Какова должна быть его электроемкость, чтобы он резонировал на длину волны $\lambda = 300$ м?

4. Математический маятник совершает затухающие колебания. За 1 мин его амплитуда уменьшилась вдвое. Во сколько раз она уменьшится за 3 мин?

Билет 5

1. Запишите определения: 1) свободных затухающих электромагнитных колебаний; 2) автоколебаний.

2. Запишите: 1) формулу амплитуды вынужденных механических колебаний; 2) уравнение траектории результирующего колебания, полученного при сложении двух гармонических колебаний

одинаковой частоты ω, происходящих во взаимно перпендикулярных направлениях x и y.

3. Складываются два гармонических колебания одного направления с одинаковыми периодами $T_1 = T_2 = 1{,}5$ с и амплитудами $A_1 = A_2 = 2$ см. Начальные фазы колебаний $\varphi_1 = \pi/2$ и $\varphi_2 = \pi/3$. Найдите амплитуду и фазу результирующего колебания.

4. Колебательный контур содержит конденсатор емкостью $C = 8$ пФ и катушку индуктивностью $L = 0{,}50$ мГн. Каково максимальное напряжение на обкладках конденсатора, если максимальная сила тока $I_{max} = 40$ мА?

Билет 6

1. Запишите определения: 1) биений; 2) затухающих колебаний.

2. Запишите: 1) дифференциальное уравнение свободных затухающих колебаний в электрическом колебательном контуре; 2) формулу логарифмического декремента затухания при колебаниях пружинного маятника.

3. Математический маятник длиной 0,5 м, выведенный из положения равновесия, отклонился при первом колебании на 5 см, а при втором (в ту же сторону) – на 4 см. Найдите время релаксации.

4. Конденсатор электроемкостью $C = 500$ пФ присоединен параллельно к катушке длиной $L = 40$ см, площадью поперечного сечения $S = 5$ см^2. Катушка содержит $N = 1000$ витков. Сердечник немагнитный. Найдите период колебаний.

Практическое занятие 3
МЕХАНИЧЕСКИЕ И ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ВОЛНЫ

Основные формулы

Длина волны:

$$\lambda = \upsilon T = \frac{\upsilon}{\nu}, \tag{3.1}$$

где υ – фазовая частота; T – период колебаний.

Уравнение плоской волны:

$$\xi(x,t) = A\cos\omega\left(t - \frac{x}{\upsilon}\right) \tag{3.2}$$

или

$$\xi(x,t) = A\cos(\omega t - kx + \varphi_0), \tag{3.3}$$

где $\xi(x, t)$ – смещение точек среды с координатой x в момент времени t; А – амплитуда волны; ω – циклическая частота; $k = 2\pi/\lambda = 2\pi/(\upsilon T) = \omega/\upsilon$ – волновое число; φ_0 – начальная фаза колебаний в точке с координатой $x = 0$.

Разность фаз колебаний двух любых точек волны:

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda}\Delta l, \tag{3.4}$$

где Δl – расстояние между точками.

Фазовая скорость:

$$\upsilon = \frac{\omega}{k}. \tag{3.5}$$

Групповая скорость:

$$u = \frac{d\omega}{dk}. \tag{3.6}$$

Понятие групповой скорости очень важно, именно она фигурирует при измерениях дальности в радиолокации. Для фазовой скорости ограничений не существует, а групповая скорость $\upsilon \le c$.

Условие максимумов интерференционной картины:

$$\Delta_{\max} = 2m\frac{\lambda}{2} \quad (m = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots). \tag{3.7}$$

Условие минимумов интерференционной картины:

$$\Delta_{\min} = (2m+1)\frac{\lambda}{2} \quad (m = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots). \tag{3.8}$$

Уравнение сферической волны:

$$\xi(x,t)=\frac{A_0}{r}\cos(\omega t-kx+\varphi_0), \qquad (3.9)$$

где r – расстояние от центра волны до рассматриваемой точки среды.

Уравнение стоячей волны:

$$\xi(x,\ t)=2A\cos kx\cos\omega t, \qquad (3.10)$$

где $x=\pm m\frac{\lambda}{2}$ (m = 0, 1, 2, ...) – пучности; $x=\pm\left(m+\frac{1}{2}\right)\frac{\lambda}{2}$ (m = 0, 1, 2, ...) – узлы.

Интенсивность волны (плотность потока энергии):

$$I=\frac{dW}{dS\cdot dt}. \qquad (3.11)$$

Уровень интенсивности звука:

$$L=\lg\frac{I}{I_0}, \qquad (3.12)$$

где $I_0 = 10^{-12}$ Вт/м² – интенсивность звука на пороге слышимости.

Скорость звука в газе:

$$\upsilon=\sqrt{\frac{\gamma RT}{M}}, \qquad (3.13)$$

где $\gamma=\frac{C_p}{C_v}=\frac{i+2}{i}$.

Эффект Доплера в акустике:

$$\nu=\frac{(\upsilon\pm\upsilon_{\text{пр}})\nu_0}{\upsilon\mp\upsilon_{\text{ист}}}, \qquad (3.14)$$

где верхние знаки – сближение, нижние – удаление.

Скорость распространения электромагнитных волн в среде:

$$\upsilon=\frac{c}{n}=\frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}}, \qquad (3.15)$$

где n – абсолютный показатель преломления; с – скорость света в вакууме; ε – диэлектрическая проницаемость среды; μ – магнитная проницаемость среды.

Уравнение плоской электромагнитной волны:

$$E=E_0\cos(\omega t-kx+\varphi);\ H=H_0\cos(\omega t-kx+\varphi). \qquad (3.16)$$

Объемная плотность энергии электромагнитной волны:

$$\omega=\frac{1}{2}(\varepsilon_0\varepsilon E^2+\mu_0\mu H^2). \qquad (3.17)$$

Импульс электромагнитного поля:

$$p = \frac{W}{c}, \qquad (3.18)$$

где W – энергия электромагнитного поля.

Методические указания

Основным свойством всех волн является перенос энергии без переноса вещества.

Бегущие волны подразделяют на плоские и сферические.

Стоячие волны образуются при наложении двух бегущих волн, распространяющихся навстречу друг другу с одинаковыми частотами и амплитудами. Стоячие волны не переносят энергию.

Электромагнитные волны – это переменное электромагнитное поле, распространяющееся в пространстве с конечной скоростью.

В электромагнитной волне векторы $\vec{E}$ и $\vec{H}$ взаимно перпендикулярны и образуют с направлением распространения волны правовинтовую систему.

Вектор Умова – Пойнтинга ($\vec{S}$) называется вектором плотности потока электромагнитной энергии. Он равен: $\vec{S} = [\vec{E}\vec{H}]$ и направлен в сторону распространения электромагнитной волны. Модуль вектора Умова – Пойнтинга равен энергии, переносимой электромагнитной волной за единицу времени через единичную площадку, перпендикулярную направлению распространения волны.

Примеры решения задач

Пример 1. Две точки лежат на луче и находятся от источника колебаний на расстоянии $x_1 = 4$ м и $x_2 = 7$ м. Период колебаний $T = 20$ мс, скорость распространения волны $\upsilon = 300$ м/с. Определите разность фаз колебаний этих точек.

Дано:	*Решение*
$x_1 = 4$ м $x_2 = 7$ м $T = 20$ мс $= 2 \cdot 10^{-2}$ с $\upsilon = 300$ м/с $\Delta\varphi = ?$	Запишем формулу для разности фаз колебаний двух точек: $$\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda}\Delta l,$$ где $\Delta l = (x_2 - x_1)$ – расстояние между точками.

Запишем формулу для длины волны:

$$\lambda = \upsilon T.$$

Подставляя выражения для λ и Δl в формулу для $\Delta\varphi$, получаем:

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\upsilon T}(x_2 - x_1).$$

Произведя вычисления, находим:

$$\Delta\varphi = \pi.$$

Ответ: $\Delta\varphi = \pi$, точки колеблются в противофазе.

Пример 2. Плоская синусоидальная волна распространяется вдоль прямой, совпадающей с положительным направлением оси x в среде, не поглощающей энергию, со скоростью $\upsilon = 10$ м/с. Две точки, находящиеся на этой прямой на расстоянии $x_1 = 7$ м и $x_2 = 10$ м от источника колебаний, колеблются с разностью фаз $\Delta\varphi = 3\pi / 5$. Амплитуда волны $A = 5$ см. Определите: 1) длину волны λ; 2) уравнение волны; 3) смещение ξ_2 второй точки в момент времени $t_2 = 2$ с.

Дано:	*Решение*
$\upsilon = 10$ м/с $x_1 = 7$ м $x_2 = 10$ м $\Delta\varphi = 3\pi / 5$ A = 5 см = 0,05 м $t_2 = 2$ с ——— $\lambda = ?$ $\xi(x, t) = ?$ $\xi_2 = ?$	Разность фаз: $$\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda}(x_2 - x_1).$$ Отсюда: $$\lambda = \frac{2\pi}{\Delta\varphi}(x_2 - x_1).$$ Запишем уравнение плоской синусоидальной волны: $$\xi(x,t) = A\cos\omega\left(t - \frac{x}{\upsilon}\right).$$

В этой формуле неизвестна только циклическая частота ω, найдем ее по формулам:

$$\omega = \frac{2\pi}{T};\; T = \frac{\lambda}{\upsilon};\; \omega = \frac{2\pi\upsilon}{\lambda}.$$

Смещение ξ_2 второй точки определим, подставив в уравнение волны значения t_2 и x_2:

$$\xi_2 = A\cos\omega\left(t_2 - \frac{x_2}{\upsilon}\right).$$

Подставляя данные величины, находим:

$$\lambda = 10 \text{ м}; \ \xi(x,t) = 0{,}05\cos\left(2\pi t - \frac{\pi}{5}x\right) \text{ м}; \ \xi_2 = 5 \text{ см}.$$

Ответ: $\lambda = 10$ м; $\xi(x,t) = 0{,}05\cos\left(2\pi t - \frac{\pi}{5}x\right)$ м; $\xi_2 = 5$ см.

Пример 3. Определите групповую скорость для частоты $\nu = 800$ Гц, если фазовая скорость задается выражением $\upsilon = a_0/\sqrt{\nu + b}$, где $a_0 = 24$ м · с$^{-3/2}$, $b = 100$ Гц.

Дано:	*Решение*
$\nu = 800$ Гц $\upsilon = a_0/\sqrt{\nu+b}$ $a_0 = 24$ м · с$^{-3/2}$ $b = 100$ Гц	Групповая скорость по определению: $$u = \frac{d\omega}{dk} = 2\pi\frac{d\nu}{dk} = \frac{d\nu}{d\left(\frac{1}{\lambda}\right)}.$$
$u = ?$	

Запишем формулу для длины волны:

$$\lambda = \frac{\upsilon}{\nu} = \frac{a_0}{\nu\sqrt{\nu + b}}.$$

Найдем дифференциал:

$$d\left(\frac{1}{\lambda}\right) = \frac{1{,}5\nu + b}{a_0\sqrt{\nu + b}}d\nu.$$

Подставляя это выражение в формулу для групповой скорости, получаем:

$$u = \frac{d\nu}{d\left(\frac{1}{\lambda}\right)} = \frac{d\nu a_0\sqrt{\nu + b}}{(1{,}5\nu + b)d\nu} = \frac{a_0\sqrt{\nu + b}}{1{,}5\nu + b}.$$

Подставляя численные значения, находим:

$$u = 0{,}55 \text{ м/с}.$$

Ответ: $u = 0{,}55$ м/с.

Пример 4. Два когерентных источника колеблются в одинаковых фазах с частотой $\nu = 400$ Гц. Скорость распространения колебаний в среде $\upsilon = 1$ км/с. Определите, при какой наименьшей разности хода, не равной нулю, будет наблюдаться: 1) максимальное усиление колебаний; 2) максимальное ослабление колебаний.

Дано:	*Решение*
$\nu = 400$ Гц $\upsilon = 1$ км/с	Длина волны: $$\lambda = \upsilon T = \frac{\upsilon}{\nu}.$$
$\Delta_{max} = ?$ $\Delta_{min} = ?$	Разность хода при максимальном усилении колебаний:

$$\Delta_{max} = 2m\frac{\lambda}{2};\ m = 1;\ \Delta_{max} = \frac{\upsilon}{\nu}.$$

Разность хода при максимальном ослаблении колебаний:

$$\Delta_{min} = (2m+1)\frac{\lambda}{2};\ m = 0;\ \Delta_{min} = \frac{\lambda}{2} = \frac{\upsilon}{2\nu}.$$

Вычисляя, получим:

$$\Delta_{max} = 2{,}5 \text{ м};\ \Delta_{min} = 1{,}25 \text{ м}.$$

Ответ: $\Delta_{max} = 2{,}5$ м; $\Delta_{min} = 1{,}25$ м.

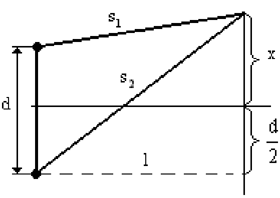
Пример 5. Два динамика расположены на расстоянии $d = 2{,}5$ м друг от друга и воспроизводят один и тот же музыкальный тон на определенной частоте, который регистрируется приемником, находящимся на расстоянии $l = 3{,}5$ м от центра динамиков. Если приемник передвинуть от центральной линии параллельно динамикам на расстояние $x = 1{,}55$ м, то он фиксирует первый интерференционный минимум. Скорость звука $\upsilon = 340$ м/с. Определите частоту звука.

Дано:	*Решение*
$d = 2{,}5$ м $l = 3{,}5$ м $x = 1{,}55$ м $\upsilon = 340$ м/с	Запишем формулу для частоты: $$\nu = \frac{\upsilon}{\lambda}.$$ Скорость υ нам известна, остается найти длину
$\nu = ?$	волны. Воспользуемся условием минимумов для разности хода:

$$\Delta_{min} = s_2 - s_1 = (2m+1)\frac{\lambda}{2};\ m = 0;\ \Delta_{min} = \frac{\lambda}{2}.$$

Из рисунка следует, что:

$$s_1 = \sqrt{l^2 + \left(x - \frac{d}{2}\right)^2},\ s_2 = \sqrt{l^2 + \left(x + \frac{d}{2}\right)^2}.$$



Таким образом, расчетная формула для частоты принимает вид:

$$\nu = \frac{\upsilon}{\lambda} = \frac{\upsilon}{2(s_2 - s_1)} = \frac{\upsilon}{2\left(\sqrt{l^2 + \left(x + \frac{d}{2}\right)^2} - \sqrt{l^2 + \left(x - \frac{d}{2}\right)^2}\right)}.$$

Проведя по ней вычисления, получим:

$$\nu = 175 \text{ Гц}.$$

Ответ: $\nu = 175$ Гц.

Пример 6. Труба, длина которой $l = 1$ м, заполнена воздухом и открыта с одного конца. Принимая скорость звука $\upsilon = 340$ м/с, определите, при какой наименьшей частоте в трубе будет возникать стоячая звуковая волна.

Дано:	*Решение*
$\upsilon = 340$ м/с	Так как частота минимальна, то длина волны
$l = 1$ м	должна быть максимальной. Таким образом:
$\nu_0 = ?$	$l = \frac{\lambda}{4}.$

Отсюда:

$$\lambda = 4l.$$

Длина волны:

$$\lambda = \upsilon T = \frac{\upsilon}{\nu_0}.$$

Объединяя формулы, получаем:

$$4l = \frac{\upsilon}{\nu_0}, \; \nu_0 = \frac{\upsilon}{4l}.$$

Подставляя данные величины, находим:

$$\nu_0 = 85 \text{ Гц}.$$

Ответ: $\nu_0 = 85$ Гц.

Пример 7. Определите отношение интенсивностей звуков, если они отличаются по уровню громкости на 2 фон.

Дано:	*Решение*
$\Delta\Gamma = 2$ фон	$\Gamma = 1$ фон – единица уровня громкости.
$\frac{I_1}{I_2} = ?$	Для частоты $\nu = 1000$ Гц: $\Gamma = 1$ фон, если $L = 1$ дБ.
	$\Gamma = 2$ фон, $L = 2$ дБ $= 0{,}2$ Б.

$$L_1 = \lg\frac{I_1}{I_0};\; L_2 = \lg\frac{I_2}{I_0};\; \Delta L = L_1 - L_2 = \lg\frac{I_1}{I_0} - \lg\frac{I_2}{I_0} = \lg\frac{I_1 I_0}{I_0 I_2} = \lg\frac{I_1}{I_2}.$$

$$\Delta L = \lg\frac{I_1}{I_2} = 0{,}2 \text{ Б};\; \frac{I_1}{I_2} = 10^{0{,}2} = 1{,}58.$$

Ответ: $\frac{I_1}{I_2} = 1{,}58.$

Пример 8. Средняя квадратичная скорость $<\upsilon_{кв}>$ молекул двухатомного газа при некоторых условиях составляет 480 м/с. Определите скорость υ распространения звука в газе при тех же условиях.

Дано:	*Решение*
$<\upsilon_{кв}> = 480$ м/с	Запишем формулу для средней квадратичной
$i = 5$	скорости:
$\upsilon = ?$	$$<\upsilon_{кв}> = \sqrt{\frac{3RT}{M}}.$$

Скорость распространения звука в газе:

$$\upsilon = \sqrt{\frac{\gamma RT}{M}},$$

где $\gamma = \frac{C_p}{C_v} = \frac{i+2}{i}.$

Возьмем отношение:

$$\frac{<\upsilon_{кв}>}{\upsilon} = \sqrt{\frac{3}{\gamma}}.$$

Выразим:

$$\upsilon = \sqrt{\frac{i+2}{i}}\frac{<\upsilon_{кв}>}{\sqrt{3}}.$$

Вычисляем и получаем:

$$\upsilon = 328 \text{ м/с}.$$

Ответ: $\upsilon = 328$ м/с.

Пример 9. Два катера движутся навстречу друг другу. С первого катера, движущегося со скоростью $\upsilon_1 = 10$ м/с, посылается ультразвуковой сигнал частотой $\nu_1 = 50$ кГц, который распространяется в воде. После отражения от второго катера сигнал принят первым катером с частотой $\nu_2 = 52$ кГц. Принимая скорость распространения звуковых колебаний в воде равной 1,54 км/с, определите скорость движения второго катера.

Дано:	*Решение*
$\upsilon_1 = 10$ м/с	Частота сигнала при отражении:
$\nu_1 = 50$ кГц $= 5 \cdot 10^4$ Гц	$$\nu_1' = \frac{\upsilon + \upsilon_2}{\upsilon - \upsilon_1}\nu_1 .$$
$\nu_2 = 52$ кГц $= 5{,}2 \cdot 10^4$ Гц	
$\upsilon = 1{,}54$ км/с $= 1540$ м/с	Частота сигнала, принятого первым катером:
$\upsilon_2 = ?$	

$$\nu_2 = \frac{\upsilon + \upsilon_1}{\upsilon - \upsilon_2}\nu_1' .$$

Подставляем ν_1':

$$\nu_2 = \frac{\upsilon + \upsilon_1}{\upsilon - \upsilon_2} \cdot \frac{\upsilon + \upsilon_2}{\upsilon - \upsilon_1}\nu_1 .$$

Преобразуем это выражение:

$$\frac{\upsilon + \upsilon_2}{\upsilon - \upsilon_2} = \frac{\upsilon - \upsilon_1}{\upsilon + \upsilon_1} \cdot \frac{\nu_2}{\nu_1} .$$

Введем обозначение:

$$\frac{\upsilon - \upsilon_1}{\upsilon + \upsilon_1} \cdot \frac{\nu_2}{\nu_1} = b .$$

Итоговая формула:

$$\upsilon_2 = \frac{b-1}{b+1}\upsilon .$$

Вычисляем и получаем:

$$\upsilon_2 = 20{,}2 \text{ м/с}.$$

Ответ: $\upsilon_2 = 20{,}2$ м/с.

Пример 10. Радиолокатор обнаружил в море подводную лодку, отраженный сигнал от которой дошел до него за $t = 36$ мкс. Учитывая, что диэлектрическая проницаемость воды $\varepsilon = 81$, определите расстояние от локатора до подводной лодки.

Дано:	*Решение*
$t = 36$ мкс $= 3{,}6 \cdot 10^{-5}$ с	Расстояние, пройденное сигналом:
$\varepsilon = 81$	$$2s = \upsilon t.$$
$\mu = 1$	Скорость электромагнитной волны в воде:
$s = ?$	$$\upsilon = \frac{c}{n} = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}} .$$

Таким образом, искомое расстояние:

$$s = \frac{ct}{2\sqrt{\varepsilon\mu}}.$$

Вычисляя, находим:

$$s = 600 \text{ м}.$$

Ответ: $s = 600$ м.

Задачи для аудиторной работы

Задача 1. Точка совершает гармонические колебания с периодом $T = 6$ с и начальной фазой, равной нулю. Определите, за какое время, считая от начала движения, точка сместится от положения равновесия на половину амплитуды.

Задача 2. Груз, подвешенный к спиральной пружине, колеблется по вертикали с амплитудой $A = 6$ см. Определите полную энергию E колебаний груза, если жесткость k пружины составляет 500 Н/м.

Задача 3. Точка участвует одновременно в двух гармонических колебаниях, происходящих во взаимно перпендикулярных направлениях и описываемых уравнениями $x = 3 \cos \omega t$ см и $y = 4 \cos \omega t$ см. Определите уравнение траектории точки и вычертите ее с нанесением масштаба.

Задача 4. Определите логарифмический декремент затухания, при котором энергия колебательного контура за $N = 5$ полных колебаний уменьшается в $n = 8$ раз.

Задача 5. Тонкий обруч радиусом $R = 50$ см подвешен на вбитый в стену гвоздь и колеблется в плоскости, параллельной стене. Определите период T колебаний обруча.

Задача 6. Математический маятник длиной $l = 50$ см подвешен в кабине самолета. Определите период T колебаний маятника, если самолет движется: 1) равномерно; 2) горизонтально с ускорением $a = 2{,}5$ м/с^2.

Задача 7. Колебательный контур содержит соленоид, длина которого равна $l = 5$ см, площадь поперечного сечения $S_{\text{кат}} = 1{,}5$ см^2, а число витков $N = 500$, и плоский конденсатор, расстояние между пластинами которого $d = 1,5$ мм, площадь пластин $S = 100$ см^2. Определите циклическую частоту собственных колебаний.

Задача 8. Колебательный контур состоит из катушки индуктивностью $L = 0,1$ Гн и конденсатора емкостью 40 мкФ. Заряд конденсатора $q_m = 3$ мкКл. Пренебрегая сопротивлением контура, найдите: 1) циклическую частоту собственных колебаний; 2) закон изменения силы тока в контуре в зависимости от времени; 3) закон изменения напряжения на конденсаторе в зависимости от времени.

Задача 9. Уравнение изменения со временем разности потенциалов на обкладках конденсатора в колебательном контуре имеет вид: $U = 50 \cos(10^4 \pi t)$ В. Емкость конденсатора равна 0,10 мкФ. Найдите: 1) период колебаний; 2) индуктивность контура; 3) закон изменения со временем силы тока в цепи; 4) длину волны, соответствующую этому контуру.

Задача 10. Катушка, индуктивность которой $L = 30,0$ мкГн, присоединена к плоскому конденсатору с площадью пластин $S = 100$ см^2 и расстоянием между ними $d = 0,1$ мм. Чему равна диэлектрическая проницаемость среды, заполняющей пространство между пластинами, если контур резонирует на волну длиной 750 м?

Билеты для контроля усвоения темы

Билет 1

1. Запишите определения: 1) волнового процесса (волны); 2) пучности стоячей волны; 3) пучности поперечной волны.

2. Запишите: 1) формулу для расчета волнового числа; 2) волновое уравнение, описывающее распространение волн в однородной изотропной среде.

3. Определите разность фаз колебаний двух точек, лежащих на луче и отстоящих друг от друга на расстояние $\Delta l = 1$ м, если длина волны $\lambda = 0,5$ м.

4. Электромагнитная волна с частотой $\nu = 5$ МГц переходит из немагнитной среды с диэлектрической проницаемостью $\varepsilon = 2$ в вакуум. Определите приращение ее длины волны.

Билет 2

1. Запишите определения: 1) упругой гармонической волны; 2) стоячей волны; 3) когерентных волн.

2. Запишите: 1) уравнение плоской бегущей волны; 2) формулу связи между фазовой скоростью V, волновым числом k и циклической частотой ω.

3. Поперечная волна распространяется вдоль упругого шнура со скоростью 15 м/с. Период колебаний точек шнура равен 1,2 с, амплитуда $A = 1$ м. Определите смещение, скорость и ускорение точки, отстоящей от источника волн на расстояние 45 м, в момент времени $t = 4$ с.

4. Определите длину электромагнитной волны в вакууме, на которую настроен колебательный контур, если максимальный заряд на обкладках конденсатора $q_{max} = 50$ нКл, а максимальная сила тока в контуре $I_{max} = 1{,}5$ А. Активным сопротивлением контура пренебречь.

Билет 3

1. Запишите определения: 1) длины волны; 2) волнового пакета; 3) биений.

2. Запишите: 1) уравнение стоячей волны; 2) формулу, выражающую волновое число.

3. Определите скорость распространения волны в упругой среде, если разность фаз колебаний двух точек среды $\Delta\varphi$, отстоящих друг от друга на $\Delta x = 10$ см, равна $\pi / 3$. Частота линейных колебаний равна 25 Гц.

4. Длина λ электромагнитной волны в вакууме, на которую настроен колебательный контур, равна 12 м. Пренебрегая активным сопротивлением контура, определите максимальный заряд q_{max} на обкладках конденсатора, если максимальная сила тока в контуре $I_{max} = 1{,}0$ А.

Билет 4

1. Запишите определения: 1) фронта волны; 2) групповой скорости; 3) геометрической разности хода волн.

2. Запишите: 1) уравнение сферической волны; 2) формулу, выражающую длину волны.

3. Поперечная волна распространяется вдоль упругого шнура со скоростью 15 м/с. Период колебаний точек шнура равен 1,2 с, амплитуда $A = 1$ м. Определите: 1) длину волны; 2) фазу колебаний; 3) разность фаз колебаний двух точек, лежащих на одном луче и отстоящих друг от друга на расстояние 20 м.

4. Радиолокатор обнаружил в море подводную лодку, отраженный сигнал от которой дошел до него за $\Delta t = 36$ мкс. Учитывая, что диэлектрическая проводимость воды $\varepsilon = 81$, определите расстояние от локатора до подводной лодки.

Билет 5

1. Запишите определения: 1) волновой поверхности; 2) оптической разности хода волн; 3) узла стоячей волны.

2. Запишите формулы: 1) связи между групповой и фазовой скоростями; 2) амплитуды стоячей волны.

3. Задано уравнение плоской волны $\xi(x, t) = A\,cos(\omega t - kx)$, где $A = 0{,}5$ см, $\omega = 628$ с$^{-1}$, $k = 2$ с$^{-1}$. Определите максимальные значения скорости и ускорения колебаний частиц среды.

4. Рассмотрите суперпозицию двух плоских монохроматических электромагнитных волн с одинаковыми $\vec{E}_0$, распространяющихся вдоль оси x в противоположных направлениях. Начальную фазу прямой и обратной волн принять равной 0. Запишите уравнение стоячей волны. Определите координаты пучностей и узлов для вектора напряженности $\vec{E}$.

Билет 6

1. Запишите определения: 1) фазовой скорости; 2) бегущей волны; 3) интерференционного минимума.

2. Запишите: 1) дифференциальное уравнение вынужденных электромагнитных колебаний; 2) формулу, определяющую координаты пучностей стоячей волны.

3. Поперечная волна распространяется вдоль упругого шнура со скоростью 15 м/с. Период колебаний точек шнура равен 1,2 с, амплитуда $A = 1{,}5$ м. Определите: 1) длину волны; 2) фазу колебаний; 3) разность фаз колебаний двух точек, лежащих на одном луче и отстоящих друг от друга на расстояние 15 м.

4. Рассмотрите суперпозицию двух плоских монохроматических электромагнитных волн с одинаковыми $\vec{H}_0$, распространяющихся вдоль оси x в противоположных направлениях. Начальную фазу прямой и обратной волн принять равной 0. Запишите уравнение стоячей волны. Определите координаты пучностей и узлов для вектора напряженности $\vec{H}$.

Практическое занятие 4
ИНТЕРФЕРЕНЦИЯ СВЕТА

Основные формулы

Скорость света в среде:

$$V = \frac{c}{n}, \tag{4.1}$$

где c – скорость света в вакууме; n – абсолютный показатель преломления среды.

Разность фаз двух когерентных волн:

$$\delta = \frac{2\pi}{\lambda_0}(L_2 - L_1) = \frac{2\pi}{\lambda_0}\Delta, \tag{4.2}$$

где λ_0 – длина волны в вакууме; $\Delta = S_2 - S_1$ – оптическая разность хода двух световых волн; $S = L_n$ – оптическая длина пути (L – геометрическая длина пути световой волны в среде).

Условие интерференционных максимумов:

$$\Delta = \pm m\lambda_0 \ (m = 0, 1, 2, ...). \tag{4.3}$$

Условие интерференционных минимумов:

$$\Delta = \pm(2m + 1)\lambda_0 / 2 \ (m = 0, 1, 2, ...). \tag{4.4}$$

Ширина интерференционной полосы:

$$\Delta x = \frac{l}{d}\lambda_0, \tag{4.5}$$

где d – расстояние между двумя когерентными источниками, находящимися на расстоянии l от экрана, параллельного обоим источникам, при условии $l >> d$.

Условия максимумов и минимумов при интерференции света, отраженного от верхней и нижней поверхностей тонкой плоскопараллельной пленки, находящейся в воздухе ($n_0 = 1$):

$$2dn \cdot \cos r \pm \frac{\lambda_0}{2} = 2d\sqrt{n^2 - \sin^2 i} \pm \frac{\lambda_0}{2} = m\lambda_0 \ (m = 0, 1, 2, \ldots); \tag{4.6}$$

$$2dn \cdot \cos r \pm \frac{\lambda_0}{2} = 2d\sqrt{n^2 - \sin^2 i} \pm \frac{\lambda_0}{2} = (2m+1)\frac{\lambda_0}{2} \ (m = 0, 1, 2, \ldots), \tag{4.7}$$

где d – толщина пленки; n – ее показатель преломления; i – угол падения; r – угол преломления.

В общем случае член $\pm\frac{\lambda_0}{2}$ обусловлен потерей полуволны при отражении света от границы раздела: если $n > n_0$, то необходимо употреблять знак минус, а если $n < n_0$ – знак плюс.

Радиусы светлых колец Ньютона в отраженном свете (или темных в проходящем свете):

$$r_m = \sqrt{(m - \frac{1}{2})\lambda_0 R} \ \ (m = 0, 1, 2, \ldots), \tag{4.8}$$

где m – номер кольца; R – радиус кривизны линзы.

Радиусы темных колец Ньютона в отраженном свете (или светлых в проходящем свете):

$$r_m^* = \sqrt{m\lambda_0 R} \ \ (m = 0, 1, 2, \ldots). \tag{4.9}$$

В случае «просветления оптики» интерферирующие лучи в отраженном свете гасят друг друга при условии:

$$n = \sqrt{n_с}\ , \tag{4.10}$$

где $n_с$ – показатель преломления стекла; n – показатель преломления пленки.

Методические указания

Необходимым условием интерференции света является когерентность накладываемых волн. Когерентность – согласованное протекание во времени и пространстве нескольких колебательных или волновых процессов.

Для создания когерентных световых волн (световых пучков) будем использовать два метода:

1) деление падающего пучка на части (деление фронта световой волны) – щели Юнга;
2) деление амплитуды волны (отражение светового пучка от плоскопараллельной пластины или пленки).

Для видимого света $\lambda_0 \approx 10^{-7}$, поэтому четкая, визуально наблюдаемая интерференционная картина будет иметь место при $l >> d$.

Интерференционная картина, создаваемая на экране двумя когерентными монохроматическими источниками света, представляет собой чередование светлых и темных полос, параллельных друг другу.

Главный максимум, соответствующий $m = 0$, проходит через точку O экрана, соответствующую середине расстояния между точечными когерентными источниками. Вверх и вниз (или влево и вправо) от него на равных расстояниях располагаются максимумы (минимумы) первого $m = \pm 1$, второго $m = \pm 2$ порядков и т. д.

Интерференционная картина от белого света (белый свет представляет собой непрерывный набор длин волн от 0,39 до 0,75 мкм) будет иметь вид радужных полос. В центре экрана будет наблюдаться белая полоса, а по обе стороны от нее симметрично расположатся спектрально окрашенные полосы максимумов первого, второго порядков и т. д. (ближе к белой полосе будут находиться зоны фиолетового цвета, дальше – зоны красного цвета).

По измеренным значениям l, d, Δx, используя формулу

$$\Delta x = \frac{l}{d}\lambda_0,$$

можно рассчитать длину световой волны.

При рассмотрении интерференции света в тонких пленках необходимо учитывать потерю половины длины волны. Если $n > n_0$, то потеря полуволны произойдет в точке отражения и слагаемое $\frac{\lambda_0}{2}$ будет иметь знак минус, а если свет распространяется в оптически более плотной среде и, преломляясь, выходит в оптически менее плотную среду $n > n_0$, то слагаемое $\frac{\lambda_0}{2}$ будет иметь знак плюс.

При решении задач на расчет интерференционной картины от пленки переменной толщины (полосы равной толщины) помним, что вид интерференционной картины будет представлять собой чередующиеся темные и светлые концентрические кольца. Если пространство между плоскопараллельной пластиной и линзой заполнено средой с коэффициентом преломления $n_{\text{ср}}$, то радиусы темных колец Ньютона будут зависеть от коэффициента преломления среды:

$$r_m = \sqrt{\frac{Rm\lambda}{n_{\text{ср}}}}.$$

Примеры решения задач

Пример 1. Определите длину отрезка l_1, на котором укладывается столько же длин волн монохроматического света в вакууме, сколько их укладывается на отрезке l_2 = 5 мм в стекле. Показатель преломления стекла n = 1,5.

Дано:	*Решение*
$n_1 = 1$	Длина волны:
$n_2 = 1{,}5$	$\lambda = VT.$
$l_2 = 5$ мм $= 5 \cdot 10^{-3}$ м	Период:
$\dfrac{l_1}{\lambda_1} = \dfrac{l_2}{\lambda_2}$	$T = \dfrac{1}{\nu},$
$l_1 = ?$	где ν – частота колебаний.

Скорость:

$$V = \lambda v,\ \ \upsilon = \frac{c}{n}. \quad V = \frac{c}{n}.$$

Отсюда следует:

$$\lambda = \frac{c}{nv}.$$

Из условия, что длина отрезка l_1, на котором укладывается столько же длин волн монохроматического света в вакууме, сколько их укладывается на отрезке l_2 в стекле, следует:

$$\frac{l_1}{\lambda_1} = \frac{l_2}{\lambda_2} \ \Rightarrow \ l_1 = l_2\frac{\lambda_1}{\lambda_2} \ \Rightarrow \ l_1 = l_2\frac{n_2}{n_1} = 5 \cdot 10^{-3}\,\frac{1{,}5}{1} = 7{,}5 \text{ мм}.$$

Ответ: 7,5 мм.

Пример 2. Два параллельных световых пучка, отстоящих друг от друга на расстояние d = 5 см, падают на кварцевую призму (n = 1,49) с преломляющим углом α = 25°. Определите оптическую разность хода Δ этих пучков на выходе их из призмы.

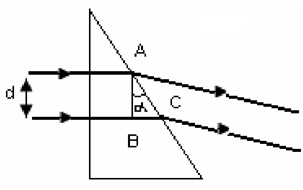
Дано:	*Решение*
$d = 5$ см $= 5 \cdot 10^{-2}$ м	Разность оптического хода определим как
$n = 1{,}49$	$\Delta = (l_2 - l_1)n$ и $\Delta = BC \cdot n,$
$\alpha = 25°$	где n – показатель преломления.
$\Delta = ?$	

Из ΔABC выразим:

$$BC = d \cdot \operatorname{tg}\alpha.$$

Тогда разность хода

$$\Delta = nd \operatorname{tg} \alpha.$$



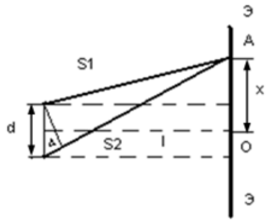
$$\Delta = 1{,}49 \cdot 5 \cdot 10^2 \operatorname{tg} 25^\circ = 3{,}47 \text{ см}.$$

Ответ: 3,47 см.

Пример 3. В опыте Юнга расстояние между щелями d = 1 мм, а расстояние l от щелей до экрана равно 5 м. Определите: 1) положение первой темной полосы; 2) положение третьей светлой полосы, если щели освещать монохроматическим светом с длиной волны λ = 0,5 мкм.

Дано:	*Решение*
$d = 1$ мм $= 10^{-3}$ м	Условие интерференционного максимума:
$l = 5$ м	$\Delta_{max} = \pm m\lambda$ $(m = 0, 1, 2, ...)$.
$\lambda = 0{,}5$ мкм $= 5 \cdot 10^{-7}$ м	Условие интерференционного минимума:
X_{1min} = ? X_{3max} = ?	$\Delta = \pm(2m + 1)\lambda / 2$ $(m = 0, 1, 2, ...)$.

Интенсивность в любой точке экрана, лежащей на расстоянии x от точки O, определяется оптической разностью хода $\Delta = S_2 - S_1$.



Из рисунка имеем:

$$S^2 = l^2 + \left(x + \frac{d}{2}\right)^2;\ S^2 = l^2 + \left(x - \frac{d}{2}\right)^2,$$

откуда

$$S_2^2 - S_1^2 = 2dx \text{ или } \Delta = S_2 - S_1 = \frac{2xd}{(S_1 + S_2)}.$$

Из условия $l >> d$ следует, что

$$S_1 + S_2 \approx 2l,$$

поэтому

$$\Delta = \frac{xd}{l}.$$

Подставив найденное значение оптической разности хода Δ в условие максимума:

$$\frac{xd}{l} = \pm m\lambda,$$

получим, что условие m-го максимума интенсивности:

$$X_{max} \pm m\frac{l}{d}\lambda.$$

Подставляя значение величины Δ в условие минимума:

$$\frac{xd}{l} = \pm(2m+1)\lambda,$$

получим условие m-го минимума интенсивности:

$$X_{\min} \pm \left(m + \frac{1}{2}\right)\frac{l}{d}\lambda.$$

Проведем расчеты для первого интерференционного минимума $m = 1$:

$$X_{1\min} = \pm\left(1 + \frac{1}{2}\right)\frac{l}{d}\lambda = \pm\frac{3}{2}\frac{l}{d}\lambda = \frac{15}{2\cdot 10^{-3}}\cdot 5\cdot 10^{-7} = 3{,}75 \text{ мм},$$

и третьего интерференционного максимума $m = 3$:

$$X_{3\max} = \pm 3\frac{l}{d}\lambda = \frac{15}{10^{-3}}\cdot 5\cdot 10^{-7} = 7{,}5 \text{ мм}.$$

Ответ: 3,75 мм; 7,5 мм.

Пример 4. В опыте с зеркалами Френеля расстояние d между мнимыми изображениями источника света равно 0,5 мм, расстояние l от них до экрана равно 5 м. В желтом свете ширина интерференционных полос равна 6 мм. Определите длину волны желтого света.

Дано:	*Решение*
$d = 0{,}5$ мм $= 5 \cdot 10^{-4}$ м	Условие интерференционного максимума:
$l = 3$ м	$\Delta = \pm m\lambda$ $(m = 0, 1, 2, \ldots)$.
$\Delta x = 6$ мм $= 6 \cdot 10^{-3}$ м	См. пример 3:
$\lambda = ?$	$\frac{xd}{l} = \pm m\lambda$; $X_{\max} = \pm m\frac{l}{d}\lambda$.

Расстояние между двумя соседними максимумами, называемое шириной интерференционной полосы, равно

$$\Delta x = \frac{l}{d}\lambda.$$

Определим длину волны желтого света:

$$\lambda = \frac{\Delta x \cdot d}{l} = 1{,}0 \text{ мкм}.$$

Ответ: 1,0 мкм.

Пример 5. Расстояние между двумя щелями в опыте Юнга $d = 0{,}5$ мм, длина волны падающего света $\lambda = 0{,}4$ мкм. Определите расстояние l от щелей до экрана, если ширина Δx интерференционных полос равна 1,2 м.

Дано:	*Решение*
$d = 0{,}5$ мм $= 5 \cdot 10^{-4}$ м	Условие интерференционного максимума:
$\Delta x = 1{,}2$ мм $= 1{,}2 \cdot 10^{-3}$ м	$\Delta = \pm m\lambda$ $(m = 0, 1, 2, ...)$.
$\lambda = 0{,}4$ мкм $= 4 \cdot 10^{-7}$ м	См. пример 3:
$l = ?$	$\frac{X_{\max} d}{l} = \pm\, m\lambda$.

Получим положение интерференционных максимумов:

$$X_{\max} = \pm\, m \frac{l}{d}\lambda.$$

Расстояние между двумя соседними максимумами, называемое шириной интерференционной полосы, равно

$$\Delta x = \frac{l}{d}\lambda.$$

Определим расстояние l от щелей до экрана:

$$l = \frac{\Delta x \cdot d}{\lambda} = 1{,}5 \text{ м}.$$

Ответ: 1,5 м.

Пример 6. В опыте Юнга расстояние l от щелей до экрана равно 3 м. Определите угловое расстояние между соседними светлыми полосами, если третья светлая полоса на экране отстоит от центра интерференционной картины на 4,5 мм.

Дано:	*Решение*
$m = 3$	Условие интерференционного
$x = 4{,}5$ мм $= 4{,}5 \cdot 10^{-3}$ м	максимума:
$l = 3$ м	$\Delta = \pm m\lambda$.
$\Delta a = ?$	

См. пример 3:

$$\frac{xd}{l} = m \;\; (m = 0, 1, 2, \ldots).$$

Так как α является малым углом по величине:

$$\alpha \approx \operatorname{tg}\alpha = \frac{x}{l} = \frac{m\lambda}{d}.$$

Определим угловое расстояние между соседними светлыми полосами:

$$\Delta\alpha = \frac{m\lambda}{d} - \frac{(m-1)\lambda}{d} = \frac{\lambda}{d} = \frac{x}{ml} = 5 \cdot 10^{-4} \text{ рад}.$$

Ответ: $5 \cdot 10^{-4}$ рад.

Пример 7. Если в опыте Юнга на пути одного из интерферирующих лучей поместить перпендикулярно этому лучу тонкую стеклянную пластинку (n = 1,5), то центральная светлая полоса смещается в положение, первоначально занимаемое пятой светлой полосой. Длина волны λ = 0,5 мкм. Определите толщину пластинки.

Дано:	*Решение*
$n = 1{,}5$	Определим оптическую разность хода:
$m = 5$	$\Delta = nd - d = d(n-1)$, $\Delta = m\lambda$.
$\lambda = 0{,}5$ мкм $= 5 \cdot 10^{-7}$ м	Отсюда
$d = ?$	$m\lambda = d(n-1)$.

Определим толщину пластинки:

$$d = \frac{m\lambda}{n-1}.$$

Произведем расчет:

$$d = \frac{5 \cdot 5 \cdot 10^{-7}}{1{,}5-1} = 5 \text{ мкм}.$$

Ответ: 5 мкм.

Пример 8. Определите, во сколько раз изменится ширина интерференционных полос на экране в опыте с зеркалами Френеля, если фиолетовый светофильтр (λ_1 = 0,4 мкм) заменить оранжевым (λ_2 = 0,6 мкм).

Дано:	*Решение*
$\lambda_1 = 0{,}4$ мкм	Условие интерференционного максимума:
$\lambda_2 = 0{,}6$ мкм	$\Delta = \pm m\lambda$ (m = 0, 1, 2, ...).
$\dfrac{\Delta x_1}{\Delta x_2} = ?$	См. пример 3: $\dfrac{xd}{l} = \pm m\lambda$.

Максимумы интенсивности определяются по формуле

$$X = \pm m \frac{l}{d}\lambda.$$

Ширину интерференционных полос на экране определим как

$$\Delta x = \frac{ml\lambda}{d} - \frac{(m-1)l\lambda}{d} = \frac{l\lambda}{d}.$$

Тогда

$$\frac{\Delta x_1}{\Delta x_2} = \frac{\lambda_2}{\lambda_1} = \frac{0{,}6}{0{,}4} = 1{,}5.$$

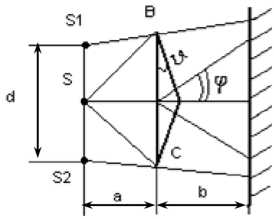
Ответ: 1,5.

Пример 9. Расстояния от бипризмы Френеля до узкой щели и экрана соответственно равны a = 30 см и b = 1,5 м. Бипризма стеклянная (n = 1,5) с преломляющим углом $\vartheta = 20'$. Определите длину волны света, если ширина интерференционных полос Δx = 0,65 мм.

Дано:	*Решение*
$\vartheta = 20'$	Из рисунка:
a = 30 см = 0,3 м	$\varphi = (n-1)\vartheta$; $\Delta x = \dfrac{l\lambda}{d}$; $\lambda = \dfrac{\Delta x \cdot d}{l}$; $l = a + b$.
b = 1,5 м	Найдем d из двух треугольников ΔSS_1B
n = 1,5	и ΔCS_2S:
Δx = 0,65 мм = $6{,}5 \cdot 10^{-4}$ м	$d = 2a \cdot \sin\varphi = 2a\varphi = 2a(n-1)\vartheta.$
λ = ?	

Найдем длину волны света:

$$\lambda = \frac{2a(n-1)\vartheta \cdot \Delta x}{a+b}.$$



Вычисления:

$\vartheta = 20' = 20 \cdot 2{,}91 \cdot 10^{-4} = 5{,}82 \cdot 10^{-3}$ рад.

Определим длину волны света:

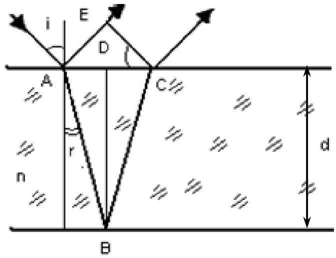
$$\lambda = \frac{2 \cdot 30 \cdot 10^{-2}\ \text{м} \cdot 0{,}5 \cdot 5{,}82 \cdot 10^{-3}\ \text{рад} \cdot 0{,}65 \cdot 10^{-3}\ \text{м}}{(1{,}5 + 0{,}3)\ \text{м}} = 6{,}3 \cdot 10^{-7}\,\text{м}.$$

Ответ: $6{,}3 \cdot 10^{-7}$ м.

Пример 10. На плоскопараллельную пленку с показателем преломления n = 1,33 под углом i = 45° падает параллельный пучок белого света. Определите, при какой наименьшей толщине пленки зеркально отраженный свет наиболее сильно окрасится в желтый цвет (λ = 0,6 мкм).

Дано:	*Решение*
n = 1,33	Условие интерференционного максимума:
i = 45°	$\Delta = \pm m\lambda$ (m = 0, 1, 2, ...).
λ = 0,6 мкм = $6 \cdot 10^{-7}$ м	Оптическая разность хода:
d = ?	$\Delta = (AB + BC)n - \left(AE - \dfrac{\lambda}{2}\right).$

Из ΔADB и ΔBCD:



$$AB = BC = \frac{d}{\cos r};\ AD = d \cdot \text{tg}\, r;$$

$$AE = 2d \cdot \text{tg}\, r \cdot \sin i.$$

Из ΔAEC:

$$AE = AC \cdot \sin i.$$

$$\Delta ABD = \Delta DBC \Rightarrow$$

$$\Rightarrow AD = DC \Rightarrow AC = 2AD.$$

Подставим найденные значения:

$$\Delta = \frac{2dn}{\cos r} - 2d \cdot \text{tg}\, r \cdot \sin i + \frac{\lambda}{2}.$$

По закону преломления света:

$$\frac{\sin i}{\sin r} = n;\ \text{tg}\, r = \frac{\sin r}{\cos r}.$$

Произведем замену:

$$\frac{2d}{\cos r}(n - \sin r \cdot \sin i) + \frac{\lambda}{2} = \lambda\ (m = 1).$$

Произведем преобразования:

$$\frac{2d}{\cos r}\left(n - \sin^2 r \frac{\sin i}{\sin r}\right) = \frac{\lambda}{2};$$

$$\frac{2dn}{\cos r}(1 - \sin^2 r) = \frac{\lambda}{2};\ \frac{2dn}{\cos r}\cos^2 r = \frac{\lambda}{2};$$

$$2dn \cdot \cos r = \frac{\lambda}{2};\ d = \frac{\lambda}{4n \cdot \cos r};\ \cos r = \sqrt{1 - \sin^2 r} = \frac{1}{n}\sqrt{n^2 - \sin^2 i}.$$

Определим толщину пленки:

$$d = \frac{\lambda}{4\sqrt{n^2 - \sin^2 i}} = \frac{6 \cdot 10^{-7}}{4\sqrt{1{,}33^2 - \sin^2 45}} = 133 \text{ нм}.$$

Ответ: 133 нм.

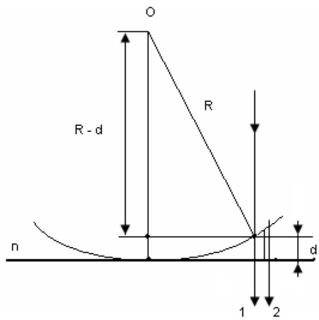
Пример 11. Установка для наблюдения колец Ньютона освещается монохроматическим светом с длиной волны $\lambda = 0{,}6$ мкм, падающим нормально. Пространство между линзой и стеклянной пластинкой заполнено жидкостью, и наблюдение ведется в проходящем свете. Радиус кривизны линзы $R = 4$ м. Определите показатель преломления жидкости, если радиус второго светлого кольца $r = 1{,}8$ мм.

Дано:	*Решение*
$r = 1{,}8$ мм $= 1{,}8 \cdot 10^{-7}$ м	Условие интерференционного максимума:
$R = 4$ м	$\Delta = \pm\, m\lambda$ $(m = 2)$.
$m = 2$	Радиусы светлых колец Ньютона:
$\lambda = 0{,}6$ мкм $= 6 \cdot 10^{-7}$ м	$r_m = \sqrt{R^2 - (R-d)^2} \approx \sqrt{2Rd}$.
$n = ?$	

Потеря полуволны происходит на обеих поверхностях, следовательно, условие максимума

$$2dn = m\lambda,$$

где nd – оптическая толщина пленки.



$$\Delta = 2dn;\ d = \frac{r^2}{2R};\ n = \frac{\Delta}{2d}.$$

Определим показатель преломления жидкости:

$$n = \frac{m\lambda}{2d}.$$

Выразим показатель преломления:

$$n = \frac{m\lambda \cdot 2R}{2r^2} = \frac{mR\lambda}{r^2} = \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 10^{-7}}{(1{,}8 \cdot 10^{-7})^2} = 1{,}48.$$

Ответ: 1,48.

Пример 12. Установка для наблюдения колец Ньютона освещается монохроматическим светом, падающим нормально. При заполнении пространства между линзой и стеклянной пластинкой прозрачной жидкостью радиусы темных колец в отраженном свете уменьшились в 1,21 раза. Определите показатель преломления жидкости.

Дано:	*Решение*
$\frac{r_1}{r_2} = 1{,}21$	Условие интерференционного минимума:
	$\Delta = \pm(2m + 1)\lambda/2$.
$n = ?$	Радиусы темных колец Ньютона:
	$r_m \approx \sqrt{2Rd}$.

Оптическая разность хода:

$$\Delta = 2dn + \frac{\lambda}{2},$$

где nd – оптическая толщина пленки.

Отсюда

$$2dn+\frac{\lambda}{2}=(2m+1)\frac{\lambda}{2}.$$

Выражаем толщину пленки:

$$d=\frac{m\lambda}{2n}.$$

Радиус m-го кольца Ньютона:

$$r_m=\sqrt{\frac{2Rm\lambda}{2n}=\sqrt{\frac{Rm\lambda}{n}}}.$$

Отсюда

$$r_1=\sqrt{Rm\lambda};\ r_2=\sqrt{\frac{Rm\lambda}{n}}\ \frac{r_1}{r_2}=\sqrt{n}.$$

Определим показатель преломления жидкости:

$$n=\left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2=1{,}21^2=1{,}46.$$

Ответ: 1,46.

Задачи для аудиторной работы

Задача 1. В опыте Юнга отверстия освещались монохроматическим светом с длиной волны $\lambda = 6 \cdot 10^{-7}$ м, расстояние между отверстиями $d = 1$ мм и расстояние от отверстия до экрана $l = 3$ м. Найдите координаты двух первых светлых и двух первых темных полос.

Задача 2. Во сколько раз увеличится расстояние между соседними интерференционными полосами на экране в опыте Юнга, если зеленый светофильтр ($\lambda = 500$ нм) заменить красным ($\lambda = 650$ нм)?

Задача 3. Когда в опыте Юнга на пути одного из интерферирующих лучей помещалась перпендикулярно этому лучу тонкая стеклянная пластинка ($n = 1{,}5$), то центральная светлая полоса смещалась в положение, первоначально занимаемое пятой светлой полосой. Длина волны $\lambda = 0{,}6$ мкм. Определите толщину пластинки.

Задача 4. Установка для получения колец Ньютона освещается монохроматическим светом. Наблюдение ведется в отраженном свете. Радиусы двух соседних темных колец равны соответственно

4,0 и 4,38 мм. Радиус кривизны линзы равен 6,4 м. Найдите порядковые номера колец и длину волны падающего света.

Задача 5. Установка для наблюдения колец Ньютона освещается белым светом (λ = 0,55 мкм), падающим нормально. Найдите: 1) радиус четвертого синего кольца (λ_1 = 0,4 мкм); 2) радиус третьего красного кольца (λ_2 = 0,63 мкм). Наблюдение проводится в проходящем свете. Радиус кривизны линзы равен R = 5 м.

Задача 6. Расстояние между пятым и двадцать пятым светлыми кольцами Ньютона равно 9 мм. Радиус кривизны линзы равен R = 15 м. Найдите длину волны монохроматического света, падающего нормально на установку. Наблюдение ведется в отраженном свете.

Задача 7. Найдите расстояние между третьим и шестнадцатым темными кольцами Ньютона, если расстояние между вторым и двадцатым темными кольцами равно 4,8 мм. Наблюдение ведется в отраженном свете.

Задача 8. В установке для наблюдения колец Ньютона пространство между линзой и стеклянной пластинкой заполнено жидкостью. Определите показатель преломления жидкости, если радиус третьего светлого кольца получился равным 3,65 мм. Наблюдение ведется в проходящем свете. Радиус кривизны линзы равен R = 10 м. Длина волны света 598 нм.

Задача 9. Плосковыпуклая линза с радиусом кривизны 4 м выпуклой стороной лежит на стеклянной пластине. Определите длину волны падающего света, если радиус пятого светлого кольца в отраженном свете равен 3 мм.

Задача 10. Плосковыпуклая линза с радиусом кривизны 1,25 м выпуклой стороной лежит на стеклянной пластине. Диаметр десятого темного кольца Ньютона в отраженном свете равен 1 мм. Определите длину световой волны.

Билеты для контроля усвоения темы

Билет 1

1. Запишите определения: 1) интерференции световых волн (света); 2) геометрической разности хода.

2. Запишите формулу, определяющую: 1) координату m-го максимума интенсивности света при интерференции; 2) интенсивность света, прошедшего через две пластинки турмалина.

3. Установка для наблюдения колец Ньютона в отраженном свете освещается монохроматическим светом, падающим нормально. После того как пространство между линзой и стеклянной пластинкой заполнили жидкостью, радиусы темных колец уменьшились в 1,25 раза. Найдите показатель преломления жидкости.

Билет 2

1. Запишите: 1) определение оптической длины пути; 2) как можно создать условия, необходимые для возникновения интерференции световых волн.

2. Запишите формулу, определяющую: 1) ширину интерференционной полосы; 2) связь разности фаз колебаний при интерференции с оптической разностью хода.

3. В опыте Юнга на пути одного из интерферирующих лучей помещалась тонкая стеклянная пластинка, вследствие чего центральная светлая полоса смещалась в положение, первоначально занятое пятой светлой полосой (не считая центральной). Луч падает на пластинку перпендикулярно. Показатель преломления пластинки 1,5. Длина волны $6 \cdot 10^{-7}$ м. Какова толщина пластинки?

Билет 3

1. Запишите: 1) необходимое условие интерференции волн; 2) один из способов получения когерентных волн.

2. Запишите формулы, определяющие: 1) максимум интенсивности света при интерференции; 2) радиус m-го темного кольца Ньютона в отраженном свете.

3. Кольца Ньютона образуются между плоским стеклом и линзой с радиусом кривизны $R = 8{,}6$ м. Монохроматический свет падает нормально. Измерениями установлено, что диаметр четвертого тем-

ного кольца (считать центральное темное пятно за нулевое) равен 9 мм. Найдите длину волны падающего света.

Билет 4

1. Объясните: 1) почему интерференцию можно наблюдать от двух лазеров и нельзя от двух электроламп; 2) что такое полосы равной толщины; где они локализованы.

2. Запишите формулы, определяющие: 1) минимумы интенсивности света при явлении интерференции; 2) радиус m-го светлого кольца Ньютона в отраженном свете.

3. Во сколько раз увеличится расстояние между соседними интерференционными полосами на экране в опыте Юнга, если зеленый светофильтр ($\lambda = 500$ нм) заменить красным ($\lambda = 650$ нм)?

Билет 5

1. Запишите определение: 1) полос равного наклона; 2) групповой скорости волнового пакета; 3) пучностей стоячей волны.

2. Запишите формулы, определяющие: 1) радиус m-го темного кольца Ньютона в проходящем свете; 2) разность фаз колебаний, возбуждаемых в точке наблюдения при наложении двух когерентных волн.

3. Расстояние между пятым и двадцать пятым светлыми кольцами Ньютона равно 9 мм. Радиус кривизны линзы 15 м. Найдите длину волны монохроматического света, падающего нормально на установку. Наблюдение ведется в отраженном свете.

Билет 6

1. Запишите определения: 1) полос равной толщины; 2) интенсивности света.

2. Запишите формулы, определяющие: 1) координату m-го минимума интенсивности света при интерференции; 2) связь между шириной интерференционной полосы, расстоянием меду двумя щелями и длиной волны.

3. В опыте Юнга расстояние между щелями равно 0,8 мм. На каком расстоянии от щелей следует расположить экран, чтобы ширина интерференционной полосы оказалась равной 2 мм?

Практическое занятие 5
ДИФРАКЦИЯ СВЕТА. ПОЛЯРИЗАЦИЯ СВЕТА

Основные формулы

Радиус внешней границы m-й зоны Френеля для сферической волны:

$$r_m = \sqrt{\frac{ab}{a+b}m\lambda}, \qquad (5.1)$$

где m – номер зоны Френеля; λ – длина волны; a и b – соответственно расстояния диафрагмы с круглым отверстием от точечного источника и от экрана, на котором дифракционная картина наблюдается.

Условия дифракционных максимумов и минимумов от одной щели, на которую свет падает нормально:

$$a \cdot \sin\varphi = \pm(2m+1)\frac{\lambda}{2}; \qquad (5.2)$$

$$a \cdot \sin\varphi = \pm 2m\frac{\lambda}{2} \ (m = 1, 2, 3, \ldots), \qquad (5.3)$$

где a – ширина щели; φ – угол дифракции; m – порядок спектра; λ – длина волны.

Условия главных максимумов и дополнительных минимумов дифракционной решетки, на которую свет падает нормально:

$$d \cdot \sin\varphi = \pm 2m\frac{\lambda}{2} \ (m = 0, 1, 2, \ldots); \qquad (5.4)$$

$$d \cdot \sin\varphi = \pm m'\frac{\lambda}{N} \ (m' = 1, 2, 3, \ldots, \text{кроме } 0, N, 2N, \ldots), \qquad (5.5)$$

где d – период дифракционной решетки; N – число штрихов решетки.

Период дифракционной решетки:

$$d = \frac{1}{N_0}, \qquad (5.6)$$

где N_0 – число щелей, приходящихся на единицу длины решетки.

Условие дифракционных максимумов от пространственной решетки (формула Вульфа – Брэггов):

$$2d \cdot \sin\theta = m\lambda \ (m = 1, 2, 3, \ldots), \qquad (5.7)$$

где d – расстояние между атомными плоскостями кристалла; θ – угол скольжения.

Наименьшее угловое расстояние между двумя светлыми точками, при котором изображения этих точек могут быть разрешены в фокальной плоскости объектива:

$$\varphi \ge 1{,}22 \lambda / D, \tag{5.8}$$

где D – диаметр объектива; λ – длина волны света.

Разрешающая способность дифракционной решетки:

$$R = \frac{\lambda}{\delta\lambda} = mN, \tag{5.9}$$

где λ, $(\lambda + \delta\lambda)$ – длины волн двух соседних спектральных линий, разрешаемых решеткой; m – порядок спектра; N – общее число штрихов решетки.

Степень поляризации света:

$$P = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}}, \tag{5.10}$$

где $I_{\max}$ и $I_{\min}$ – соответственно максимальная и минимальная интенсивности частично поляризованного света, пропускаемого анализатором.

Закон Малюса:

$$I = I_0 \cos^2 \alpha, \tag{5.11}$$

где I – интенсивность плоскополяризованного света, прошедшего через анализатор; I_0 интенсивность плоскополяризованного света, падающего на анализатор; α – угол между главными плоскостями поляризатора и анализатора.

Интенсивность света, прошедшего через два поляризатора, при условии, что на первый поляризатор падает естественный свет:

$$I = \frac{1}{2} I_{\text{ест}} \cos^2 \alpha. \tag{5.12}$$

Закон Брюстера:

$$\operatorname{tg} i_{\text{В}} = n_{21}, \tag{5.13}$$

где $i_{\text{В}}$ угол падения, при котором отраженный от диэлектрика луч является плоскополяризованным; n_{21} – относительный показатель преломления.

Оптическая разность хода между обыкновенным и необыкновенным лучами на пути l в ячейке Керра:

$$\Delta = l(n_0 - n_e) = \kappa l E^2, \tag{5.14}$$

где n_0, n_e – показатели преломления соответственно обыкновенного и необыкновенного лучей в направлении, перпендикулярном оптической оси; E – напряженность электрического поля; к – постоянная.

Оптическая разность хода для пластинки в четверть волны

$$\Delta = (n_0 - n_e)d = \pm\left(m + \frac{1}{4}\right)\lambda_0 \ (m = 0, 1, 2, \ldots), \tag{5.15}$$

где знак плюс соответствует отрицательным кристаллам, минус – положительным; λ_0 – длина волны в вакууме.

Угол поворота плоскости поляризации:

– для оптически активных кристаллов и чистых жидкостей:

$$\varphi = \alpha \cdot d; \tag{5.16}$$

– для оптически активных растворов:

$$\varphi = [\alpha]C \cdot d, \tag{5.17}$$

где d – длина пути, пройденного светом в оптически активном веществе; $[\alpha]$ удельное вращение; C – массовая концентрация оптически активного вещества в растворе.

Разрешающая способность объектива:

$$R = \frac{1}{\delta\varphi} = \frac{D}{1{,}22\lambda}, \tag{5.18}$$

где D – диаметр объектива; λ – длина волны света.

Разрешающая способность спектрального прибора:

$$R = \frac{\lambda}{\delta\lambda}, \tag{5.19}$$

где $\delta\lambda = (\lambda_2 - \lambda_1)$ – абсолютное значение минимальной разности длин волн двух соседних спектральных линий, при которой эти линии наблюдаются раздельно.

Разрешающая способность дифракционной решетки:

$$R_{\text{диф.реш}} = mN, \tag{5.20}$$

где m – порядок спектра; N – число щелей.

Методические указания

При рассмотрении дифракции Френеля на круглом отверстии если отверстие открывает нечетное число зон Френеля, то амплитуда в точке наблюдения будет больше, чем при свободном распространении световой волны. Если отверстие открывает четное число зон Френеля, то в точке наблюдения амплитуда (интенсивность) будет равна нулю.

При рассмотрении дифракции Френеля на диске если диск закрывает первые m зон Френеля, то в точке наблюдения всегда будет интерференционный максимум (светлое пятно), соответствующий половине действия первой открытой зоны Френеля. Центральный максимум окружен концентрическими с ним темными и светлыми кольцами, а интенсивность в максимумах убывает с расстоянием от центра.

При рассмотрении дифракции на дифракционной решетке необходимо помнить, что чем больше щелей N, тем больше световой энергии пройдет через решетку. Так как модуль $\sin\varphi \leq 1$, то число главных максимумов $m \leq \frac{d}{l}$, т. е. определяется отношением периода решетки к длине волны.

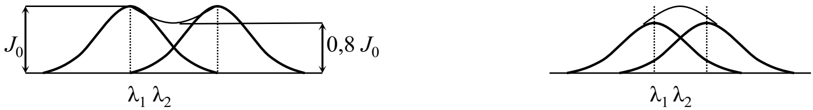
Положение главных максимумов зависит от длины волны (см. условия главных максимумов). Поэтому при пропускании белого света через решетку все максимумы, кроме центрального, разложатся в спектр, фиолетовая область которого будет обращена к центру дифракционной картины, а красная – наружу.

При решении задач на явление поляризации следует учитывать, какой свет падает на поляроид. Если на два поляризатора, главные плоскости которых составляют угол α, падает естественный свет, то из первого поляризатора выйдет плоскополяризованный свет, интенсивность которого в два раза меньше интенсивности естественного света.

Изображение любой светящейся точки в монохроматическом свете представляет собой дифракционную картину, т. е. источник отображается в виде центрального светлого кольца, окруженного чередующимися темными и светлыми кольцами.

Изображения двух близлежащих одинаковых точечных источников или двух близлежащих спектральных линий с равными интенсивностями и одинаковыми симметричными контурами разрешимы, если выполняется критерий Рэлея.

Критерий Рэлея (рис. 2): изображение двух близлежащих одинаковых точечных источников или двух близлежащих спектральных линий с равными интенсивностями и одинаковыми симметричными контурами разрешимы (разделимы для восприятия), если центральный максимум дифракционной картины от одного источника (линии) совпадает с первым минимумом дифракционной картины от другого.



а) *б*)

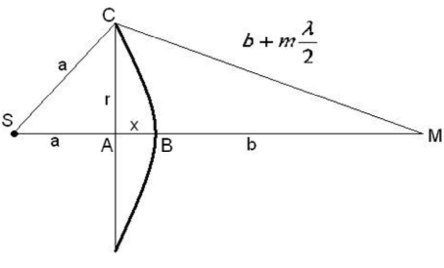
Рис. 2. Критерий Рэлея:
а – два источника разрешимы; *б* – источники неразрешимы

Примеры решения задач

Пример 1. Точечный источник света (λ = 0,5 мкм) расположен на расстоянии a = 1 м перед диафрагмой с круглым отверстием диаметром d = 2 мм. Определите расстояние b от диафрагмы до точки наблюдения, если отверстие открывает 3 зоны Френеля.

Дано:	*Решение*
$\lambda = 0{,}5$ мкм $= 5 \cdot 10^{-7}$ м	Рассмотрим треугольник *SCA*, его сторону
$a = 1$ м	*AC* можно легко найти по теореме Пифаго-
$d = 2$ мм $= 2 \cdot 10^{-3}$ м	ра, она же является радиусом отверстия:
$m = 3$	$$r^2 = a^2 - (a - x)^2,$$
$b = ?$	

где r – радиус отверстия; a – расстояние между диафрагмой и отверстием; x – высота сферического сегмента.



С другой стороны, *AC* можно найти из треугольника *ACM*:

$$r^2 = \left(b + m\frac{\lambda}{2}\right)^2 - (b + x)^2,$$

где $\left(b + m\frac{\lambda}{2}\right)$ – расстояние от зоны Френеля до точки *M*.

Учитывая, что $\lambda << a$, λ – длина волны, a – расстояние от источника света до отверстия, $\lambda << b$, b – расстояние от отверстия до точки наблюдения, можно выразить высоту сферического элемента:

$$x = \frac{bm\lambda}{2(a + b)},$$

$$r^2 = \frac{ab}{a + b}m\lambda - \frac{b^2}{4(a + b)^2}m^2\lambda^2.$$

Так как отверстие мало, то можно считать высоту сферического сегмента пренебрежительно малой величиной

$$\left(\frac{b^2}{4(a + b)^2}m^2\lambda^2\right) \approx 0,$$

тогда квадрат радиуса отверстия равен:

$$r^2 = \frac{ab}{a + b}m\lambda.$$

Выразим расстояние до точки наблюдения:

$$b = \frac{ar^2}{am\lambda - r^2}.$$

Подставив в формулу диаметр:

$$b = \frac{ad^2}{4am\lambda - d^2},$$

получаем:

$$b = \frac{1\,\text{м} \cdot (2 \cdot 10^{-3}\,\text{м})^2}{4 \cdot 1\,\text{м} \cdot 3 \cdot 5 \cdot 10^{-7}\,\text{м} - (2 \cdot 10^{-3}\,\text{м})^2} = 2\,\text{м}.$$

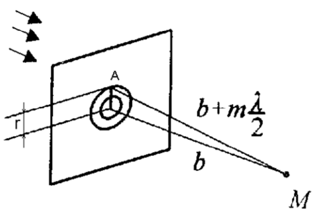
Ответ: $b = 2$ м.

Пример 2. Определите радиус третьей зоны Френеля для случая плоской волны. Расстояние от волновой поверхности до точки наблюдения равно 1,5 м. Длина волны $\lambda = 0{,}6$ мкм.

Дано:	*Решение*
$m = 3$	Расстояние от зоны Френеля до точки наблюдения M можно найти как гипотенузу треугольника AOM, где O – центр отверстия.
$b = 1{,}5$ м	
$\lambda = 0{,}6$ мкм $= 6 \cdot 10^{-7}$ м	
$r = ?$	

$$r^2 + b^2 = \left(b + m\frac{\lambda}{2}\right)^2,$$

где λ – длина волны; m – номер зоны Френеля; r – расстояние от центра отверстия до m-й зоны Френеля; b – расстояние от волновой поверхности до точки наблюдения.



Выразим радиус зоны Френеля:

$$r^2 = bm\lambda + \frac{m^2\lambda^2}{4}.$$

Необходимое условие дифракции волн – длина волны значительно меньше расстояния, пройденного ею: $\lambda << b$.

Слагаемое $\frac{m^2\lambda^2}{4}$ пренебрежимо мало, следовательно

$$r = \sqrt{bm\lambda}.$$

$$r = \sqrt{1{,}5\text{ м} \cdot 3 \cdot 6 \cdot 10^{-7}\text{ м}} = 1{,}64\text{ мм}.$$

Ответ: $r = 1{,}64$ мм.

Пример 3. Зонная пластинка дает изображение источника, удаленного от нее на 2 метра, на расстоянии 1 метра от своей поверхности. Где получится изображение источника, если его удалить в бесконечность?

Дано:	*Решение*
$a = 2$ м	Воспользуемся формулой из примера 1: $$r_m^2 = \frac{ab}{a+b}m\lambda.$$
$b = 1$ м	
$a_1 = \infty$	
$b_1 = ?$	

Воспользуемся формулой из примера 2:

$$r_m^2 = mb_1\lambda .$$

Приравняем и выразим b_1:

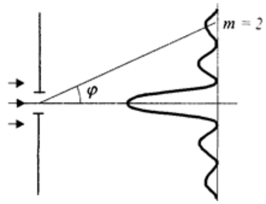
$$b_1 = \frac{ab}{a+b},\ b_1 = \frac{1\,\text{м}\cdot 2\,\text{м}}{1\,\text{м}+2\,\text{м}} = 66{,}7\ \text{см}.$$

Ответ: b_1 = 66,7 см.

Пример 4. На узкую щель шириной a = 0,05 м падает нормально монохроматический свет с длиной волны λ = 694 нм. Определите направление света на вторую дифракционную полосу (по отношению к первоначальному направлению света).

Дано:	Решение
$a = 0{,}05$ м $= 5 \cdot 10^{-5}$ м	Запишем условие дифракционных минимумов:
$\lambda = 694$ нм $= 6{,}94 \cdot 10^{-7}$ м	$$a\cdot\sin\varphi = \pm(2m+1)\frac{\lambda}{2},$$
$m = 2$	
$\varphi = ?$	

где a – ширина щели; λ – длина волны; φ – угол, под которым падает свет; m – номер дифракционного максимума.



Выразим синус угла:

$$\sin\varphi = \frac{(2m+1)\lambda}{2a},$$

$$\sin\varphi = \frac{5\cdot 6{,}94\cdot 10^{-7}\,\text{м}}{2\cdot 5\cdot 10^{-5}\,\text{м}} = 0{,}0347,\ \varphi = \arcsin\varphi = 2°.$$

Ответ: φ = 2°.

Пример 5. На узкую щель падает нормально монохроматический свет. Его направление на четвертую темную дифракционную полосу составляет 2°12′. Определите, сколько длин волн укладывается на ширину щели.

Дано:	Решение
$\varphi = 2°12'$	Запишем формулу для максимумов дифракционной решетки:
$m = 4$	$$a\cdot\sin\varphi = \pm m\lambda\ (m = 4).$$
$\frac{a}{\lambda} = ?$	

Отсюда:

$$\frac{a}{\lambda} = \frac{m}{\sin\varphi},$$

где $\varphi = 2°12' = 2{,}2°$; $\frac{a}{\lambda} = \frac{4}{\sin 2{,}2°} = 104$.

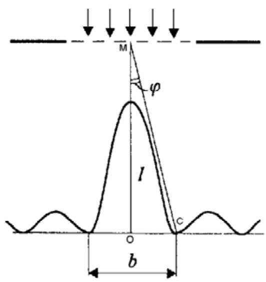
Ответ: $\frac{a}{\lambda} = 104$.

Пример 6. На щель шириной a = 0,1 мм падает нормально монохроматический свет с длиной волны λ = 0,5 мкм. Дифракционная картина наблюдается на экране, расположенном параллельно щели. Определите расстояние l от щели до экрана, если ширина центрального дифракционного максимума b = 1 см.

Дано:	*Решение*
$a = 0{,}1$ мм $= 10^{-4}$ м $\lambda = 0{,}5$ мкм $= 5 \cdot 10^{-7}$ м $b = 1$ см $= 10^{-2}$ м	Запишем формулу для минимумов дифракционной решетки: $a \cdot \sin\varphi = \pm m\lambda,$
$l = ?$	где $m = 1$, $\sin\varphi = \frac{\lambda}{a}$.

Тогда

$$\varphi = \arcsin\frac{\lambda}{a} = \arcsin\frac{5 \cdot 10^{-7}}{10^{-4}} = 0{,}286.$$



ΔMOC прямоугольный, значит, можно найти b:

$$b = 2 \cdot l \cdot \operatorname{tg}\varphi.$$

Следовательно:

$$l = \frac{b}{2 \cdot \operatorname{tg}\varphi}, \quad l = \frac{10^{-2}\ \text{м}}{2 \cdot \operatorname{tg} 0{,}286} = 1\ \text{м}.$$

Ответ: l = 1 м.

Пример 7. На дифракционную решетку нормально падает монохроматический свет с длиной волны λ = 600 нм. Определите наибольший порядок спектра, полученного с помощью этой решетки, если ее постоянная d = 2 мкм.

Дано:	*Решение*
$\lambda = 600$ нм $= 6 \cdot 10^{-7}$ м $d = 2$ мкм $= 2 \cdot 10^{-6}$ м	Запишем формулу максимумов дифракционной решетки:
$m_{max} = ?$	$$d \sin\varphi = m\lambda,$$ где d – период дифракционной решетки.

Наибольший порядок m будет при наибольшем значении $\sin\varphi$. Синус принимает значения: $-1 \le \sin\varphi \le 1$, наибольшее значение равно единице.

Тогда наибольший порядок спектра примет вид:

$$m_{\max} = \frac{d}{\lambda} = \frac{2 \cdot 10^{-6}}{6 \cdot 10^{-7}} = 3{,}33.$$

Порядок спектра может принимать только целые значения, поэтому $m_{max} = 3$.

Ответ: $m_{max} = 3$.

Пример 8. На дифракционную решетку длиной $l = 15$ мм, содержащую $N = 3000$ штрихов, падает нормально монохроматический свет с длиной волны $\lambda = 550$ нм. Определите: 1) число максимумов, наблюдаемых в спектре дифракционной решетки; 2) угол, соответствующий последнему максимуму.

Дано:	*Решение*
$L = 15$ мм $= 1{,}5 \cdot 10^{-2}$ м $N = 3000$ $\lambda = 550$ нм $= 5{,}5 \cdot 10^{-7}$ м	Запишем формулу максимумов дифракционной решетки: $$d \sin\varphi = \pm m\lambda \ (m = 0, 1, 2, ...),$$
$n = ?$ $\varphi_{max} = ?$	где $d = \dfrac{l}{N}$ – период дифракционной решетки; N – число штрихов.

Наибольший порядок:

$$m_{\max} = \frac{d}{\lambda}, \text{ когда } \sin\varphi = 1.$$

Подставим период дифракционной решетки:

$$m_{\max} = \frac{l}{N\lambda}.$$

Общее число максимумов в 2 раза больше числа порядков, так как максимумы располагаются по обе стороны от центра дифракционной картины:

$$n = 2m_{max} = \frac{2l}{N\lambda} = \frac{2 \cdot 1{,}5 \cdot 10^{-2}}{3000 \cdot 5{,}5 \cdot 10^{-7}} = 18.$$

Запишем формулу наибольшего максимума:

$$d \sin\varphi_{max} = m\lambda_{max}.$$

Отсюда

$$\sin\varphi_{max} = \frac{m_{max}\lambda}{d} = \frac{m_{max}\lambda N}{l}.$$

Найдем угол:

$$\varphi_{max} = \arcsin\frac{m_{max}\lambda N}{l}; \ \varphi_{max} = \arcsin\frac{9 \cdot 5{,}5 \cdot 10^{-7}\ \text{м} \cdot 3000}{1{,}5 \cdot 10^{-2}\ \text{м}} = 81°54'.$$

Ответ: $n = 18$; $\varphi_{max} = 81°54'$.

Пример 9. Определите число штрихов на 1 мм дифракционной решетки, если углу $\varphi = 30°$ соответствует максимум 4-го порядка для монохроматического света с длиной волны $\lambda = 0{,}5$ мкм.

Дано:	Решение
$\varphi = 30°$ $m = 4$ $\lambda = 0{,}5$ мкм $= 5 \cdot 10^{-7}$ м	Запишем формулу максимума дифракционной решетки: $d \sin\varphi = \pm m\lambda$,
$n = ?$	где $m = 4$ (порядок спектра).

Выразим период решетки:

$$d = \frac{m\lambda}{\sin\varphi},$$

с другой стороны:

$$d = \frac{l}{N}.$$

Число штрихов на 1 мм равно общему числу штрихов, на длину дифракционной решетки:

$$n = \frac{N}{l}.$$

Заменим N через d:

$$n = \frac{l}{d} = \frac{\sin\varphi}{m\lambda} = \frac{\sin 30°}{4 \cdot 5 \cdot 10^{-7}\ \text{м}} = 250.$$

Ответ: $n = 250$.

Пример 10. Монохроматический свет нормально падает на дифракционную решетку. Определите угол дифракции, соответствующий максимуму четвертого порядка, если максимум третьего порядка отклонен на $\varphi = 18°$.

Дано:	*Решение*
$m_3 = 3$	Запишем формулу максимума дифракционной
$m_4 = 4$	решетки:
$\varphi_3 = 18°$	– для третьего максимума
$\varphi_4 = ?$	$$d \sin \varphi_3 = m_3 \lambda;$$

– для четвертого максимума

$$d \sin \varphi_4 = m_4 \lambda.$$

Для одной и той же решетки период – величина постоянная ($d = \text{const}$), а длина волны λ постоянна по условию, значит:

$$\frac{\sin \varphi_3}{\sin \varphi_4} = \frac{m_3}{m_4}.$$

Выразим синус угла четвертого максимума:

$$\sin \varphi_4 = \frac{m_4}{m_3} \sin \varphi_3.$$

Следовательно:

$$\varphi_4 = \arcsin\left(\frac{m_4}{m_3} \sin \varphi_3\right) = \arcsin\left(\frac{4}{3} \sin 18°\right) = 24°20'.$$

Ответ: $\varphi_4 = 24°20'$.

Пример 11. Определите степень поляризации частично поляризованного света, если амплитуда светового вектора, соответствующая максимальной интенсивности света, в 3 раза больше амплитуды, соответствующей его минимальной интенсивности.

Дано:	*Решение*
$\dfrac{E_{0\max}}{E_{0\min}} = 3$	Применим формулу для степени поляризации:
$P = ?$	$$P = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}},$$

где $I_{\max}$ и $I_{\min}$ – максимальная и минимальная интенсивности частично поляризованного света.

Интенсивность связана с амплитудой соотношением

$$I \sim E_0^2,$$

где E_0 – амплитуда светового вектора.

Произведем замену и подстановку:

$$P = \frac{E_{0\max}^2 - E_{0\min}^2}{E_{0\max}^2 + E_{0\min}^2} = \frac{\left(\dfrac{E_{0\max}^2}{E_{0\min}^2}\right) - 1}{\left(\dfrac{E_{0\max}^2}{E_{0\min}^2}\right) + 1} = \frac{3^2 - 1}{3^2 + 1} = \frac{8}{10} = 0{,}8.$$

Ответ: 0,8.

Пример 12. Степень поляризации частично поляризованного света составляет 0,75. Определите отношение максимальной интенсивности света, пропускаемого анализатором, к минимальной.

Дано:	*Решение*
$P = 0{,}75$	Воспользуемся формулой из примера 1:
$\dfrac{I_{\max}}{I_{\min}} = ?$	$$P = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}},$$

где P – степень поляризации.

Тогда

$$P = \frac{\dfrac{I_{\max}}{I_{\min}} - 1}{\dfrac{I_{\max}}{I_{\min}} + 1}.$$

Сделаем преобразования формулы:

$$\frac{I_{\max}}{I_{\min}} - 1 = P\left(\frac{I_{\max}}{I_{\min}} + 1\right);$$

$$\frac{I_{\max}}{I_{\min}} - 1 = P \cdot \frac{I_{\max}}{I_{\min}} + P; \quad \frac{I_{\max}}{I_{\min}} - P \cdot \frac{I_{\max}}{I_{\min}} = P + 1.$$

В левой части вынесем $\dfrac{I_{\max}}{I_{\min}}$ как общий множитель:

$$\frac{I_{\max}}{I_{\min}}(1 - P) = 1 + P, \qquad \frac{I_{\max}}{I_{\min}} = \frac{1 + P}{1 - P}.$$

Произведем вычисления:

$$\frac{I_{\max}}{I_{\min}} = \frac{1+0{,}75}{1-0{,}75} = \frac{1{,}75}{0{,}25} = 7.$$

Ответ: 7.

Пример 13. Определите степень поляризации *P* света, который представляет собой смесь естественного света с плоскополяризованным, если интенсивность поляризованного света равна интенсивности естественного.

Дано:	*Решение*
$I_п = I_{ест}$	Применим формулу для степени поляризации:
$P = ?$	$P = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}}.$

Найдем значение $I_{\max}$ и $I_{\min}$:

$$I_{\max} = I_п + \frac{1}{2} I_{ест} = I_п + \frac{1}{2} I_п = \frac{3}{2} I_п,$$

где $I_п$ – плоскополяризованный свет; $I_{ест}$ – естественный свет.

$$I_{\min} = \frac{1}{2} I_{ест} = \frac{1}{2} I_п.$$

Подставим найденные значения $I_{\max}$ и $I_{\min}$ в формулу для степени поляризации:

$$P = \frac{\frac{3}{2} I_п - \frac{1}{2} I_п}{\frac{3}{2} I_п + \frac{1}{2} I_п} = \frac{I_п}{2 I_п} = 0{,}5.$$

Ответ: 0,5.

Пример 14. Угол между главными плоскостями поляризатора и анализатора составляет 30°. Определите изменение интенсивности прошедшего через них света, если угол между главными плоскостями равен 45°.

Дано:	*Решение*
$\alpha_1 = 30°$	Закон Малюса в первом случае:
$\alpha_2 = 45°$	$I_1 = I_0 \cos^2 \alpha_1,$
$\frac{I_1}{I_2} = ?$	где I_0 – интенсивность света, упавшего на анализатор; I_1 – интенсивность света, вышедшего из анализатора; α_1 – угол между оптическими осями кристаллов.

Во втором случае закон Малюса:

$$I_2 = I_0 \cos^2 \alpha_2 .$$

Найдем отношение $\dfrac{I_1}{I_2}$:

$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{\cos^2 \alpha_1}{\cos^2 \alpha_2} .$$

Произведем вычисления:

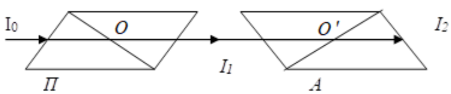
$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{\cos^2 \alpha_1}{\cos^2 \alpha_2} = \frac{\cos^2 30°}{\cos^2 45°} = \frac{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \frac{\frac{3}{4}}{\frac{2}{4}} = \frac{3}{2} = 1{,}5.$$

Ответ: 1,5.

Пример 15. Определите, во сколько раз ослабится интенсивность света, прошедшего через два николя, расположенных так, что угол между их главными плоскостями $\alpha = 60°$, а в каждом из николей теряется 5 % интенсивности падающего на него света.

Дано:	*Решение*
$\alpha = 60°$ $k_1 = k_2 = 0{,}05$ $\dfrac{I_0}{I_2} = ?$	Интенсивность света, прошедшего поляризатор: $I_1 = \dfrac{1}{2} I_0$, где I_0 – интенсивность естественного света; I_1 – интенсивность плоскополяризованного света.

Интенсивность света, прошедшего через поляризатор, с учетом потери интенсивности:



$$I_1 = \frac{1}{2}(1 - k) I_0 = \frac{1}{2} 0{,}9 I_0 .$$

Интенсивность света, прошедшего через анализатор:

$$I_2 = I_1 0{,}9 \cos^2 \alpha = \frac{1}{2} I_0 0{,}9^2 \cos^2 \alpha .$$

Найдем отношение:

$$\frac{I_0}{I_2} = \frac{2}{0{,}9^2 \cos^2 \alpha} .$$

Учитывая, что $\cos 60° = \frac{1}{2}$, получим:

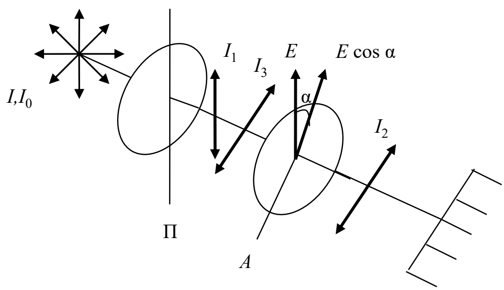
$$\frac{I_0}{I_2} = \frac{2 \cdot 4}{0{,}9^2} = 9{,}88.$$

Ответ: 9,88.

Пример 16. Естественный свет интенсивностью I_0 проходит через поляризатор и анализатор, угол между главными плоскостями которых составляет α. После прохождения света через эту систему он падает на зеркало и, отразившись, проходит вновь через нее. Пренебрегая поглощением света, определите интенсивность I света после его обратного прохождения.

Дано:	*Решение*
α	Интенсивность света, прошедшего поляризатор:
I_0	$I_1 = \frac{1}{2} I_0$,
$I = ?$	

где I_0 – интенсивность естественного света; I_1 – интенсивность плоскополяризованного света.



По закону Малюса интенсивность света, прошедшего через анализатор:

$$I_2 = I_1 \cos^2 \alpha.$$

Подставим предыдущую формулу в закон Малюса и получим:

$$I_2 = \frac{1}{2} I_0 \cos^2 \alpha.$$

Интенсивность света при попадании на зеркало:

$$I_3 = I_2 = \frac{1}{2} I_0 \cos^2 \alpha.$$

Интенсивность света после обратного прохождения:

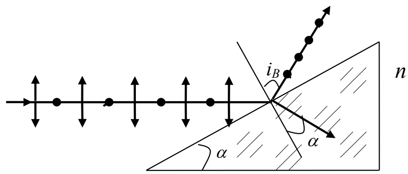
$$I = I_3 \cos^2 \alpha = \frac{1}{2} I_0 \cos^4 \alpha; \qquad I = \frac{1}{2} I_0 \cos^4 \alpha.$$

Ответ: $I = \frac{1}{2} I_0 \cos^4 \alpha.$

Пример 17. Пучок естественного света падает на стеклянную призму с углом $\alpha = 30°$. Определите показатель преломления стекла, если отраженный луч является плоскополяризованным.

Дано:	*Решение*
$\alpha = 30°$	Закон Брюстера:
$n = ?$	$\operatorname{tg} i_В = n_{21} = n,$

где $i_В$ – угол Брюстера; n_{21} – показатель преломления второй среды относительно первой.



По закону Брюстера, отраженный и преломленные лучи взаимно перпендикулярны, следовательно:

$$i_В = \frac{\pi}{2} - \alpha.$$

Вычислим показатель преломления:

$$n = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6}\right) = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{3}\right) = 1{,}73.$$

Ответ: 1,73.

Пример 18. Определите, под каким углом к горизонту должно находиться Солнце, чтобы лучи, отраженные от поверхности озера ($n = 1{,}33$), были максимально поляризованы.

Дано:	*Решение*
$n = 1{,}33$	По закону Брюстера:
$\alpha = ?$	$\operatorname{tg} i_В = n_{21} = n,$

где $i_В$ – угол падения преломленного луча (угол Брюстера); n_{21} – показатель преломления второй среды относительно первой.

$$i_В = \operatorname{arctg}(n) = \operatorname{arctg}(1{,}33) = 53°;$$

$$\alpha = \frac{\pi}{2} - i_В = 90° - 53° = 37°.$$

Ответ: 37°.

Пример 19. Предельный угол полного отражения для пучка света на границе кристалла каменной соли с воздухом равен 40,5°. Определите угол Брюстера при падении света из воздуха на поверхность этого кристалла.

Дано:	*Решение*
$i_{пр} = 40{,}5°$	Используем закон преломления света:
$i_В = ?$	$$\frac{\sin i_{пр}}{\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)} = \frac{n_1}{n_2}.$$

Перепишем формулу с учетом $\left(\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1\right)$:

$$\frac{n_2}{n_1} = \frac{1}{\sin i_{пр}}.$$

По закону Брюстера:

$$\frac{n_2}{n_1} = \operatorname{tg} i_В,$$

где $i_В$ – угол Брюстера.

Приравниваем и получаем:

$$\operatorname{tg} i_В = \frac{1}{\sin i_{пр}} \Rightarrow i_В = \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{\sin i_{пр}}\right).$$

Произведем вычисления:

$$i_В = \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{\sin 40{,}5°}\right) = \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{0{,}65}\right) = \operatorname{arctg}(1{,}54) = 57°.$$

Ответ: 57°.

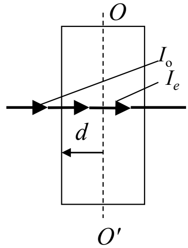
Пример 20. Параллельный пучок света падает нормально на пластинку из исландского шпата толщиной 50 мкм, вырезанную параллельно оптической оси. Принимая показатели преломления исландского шпата для обыкновенного и необыкновенного лучей соответственно $n_0 = 1{,}66$ и $n_e = 1{,}49$, определите разность хода этих лучей, прошедших через пластинку.

Дано:	*Решение*
$d = 50$ мкм $= 5 \cdot 10^{-5}$ м	По определению геометрическая разность хода:
$n_0 = 1{,}66$	$$d \cdot n.$$
$n_e = 1{,}49$	
$\Delta = ?$	

Оптическая разность хода для вырезанной пластинки параллельно оптической оси:

$$\Delta = dn_0 - dn_e = d(n_0 - n_e),$$

где n_0 – показатель преломления обыкновенного луча; n_e – показатель преломления необыкновенного луча; d – толщина пластины; OO' – оптическая ось.



Произведем вычисления:

$$\Delta = 5 \cdot 10^{-5}(1{,}66 - 1{,}49) = 8{,}5 \cdot 10^{-6}\ \text{м} = 8{,}5\ \ \text{мкм}.$$

Ответ: 8,5 мкм.

Пример 21. Плоскополяризованный свет, длина волны которого в вакууме $\lambda = 589$ нм, падает на пластинку исландского шпата перпендикулярно его оптической оси. Принимая показатели преломления исландского шпата для обыкновенного и необыкновенного лучей соответственно $n_0 = 1{,}66$ и $n_e = 1{,}49$, определите длины волн этих лучей в кристалле.

Дано:	*Решение*
$\lambda = 589$ нм $= 5{,}89 \cdot 10^{-7}$ м	Длина световой волны:
$n_0 = 1{,}66$	$\lambda = cT.$
$n_e = 1{,}49$	Для обыкновенного луча:
$\lambda_0 = ?\ \lambda_e = ?$	$\lambda_0 = \upsilon_0 T,$
	где $\upsilon_0 = \dfrac{c}{n_0}.$

Для необыкновенного луча:

$$\lambda_e = \upsilon_e T,$$

где $\upsilon_e = \dfrac{c}{n_e}.$

Выразим период:

$$T = \frac{\lambda}{c},$$

тогда

$$T = \frac{\lambda_0}{c_0}; \qquad T = \frac{\lambda_0}{\upsilon_0} = \frac{\lambda_0 n_0}{c}.$$

Выразим длину волны:

$$\lambda = \frac{c\lambda_0 n_0}{c} = \lambda_0 n_0 \Rightarrow \lambda_0 = \frac{\lambda}{n_0} = \frac{5{,}89 \cdot 10^{-7}}{1{,}66} = 355\ \text{нм}.$$

Аналогично найдем λ_e:

$$\lambda_e = \frac{\lambda}{n_e} = \frac{5{,}89 \cdot 10^{-7}}{1{,}49} = 395 \text{ нм}.$$

Ответ: 355 нм, 395 нм.

Пример 22. Дайте определение кристаллической пластинки «в целую волну» и определите ее наименьшую толщину для $\lambda = 530$ нм, если разность показателей преломления необыкновенного и обыкновенного лучей для данной длины волны $n_e - n_0 = 0{,}01$.

Дано:	*Решение*
$\lambda = 530$ нм $= 5{,}3 \cdot 10^{-7}$ м	Оптическая разность хода для вырезанной
$n_e - n_0 = 0{,}01$	пластинки параллельно оптической оси:
$\Delta = \lambda$	$$\Delta = d_{\min}(n_e - n_0),$$
$d_{\min} = ?$	

где n_0 – показатель преломления обычного света; n_e – показатель преломления естественного света (см. рис. примера 10).

Тогда $\Delta = \lambda$ при $m = 0$.

И получаем:

$$d_{\min}(n_e - n_0) = \lambda.$$

Следовательно

$$d_{\min} = \frac{\lambda}{n_e - n_0}.$$

Произведем вычисление:

$$d_{\min} = \frac{5{,}3 \cdot 10^{-7}}{0{,}01} = 53 \cdot 10^{-6} \text{ м} = 53 \text{ мкм}.$$

Ответ: 53 мкм.

Задачи для аудиторной работы

Задача 1. Точечный источник света ($\lambda = 0{,}5$ мкм) расположен на расстоянии $a = 1{,}5$ м перед диафрагмой с круглым отверстием диаметром $d = 2$ мм. Определите расстояние b от диафрагмы до точки наблюдения, если отверстие открывает 3 зоны Френеля.

Задача 2. Определите радиус четвертой зоны Френеля, если радиус второй зоны Френеля для плоского волнового фронта равен 2 мм.

Задача 3. На дифракционную решетку нормально падает монохроматический свет с длиной волны $\lambda = 0{,}5$ мкм. На экран, находящийся от решетки на расстоянии $L = 1$ м, с помощью линзы, расположенной вблизи решетки, проецируется дифракционная картина, причем первый главный максимум наблюдается на расстоянии $l = 15$ см от центрального. Определите период дифракционной решетки.

Задача 4. На щель падает нормально параллельный пучок монохроматического света с длиной волны λ. Ширина щели равна $6\,\lambda$. Под каким углом будет наблюдаться второй дифракционный минимум света?

Задача 5. Чему равен угол между главными плоскостями поляризатора и анализатора, если интенсивность естественного света, прошедшего через поляризатор и анализатор, уменьшается в 4 раза?

Задача 6. Диаметр D объектива телескопа равен 10 см. Определите наименьшее угловое расстояние φ между двумя звездами, при котором в фокальной плоскости объектива получатся их разрешимые дифракционные изображения. Длина волны света равна $\lambda = 500$ нм.

Задача 7. Интенсивность естественного света, прошедшего через два николя, уменьшилась в 8 раз. Пренебрегая поглощением света, определите угол между главными плоскостями николей.

Задача 8. Определите показатель преломления стекла, если при отражении от него света отраженный луч полностью поляризован при угле преломления 35°.

Билеты для контроля усвоения темы

Билет 1

1. Сформулируйте принцип Гюйгенса – Френеля. При каких условиях наблюдается дифракция Фраунгофера? В чем заключается принцип построения зон Френеля?

2. Запишите формулы: 1) условия главных дифракционных максимумов на пространственной решетке; 2) разрешающей способности объектива.

3. На дифракционную решетку нормально падает монохроматический свет с длиной волны $\lambda = 600$ нм. Определите наибольший порядок спектра, полученный с помощью этой решетки, если ее постоянная $d = 2$ мм.

4. Степень поляризации частично поляризованного света составляет 0,75. Определите отношение максимальной интенсивности света, пропускаемого анализатором, к минимальной.

Билет 2

1. Объясните: 1) почему дифракция не наблюдается на больших отверстиях; 2) почему для получения голограммы кроме предметной волны необходима еще и опорная волна. Сформулируйте критерий Рэлея для разрешения двух одинаковых точечных источников.

2. Запишите формулы, определяющие: 1) наибольший порядок спектра дифракционной решетки; 2) радиус внешней границы m-й плоской зоны Френеля.

3. На дифракционную решетку длиной $l = 15$ мм, содержащую $N = 3000$ штрихов, падает нормально монохроматический свет с длиной волны $\lambda = 550$ нм. Определите: 1) число максимумов, наблюдаемых в спектре дифракционной решетки; 2) угол, соответствующий последнему максимуму.

4. Пучок естественного света падает на стеклянную призму с углом $\alpha = 30°$. Определите показатель преломления стекла, если отраженный луч является плоскополяризованным.

Билет 3

1. Объясните: 1) какой свет называется плоскополяризованным; 2) как рассчитать число зон Френеля, открываемых отверстием. Сформулируйте закон Брюстера.

2. Запишите: 1) формулу Вульфа – Брэггов; 2) условие максимума интенсивности света на дифракционной решетке.

3. Определите число штрихов на 1 мм дифракционной решетки, если углу $\varphi = 30°$ соответствует максимум четвертого порядка для монохроматического света с длиной волны $\lambda = 500$ нм.

4. Определите, под каким углом к горизонту должно находиться Солнце, чтобы лучи, отраженные от поверхности озера ($n = 1,33$), были максимально поляризованы.

Билет 4

1. Дайте определения понятий: 1) естественный свет; 2) поляризованный свет; 3) дифракционная решетка.

2. Запишите: 1) дифференциальное уравнение электромагнитной волны; 2) формулу для расчета массы фотона.

3. Узкий параллельный пучок рентгеновского излучения с длиной волны $\lambda = 245$ пм падает на естественную грань монокристалла каменной соли. Определите расстояние d между атомными плоскостями монокристалла, если дифракционный максимум второго порядка наблюдается при падении излучения к поверхности монокристалла под углом скольжения $\theta = 61^\circ$.

4. Определите степень поляризации частично поляризованного света, если амплитуда светового вектора, соответствующая максимальной интенсивности света, в 3 раза больше амплитуды, соответствующей его минимальной интенсивности.

Билет 5

1. Запишите определения: 1) стоячей волны; 2) оптической разности хода. Почему на кристаллах не наблюдается дифракция видимого света и наблюдается дифракция рентгеновского излучения?

2. Запишите формулы: 1) наибольшего порядка спектра дифракционной решетки; 2) Вульфа – Брэггов.

3. Узкий параллельный пучок рентгеновского излучения падает на грань монокристалла с расстоянием между его атомными плоскостями $d = 0{,}3$ нм. Определите длину волны рентгеновского излучения, если под углом скольжения $\theta = 30^\circ$ к плоскости грани наблюдается дифракционный максимум первого порядка.

4. Интенсивность естественного света, прошедшего через два николя, уменьшилась в 8 раз. Пренебрегая поглощением света, определите угол между главными плоскостями николей.

Билет 6

1. Запишите определения: 1) поляризованного света; 2) критерия Рэлея; 3) молекулярного рассеяния.

2. Запишите формулы: 1) степени поляризации; 2) закона Малюса; 3) разрешающей способности объектива.

3. На дифракционную решетку с постоянной $d = 5$ мкм под углом $\alpha = 30°$ падает монохроматический свет с длиной волны $\lambda = 500$ нм. Определите угол дифракции φ для главного максимума третьего порядка.

4. Определите, во сколько раз ослабится интенсивность света, прошедшего через два николя, расположенных так, что угол между их главными плоскостями $\alpha = 60°$, а в каждом из николей теряется 8 % интенсивности падающего на него света.

Практическое занятие 6
ТЕПЛОВОЕ ИЗЛУЧЕНИЕ

Основные формулы

Энергетическая светимость:

$$R = \frac{dW}{dS \cdot dt}. \tag{6.1}$$

Спектральная плотность энергетической светимости:

$$R_{\nu T} = \frac{dR}{d\nu} = \frac{dW_{\nu,\nu+d\nu}}{d\nu dSdt}. \tag{6.2}$$

Спектральная поглощательная способность:

$$A_{\nu T} = \frac{dW_{\nu,\nu+d\nu}^{\text{погл}}}{dW_{\nu,\nu+d\nu}^{\text{пад}}}. \tag{6.3}$$

Закон Кирхгофа:

$$\frac{R_{\nu T}}{A_{\nu T}} = r_{\nu,T}, \tag{6.4}$$

где $r_{\nu,T}$ – универсальная функция Кирхгофа.

Закон Стефана – Больцмана:

$$R_e = \sigma T^4, \tag{6.5}$$

где R_e – энергетическая светимость абсолютно черного тела (АЧТ); σ – постоянная Стефана – Больцмана, $\sigma = 5{,}67 \cdot 10^{-8}$ Вт/(м^2 · К^4); T – термодинамическая температура.

Закон смещения Вина:

$$\lambda_{\max} = \frac{b}{T}, \tag{6.6}$$

где b – постоянная Вина, $b = 2{,}9 \cdot 10^{-3}$ м · К.

Интегральная энергетическая светимость тела:

$$R_T = \int_0^\infty a_{\omega\, T} r_{\omega\, T}\, d\omega. \tag{6.7}$$

Радиационная температура:

$$T_{\text{рад}} = \sqrt[4]{\frac{R_T}{\sigma}}. \tag{6.8}$$

Цветовая температура:

$$T_{\text{цв}} = \frac{b}{\lambda_{\max}}. \tag{6.9}$$

Связь между радиационной температурой и истинной:

$$T_{\text{рад}} = \sqrt[4]{A_T}\,T, \tag{6.10}$$

где $A_{\text{т}}$ – поглощательная способность серого тела.

Формула Планка для универсальной функции Кирхгофа:

$$r_{\nu,T} = \frac{2\pi\nu^2}{c^2}\frac{h\nu}{e^{\frac{h\nu}{kT}}-1}; \tag{6.11}$$

$$r_{\lambda,T} = \frac{2\pi c^2}{\lambda^5}\frac{1}{e^{\frac{hc}{\lambda kT}}-1}; \tag{6.12}$$

$$f(\omega,T) = \frac{\hbar\omega^3}{4\pi^2 c^2}\frac{1}{e^{\frac{\hbar\omega}{kT}}-1}. \tag{6.13}$$

Методические указания

Известно, что тела, нагретые до достаточно высоких температур, светятся. Свечение тел, обусловленное нагреванием, называется тепловым (температурным) излучением. Тепловое излучение совершается за счет энергии теплового движения атомов и молекул вещества (т. е. за счет внутренней энергии вещества). Оно свойственно всем телам, температура которых выше 0 К. Тепловое излучение характеризуется сплошным спектром, положение максимума которого зависит от температуры. При высоких температурах излучаются короткие (видимые и ультрафиолетовые) электромагнитные волны, а при низких температурах – преимущественно длинные (инфракрасные).

Особенностью теплового излучения является его *равновесность*, т. е. тело в единицу времени излучает столько же энергии, сколько и поглощает.

Тело, способное поглощать полностью при любой температуре всё падающее на него излучение любой частоты, называется *абсолютно черным* (АЧТ). Тело, поглощательная способность которого меньше единицы, но одинакова для всех частот и зависит только от температуры, материала и состояния поверхности, называется *серым* (СТ).

При решении задач на определение характеристик теплового излучения удобно использовать определения его характеристик

(6.1), (6.2), (6.3) и три закона теплового излучения: закон Кирхгофа (6.4), закон Стефана – Больцмана (6.5) и закон смещения Вина (6.6).

При определении температуры нагретых тел с помощью законов теплового излучения принято использовать три вида температур нагретых тел.

Радиационная температура – это такая температура, при которой энергетическая светимость АЧТ равна энергетической светимости исследуемого тела. Для ее расчета используют закон Стефана – Больцмана (6.5). Радиационная температура всегда меньше истинной температуры тела.

Для серых тел или близких к ним по свойствам тел распределение энергии в спектре такое же, как и в спектре АЧТ, имеющего такую же температуру. Поэтому к серым телам применим закон смещения Вина. Зная длину волны, соответствующую максимальной спектральной плотности энергетической светимости исследуемого тела, можно найти температуру, называемую *цветовой температурой*. Для серых тел цветовая температура совпадает с истинной.

Яркостная температура – это температура черного тела, при которой для определенной длины волны его спектральная плотность энергетической светимости равна плотности энергетической светимости исследуемого тела. Истинная температура тела всегда больше яркостной.

Примеры решения задач

Пример 1. Найдите температуру T печи, если известно, что излучение из отверстия в ней площадью S = 6,1 см^2 имеет мощность N = 34,6 Вт. Излучение считать близким к излучению АЧТ.

Дано:	*Решение*
S = 6,1 см^2	По определению:
N = 34,6 Вт	
T = ?	

$$R_э = W / S \cdot t, \quad \text{или} \quad R_э = N / S. \qquad (1)$$

Согласно закону Стефана – Больцмана для АЧТ:

$$R_e = \sigma T^4. \qquad (2)$$

Сравнив (1) и (2), получим:

$$T = \sqrt[4]{N/(S\sigma)}.$$

Проверка единицы измерения:

$$[\,T\,] = \text{К} = \sqrt[4]{\frac{\text{Вт}\cdot\text{м}^2\cdot\text{К}^4}{\text{Вт}\cdot\text{м}^2}} = \text{К}.$$

Расчет:

$$T = \sqrt{\frac{34{,}6}{6{,}1\cdot10^{-4}\cdot5{,}67\cdot10^{-8}}} = 1000\ \text{К}.$$

Ответ: T = 1000 К.

Пример 2. Температура вольфрамовой спирали 25-ваттной электрической лампочки T = 2450 К. Отношение ее энергетической светимости к энергетической светимости АЧТ при данной температуре равно k = 0,3. Найдите площадь излучающей поверхности.

Дано:	*Решение*
N = 25 Вт	Для нечерного тела величина энергетической светимости равна
T = 2450 К	$R_э = k_1 \cdot \sigma \cdot T^4,$
k = 0,3	а по определению
S = ?	$R'_э = N / S.$

Тогда

$$N / S = k \cdot \sigma \cdot T^4,$$

отсюда

$$S = N / \sigma \cdot k \cdot T^4.$$

Проверка единицы измерения:

$$[S] = \text{м}^2 = \text{Вт}\cdot\text{м}^2\cdot\text{К}^4/\text{Вт}\cdot\text{К}^4 = \text{м}^2.$$

Расчет числового значения:

$$S = 0{,}4079\cdot10^{-4}\ \text{м}^2 \approx 0{,}41\ \text{см}^2.$$

Ответ: S = 0,41 см^2.

Пример 3. Какую энергетическую светимость $R_э$ имеет АЧТ, если максимум спектральной плотности его энергетической светимости приходится на длину волны $\lambda = 484$ нм?

Дано:	*Решение*
$\lambda_{max} = 484$ нм	Согласно закону Стефана – Больцмана:
$R_э = ?$	$R_э = \sigma \cdot T^4. \qquad (1)$

Для нахождения T воспользуемся законом Вина:

$$\lambda_m = C_1 / T,$$

отсюда:

$$T = C_1 / \lambda.$$

Получим:

$$R_э = (\sigma \cdot C_1^4) / \lambda^4.$$

Проверка единицы измерения:

$$[R_э] = \text{Вт}/(\text{м}^2 \cdot \text{К}^4) \cdot \text{К}^4 = \text{Дж}/(\text{с} \cdot \text{м}^2).$$

Расчет числового результата:

$$R_э = (5{,}67 \cdot 10^{-8} \cdot 2{,}9^4 \cdot 10^{-12}) / (484)^4 \cdot 10^{-36} =$$
$$= (10^{20} \cdot 5{,}67 \cdot 2{,}9^4) / (484)^4 = 73{,}5 \text{ МВт/м}^2.$$

Ответ: $R_э = 73{,}5$ МВт/м^2.

Пример 4. Абсолютно черное тело имеет температуру $T_1 = 2900$ К. В результате остывания тела длина волны, на которую приходится максимум спектральной плотности энергетической светимости, изменилась на $\Delta\lambda = 9$ мкм. До какой температуры T_2 охладилось тело?

Дано:	*Решение*
$T_1 = 2900$ К	Согласно закону Вина:
$\Delta\lambda = 9$ мкм $= 9 \cdot 10^{-6}$ м	$\lambda_{max1} = C_1 / T_1,$
$T_2 = ?$	$\lambda_{max2} = C_1 / T_2,$
	где T_1 – начальная, а T_2 – конечная температура тела.

Так как тело охлаждается, то $T_2 < T_1$, а $\lambda_{max2} > \lambda_{max1}$; $\lambda_{max2} = \lambda_{max1} + \Delta\lambda$.

Получим:

$$C_1 / \lambda_{max} + \Delta\lambda = T_2,$$

$$T_2 = C_1 / (C_1 / T_1) + \Delta\lambda = 1 / (1 / T_1) + (\Delta\lambda / C_1) = C_1 \cdot T_1 / (\Delta\lambda \cdot T_1 + C_1).$$

Проверка единицы измерения:

$$[T_2] = \text{К} = \text{м} \cdot \text{К/м} = \text{К}.$$

Расчет числового значения: $T_2 = 290$ К.

Ответ: $T_2 = 290$ К.

Пример 5. При нагревании абсолютно черного тела длина волны, на которую приходится максимум спектральной плотности энергетической светимости, изменилась с 690 до 500 нм. Во сколько раз увеличилась при этом энергетическая светимость тела?

Дано:	*Решение*
$\lambda_1 = 690$ нм	По закону Стефана – Больцмана для АЧТ имеем:
$\lambda_2 = 500$ нм	$\begin{cases} R_{Э1} = \sigma T_1^4 \\ R_{Э2} = \sigma T_2^4 \end{cases},$
$R_{э2} / R_{э1} = ?$	

где T_1 и T_2 – температуры, соответствующие значениям λ_1 и λ_2.

Значения температур найдем из 1-го закона Вина:

$$T_1 = C_1 / \lambda_{max1},$$
$$T_2 = C_1 / \lambda_{max2}.$$

Получим:

$$R_{э1} = \sigma \cdot C_1^4 / \lambda_{max1}^4;\ R_{э2} = \sigma \cdot C_1^4 / \lambda_{max2}^4.$$

Найдем отношение:

$$R_{э2} / R_{э1} = \sigma \cdot C_1^4 \cdot \lambda_{max1}^4 / \lambda_{max2}^4 \cdot \sigma \cdot C_1^4 = (\lambda_{max1} / \lambda_{max2})^4.$$

Проверка единицы измерения:

$$[R_{э2} / R_{э1}] = 1 \text{ (безразмерная величина).}$$

Расчет числового значения:

$$R_{э2} / R_{э1} = 3{,}63.$$

Ответ: $R_{э2} / R_{э1} = 3{,}63$.

Пример 6. Исследования спектра излучения Солнца показывают, что максимум спектральной плотности излучательности соответствует длине волны $\lambda = 500$ нм. Принимая Солнце за абсолютно черное тело, определите: 1) излучательность R_e Солнца; 2) поток энергии Ф, излучаемый Солнцем; 3) массу m электромагнитных волн (всех длин), излучаемых Солнцем за 1 с.

Дано:	*Решение*
$\lambda = 500$ нм $t = 1$ с	Излучательность R_e АЧТ выражается законом Стефана – Больцмана:
$R_e = ?$ $\Phi = ?$ $m = ?$	$$R_e = \sigma \cdot T^4.$$

Температура излучающей поверхности может быть определена из закона смещения Вина:

$$\lambda_{max} = b / T.$$

Выразив отсюда температуру T и подставив ее в закон Стефана – Больцмана, получим:

$$R_e = \sigma(b / \lambda_{max})^4.$$

Расчет:

$$R_e = 64 \text{ МВт/м}^2.$$

Поток энергии Ф, излучаемый Солнцем, равен произведению излучательности Солнца на площадь S его поверхности:

$$\Phi = R_e \cdot S.$$

Или

$$\Phi = R_e \cdot 4\pi \cdot r^2,$$

где r – радиус Солнца.

Подставив в формулу числовые значения π, r и R_e и произведя вычисления, получим:

$$\Phi = 3{,}9 \cdot 10^{26} \text{ Вт}.$$

Массу электромагнитных волн (всех длин), излучаемых Солнцем за время $t = 1$ с, определим, применив закон пропорциональности массы и энергии $E = m \cdot c^2$. Энергия электромагнитных волн, излучаемых за время t, равна произведению потока энергии Ф (мощности излучения) на время:

$$E = \Phi \cdot t.$$

Следовательно,

$$\Phi \cdot t = m \cdot c^2,$$

откуда:

$$m = \Phi \cdot t / c^2.$$

Расчет:

$$m = 4 \cdot 10^{12} \text{ г}.$$

Ответ: $R_e = 64$ МВт/м^2, $\Phi = 3{,}9 \cdot 10^{26}$ Вт, $m = 4 \cdot 10^{12}$ г.

Пример 7. Определите силу тока, протекающего по вольфрамовой проволоке диаметром $d = 0{,}8$ мм, температура которого в вакууме поддерживается постоянной и равной $t = 2800$ °С. Поверхность проволоки считать серой с поглощательной способностью $A_т = 0{,}343$. Удельное сопротивление проволоки при данной температуре $\rho = 0{,}92 \cdot 10^{-4}$ Ом · см. Температура окружающей проволоку среды $t_0 = 17$ °С.

Дано:	*Решение*
$d = 0{,}8$ мм $= 8 \cdot 10^{-4}$ м $t = 2800$ °С $T = 3073$ К $A_т = 0{,}343$ $\rho = 0{,}92 \cdot 10^{-4}$ Ом · см $=$ $= 9{,}2 \cdot 10^{-7}$ Ом · м $t_0 = 17$ °С $T_0 = 290$ К $I = ?$	Мощность излучения: $P_{изл} = A_т \cdot \sigma \cdot T^4 \cdot S.$ Мощность поглощения: $P_{погл} = A_т \cdot \sigma \cdot T_0^4 \cdot S.$ $P = P_{изл} - P_{погл} = A_т \cdot \sigma \cdot S(T^4 - T_0^4).$ Мощность тока: $P = I^2 \cdot R.$

Площадь поверхности проволоки:

$$S = \pi \cdot d \cdot l.$$

Сопротивление:

$$R = \rho \cdot l / S_{сеч}.$$

Площадь сечения проволоки:

$$S_{сеч} = \pi \cdot d^2 / 4.$$

$$I = \sqrt{\frac{P}{R}} = \sqrt{\frac{A_T \cdot \sigma \left(T^4 - T_0^4\right)\pi^2 \cdot d^3}{4\rho}}.$$

Расчет: $I = 48{,}8$ А.

Ответ: $I = 48{,}8$ А.

Задачи для аудиторной работы

Задача 1. Найдите температуру T печи, если известно, что излучение из отверстия в ней площадью $S = 6{,}1$ см^2 имеет мощность $N = 34{,}6$ Вт. Излучение считать близким к излучению АЧТ.

Задача 2. Температура вольфрамовой спирали 25-ваттной электрической лампочки $T = 2450$ К. Отношение ее энергетической светимости к энергетической светимости АЧТ при данной температуре равно $k = 0{,}3$. Найдите площадь излучающей поверхности.

Задача 3. Какую энергетическую светимость $R_э$ имеет АЧТ, если максимум спектральной плотности его энергетической светимости приходится на длину волны $\lambda = 484$ нм?

Задача 4. Абсолютно черное тело имеет температуру $T_1 = 2900$ К. В результате остывания тела длина волны, на которую приходится максимум спектральной плотности энергетической светимости, изменилась на $\Delta\lambda = 9$ мкм. До какой температуры T_2 охладилось тело?

Задача 5. При нагревании АЧТ длина волны, на которую приходится максимум спектральной плотности энергетической светимости, изменилась от 690 до 500 нм. Во сколько раз увеличилась при этом энергетическая светимость тела?

Задача 6. Исследования спектра излучения Солнца показывают, что максимум спектральной плотности излучательности соответствует длине волны $\lambda = 500$ нм. Принимая Солнце за абсолютно черное тело, определите: 1) излучательность R_e Солнца; 2) поток энергии Ф, излучаемый Солнцем; 3) массу m электромагнитных волн (всех длин), излучаемых Солнцем за 1 с.

Задача 7. Определите силу тока, протекающего по вольфрамовой проволоке диаметром $d = 0{,}8$ мм, температура которого в вакууме поддерживается постоянной и равной $t = 2800$ °С. Поверхность проволоки считать серой с поглощательной способностью $A_т = 0{,}343$. Удельное сопротивление проволоки при данной температуре $\rho = 0{,}92 \cdot 10^{-4}$ Ом · см. Температура окружающей проволоку среды $t_0 = 17$ °С.

Билеты для контроля усвоения темы

Билет 1

1. Запишите определения и единицы измерения в СИ: 1) энергетической светимости тела; 2) спектральной поглощательной способности тела.

2. Сформулируйте закон Кирхгофа для теплового излучения. Какой физический смысл имеет универсальная функция Кирхгофа?

3. Запишите формулы, определяющие: 1) величину спектральной плотности энергетической светимости тела; 2) закон Стефана – Больцмана.

4. При увеличении термодинамической температуры АЧТ в 1,5 раза длина волны, на которую приходится максимум спектральной плотности энергетической светимости, уменьшилась на $\Delta\lambda = 200$ нм. Определите начальную и конечную температуру тела.

Билет 2

1. Запишите определения и единицы измерения в СИ: 1) интегральной энергетической светимости тела; 2) спектральной плотности энергетической светимости тела.

2. Сформулируйте закон смещения Вина. Запишите численное значение и единицу измерения постоянной Стефана – Больцмана.

3. Определите, как сместится максимум спектральной плотности энергетической светимости абсолютно черного тела, если повысить его температуру.

4. Определите температуру тела, при которой оно при температуре окружающей среды $t = 27$ °С излучало бы энергии в 8 раз больше, чем поглощало.

Билет 3

1. Запишите определения и единицы измерения в СИ: 1) спектральной энергетической светимости тела; 2) энергетической светимости тела.

2. Сформулируйте закон Стефана – Больцмана. Запишите численное значение и единицу измерения постоянной Вина.

3. Как и во сколько раз изменится энергетическая светимость АЧТ, если его термодинамическая температура уменьшится в 2 раза?

4. Найдите температуру T печи, если известно, что излучение из отверстия в ней площадью $S = 6{,}1$ см^2 имеет мощность $N = 34{,}6$ Вт. Излучение считать близким к излучению АЧТ.

Билет 4

1. Запишите: 1) определение спектральной плотности энергетической светимости и единицу ее измерения; 2) формулу Рэлея – Джинса.

2. Запишите формулы, определяющие: 1) величину радиационной температуры тела; 2) закон Стефана – Больцмана.

3. Определите, как сместится максимум спектральной плотности энергетической светимости абсолютно черного тела, если понизить его температуру.

4. Температура вольфрамовой спирали в 25-ваттной электрической лампочке $T = 2450$ К. Отношение ее энергетической светимости к энергетической светимости АЧТ при данной температуре равно $k = 0{,}3$. Найти площадь излучаемой поверхности.

Билет 5

1. Запишите определения и единицы измерения в СИ: 1) радиационной температуры тела; 2) энергетической светимости тела.

2. Сформулируйте закон Кирхгофа. Запишите численное значение и единицу измерения постоянной Вина в законе Вина.

3. Почему вольфрам является лучшим материалом для изготовления нитей ламп накаливания?

4. Найдите температуру T печи, если известно, что излучение из отверстия в ней площадью $S = 6{,}1$ см^2 имеет мощность $N = 34{,}6$ Вт. Излучение считать близким к излучению АЧТ.

Билет 6

1. Запишите определения: 1) яркостной температуры тела; 2) энергетической светимости тела.

2. Запишите: 1) формулу Планка для универсальной функции Кирхгофа; 2) численное значение и единицу измерения постоянной Планка.

3. Какое излучение называется тепловым? Какова его особенность?

4. Абсолютно черное тело имеет температуру $T_1 = 2900$ К. В результате остывания тела длина волны, на которую приходится максимум спектральной плотности энергетической светимости, изменилась на $\Delta\lambda = 9$ мкм. До какой температуры T_2 охладилось тело?

Билет 7

1. Запишите определения: 1) абсолютно черного тела; 2) теплового излучения.

2. Запишите: 1) формулу для расчета цветовой температуры серого тела; 2) численное значение и единицу измерения постоянной Стефана – Больцмана.

3. Какие методы измерения температуры тела называются оптической пирометрией?

4. При нагревании АЧТ длина волны, на которую приходится максимум спектральной плотности энергетической светимости, изменилась от 690 до 500 нм. Во сколько раз увеличилась при этом энергетическая светимость тела?

Билет 8

1. Запишите: 1) определение энергетической светимости тела; 2) какова особенность, выделяющая тепловое излучение среди всех видов излучения.

2. Запишите формулы, определяющие: 1) закон смещения Вина; 2) энергетическую светимость АЧТ. Приведите пример АЧТ.

3. Определите, как сместится максимум спектральной плотности энергетической светимости абсолютно черного тела, если повысить его температуру.

4. Температура АЧТ при нагревании изменилась от 1000 до 3000 К. Во сколько раз увеличилась при этом его энергетическая светимость?

Билет 9

1. Дайте определения: 1) теплового излучения; 2) абсолютно черного тела.

2. Запишите формулы: 1) длины волны, соответствующей максимальному значению спектральной плотности энергетической светимости АЧТ; 2) цветовой температуры серого тела.

3. Запишите: 1) формулу для расчета радиационной температуры черного тела; 2) численное значение и единицу измерения постоянной Вина.

4. Определите силу тока, протекающего по вольфрамовой проволоке диаметром $d = 0,8$ мм, температура которой в вакууме поддерживается постоянной и равной $t = 2800$ °С. Поверхность проволоки считать серой с поглощательной способностью $A_т = 0,343$. Удельное сопротивление проволоки при данной температуре $\rho = 0,92 \cdot 10^{-4}$ Ом · см. Температура окружающей проволоку среды $t_0 = 17$ °С.

Билет 10

1. Запишите определения и единицы измерения в СИ: 1) спектральной плотности энергетической светимости тела; 2) спектральной поглощательной способности тела.

2. Запишите: 1) формулу Рэлея – Джинса; 2) численное значение и единицу измерения постоянной Вина.

3. Как и во сколько раз изменится энергетическая светимость АЧТ, если его термодинамическая температура уменьшится в 3 раза?

4. Температура АЧТ при нагревании изменилась от 1000 до 3000 К. На сколько изменилась при этом длина волны, на которую приходится максимум спектральной плотности его энергетической светимости?

Практическое занятие 7
ФОТОЭФФЕКТ. ЭФФЕКТ КОМПТОНА. ФОТОНЫ. ВОЛНЫ ДЕ БРОЙЛЯ

Основные формулы

Энергия кванта света (фотона):

$$\varepsilon_\gamma = h \cdot \nu, \tag{7.1}$$

где h = 6,626 · 10^{-34} Дж · с — постоянная Планка; ν (Гц) — частота колебания.

Импульс фотона:

$$\rho_\gamma = \frac{h\nu}{c}. \tag{7.2}$$

Масса фотона:

$$m_\gamma = \frac{h\nu}{c^2}, \tag{7.3}$$

где $c = 3 \cdot 10^8$ м/с — скорость распространения света в вакууме.

Длина волны де Бройля:

$$\lambda = h/p, \tag{7.4}$$

где h — постоянная Планка, h = 6,63 · 10^{-34} Дж · с; p — импульс частицы.

1. Если $V << c$, то длина волны де Бройля:

$$\lambda = \frac{h}{mV}. \tag{7.5}$$

2. Если $V \approx$ c, то релятивистский импульс $p = \dfrac{m_0 v}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}}$ и длина волны де Бройля:

$$\lambda = \frac{2\pi\hbar \cdot \sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}}{m_0 v}. \tag{7.6}$$

Уравнение Эйнштейна для внешнего фотоэффекта:

$$h\upsilon = A_{\text{вых}} + \frac{m_e V^2}{2}, \tag{7.7а}$$

где $A_{\text{вых}}$ — работа выхода электрона из металла; m_e = 9,1 · 10^{-31} кг — масса электрона.

Уравнение Эйнштейна для многофотонного внешнего фотоэффекта:

$$Nh\upsilon = A_{\text{вых}} + \frac{m_e V^2}{2}, \tag{7.7б}$$

где N – число фотонов, одновременно передающих энергию электрону, испускаемому металлом ($N = 2$–7).

Максимальная кинетическая энергия электронов, вылетевших с поверхности:

$$W_{\text{к max}} = e \cdot U_{\text{з}}, \tag{7.8}$$

где $U_{\text{з}}$ – задерживающая разность потенциалов.

Максимальная скорость электронов, вылетевших с поверхности:

$$V_{\max} = \sqrt{\frac{2W_K}{m_e}} = \sqrt{\frac{2eU}{m_e}}. \tag{7.9}$$

Длина волны, соответствующая красной границе фотоэффекта:

$$\lambda_{\text{кр}} = \frac{hc}{A_{\text{вых}}}. \tag{7.10}$$

Изменение длины волны рентгеновских лучей при комптоновском рассеянии:

$$\Delta\lambda = \frac{h}{m_e c}(1 - \cos\varphi), \tag{7.11}$$

где φ – угол рассеивания электрона.

Давление, производимое светом при нормальном падении на поверхность:

$$p = (E_e / c) \cdot (1 + \rho) = \omega(1 + \rho), \tag{7.12}$$

где $E_e = N \cdot h\nu$ – облученность поверхности (энергия всех фотонов, падающих на единицу поверхности в единицу времени); ρ – коэффициент отражения; ω – объемная плотность энергии излучения.

Фазовая скорость волны де Бройля:

$$V_{\text{фаз}} = \omega / k = E / p = c^2 / \upsilon, \tag{7.13}$$

где $E = \hbar \cdot \omega$ – энергия частицы (ω – круговая частота); $p = \hbar \cdot k$ – импульс; $k = 2\pi / \lambda$ – волновое число.

Групповая скорость волны де Бройля:

$$u = \frac{d\omega}{dk} = \frac{dE}{dp}. \tag{7.14}$$

Длина волны Комптона:

$$\lambda_C = \frac{2\pi h}{mc}, \tag{7.15}$$

где m – масса электрона; c – скорость света в вакууме.

Методические указания

Гипотеза Планка о том, что атомные осцилляторы излучают энергию не непрерывно, а определенными порциями – квантами, позволила объяснить явление фотоэффекта.

Так как излучение испускается определенными порциями, то энергия осциллятора ε_γ может принимать только определенные дискретные значения, кратные целому числу элементарных порций энергии ε_0.

При решении задач на явление фотоэффекта необходимо выяснить, какой тип фотоэффекта происходит согласно условиям задачи, выбрать соответствующее ему выражение или закон и найти искомую величину.

В случае нелинейного (многофотонного) фотоэффекта плотность фотонов в лазерных пучках очень велика, поэтому фотоэлектрон может приобрести энергию, необходимую для выхода из вещества, даже под действием света с частотой, меньшей красной границы при однофотонном фотоэффекте. Таким образом, красная граница нелинейного фотоэффекта смещается в область более длинных волн.

Наиболее полно корпускулярные свойства света проявляются в эффекте Комптона.

Эффект Комптона – это результат упругого столкновения рентгеновских фотонов со свободными электронами вещества. При решении задач на эффект Комптона необходимо использовать законы сохранения энергии и импульса.

Примеры решения задач

Пример 1. Электрическая лампа мощностью 100 Вт испускает 3 % потребляемой энергии в форме видимого света ($\lambda = 550$ нм) равномерно по всем направлениям. Сколько фотонов видимого света попадает за 1 с в зрачок наблюдателя (диаметр зрачка 4 мм), находящегося на расстоянии 10 км от лампы?

Дано:	*Решение*
$r = 10\,000$ м	Полная световая энергия, приходящаяся на единицу площади поверхности, удаленной от источника на расстояние r, равна:
$P_л = 100$ Вт	$$S_{ср} = 4\pi r^2,$$
$\lambda = 550$ нм $= 5{,}5 \cdot 10^{-7}$ м	$$W_{св} = 0{,}03 \cdot 100 \text{ Вт} \cdot 1 \text{ с} / 4\pi r^2.$$
$d = 4 \cdot 10^{-3}$ м	
$t = 1$ с	
$N_\gamma = ?$	

Энергия одного кванта света:

$$\varepsilon_\gamma = h\upsilon = hc/\lambda.$$

Число фотонов, попадающих на единицу площади поверхности, удаленной на расстояние r от источника:

$$N'_\gamma = 0{,}03P \cdot t \cdot \lambda / 4\pi \cdot r^2 \cdot h \cdot c.$$

Площадь зрачка наблюдателя:

$$S_{зр} = \pi d^2.$$

Тогда

$$N_\gamma = N'_\gamma \cdot S_{зр} = 0{,}03P \cdot t \cdot \lambda \cdot \pi \cdot d^2 / 4\pi \cdot r^2 \cdot h \cdot c.$$

Проверка единицы измерения расчетной величины:

$$[N_\gamma] = \text{Дж} \cdot \text{м}^2 \cdot \text{м} \cdot \text{с}/\text{м}^2 \cdot \text{Дж} \cdot \text{м} \cdot \text{с} = 1.$$

Расчет числового значения: $N_\gamma = 8{,}3 \cdot 10^4$ фотонов.

Ответ: $N_\gamma = 8{,}3 \cdot 10^4$ фотонов.

Пример 2. Найдите постоянную Планка h, если известно, что электроны, вырываемые из металла светом с частотой $\nu_1 = 2{,}2 \cdot 10^{15}$, полностью задерживаются разностью потенциалов $U_{з1} = 6{,}6$ В, а вырываемые светом с частотой $\nu_2 = 4{,}6 \cdot 10^{15}$ Гц – разностью потенциалов $U_{з2} = 16{,}5$ В.

Дано:	*Решение*
$\nu_1 = 2{,}2 \cdot 10^{15}$ Гц	Запишем уравнение Эйнштейна для явления
$U_{з1} = 6{,}6$ В	внешнего фотоэффекта:
$\nu_2 = 4{,}6 \cdot 10^{15}$ Гц	$h\nu_1 = A_{вых} + eU_{з1};$
$U_{з2} = 16{,}5$ В	$h\nu_2 = A_{вых} + eU_{з2}.$
$h = ?$	

Выразим работу выхода:

$$A_{вых} = h\nu_1 - eU_{з1}$$

и подставим во второе уравнение Эйнштейна:

$$h\nu_2 = h\nu_1 - eU_{з1} + eU_{з2}.$$

Преобразуем:

$$h(\nu_2 - \nu_1) = e(U_{з2} - U_{з1}).$$

Получим:

$$h = e(U_{з1} - U_{з2}) / (\nu_2 - \nu_1).$$

Проверим единицу измерения:

$$[h] = \text{Дж} \cdot \text{с} = \text{Кл} \cdot \text{В}/\text{с}^{-1} = \text{Дж} \cdot \text{с}.$$

Расчет:

$$h = 1{,}6 \cdot 10^{-19}\ \text{Кл} \cdot 9{,}9\ \text{В} / 2{,}4 \cdot 10^{15}\ \text{Гц} = 6{,}6 \cdot 10^{-34} \text{Дж} \cdot \text{с}.$$

Ответ: $h = 6{,}6 \cdot 10^{-34}$ Дж · с.

Пример 3. Электрон, начальной скоростью которого можно пренебречь, прошел ускоряющую разность потенциалов $U = 30$ кВ. Найдите длину волны де Бройля.

Дано:	*Решение*
$V_0 = 0$	По определению длина волны де Бройля
$m_e = 9{,}1 \cdot 10^{-31}$ кг	равна:
$U = 30 \cdot 10^3 = 3 \cdot 10^4$ В	$\lambda = h / p.$
$\lambda = ?$	

Определим, классически или релятивистски движется электрон. Для этого найдем кинетическую энергию электрона и сравним ее с энергией покоя:

$$E_0 = m_0 c^2.$$

Если $T_к \leq T_0$, то движение электрона является релятивистским, если $T_к << T_0$, то классическим.

$$T = eU_1 = 1{,}6 \cdot 10^{-19} \cdot 3 \cdot 10^4\ \text{Дж} = 4{,}8 \cdot 10^{-15}\ \text{Дж} = 3 \cdot 10^4\ \text{эВ};$$

$$eU = m_e V^2 / 2;\ V = \sqrt{\frac{2eU}{m_e}}.$$

Энергия покоя электрона:

$$E_0 = m_0 c^2 = 0{,}5\ \text{МэВ} = 5 \cdot 10^5\ \text{эВ}.$$

Так как $T << E_0$ – имеем дело с классическим случаем движения электрона.

Тогда:

$$\lambda = \frac{h}{m\sqrt{\frac{2eU}{m}}} = \frac{h}{\sqrt{2emU}}.$$

Расчет числового значения:

$$\lambda = 11{,}61 \cdot 10^{-25}\ \text{м}.$$

Ответ: $\lambda = 11{,}61 \cdot 10^{-25}$ м.

Пример 4. Определите максимальную скорость V_{max} фотоэлектронов, вырываемых с поверхности серебра: 1) ультрафиолетовым излучением с длиной волны $\lambda_1 = 0{,}155$ мкм; 2) γ-излучением с длиной волны $\lambda_2 = 2{,}47$ пм.

Дано:	*Решение*
$\lambda_1 = 0{,}155$ мкм $= 0{,}155 \cdot 10^{-6}$ м	Максимальную скорость фото-
$\lambda_2 = 2{,}47$ пм $= 2{,}47 \cdot 10^{-12}$ м	электронов определим из уравне-
$A_{вых} = 4{,}7$ эВ	ния Эйнштейна для фотоэффекта:
$V_{max} = ?$	$\varepsilon = A_{вых} + E_{к\,max}$.

Энергия фотона:

$$\varepsilon = hc / \lambda.$$

Кинетическая энергия фотоэлектрона в зависимости от того, какая скорость ему сообщается, может быть выражена по классической формуле:

$$E_к = m_0 V^2 / 2$$

или по релятивистской:

$$E_к = (m - m_0)c^2.$$

Скорость фотоэлектрона зависит от энергии фотона, вызывающего фотоэффект: если энергия фотона во много раз меньше энергии покоя электрона, то может быть применена классическая формула; если же энергия фотона сравнима с энергией покоя электрона, то вычисление по классической формуле приводит к грубой ошибке, в этом случае кинетическую энергию фотоэлектрона необходимо выражать по релятивистской формуле:

$$\varepsilon_1 = hc/\lambda_1,\ \varepsilon_1 = 8 \text{ эВ}.$$

Это значение энергии фотона много меньше энергии покоя электрона (0,51 МэВ).

Следовательно, для данного случая:

$$\varepsilon_1 = A_{\text{вых}} + m_0V^2/2,$$

откуда:

$$V_{\max} = \sqrt{\frac{2(\varepsilon_1 - A_{\text{вых}})}{m_0}}.$$

Расчет:

$$V_{\max} = 1{,}08 \text{ Мм/с}.$$

Вычислим энергию фотона γ-излучения:

$$\varepsilon_2 = hc/\lambda_2 = 8{,}04 \cdot 10^{-15} \text{ Дж} = 0{,}502 \text{ МэВ}.$$

Работа выхода электрона пренебрежимо мала по сравнению с энергией γ-фотона, поэтому можно принять, что максимальная кинетическая энергия электрона равна энергии фотона:

$$E_{\text{к max}} = \varepsilon_2 = 0{,}502 \text{ МэВ}.$$

Так как в данном случае кинетическая энергия электрона сравнима с его энергией покоя, то для вычисления скорости электрона следует взять релятивистскую формулу кинетической энергии:

$$E_{\text{к max}} = E_0\left(1/\sqrt{1-\beta^2} - 1\right),$$

где $E_0 = m_0c^2$.

Выполнив преобразования, получим:

$$\beta = \sqrt{1-\beta^2}\,(2E_0 + E_{\text{к max}})E_{\text{к max}}/(E_0 + E_{\text{к max}}) = 0{,}755.$$

Следовательно, максимальная скорость фотоэлектронов, вырываемых γ-излучением:

$$V_{\max} = c \cdot \beta = 226 \text{ Мм/с}.$$

Ответ: 1) $V_{\max} = 1{,}08$ Мм/с; 2) $V_{\max} = 226$ Мм/с.

Пример 5. Определите красную границу λ_0 фотоэффекта для цезия, если при облучении его поверхности фиолетовым светом длиной волны $\lambda = 400$ нм максимальная скорость фотоэлектронов равна $V_{\max} = 0{,}65$ Мм/с.

Дано:	*Решение*
$\lambda = 400$ нм $= 4 \cdot 10^{-7}$ м	При облучении светом, длина волны λ_0 которого соответствует красной границе фотоэффекта, скорость и кинетическая энергия фотоэлектронов равны нулю.
$V_{max} = 0{,}65$ мм/с $= 6{,}5 \cdot 10^5$ м/с	
$\lambda_0 = ?$	

Поэтому уравнение Эйнштейна для фотоэффекта запишется в виде:

$$\varepsilon = A_{вых} + E_к.$$

Так как работа выхода:

$$hc / \lambda_0 = A,$$

отсюда длина волны, соответствующая красной границе фотоэффекта:

$$\lambda_0 = hc / A.$$

Работу выхода для цезия определим с помощью уравнения Эйнштейна:

$$A_{вых} = \varepsilon - E_к = hc / \lambda - mV^2 / 2 = 3{,}05 \cdot 10^{-19}\ \text{Дж},$$

тогда:

$$\lambda_0 = 640\ \text{нм}.$$

Ответ: $\lambda_0 = 640$ нм.

Пример 6. В результате эффекта Комптона фотон при соударении с электроном был рассеян на угол $\theta = 90°$. Энергия ε' рассеянного фотона равна 0,4 МэВ. Определите энергию ε фотона до рассеяния.

Дано:	*Решение*
$\theta = 90°$	Для определения энергии первичного фотона воспользуемся формулой Комптона в виде:
$\varepsilon' = 0{,}4$ МэВ	$\lambda' - \lambda = 2(2\pi\hbar / mc)\sin^2 \theta / 2.$
$\varepsilon = ?$	

Преобразуем с учетом:

$$\varepsilon = 2\pi\hbar c / \lambda,$$

а длины волн λ' и λ выразим через энергии ε' и ε соответствующих фотонов:

$$2\pi\hbar c / \varepsilon' - 2\pi\hbar c / \varepsilon = (2\pi\hbar c / mc^2) 2 \sin^2 \theta / 2,$$

$$\varepsilon = (\varepsilon' \cdot mc^2) / mc^2 - \varepsilon' \cdot 2 \sin^2 \theta / 2 = \varepsilon' \cdot E_0 / E_0 - 2\varepsilon' \cdot \sin^2 \theta / 2,$$

где $E_0 = m_0 c^2$.

Расчет:

$$\varepsilon = 1{,}85 \text{ МэВ}.$$

Ответ: $\varepsilon = 1{,}85$ МэВ.

Пример 7. Параллельный пучок света с длиной волны $\lambda = 500$ нм падает нормально на зачерненную поверхность, производя давление $p = 10$ мкПа. Определите: 1) концентрацию n фотонов в пучке; 2) число фотонов n_1, падающих на поверхность площадью 1 м^2 за время 1 с.

Дано:	*Решение*
$\lambda = 500$ нм	Концентрация n фотонов в пучке может быть найдена как частное от деления объемной плотности энергии ω на энергию одного фотона ε:
$S = 1$ м^2	$$n = \omega / \varepsilon.$$
$p = 10$ мкПа	
$t = 1$ с	
$n = ?$ $n_1 = ?$	

Из формулы

$$p = \omega(1 + \rho),$$

определяющей давление света, где ρ — коэффициент отражения, найдем:

$$\omega = p / (1 + \rho).$$

И получим:

$$n = p / (1 + \rho)\varepsilon.$$

Энергия фотона зависит от частоты, а следовательно, и от длины световой волны:

$$\varepsilon = h\upsilon = hc / \lambda.$$

Получим искомую концентрацию фотонов:

$$n = p\lambda / (1 + \rho)hc.$$

Коэффициент отражения ρ для зачерненной поверхности принимаем равным нулю, тогда:

$$n = 2{,}52 \cdot 10^{13} \text{ м}^{-3}.$$

Число фотонов n_1, падающих на поверхность площадью 1 м^2 за время 1 с, найдем из соотношения

$$n_1 = N / S \cdot t,$$

где N – число фотонов, падающих за время t на поверхность площадью S.

Но

$$N = n \cdot c \cdot S \cdot t,$$

следовательно:

$$n_1 = n \cdot c \cdot S \cdot t \,/\, S \cdot t = n \cdot c.$$

Расчет:

$$n_1 = 7{,}56 \cdot 10^{21}\ \text{м}^{-2} \cdot \text{с}^{-1}.$$

Ответ: $n = 2{,}52 \cdot 10^{13}$ м$^{-3}$; $n_1 = 7{,}56 \cdot 10^{21}$ м$^{-2} \cdot$ с$^{-1}$.

Задачи для аудиторной работы

Задача 1. При освещении катода вакуумного фотоэлемента монохроматическим светом с длиной волны $\lambda = 10$ нм фототок прекращается при некотором задерживающем напряжении. При увеличении длины волны на 25 % задерживающее напряжение оказывается меньше на 0,8 В. Определите по этим данным величину постоянной Планка.

Задача 2. Определите максимальную скорость фотоэлектронов, вырываемых с поверхности цинка γ-излучением с длиной волны $\lambda = 2{,}47$ пм. Работа выхода из цинка $A = 4$ эВ.

Задача 3. Красная граница для некоторого металла равна 500 нм. Определите: 1) работу выхода электронов из этого металла; 2) максимальную скорость электронов, вырываемых из этого металла светом с длиной волны $\lambda = 400$ нм.

Задача 4. Определите, до какого потенциала зарядится уединенный серебряный шарик при облучении его ультрафиолетовым светом с длиной волны $\lambda = 208$ нм. Работа выхода из серебра $A = 4{,}7$ эВ.

Задача 5. Фотоны с энергией $\varepsilon = 5$ эВ вырывают фотоэлектроны из металла с работой выхода $A = 4{,}7$ эВ. Определите, какой максимальный импульс передают поверхности электроны при вылете.

Задача 6. Определите для фотона с длиной волны $\lambda = 0{,}5$ мкм: 1) энергию фотона; 2) импульс фотона; 3) массу фотона.

Задача 7. Определите длину волны фотона, импульс которого равен импульсу электрона, прошедшего разность потенциалов $U = 9{,}8$ В.

Задача 8. Фотоэлектрон с энергией $\varepsilon = 1{,}025$ МэВ рассеялся на первоначально покоившемся свободном электроне. Определите угол рассеяния фотона, если длина волны рассеянного фотона оказалась равной $\lambda_C = 2{,}43$ пм.

Задача 9. Фотон с длиной волны $\lambda = 5$ пм испытал комптоновское рассеяние под углом $\theta = 90°$ на первоначально покоившемся свободном электроне. Определите: 1) изменение длины волны при рассеянии; 2) энергию отдачи электрона; 3) импульс электрона отдачи.

Задача 10. Какую ускоряющую разность потенциалов должен пройти протон, чтобы длина волны де Бройля для него была равна 1 нм?

Задача 11. Кинетическая энергия электрона равна 1 кэВ. Определите длину волны де Бройля.

Билеты для контроля усвоения темы

Билет 1

1. Дайте определения: 1) «красной границы» фотоэффекта; 2) внешнего фотоэффекта.

2. Запишите: 1) формулу, определяющую массу фотона; 2) численное значение и единицу измерения постоянной Планка.

3. Нарисуйте и объясните вольт-амперную характеристику фотоэлемента с внешним фотоэффектом.

4. Фотон с энергией 0,3 МэВ рассеялся под углом $\theta = 180°$ на свободном электроне. Определите отношение энергии падающего фотона к энергии рассеянного фотона.

Билет 2

1. Запишите: 1) какие условия необходимы для многофотонного фотоэффекта; 2) формулу, определяющую импульс фотона.

2. Сформулируйте 1-й, 2-й и 3-й законы внешнего фотоэффекта.

3. При замене одного металла другим длина волны, соответствующая красной границе фотоэффекта, уменьшается. Сравните величины работ выхода этих металлов.

4. Найдите численное значение постоянной Планка h, если известно, что электроны, вырываемые из металла светом с частотой $\upsilon_1 = 2{,}2 \cdot 10^{15}$ Гц, полностью задерживаются разностью потенциалов $U_{з1} = 6{,}6$ В, а вырываемые светом с частотой $\upsilon_2 = 4{,}6 \cdot 10^{15}$ Гц – разностью потенциалов $U_{з2} = 16{,}5$ В.

Билет 3

1. Запишите: 1) уравнение Эйнштейна для внешнего фотоэффекта; 2) формулу, определяющую давление света при нормальном падении.

2. Какое явление называется эффектом Комптона? Что такое задерживающее напряжение?

3. Объясните, используя уравнение Эйнштейна для внешнего фотоэффекта, 1-й и 2-й законы фотоэффекта.

4. Определите максимальную скорость фотоэлектронов, вырываемых с поверхности цинка γ-излучением с длиной волны $\lambda = 2{,}47$ пм. Работа выхода из цинка $A = 4$ эВ.

Билет 4

1. Сформулируйте 2-й и 3-й законы внешнего фотоэффекта.

2. Нарисуйте вольт-амперную характеристику фотоэлемента с внешним фотоэффектом и объясните возникновение фототока насыщения.

3. Запишите: 1) формулу для эффекта Комптона; 2) формулу, определяющую максимальное значение скорости вырванного из фотокатода фотоэлектрона.

4. Кинетическая энергия электрона равна 1 кэВ. Определите длину волны де Бройля.

Билет 5

1. Запишите определения: 1) внутреннего фотоэффекта; 2) вольт-амперной характеристики фотоэффекта.

2. Запишите формулы: 1) длины волны де Бройля; 2) комптоновской длины волны при рассеянии фотона на электроне.

3. Чему равно отношение давлений света на зеркальную и зачерненную поверхности?

4. Определите, с какой скоростью должен двигаться электрон, чтобы его импульс был равен импульсу фотона, длина волны которого $\lambda = 2$ пм.

Билет 6

1. Запишите: 1) определение красной границы фотоэффекта; 2) гипотезу де Бройля.

2. Запишите формулу, определяющую: 1) массу фотона; 2) импульс фотона.

3. В чем заключается отличие характера взаимодействия фотона и электрона при явлениях фотоэффекта и Комптона?

4. При освещении катода вакуумного фотоэлемента монохроматическим светом с длиной волны $\lambda = 10$ нм фототок прекращается при некотором задерживающем напряжении. При увеличении длины волны на 25 % задерживающее напряжение оказывается меньше на 0,8 В. Определите по этим данным величину постоянной Планка.

Билет 7

1. Нарисуйте и поясните вольт-амперную характеристику для фотоэлемента с внешним фотоэффектом.

2. Запишите: 1) уравнение Эйнштейна для внешнего фотоэффекта; 2) формулу Комптона.

3. Сформулируйте 1-й и 3-й законы внешнего фотоэффекта.

4. Определите красную границу λ_0 фотоэффекта для цезия, если при облучении его поверхности фиолетовым светом с длиной волны $\lambda = 400$ нм максимальная скорость фотоэлектронов равна $V_{max} = 0{,}65$ Мм/с.

Билет 8

1. Запишите определения: 1) вентильного фотоэффекта; 2) вольт-амперной характеристики фотоэффекта.

2. Запишите формулы, определяющие: 1) максимальную кинетическую энергию вырванного фотоэлектрона; 2) многофотонный фотоэффект.

3. Чему равно отношение давлений света на зеркальную и зачерненную поверхности?

4. Определите, какую ускоряющую разность потенциалов должен пройти протон, чтобы ему соответствовала длина волны де Бройля $\lambda = 1$ нм.

Билет 9

1. Запишите определения: 1) внешнего фотоэффекта; 2) эффекта Комптона.

2. Запишите формулы, определяющие: 1) энергию фотона; 2) величину давления света на поверхность.

3. Чему равно отношение давлений света на зеркальную и зачерненную поверхности?

4. Определите, какую ускоряющую разность потенциалов должен пройти протон, чтобы ему соответствовала длина волны де Бройля $\lambda = 1$ нм.

Билет 10

1. Запишите определения: 1) вентильного фотоэффекта; 2) вольт-амперной характеристики фотоэффекта.

2. Запишите формулы: 1) максимальной кинетической энергии фотоэлектрона; 2) многофотонного фотоэффекта.

3. Что происходит с энергией фотона в результате упругого столкновения со свободными электронами вещества?

4. Фотоны с энергией $E = 5$ эВ вырывают электроны из металла с работой выхода $A_{вых} = 4{,}7$ эВ. Определите максимальный импульс, передаваемый поверхности этого металла при вылете электрона.

Практическое занятие 8
СООТНОШЕНИЕ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТЕЙ ГЕЙЗЕНБЕРГА. УРАВНЕНИЕ ШРЕДИНГЕРА

Основные формулы

Соотношение неопределенностей Гейзенберга:

$$\Delta x \cdot \Delta p_x \geq \hbar / 2\,; \qquad (8.1)$$

$$\Delta E \cdot \Delta t \geq \hbar / 2\,. \qquad (8.2)$$

Длина волны де Бройля:

$$\lambda = \frac{h}{p}\,. \qquad (8.3)$$

Общее уравнение Шредингера (зависящее от времени):

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\Psi + U(x, y, z, t)\Psi = i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t}\,, \qquad (8.4)$$

где $\Psi = \Psi(x, y, z, t)$ – волновая функция, описывающая состояние частицы; $\hbar = h / 2\pi$; m – масса частицы; Δ – оператор Лапласа ($\Delta\Psi = \partial^2\Psi / \partial x^2 + \partial^2\Psi / \partial y^2 + \partial^2\Psi / \partial z^2$); $i = \sqrt{-1}$ – мнимая единица; $U = U(x, y, z, t)$ – потенциальная энергия частицы в силовом поле, в котором она движется.

Уравнение Шредингера для стационарных состояний:

$$\Delta\psi + \frac{2m}{\hbar^2}(E - U)\psi = 0\,. \qquad (8.5)$$

Вероятность нахождения частицы в объеме dV:

$$dW = \Psi \cdot \Psi^* dV = |\Psi|^2 dV, \qquad (8.6)$$

где $\Psi = \Psi(x, y, z)$ – координатная (амплитудная) часть волновой функции; Ψ^* – функция, комплексно сопряженная с Ψ; $|\Psi|^2 = \Psi \cdot \Psi^*$ – квадрат модуля волновой функции.

Условие нормировки вероятностей:

$$\int_V |\psi|^2 \cdot dV = 1\,, \qquad (8.7)$$

где интегрирование производится по всему бесконечному пространству, т. е. по координатам x, y, z от $-\infty$ до $+\infty$.

Вероятность обнаружения частицы в интервале от x_1 до x_2:

$$W = \int_{-\infty}^{\infty} \left|\Psi(x)\right|^2 dx. \qquad (8.8)$$

Среднее значение физической величины L, характеризующей частицу, находящуюся в состоянии, описываемом волновой функцией Ψ:

$$< L >= \int_V L \cdot \left|\Psi\right|^2 dV; \qquad (8.9)$$

$$\Psi(x, y, z, t) = \psi(x, y, z) \cdot e^{-i \cdot (E/\hbar) \cdot t}, \qquad (8.10)$$

где $\psi = \psi(x, y, z)$ — координатная часть волновой функции.

Волновая функция, описывающая одномерное движение свободной частицы:

$$\Psi(x,t) = A e^{-\frac{i}{\hbar}(E t - p_x x)}, \qquad (8.11)$$

где A — амплитуда волны де Бройля; $p_x = k \cdot \hbar$ — импульс частицы; $E = \hbar\omega$ — энергия частицы.

Собственные значения энергии E_n частицы, находящейся на n-м энергетическом уровне в одномерной прямоугольной «потенциальной яме» с бесконечно высокими «стенками»:

$$E_n = \frac{n^2 \pi^2 \hbar^2}{2ml^2} x \; (n = 1, 2, 3, \ldots). \qquad (8.12)$$

Собственная волновая функция, соответствующая вышеприведенному собственному значению энергии:

$$\Psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{l}} \sin \frac{n\pi}{l} x \;\; (n = 1, 2, 3, \ldots), \qquad (8.13)$$

где l — ширина ямы.

Энергетический интервал между двумя соседними уровнями:

$$\Delta E_n = E_{n+1} - E_n \cong \frac{\pi^2 \hbar^2}{2ml^2}(2n+1) \cong \frac{\pi^2 \hbar^2}{ml^2} n. \qquad (8.14)$$

Глубина проникновения квантовой частицы вглубь барьера высотой U_0:

$$x_e = \frac{\hbar}{\sqrt{8m(U_0 - E)}}. \qquad (8.15)$$

Коэффициент отражения:

$$R=\left(\frac{\sqrt{E}-\sqrt{E-U_0}}{\sqrt{E}+\sqrt{E-U_0}}\right)^2. \tag{8.16}$$

Коэффициент прозрачности D прямоугольного потенциального барьера конечной ширины l:

$$D = D_0 e^{-\frac{2l}{\hbar}\sqrt{2m(U-E)}}, \tag{8.17}$$

где D_0 – множитель, который можно приравнять к единице.

Уравнение Шредингера для линейного гармонического осциллятора в квантовой механике:

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+\frac{2m}{\hbar^2}\left(E-\frac{m\omega_0^2x^2}{2}\right)\psi=0, \tag{8.18}$$

где $(m \cdot \omega_0^2 \cdot x^2) / 2 = U$ – потенциальная энергия осциллятора; ω_0 – собственная частота колебаний осциллятора; m – масса частицы.

Собственные значения энергии гармонического осциллятора:

$$E_n = (n + 1/2)\hbar \cdot \omega_0 \; (n = 0, 1, 2, \ldots). \tag{8.19}$$

Энергия нулевых колебаний гармонического осциллятора:

$$E_0 = 1/2 \cdot \hbar\omega_0. \tag{8.20}$$

Методические указания

Гипотеза Планка утверждает, что излучение и поглощение света происходят не непрерывно, а дискретно, т. е. определенными порциями (квантами).

Энергия кванта определяется частотой ν:

$$\varepsilon_\gamma = h\nu,$$

где h – постоянная Планка.

Для микрочастицы одновременно невозможно точно определить величину координаты и импульса, а неопределенности этих величин подчиняются соотношению неопределенностей Гейзенберга. Соотношение неопределенностей Гейзенберга является квантовым ограничением применимости классической механики к микрообъектам.

Состояние микрочастиц в квантовой механике описывается с помощью волновой функции Ψ, которая является основным носителем информации об их корпускулярных и волновых свойствах.

Примеры решения задач

Пример 1. Определите неопределенность Δx в определении координаты электрона, движущегося в атоме водорода со скоростью $\nu = 1{,}5 \cdot 10^6$ м/с, если допускаемая неопределенность ΔV в определении скорости составляет 10 % от ее величины.

Дано:	*Решение*
$V_x = 1{,}5 \cdot 10^6$ м/с	Запишем соотношение неопределенностей для координаты x
$m_e = 9{,}1 \cdot 10^{-31}$ кг	и проекции импульса p_x:
$\Delta V_x = 10\ \%\ V_x = 0{,}15 \cdot 10^6$ м/с	$\Delta x \cdot \Delta V_x \cdot m_e \geq h / (2\pi)$;
$\Delta x = ?$	$\Delta x = h / (2\pi \cdot m_e \cdot \Delta V_x)$.

Ответ: $\Delta x = 0{,}77$ м.

Пример 2. Электрон находится в бесконечно глубоком одномерном потенциальном ящике (яме) шириной $L = 0{,}5$ нм на первом энергетическом уровне. Найдите вероятность нахождения электрона в интервале $L / 4$, равноудаленном от стенок ящика.

Дано:	*Решение*
$L = 0{,}5 \cdot 10^{-9}$ м	Вероятность обнаружения частицы в интервале от x_1 до x_2 равна:
$n = 1$	$W = P = \int \lvert \psi(x) \rvert^2 \cdot dx$.
$\Delta L = L / 4$	
$W = P = ?$	Выразим x_1 и x_2 через L:

$$x_1 = L / 2 - L / 8 = 3L / 8;$$
$$x_2 = L / 2 + L / 8 = 5L / 8.$$

Нормированная собственная волновая функция, описывающая состояние электрона в потенциальном ящике, имеет вид:

$$\Psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin \frac{n\pi}{L} x.$$

Так как по условию задачи $n = 1$, то

$$\Psi_1(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin \frac{\pi x}{L}.$$

Получим:

$$W = P = \int\limits_{x_1 = \frac{3L}{8}}^{x_2 = \frac{5L}{8}} \frac{2}{L} \sin^2 \frac{\pi x}{L} dx.$$

Преобразуем, произведя замену для вычисления интеграла:

$$\sin^2\frac{\pi x}{L}=\frac{L}{2}\left(1-\cos\frac{2\pi x}{L}\right),$$

и разобьем на два интеграла:

$$W=P=\frac{2}{L}\frac{1}{2}\left(\int_{x_1}^{x_2}dx-\frac{L}{2\pi}\int\cos\frac{2\pi x}{L}d\frac{2\pi x}{L}\right).$$

Проведем расчет:

$$W=P=\frac{1}{L}\left[\left(\frac{5}{8}L-\frac{3}{8}L\right)-\frac{L}{2\pi}\left(\sin\frac{2\pi 5L}{8}-\sin\frac{2\pi 3L}{8}\right)\right]=$$

$$=\frac{1}{L}\left[\frac{L}{4}-\frac{L}{2\pi}\left(\sin\frac{5\pi}{4}-\sin\frac{3\pi}{4}\right)\right]=\frac{1}{L}\left(\frac{L}{4}-\frac{L}{2\pi}\right)=\frac{1}{4}-\frac{\pi}{2}=0{,}2485.$$

Ответ: $W=P=0{,}2485\approx 0{,}249$.

Пример 3. Электрон проходит через прямоугольный потенциальный барьер шириной $d=0{,}5$ нм. Высота барьера U больше энергии E электрона на 1 %. Вычислите коэффициент прозрачности D, если энергия электрона $E=100$ эВ.

Дано:	*Решение*
$E=100$ эВ	По определению коэффициент прозрачности D равен:
$U=\mathrm{E}+0{,}01\mathrm{E}$	$$D=e^{-\frac{2d}{\hbar}\sqrt{2m(U-E)}}.$$
$d=0{,}5$ нм $=5\cdot10^{-10}$ м	
$D=?$	Подставив данные, получим:

$$D=e^{-\frac{2\cdot5\cdot10^{-10}}{\hbar}\sqrt{2\cdot9{,}1\cdot10^{-31}\left(1{,}6\cdot10^{-19}\right)}}=6{,}5\cdot10^{-3}.$$

Ответ: $D=6{,}5\cdot10^{-3}$.

Пример 4. Частица находится в одномерной прямоугольной «потенциальной яме» шириной l с бесконечно высокими «стенками». Запишите уравнение Шредингера в пределах «ямы» $0\le X\le 1$ и решите его.

Дано:	*Решение*
$0\le X\le 1$	
$X<0,\ U\to\infty$	$$\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2}+\frac{2m}{\hbar^2}(E-U)\Psi=0.$$
$X>l,\ U\to\infty$	
$\Psi(x)=?$	Если $0\le X\le l$, $U=0$, $\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2}+\frac{2m}{\hbar^2}E\Psi=0.$

Введем обозначение:

$$k^2 = \frac{2m}{\hbar^2}E,$$

тогда

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + k^2 \Psi = 0.$$

Решение:

$$\Psi(x) = A\sin kx + B\cos kx.$$

При $\Psi(0) = 0$, $B = 0$, $\Psi(x) = A\sin kx$, $k = \frac{n\pi}{l}$, тогда

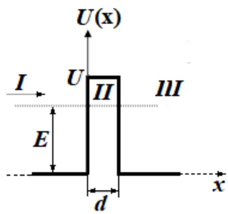
$$\Psi(x) = A\sin\frac{n\pi x}{l}.$$

Ответ: $\Psi(x) = A\sin\frac{n\pi x}{l}$.

Пример 5. Электрон с энергией E = 4,9 эВ движется в положительном направлении оси X. Высота U потенциального барьера равна 5 эВ. При какой ширине d барьера вероятность W прохождения электрона через него будет равна 0,2?

Дано:	*Решение*
E = 4,9 эВ	Вероятность W прохождения частицы через потенциальный барьер по своему физическому смыслу совпадает с коэффициентом прозрачности: $W = D$.
U = 5 эВ	
W = 0,2	
d = ?	

Тогда вероятность того, что электрон пройдет через прямоугольный потенциальный барьер, выразится соотношением:



$$W \approx \exp\left[-\frac{2}{\hbar}\sqrt{2m(U-E)}\cdot d\right],$$

где m – масса электрона.

Прологарифмируем это выражение:

$$\ln W = -\frac{2}{\hbar}\sqrt{2m(U-E)}\cdot d.$$

Для удобства вычислений изменим знак у правой и левой частей этого равенства и найдем d:

$$d = \frac{\hbar \cdot \ln(1/W)}{2\sqrt{2m(U-E)}}.$$

Входящие в эту формулу величины выразим в единицах СИ и произведем вычисления:

$$d = 4{,}95 \cdot 10^{-10} = 0{,}495 \text{ нм}.$$

Учитывая, что формула вероятности W приближенная и вычисления носят оценочный характер, можно принять $d \approx 0{,}5$ нм.

Ответ: $d \approx 0{,}5$ нм.

Пример 6. Волновая функция, описывающая состояние частицы в одномерной «потенциальной яме» с бесконечно высокими «стенками», имеет вид:

$$\Psi(x) = A \cdot \sin(kx).$$

Определите: 1) вид собственной волновой функции $\Psi_n(x)$; 2) коэффициент A, исходя из условия нормировки вероятностей.

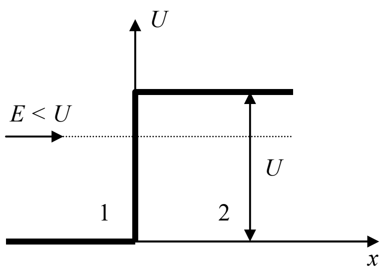
Дано:	*Решение*
$\Psi(x) = A \cdot \sin(kx)$	$\Psi(0) = \Psi(l) = 0;\ \Psi(l) = A \cdot \sin kl = 0.$
$\Psi_n(x) = ?\ A = ?$	$kl = n \cdot \pi;\ k = n \cdot \pi / l;\ \Psi_n(x) = A \cdot \sin n\pi / lx.$

$$\int_0^l \left|\Psi_n(x)\right|^2 dx = 1,$$

$$\int_0^l A^2 \sin^2 n\pi / l \cdot x \cdot dx = A^2 l / 2 = 1.$$

Ответ: $\Psi_n(x) = A \sin n\pi / l \cdot x;\ A = \sqrt{\dfrac{2}{l}}.$

Пример 7. Частица с энергией E движется в положительном направлении оси x и встречает на своем пути бесконечно широкий прямоугольный барьер высотой U, причем $E < U$. Принимая $A_1 = 1$ и используя условия непрерывности волновой функции и ее первой производной на границе областей 1 и 2, определите плотность вероятности $|\Psi_2(0)|^2$ обнаружения частицы в точке $x = 0$ области 2.



Дано:	*Решение*
$E < U$	Запишем выражение для волновой функции микрочастицы:
$A_1 = 1$	а) при движении в области 1:
$\Psi_1(0) = \Psi_2(0)$	$$\psi_1(x) = A_1 e^{ik_1 x} + B_1 e^{-ik_1 x},$$
$\Psi_1'(0) = \Psi_2'(0)$	
$\lvert\Psi_2(0)\rvert^2 = ?$	где $k_1 = \dfrac{\sqrt{2mE}}{\hbar}$;

б) при движении в области 2:

$$\psi_2(x) = A_2 e^{ik_2 x},$$

где $k_2 = \dfrac{\sqrt{2m(E-U)}}{\hbar}$.

Найдем первые производные ψ'_1 и ψ'_2:

$$\psi_1'(x) = A_1 ik_1 e^{ik_1 x} + B_1(-ik_1)e^{-ik_1 x};$$

$$\psi_2'(x) = A_2(ik_2)e^{ik_2 x}.$$

Учитывая, что из условия задачи $A_1 = 1$, и граничные условия, получим:

$$\psi_1(0) = 1 + B_1;\ \psi_2(0) = A_2;$$

$$\psi_1'(0) = ik_1 - ik_1 B_1;\ \psi_2'(0) = A_2 ik_2.$$

Из условия непрерывности волновой функции и ее первой производной на границе областей 1 и 2 следует:

$$1 + B_1 = A_2,\ k_1 - B_1 k_1 = A_2 k_2,$$
$$B_1 = A_2 - 1,\ k_1 - (A_2 - 1)k_1 = A_2 k_2,$$
$$2k_1 = (k_1 + k_2)A_2,$$
$$A_2 = 2k_1 / (k_1 + k_2).$$

Найдем квадрат модуля волновой функции в точке $x = 0$ в области 2:

$$\left|\Psi_2(0)\right|^2 = \left|A_2\right|^2 = \left|\frac{2k_1}{k_1+k_2}\right|^2 = \left|\frac{2\sqrt{E}}{\sqrt{E}+\sqrt{E-U}}\right|^2 = \left|\frac{\sqrt{E}}{\sqrt{E}+i\sqrt{U-E}}\right|^2 =$$

$$= \frac{4E}{\left(\sqrt{E}+i\sqrt{U-E}\right)\left(\sqrt{E}-i\sqrt{U-E}\right)} = \frac{4E}{E+i\sqrt{U-E}-i\sqrt{U-E}+U-E} = \frac{4E}{U}.$$

Ответ: $\left|\Psi_2(0)\right|^2 = \dfrac{4E}{U}$.

Задачи для аудиторной работы

Задача 1. Электрон находится в бесконечно глубоком одномерном прямоугольном потенциальном ящике шириной l. Вычислите вероятность того, что электрон, находящийся в возбужденном состоянии ($n = 2$), будет обнаружен: 1) в первой трети ящика; 2) в средней трети ящика; 3) в третьей трети ящика.

Задача 2. Электрон находится в бесконечно глубоком одномерном прямоугольном потенциальном ящике шириной l. Напишите уравнение Шредингера и его решение в тригонометрической форме для области $0 < x < l$.

Задача 3. Электрон находится в бесконечно глубоком одномерном прямоугольном потенциальном ящике шириной l. Вычислите вероятность того, что электрон, находящийся в основном состоянии $n = 1$, будет обнаружен: 1) в средней трети ящика; 2) в третьей трети ящика.

Задача 4. Электрон находится в бесконечно глубоком одномерном прямоугольном потенциальном ящике шириной l. Вычислите вероятность того, что электрон, находящийся в основном состоянии $n = 1$, будет обнаружен в интервале $l / 4$, равноудаленном от стенок ящика.

Задача 5. Стационарное уравнение Шредингера в общем случае имеет вид:

$$\nabla^2\psi + \frac{2m}{h}(E - U)\psi = 0,$$

где U – потенциальная энергия микрочастицы.

Какое уравнение соответствует электрону в атоме водорода?

Задача 6. Собственные функции электрона в одномерном потенциальном ящике с бесконечно высокими стенками имеют вид:

$$\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{L}}\sin\frac{n\pi}{L}x,$$

где L – ширина ящика; n – квантовое число, имеющее смысл номера энергетического уровня.

Если N – число узлов; ψ_n – функции на отрезке $0 \leq x \ll L$ и $\dfrac{N_{n+1}}{N_{n-1}} = 1{,}5$, то n равно … .

Задача 7. Запишите уравнение Шредингера для стационарных состояний электрона, находящегося в атоме водорода.

Задача 8. Больше или меньше энергия частицы, находящейся в «потенциальной яме» с бесконечно высокими «стенками», в состоянии с $n = 3$ по сравнению с состоянием $n = 1$? Во сколько раз?

Задача 9. Какова наименьшая величина энергии частицы в «потенциальной яме» с бесконечно высокими «стенками»?

Задача 10. Электрон находится в одномерной прямоугольной «потенциальной яме» шириной l с бесконечно высокими «стенками». Определите вероятность обнаружения электрона: 1) в левой трети «ямы»; 2) средней трети «ямы»; 3) правой трети «ямы», если электрон находится в возбужденном состоянии с $n = 2$.

Задача 11. Электрон находится в одномерной прямоугольной «потенциальной яме» шириной l с бесконечно высокими «стенками». Определите вероятность обнаружения электрона в интервале от $l / 4$ до $3l / 4$, если электрон находится в возбужденном состоянии с $n = 3$.

Задача 12. Прямоугольный потенциальный барьер имеет ширину $l = 0,1$ нм. Определите в электрон-вольтах разность энергий, при которой вероятность прохождения электрона сквозь барьер составит 0,99.

Билеты для контроля усвоения темы

Билет 1

1. Запишите определение свободной частицы. Каков физический смысл волновой функции?

2. Запишите: 1) условие нормировки для ψ-функции; 2) соотношение неопределенностей Гейзенберга.

3. Электрон находится в одномерной «потенциальной яме» шириной $L = 0,5$ нм с бесконечно высокими «стенками». Определите вероятность обнаружения электрона в левой трети ямы, если он находится в возбужденном состоянии с $n = 3$.

4. В чем отличие поведения классической и квантовой частиц с энергией $E < U$ при их падении на прямоугольный потенциальный барьер конечной ширины?

Билет 2

1. Запишите: 1) стационарное одномерное уравнение Шредингера; 2) формулу, определяющую глубину проникновения квантовой частицы вглубь барьера.

2. Запишите выражение для собственной функции $\psi_n(x)$ при движении частицы в одномерной «потенциальной яме» с бесконечно высокими «стенками».

3. Электрон находится в одномерной «потенциальной яме» шириной $L = 0{,}5$ нм с бесконечно высокими «стенками». Определите вероятность обнаружения электрона в средней трети «ямы», если он находится в возбужденном состоянии с $n = 3$.

4. В чем отличие поведения классической и квантовой частиц с энергией $E = U$ при их падении на прямоугольный потенциальный барьер конечной ширины?

Билет 3

1. Запишите: 1) одномерное стационарное уравнение Шредингера, описывающее движение частицы в одномерной «потенциальной яме» с бесконечно высокими «стенками» и его решение; 2) формулу, определяющую потенциальную энергию электрона в электростатическом поле ядра.

2. Запишите формулу, определяющую энергетический интервал между двумя соседними уровнями.

3. Рассчитайте неопределенность координаты Δx электрона, движущегося в атоме водорода со скоростью $V = 1{,}3 \cdot 10^6$ м/с, если допускаемая неопределенность ΔV в определении скорости составляет 15 % от ее величины.

4. Частица находится в одномерной «потенциальной яме» шириной L с бесконечно высокими «стенками» в возбужденном состоянии $n = 2$. Определите вероятность обнаружения частицы в области $5L / 8 \geq x \geq 3L / 8$.

Билет 4

1. Запишите формулы, определяющие: 1) энергетический интервал между двумя соседними энергетическими уровнями; 2) коэффициент прозрачности прямоугольного потенциального барьера.

2. Запишите соотношение неопределенностей Гейзенберга.

3. Какими свойствами частиц обусловлен туннельный эффект?

4. Электрон в одномерной прямоугольной «потенциальной яме» шириной l = 200 пм с бесконечно высокими «стенками» находится в основном состоянии. Определите вероятность обнаружения частицы в левой трети «ямы».

Билет 5

1. Запишите: 1) одномерное стационарное уравнение Шредингера, описывающее движение частицы в одномерной «потенциальной яме» с бесконечно высокими «стенками» и его решение; 2) формулу, определяющую величину энергии частицы на уровне с номером n.

2. Запишите формулы, определяющие: 1) квадрат модуля волновой функции; 2) коэффициент прозрачности прямоугольного потенциального барьера конечной ширины.

3. Рассчитайте неопределенность координаты Δx электрона, движущегося в атоме водорода со скоростью $V = 1{,}5 \cdot 10^6$ м/с, если допускаемая неопределенность скорости ΔV составляет 10 % от ее величины.

4. Прямоугольный потенциальный барьер имеет ширину $l = 0{,}1$ нм. Определите в электронвольтах разность энергий $(U - E)$, при которой вероятность прохождения электрона сквозь барьер составит 0,99.

Билет 6

1. Запишите: 1) определение свободной частицы; 2) формулу, определяющую разность энергий для двух соседних энергетических уровней.

2. Какой энергетический уровень называется основным? Запишите условие нормировки для ψ-функции.

3. Сравните величины энергии частицы, находящейся в «потенциальной яме» с бесконечно высокими «стенками», в двух состояниях: 1) $n = 3$; 2) $n = 1$.

4. Электрон движется в атоме водорода по первой боровской орбите. Принимая, что допускаемая неопределенность скорости составляет 1 % от ее числового значения, определите неопределенность координаты электрона.

Практическое занятие 9
ТЕОРИЯ АТОМА ВОДОРОДА

Основные формулы

Момент импульса электрона на стационарных орбитах:

$$L = mvr = n\hbar,\ n = 1, 2, 3, \ldots \tag{9.1}$$

Радиус n-й стационарной орбиты:

$$r_n = n^2 \frac{\hbar \cdot 4\pi\varepsilon_0}{m_e Z e^2}. \tag{9.2}$$

Энергия электрона, находящегося на n-й орбите:

$$E_n = -\frac{m\,e^4}{32\,\pi^2\,\varepsilon_0^2\,\hbar^2\,n^2}. \tag{9.3}$$

Обобщенная формула Бальмера:

$$\frac{1}{\lambda} = R'\left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2}\right); \tag{9.4}$$

$$\nu = R\left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2}\right). \tag{9.5}$$

Постоянная Ридберга:

$$R' = 1{,}097 \cdot 10^7\ \text{м}^{-1} \text{ или } R = R'c = 3{,}290 \cdot 10^{15}\ \text{с}^{-1}. \tag{9.6}$$

Энергия фотона, испускаемого атомом водорода при переходе из одного стационарного состояния в другое:

$$\varepsilon = E_i\left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2}\right), m = n + 1, n + 2, \ldots \tag{9.7}$$

Энергия ионизации атома водорода:

$$E_i = 2\pi\hbar R = 13{,}6\ \text{эВ}. \tag{9.8}$$

Методические указания

При решении задач по теме «Теория атома водорода по Бору» применяют два постулата Бора, предполагая, что электроны вращаются вокруг ядра по круговым орбитам.

Радиус n-й орбиты и скорость электрона на ней связаны друг с другом выражением момента импульса для стационарных орбит. При расчете радиуса орбиты и скорости движения на этой орбите учитывают условие стационарности орбит.

В качестве основного закона динамики используют уравнение движения электрона в поле ядра. При этом сила взаимодействия между электрическим зарядом ядра и зарядом электрона сообщает электрону центростремительное ускорение.

Примеры решения задач

Пример 1. Вычислите радиус первой орбиты атома водорода (боровский радиус) и скорость электрона на этой орбите.

Дано:	*Решение*
$n = 1$	Согласно теории Бора, радиус r электронной орбиты и скорость V электрона на ней связаны равенством
$r = ?$ $V = ?$	

$$m \cdot V \cdot r = n \cdot \hbar.$$

Так как требуется определить величины, относящиеся к первой орбите, то главное квантовое число $n = 1$ и равенство примет вид:

$$m \cdot V \cdot r = \hbar.$$

Для определения неизвестных величин r и V необходимо еще одно уравнение. Воспользуемся уравнением движения электрона. Согласно теории Бора, электрон вращается вокруг ядра. При этом сила взаимодействия между электрическими зарядами ядра и электрона сообщает электрону центростремительное ускорение. На основании второго закона Ньютона запишем:

$$m \cdot V^2 / r = 1/4 \cdot \pi \cdot \varepsilon_0 \cdot e^2 / r^2,$$

где e и m – заряд и масса электрона.

$$m \cdot V^2 = 1/4 \cdot \pi \cdot \varepsilon_0 \cdot e^2 / r.$$

Совместное решение равенств относительно r дает:

$$r = 4\pi \cdot \varepsilon_0 \cdot \hbar^2 / me^2.$$

Подставив значения $\hbar$, e, m и произведя вычисления, найдем боровский радиус:

$$r_1 = 5{,}29 \cdot 10^{-11} \text{ м}.$$

Выражение скорости электрона на первой орбите:

$$V = \hbar / m \cdot r.$$

Расчет:

$$V = 2{,}18 \cdot 10^6 \text{ м/с}.$$

Ответ: $r_1 = 5{,}29 \cdot 10^{-11}$ м, $V = 2{,}18 \cdot 10^6$ м/с.

Пример 2. Определите энергию ε фотона, соответствующего второй линии в первой инфракрасной серии (серии Пашена) атома водорода.

Дано:	*Решение*
$n_1 = 3$ $m = 2$	Энергия ε фотона, излучаемого атомом водорода при переходе электрона с одной орбиты на другую:
$\varepsilon = ?$	$\varepsilon = E_i(1 / n_1^2 - 1 / n_2^2)$,

где E_i – энергия ионизации атома водорода; $n_1 = 1, 2, 3, \ldots$ – номер орбиты, на которую переходит электрон; $n_2 = n_1 + 1; n_1 + 2; \ldots$ – номер орбиты, с которой переходит электрон; m – номер спектральной линии в данной серии. Для серии Пашена $n_1 = 3$; для второй линии этой серии $m = 2$:

$$n_2 = n_1 + m = 3 + 2 = 5.$$

Расчет: $\varepsilon = 0{,}97$ эВ.

Ответ: $\varepsilon = 0{,}97$ эВ.

Пример 3. Найдите наименьшую и наибольшую длины волн спектральных линий водорода в видимой области спектра.

Дано:	*Решение*
$k = 2$ $n = 3, 4, 5, \ldots$	Длины волн спектральных линий водорода всех серий определяются формулой
$\lambda_{min} = ?$ $\lambda_{max} = ?$	$$\frac{1}{\lambda} = R\left(\frac{1}{k^2} - \frac{1}{n^2}\right).$$

При $k = 1$, $n = 2, 3, 4, \ldots$ – серия Лаймана в ультрафиолетовой области;

$k = 2$, $n = 3, 4, 5, \ldots$ – серия Бальмера в видимой области;

$k = 3$, $n = 4, 5, 6, \ldots$ – серия Пашена в инфракрасной области;

$k = 4$, $n = 5, 6, 7, \ldots$ – серия Брекета в инфракрасной области;

$k = 5$, $n = 6, 7, 8, \ldots$ – серия Пфунда в инфракрасной области.

Таким образом, серия в видимой области спектра соответствует значению $k = 2$ и $n = 3, 4, 5, \ldots$ Очевидно, что наименьшая длина волны спектральных линий этой серии будет при $n = \infty$.

Тогда

$$1 / \lambda_{min} = R / 4, \text{ отсюда } \lambda_{min} = 4 / R = 3{,}65 \cdot 10^{-7} \text{ м}.$$

Наибольшая длина волны соответствует $n = 3$:

$$\lambda_{max} = 6{,}56 \cdot 10^{-7} \text{ м.}$$

Таким образом, видимый спектр водорода лежит в интервале длин волн от $3{,}65 \cdot 10^{-7}$ м до $6{,}56 \cdot 10^{-7}$ м.

Ответ: $\lambda = (3{,}65 \cdot 10^{-7}; 6{,}56 \cdot 10^{-7})$ м.

Пример 4. Определите линейную частоту вращения электрона по третьей орбите атома водорода по теории Бора.

Дано:	*Решение*
$Z = 1$	$$\frac{m\vartheta^2}{r} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{e^2}{r^2}. \quad (1)$$
$m = 3...$	
$\nu = ?$	

В третьем стационарном состоянии электрон, двигаясь по круговой орбите, обладает моментом импульса, значение которого равно

$$m_e \vartheta_n r_n = n\hbar \ (n = 3). \quad (2)$$

Решая систему двух уравнений (1) и (2) с двумя неизвестными, получим:

$$\vartheta_n = \frac{1}{n\hbar} \cdot \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0}; \quad (3)$$

$$r_n = n^2 \cdot \frac{4\pi\varepsilon_0}{me^2} \hbar. \quad (4)$$

Используя связь между линейной скоростью и линейной частотой вращения, получим ответ на вопрос задачи:

$$\nu_n = \frac{\vartheta_n}{2\pi r_n} = \frac{m_e \cdot e^4}{(4\pi\varepsilon_0)^2} \cdot \frac{1}{n^3}. \quad (5)$$

Расчет:

$$\nu_n = 2{,}42 \cdot 10^{14} \text{ Гц.}$$

Ответ: $\nu_n = 2{,}42 \cdot 10^{14}$ Гц.

Пример 5. Определите частоту света, излучаемого атомом водорода, при переходе электрона на уровень с главным квантовым числом $n = 2$, если радиус орбиты электрона изменился в $k = 9$ раз.

Дано:	*Решение*
$n = 2$	Согласно условиям задачи отношение радиусов орбит
$k = 9$	электрона в атоме водорода имеет вид:
$\nu = ?$	

$$\frac{r_m}{r_n} = k = \frac{m^2}{n^2}. \qquad (1)$$

Искомую линейную частоту найдем, воспользовавшись сериальной формулой Бальмера:

$$\nu = R\left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2}\right). \qquad (2)$$

Выразим m^2 из соотношения (1):

$$m^2 = 9n^2 \qquad (3)$$

и подставим это значение в соотношение (2). Получим ответ на вопрос задачи:

$$\nu = \frac{R}{n^2}\left(1 - \frac{1}{k}\right). \qquad (4)$$

Расчет:

$$\nu = 0{,}731 \cdot 10^{15}\ \text{Гц}.$$

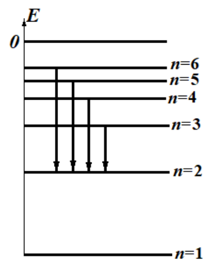
Ответ: $\nu = 0{,}731 \cdot 10^{15}$ Гц.

Пример 6. Учитывая, что энергия ионизации атома водорода составляет $E_i = 13{,}6$ эВ, определите в электронвольтах энергию фотона, соответствующую самой коротковолновой линии серии Бальмера атома водорода. Нарисуйте энергетическую диаграмму переходов для серии Бальмера.

Дано:	*Решение*
$E_i = 13{,}6$ эВ	Энергия ионизации – это энергия, соответствующая отрыву электрона от атома:
$E_{\text{Б min}} = ?$	$(E_{\text{бесконечн}} - E_{\min}) = E_i$.

По определению энергия ионизации равна:

$$E_i = h\nu_i = hR\left(\frac{1}{1^2} - 0\right) = hR. \qquad (1)$$



Самой коротковолновой линии в серии Бальмера спектра атома водорода соответствует переход с уровня $m = 6$ на уровень $n = 2$ (в серии Бальмера все переходы совершаются с вышележащих уровней на второй), тогда энергия, соответствующая этому переходу, будет равна:

$$E_{\text{Б min}} = hR\left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2}\right) = hR\left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{6^2}\right) = E_i\,\frac{2}{9}. \qquad (2)$$

Нарисуем энергетическую диаграмму.

Расчет:

$$E_{\text{Б min}} = 3{,}022 \text{ эВ}.$$

Ответ: $E_{\text{Б min}} = 3{,}022$ эВ.

Пример 7. Учитывая, что энергия ионизации атома водорода составляет $E_i = 13{,}6$ эВ, определите первый потенциал возбуждения φ_1 этого атома.

Дано:	*Решение*
$E_i = 13{,}6$ эВ	Энергия ионизации – это энергия, соответствующая отрыву электрона от атома:
$\varphi_1 = ?$	$(E_{\text{бесконечн}} - E_{\min}) = E_i$.

Первый потенциал возбуждения φ_1 – это ускоряющее напряжение, соответствующее переходу невозбужденного атома в первое возбужденное состояние, который равен

$$E_i = e\varphi_1 = hR. \qquad (1)$$

С другой стороны:

$$e\varphi_1 = h\nu_{1,2} = hR\left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2}\right) = \frac{3}{4}E_i. \qquad (2)$$

Для первого потенциала возбуждения

$$n = 1,\ m = 2.$$

Из соотношения (2) выразим φ_1 и получим ответ на вопрос задачи:

$$\varphi_1 = \frac{3}{4e}\,E_i. \qquad (3)$$

Расчет:

$$\varphi_1 = \frac{3}{4e}E_i = \frac{3 \cdot 13{,}6 \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-19}}{4 \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-19}} = 10{,}2 \text{ В}.$$

Ответ: $\varphi_1 = 10{,}2$ В.

Пример 8. Определите, какие первые три спектральные линии появятся в видимой области спектра излучения атомарного водорода под действием ультрафиолетового излучения с длиной волны $\lambda = 95$ нм.

Дано:	*Решение*
$Z = 1$	Энергия фотона равна
$\lambda = 9{,}5 \cdot 10^{-8}$ м	$$\varepsilon = \frac{hc}{\lambda}. \qquad (1)$$
$\lambda_{32} = ?\ \lambda_{42} = ?;\ \lambda_{52} = ?$	

В видимой области спектра атома водорода находится одна серия – серия Бальмера, все переходы в этой серии осуществляются с вышележащих уровней на второй энергетический уровень. Следовательно, будут наблюдаться спектральные линии с длинами волн: λ_{32}; λ_{42}; λ_{52}.

Длины волн спектральных линий водорода серии Бальмера определяются формулой

$$\frac{1}{\lambda} = R\left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2}\right), \tag{2}$$

где $R = 1{,}1 \cdot 10^7$ м$^{-1}$; $n = 2$; $m = 3, 4, 5$.

Тогда:

$$\frac{1}{\lambda_{32}} = R\left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2}\right); \tag{3}$$

$$\frac{1}{\lambda_{42}} = R\left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{4^2}\right); \tag{4}$$

$$\frac{1}{\lambda_{52}} = R\left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{5^2}\right). \tag{5}$$

Расчет:

$\lambda_{32} = 7{,}81 \cdot 10^{-7}$ м; $\lambda_{42} = 5{,}49 \cdot 10^{-7}$ м; $\lambda_{52} = 4{,}26 \cdot 10^{-7}$ м.

Ответ: $\lambda_{32} = 7{,}81 \cdot 10^{-7}$ м; $\lambda_{42} = 5{,}49 \cdot 10^{-7}$ м; $\lambda_{52} = 4{,}26 \cdot 10^{-7}$ м.

Задачи для аудиторной работы

Задача 1. Определите энергию фотона, соответствующего второй линии в серии Пашена атома водорода.

Задача 2. Определите потенциальную $W_р$, кинетическую W_K и полную W энергии электрона, находящегося на первой орбите атома водорода.

Задача 3. Определите минимальную и максимальную энергии фотона в серии Лаймана спектра атома водорода.

Задача 4. Определите энергию фотона, испускаемого при переходе электрона в атоме водорода с третьего энергетического уровня на второй.

Задача 5. Определите минимальную и максимальную энергии фотона видимой серии спектра атома водорода (серии Бальмера). Нарисуйте энергетическую диаграмму.

Задача 6. Найдите коротковолновую границу непрерывного рентгеновского спектра для случая, когда к рентгеновской трубке приложена разность потенциалов 40 кВ.

Задача 7. Заполненной электронной оболочке соответствует главное квантовое число $n = 2$. Определите число электронов на этой оболочке, которые имеют одинаковые квантовые числа: $m_l = 0$, $m_s = -1/2$.

Задача 8. Определите длину волны спектральной линии, соответствующей переходу электрона в атоме водорода с шестой боровской орбиты на вторую. К какой серии относится эта линия? Нарисуйте энергетическую диаграмму, соответствующую этому переходу.

Билеты для контроля усвоения темы

Билет 1

1. Какие спектральные серии атома водорода лежат в инфракрасной области? Каков физический смысл главного квантового числа.

2. Запишите формулы: 1) Бальмера для спектральной серии атома водорода; 2) момента импульса электрона, движущегося по стационарной орбите с номером n.

3. Атом водорода находится в возбужденном состоянии, характеризуемом главным квантовым числом $n = 4$. Нарисуйте на энергетической диаграмме все возможные спектральные линии, соответствующие переходам атома из возбужденного состояния в основное.

4. Определите длину волны спектральной линии, соответствующей переходу электрона с пятой боровской орбиты на вторую. К какой серии относится эта линия?

Билет 2

1. Сформулируйте первый постулат Бора. Опишите ядерную (планетарную) модель атома.

2. Какой энергетический уровень называется основным? Запишите формулу, определяющую величину энергии электрона, находящегося на энергетическом уровне с номером m.

3. Выведите формулу для расчета радиуса n-й орбиты электрона в атоме водорода.

4. Максимальная длина волны спектральной водородной линии серии Лаймана равна 0,12 мкм. Считая, что постоянная Ридберга неизвестна, определите максимальную длину волны линии серии Бальмера.

Билет 3

1. Сформулируйте второй постулат Бора. Дайте определение главного квантового числа.

2. Какой энергетический уровень называется возбужденным? Какая спектральная серия атома водорода лежит в ультрафиолетовой области?

3. Выведите формулу для расчета величины энергии электрона, находящегося на энергетическом уровне с номером m.

4. Определите длину волны, соответствующую границе серии Пашена.

Билет 4

1. Запишите формулы: 1) энергетического интервала между двумя соседними энергетическими уровнями; 2) энергии фотона.

2. Запишите формулы: 1) Бальмера; 2) максимальной энергии фотона в видимой серии спектра водорода.

3. Нарисуйте энергетическую диаграмму переходов, соответствующих серии Лаймана спектра атома водорода.

4. Определите максимальную и минимальную энергии фотона в серии спектра Бальмера атома водорода.

Билет 5

1. Запишите формулы: 1) изменения энергии при переходе электрона в атоме водорода, сопровождающемся излучением фотона с длиной волны λ; 2) энергии частицы на уровне с номером n.

2. Сформулируйте первый постулат Бора. Дайте определение основного энергетического уровня.

3. Нарисуйте энергетическую диаграмму переходов, соответствующих серии Пашена спектра атома водорода.

4. Определите длину волны, соответствующую границе серии Бальмера.

Билет 6

1. Запишите формулы, определяющие: 1) радиус n-й орбиты электрона в атоме водорода; 2) разность энергий для двух соседних энергетических уровней.

2. Какой энергетический уровень называется основным? Какой энергетический уровень называется возбужденным?

3. Нарисуйте энергетическую диаграмму переходов, соответствующих серии Бальмера спектра атома водорода.

4. Определите длину волны, соответствующую первой спектральной линии в серии Пашена.

Практическое занятие 10
ЭЛЕМЕНТЫ ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ

Основные формулы

Закон радиоактивного распада:

$$N = N_0 \exp[-\lambda t], \tag{10.1}$$

где N_0 – начальное количество радиоактивных ядер; N – количество нераспавшихся радиоактивных ядер к моменту времени t; λ – постоянная радиоактивного распада.

$$N_{\text{расп}} = N_0 - N_0 \exp[-\lambda t]. \tag{10.2}$$

Период полураспада:

$$T_{1/2} = \frac{\ln 2}{\lambda}. \tag{10.3}$$

Среднее время жизни радиоактивного ядра:

$$\tau = \frac{1}{\lambda}. \tag{10.4}$$

Активность радиоактивного ядра:

$$\text{A} = \left|\frac{dN}{dt}\right| = N\lambda. \tag{10.5}$$

Схема α-распада:

$$X_Z^A \to Y_{Z-2}^{A-4} + \text{He}_2^4. \tag{10.6}$$

Схема β^--распада:

$$X_Z^A \to Y_{Z+1}^{A} + e_{-1}^0. \tag{10.7}$$

Схема β^+-распада:

$$X_Z^A \to Y_{Z-1}^{A} + e_{+1}^0, \tag{10.8}$$

где X_Z^A – материнское ядро; Y – символ дочернего ядра; He_2^4 – ядро гелия (α-частица); e_{-1}^0 – символическое обозначение электрона; e_{+1}^0 – символическое обозначение позитрона.

Дефект массы:

$$\Delta m = \left[Z m_{\text{H}_1^1} + (A - Z) m_n\right] - m_\text{a}, \tag{10.9}$$

где m_a – масса атома.

Энергия связи:

$$E_{\text{св}} = c^2 \Delta m = c^2 \left\{\left[Z m_{\text{H}_1^1} + (A - Z) m_n\right] - m_\text{a}\right\}. \tag{10.10}$$

Масса электрона:

$$m_e = 9{,}1 \cdot 10^{-31} \text{ кг} = 0{,}511 \text{ МэВ}. \qquad (10.11)$$

Масса протона:

$$m_p = 1{,}6726 \cdot 10^{-27} \text{ кг} = 938{,}28 \text{ МэВ}. \qquad (10.12)$$

Масса нейтрона:

$$m_n = 1{,}6749 \cdot 10^{-27} \text{ кг} = 939{,}57 \text{ МэВ}. \qquad (10.13)$$

Схема распада свободного нейтрона:

$$n \rightarrow p + e^{-} + \tilde{\nu}, \qquad (10.14)$$

где $\tilde{\nu}$ – антинейтрино.

Энергия покоя частицы с массой покоя m_0:

$$E_0 = c^2 m_0. \qquad (10.15)$$

Методические указания

Ядро характеризуется зарядом и массой.

Одной из важнейших характеристик атомного ядра является зарядовое число – Z. Оно равно количеству протонов, входящих в состав ядра. Заряд ядра равен $+Ze$, где Z – атомный номер (совпадающий с порядковым номером элемента в периодической системе Менделеева), e – положительный элементарный заряд. Частицы, входящие в состав ядра (протон и нейтрон), называются *нуклонами* (ядерными частицами).

Число нуклонов (суммарное число протонов и нейтронов) в ядре обозначается буквой A и называется массовым числом ядра.

Число нейтронов в ядре равно

$$N = A - Z.$$

Для обозначения ядер применяется символ ${}_{Z}^{A}X$, где под X подразумевается химический символ данного элемента. Слева вверху ставится массовое число, слева внизу – зарядовое число.

Ядра с одинаковым Z, но с разными A называются *изотопами*.

Ядра с одинаковым массовым числом называются *изобарами*.

Ядра с одинаковым числом нейтронов называются *изотонами*.

Радиоактивные ядра с одинаковыми Z и A, отличающиеся периодом полураспада, называются *изомерами*.

Масса ядра меньше суммы масс входящих в него частиц. Это обусловлено тем, что при объединении нуклонов в ядро выделяется энергия связи. Так как удельная энергия связи зависит от массового числа, то энергетически выгодными являются следующие процессы: 1) деление тяжелых ядер на несколько более легких ядер; 2) слияние (синтез) легких ядер в одно ядро. Оба процесса сопровождаются выделением большого количества энергии.

При радиоактивных распадах рассматриваем два типа распадов – альфа- и бета-распады.

При ядерных реакциях выполняются два закона сохранения: зарядового и массового чисел.

Для деления тяжелого ядра ему необходимо сообщить дополнительную энергию (энергию активации).

Если сумма энергий до реакции больше суммы энергий после реакции, то реакция идет с поглощением энергии, если же наоборот – то реакция идет с выделением энергии.

Примеры решения задач

Пример 1. Объясните отличие изотопов и изобаров.

Решение. Отличие между изотопами и изобарами вытекает из их определений. По определению изотопы – это ядра с одинаковыми Z, но разными А, а изобары – это ядра с одинаковыми A, но разными Z.

Пример 2. Определите период полураспада радиоактивного изотопа, если 5/8 начального количества ядер радиоактивного изотопа распадается за время $t = 849$ с.

Дано:	*Решение*
$T = 14\,169\,600$ с $m = 10^{-9}$ кг $N_а = 6{,}02 \cdot 10^{26}$ 1/кг-атом $m_0 = 45$ кг/кг-атом	Количество атомов радиоактивного вещества ΔN, распадающихся за время Δt, определяется формулой $$\lvert\Delta N\rvert = (\ln 2 \,/\, T) \cdot N \cdot \Delta t,$$
$A = ?$	где T – период полураспада изотопа; N – число его атомов в данной массе.

Число атомов N связано с массой препарата m соотношением

$$N = (m \,/\, m_0) N_а,$$

где $N_а$ – число Авогадро; m_0 – масса одного килограмма атома.

Расчет:

$$A = |\Delta N| / \Delta t = \ln 2 \cdot m \cdot N_а / T \cdot m_0 = 6{,}53 \cdot 10^8 \text{ расп/с}.$$

1 кюри = $3{,}7 \cdot 10^{10}$ расп/с, следовательно: $A = 17{,}7$ мккюри.

Ответ: $A = 17{,}7$ мккюри.

Пример 3. Найдите энергию, освобождающуюся при ядерной реакции:

$$_3Li^7 + {}_1H^1 \rightarrow {}_2He^4 + {}_2He^4.$$

Дано:

$_3Li^7 + {}_1H^1 \rightarrow {}_2He^4 + {}_2He^4$

$m_1 = 7{,}018\ 23$ а.е.м.

$m_2 = 1{,}008\ 14$ а.е.м.

$m_3 = 4{,}003\ 88$ а.е.м.

$E = ?$

Решение

$$E = c^2(\sum M_1 - \sum M_2) = c^2 \cdot \Delta M.$$

Сумма масс исходных частиц:

$$\sum M_1 = m_1 + m_2 = 8{,}026\ 37 \text{ а.е.м.}$$

Сумма масс образовавшихся частиц:

$$\sum M_2 = 2m_3 = 8{,}007\ 76 \text{ а.е.м.}$$

Таким образом, дефект масс:

$$\Delta M = 0{,}018\ 61 \text{ а.е.м.}$$

Следовательно, энергия, выделившаяся при реакции:

$$E = \Delta M \cdot 931 \text{ МэВ}.$$

Ответ: $E = \Delta M \cdot 931$ МэВ.

Пример 4. Принимая, что источником энергии солнечного излучения является энергия образования гелия из водорода по следующей циклической реакции:

$$_6C^{12} + {}_1H^1 \rightarrow {}_7N^{13} \rightarrow {}_6C^{13} + {}_{+1}e^0,$$
$$_6C^{13} + {}_1H^1 \rightarrow {}_7N^{14},$$
$$_7N^{14} + {}_1H^1 \rightarrow {}_8O^{15} \rightarrow {}_7N^{15} + {}_{+1}e^0,$$
$$_7N^{15} + {}_1H^1 \rightarrow {}_6C^{12} + {}_2He^4,$$

посчитайте, сколько тонн водорода ежесекундно должно превращаться в гелий. Солнечная постоянная равна 1,96 кал/(см^2 · мин). Принимая, что водород составляет 35 % массы Солнца, посчитайте, на сколько лет хватит запаса водорода, если излучение Солнца считать неизменным.

Дано:	*Решение*
$m({}_6C^{12}) = 12{,}0038$ а.е.м. $m({}_1H^1) = 1{,}008\ 14$ а.е.м. $m({}_7N^{13}) = 13{,}009\ 87$ а.е.м. $m({}_6C^{13}) = 13{,}003\ 35$ а.е.м. $m({}_7N^{14}) = 14{,}007\ 52$ а.е.м. $m({}_2He^4) = 4{,}003\ 88$ а.е.м. $m({}_7N^{15}) = 15{,}000\ 11$ а.е.м. $m({}_{+1}e^0) = 0{,}000\ 55$ а.е.м. $q = 1370\,\dfrac{\text{Вт}}{\text{м}^2}$ $m({}_1H^1) = M_c \cdot 0{,}35$ $M_с = 2 \cdot 10^{30}$ кг $r = 1{,}49 \cdot 10^{11}$ м $t = ?$	В результате проведенного цикла четыре водородных ядра превращаются в одно ядро гелия. Углерод, ведущий себя как химический катализатор, может использоваться снова. В результате этого цикла освобождается энергия, равная $E = c^2 \cdot \Delta M = 4{,}3 \cdot 10^{-12}$ Дж, где ΔM – дефект масс. Солнечная постоянная q – это количество энергии, падающей на единицу площади поверхности Земли в единицу времени:

$$q = \left(\frac{R}{r}\right)^2 \sigma \cdot T^4,$$

где R – радиус Солнца; r –расстояние от Солнца до Земли; σ – постоянная Стефана – Больцмана; T – термодинамическая температура Солнца.

$$q = 1370\,\frac{\text{Вт}}{\text{м}^2}.$$

С другой стороны, зная величину солнечной постоянной и расстояние от Земли до Солнца, найдем излучение Солнца в 1 секунду:

$$E_1 = q \cdot 4\pi \cdot r^2,$$

где r – расстояние от Земли до Солнца.

Подставив числовые значения, получим

$$E_1 = 3{,}85 \cdot 10^{26} \text{ Дж}.$$

Если превращение четырех атомов водорода дает энергию $4{,}3 \cdot 10^{-12}$ Дж, то очевидно, что для излучения энергии $3{,}8 \cdot 10^{26}$ Дж необходимо расходовать водород в количестве $m = 5{,}9 \cdot 10^{11}$ кг в одну секунду.

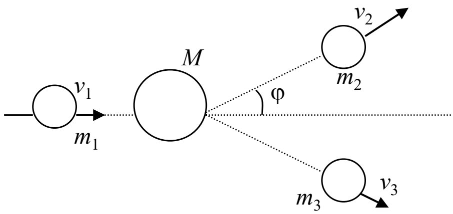
Так как масса Солнца равна $2 \cdot 10^{30}$ кг, то запас водорода в солнечном веществе равен $m({}_1H^1) = M_с \cdot 0{,}35 = 2 \cdot 10^{30} \cdot 0{,}35 = 7 \cdot 10^{29}$ кг.

Следовательно, данного запаса водорода хватит на $t = 4 \cdot 10^{10}$ лет.

Ответ: $t = 4 \cdot 10^{10}$ лет.

Пример 5. В реакции $_7N^{14}(\alpha, p)$ кинетическая энергия α-частицы ($_2He^4$) равна $E_\alpha = 7{,}7$ МэВ. Под каким углом к направлению движения α-частицы вылетает протон, если известно, что его кинетическая энергия $E_p = 8{,}5$ МэВ?

Дано:	*Решение*
$_7N^{14}(\alpha, p)$	Запишем ядерную реакцию:
$E_\alpha = 7{,}7$ МэВ	$\alpha + {}_7N^{14} \rightarrow p + {}_8O^{16}$.
$E_p = 8{,}5$ МэВ	Обозначим: m_1, m_2, m_3 – массовые числа
$m_1 = 4{,}003\ 88$ а.е.м.	бомбардирующей α-частицы, протона и
$m_2 = 1{,}007\ 59$ а.е.м.	ядра отдачи (в нашем случае ядра кисло-
$m_3 = 15{,}994\ 91$ а.е.м.	рода $_8O^{16}$); E_1, E_2, E_3 – их кинетические
$\varphi = ?$	энергии.



Если ядро азота неподвижно, то по закону сохранения энергии

$$E_1 + Q = E_2 + E_3,$$

где Q – энергия ядерной реакции.

Закон сохранения импульса:

$$p_3^{\,2} = p_1^{\,2} + p_2^{\,2} - 2p_1 \cdot p_2 \cdot \cos\varphi.$$

Так как

$$p^2 = (mV)^2 = (mV^2 / 2)2m = E \cdot 2m,$$

то закон сохранения импульса примет вид:

$$2m_3E_3 = 2m_1E_1 + 2m_2E_2 - 4\cos\varphi\sqrt{m_1E_1m_2E_2}\ ,$$

или

$$E_3 = m_1E_1 / m_3 + m_2E_2 / m_3 - 2\cos\varphi\sqrt{m_1E_1m_2E_2}\,/\,m_3.$$

Исключая энергию E_3, получим формулу, связывающую кинетическую энергию бомбардирующих частиц с кинетической энергией полученных частиц:

$$E_1(m_3 - m_1)/m_3 + Q = E_2(m_3 + m_2)/m_3 - 2\cos\varphi\sqrt{m_1E_1m_2E_2}\,/\,m_3.$$

Здесь $Q = -1{,}18$ МэВ.

Выразим cos φ и подставим численные данные:

$$\cos\varphi = (m_3 + m_2)/2\sqrt{m_1E_1m_2E_2} - (m_3 - m_1)/2\sqrt{m_1E_1m_2E_2} -$$

$$- m_3Q/2\sqrt{m_1E_1m_2E_2} = 0{,}59.$$

$$\varphi = \arccos 0{,}59 = 54°.$$

Ответ: φ = arccos 0,59 = 54°.

Задачи для аудиторной работы

Задача 1. Определите период полураспада радиоактивного изотопа, если 5/8 начального количества ядер радиоактивного изотопа распадается за время t = 849 с.

Задача 2. Определите, какая часть начального количества ядер радиоактивного изотопа распадается за время t, равное двум периодам полураспада.

Задача 3. Постоянная радиоактивного распада изотопа актиния Ac_{89}^{225} составляет 10 суток. Определите время, за которое распадется 1/3 начального количества ядер актиния.

Задача 4. Первоначальная масса радиоактивного изотопа йода I_{53}^{131} (период полураспада $T_{1/2}$ = 8 сут) равна 1 г. Определите: 1) начальную активность изотопа; 2) его активность через 3 суток.

Задача 5. Определите период полураспада $T_{1/2}$ некоторого радиоактивного изотопа, если его активность за 5 суток уменьшилась в 2,2 раза.

Задача 6. Определите, какая энергия в электронвольтах соответствует дефекту массы $\Delta m = 3 \cdot 10^{-20}$ мг.

Задача 7. Определите энергию связи ядра атома гелия He_2^4. Масса нейтрального атома гелия равна $6{,}6467 \cdot 10^{-27}$ кг; $m_{H_1^1} = 1{,}6736 \cdot 10^{-27}$ кг; $m_n = 1{,}675 \cdot 10^{-27}$ кг.

Задача 8. Радиоактивный изотоп радия Ra_{88}^{225} претерпевает четыре α-распада и два β^--распада. Определите для получившегося ядра зарядовое и массовое числа.

Задача 9. Радиоактивный изотоп тория Th_{90}^{232} претерпевает последовательно α-распад, два β^--распада и еще один α-распад. Определите конечный продукт деления.

Задача 10. Постоянная радиоактивного распада изотопа свинца Pb_{82}^{210} равна $\lambda = 10^{-9}$ с$^{-1}$. Определите время, в течение которого распадется 2/5 начального количества ядер этого изотопа.

Билеты для контроля усвоения темы

Билет 1

1. Дайте определения: 1) α-излучению; 2) изотопам.

2. Опишите свойства β-излучения. Дайте определение дефекта массы ядра.

3. Запишите формулы, определяющие: 1) активность радионуклида и единицу ее измерения; 2) период полураспада радиоактивных ядер.

4. Период полураспада радиоактивного изотопа актиния *Ac* составляет 10 суток. Определите постоянную радиоактивного распада и время, за которое распадется 1/3 начального количества ядер актиния.

Билет 2

1. Дайте определения: 1) γ-излучения; 2) активности радионуклида.

2. Запишите формулы, определяющие: 1) число ядер, оставшихся нераспавшимися через промежуток времени *t*; 2) период полураспада радиоактивных ядер.

3. Как и во сколько раз изменится число ядер радиоактивного вещества за время, равное трем периодам полураспада?

4. Найдите энергию, поглощенную при ядерной реакции:

$$N_7^{14} + He_2^4 \to H_1^1 + O_8^{17}.$$

Билет 3

1. Запишите определения: 1) радиоактивного распада; 2) дочернего ядра.

2. Сформулируйте два правила смещения.

3. Запишите формулы, определяющие: 1) связь между активностью радионуклида и постоянной радиоактивного распада; 2) период полураспада радиоактивных ядер.

4. Постоянная радиоактивного распада изотопа $_{82}Pb^{210}$ равна 10^{-9} $с^{-1}$. Определите время, в течение которого распадется 40 % от начального количества ядер этого изотопа.

Билет 4

1. Запишите определения: 1) изотонов; 2) искусственной радиоактивности.

2. Сформулируйте и запишите закон радиоактивного распада.

3. Запишите формулы, определяющие: 1) связь между средним временем жизни радиоактивного ядра и постоянной радиоактивного распада; 2) процесс α-распада.

4. Определите энергию связи, приходящуюся на один нуклон, для ядра $^{56}_{26}\mathrm{Fe}$. Масса атома железа равна m_{Fe} = 52 103,47 МэВ, m_{H} = 938,79 МэВ.

Билет 5

1. Запишите определения: 1) термоядерной реакции; 2) материнского ядра.

2. Запишите формулы, определяющие: 1) связь между средним временем жизни радиоактивного ядра и постоянной радиоактивного распада; 2) закон сохранения электрического заряда при радиоактивном распаде.

3. Чему равна энергия связи нуклонов в ядре?

4. Среднее время жизни атомов некоторого радиоактивного вещества τ = 1,000 с. Определите вероятность того, что ядро распадется за промежуток времени t, равный 1 с.

Билет 6

1. Запишите определения: 1) элементарной частицы; 2) ядерной реакции.

2. Какая величина называется периодом полураспада радиоактивного изотопа? Какая энергия называется энергией связи ядра?

3. Как изменится положение химического элемента в таблице Менделеева после двух актов α-распада его атомов?

4. Сколько атомов полония распадется за сутки из 1 млн атомов?

Билет 7

1. Запишите определения: 1) массового числа; 2) зарядового числа ядра.

2. Запишите формулы, определяющие: 1) самый распространенный вид ядерной реакции; 2) дефект массы.

3. Запишите формулы, определяющие: 1) β^--распад; 2) период полураспада.

4. Как изменится положение химического элемента в таблице Менделеева после двух актов β-распада его атомов?

Билет 8

1. Запишите определения: 1) массового числа; 2) зарядового числа ядра.

2. Запишите: 1) закон сохранения зарядовых чисел; 2) определение периода полураспада радиоактивного вещества.

3. Запишите формулы, определяющие: 1) β^--распад; 2) период полураспада.

4. Найдите энергию, выделяющуюся при ядерной реакции:

$$\mathrm{Li}_3^6 + \mathrm{H}_1^2 \rightarrow \mathrm{He}_2^4 + \mathrm{He}_2^4.$$

Билет 9

1. Запишите определения: 1) нуклонов; 2) изотопов.

2. Сформулируйте: 1) закон радиоактивного распада; 2) определение дефекта массы ядра.

3. Запишите формулы, определяющие: 1) реакцию распада свободного нейтрона; 2) период полураспада радиоактивных ядер.

4. Вычислите дефект массы и энергию связи ядра трития ${}_1H^3$.

Билет 10

1. Запишите определения: 1) изобаров; 2) естественной радиоактивности.

2. Как изменится положение химического элемента в таблице Менделеева после последовательных одного акта α-распада и двух β^--распадов?

3. Запишите формулы, определяющие: 1) среднее время жизни радиоактивного ядра; 2) период полураспада радиоактивных ядер.

4. Вычислите дефект массы и энергию связи ядра дейтерия ${}_1H^2$.

Практическое занятие 11
ПОДГОТОВКА К ИТОГОВОМУ ТЕСТИРОВАНИЮ

Тест-тренинг по курсу «Физика-3» содержит 40 заданий:

- с выбором одного верного ответа;
- с выбором нескольких верных ответов;
- на упорядочение ответов;
- на соответствие понятий;
- открытая форма ответа.

Тест-тренинг

Задание 1. Гармонические колебания величины S описываются уравнением

1) $S = S_{\max}\sin(\omega_0 t + \varphi_0)$
2) $S = S_{\max}\cos(\omega_0 t + \varphi_0)$
3) $S = S_{\max}\sin(\frac{2\pi}{T} t + \varphi_0)$
4) $S = S_{\max}\cos(\frac{2\pi}{T} t + \varphi_0)$

Задание 2. Колебательным контуром называется

1) груз массой m, подвешенный на абсолютно упругой пружине и совершающий гармонические колебания под действием упругой силы
2) идеализированная система, состоящая из материальной точки массой m, подвешенной на нерастяжимой невесомой нити, и колеблющаяся под действием силы тяжести
3) твердое тело, совершающее под действием силы тяжести колебания вокруг неподвижной горизонтальной оси, проходящей через точку O, не совпадающую с центром масс тела
4) цепь, состоящая из соединенных последовательно катушки индуктивностью L, конденсатора емкостью C и резистора сопротивлением R

Задание 3. Дифференциальное уравнение свободных гармонических колебаний величины S описывается уравнением вида

1) $\frac{d^2s}{dt^2}+\omega_0{}^2 s=0$

2) $\frac{d^2s}{dt^2}+2\delta\frac{ds}{dt}+\omega_0{}^2 s=0$

3) $\frac{d^2s}{dt^2}+2\delta\frac{ds}{dt}+\omega_0{}^2 s=x_0\cdot\cos\omega t$

4) $\frac{d^2s}{dt^2}+2\delta\frac{ds}{dt}+\omega_0{}^2 s=U_0\cdot\cos\omega t$

Задание 4. Укажите верное соотношение между физическими величинами и их формулами.

1) волновое число	1) $T=2\pi\sqrt{LC}$
2) период свободных гармонических электромагнитных колебаний	2) $A=A_0e^{-\delta t}$
3) амплитуда затухающих колебаний	3) $T=\frac{1}{\nu}$
4) скорость распространения колебаний	4) $\upsilon=\lambda\cdot\nu$
	5) $k=\frac{2\pi}{\lambda}$

Задание 5. Укажите единицу измерения циклической частоты колебаний.

1) $с^{-1}$
2) Гц
3) рад/с
4) Вт/м^2
5) м

Задание 6. При переносе пружинного маятника с экватора на южный полюс Земли его частота колебаний

1) увеличится
2) уменьшится
3) не изменится
4) станет равной нулю

Задание 7. Период колебаний в идеальном колебательном контуре после уменьшения площади обкладок в 4 раза и уменьшения расстояния между пластинами плоского конденсатора контура в 4 раза

1) увеличится в 2 раза
2) увеличится в 4 раза
3) не изменится
4) уменьшится в 2 раза
5) уменьшится в 4 раза

Задание 8. Свободными затухающими колебаниями называются

1) движения или процессы, которые характеризуются определенной повторяемостью во времени
2) движения или процессы, которые совершаются за счет первоначально сообщенной энергии при последующем отсутствии внешних воздействий на колебательную систему
3) движения или процессы, при которых колеблющаяся величина изменяется со временем по закону синуса или косинуса
4) движения или процессы, при которых амплитуда колеблющейся величины с течением времени уменьшается из-за потерь энергии
5) незатухающие движения или процессы, поддерживаемые в реальной системе за счет периодически действующего фактора, компенсирующего потери энергии

Задание 9. Декрементом затухания называется

1) промежуток времени, в течение которого амплитуда затухающих колебаний уменьшается в e раз
2) отношение двух амплитуд, следующих друг за другом через период
3) логарифм отношения двух амплитуд, следующих друг за другом через период
4) число колебаний, совершаемых за время уменьшения амплитуды в e раз

Задание 10. Дифференциальное уравнение затухающих колебаний величины S описывается уравнением вида

1) $\frac{d^2s}{dt^2}+\omega_0{}^2 s=0$

2) $\frac{d^2s}{dt^2}+2\delta\frac{ds}{dt}+\omega_0{}^2 s=0$

3) $\frac{d^2s}{dt^2}+2\delta\frac{ds}{dt}+\omega_0{}^2 s=x_0\cdot\cos\omega t$

4) $\frac{d^2s}{dt^2}+2\delta\frac{ds}{dt}+\omega_0{}^2 s=U_0\cdot\cos\omega t$

Задание 11. Укажите верное соотношение между физическими величинами и их формулами.

1) добротность колебательной системы	1) $A^2=A_1^2+A_2^2+2A_1A_2\cos(\varphi_2-\varphi_1)$
2) начальная фаза результирующего колебания при сложении двух гармонических колебаний одного направления и одинаковой частоты	2) $Q=\frac{\pi}{\lambda}$
3) уравнение траектории результирующего колебания при сложении двух взаимно перпендикулярных гармонических колебаний одинаковой частоты ω	3) $\mathrm{tg}\,\varphi=\frac{A_1\sin\varphi_1+A_2\sin\varphi_2}{A_1\cos\varphi_1+A_2\cos\varphi_2}$
4) амплитуда результирующего колебания при сложении двух гармонических колебаний одного направления и одинаковой частоты	4) $\frac{x^2}{A^2}-2\frac{xy}{AB}\cos\alpha+\frac{y^2}{B^2}\sin^2\alpha$

Задание 12. Единица измерения добротности колебательной системы

1) с

2) м/с

3) Дж

4) безразмерная величина

Задание 13. Единица измерения коэффициента затухания при электромагнитных колебаниях:

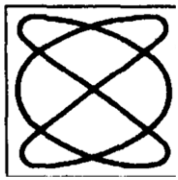
1) $\frac{\text{Гн}}{\text{Ом}}$

2) $\frac{1}{\text{с}}$

3) $\frac{\text{Ом}}{\text{Гн}}$

4) безразмерная величина

Задание 14. Для изображенной фигуры Лиссажу, полученной при сложении двух взаимно перпендикулярных гармонических колебаний с одинаковыми фазами, соотношение частот равно



1) 1:1

2) 1:2

3) 1:3

4) 2:3

5) 3:4

Задание 15. Связь разности фаз с разностью хода определяется выражением

1) $\delta = \frac{2\pi}{\lambda_0}\Delta$

2) $\delta = \frac{\lambda_0}{2\pi}\Delta$

3) $\delta = \frac{2\pi}{\Delta}\lambda_0$

4) $\delta = \frac{\Delta}{2\pi\lambda_0}$

Задание 16. Точка участвует одновременно в двух гармонических колебаниях одинаковой частоты, происходящих во взаимно перпендикулярных направлениях и описываемых уравнениями $x = A\sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)$ и $y = B\sin\omega t$. Определите уравнение траектории точки.

Задание 17. Явлением интерференции называется

1) явление различного поглощения света в зависимости от ориентации электрического вектора световой волны
2) явление раздваивания каждого падающего на кристалл светового пучка
3) пространственное перераспределение светового потока при наложении двух или нескольких когерентных волн, в результате чего в одних местах возникают максимумы, а в других – минимумы интенсивности
4) разложение в спектр пучка белого света при прохождении его через призму
5) зависимость физических свойств (упругих, механических, тепловых, электрических, магнитных, оптических) от направления в кристалле

Задание 18. Укажите верное соотношение между физическими величинами и их формулами.

1) условия главных максимумов интенсивности света при дифракции света	1) $\xi(x, t) = A\cos(\omega t - kx)$
2) ширина интерференционной полосы	2) $d\sin\varphi = m\lambda$
3) уравнение бегущей волны, распространяющейся в положительном направлении оси x	3) $\xi(x, t) = A\cos(\omega t + kx)$
4) условия максимума интенсивности при дифракции на пространственной решетке	4) $\Delta x = \frac{l\lambda}{d}$
	5) $2d\sin\theta = m\lambda$

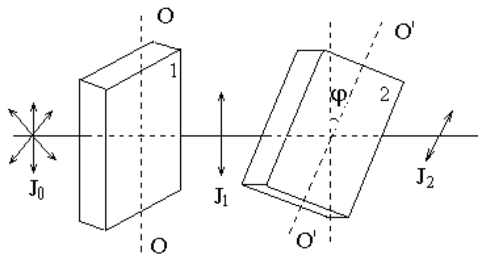
Задание 19. Единица измерения волнового числа

1) рад/м
2) рад
3) рад · м
4) рад/с

Задание 20. Укажите верное соотношение между физическими законами и их формулами.

1) закон Малюса	1) $P = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}}$
2) закон Брюстера	2) $I = I_0 \cos^2 \alpha$
3) условие интерференционного максимума	3) $\Delta = \pm(2m+1)\frac{\lambda}{2}$
4) степень поляризации	4) $\Delta = \pm 2m\frac{\lambda}{2}$
	5) $d \sin\varphi = \pm m\lambda$
	6) $\operatorname{tg} i_Б = n_{21}$

Задание 21. На пути естественного света помещены две пластинки турмалина. Если имеет место соотношение интенсивностей $J_2 = J_1$ (J_1 и J_2 – интенсивности света, прошедшего пластинки 1 и 2 соответственно), то угол между направлениями *OO* и *O'O'* равен



1) 0°
2) 30°
3) 45°
4) 60°
5) 90°

Задание 22. Рассчитайте период дифракционной решетки, на которую падает нормально свет с длиной волны 0,5 мкм, если главный максимум второго порядка наблюдается под углом 30°.

Задание 23. Тепловым излучением называется

1) процесс вырывания электронов с поверхности вещества под действием внешнего электромагнитного излучения
2) направленное движение заряженных частиц в электрическом поле
3) излучение, совершаемое за счет энергии теплового движения атомов и молекул вещества
4) способность некоторых атомных ядер самопроизвольно превращаться в другие ядра с испусканием различных видов излучений и частиц

Задание 24. Энергетической светимостью тела называется

1) энергия, излученная с единицы площади поверхности
2) мощность излучения с единицы площади поверхности в интервале частот единичной ширины
3) величина, показывающая, какая доля энергии, приносимой за единицу времени на единицу площади поверхности тела падающими на нее электромагнитными волнами с частотами от ν до $\nu + d\nu$, поглощается телом
4) энергия, излучаемая в единицу времени с единицы площади поверхности тела

Задание 25. Закон Стефана – Больцмана для теплового излучения описывается уравнением вида

1) $\dfrac{r_{\lambda,T}}{a_{\lambda,T}} = R_{\lambda,T}^{\text{АЧТ}}$
2) $\lambda_{\max} = \dfrac{b}{T}$
3) $R = \sigma T^4$
4) $T = \sqrt[4]{a_T}T$

Задание 26. Укажите верное соотношение между физическими величинами и их формулами.

1) цветовая температура	1) $\lambda_{\max} = \frac{b}{T}$
2) формула де Бройля	2) $\Delta E \cdot \Delta t >> \frac{h}{2\pi}$
3) длина волны Комптона	3) $\lambda = \frac{h}{p}$
4) импульс фотона	4) $\frac{h}{c \cdot m_0}$
	5) $T = \frac{b}{\lambda_{\max}}$
	6) $\frac{h\nu}{c}$

Задание 27. Единица измерения в СИ спектральной плотности энергетической светимости

1) $с^{-1}$
2) Дж/($м^2 \cdot с$)
3) Дж · с;
4) безразмерная величина

Задание 28. Укажите верное соотношение между физическими величинами и их формулами.

1) масса фотона	1) $m_\gamma = \frac{h}{\lambda}$
2) закон смещения Вина	2) $\frac{h}{c\lambda}$
3) длина волны красной границы фотоэффекта	3) $\Delta E \cdot \Delta t >> \frac{h}{2\pi}$
4) импульс фотона	4) $\frac{hc}{A_{вых}}$
	5) $T = \frac{b}{\lambda_{\max}}$
	6) $m_\gamma = \frac{h\nu}{c^2}$

Задание 29. При нагревании АЧТ длина волны, на которую приходится максимум спектральной плотности энергетической светимости, изменилась от 690 до 500 нм. Во сколько раз увеличилась при этом энергетическая светимость тела?

Задание 30. Гипотеза Планка гласит, что

1) атомные осцилляторы излучают энергию не непрерывно, а определенными порциями – квантами, причем энергия кванта пропорциональна частоте колебаний
2) свет частотой ν не только испускается, но и распространяется в пространстве и поглощается веществом отдельными порциями (квантами), энергия которых $\varepsilon_0 = h\nu$
3) не только фотоны, но и любые другие частицы материи наряду с корпускулярными обладают также волновыми свойствами
4) атомные осцилляторы всегда излучают энергию непрерывно

Задание 31. Соотношение неопределенностей Гейзенберга имеет вид

1) $\Delta x \cdot \Delta p_x \geq \dfrac{\hbar}{2}$

2) $h\nu = A_{\text{вых}} + eU_{\text{з}}$

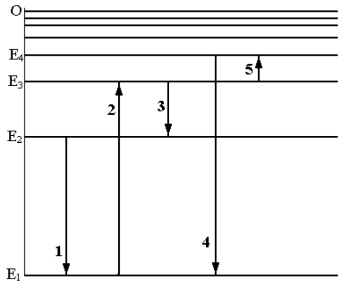
3) $\Delta E \cdot \Delta t \geq \dfrac{\hbar}{2}$

4) $\dfrac{1}{\lambda} = R\left(\dfrac{1}{n^2} - \dfrac{1}{m^2}\right)$

Задание 32. Единица измерения величины, определяемой по формуле $\dfrac{h}{m_0}c$.

1) с
2) $\dfrac{\text{м}}{\text{с}}$
3) м
4) безразмерная величина

Задание 33. На представленной диаграмме энергетических уровней атома переход, связанный с испусканием фотона наибольшей длины волны, обозначен цифрой ... .



Задание 34. Определите работу выхода электрона из вольфрама, если красная граница фотоэффекта для него $\lambda_{кр} = 275$ нм.

Задание 35. Фотон с длиной волны 100 пм рассеялся на свободном электроне. Определите в электронвольтах кинетическую энергию электрона отдачи.

Задание 36. Каковы основные свойства α-излучения?

1) отклоняется электрическим и магнитным полями
2) обладает высокой ионизирующей способностью
3) обладает малой проникающей способностью
4) представляет собой поток ядер гелия

Задание 37. Активностью нуклида называется

1) естественное радиоактивное превращение ядер, происходящее самопроизвольно
2) среднее время жизни радиоактивного ядра
3) число распадов, происходящих с ядрами образца в 1 секунду
4) промежуток времени, в течение которого исходное число радиоактивных ядер в среднем уменьшается вдвое

Задание 38. Единица измерения постоянной Планка.

1) Дж
2) Дж/с
3) Дж · с
4) безразмерная величина

Задание 39. Укажите верное соотношение между физическими величинами и их формулами.

1) период полураспада	1) $X_Z^A \rightarrow Y_{Z-2}^{A-4} + \mathrm{He}_2^4$
2) активность нуклида	2) $\Delta m = \left[Z\, m_p + (A - Z)m_n\right] - m_я$
3) уравнение β⁻-распада	3) $\mathrm{A} = \left\lvert\frac{dN}{dt}\right\rvert$
4) дефект массы	4) $T_{1/2} = \frac{\ln 2}{\lambda}$
	5) $X_Z^A \rightarrow Y_{Z+1}^{A} + e_{-1}^0$

Задание 40. Рассчитайте энергию ядерной реакции: $\mathrm{H}_1^2 + \mathrm{H}_1^3 \rightarrow \mathrm{He}_2^4 + n_0^1$. Определите, поглощается или выделяется эта энергия.

Заключение

Учебный материал пособия максимально соответствует тематике практических занятий изучаемого курса «Физика-3». Он адаптирован для студентов, имеющих различный уровень подготовки и различную мотивацию.

В пособии рассматриваются задания разного уровня сложности. Особое внимание уделено рассмотрению тестовых заданий итогового тестирования по курсу «Физика-3».

Авторы выражают уверенность, что учебно-методическое пособие «Колебания и волны. Оптика. Атом. Ядро» позволит организовать работу студентов на практических занятиях, при обучении по индивидуальным образовательным траекториям и поможет в подготовке к итоговому контролю.

Библиографический список

1. Порядок организации балльно-рейтинговой системы оценки успеваемости студентов : утвержден приказом от 26 октября 2017 года / Тольяттинский государственный университет. – Тольятти, 2017. – 14 с. – URL: tltsu.ru/sveden/document/Formi_sroki_kontrolya_26.10.17.pdf (дата обращения: 09.12.2021).
2. Козел, С. М. Физика. 10–11 классы. В 2 частях. 1 часть : пособие для учащихся и абитуриентов / С. М. Козел. – Москва : Мнемозина, 2010. – 287 с. – ISBN 978-5-346-01629-8.
3. Савельев, И. В. Курс общей физики. Учебное пособие. В 3 томах. Том 1. Механика. Молекулярная физика / И. В. Савельев. – Изд. 16-е, стер. – Санкт-Петербург [и др.] : Лань, 2020. – 432 с. – (Классическая учебная литература по физике). – URL: e.lanbook.com/book/142380 (дата обращения: 09.12.2021). – ISBN 978-5-8114-5539-3.
4. Савельев, И. В. Сборник вопросов и задач по общей физике : учеб. пособие для студентов вузов / И. В. Савельев. – Изд. 7-е, стер. – Санкт-Петербург [и др.] : Лань, 2016. – 288 с. – (Классическая учебная литература по физике). – URL: e.lanbook.com/book/71766 (дата обращения: 09.12.2021). – ISBN 978-5-8114-0638-8.
5. Открытая физика. Версия 2.6. Часть 2. Электродинамика. Электромагнитные колебания и волны. Оптика. Основы специальной теории относительности, квантовая физика, физика атома и атомного ядра : [мультимедийный курс физики] / авт. коллектив: С. М. Козел, В. А. Орлов, А. Ф. Кавтрев [и др.] ; под ред. С. М. Козела. – Долгопрудный : Физикон, 2005. – 1 CD. – ISBN 4607108472836.
6. Иродов, И. Е. Задачи по общей физике : учеб. пособие для студентов вузов / И. Е. Иродов. – Изд. 15-е, стер. – Санкт-Петербург [и др.] : Лань, 2018. – 416 с. – (Классическая учебная литература по физике). – URL: e.lanbook.com/book/99230 (дата обращения: 09.12.2021). – ISBN 978-5-8114-0319-6.

7. Трофимова, Т. И. Курс физики : учеб. пособие для инж.-техн. специальностей вузов / Т. И. Трофимова. – 20-е изд., стер. – Москва : Академия, 2014. – 558 с. – (Высшее профессиональное образование). – ISBN 978-5-4468-0627-0.
8. Чертов, А. Г. Задачник по физике : учеб. пособие для втузов / А. Г. Чертов, А. А. Воробьев. – 6-е изд., испр. – Москва : Интеграл-Пресс, 1997. – 544 с.

Приложение

1. Десятичные приставки к названиям единиц

Т – тера (10^{12})	д – деци (10^{-1})	н – нано (10^{-9})
Г – гига (10^{9})	с – санти (10^{-2})	п – пико (10^{-12})
М – мега (10^{6})	м – милли (10^{-3})	ф – фемто (10^{-15})
к – кило (10^{3})	мк – микро (10^{-6})	а – атто (10^{-18})

2. Внесистемные величины

1 час = 3600 с	1 сут = 86 400 с	1 год = 365,25 сут = $3{,}16 \cdot 10^{7}$ с
$1^\circ = 1{,}75 \cdot 10^{-2}$ рад	$1' = 2{,}91 \cdot 10^{-4}$ рад	$1'' = 4{,}85 \cdot 10^{-6}$ рад

3. Основные физические постоянные

Атомная единица массы	1 а.е.м. = $1{,}66 \cdot 10^{-27}$ кг
Гравитационная постоянная	$G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ м^3/(кг · с^2)
Магнитная постоянная	$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ Гн/м
Масса покоя нейтрона	$m_n = 1{,}675 \cdot 10^{-27}$ кг
Масса покоя протона	$m_\mathrm{p} = 1{,}672 \cdot 10^{-27}$ кг
Масса покоя электрона	$m_\mathrm{e} = 9{,}11 \cdot 10^{-31}$ кг
Постоянная Авогадро	$N_\mathrm{A} = 6{,}02 \cdot 10^{23}$ моль$^{-1}$
Постоянная Больцмана	$k = 1{,}38 \cdot 10^{-23}$ Дж/К
Постоянная Планка	$h = 6{,}63 \cdot 10^{-34}$ Дж · с
Скорость распространения света в вакууме	$c = 3{,}00 \cdot 10^{8}$ м/с
Универсальная газовая постоянная	$R = 8{,}31$ Дж/(моль · К)
Ускорение свободного падения	$g = 9{,}81$ м/с^2
Электрическая постоянная	$\varepsilon_0 = 8{,}85 \cdot 10^{-12}$ Ф/м $k = 1/(4\pi\varepsilon_0) = 9 \cdot 10^{9}$ м/Ф
Элементарный заряд	$e = 1{,}60 \cdot 10^{-19}$ Кл