

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«Тольяттинский государственный университет»

Институт машиностроения
(наименование института полностью)

Кафедра «Оборудование и технологии машиностроительного производства»
(наименование)

15.04.05 «Конструкторско-технологическое обеспечение машиностроительных производств»
(код и наименование направления подготовки, специальности)

Технология автоматизированного машиностроения
(направленность (профиль) / специализация)

ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА (МАГИСТЕРСКАЯ ДИССЕРТАЦИЯ)

на тему Исследование напряженно-деформированного состояния изделий из
неметаллических материалов

Обучающийся

А.А. Кириллов

(Инициалы Фамилия)

(личная подпись)

Руководитель

к.т.н., доцент В.А. Гуляев

(ученая степень (при наличии), ученое звание (при наличии), Инициалы Фамилия)

Тольятти 2022

Содержание

Введение.....	4
1 Постановка вопроса. Цель и задачи работы.....	6
1.1 Критерии качества кузова и его элементов	6
1.2 Известные методы диагностики конструкции кузова	9
1.3 Известные методы диагностики, контроля и оценки клеевого соединения	17
2 Аналитическое исследование прочности корпуса кузова с учетом вклеивания стекла типа триплекс.....	25
2.1 Механическая модель корпуса кузова	25
2.2 Математическое описание внутренних напряжений в автомобильном стекле.....	28
2.2.1 Математические модели деформирования оболочных элементов конструкций, взаимодействующих с упругими основаниями.....	31
2.2.2 Обобщенный вариационный принцип Лагранжа в механике составных тел.....	32
2.2.3 Перемещения и деформации оболочки и основания.....	36
2.2.4 Уравнения равновесия и граничные условия. Обобщенное вариационное уравнение.....	40
2.2.5 Приближенная постановка задач взаимодействия многослойных оболочек с основаниями, расположенными вдоль контура.....	50
2.3 Математическое моделирование напряженно-деформированного состояния стекла типа триплекс.....	58
2.3.1 Типовая технологическая схема производства автомобильного стекла типа триплекс.....	58
2.3.2 Расчет и определение размеров стекла.....	60

2.3.3 Математическое моделирование процесса соединения листов стекла типа триплекс.....	62
3 Математическая модель и расчет кузова укомплектованного стеклами на жесткость	68
3.1 Математическое моделирование кузова и испытательного стенда	68
3.2 Исследование зависимости жесткости кузова от различных параметров	71
Заключение.....	74
Список используемых источников.....	75

Введение

Бурное развитие производства и эксплуатации автомобилей во всех странах и непрерывно возрастающая интенсивность и плотность автомобильного движения в городах и на дорогах, к сожалению, сопровождаются большим числом аварий, так что обеспечение безопасности автомобильного движения становится важнейшей проблемой.

В «автомобилестроении безопасное стекло уже долгие годы является неизбежным элементом обеспечения защиты водителя и пассажиров» [23].

Безопасность конструкции гарантируется в том случае, если при данных критериях плотности конструкции и эффективности использования материала действующие наружные силы не вызывают остаточных деформаций и повреждений после заданного пробега в километрах, когда отношение предельных сил к действующим силам больше единицы.

Такое определение запаса прочности несколько отличается от классического, так как вводится понятие предельных сил, а не разрушающих.

По продолжительности проведения испытания разделяют на нормальные и ускоренные. Нормальные испытания – это испытания автомобиля, методы и условия проведения которых обеспечивают получение необходимого объема информации в такой же срок, как и в предусмотренных условиях и режимах эксплуатации. При ускоренных испытаниях необходимую информацию получают в более короткий срок.

Ускоренные испытания по степени интенсификации разделяют на форсированные и сокращенные соответственно или повреждения. Форсированные испытания проводят при увеличенных нагрузках (температурах, давлениях, скоростях и так далее). При сокращенных испытаниях результаты обрабатывают с использованием методов экстраполяции и тому подобное.

По оцениваемым эксплуатационно-техническим свойствам различают испытания на тягово-скоростные качества, топливную экономичность,

тормозные качества, управляемость и устойчивость, плавность хода, проходимость, шум и вибрацию, эргономические качества и обитаемость, надежность, пассивную безопасность и другое.

Доводочные испытания проводят в процессе разработки опытных образцов для оценки влияния вносимых в них изменений с целью достижения требуемых показателей качества» [15].

Предварительные испытания – контрольные испытания опытных образцов автомобилей, проводимые для определения возможности их предъявления на приемочные испытания.

Приемочные испытания – контрольные испытания опытных образцов автомобилей, проводимые соответственно для решения вопроса о целесообразности постановки на производство модели или передачи ее в эксплуатацию.

В данной работе рассматривается как основной объект – триплекс – трехслойное стекло и его взаимодействие с кузовом автомобиля. Под трехслойным силикатным стеклом мы будем понимать «изделие, состоящее из двух наружных листов силикатного (неполированного или полированного) стекла, прочно скрепленных между собой по всей своей площади промежуточным третьим внутренним слоем, состоящим из прозрачной» [32] бесцветной листовой прокладки эластичного органического материала. В качестве прокладки применяют бутафоль (поливинил-бутираль, пластифицированный дибутилсебацатом).

Стекло входит в состав любого автомобиля. Проблема присоединения стекла к кузову подробно изучается в авиационной промышленности, автомобилестроение отстает в этом вопросе.

Взаимное влияние отдельных узлов на общую жесткость кузова автомобиля не до конца изучены. Рассчитать на прочность систему – кузов автомобиля, укомплектованный стеклами, возможно путем аналитического расчета, избегая дорогостоящих натурных испытаний.

1 Постановка вопроса. Цель и задачи работы

1.1 Критерии качества кузова и его элементов

Основной критерий качества кузова автомобиля – это его способность противостоять вынужденным нагрузкам, то есть его прочность.

«Главная прочностная характеристика автомобильного кузова – это его жесткость на скручивание. Заезд одним колесом на бордюр, подъем автомобиля на домкрате, диагональное вывешивание на бездорожье, прохождение поворота – во всех этих ситуациях нагрузки на кузов стремятся скрутить его вокруг продольной оси. Если жесткость кузова невелика, то после подъема кузова на домкрате, у машины перестают нормально открываться и закрываться двери, на бугристой дороге начинают «дышать» все панели в салоне. Реакции на повороты руля становятся нечеткими – изгиб кузова и податливость металла в зонах крепления рычагов подвески вносят рассогласование в работу передней и задней подвесок. К тому же постоянное скручивание заставляет кузов стареть интенсивнее. В последствии начинают «раскрываться» сварные швы, в образовавшиеся микротрещины проникает коррозия.

Кузов в ходе эксплуатации подвергается разрушающим воздействиям в ослабленных, нагруженных участках.

Измеряется крутильная жесткость кузова в ньютон-метрах на градус (Нм/град.). Чем выше эта величина, тем меньше деформируется кузов от приложенной скручивающей нагрузки. Например, для автомобилей с рамной конструкцией, жесткость на скручивание была невелика и редко превышала 4000 Нм/град. Несущие кузова легковых автомобилей 60–90-х годов были уже жестче – нормой считались величины 5000–10000 Нм/град. Но современные высочайшие требования к управляемости и пассивной безопасности заставляют автомобильных инженеров идти на всяческие ухищрения. Кузова автомобилей последнего поколения разрабатывают с

помощью компьютерной оптимизации, а в производстве используют особо прочный металл, лазерную сварку и клееные соединения. Поэтому в технических описаниях таких машин, как Volvo S60, Alfa Romeo 147 или Citroen C5, упоминается о жесткости кузова свыше 20000 Нм/град» [15].

Жесткость кузова на кручение определяется по углу закручивания передней оси относительно неподвижной задней оси кузова.

При этом выполняется расчет величины жесткости кузова C , Н·м/°.

$$C = \frac{M_{\max}}{\varphi}, \quad (1)$$

где M_{\max} – прикладываемый к кузову максимальный или условный максимальный крутящий момент, Н·м;

φ – угол закручивания передней оси кузова, градус.

Кузов должен быть жестким. Минимальное значение жесткости кузовов, разработанных до 2000 года, должно составлять 5500 Н·м/°, а для кузовов, разработанных после 2000 года – 7500 Н·м/°.

Не допускается наличие остаточных деформаций более 0.2 мм.

Для оценки жесткости кузова, при проведении испытаний, берется «голый» кузов, лишенный всех навесных деталей — капота, дверей и крышки багажника.

С течением времени появились критерии экономичности и надежности конструкции, сводимые, в общем, к факторам веса и безопасности.

Вес корпуса, характеризуемый абсолютной величиной G_k , является общей информацией для оценки экономичности конструкторского решения. Большой интерес представляет отношение веса корпуса G_k к его объему V_k , то есть критерий плотности конструкции (в кгс/м³):

$$KR_g = \frac{G_k}{V_k} . \quad (2)$$

Дающий возможность сравнить разные конструктивные решения и оценить эффективность использования материала.

Степень эффективности использования материала может характеризовать критерий, определяемый отношением момента инерции к весу корпуса (в см⁴/кгс):

$$KR_E = \frac{J}{G_k}. \quad (3)$$

Таким образом, конструкция тем более эффективна, чем больше отношение жесткости к весу. Так как жесткость данного сечения кузова пропорциональна моменту инерции, а несущие элементы кузова выполнены преимущественно из одинакового материала, можно пренебречь значением модуля Юнга и сравнить только моменты инерции. Таким образом, нужно сравнить характерные сечения, как, например, сечения, соответствующие максимальному и минимальному использованию материала.

Эффективность использования материала определяется деформациями корпуса и запасом прочности его. Так как корпуса кузовов являются обычно тонкостенными конструкциями, которые вследствие своей высоты отличаются достаточной жесткостью на изгиб при условии сохранения определенной жесткости на кручение, деформации, вызванные кручением корпуса, являются характерными величинами, и их часто принимают за критерий жесткости данного корпуса. Критерий жесткости на кручение KR_s может определяться по-разному, например моментом (в кгс·м/рад), необходимым для закручивания сечения по передней и задней осям на 1° :

$$KR_s = M_s / \phi. \quad (4)$$

Эффективность использования материала учитывается на всех кузовных предприятиях. Однако общих или стандартизированных критериев не существует.

Безопасность конструкции гарантируется в том случае, если при данных критериях плотности конструкции и эффективности использования материала действующие наружные силы не вызывают остаточных деформаций и повреждений после заданного пробега в километрах, то есть когда отношение предельных сил к действующим силам больше единицы.

Такое определение запаса прочности несколько отличается от классического, так как вводится понятие предельных сил, а не разрушающих.

1.2 Известные методы диагностики конструкции кузова

Анализ известных методов и способов диагностики кузова автомобиля включает в себя обзор методов, технических средств, а также способы получения и обработки результатов, охватывающий период с конца 80-х и до сегодняшнего дня. Именно в этот период развиваются методы диагностики конструкций средствами расчетных пакетов, разработанных для обработки информации на ЭВМ. Для реализации таких методов разрабатываются программные пакеты, включающие в себя препроцессор, процессор, процессор, для обработки необходимой информации и вывода результата диагностики.

Решению проблемы увеличения жесткости и способов ее измерения, посвящено большое количество работ. Известны несколько методов получения и анализа результатов измерения жесткости кузова, посредством натуральных испытаний.

Существуют несколько видов натуральных испытаний, «различающиеся между собой целью проведения» [35]. «При испытаниях определяют тягово-скоростные свойства, топливную экономичность, управляемость и устойчивость, показатели колебаний, вибрации и шумности, тормозные

характеристики, параметры проходимости, долговечности, надежности автомобилей и их узлов.

Развитие методов испытаний связано с совершенствованием измерительной и регистрирующей аппаратуры, устройств, предназначенных для обработки опытных данных, и созданием необходимых режимов исследований. Современные магнитографы, осциллографы, телеметрические системы и т.п. позволяют эффективно проводить исследования рабочих процессов автомобилей в дорожных и лабораторных условиях» [15].

Рассмотрим несколько методов оценки и диагностики кузова автомобиля путем испытаний.

«По методам, условиям и месту проведения испытания можно распределить, на стендовые (лабораторные), полигонные с использованием разных видов дорог, бассейнов, ванн, подъемов, неровностей и т.д., дорожные с регламентацией качества дорог общего пользования, эксплуатационные в экспериментально-производственных и опорных автомобильных хозяйствах и испытания в северных, тропических, высокогорных и других особых условиях.

По продолжительности проведения испытания разделяют на нормальные и ускоренные. Нормальные испытания – это испытания автомобиля, методы и условия проведения которых обеспечивают получение необходимого объема информации в такой же срок, как и в предусмотренных условиях и режимах эксплуатации. При ускоренных испытаниях необходимую информацию получают в более короткий срок.

Ускоренные испытания по степени интенсификации разделяют на форсированные и сокращенные соответственно или повреждения. Форсированные испытания проводят при увеличенных нагрузках (температурах, давлениях, скоростях и так далее). При сокращенных испытаниях результаты обрабатывают с использованием методов экстраполяции и тому подобное.

По оцениваемым эксплуатационно-техническим свойствам различают

испытания на тягово-скоростные качества, топливную экономичность, тормозные качества, управляемость и устойчивость, плавность хода, проходимость, шум и вибрацию, эргономические качества и обитаемость, надежность, пассивную безопасность и другое.

Доводочные испытания проводят в процессе разработки опытных образцов для оценки влияния вносимых в них изменений с целью достижения требуемых показателей качества» [15].

Предварительные испытания – контрольные испытания опытных образцов автомобилей, проводимые для определения возможности их предъявления на приемочные испытания.

Приемочные испытания – контрольные испытания опытных образцов автомобилей, проводимые соответственно для решения вопроса о целесообразности постановки на производство модели или передачи ее в эксплуатацию.

«Приемочные испытания проводят по программе, при составлении которой учитывают типовые методики приемочных испытаний отдельных видов автомобилей, действующие в стране. Во время приемочных испытаний проверяют соответствие представленных образцов техническому заданию, проектной документации, стандартам и другим нормативным документам, отечественным и международным нормам безопасности и токсичности, требованиям поставки экспортным организациям; оценивают технический уровень новой модели по конструкции и эксплуатационно-техническим свойствам; предварительно определяют надежность и необходимый объем конструктивной доработки опытных образцов» [17].

«Приемочные испытания могут быть ведомственными, межведомственными и государственными.

При испытаниях образцов установочной серии оценивают эффективность работ по устранению выявленных в процессе приемочных испытаний недостатков, осуществляют контроль качества изделий, поставляемых смежными производствами» [36].

«Периодические контрольные испытания серийных образцов могут быть краткими и длительными. После испытаний дают заключение о качестве изготовленного автомобиля, соответствии его техническим условиям, эффективности проведенных предприятием-изготовителем мероприятий по улучшению конструкции. При длительных контрольных испытаниях, кроме того, проверяют надежность работы автомобиля в целом, его агрегатов, узлов и деталей в пределах гарантийного пробега» [1].

«Испытания на надежность проводят для определения или оценки показателей надежности работы в заданных эксплуатационных условиях» [19].

«Ресурсные испытания – испытания на долговечность, проводимые для определения технического ресурса автомобиля или подтверждения назначенного ресурса. В процессе испытаний определяют предусмотренные ГОСТ 13377–75 показатели долговечности, такие, как пробеги автомобиля в заданных дорожно-климатических и эксплуатационных условиях до первого капитального ремонта, между капитальными ремонтами, общий до списания, продолжительность работы отдельных агрегатов и систем автомобиля до наступления предельного состояния и другое» [3]. «Подтверждение назначенного ресурса автомобиля, его агрегатов и систем дают на основании пробеговых испытаний установленных инструкцией) в условиях эксплуатации. Ресурсные испытания проводят на автомобильном полигоне или на дорогах общего пользования, а также в автохозяйствах при перевозке грузов. Во время испытаний периодически проводят проверку технического состояния автомобиля. Приемо-сдаточные испытания автомобилей текущего производства проводятся для определения соответствия их технической документации» [2].

«Аттестационные испытания предназначены для оценки уровня качества продукции при ее аттестации. Эти испытания периодически повторяют в объеме и по показателям, установленным инструкцией о порядке и методике их проведения.

Задачей определительных испытаний является установление значений конструктивных и эксплуатационно-технических параметров автомобилей с заданными значениями точности и достоверной вероятности» [36].

«Испытания называют оценочными, если при оценке качества требуется определение значений параметров и показателей с заданными значениями точности и достоверной вероятности.

При эксплуатационных испытаниях дают оценку возможности работы автомобиля в условиях эксплуатации (в различных климатических и дорожных условиях), собирают данные по надежности, уточняют параметры, необходимые для нормирования расхода горюче-смазочных материалов, периодичности технических обслуживаний, потребности в запасных частях и шинах» [18].

«Исследовательские испытания проводят для изучения рабочих процессов и механизмов, агрегатов и систем, эксплуатационно-технических свойств, нагрузочных, тепловых и скоростных режимов работы агрегатов автомобиля, и так далее. По полученным результатам проверяют правильность теоретических расчетов и исследований, намечают пути совершенствования и развития конструкций, обосновывают оптимальные решения при создании новых образцов и модернизации автомобилей» [34].

Во время «специальных испытаний проверяют, соответствует ли автомобиль специфическим требованиям: выявляют способность работать в особых условиях (в северных районах, в условиях жаркого и сухого климата, в высокогорных районах), определяют пригодность к перевозке специальных грузов и тому подобное» [4].

«Испытания автомобилей связаны с большим количеством разнообразных измерений. Преобладающими над механическими измерительными системами являются электрические, при которых обеспечивается высокая точность, чувствительность, широкий диапазон измеряемых величин и возможность автоматической обработки полученной информации» [33].

«Типовая схема измерений неэлектрических величин электрическими методами включает первичный и промежуточный преобразователи и устройство для регистрации. Первичный преобразователь в зависимости от измеряемой величины создает электрический сигнал. Характерным примером такого преобразователя является тензорезистор, применяемый для измерения механических напряжений» [6].

«Самописцы, осциллографы, магнитографы и другие устройства предназначены для записи и хранения полученной информации в той или иной форме. Промежуточные преобразователи обеспечивают совместность работы первичных преобразователей и регистрирующих устройств. Примерами промежуточных преобразователей являются усилители, фильтры, переключающие устройства и так далее» [14].

«В некоторых случаях для использования электрических методов измерения применяют чувствительный элемент, который превращает одну измеряемую величину в другую, удобную для фиксирования ее первичным преобразователем. Например, для измерения давления используют трубчатый чувствительный элемент, изменения напряжения в котором регистрируются тензорезисторами» [11].

«Аппаратура, применяемая при испытаниях автомобилей, должна отвечать целому ряду требований: прежде всего, быть компактной, не бояться динамических перегрузок, вибрации, большой запыленности воздуха и в то же время обладать достаточной чувствительностью и разрешающей способностью» [28]. «Требование комплектности вызвано отсутствием достаточного места для размещения аппаратуры на сиденье в салоне легкового или кабине автомобилей. Необходимость установки приборов в салоне кабины диктуется недостаточной виброзащищенностью аппаратуры и высоким уровнем колебаний рамы и кузова. При выборе приборов для дорожных испытаний также необходимо учитывать возможность питания их от низковольтных источников тока» [30].

«До начала и после проведения испытаний следует соответственно определить и проверить характеристики всего измерительного комплекса: коэффициент калибровки, амплитудно-частотную характеристику, величину погрешности» [29].

Еще «одним методом испытаний деталей кузова является метод хрупких покрытий.

Метод хрупких покрытий используют в основном для качественной оценки распределения напряжений и в случае приближенного определения главных напряжений на большой площади. Наиболее простым хрупким покрытием является канифоль с добавкой 0,5-2% парафина. Порог чувствительности этого покрытия составляет 40-60 МПа» [31].

«Для обработки информации, полученной в результате испытаний, используют ЭЦВМ. Параметры процесса аналогово-цифровым преобразователем (АЦП) и рядом дополнительных устройств задают в цифровом виде, пригодном для ввода в ЭЦВМ. К результатам измерений процесса, предназначенным для ввода в ЭЦВМ, предъявляется ряд требований. Сигналы перед вводом в ЭЦВМ не должны иметь помех в виде случайных выбросов, наводок и так далее. Амплитуды измерений должны укладываться в определенный диапазон отклонений и располагаться в пределах линейной характеристики аппаратуры» [9].

«Для выполнения этих условий применяют фильтры, срезающие частоты, которые лежат выше заданного предела; аналоговую вычислительную машину, которая производит масштабирование процесса и задает смещение постоянной составляющей, аналогово-цифровой преобразователь для дискретизации непрерывного процесса и превращение его в цифровой код, а также ряд вспомогательных устройств» [27].

«История измерения жесткости кузова с помощью испытаний уходит в 40-е годы прошлого века. В то время использовались два основных метода – предварительная оценка с бумажными лентами (рисунки 1 и 2), которые натягивались или провисали при скручивании кузова, и измерения с

помощью тензодатчиков, которые приклеивались к напряженным участкам. По данным измерений, проведенных в НАМИ в 1951 году, жесткость несущего кузова автомобиля ГАЗ-М20 Победа составляла 4600 Нм/град., автомобиля Москвич МЗМА-400– 2500Нм/град» [15].



Рисунок 1 – Измерение жесткости кузова



Рисунок 2 – Измерение жесткости основания кузова

«Основой несущих кузовов автомобилей 30–60-х годов, как правило, служил пол с развитыми элементами жесткости. На рисунке 2 – испытание с лентами основания кузова автомобиля» [27].

Для анализа всех применяемых ранее и сейчас методов контроля кузова рассмотрим на примере измерения жесткости кузова. Результаты сравнительного анализа сведены в таблицу 1.

После проведенного анализа и справочным данным, видно, что наиболее оптимальным вариантом, является моделирование и расчет необходимых показателей с помощью метода моделирования испытаний с помощью ЭВМ.

Основным критерием для сравнения представленных вариантов, является затраты на проведение и гибкость системы, а также универсальность. И одна лишь из оцениваемых методик дает возможность для оптимизации исследуемого объекта. Этот факт и дает основание для дальнейшего развития и использования в качестве контрольной системы - моделирование испытания с помощью различных программных пакетов в ЭВМ.

1.3 Известные методы диагностики, контроля и оценки клеевого соединения

Определение внешнего вида.

Клей наносится тонким слоем шпателем на любую стеклянную пластинку и затем проверяется визуально на гладкость и на однородность материала путем просмотра на свет

Определение вязкости.

Для определения вязкости клеев применяют специальный прибор "Реолаб".

«За результат испытаний принимается наибольшее из двух проверенных определений.

Допускаемое расхождение между параллельными определениями не должно превышать» [7] 150 Па.

Определение плотности.

Проведение испытаний:

Пустой очищенный и просушенный пикнометр взвешивается вместе с крышкой с точностью до 0,01 г.

Обработка результатов.

Плотность определяется по следующей формуле:

$$\rho = \frac{P-P_1}{V}, \quad (5)$$

где V – объем пикнометра равен 50 см³.

За результат величины плотности клея принимают среднее арифметическое трех определений.

Определение содержания сухого остатка.

Проведение испытаний:

В предварительно взвешенную бюксу поместить 4-6 г. испытуемого материала и взвесить с погрешностью 0,001 г (P_1).

Бюксу с клеем поместить в термощкаф и выдержать в указанных условиях.

После извлечения бюксы из термощкафа охладить ее в эксикаторе до комнатной температуры и снова взвесить (P_2) с той же точностью.

Обработка результатов.

Массовую долю сухого остатка (X) в процентах определяют по формуле:

$$X = \frac{P_2-P}{P_1-P} \cdot 100\%. \quad (6)$$

За результат испытаний принимается среднее значение двух определений.

Определение содержания золы.

Проведение испытаний:

Пустой тигель примерно 10 минут прокаливается в муфельной печи при температуре около 600°C, охлаждается в эксикаторе до комнатной температуры и взвешивается с точностью до 0,0002 г (P_1).

В тигель помещается испытуемый материал и взвешивается (P_2).

Навеску пробы надо взять так, чтобы осталось не менее 0,02 г и не более 0,5 г сухого вещества.

Тигель с навеской ставится на глиняный треугольник, находящийся на штативе, и разогревается на горелке Бунзена на медленном огне. Дают пробе медленно сгореть. Затем осторожно продолжают нагревать, пока не закончится озоление. При этом не допускать потерь компонентов образующих золу.

Поставить тигель с пробой на асбестовую пластинку с отверстием и разогревать на медленном огне.

После этого тигель ставят в печь накаливания, разогретую до температуры $600 \pm 30^\circ\text{C}$ и прокаливают в течение двух часов.

Тигель с золой охлаждается в эксикаторе до комнатной температуры, взвешивается с точностью 0,0002 г (P_3)

Обработка результатов.

Из полученных значений вычисляют содержание золы G в процентах по формуле:

$$G = \frac{P_3 - P_1}{P_2 - P_1} \cdot 100\%. \quad (7)$$

где P_1 – вес пустого предварительно прокаленного тигля в граммах;

P_2 – вес тигля с навеской клея в граммах;

P_3 – вес тигля с остатками после прокаливания в граммах;

Если результаты определений отличаются между собой более чем на 5 %, то надо отбросить этот результат.

За результат испытаний принимается среднее значение трех определений.

Определение устойчивости к стеканию.

Проведение испытаний.

На две стеклянные или стальные пластины покрытые эмалью наносят из картуша через пластмассовый наконечник по одному жгуту клея длиной около 100 мм диаметром около 10 мм. Пластины располагают вертикально: одну выдерживают при комнатной температуре в течение 60 секунд, а другую помещают также вертикально в термошкаф, нагретый до $100 \pm 2^\circ\text{C}$ и выдерживают 20 секунд. Затем пластины осматривают и отмечают наличие растекания клея или смещение жгута. Растекание и смещение жгута не допускается.

Определение усадки при отверждении.

Проведение испытаний.

Определить плотность клея (ρ) с помощью металлического пикнометра.

Пробу клея в количестве 55-65 грамм помещают в три предварительно взвешенные чашки из полиэтилена с точностью до 0,01 г (P_1) и опять взвешивают (P_2). Вес навески (P) равен разнице ($P_2 - P_1$).

Исходный объем материала вычисляется по формуле:

$$V_1 = \frac{P}{\rho}. \quad (8)$$

Чашки с клеем оставляют в нормальных условиях на семь суток, затем пробы клея извлекаются из чашек и выдерживаются семь суток при $70 \pm 2^\circ\text{C}$, а затем 24 часа в нормальных условиях.

Объем клея после выдержки (V_2) определяется путем взвешивания образца в воздухе (P_3) и в воде (P_4):

$$V_2 = \frac{P_3 - P_4}{\rho}, \quad (9)$$

где ρ – плотность воды.

Объемную усадку клея вычисляют по формуле:

$$\Delta V = \frac{V_1 - V_2}{V_1} \cdot 100\%. \quad (10)$$

«За результат испытаний принимают среднее арифметическое» [5] трех определений.

Определение скорости отверждения.

Проведение испытания.

Испытуемый материал наносится в паз фторопластовых или полиэтиленовых пластин по всей длине, излишки клея убираются шпателем. Далее, по одной пластине с клеем выдерживают при температуре 23 ± 2 °С и влажности 50 ± 5 % в течение 24 часов, 48 часов и 72 часов. По истечении указанного времени образовавшуюся пленку клея осторожно снимают вручную, начиная с тонкого конца. Отмечают глубину паза в месте, где появляются следы неотвержденного клея.

Определение времени потери липкости.

Для определения времени потери липкости испытуемый материал наносят на любую подложку жгутом из наконечника диаметром 8-10 мм, включают секундомер и помещают образец в климатическую камеру с определенной влажностью.

При указанных условиях периодически через 2-3 минуты чистым деревянным шпателем или сложенной пополам пленкой легко касаются поверхности клея. За результат испытаний принимается время, через которое на шпателе или пленке не остается следов клея и он не тянется за шпателем или пленкой.

Определение устойчивости по Боинг-тест.

Проведение испытаний.

Погрузить поршень в цилиндр таким образом, чтобы передний торец его был почти вровень с задним торцом цилиндра. Расположив цилиндр вертикально, наполнить его клеем, убрать излишки шпателем. В течение 10 секунд после

выравнивания прибор поставить в исходное положение и сразу переместить поршень плавно до переднего торца цилиндра таким образом, чтобы вышедший наружу клей имел диаметр 46 мм, длину 30 мм.

По истечении 15 минут по шкале прибора замерить величину максимального прогиба клеевого жгута от горизонтали в миллиметрах.

Определение твердости.

Проведение испытаний.

Замер твердости по Шору А проводится по ГОСТ 263 на стопке образцов общей толщиной 6 мм.

Определение разрушающего напряжения при растяжении, относительного удлинения при разрыве и напряжения при 100%-ном удлинении.

Проведение испытаний.

Испытания по показателям «разрушающее напряжение», «относительное удлинение» и «напряжение при 100%-ном удлинении» проводят по ГОСТ 270, тип образца Ш.

Скорость движения нижнего зажима – 500 мм/мин.

Определение потери массы (ΔM).

Проведение испытаний.

Образцы, вырезанные из пленки, полученной по размерам 100×30×2 мм. взвешивают с точностью до 0,01 г (M) и выдерживают в указанных условиях. Затем образцы охлаждают до комнатной температуры и опять взвешивают (M_1).

Расчет производят по формуле:

$$\Delta M = \frac{M - M_1}{M} \cdot 100\%. \quad (11)$$

За результат испытаний принимается средняя арифметическая трех определений.

Определение морозостойкости.

Проведение испытания.

Пленку клея, изготовленную по методике, помещают на плиту-основание и выдерживают в холодильной камере при температуре минус $40 \pm 2^\circ\text{C}$ в течение 24 часов.

Затем плиту с образцом вынимают, быстро помещают в приспособление и сразу же отключают магнит или открывают заслонку, удерживающие стальной шар, который по трубе падает на образец с высоты 230 мм.

После удара образец осматривают на наличие разрушения и трещин.

Определение прочности при сдвиге.

Подготовка образцов.

Стеклянные и стальные пластины обезжиривают изопропиловым или этиловым спиртом. Затем на них аппликатором с войлочной насадкой наносят грунтовку для стекла и грунтовку для эмали соответственно и оставляют на открытом воздухе при комнатных условиях на 10-60 минут. После этого, стеклянные пластины закладывают в приспособление и на них слоем около 5 мм полосой 10 мм на всю ширину пластин наносят испытуемый клей из картуша с помощью пистолета с насадкой. Далее в приспособление помещают подготовленные стальные пластины, совмещая их со стеклянными, через клей. Излишки клея выдавливаются и убираются шпателем. Подготовленные таким образом образцы выдерживают в требуемых условиях.

Проведение испытаний.

Для определения нагрузки, необходимой для разрушения образца, один конец образца закрепляют в верхнем зажиме разрывной машины, и через специальное приспособление - другой конец в нижнем зажиме так, чтобы ось приложения нагрузки совпадала с вертикальной осью образца.

Скорость движения нижнего зажима 50 мм/мин. За результат испытания принимается максимальная нагрузка (P) при разрушении каждого образца. После разрушения образца производят замер площади поверхности склеивания (S).

Подсчет результатов осуществляется по следующей формуле:

$$\tau_B = \frac{P}{S}, \quad (12)$$

где τ_B -прочность при сдвиге.

Окончательный результат вычисляется в МПа, как среднее арифметическое из пяти образцов.

В результате в разделе были сформулированы цели и задачи работы. Целью данной работы является повышение качества контроля и диагностики кузова автомобиля и его элементов.

Для достижения поставленной цели необходимо решить следующие задачи: путем исследования и расчета уточнить физико-механические свойства полиуретанового клея; «установить влияние различных факторов» [26] на поведение полиуретанового клея; исследовать напряженно-деформированного состояния неметаллических элементов кузова – стекла «триплекс» в сборе.

На основе лабораторных исследований, стендовых и виртуальных испытаний разработать технологические рекомендации по изготовлению стекла и упрочнению клеевого соединения.

2 Аналитическое исследование прочности корпуса кузова с учетом вклеивания стекла типа триплекс

2.1 Механическая модель корпуса кузова

Все элементы кузова, воспринимающие нагрузки, действующие на автомобиль, можно считать составными частями несущей конструкции.

Существенную роль во взаимодействии элементов играет способ их соединения. К способам соединения, обеспечивающее несущее соединение можно отнести сварку и клепку. Элементы, соединенные таким образом, можно считать корпусом кузова, представляющим несущую конструкцию.

При расчете кузова на прочность необходима механическая модель кузова из-за невозможности оперирования большими и сложными чертежами формы корпуса.

Необходимость разработки механической модели кузова вытекает из конструкционно-технологических свойств современных кузовов, которые обычно являются сложной оболочково-рамной конструкцией. Именно такие типы конструкции имеют, как правило, кузова с несущей обшивкой и обязательным усилением дверных и оконных проемов. Кроме того, замена реальной конструкции механической моделью обосновывается технологическими соображениями, так как практика показала, что точность расчетов, выполненных по модели с помощью ЭВМ, выше точности выполнения реального кузова.

Таким образом, механические модели кузова могут быть двух типов: по возможности упрощенные для проектных целей и детальные для проверочных целей. Для первого типа модели используется метод элементарных плоскостей, для второго – метод законченных элементов.

Рассмотрим оба типа моделей, их преимущества и недостатки:

Первая модель – упрощенная механическая модель кузова, выполненная с помощью элементарных конструктивных плоскостей.

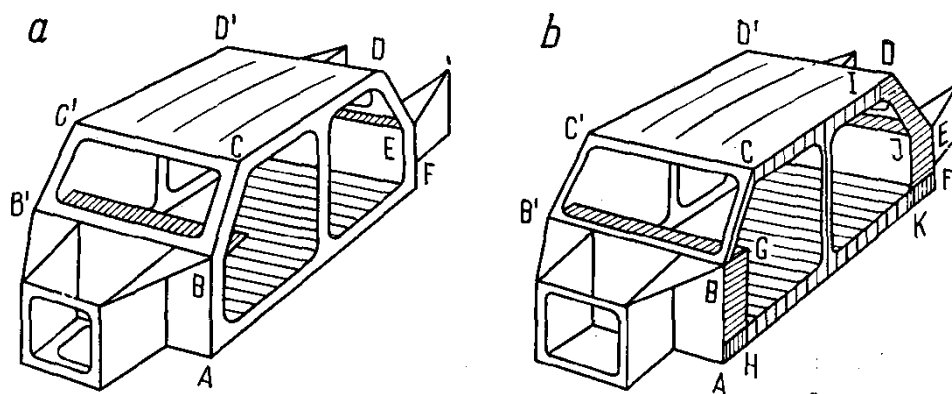
Корпус кузова представляет собой комбинацию оболочек и стержней, образующих систему поверхностей, в которых внутренние силы ориентированы по касательной к этим поверхностям, далее будем называть их сокращенно ЭКП.

Элементарной плоскостью определяется конструктивный элемент, жесткий в своей плоскости. Фермы, рамы и листовые детали можно свести к понятию элементарной плоскости. Этому понятию не соответствуют нежесткие конструкции, являющиеся механизмами.

При использовании метода ЭКП первым этапом оценки внутренних сил является расчет граничных сил в этих плоскостях. Граничные силы позволяют конструктору установить порядок величин нагрузок.

Вторым этапом по методу ЭКП является определение внутренних сил как функций граничных сил в отдельных конструктивных плоскостях. Определение внутренних сил таких сборочных единиц корпуса кузова, как боковые стенки, крыша, передняя и задняя стенки, которые в соответствии с методом ЭКП являются независимыми одна от другой, представляет собой, таким образом, решение ряда задач на плоскости.

Это по сравнению с одной сложной задачей при использовании метода единой замкнутой системы касательных напряжений способствует значительному облегчению работы. Наиболее распространенной конструкцией для легковых автомобилей являются закрытые корпуса. Схема такого корпуса (рисунок 3) представляет собой замкнутый параллелепипед, образованный ЭКП.



а – боковая рама равномерной жесткости,
 б – боковая рама с несущей панелью L–D–E–J.

Рисунок 3 – Схемы закрытого корпуса легкового автомобиля

Недостатком данных моделей является не четкое соответствие модели реальному автомобилю и ограничение на расчет криволинейных оболочек. Также невозможно производить расчеты для нежестких конструкций и механизмов.

Вторая модель – механическая модель кузова, выполненная с помощью метода конечных элементов.

Электронная вычислительная техника позволяет построить механическую модель кузова, соответствующую действительной конструкции вследствие возможности деления корпуса на теоретически неограниченное количество законченных элементов. Силы и моменты, действующие между элементами, обеспечивают условие непрерывности конструкции. При условии, что граничные силы в элементах находятся в равновесии, получаем систему линейных уравнений, количественно зависящую от неизвестных перемещений. Эта система уравнений кроме неизвестных перемещений содержит данные о координатах элемента, свойства материала элемента в его сечении, предельных условиях, направлениях сил и предъявляемые требования. Содержащуюся в уравнениях информацию программируют и кодируют соответствующим образом для ЭВМ.

Ввиду гибкости данной системы вычислений и возможности оптимизации, данная модель используется в данной работе в качестве базовой.

2.2 Математическое описание внутренних напряжений в автомобильном стекле

«Элементы остекления автомобиля (ЭОА), в частности рассматриваемое – ветровое стекло автомобиля, по своим геометрическим параметрам, в частности по параметру тонкостенности, относятся к объектам теории оболочек. Большинство из них по форме срединной поверхности и очертаниям опорного контура согласно установившейся классификации [10, 16] относится к классу оболочек сложной геометрии. Срединная поверхность и контурные линии таких оболочек в изделиях конструкционной оптики, как правило, не описываются простыми аналитическими выражениями, а задаются таблично или в виде чертежа.

Краевые задачи механики деформирования пластин и оболочек сложной геометрии в соответствии с [10, 16] являются неклассическими, а создание достаточно универсальных и эффективных методов их решения связано со значительными трудностями, что в известной мере вплоть до недавнего времени являлось причиной существенного отставания теории и методов расчета таких элементов конструкций от запросов практики их проектирования.

Кроме того, элементы ЭОА в силу специфических свойств конструкционных материалов, применяемых для их изготовления (силикатное стекло), требуют разработки особых узлов их соединения с другими элементами конструкции. Это приводит к необходимости решения неклассических краевых задач механики пластин и оболочек.

Размеры исследуемого автомобильного стекла: длина ($a = 1476$ мм), ширина ($b = 930$ мм), толщина ($h = 5,2$ мм) позволяют рассматривать его как тонкую пластину, так как толщина намного меньше $1/5$ наименьшего

размера основания [12]. Вводим понятие срединной плоскости, то есть плоскости, которая делит толщину исследуемого стекла пополам» [15] (рисунок 4):

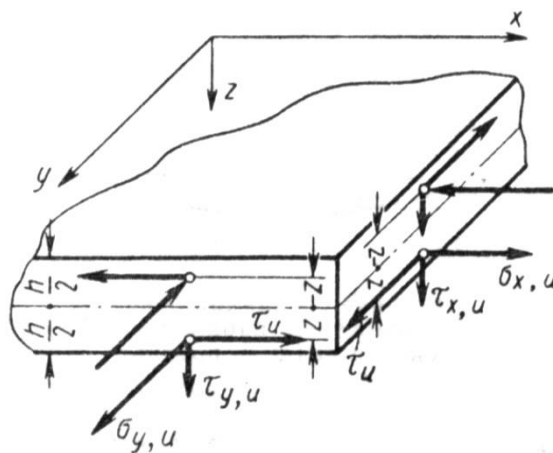


Рисунок 4 – Расчетная схема

В силу таких конструктивных особенностей определение НДС ЭОА в общем случае сводится к постановке и решению задач взаимодействия тонких пластин и оболочек со слоями дискретно-непрерывных оснований переменной толщины, расположенных, как правило, на обеих лицевых поверхностях. При этом расчетная схема, позволяющая моделировать главные особенности тех или иных способов заделки стекла в каркас автомобиля, может быть представлена в обобщенном виде (рисунок 5).

Здесь типовое соединение оболочечного элемента остекления автомобиля с элементами силового набора 2 (каркаса автомобиля) осуществляется через прокладки из клея 3, выполненные из полимерного материала и расположенные снизу лицевой поверхности оболочки в виде слоев деформируемых оснований. В ряде случаев значения толщин слоев оснований $2h_{(k)}$ ($k = 1, 2$) и оболочки $2h$ имеют одинаковый порядок ($2h_{(k)} \sim 2h$), а ширина оснований l для некоторых элементов ОА (например, в ветровое и заднее стекло) достигает значения $l \sim 0,1L$, где L – характерный линейный размер оболочки.

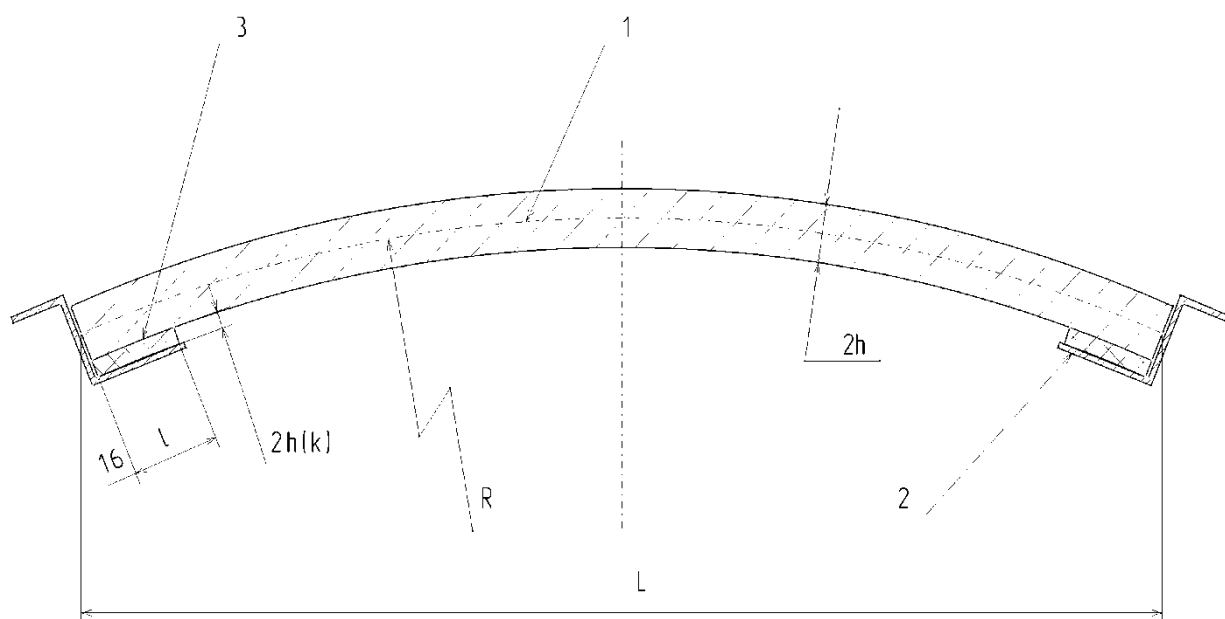


Рисунок 5 – Упрощенная расчетная схема

При расчете этого класса оболочечных элементов существенное значение, прежде всего, имеют вопросы, связанные с постановкой таких граничных условий, которые адекватно отражали бы реальные условия их закрепления. Как показали исследования, моделирование условий закрепления элементов ОА с помощью постановки традиционных видов граничных условий теории оболочек (жесткое закрепление, шарнирное опирание и так далее) приводит к результатам, сильно отличающимся от истинных (результатов экспериментальных исследований).

Перечисленными выше особенностями главным образом и обусловлены основные сложности задач механики деформирования элементов ОА и необходимость дальнейшего развития методов их решения.

2.2.1 Математические модели деформирования оболочных элементов конструкций, взаимодействующих с упругими основаниями

В настоящем разделе 2 главы в контактной постановке получены основные соотношения линейной теории тонких оболочек, взаимодействующих по некоторым участкам лицевых поверхностей со слоями упругих деформируемых оснований.

Предполагается, что оболочка и основания тонкие и удовлетворяют условиям:

$$\left| \frac{2h}{L} \right|_{max} \ll 1 \text{ и } \left| \frac{2h_{(l)}}{L_{(l)}} \right|_{max} \ll 1, \quad (13)$$

а срединные поверхности оснований $\sigma_{(l)}$ пологие относительно срединной поверхности оболочки [10, 16]. Здесь $2h$, $2h_{(l)}$, L , $L_{(l)}$ ($l = 1, 2$) – толщины и характерные линейные размеры оболочки и оснований соответственно.

Полагается, что у внешних лицевых поверхностей оснований заданы известные векторы смещений.

Система разрешающих уравнений для описания механики деформирования рассматриваемых упругих систем получена на основе обобщенного вариационного принципа Лагранжа [22] в рамках линейной аппроксимаций векторов перемещений в основаниях по их толщине и соотношений теории типа Тимошенко для оболочки.

Предполагается, что оболочка и основания деформируются без взаимного отрыва и скольжения.

Перемещения и деформации элементов упругой системы считаются малыми.

2.2.2 Обобщенный вариационный принцип Лагранжа в механике составных тел

Рассматриваемые деформируемые системы, представляющие собой тонкую оболочку, скрепленную по некоторым участкам внешних лицевых поверхностей с деформируемыми слоями оснований, относятся к классу составных конструкций.

Решение задач теории упругости для таких конструкций зачастую может быть значительно упрощено, если их разделить на отдельные элементы, вводя на поверхностях раздела реакции взаимодействия, которые определяются в процессе решения задачи из соответствующих условий стыковки. Формулировка таких задач в дифференциальной форме (в виде дифференциальных уравнений) не вызывает особых затруднений, однако при построении их приближенных решений некоторыми аналитическими или численными методами для них требуется вариационная формулировка. Такая вариационная формулировка задач сопряжения деформируемых тел, рассматриваемых с позиций контактных задач, была дана в работе [22], результаты которой приведем ниже с целью их дальнейшего использования в последующих разделах работы.

Дифференциальная постановка. Без ограничения общности изложения будем рассматривать два сопрягаемых тела с объемами $V_{(1)}$, $V_{(2)}$, которые ограничены поверхностями $S_{(1)}$, $S_{(2)}$, имеющими общую поверхность сопряжения S с известной границей.

Деформации и перемещения тел считаем малыми и для дальнейших построений недеформированные пространства $V_{(1)}$, $V_{(2)}$ отнесем соответственно к параметризации $\overline{\rho_{(k)}}(\chi_{(k)}^\alpha)$ (здесь и в дальнейшем греческие индексы пробегают значения 1, 2, 3, латинские – 1, 2), введя обозначения: $\overline{\rho_{(k)}}(\chi_{(k)}^\alpha)$ – радиус-вектор точки $M_{(k)}$ k -го тела; $\overline{\rho}_\alpha^{(k)}$, $\overline{\rho}_{(k)}^\alpha$ – ко- и контравариантные базисные векторы; $n_{(k)}$ – единичные векторы нормалей к

элементам $dS_{(k)}$ поверхностей $S_{(k)}$; $n_\alpha^{(k)}$, $n_\alpha^{(k)}$ – ко- и контравариантные компоненты векторов $\overline{n_{(k)}}$ относительно базисных векторов $\rho_{(k)}^\alpha$ и $\rho_\alpha^{(k)}$.

Пусть $\overline{q_{(1)}} = \overline{q}$ – вектор усилий взаимодействия, отнесенный к единице площади поверхности сопряжения S и действующий на первое тело со стороны второго; $\overline{q_{(2)}}$ – аналогичный вектор усилий, действующий на второе тело со стороны первого, причем согласно третьему закону Ньютона $\overline{q_{(2)}} = -\overline{q_{(1)}}$; $\overline{F_{(k)}} = F_{(k)}^\alpha$ – векторы массовых сил, отнесенные к единицам объемов $V_{(1)}$; $\overline{P_{(k)}} = p_k^\alpha \rho_\alpha^{(k)}$ – векторы поверхностных сил, отнесенные к единицам площадей поверхностей $S_{(k)}$ и заданные на некоторых участках $S_{(k)}^p \in S_{(k)}$; $\overline{U_{(k)}}$ – векторы перемещений точек $M_{(k)} \in V_{(k)}$; $\nabla_\alpha^{(k)}$ – символы ковариантного дифференцирования в метриках недеформированных пространств $V_{(k)}$.

Если сопрягаемые тела под действием указанных выше сил находятся в равновесии, то возникающие в них напряжения $\sigma_{(k)}^{\alpha\beta}$ должны удовлетворять уравнениям равновесия:

$$\nabla_\alpha^{(k)} \left(\sigma_{(k)}^{\alpha\beta} \overline{\rho_\beta^{(k)}} \right) + \overline{F_{(k)}} = \mathbf{0}. \quad (14)$$

При статических граничных условиях на $S_{(k)}^p$:

$$\sigma_{(k)}^{\alpha\beta} \overline{\rho_\beta^{(k)}} n_\alpha^{(k)} = \overline{P_{(k)}}. \quad (15)$$

Кинематических граничных условиях:

$$\overline{U_{(k)}} |_{S \in S_{(1)}} = \overline{U_{(2)}} |_{S \in S_{(2)}}. \quad (16)$$

На участках $S_{(k)}^u \in S_{(k)}$, где заданы векторы перемещений $V_{(k)}^s$, а также при статических условиях сопряжения рассматриваемых тел ($\bar{q}_{(1)} = -\bar{q}_{(2)} = \bar{q}$):

$$\sigma_{(k)}^{\alpha\beta} \bar{\rho}_{\beta}^{(k)} n_{\alpha}^{(k)} |s = \bar{q}_{(k)}, \quad (17)$$

записываемых в виде статических граничных условий.

В (17) вектор усилий взаимодействия \bar{q} является неизвестным и для его определения к приведенным уравнениям нужно добавить условие сопряжения тел по перемещениям:

$$\bar{U}_{(k)} |s \in S_{(1)} = \bar{U}_{(2)} |s \in S_{(2)}, \quad (18)$$

которое с не приведенными здесь уравнениями состояния и кинематическими соотношениями:

$$2\varepsilon_{\alpha\beta}^{(k)} = \nabla_{\alpha}^{(k)} \bar{U}_{(k)} \bar{\rho}_{\beta}^{(k)} + \nabla_{\beta}^{(k)} \bar{U}_{(k)} \bar{\rho}_{\alpha}^{(k)} \quad (19)$$

замыкает общую систему уравнений, необходимых для формулировки рассматриваемых задач в указанной постановке. Для применения к решению таких задач приближенных методов, основанных на вариационных принципах, а также их редукции к двумерным задачам, требуется формулировка соответствующих вариационных принципов и построение соответствующих вариационных формул.

Вариационная постановка. Введем в рассмотрение функционал:

$$I = \sum_{k=1}^2 \left[\int_{S_{(k)}^p} \bar{P}_{(k)} \bar{U}_{(k)} dS_{(k)} + \int \int \int (\bar{F}_{(k)} \bar{U}_{(k)} - W_{(k)}) dV_{(k)} \right] + \quad (20)$$

$$+ \int_S \bar{q} \bar{U}_{(1)} dS_{(1)} - \int_S \bar{q} \bar{U}_{(2)} dS_{(2)},$$

представляющий собой обобщенный функционал Лагранжа [22] и отличающийся от него последними слагаемыми, учитывающими работу реактивных усилий взаимодействия \bar{q} на соответствующих перемещениях.

Если предположить, что имеют место формулы Грина:

$$\sigma_{(k)}^{\alpha\beta} = \partial W_{(k)} / \partial \varepsilon_{\alpha\beta}^{(k)}, \quad (21)$$

где $W_{(k)} = W_{(k)}(\varepsilon_{\alpha\beta}^{(k)})$ – удельная потенциальная энергия деформации k -го тела, выраженная через компоненты $\varepsilon_{\alpha\beta}^{(k)}$ деформации.

Тогда справедливо следующее утверждение: перемещения, согласованные с кинематическими связями (16) и удовлетворяющие условию сопряжения (18), а также напряжения, внешние усилия и реакция взаимодействия \bar{q} , удовлетворяющие уравнениям равновесия (14) и граничным условиям (15), (17), сообщают функционалу I стационарное значение.

Действительно, варьируя (21) по функциональным аргументам $\varepsilon_{\alpha\beta}^{(k)}$, $\bar{U}_{(k)}$ и \bar{q} получим

$$\begin{aligned} \delta I = \sum_{k=1}^2 \left[\int_{S_{(k)}^p} \bar{P}_{(k)} \delta \bar{U}_{(k)} dS_{(k)} + \int \int \int (\bar{F}_{(k)} \delta \bar{U}_{(k)} - \sigma_{(k)}^{\alpha\beta} \delta \varepsilon_{\alpha\beta}^{(k)}) dV_{(k)} \right] + \\ + \int_S (\bar{q} \delta \bar{U}_{(1)} + \bar{U}_{(1)} \delta \bar{q}) dS_{(1)} - \int \int (\bar{q} \delta \bar{U}_{(2)} + \bar{U}_{(2)} \delta \bar{q}) dS_{(2)}, \end{aligned} \quad (22)$$

где принято во внимание, что

$$\delta W_{(k)} = \frac{\partial W_{(k)}}{\partial \varepsilon_{\alpha\beta}^{(k)}} \delta \varepsilon_{\alpha\beta}^{(k)} = \sigma_{(k)}^{\alpha\beta} \delta \varepsilon_{\alpha\beta}^{(k)}. \quad (23)$$

Внося сюда соотношение (21) и учитывая, что на поверхности сопряжения $dS_{(1)} - dS_{(2)} = dS$, после интегрирования по частям с применением формулы Гаусса-Остроградского находим:

$$\begin{aligned} \delta I = & \sum_{k=1}^2 \left[\int_{S^{(k)}} \left(\bar{\mathbf{P}}_{(k)} - \sigma_{(k)}^{\alpha\beta} \bar{\rho}_{\beta}^{(k)} \mathbf{n}_{\alpha}^{(k)} \right) \delta \bar{U}_{(k)} dS_{(k)} + \right. \\ & \left. + \int_{V^{(k)}} \left(\nabla_{\alpha}^{(k)} \sigma_{(k)}^{\alpha\beta} \bar{\rho}_{\beta}^{(k)} + \bar{\mathbf{F}}_{(k)} \right) \delta \bar{U}_{(k)} dV^{(k)} \right] + \\ & + \int_S \left(\bar{q} - \sigma_{(1)}^{\alpha\beta} \bar{\rho}_{\beta}^{(1)} \mathbf{n}_{\alpha}^{(1)} \right) \delta \bar{U}_{(1)} dS_{(1)} - \int_S \left(\bar{q} + \sigma_{(2)}^{\alpha\beta} \bar{\rho}_{\beta}^{(2)} \mathbf{n}_{\alpha}^{(2)} \right) \delta \bar{U}_{(2)} dS_{(2)} + \\ & + \int_S (\bar{U}_{(1)} - \bar{U}_{(2)}) \delta \bar{q} dS. \end{aligned} \quad (24)$$

Из (24) сразу же следует, что $\delta I = 0$ при выполнении упомянутых соотношений (14), (15), (17) и (18). Обратно в силу независимости вариаций перемещений внутри и на границах тела, а также реакции взаимодействия тела на S из вариационного уравнения $\delta I = 0$ следуют уравнения (14), (15), (17), (18), необходимые для дифференциальной постановки рассматриваемых задач. Для применения приближенных методов решения этих задач условие стационарности $\delta I = 0$ доставляет, кроме вариационных уравнений метода Бубнова-Галеркина для дифференциальных уравнений равновесия, также и вариационное уравнение:

$$\int_S (\bar{U}_{(1)} - \bar{U}_{(2)}) \delta \bar{q} dS = 0 \quad (25)$$

для удовлетворения условию сопряжения тел по перемещениям.

2.2.3 Перемещения и деформации оболочки и основания

Контактные задачи имеют свою специфику, выражающуюся в том, что уже нетривиальным является вопрос выбора математических моделей для

описания механики деформирования контактирующих элементов [12], отчего в значительной мере зависят результаты решения задач. Для рассматриваемого класса деформируемых систем, когда по предположению оболочка и скрепленные с ней основания являются тонкими, простейшие непротиворечивые уравнения теории контактного взаимодействия могут быть построены, если ограничиться линейными аппроксимациями векторов перемещений оболочки V и оснований V^{Zm} по их поперечным координатам z и $z^{(l)}$ [8]. При этом допускается, что основания на своих внешних лицевых (опорных) поверхностях могут взаимодействовать с другими деформируемыми элементами конструкции. Учет деформативности (податливости) этих элементов конструкции в соответствии с [9] может быть осуществлен путем задания векторов перемещений опорных поверхностей оснований (в частном случае они могут быть равными нулю).

«Материал оболочки и оснований в общем случае принимается изотропным, а напряжения и деформации в элементах деформируемой системы связаны между собой обобщенным законом Гука» [18].

Предполагается, что оболочка и основания деформируются без взаимного отрыва и проскальзывания, то есть в точках сопряжения элементов компоненты их векторов перемещений разрыва не терпят.

В соответствии с принятой математической моделью контактного взаимодействия оболочек с основаниями векторы упругих перемещений оболочки \bar{V}^z и оснований $\bar{V}^{z(l)}$ в рамках сдвиговой модели [8] С. П. Тимошенко представимы разложениями

$$\bar{V}^z = \bar{v} + z\bar{\gamma} = (u_i + z\gamma_i)\bar{r}^i + w\bar{m} \quad (26)$$

$$(-h \leq z \leq h, \alpha^i \in \Omega);$$

$$\bar{V}^{z(1)} = \bar{v}^{(l)} + z^{(l)}\bar{\gamma}^{(l)} = (u_i^{(l)} + z^{(l)}\gamma_i^{(l)})\bar{r}_{(l)}^i + (w^{(l)} + z^{(l)}\gamma^{(l)})m^{(l)} \quad (27)$$

$$(-h_{(l)} \leq z_{(l)} \leq h_{(l)}, \alpha^i \in \Omega_{(l)}).$$

Здесь $u_i, u_i^{(l)}, w, w^{(l)}$ – ковариантные компоненты векторов перемещений точек срединных поверхностей оболочки σ и оснований $\sigma_{(l)}$; $\gamma_i, \gamma_i^{(l)}, \gamma^{(l)}$ – ковариантные компоненты векторов поворотов волокон, нормальных к σ и $\sigma_{(l)}$ в системе осей координат недеформированных слоев оболочки и оснований. Согласно принятому предположению будем считать, что известны векторы перемещений точек лицевых поверхностей верхних $z_{(1)} = \delta_{(1)}$ и нижних $z_{(2)} = -\delta_{(2)}$ оснований и заданы векторами

$$\bar{U}^{(l)} = U_i^{(l)} \bar{r}_{(l)}^i + U_3^{(l)} m^{(l)} = U_{(l)}^i \bar{r}_i^{(l)} + U_3^{(l)} m^{(l)}. \quad (28)$$

В этом случае векторы (18) должны удовлетворять условиям

$$\bar{V}^{z_{(l)}}(z_{(l)} = \delta_{(l)} h_{(l)}) = \bar{v}^{(l)} + \delta_{(l)} h_{(l)} \bar{\gamma}^{(l)} = \bar{U}^{(l)}, \quad (29)$$

откуда устанавливается связь

$$\bar{v}^{(l)} = \bar{U}^{(l)} - b_{(l)} \bar{\gamma}^{(l)}; \quad b_{(l)} = \delta_{(l)} h_{(l)}. \quad (30)$$

Представление векторов \bar{V}^z и $\bar{V}^{z_{(l)}}$ в виде разложений (26) и (27) соответствует применению простейшей сдвиговой модели для оболочки и оснований, на которой базируется детально разработанная к настоящему времени уточненная теория оболочек типа Тимошенко.

Компоненты деформации оболочки по этой модели с точностью $\delta_i^k + z b_i^k \approx \delta_i^k$ при малых перемещениях вычисляются по формулам [8]:

$$\varepsilon_{ik}^Z = \varepsilon_{ik} + Z\aleph_{ik}; \varepsilon_{i3}^Z \approx \varepsilon_{i3}; \quad (31)$$

$$\begin{aligned} 2\varepsilon_{ik} &= \bar{r}_i \bar{v}_k + \bar{r}_k \bar{v}_i; 2\aleph_{ik} = \bar{r}_i \bar{\gamma}_k + \bar{r}_k \bar{\gamma}_i; \\ \varepsilon_{i3} &= \bar{r}_i \bar{\gamma} + \bar{m} \bar{v}_i (i, k = 1, 2); \end{aligned} \quad (32)$$

$$\begin{aligned} \bar{v} &= \partial \bar{v} / \partial \alpha^i = e_{ik} \bar{r}^k + \omega_i \bar{m}; \\ \bar{\gamma}_i &= \partial \bar{\gamma} / \partial \alpha^i = \Omega_{ik} \bar{r}^k + \Omega_i \bar{m}; \\ e_{ik} &= \nabla_i u_k - b_{ik} w; \omega_i = \nabla_i w + b_i^k u_k; \\ \Omega_{ik} &= \nabla_{ik} \gamma_k; \Omega_i = b_i^k \gamma_k. \end{aligned} \quad (33)$$

Подстановка (33) в соответствующие формулы для компонентов деформаций приводит к кинематическим соотношениям в скалярной форме

$$\begin{aligned} 2\varepsilon_{ik} &= e_{ik} + e_{ki}; 2\aleph_{ik} = \Omega_{ik} + \Omega_{ki}; \\ 2\varepsilon_{i3} &= \omega_i + \gamma_i. \end{aligned} \quad (34)$$

Компоненты тензора деформаций оснований при малых перемещениях с точностью $\delta_i^k + Z_{(l)} b_i^{(l)k} \approx \delta_i^k$ могут быть записаны в виде

$$\begin{aligned} 2\varepsilon_{ik}^{Z(l)} &= \bar{r}_i^{(l)} \bar{V}_k^{Z(l)} + \bar{r}_k^{(l)} \bar{V}_i^{Z(l)}; \varepsilon_{33}^{Z(l)} \approx \varepsilon_{33}^{(l)} = \gamma^{(l)}; \\ 2\varepsilon_{i3}^{Z(l)} &= \frac{\bar{r}_i^{(l)} \partial \bar{V}^{Z(l)}}{\partial Z_{(l)}} + \bar{V}_i^{Z(l)} \bar{m}^{(l)} (i, k = 1, 2). \end{aligned} \quad (35)$$

В (35) частные производные от векторов перемещений в силу соотношений (26), (28) и (24) определяются равенствами

$$\bar{V}_i^{Z(l)} = \partial \bar{V}^{Z(l)} / \partial \alpha^i = \bar{U}_i^{(l)} + (Z_{(l)} + b_{(l)}) \bar{\gamma}_i^{(l)} - \delta_{(l)} y_i^{(l)} \bar{\gamma}^{(l)}; \quad (36)$$

$$\begin{aligned}\partial \bar{V}^{Z(l)} / \partial z_{(l)} &= \bar{V}^{(l)}; \bar{U}_i^{(l)} = E_{ik}^{(l)} \bar{r}_{(l)}^k + E_i^{(l)} m^{(l)}; \\ \bar{\gamma}_i^{(l)} &= \Omega_{ik}^{(l)} \bar{r}_{(l)}^k + \Omega_i^{(l)} m^{(l)}; \\ E_{ik}^{(l)} &= \nabla_i U_k^{(l)} - b_{ik}^{(l)} U_3^{(l)}; E_i^{(l)} = \nabla_i U_3^{(l)} + b_i^{k(l)} U_k^{(l)}; \\ \Omega_{ik}^{(l)} &= \nabla_i \gamma_k^{(l)} - b_{ik}^{(l)} \gamma^{(l)}; = \nabla_i \gamma^{(l)} + b_i^{k(l)} \gamma_k^{(l)}.\end{aligned}$$

Подстановка выражений (18) в формулы (17) в рамках принятых ограничений на изменение толщины оснований (пренебрегая членами, содержащими сомножители $(z_{(l)} \text{ и } b_{(l)})^2$ и $y_i^{(l)} \gamma_k^{(l)} \approx \varepsilon$), позволяет записать кинематические соотношения для оснований в скалярной форме

$$\begin{aligned}\varepsilon_{ik}^{Z(l)} &= \varepsilon_{ik}^{0(l)} + \varepsilon_{ik}^{(l)} + (Z_{(l)} - b_{(l)}) \aleph_{ik}^{(l)}; \\ \varepsilon_{i3}^{Z(l)} &= \varepsilon_{i3}^{0(l)} + \varepsilon_{i3}^{(l)} + (Z_{(l)} - b_{(l)}) \aleph_{i3}^{(l)}; \\ 2\varepsilon_{ik}^{0(l)} &= E_{ik}^{(l)} + E_{ki}^{(l)}; 2\varepsilon_{ik}^{0(l)} = -\delta_{(l)} \left(y_i^{(l)} \gamma_k^{(l)} + y_k^{(l)} \gamma_i^{(l)} \right).\end{aligned}\tag{37}$$

«Представленные соотношения (31–34) и (35–37) полностью определяют деформированное состояние элементов рассматриваемой деформируемой системы, в которых функциональными неизвестными являются компоненты перемещений u_i , w оболочки, а также компоненты векторов поворотов γ_i , $\gamma^{(l)}_i$, $\gamma^{(l)}$ в оболочке и основаниях» [15].

2.2.4 Уравнения равновесия и граничные условия. Обобщенное вариационное уравнение

«Для построения необходимого комплекса статических соотношений, описывающих равновесие элементов рассматриваемой упругой системы, а также для установления кинематических условий сопряжения оболочки с основаниями воспользуемся обобщенным вариационным принципом Лагранжа» [21, 22].

Представим векторы контактных усилий взаимодействия между оболочкой и основаниями $\bar{q}^{(l)}$, векторы массовых сил в основаниях и оболочке $\bar{F}^{(l)}$ и \bar{F} , а также векторы заданных поверхностных сил $\bar{P}^{(+)}$ и $P^{(-)}$ в виде разложений

$$\begin{aligned}\bar{q}^{(l)} &= q_{(l)}^i \bar{r}_i + q_{(l)}^3 \bar{m} = \overset{\vee}{q}_{(l)}^i \bar{r}_i^{(l)} + \overset{\vee}{q}_{(l)}^3 \bar{m}^{(l)}; \\ (Z = \pm h, Z_{(l)} = -\delta_{(l)} h_{(l)}, \alpha^i \in \Omega_{(l)}); \end{aligned} \quad (38)$$

$$\begin{aligned}\bar{F}^{(l)} &= f^i \bar{r}_i + f^3 \bar{m} (-h_{(l)} \leq z \leq h, \alpha^i \in \Omega_{(l)}); \\ \bar{F} &= f^i \bar{r}_i + f^3 \bar{m} (-h \leq z \leq h, \alpha^i \in \Omega); \end{aligned} \quad (39)$$

$$\begin{aligned}\bar{P}^{(+)} &= p_{(+)}^i \bar{r}_i + p_{(+)}^3 \bar{m}; \bar{P}^{(-)} = p_{(-)}^i \bar{r}_i + p_{(-)}^3 \bar{m}; \\ (z = \pm h, \alpha^i \in \Omega \setminus \Omega_{(l)}). \end{aligned} \quad (40)$$

Введем также в рассмотрение векторы обобщенных поверхностных усилий, действующих на оболочку:

$$\bar{X}^{(+)} = \Delta \bar{P}^{(+)} + \Delta_{(1)} \bar{q}^{(1)}; \bar{X}^{(-)} = \Delta \bar{P}^{(-)} + \Delta_{(2)} \bar{q}^{(2)}, \quad (41)$$

в которых целочисленные коэффициенты Δ и $\Delta_{(l)}$ определяются следующими равенствами:

$$\Delta = 1; \Delta_{(l)} = 0 \forall \alpha^i \in \Omega \setminus \Omega_{(l)}; \Delta = 0; \Delta_{(l)} = 1 \forall \alpha^i \in \Omega_{(l)}. \quad (42)$$

На контуре Γ оболочки введем в рассмотрение правосторонний триэдр $\{\bar{n}, \bar{\tau}, \bar{m}\}$, в котором \bar{n} и $\bar{\tau}$ являются единичными векторами тангенциальной

нормали и касательной к Γ , заданными разложениями в основном и взаимном базисах поверхности σ ,

$$\bar{n}^{(l)} = n^i \bar{r}_i = n_i \bar{r}^i; \bar{\tau} = \tau^i \bar{r}_i = \tau_i = \tau_i \bar{r}^i. \quad (43)$$

Аналогичные формулы имеют место и для единичных векторов $\bar{n}^{(l)}$, $\bar{\tau}^{(l)}$, тангенциальных нормалей и касательных к контурным линиям $\Gamma_{(l)}$.

$$\bar{n}^{(l)} = n_{(l)}^i \bar{r}_i^{(l)} = n_i^{(l)} \bar{r}_{(l)}^i; \bar{\tau}^{(l)} = \tau_{(l)}^i \bar{r}_i^{(l)} = \tau_i^{(l)} \bar{r}_{(l)}^i. \quad (44)$$

В этом случае заданные векторы контурных усилий и моментов, действующих на оболочку, могут быть записаны в виде

$$\bar{R}^S = R_n^S \bar{n} + R_\tau^S \bar{\tau} + R_m^S \bar{m}; \bar{G}^S = G_n^S \bar{n} + G_\tau^S \bar{\tau}. \quad (45)$$

Предполагая в дальнейшем граничные срезы оснований $\Sigma_{(l)}$ свободными от внешних воздействий, в соответствии с (19) составим функционал обобщенного вариационного принципа

$$\begin{aligned} I = & \int_{\Gamma} (\bar{R}^S \bar{v} + \bar{G}^S \bar{\gamma}) d\Gamma + \int_{\Omega \setminus \Omega_{(l)}} [\bar{P}^{(+)} (\bar{v} + h\bar{\gamma}) + \bar{P}^{(-)} (\bar{v} - h\bar{\gamma})] d\sigma + \\ & + \int \int_V [\bar{F} (\bar{v} + z\bar{\gamma}) - W] dz d\sigma + \\ & + \sum_l \left\{ \int_{\Omega_{(l)}} \int [\bar{q}^{(l)} (\bar{v} + \delta_{(l)} h\bar{\gamma}) - \bar{q}^{(l)} (\bar{U}^{(l)} - 2b_{(l)} \bar{\gamma}^{(l)})] d\sigma + \right. \\ & \left. + \int \int_{V_{(l)}} \int \{ \bar{F} [\bar{U}^{(l)} + (z_{(l)} - b_{(l)}) \bar{\gamma}^{(l)}] - W_{(l)} \} d\sigma dz_{(l)} \right\}, \end{aligned} \quad (46)$$

где W , $W_{(l)}$ – удельные потенциальные энергии деформации оболочки и оснований.

Как было отмечено выше, данный функционал отличается от традиционного функционала Лагранжа только членами, выражающими работу реактивных усилий взаимодействия $\bar{q}^{(l)}$ на соответствующих им перемещениях.

Условие стационарности функционала (46) доставляет обобщенное вариационное уравнение

$$\begin{aligned}
\delta I = & \int (\bar{R}^S \delta \bar{v} + \bar{G}^S \delta \bar{\gamma}) d\Gamma + \\
& + \int_{\Omega} \int \left[\bar{P}^{(+)} (\delta \bar{v} + h \delta \bar{\gamma}) + \bar{P}^{(-)} (\delta \bar{v} - h \delta \bar{\gamma}) \right] d\sigma + \\
& + \int \int_V \int [\bar{F} (\delta \bar{v} + z \delta \bar{\gamma}) - \delta W] dz d\sigma + \sum_l \left\{ \int_{\Omega^{(l)}} \int [\bar{q}^{(l)} (\delta \bar{v} + \delta_{(l)} h \delta \bar{\gamma}) + \right. \\
& + \delta \bar{q}^{(l)} (\bar{v} + \delta_{(l)} h \bar{\gamma}) - \delta \bar{q}^{(l)} (\bar{U}^{(l)} - 2b_{(l)} \bar{\gamma}^{(l)}) + 2b_{(l)} \bar{q}^{(l)} \delta \bar{\gamma}^{(l)}] d\sigma + \\
& \left. + \int \int_{V^{(l)}} \int \left\{ [\bar{F}^{(l)} (z_{(l)} - b_{(l)}) \delta \bar{\gamma}^{(l)}] - \delta \sigma dz_{(l)} \right\} = 0. \right. \quad (47)
\end{aligned}$$

В (47) в качестве варьируемых функциональных аргументов приняты и векторы введенных в рассмотрение реактивных усилий взаимодействия $\bar{q}^{(l)}$ между оболочкой и основаниями.

Входящие в (48) вариации удельных потенциальных энергий деформации δW и $\delta W_{(l)}$ в рамках принятого в теории типа Тимошенко предположения о равенстве нулю напряжений поперечного обжатия в оболочке могут быть записаны в виде

$$\begin{aligned}
\delta W = & \int_{\Omega} \int \int_{-h}^h (\sigma^{ik} \delta \varepsilon_{ik}^z + 2\sigma^{i3} \delta \varepsilon_{i3}^z) d\sigma dz; \\
\delta W_{(l)} = & \int_{\Omega^{(l)}} \int \int_{-h^{(l)}}^{h^{(l)}} \left(\sigma_{(l)}^{ik} \delta \varepsilon_{ik}^z + 2\sigma_{(l)}^{i3} \delta \varepsilon_{i3}^z + \sigma_{(l)}^{33} \delta \varepsilon_{33}^{(l)} \right) d\sigma dz_{(l)}. \quad (48)
\end{aligned}$$

После приведения внешних и внутренних усилий и моментов к срединным поверхностям оболочки σ и оснований $\sigma_{(l)}$.

$$\begin{aligned}\bar{X} &= \bar{X}^{(+)} + X^{(-)} + \int_{-h}^h \bar{F} dz = X^i \bar{r}_i + X^3 \bar{m}; \\ \bar{M} &= h(\bar{X}^{(+)} - \bar{X}^{(-)}) + \int_{-h}^h \bar{F} z dz = M^i \bar{r}_i.\end{aligned}\tag{49}$$

$$T^{ik} = \int_{-h}^h \sigma^{ik} dz; M^{ik} = \int_{-h}^h \sigma^{ik} z dz; N_i = \int_{-h}^h \sigma^{i3} dz;\tag{50}$$

$$\bar{M}^{(l)} = \int_{-h^{(l)}}^{h^{(l)}} \bar{F}^{(l)} (z_{(l)} - b_{(l)}) dz_{(l)} + 2b_{(l)} = M_{(l)}^i \bar{r}_i^{(l)} + M_{(l)}^3 \bar{m}^{(l)};\tag{51}$$

$$\begin{aligned}T_{(l)}^{ik} &= \int_{-h^{(l)}}^{h^{(l)}} \sigma_{(l)}^{ik} dz_{(l)}; M_{(l)}^{ik} = \int_{-h^{(l)}}^{h^{(l)}} \sigma_{(l)}^{ik} z_{(l)} dz_{(l)}; \\ N_{(l)}^i &= \int_{-h^{(l)}}^{h^{(l)}} \sigma_{(l)}^{i3} dz_{(l)};\end{aligned}\tag{52}$$

$$M_{(l)}^{i3} = \int_{-h^{(l)}}^{h^{(l)}} \sigma_{(l)}^{i3} z_{(l)} dz_{(l)}; N_{(l)}^3 = \int_{-h^{(l)}}^{h^{(l)}} \sigma_{(l)}^{33} dz_{(l)}.$$

и ряда традиционных преобразований с учетом (42) и (45) и (46) – (48) получим

$$\begin{aligned}\delta I &= \int_{\Gamma} (R_n^S \delta u_n + R_\tau^S \delta u_\tau + R_m^S \delta w + G_n^S \delta \gamma_n + G_\tau^S \delta \gamma_\tau) dS + \\ &+ \int \int_{\Omega} (X^i \delta u_i + X^3 \delta w + M^i \delta \gamma_i) d\sigma - \\ &- \int \int_{\Omega} (T^{ik} \nabla_i \delta u_k + M^{ik} \nabla_i + N^i \nabla_i \delta w - b_{ik} T^{ik} \delta w + b_i^k N^i \delta u_k +\end{aligned}\tag{53}$$

$$\begin{aligned}
& + N^i \delta \gamma_i) d\sigma + \sum_l \left\{ \int_{\Omega^{(l)}} \left(\Phi_i^{(l)} \delta q_{(l)}^i + \Phi_3^{(l)} \delta q_{(l)}^3 \right) d\sigma \right. \\
& \quad + \int_{\Omega^{(l)}} \left[M_{(l)}^i \delta \gamma_i^{(l)} + M_{(l)}^3 \delta \gamma^{(l)} - \right. \\
& \quad \quad \left. - \left(M_{(l)}^{ik} - b_{(l)} T_{(l)}^{ik} \right) \nabla_i \delta \gamma_k^{(l)} + S_{(l)}^i \delta \gamma_i^{(l)} - \right. \\
& \quad \left. \left. - \left(M_{(l)}^{i3} - b_{(l)} N_{(l)}^i \right) \nabla_i \delta \gamma^{(l)} + S_{(l)} \delta \gamma^{(l)} \right] d\sigma \right\} = 0,
\end{aligned}$$

А также

$$\begin{aligned}
S_{(l)}^i &= -b_j^{i(l)} M_{(l)}^{j3} + \delta_{(l)} y_j^{(l)} T_{(l)}^{ij} - N_{(l)}^i; \\
S_{(l)} &= b_{ij}^{(l)} M_{(l)}^{ij} + N_{(l)}^i \delta_{(l)} y_i^{(l)} - N_{(l)}^3; \\
\Phi_i^{(l)} &= u_i + \delta_{(l)} h \gamma_i + y_i^{(l)} w - U_i^{(l)} + 2b_{(l)} \gamma_i^{(l)}; + N^i \delta \gamma_i) d\sigma \quad (54) \\
\Phi_3^{(l)} &= w - (u_i + \delta_{(l)} h \gamma_i) y_k^{(l)} a^{ik} - U_3^{(l)} + 2b_{(l)} \gamma^{(l)}; \\
& \quad - \left(M_{(l)}^{i3} - b_{(l)} N_{(l)}^i \right) \nabla_i \delta \gamma^{(l)} + S_{(l)} \delta \gamma^{(l)}] d\sigma \} = 0,
\end{aligned}$$

где $u_n, u_\tau, \gamma_n, \gamma_\tau, u_n^{(l)}, u_\tau^{(l)}, \gamma_n^{(l)}, \gamma_\tau^{(l)}$ - компоненты векторов перемещений и поворотов в осях триэдров $\{\bar{n}, \bar{\tau}, \bar{m}\}, \{\bar{n}^{(l)}, \bar{\tau}^{(l)}, \bar{m}^{(l)}\}$:

$$\begin{aligned}
\bar{v} &= u_n \bar{n} + u_\tau \bar{\tau} + w \bar{m}; \bar{\gamma} = \gamma_n \bar{n} + \gamma_\tau \bar{\tau}; \\
\bar{v}^{(l)} &= u_n^{(l)} \bar{n}^{(l)} + u_\tau^{(l)} \bar{\tau}^{(l)} + w^{(l)} \bar{m}^{(l)}; \quad (55) \\
\bar{\gamma}^{(l)} &= \gamma_n^{(l)} \bar{n}^{(l)} + \gamma_\tau^{(l)} \bar{\tau}^{(l)} + \gamma^{(l)} \bar{m}^{(l)}.
\end{aligned}$$

Применяя формулы Гаусса-Остроградского для преобразования поверхностных интегралов в контурные [8]

$$\int \int_{\Omega} \nabla_i B^i d\sigma = \int B^i n_i d\Gamma; \quad (56)$$

$$\int_{\Omega^{(l)}} \int \nabla_i B^i d\sigma = \int_{\Gamma^{(l)}} B^i n_i^{(l)} d\Gamma_{(l)}.$$

И, учитывая разложения компонентов векторов перемещений

$$\begin{aligned} u_i &= u_n n_i + u_\tau \tau_i, \gamma_i = \gamma_n n_i + \gamma_\tau \tau_i; \\ \gamma_i^{(l)} &= \gamma_n^{(l)} n_i^{(l)} + \gamma_\tau^{(l)} \tau_i^{(l)}. \end{aligned} \quad (57)$$

Вариационное уравнение (57) можно преобразовать к виду

$$\begin{aligned} \delta I &= \int_{\Gamma} [(R_n^S - R_n) \delta u_n + (R_\tau^S - R_\tau) \delta u_\tau + (R_m^S - R_m) \delta w + \\ &\quad + (G_n^S - G_n) \delta \gamma_n + (G_\tau^S - G_\tau) \delta \gamma_\tau] dS + \\ &\quad + \int \int_{\Omega} (F^i \delta u_i + F^3 \delta w + F^{i+3} \delta \gamma_i) d\sigma + \\ &\quad + \sum_l \left[\int_{\Omega^{(l)}} \int (\Phi_i^{(l)} \delta q_{(l)}^i + \Phi_3^{(l)} \delta q_{(l)}^3 + F_{(l)}^i \delta \gamma_i^{(l)} + F_{(l)}^3 \delta \gamma^{(l)}) d\sigma \right. \\ &\quad \left. - \int_{(l)} (G_n^{(l)} \delta \gamma_n^{(l)} + G_\tau^{(l)} \delta \gamma_\tau^{(l)} + G_m^{(l)} \delta \gamma_\tau^{(l)}) dS \right] = 0. \end{aligned} \quad (58)$$

В силу произвольности вариаций $\delta u_i, \delta w, \delta \gamma_i, \delta \gamma_i^{(l)}, \delta \gamma^{(l)}, \delta q_{(l)}^i, \delta q_{(l)}^3$ из (55) следуют:

Уравнения равновесия оболочки

$$\begin{aligned} F^i &= \nabla_k T^{ik} - b_k^i N^k + X^i = 0; \\ F^3 &= \nabla_k N^k + b_{ik} T^{ik} + X^3 = 0; \\ F^{i+3} &= \nabla_k M^{ik} - N^i = 0, i = 1, 2 (\alpha^i \in \Omega). \end{aligned} \quad (59)$$

И оснований

$$F_{(l)}^i = \nabla_j (M_{(l)}^{ij} - b_{(l)} T_{(l)}^{ij}) - b_j^{i(l)} M_{(l)}^{j3} + \delta_{(l)} M_{(l)}^{j3} + \delta_{(l)} T_{(l)}^{ij} - N_{(l)}^i + M_{(l)}^i = 0; \quad (60)$$

$$F_{(l)}^3 = \nabla_i (M_{(l)}^{i3} - b_{(l)} N_{(l)}^i) + b_{ij}^{(l)} M_{(l)}^{ij} + \delta_{(l)} y_i^{(l)} N_{(l)}^i - N_{(l)}^3 + M_{(l)}^3 = 0, i = 1, 2 (\alpha^i \in \Omega_{(l)}).$$

Кинематические условия сопряжения оболочки с основаниями

$$\begin{aligned} \Phi_3^{(l)} &= u_i + \delta_{(l)} h \gamma_i + y_i^{(l)} w - U_i^{(l)} + 2b_{(l)} \gamma_i^{(l)} = 0; \\ \Phi_3^{(l)} &= w - (u_i + \delta_{(l)} h \gamma_i) y_k^{(l)} \alpha^{ik} - U_3^{(l)} + 2b_{(l)} \gamma^{(l)} = 0 (\alpha \in \Omega_{(l)}). \end{aligned} \quad (61)$$

Статические граничные условия на кромках оболочки Γ :

$$\begin{aligned} R_n &= T^{ik} n_i n_k = R_n^S \text{ при } \delta u_n \neq 0; \\ R_\tau &= T^{ik} \tau_i n_k = R_\tau^S \text{ при } \delta u_{\tau n} \neq 0; \\ R_m &= N^i n_i = R_m^S \text{ при } \delta w \neq 0; \\ G_n &= M^{ik} n_i n_k = G_n^S \text{ при } \delta \gamma_m \neq 0; \\ G_\tau &= M^{ik} \tau_i n_k = G_\tau^S \text{ при } \delta \gamma_\tau \neq 0. \end{aligned} \quad (62)$$

и оснований $\Gamma_{(l)}$:

$$\begin{aligned} G_n^{(l)} &= (M_{(l)}^{ij} - b_{(l)} T_{(l)}^{ij}) n_i^{(l)} n_j^{(l)} = 0 \text{ при } \delta \gamma_n^{(l)} \neq 0; \\ G_\tau^{(l)} &= (M_{(l)}^{ij} - b_{(l)} T_{(l)}^{ij}) n_i^{(l)} \tau_j^{(l)} = 0 \text{ при } \delta \gamma_\tau^{(l)} \neq 0; \\ G_m^{(l)} &= (M_{(l)}^{ij} - b_{(l)} T_{(l)}^{ij}) n_i^{(l)} = 0 \text{ при } \delta \gamma^{(l)} \neq 0. \end{aligned} \quad (63)$$

Если области $\Omega, \Omega_{(l)}$, занимаемые оболочкой и основаниями, ограничены отрезками координатных линий $\alpha^1 = \alpha_n^1, \alpha_k^1, \alpha^2 = \alpha_n^2, \alpha_k^2, \alpha^1 =$

$\alpha_n^{1(l)}, \alpha_k^{1(l)}, \alpha^2 = \alpha_n^{2(l)}, \alpha_k^{2(l)}$ соответственно, то внешнюю контурную нагрузку, действующую на оболочку, удобно представить в виде разложений

$$\begin{aligned}\bar{R}^i &= R^{i1}\bar{n} + R^{i2}\bar{\tau} + R^{i3}\bar{m}; \\ \bar{G}^i &= G^{i1}\bar{n} + G^{i2}\bar{\tau},\end{aligned}\tag{64}$$

где $R^{i1}, R^{i2}, R^{i3}, G^{i1}, G^{i2} (i = 1, 2)$ – компоненты внешнего контурного нагружения на кромках оболочки $\alpha^1 = const$ соответственно.

В этом случае в формулах Гаусса-Остроградского (56) следует положить $n_i d\Gamma = C_{ik} d\alpha^k$, то есть записать [4]:

$$\begin{aligned}\int B^i n_i d\Gamma &= \int B^i C_{ik} d\alpha^k; \\ \int_{\Gamma^{(l)}} B^i n_i^{(l)} d\Gamma^{(l)} &= \int_{\alpha^k} B^i C_{ik}^{(l)} d\alpha^k,\end{aligned}\tag{65}$$

где $C_{ik}, C_{ik}^{(l)} (i, k = 1, 2)$ – ковариантные компоненты дискриминантного тензора поверхностей σ и $\sigma^{(l)}$ соответственно:

$$C_{11} = C_{22} = 0; C_{12} = -C_{21} = \sqrt{a}; C_{ik}^{(l)} \approx C_{ik} (i, k = 1, 2).\tag{66}$$

При этом контурные интегралы в вариационном уравнении (56) с учетом выражений (55), (60) могут быть преобразованы к виду

$$\begin{aligned}&\int_{\Gamma} \left[(R_n^s - R_n) u_n \delta + (R_\tau^s - R_\tau) u_n \delta + \right. \\ &\quad \left. + (R_m^s - R_m) w \delta + (G_n^s - G_n) \gamma_n \delta + \right. \\ &\quad \left. + (G_\tau^s - G_\tau) \cdot \gamma_\tau \delta \right] d\Gamma \\ &= \int_{\alpha_H^2}^{\alpha_k^2} \left[(R^{11} \sqrt{a_{22}} - T^{1k} n_k \sqrt{a}) u_n \delta + (R^{12} \sqrt{a_{22}} - \right. \\ &\quad \left. - T^{1k} \tau_k \sqrt{a}) u_\tau \delta + (R^{13} \sqrt{a_{22}} - N^1 \sqrt{a}) w \delta + (G^{11} \sqrt{a_{22}} - \right.\end{aligned}\tag{67}$$

$$\begin{aligned}
& -M^{1k}n_k\sqrt{a})\delta\gamma_n + (G^{12}\sqrt{a_{22}} - M^{1k}\tau_k\sqrt{a})\delta\gamma_\tau]d\alpha^2|_{\alpha_h^1}^{\alpha_k^1} + \\
& + \int_{\alpha_h^1}^{\alpha_k^1} [(R^{21}\sqrt{a_{11}} - T^{2k}n_k\sqrt{a})u_n\delta + (R^{22}\sqrt{a_{11}} - T^{2k}\tau_k\sqrt{a})u_\tau\delta + \\
& \quad + (G^{22}\sqrt{a_{11}} - M^{2k}\tau_k\sqrt{a})d\alpha^1|_{\alpha_h^2}^{\alpha_k^2}; \\
& \sum_l \int_{\Gamma_{(1)}} (G_n^{(l)} \cdot \delta \cdot \gamma_n^{(l)} + G_\tau^{(l)} \cdot \delta \cdot \gamma_\tau^{(l)}) d\Gamma_{(l)} = \sum \left(\int_{\alpha_h^{2(l)}}^{\alpha_k^{2(l)}} [M_{(l)}^{1k} - \right. \\
& - b_{(l)}T_{(l)}^{1k})n_k^{(l)}\sqrt{a} \cdot \delta \cdot \gamma_n^{(l)} + (M_{(l)}^{1k} - b_{(l)}T_{(l)}^{1k})\tau_k^{(l)}\sqrt{a}\delta \cdot \gamma_\tau^{(l)} + (M_{(l)}^{13} - \\
& - b_{(l)}N_{(l)}^1\sqrt{a}\delta \cdot \gamma^{(l)}]d\alpha^2|_{\alpha_h^1}^{\alpha_k^1} - \int_{\alpha_h^{1(l)}}^{\alpha_k^{1(l)}} [(M_{(l)}^{2k} - b_{(l)}T_{(l)}^{2k})n_k^{(l)}\sqrt{a} \delta \cdot \gamma_n^{(l)} + \\
& \left. + (M_{(l)}^{2k} - b_{(l)}T_{(l)}^{2k})\tau_k^{(l)}\sqrt{a}\delta \cdot \gamma_\tau^{(l)} + (M_{(l)}^{23} - b_{(l)}N_{(l)}^2)\sqrt{a}\delta \cdot \gamma^{(l)}]d\alpha^1|_{\alpha_h^2}^{\alpha_k^2} \right\}.
\end{aligned}$$

Из этих выражений в силу произвольности вариаций δu_n , δu_τ , δw , $\delta \gamma_n$, $\delta \gamma_\tau$, $\delta \gamma_n^{(l)}$, $\delta \gamma_\tau^{(l)}$, $\delta \gamma^{(l)}$ следуют статические граничные условия для оболочек на кромках:

$$\begin{aligned}
& \alpha^1 = \text{const}(n_2 = 0) \\
& R^{11}\sqrt{a_{22}} - T^{11}n_1\sqrt{a} = 0 \Leftrightarrow \Leftrightarrow \Leftrightarrow \text{при } \delta u_n \neq 0; \\
& R^{12}\sqrt{a_{22}} - T^{1k}\tau_k\sqrt{a} = 0 \text{ при } \delta u_\tau \neq 0; \\
& R^{13}\sqrt{a_{22}} - N^1\sqrt{a} = 0 \text{ при } \delta u_w \neq 0; \tag{68} \\
& G^{11}\sqrt{a_{22}} - M^{11}n_1\sqrt{a} = 0 \text{ при } \delta \gamma_n \neq 0; \\
& G^{12}\sqrt{a_{22}} - M^{1k}\tau_k\sqrt{a} = 0 \text{ при } \delta \gamma_\tau \neq 0; \\
& \alpha^2 = \text{const}(n_1 = 0).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& R^{21}\sqrt{a_{11}} - T^{22}n_2\sqrt{a} = 0 \Leftrightarrow \Leftrightarrow \Leftrightarrow \text{при } \delta u_n \neq 0; \\
& R^{22}\sqrt{a_{11}} - T^{2k}\tau_k\sqrt{a} = 0 \text{ при } \delta u_\tau \neq 0; \tag{69} \\
& R^{23}\sqrt{a_{11}} - N^2\sqrt{a} = 0 \text{ при } \delta u_w \neq 0;
\end{aligned}$$

$$G^{21}\sqrt{a_{11}} - M^{22}n_2\sqrt{a} = 0 \text{ при } \delta\gamma_n \neq 0;$$

$$G^{22}\sqrt{a_{11}} - M^{2k}\tau_k\sqrt{a} = 0 \text{ при } \delta\gamma_\tau \neq 0;$$

и оснований на кромках $\alpha^1 = \alpha_n^{1(l)}, \alpha_k^{1(l)} (n_2^{(l)} = 0)$

$$M_{(l)}^{11} - b_{(l)}T_{(l)}^{11} = 0 \text{ при } \delta\gamma_n^{(l)} \neq 0;$$

$$(M_{(l)}^{1k} - b_{(l)}T_{(l)}^{1k})\tau_k^{(l)} = 0 \text{ при } \delta\gamma_\tau^{(l)} \neq 0;$$

$$M_{(l)}^{13} - b_{(l)}N_{(l)}^1 = 0 \text{ при } \delta\gamma^{(l)} \neq 0;$$

$$\alpha^2 = \alpha_n^{2(l)}, \alpha_k^{2(l)} (n_1^{(l)} = 0)$$

(70)

$$M_{(l)}^{22} - b_{(l)}T_{(l)}^{22} = 0 \text{ при } \delta\gamma_n^{(l)} \neq 0;$$

$$(M_{(l)}^{2k} - b_{(l)}T_{(l)}^{2k})\tau_k^{(l)} = 0 \text{ при } \delta\gamma_\tau^{(l)} \neq 0;$$

$$M_{(l)}^{23} - b_{(l)}N_{(l)}^2 = 0 \text{ при } \delta\gamma^{(l)} \neq 0.$$

(71)

«Выведенные статические и кинематические соотношения необходимо дополнить физическими соотношениями, устанавливающими связь между тензорами напряжений и деформаций элементов исследуемой деформируемой системы» [31].

2.2.5 Приближенная постановка задач взаимодействия многослойных оболочек с основаниями, расположенными вдоль контура

В изделиях конструкционной оптики ОА широко используются многослойные оболочечные или пластинчатые элементы. Требованиям по обеспечению необходимых показателей их надежности и минимальной массы при достаточной их прочности и жесткости во многих случаях удается удовлетворить благодаря применению как новых конструкционных материалов для отдельных слоев, так и рациональной их компоновке в

составе всего многослойного пакета. Последний в реальных конструкциях оказывается, как правило, собранным из чередующихся между собой жестких и мягких слоев с резко различающимися физико-механическими свойствами, которые имеют разнотипные условия закрепления в каркасе. Соединение же крайних слоев с элементами силовой схемы конструкции при этом осуществляется так же, как и однослойных элементов ОА: через буферные слои деформируемых оснований, выполненных из полимерных материалов.

При разработке методов прочностного анализа таких многослойных элементов ОА нетривиальным является выбор соответствующей математической модели для описания механики их деформирования, так как в силу указанных особенностей контурного закрепления как отдельных слоев, так и пакета слоев в целом в каркасе автомобиля необходимо предусматривать возможность формулировки разнотипных граничных условий для слоев и моделирования податливости элементов крепления. Этим требованиям удовлетворяют дискретно-структурные модели многослойных оболочек, из которых наиболее употребительными в расчетной практике на сегодня являются соотношения теории [13] в тех или иных вариантах [24, 25] и допускающие учет податливости элементов контурного крепления внешних слоев в рамках описанных выше подходов. В дальнейшем для класса многослойных элементов ОА, имеющих элементы крепления в виде тонких и узких полос на их внешнем контуре, ограничимся применением приближенного подхода, изложенного выше в данной главе. Кроме того, все слои многослойного пакета будем считать тонкими.

В рамках модели (рисунок 4) вектор перемещения точки m -го слоя пакета может быть представлен в виде:

$$\begin{aligned} \bar{V}_{(m)}^z &= \bar{v}_{(m)} + z\bar{Y}_{(m)} = \left(u_i^{(m)} + z_{(m)} \gamma_i^{(m)} \right) \bar{r}_{(m)}^i + w\bar{m}_{(m)} \\ & \left(-\delta_{(m)}/2 \leq z_{(m)} \leq \delta_{(m)}/2 \right), m = \overline{1, n}, \end{aligned} \quad (72)$$

где $\bar{v}_{(m)}$ – вектор перемещений точек срединной поверхности $\sigma_{(m)}$ -го слоя; $\bar{\gamma}_{(m)}$ – вектор поворотов.

Разложениям (72) соответствуют следующие выражения для компонентов тензора деформации:

$$\begin{aligned}\varepsilon_{ij}^{z(m)} &= \varepsilon_{ij}^{(m)} + z_{(m)}\chi_{ij}^{(m)}; \quad 2\varepsilon_{i3}^{z(m)} = 2\varepsilon_{i3}^{(m)} = \omega_i^{(m)} + \gamma_i^{(m)}; \\ 2\varepsilon_{ij}^{(m)} &= e_{ij}^{(m)} + e_{ji}^{(m)}; \quad 2\chi_{ij}^{(m)} = E_{ij}^{(m)} + E_{ji}^{(m)},\end{aligned}\quad (73)$$

В (73):

$$e_{ik}^{(m)} = \nabla_i u_k^{\circ(m)} - b_{ik}w; \quad E_{ik}^{(m)} = \nabla_i \gamma_k^{(m)}; \quad \omega_i^{(m)} = \nabla_i w + b_i^k u_k^{\circ(m)}. \quad (74)$$

Полагая далее, что слои оболочки работают без взаимного отрыва и проскальзывания, подчиним (72) условиям ($\delta_{(m)}$ – толщина m -го слоя):

$$\bar{V}_{(m)}^z(z_{(m)} = \delta_{(m)}/2) = \bar{V}_{(m+1)}^z(z_{(m+1)} = -\delta_{(m+1)}/2). \quad (75)$$

Исходя из этих условий, выбирая в качестве искомым функций компоненты векторов перемещений внешних лицевых поверхностей пакета и поверхностей сопряжения слоев $u_i^{(j)}, w(j = \overline{1, n+1})$, для функций $u_i^{\circ(m)}, \gamma^{(m)}$ установим формулы:

$$\begin{aligned}u_i^{\circ(m)} &= (u_i^{(m)} + u_i^{(m+1)})/2; \\ \gamma_i^{(m)} &= (u_i^{(m+1)} - u_i^{(m)})/\delta_{(m)} \quad (i = 1, 2; m = \overline{1, n}).\end{aligned}\quad (76)$$

Через введенные в рассмотрение новые неизвестные компоненты деформации (73) будут выражаться по формулам:

$$\begin{aligned}
e_{ij}^{(m)} &= \nabla_i (u_j^{(m)} + u_j^{(m+1)}) / 2 - b_{ij} w; \\
\omega_i^{(m)} &= \nabla_i w + b_i^j (u_j^{(m)} + u_j^{(m+1)}) / 2; \\
E_{ij}^{(m)} &= (u_j^{(m+1)} - u_j^{(m)}) \frac{\partial}{\partial \alpha^i} (\delta_{(m)})^{-1} + \\
&+ \frac{\nabla_i (u_j^{(m+1)} - u_j^{(m)})}{\delta} \quad (i, j = 1, 2; m = \overline{1, n}).
\end{aligned} \tag{76}$$

Для вывода уравнений равновесия в усилиях и моментах и статических граничных условий на контуре оболочки составим вариационное уравнение Лагранжа, которое для случая, когда контурные линии оболочек совпадают с координатными линиями $\alpha^i = \alpha_\mu^i$, $\alpha^i = \alpha_k^i$ примет вид

$$\begin{aligned}
&\sum_{m=1}^n \int_{\sigma} \int [T_{(m)}^{ik} \delta \varepsilon_{ik}^{(m)} + T_{(m)}^{i3} \delta \varepsilon_{i3}^{(m)} + M_{(m)}^{ik} \delta \chi_{ik}^{(m)}] d\sigma - \\
&\quad - \sum_{m=1}^n \int_{\sigma} \int \left(X_{(m)}^k \delta u_k^{(m)} + X_{(m)}^3 \delta w \right) d\sigma - \\
&\quad - \int_{\alpha_n^2}^{\alpha_k^2} \left[\sum_{m=1}^n \left(K_{(m)}^{1k} \delta \overset{\circ}{u}_k^{(m)} + L_{(m)}^{1k} \delta \gamma_k^{(m)} \right) + K^{13} \delta w \right] \sqrt{a_{22}} d\alpha^2 \Big|_{\alpha_n^1}^{\alpha_k^1} - \\
&\quad - \int_{\alpha_n^1}^{\alpha_k^1} \left[\sum_{m=1}^n \left(K_{(m)}^{1k} \delta \overset{\circ}{u}_k^{(m)} + L_{(m)}^{1k} \delta \gamma_k^{(m)} \right) + K^{13} \delta w \right] \sqrt{a_{22}} d\alpha^2 \Big|_{\alpha_n^1}^{\alpha_k^1} - \\
&\quad - \int_{\alpha_n^1}^{\alpha_k^1} \left[\sum_{m=1}^m \left(K_{(m)}^{2k} \delta \overset{\circ}{u}_k^{(m)} + L_{(m)}^{2k} \delta \gamma_k^{(m)} \right) + K^{23} \delta w \right] \sqrt{a_{11}} d\alpha^1 \Big|_{\alpha_n^2}^{\alpha_k^2} = 0.
\end{aligned} \tag{77}$$

Здесь $T_{(m)}^{ik}, T_{(m)}^{i3}, M_{(m)}^{ik}$ – компоненты внутренних усилий и момента;
 $X_{(m)}^k, X_{(m)}^3, M_{(m)}^k, K_{(m)}^{ik}, K_{(m)}^{i3}, L_{(m)}^{ik}$ – компоненты векторов поверхностной,
 массовой и контурной нагрузок:

$$\begin{aligned}\bar{X}_{(m)} &= X_{(m)}^k \bar{r}_k^{(m)} + X_{(m)}^3 \bar{m}_{(m)}; \bar{M}_{(m)} = M_{(m)}^k \bar{r}_k^{(m)}; \\ \bar{K}_{(m)}^i &= K_{(m)}^{ik} \bar{r}_k^{(m)} + K_{(m)}^{i3} \bar{m}_{(m)}; \bar{L}_{(m)}^i = L_{(m)}^{ik} \bar{r}_k^{(m)} \quad (i, k = \overline{1, 2}; m = \overline{1, n}),\end{aligned}\quad (78)$$

приведенных к срединным поверхностям $\sigma_{(m)}$ слоев пакета.

Из вариационного уравнения (77) после ряда преобразований с учетом формул (75, 76) следуют [25]: система $2n + 3$ уравнений равновесия в усилиях

$$R_{(k)}^i - \nabla_i S_{(k)}^{ij} - Y_{(k)}^i = 0; \quad (79)$$

$$R^3 - \nabla_j S^j - X^3 = 0 \quad (i, j = \overline{1, 2}; k = \overline{1, n+1}),$$

где компоненты обобщенных внутренних усилий, внешней поверхностной и объемной нагрузки определяются по следующим формулам:

$$\begin{aligned}S_{(k)}^{ij} &= \Delta_{(k)}^1 \left(\frac{1}{2} T_{(k)}^{ij} - \phi_{(k)} M_{(k)}^{ij} \right) + \Delta_{(k)}^2 \left(\frac{1}{2} T_{(k-1)}^{ij} + \phi_{(k-1)} M_{(k-1)}^{ij} \right); \\ R_{(k)}^i &= \Delta_{(k)}^1 \left(\frac{1}{2} b_j^i T_{(k)}^{j3} - \phi_j^{(k)} M_{(k)}^{ij} - \phi_{(k)} T_{(k)}^{i3} \right) + \\ &+ \Delta_{(k)}^2 \left(\frac{1}{2} b_j^i T_{(k-1)}^{j3} + \phi_j^{(k-1)} M_{(k-1)}^{ij} + \phi_{(k-1)} T_{(k-1)}^{i3} \right); \\ Y_{(k)}^i &= \Delta_{(k)}^1 \left(\frac{1}{2} X_{(k)}^i - \phi_{(k)} M_{(k)}^i \right) + \Delta_{(k)}^2 \left(\frac{1}{2} X_{(k-1)}^i + \phi_{(k-1)} M_{(k-1)}^i \right); \\ S^i &= \sum_{m=1}^n T_{(m)}^{i3}; R^3 = b_{ij} \sum_{m=1}^n T_{(m)}^{ij}; X^3 = \sum_{m=1}^n X_{(m)}^3 \\ &\quad (i, j = \overline{1, 2}, k = \overline{1, n+1}; m = \overline{1, n});\end{aligned}\quad (80)$$

$$\begin{aligned}\phi_{(k)} &= 1/\delta_{(k)}; \phi_i^{(k)} = \partial\phi_{(k)}/\partial\alpha^i; \\ \Delta_{(s)}^1 &= 1 \text{ при } s = \overline{1, n}; \\ \Delta_{(s)}^2 &= 1 \text{ при } s = \overline{2, n+1}; \Delta_{(n+1)}^1 = \Delta_{(1)}^2 = 0.\end{aligned}$$

Статические граничные условия на кромках оболочки $\alpha^i = const$

$$\begin{aligned}S_{(k)}^{11}\sqrt{a} - Q_{(k)}^{11}a^{11}\sqrt{a_{22}} &= 0 \text{ при } \delta u_n^{(k)} \neq 0; \\ S_{(k)}^{1i}a_{i2}\sqrt{a} - Q_{(k)}^{12}a_{22}\sqrt{a_{22}} &= 0 \text{ при } \delta u_r^{(k)} \neq 0; \\ S^1\sqrt{a} - Q^{13}\sqrt{a_{22}} &= 0 \text{ при } \delta w \neq 0 \\ (k = \overline{1, n+1}), \quad \overrightarrow{1, 2},\end{aligned} \tag{81}$$

где компоненты обобщенных контурных усилий и моментов определяются по формулам:

$$\begin{aligned}Q_{(k)}^{11} &= \Delta_{(k)}^1 \left(\frac{1}{2} R_{(k)}^{11} - \phi_{(k)} G_{(k)}^{11} \right) + \Delta_{(k)}^2 \left(\frac{1}{2} R_{(k-1)}^{11} + \phi_{(k-1)} G_{(k-1)}^{11} \right); \\ Q_{(k)}^{12} &= \Delta_{(k)}^1 \left(\frac{1}{2} R_{(k)}^{12} - \phi_{(k)} G_{(k)}^{12} \right) + \Delta_{(k)}^2 \left(\frac{1}{2} R_{(k-1)}^{12} + \phi_{(k-1)} G_{(k-1)}^{12} \right); \\ Q^{13} &= \sum_{m=1}^n R_{(m)}^{13}; \overline{R}_{(m)}^1 = R_{(m)}^{11} = R_{(m)}^{11} \overline{r}^1 + R_{(m)}^{12} \overline{r}_2 + R_{(m)}^{13} \overline{m}; \\ \overline{G}_{(m)}^1 &= G_{(m)}^{11} \overline{r}^1 + G_{(m)}^{12} \overline{r}_2 \quad (m = \overline{1, n}).\end{aligned} \tag{82}$$

Компоненты деформации слоев оболочки, определяемые соотношениями (82), связаны с компонентами внутренних усилий и моментов в слоях с помощью физических соотношений в одной из форм.

Последовательное использование уравнений равновесия (79), физических и кинематических (77) соотношений, приводит к системе дифференциальных с общим порядком, равным $4n + 6$, разрешимых относительно прогиба оболочки w и ковариантных компонентов вектора

тангенциальных смещений лицевых поверхностей пакета и поверхностей сопряжения слоев $u_i^{(k)}$ ($i = 1, 2$; $k = \overline{1, n+1}$), которые приняты в качестве функциональных неизвестных задачи.

Нетрудно заметить, что применение предложенной в данной главе приближенной методике учета податливости элементов закрепления к решению задач статики и термоупругости многослойных элементов остекления, описываемых приведенным выше комплексом соотношений (22–82), заключается лишь в корректировке статических граничных условий (81). При этом компоненты обобщенных контурных усилий и моментов, приближенных к граничному срезу оболочки, должны быть дополнены компонентами контурной нагрузки, что эквивалентно учету влияния элементов крепления оболочки на ее НДС.

В силу сказанного выражения для обобщенных контурных усилий (82) с учетом обозначений примут вид

$$\begin{aligned}
 Q_{(k)}^{11} &= \Delta_{(k)}^1 \left(\frac{1}{2} \tilde{R}_{(k)}^{11} - \phi_{(k)} \tilde{G}_{(k)}^{11} \right) + \Delta_{(k)}^2 \left(\frac{1}{2} \tilde{R}_{(k-1)}^{11} + \phi_{(k-1)} \tilde{G}_{(k-1)}^{11} \right); \\
 Q_{(k)}^{12} &= \Delta_{(k)}^1 \left(\frac{1}{2} \tilde{R}_{(k)}^{12} - \phi_{(k)} \tilde{G}_{(k)}^{12} \right) + \Delta_{(k)}^2 \left(\frac{1}{2} \tilde{R}_{(k-1)}^{12} + \phi_{(k-1)} \tilde{G}_{(k-1)}^{12} \right); \\
 Q^{13} &= \sum_{m=1}^n R_{(m)}^{13} + \check{R}^{13} \quad (k = \overline{1, n+1}),
 \end{aligned} \tag{83}$$

В (83):

$$\begin{aligned}
 \tilde{R}_{(1)}^{11} &= R_{(1)}^{11} + \check{R}_{(2)}^{11} \sqrt{a_{11}}; \quad \tilde{G}_{(1)}^{11} = G_{(1)}^{11} + \check{G}_{(2)}^{11} \sqrt{a_{11}}; \\
 \tilde{R}_{(1)}^{12} &= R_{(1)}^{12} + \check{R}_{(2)}^{12} / \sqrt{a_{22}}; \quad \tilde{G}_{(1)}^{12} = G_{(1)}^{12} + \check{G}_{(2)}^{12} / \sqrt{a_{22}}; \\
 \tilde{R}_{(n)}^{11} &= R_{(n)}^{11} + \check{R}_{(1)}^{11} \sqrt{a_{11}}; \quad \tilde{G}_{(n)}^{11} = G_{(n)}^{11} + \check{G}_{(1)}^{11} \sqrt{a_{11}}; \\
 \tilde{R}_{(n)}^{12} &= R_{(n)}^{12} + \check{R}_{(2)}^{12} / \sqrt{a_{22}}; \quad \tilde{G}_{(n)}^{12} = G_{(n)}^{12} + \check{G}_{(1)}^{12} / \sqrt{a}; \\
 \tilde{R}_{(s)}^{1i} &= R_{(s)}^{1i}; \quad \tilde{G}_{(s)}^{1i} = G_{(s)}^{1i} \quad (i = 1, 2; s = \overline{2, n-1}).
 \end{aligned} \tag{84}$$

Входящие в (82, 83) компоненты контурной нагрузки $\check{R}^{1j}, \check{G}^{1i}$ ($i = 1, 2; j = \overline{1, 3}$) исходя из обозначений, принятых выше ($l = 1$ для верхнего основания и $l = 2$ – для нижнего), могут быть представлены в виде

$$\begin{aligned}
\check{R}_{(l)}^{11} &= \int_0^{t^{(l)}} \frac{1}{2b_{(l)}} \left[\left(N_{(l)}^1 + b_j^{1(l)} M_{(l)}^{j3} - \delta_{(l)} y_j^{(l)} T_{(l)}^{1j} - dR_{(l)}^{1j}/d\sigma\tau_j \right) - \right. \\
&\quad \left. - a^{1j} y_j^{(l)} \left(N_{(l)}^3 - b_{sk}^{(l)} M_{(l)}^{sk} - dR_{(l)}^j/d\sigma\tau_j \right) \right] n_1 dv; \\
\check{R}_{(l)}^{12} &= \int_0^{t^{(l)}} \frac{1}{2b_{(l)}} \left[\left(N_{(l)}^1 + b_j^{1(l)} M_{(l)}^{j3} - \delta_{(l)} y_j^{(l)} T_{(l)}^{1j} - dR_{(l)}^{1j}/d\sigma\tau_j \right) - \right. \\
&\quad \left. - a^{ij} y_j^{(l)} \left(N_{(l)}^3 - b_{sk}^{(l)} M_{(l)}^{sk} - dR_{(l)}^j/d\sigma\tau_j \right) \right] \tau_i dv; \\
\check{R}_{(l)}^{13} &= \sum_i \frac{1}{2b_{(l)}} \left[\left(N_{(l)}^i + b_j^{i(l)} M_{(l)}^{j3} - \delta_{(l)} y_j^{(l)} T_{(l)}^{ij} - dR_{(l)}^{ij}/d\sigma\tau_i^{(l)} \right) y_i^{(l)} + \right. \\
&\quad \left. + \left(N_{(l)}^3 - b_{ij}^{(l)} M_{(l)}^{ij} - \delta_{(l)} y_i^{(l)} N_{(l)}^i - dR_{(l)}^i/d\sigma\tau_i \right) \right] dv \\
&\hspace{15em} (85) \\
\check{G}_{(l)}^{11} &= \int_0^{t^{(l)}} \frac{h}{2h_{(l)}} \left\{ \left[\left(N_{(l)}^1 + b_j^{1(l)} M_{(l)}^{j3} - \delta_{(l)} y_j^{(l)} T_{(l)}^{1j} - dR_{(l)}^{1j}/d\sigma\tau_j \right) - \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - a^{1j} y_j^{(l)} \left(N_{(l)}^3 - b_{ik}^{(l)} M_{(l)}^{ik} - d\sigma\tau_j \right) \right] n_1 + \right. \\
&\quad \left. + \left[\left(N_{(l)}^i + b_j^{i(l)} M_{(l)}^{j3} - \delta_{(l)} y_j^{(l)} T_{(l)}^{ij} - n_1 dR_{(l)}^{i1}/d\sigma\tau_j \right) y_i^{(l)} + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \left(N_{(l)}^3 - b_{ij}^{(l)} M_{(l)}^{ij} - \delta_{(l)} y_i^{(l)} N_{(l)}^i - n_1 R_{(l)}^1/v - dR_{(l)}^i/d\sigma\tau_i \right) \right] v \right\} dv; \\
\check{G}_{(l)}^{12} &= \int_0^{t^{(l)}} \frac{h}{2h_{(l)}} \left[\left(N_{(l)}^i + b_j^{i(l)} M_{(l)}^{j3} - \delta_{(l)} y_j^{(l)} T_{(l)}^{ij} - d\sigma\tau_i \right) - \right. \\
&\quad \left. a^{ij} y_j^{(l)} \left(N_{(l)}^3 - b_{nk}^{(l)} M_{(l)}^{nk} - dR_{(l)}^j/d\sigma\tau_i \right) \right] \tau_i dv,
\end{aligned}$$

которые путем последовательного использования физических и кинематических (48) соотношений могут быть выражены через компоненты вектора углов поворотов слоев деформируемых оснований.

Последние в силу кинематических условий сопряжения слоев упругих оснований с внешними слоями пакета оболочки могут быть выражены через прогиб оболочки w и компоненты векторов тангенциальных смещений лицевых поверхностей пакета $u_i^{(n+1)}$ ($i = 1, 2$)

$$\begin{aligned}\gamma_i^{(1)} &= \frac{1}{2h_{(1)}} \left(U_i^{(1)} - u_i^{(n+1)} - w y_i^{(n)} \right); \\ \gamma_i^{(2)} &= -\frac{1}{2h_{(2)}} \left(U_i^{(2)} - u_i^{(1)} - w y_i^{(2)} \right); \\ \gamma^{(1)} &= \frac{1}{2h_{(1)}} \left(U_3^{(1)} - w + u_i^{(n+1)} y_k^{(1)} a^{ik} \right); \\ \gamma^{(2)} &= -\frac{1}{2h_{(2)}} \left(U_3^{(2)} - w + u_i^{(1)} y_k^{(2)} a^{ik} \right),\end{aligned}\tag{86}$$

где $U_j^{(l)}$ ($j = \overline{1,3}; l = 1,2$) – заданные компоненты векторов перемещений лицевых поверхностей оснований.

2.3 Математическое моделирование напряженно-деформированного состояния стекла типа триплекс

2.3.1 Типовая технологическая схема производства автомобильного стекла типа триплекс

«На производство стекло поступает в деревянных или металлических контейнерах. Автоматическим перекладчиком с вакуум-присосками лист стекла укладывается на конвейер, которым подается к установке резки. Резка осуществляется либо по шаблону, либо с помощью системы ЧПУ» [16].

«При отломке края стекла используют пневматические отломщики, газовые горелки, роликовые прессы и ручные приспособления.

После отломки заготовки подаются на конвейерную установку обработки края алмазными инструментами или абразивной лентой. Обычно на одной машине обрабатывают два противоположных края, затем заготовку

поворачивают на 90^0 и на следующей машине проводят обработку двух оставшихся краев.

Далее осуществляют мойку и контроль стекла на наличие царапин, загрязнений и других дефектов» [14].

«При моллировании листы стекла посыпают порошком-разделителем (тальком, слюдой, неорганическими солями, диатолоитовой землей), предупреждающим их сплавление во время гнутья. Часть листов снабжается защитной керамической полосой по краю. Полоса защищает герметик и адгезив, используемые для крепления стекла в раме от разрушающего воздействия ультрафиолетового излучения. При наличии накопителя (после обработки кромки, мойки, нанесения полосы) программный регулятор или мини-компьютер организывает дальнейшую работу линии» [2].

«Пара листов стекла устанавливается на форму для гнутья и направляется в печь. В случае необходимости получения листов с более резкой кривизной применяют шарнирные формы, снабженные противовесами, поворачивающими секции формы при нагреве стекла» [16].

Для «получения гнутых листов стекла высокого качества необходимо точное регулирование режима гнутья и правильное конструирование формы.

Современные леры для гнутья снабжаются газовым, электрическим или комбинированным отоплением и компьютерным управлением» [23].

«В качестве полимерной прокладки обычно используют пластифицированную поливинилбутиральную пленку с добавками, регулирующими адгезию и стабильность пленки. Пленка поставляется в рулонах с использованием бикарбоната натрия в качестве разделителя и может быть бесцветной или иметь окрашенную полосу» [26].

«Полученную пленку режут на куски трапецевидной формы, чтобы уменьшить количество отходов. Для резки и укладки пленки используют современное оборудование. Пленку с одной окрашенной полосой обычно режут таким образом, что полоса приобретает криволинейную форму в соответствии с кривизной стекла» [30].

«Необходимо точно регулировать содержание влаги в пленке, чтобы обеспечить заданный уровень адгезии к стеклу, определяющий режим безопасности. Для регулирования влажности используют сушилки, моечные машины и камеры регулируемой влажности. В помещениях, где хранится пленка, необходимо обеспечить чистоту.

Листы стекла из лера при нормальной температуре поступают на позицию сборки по охлаждающему конвейеру после удаления разделителя. После сборки остатки пленки отрезаются» [3].

«Подпрессовка стекол, как правило, осуществляется двумя способами. По первому способу пакет пропускается через печь, где пленка нагревается до температуры, обеспечивающей определенный уровень адгезии со стеклом. Далее пакет пропускается через систему прессующих роликов, удаляющих большую часть воздуха из пространства между листами. В некоторых случаях применяется вторая печь и вторая система роликов. При подпрессовке следует жестко контролировать и регулировать температуру пакета. Применяют различные конструкции роликов – с гибким валом, с надувными сегментами, с противовесом и так далее.» [15].

2.3.2 Расчет и определение размеров стекла

До сих пор не существует надежного и общепринятого метода расчета размеров для конструктивных элементов из стекла. Накопленный ранее опыт [20] и рассуждения ведут к созданию концепции надежности, на основе которой могут быть разработаны методы расчетов и определения размеров, а также стандарты в области конструирования стекол.

«Основными параметрами, характеризующими стекла триплекс, являются: геометрические (размеры и Форма), оптические (в том числе светопропускание, неискажаемость изображений» [35], безтуманность), механические (в том числе безосколочность) [20], термофизические (теплостойкость, термоустойчивость, морозостойкость и морозопрочность).

К одному из геометрических показателей относится показатель, характеризующий кривизну поверхности стекла.

Степень кривизны по ТУ в отдельных частях соответствует стреле общего прогиба от 90 до 350 мм (иногда и более) [20] при общей длине изделия 1200-1700 мм. Отклонения от заданной кривизны допускаются в пределах, обусловленных ТУ на данное «стекло, и обычно колеблются в пределах $\pm 1-2$ мм. Допускаемая вторая кривизна в поперечном направлении обычно ограничивается стрелой прогиба 10-15 мм.

Основные технические требования для безопасного стекла типа триплекс изложены в ТУ ГОСТ 5727-88 ОКП 59 2300» [6].

При проведении расчетов [15] следует учитывать наряду с обычными видами воздействий и нагрузок, такими, как собственный вес, снег и ветер, также и принудительные воздействия (например, деформация фундамента). А также, жесткий и мягкий удар, самопроизвольное разрушение в результате никелево-сульфидного роста у однослойных остеклений (ESG), не прошедших соответствующего термического, а также климатического воздействия, особенно для изоляционного остекления.

С другой стороны, нельзя забывать о прочности стекла, значении многослойной пленки у триплекса, а также условиях окружающей среды и длительности воздействия нагрузок. Кроме того, при проведении расчетов следует обратить внимание на свойства системы, такие как эффект связи у изоляционных остеклений или необходимость учета теории второго порядка.

Трудности при определении размеров стеклянных элементов обусловлены наличием зависимости между воздействием (его силой и длительностью) и сопротивлением. Это в значительной степени обуславливает подразделение на частичные коэффициенты надежности для воздействия и сопротивления.

В Германии в современных технических условиях, например: TRLV (Технические условия для применения линейно установленного остекления)

расчет производится путем сравнения действующего напряжения при растяжении с допустимым напряжением:

$$\sigma_S \leq \sigma_{don} = \frac{\sigma_R}{\gamma}, \quad (87)$$

где σ_{don} – допустимое напряжение;

γ – общий коэффициент надежности;

σ_R – прочность стекла.

Понятие общий коэффициент надежности означает, что коэффициент γ одновременно учитывает все погрешности и влияния, обусловленные посторонними воздействиями, сопротивлениями стекла и моделью расчета. При этом важно, что данный общий коэффициент надежности не требует дополнительного учета влияния величины поверхности стекла и длительности нагрузки.

Исходя из самой концепции расчета, несущественно, определяется ли общий коэффициент надежности в зависимости от воздействия или сопротивления. Таким образом, на величину фактической надежности влияют условия (например: теория второго порядка).

2.3.3 Математическое моделирование процесса соединения листов стекла типа триплекс

«Основные технические требования для безопасного стекла типа триплекс изложены в ТУ ГОСТ 5727-88 ОКП 59 2300. По данному документу отклонение гнутых изделий от заданной формы должны быть указаны в технических условиях или чертежах на конкретные изделия и обычно колеблются в пределах $\pm 1-2$ мм.

В данных документах нет технических требований на геометрические размеры отдельных листов, еще не склеенных между собой.

На основе анализа изученной литературы, можно сделать вывод о том, что нет четкой системы контроля изготовления стекла типа триплекс и нет специальных требований на каждый лист стекла в отдельности, до соединения их в пакет. Ввиду специфичности технологического процесса изготовления пакета триплекс, можно предположить о том, что каждое стекло в отдельности имеет свою степень отклонения геометрии.

С помощью препроцессора Patran и процессора Marc поставлена и решена нелинейная задача, моделирующая процесс соединения двух листов в один пакет.

Цель поставленной задачи заключается в выявлении возникновения избыточных внутренних напряжений, которые в последствии можно назвать остаточными.

Смоделирован процесс соединения двух листов стекла. При этом один из листов намеренно имеет отклонение по геометрии, а именно отклонение по кривизне 0,5 мм.

Взяты два случая отклонения геометрии:

Отклонение по стреле прогиба +0,5

Отклонение по стреле прогиба -0,5

Допустимое значение остаточных напряжений в кромках ветрового стекла по ТУ: $\sigma_{т сж.} = 10$ МПа; $\sigma_{т р.} = 8$ МПа

При входном контроле на ОАО «АвтоВАЗ» выявлена основная зона концентрации остаточных напряжений. Это зона вдоль края стекла. Эти данные получены опытным путем с помощью оптических приборов. Ширина кромки 50 мм» [15].

Механические свойства стекла типа триплекс:

$E = 70000$ МПа, $\sigma_{сж.} = 900$ МПа, $\sigma_{раст.} = 100$ МПа, $\mu = 0,22$, $\rho = 2,5$ Г/см³

Исходя из данных в таблицы и допустимых остаточных напряжений, можем получить значение напряжений, которые при возникновении в стекле приведут к его разрушению:

Суммарные напряжения будут равны:

$$\sigma_{\Sigma} = \sigma_m + \sigma, \quad (88)$$

где σ_m – остаточные напряжения, σ – механическое напряжение.

$$\sigma_{сж} = 890 \text{ МПа}, \sigma_{раст} = 92 \text{ МПа}.$$

Задаем кривую Гука для стекла. С помощью расчетного пакета моделируем соединение двух половинок стекла, одна из которых имеет отклонение формы. Соединение происходит до момента контакта стекол. В расчетный случай входит условие контакта, давление, закрепление.

После расчета, просматриваем результат. При первом расчетном случае выявлено, что нагрузка не достаточна, чтобы две половинки стекла соединились. Для этого необходимо увеличить давление.

По справочным данным [15] известно значение давление подпрессовки стекол $p = 1,25 \text{ МПа}$. Задаем для эксперимента давление такой величины. Отклонение геометрии составляет – 0,5 мм.

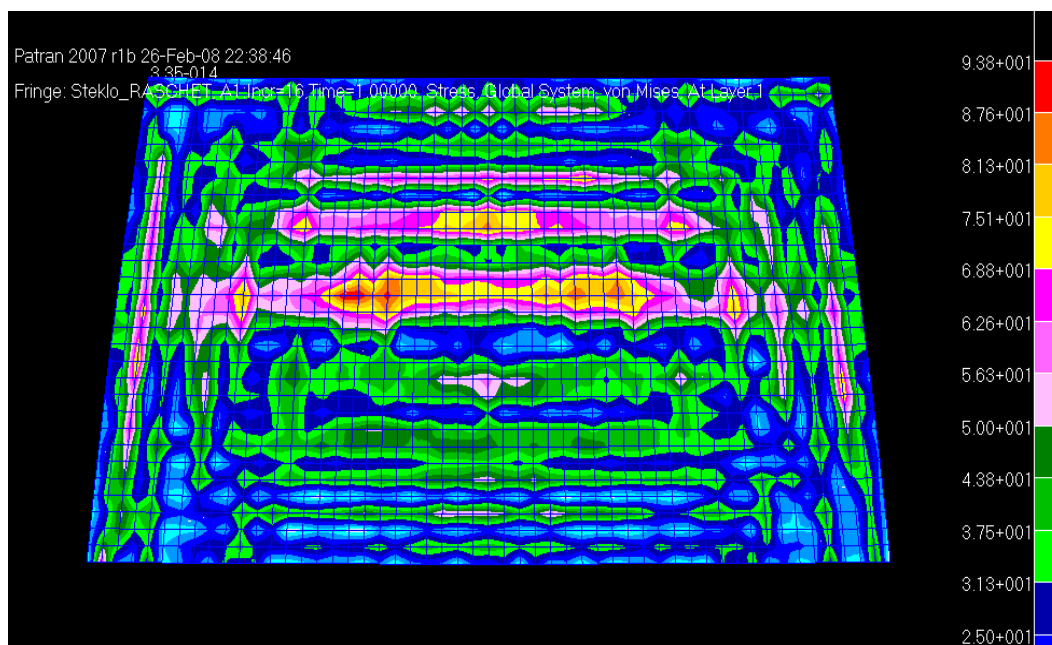


Рисунок 6 – Распределение напряжений при соединении двух листов стекла в пакет при отклонении геометрии

При соединении основным показателем по напряженному состоянию стекла, является предел прочности при растяжении, так как основными здесь будут растягивающие усилия. При первом расчетном случае появилось внутреннее напряжение, величиной $\sigma = 66,2$ МПа на кромке стекла на расстоянии 35-50 мм и в середине, где произошел контакт (рисунки 6 и 7).

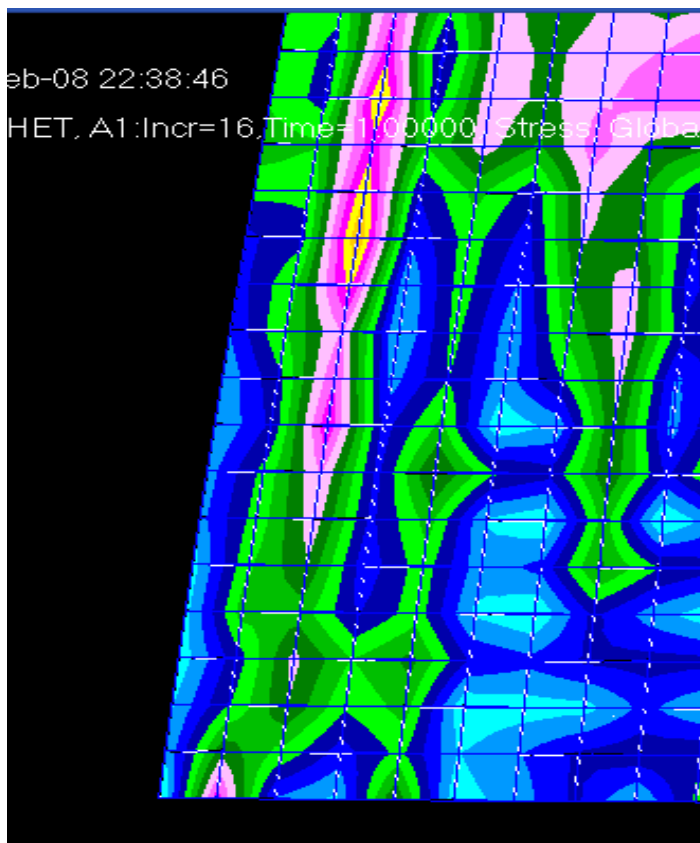


Рисунок 7 – Зона значительного напряжения по кромке стекла

Эта величина напряжения относится к одной половине. Если сложить две величины с обеих сторон, то получим значение (взяты максимальные значения): 75,2 МПа.

Отсюда видно, что значение напряжения приближается к пределу прочности при растяжении. Это означает, что при увеличении нагрузки при соединении двух половин стекла оно может разрушиться в процессе или в нем останутся внутренние напряжения, превышающие предельное допустимое значение и при небольших механических нагрузках при

эксплуатации или при установке стекла на кузов, оно может разрушиться самостоятельно.

С помощью препроцессора Patran, можно проследить весь процесс подпрессовки. Результат расчета по итерациям можно посмотреть, загрузив совместимый файл результата в препроцессор. Всего было рассчитано 18 итераций, по истечении которых, произошло полное соединение двух стекол (рисунок 8)

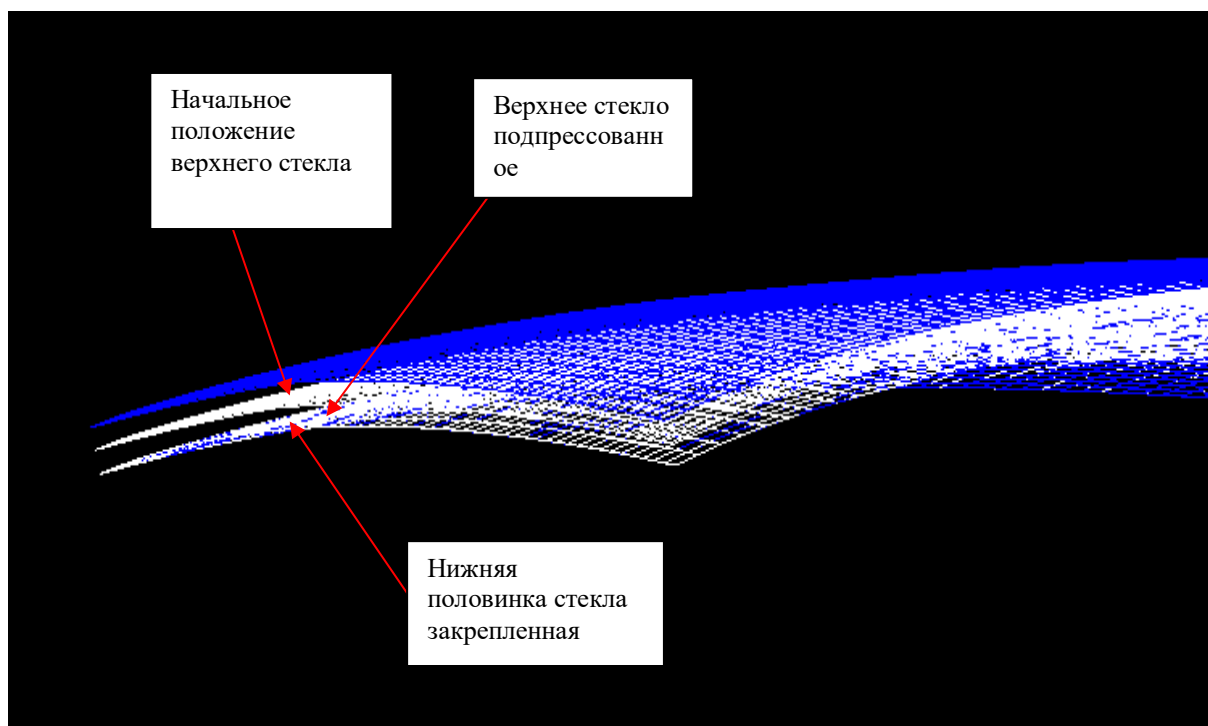


Рисунок 8 – Полная подпрессовка стекол

Рассмотрим второй расчетный случай, при котором в геометрии одного из стекол имеется отклонение по стреле прогиба $+ 0,5$ мм. В расчетном случае одно из стекол жестко закреплено, на другое действует давление подпрессовки величиной $1,25$ МПа. В расчетный случай входит условие контакта, т.е. при полном контакте листов стекла, расчет закончится.

С помощью постпроцессора рассмотрим результат. Как и в первом случае имеются зоны повышенного напряжения (рисунок 9).

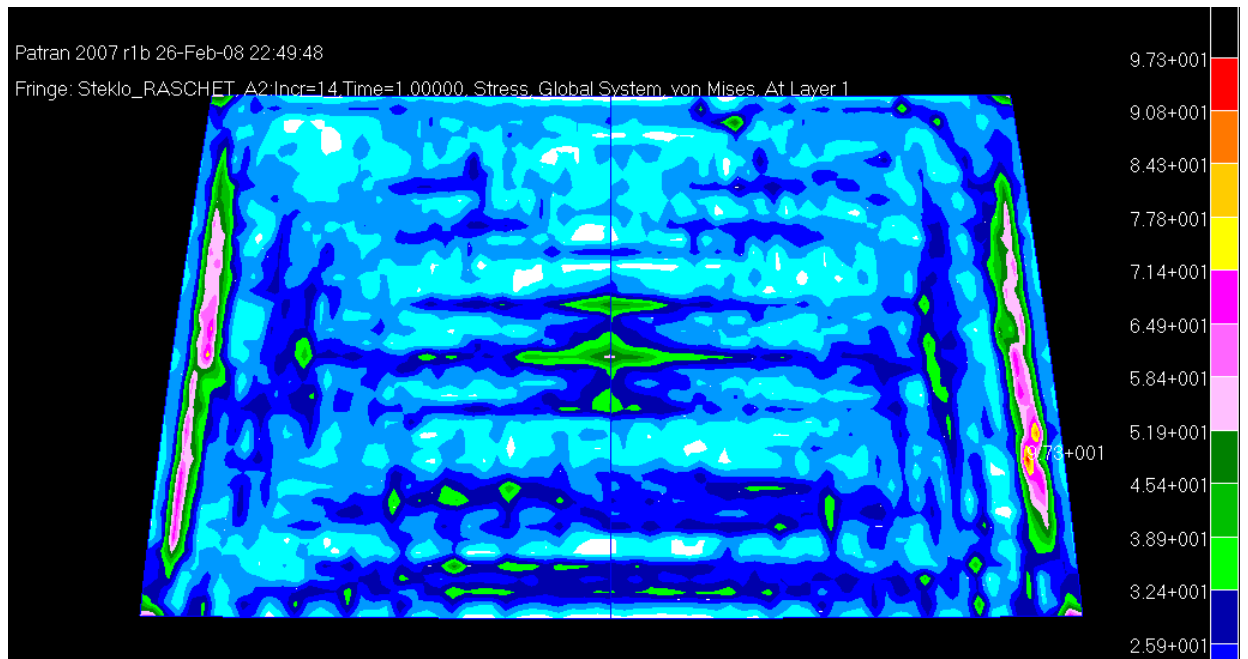


Рисунок 9 – Зоны повышенного напряжения

«В стекле, имеющем отклонение по геометрии, появилось внутреннее напряжение, величиной $\sigma = 9,08$ МПа на кромке стекла на расстоянии 35-50 мм и в середине, где произошел контакт. Величина появившихся напряжений далека от предельного значения предела прочности при сжатии и укладывается в норму по величине остаточных напряжений при сжатии – 10 МПа. В данном расчетном случае величина напряжений не является критической. Таким образом, заложенное отклонение по стреле прогиба + 0,5 мм одного из стекол, является допустимым при изготовлении стекла типа триплекс» [15]. Сделанные расчеты позволяют сделать вывод о том, что основной причиной саморазрушения стекла, является нарушении технологии изготовления. Также можно заключить, что требуется выработать систему допуска геометрии стекла при изготовлении и величина отклонения по стреле прогиба должна быть в пределах $n_0^{+0.5}$.

3 Математическая модель и расчет кузова укомплектованного стеклами на жесткость

3.1 Математическое моделирование кузова и испытательного стенда

Создание математической модели кузова осуществляется средствами программного расчетного пакета AltairHyperMesh for Windows. Расчет произведен средствами решателя Nastran.

Эта система, основана на методе конечных элементов и предназначена для постановки и решения задач статики и динамики в нелинейной постановке для широкого класса машиностроительных и других конструкций.

Геометрические модели для AltairHyperMesh for Windows, являющиеся основой конечно-элементных моделей, импортированы из другой CAD-системы, с которой AltairHyperMesh for Windows имеет интерфейс (формат CATPart).

Для проведения расчетов с помощью программного обеспечения, в расчетный пакет импортируется математическая модель (ММ) - кузов в сборе (сварка), укомплектованный стеклами, без навесных узлов (рисунок 10).

В модель вносятся механические характеристики физических свойств деталей кузова. Для всех составных частей будущей модели определяются характеристики применяемого материала:

а) модуль упругости, коэффициент Пуассона, плотность, кривые нагружения, кривые упрочнения и если необходимо, то зависимость этих характеристик от скорости деформирования или температуры.

б) устанавливаются допустимые уровни напряжений или деформаций в конструкции, иногда оговариваются предельно допустимые силы или моменты.

в) определяется толщина тонкостенных деталей.

Анализируется способ соединения частей рассчитываемого узла: болтовое, сварное, клеевое. Оговаривается способ моделирования соединений, как правило, это зависит от вида и назначения расчета, а так же от применяемой программной среды анализа.

Различные виды соединений (болтовые, сварные, клеевые) моделируются с помощью специальных элементов-соединителей.

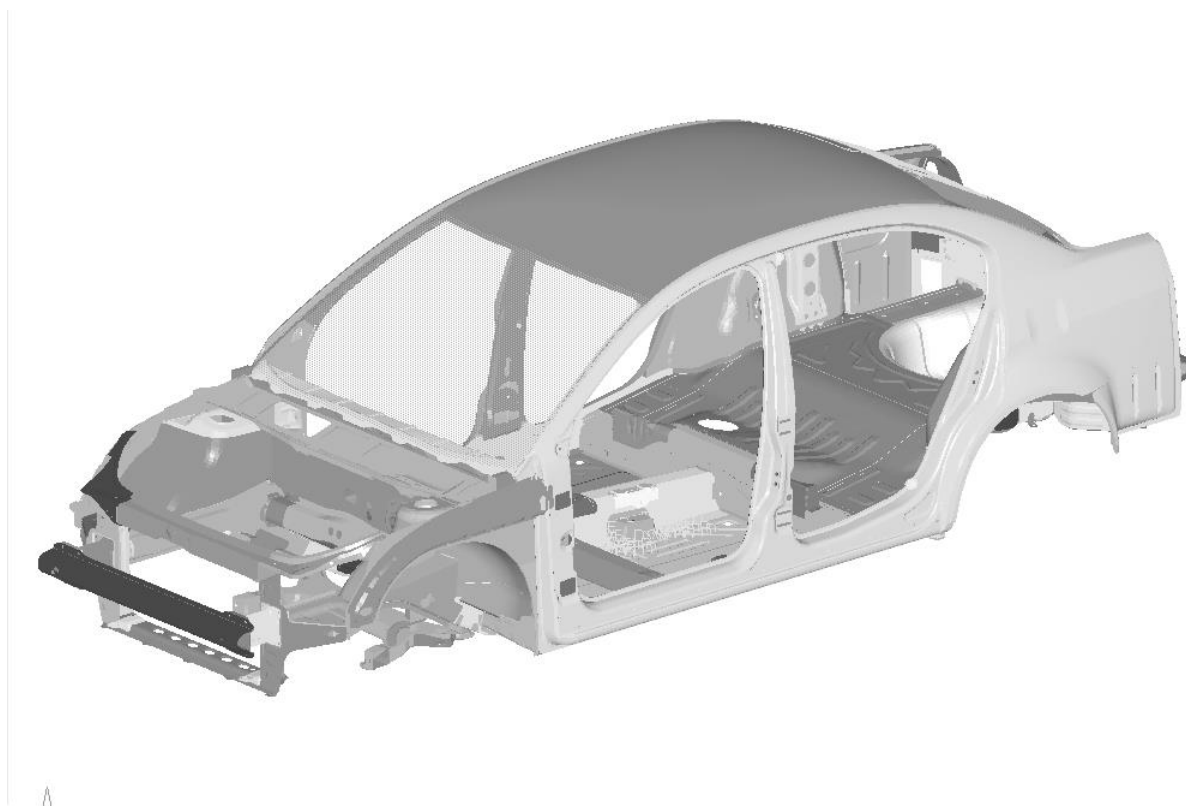


Рисунок 10 – Математическая модель кузова

Сначала модель разбивается на конечные элементы, а затем моделируются соединители.

После разбивки на конечные элементы математическая модель состоит из 770204 элементов (рисунок 11).

В результате расчета создается файл-отчет, который содержит суммарную информацию о модели.

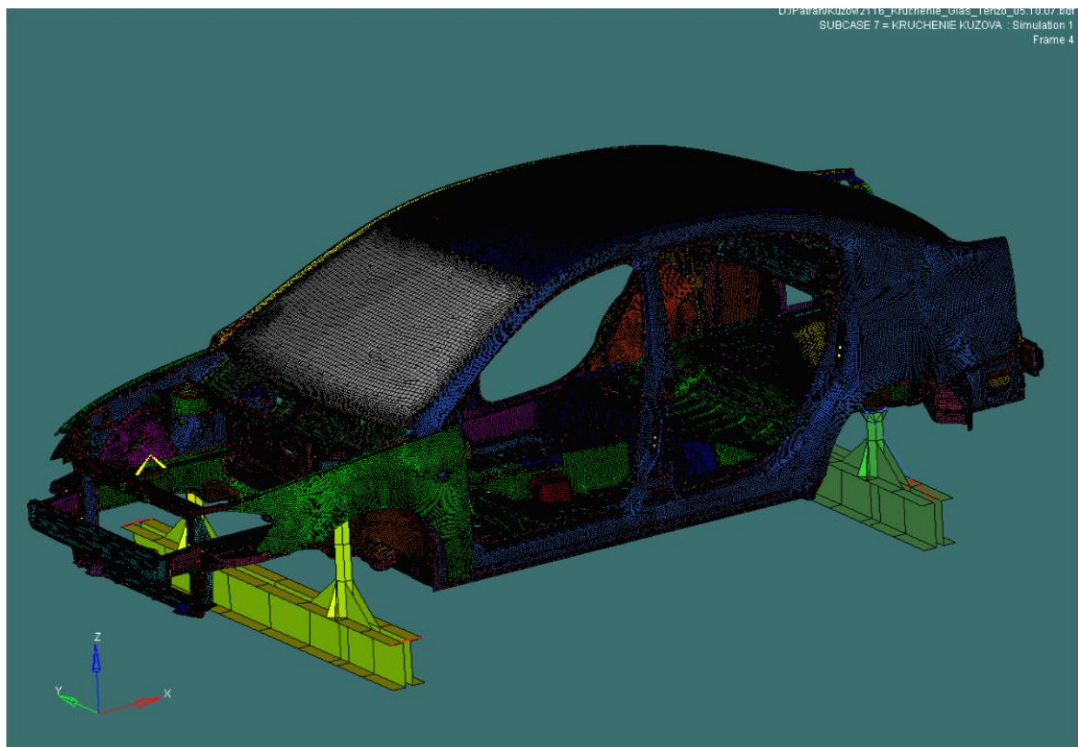


Рисунок 11 – КЭ модель кузова

Для моделирования на ЭВМ испытаний кузова на жесткость (или другой задачи) требуется полное соответствие модели, выполненной по методу конечных элементов и настоящего кузова. Также, чтобы смоделировать сами испытания требуется модель испытательного стенда, а именно станка, на котором будет закреплена для испытания модель кузова. Моделирование станка производится также по методу конечных элементов с учетом физико-механических свойств материала. При расчете на статическое закручивание КЭМ закреплялась на станке (рисунок 12) по требованиям методики И 3123.37.101.008-2001.

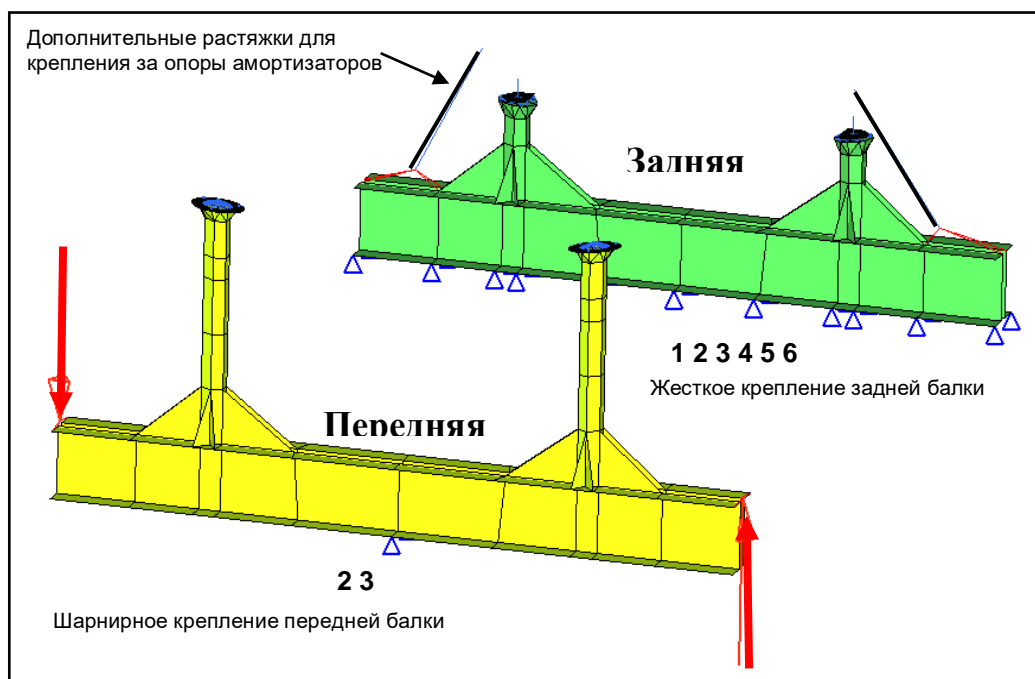


Рисунок 12 – Общий вид ММ станда для испытания кузова на кручение

3.2 Исследование зависимости жесткости кузова от различных параметров

Расчет кузова (solution101-линейная статика) проводился с помощью решателя «NASTRAN» фирмы «MSC.Software»

В результате расчета кузова с помощью метода конечных элементов, получены результаты напряжений и деформаций.

С помощью постпроцессора, встроенного в пакет

HyperMesh, можно в цветовой градации, соответствующей цифровым значениям, просмотреть результат и померить необходимые значения (рисунок 13).

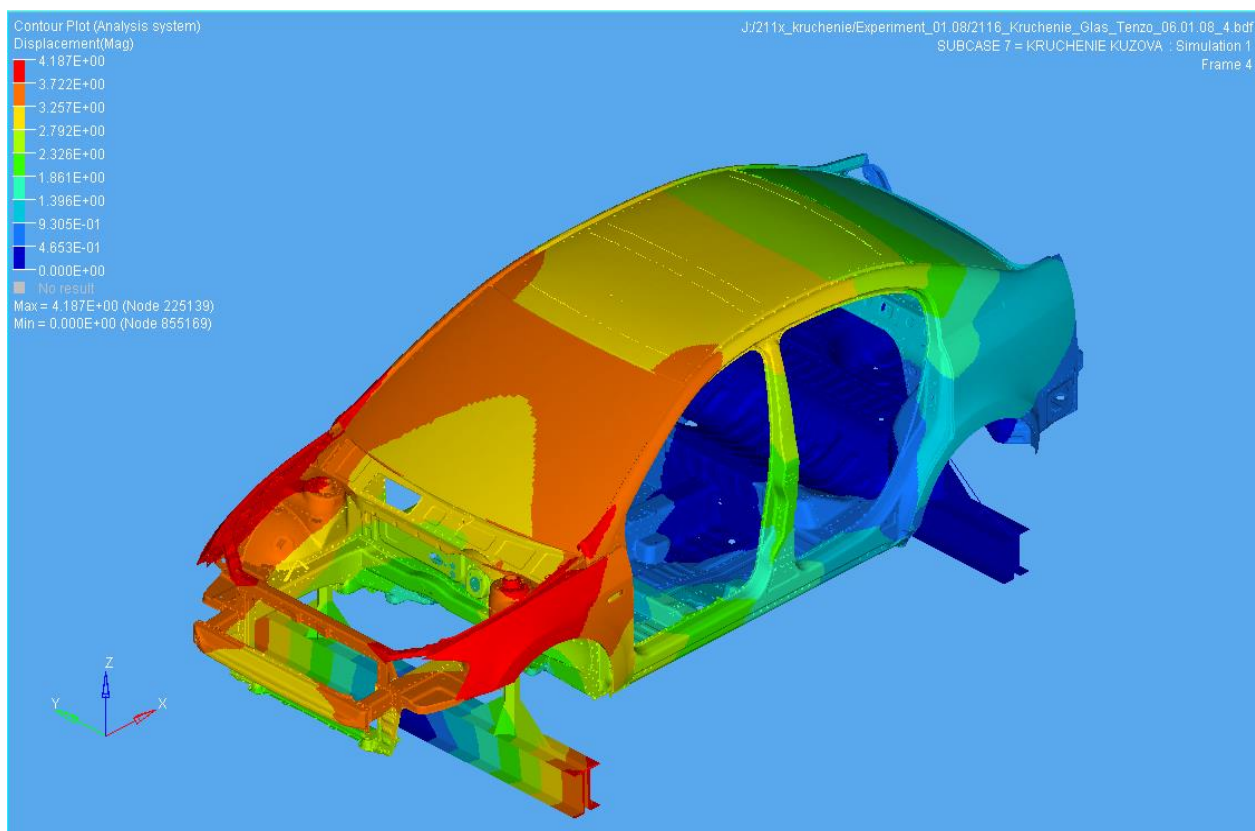


Рисунок 13 – Результат расчета кузова на кручение

После расчета кузова проведена валидация данных полученных опытным путем и путем расчета в решателе.

В результате проведенных исследований сделан вывод об увеличении жесткости после вклейки стекол на 30 процентов.

Проведены также параллельно с испытаниями кузова тензометрирование стекла, как одной из исследуемых областей. В результате тензометрирования, получены результаты напряжения стекла при закручивании кузова на стенде при различных нагрузениях. Проведен пересчет данных с необходимым коэффициентом и получены новые данные.

Проведена валидация полученных результатов по всем контрольным точкам замера кузова. Выявлена разница в значениях по проему передней двери.

Также проведена валидация полученных данных по месту расположения тензодатчиков на стекле. Выявлена разница в значениях, что

говорит о неполной соответствии математической модели кузова и стекла настоящему объекту.

Для дальнейшего расчета необходимо выявить несоответствие расчетной модели кузову. Для этого необходимо провести корреляцию расчетных данных.

В исследовательских целях, проведен анализ поведения конструкции кузова при изменении некоторых параметров, в частности физико-механических свойств материала различных деталей. Измерений проводились по проему передней двери (рисунок 14).

Оценка жесткости кузова проводилась по требованиям методике И 3123.37.101.008-2001.

Проём передней двери.

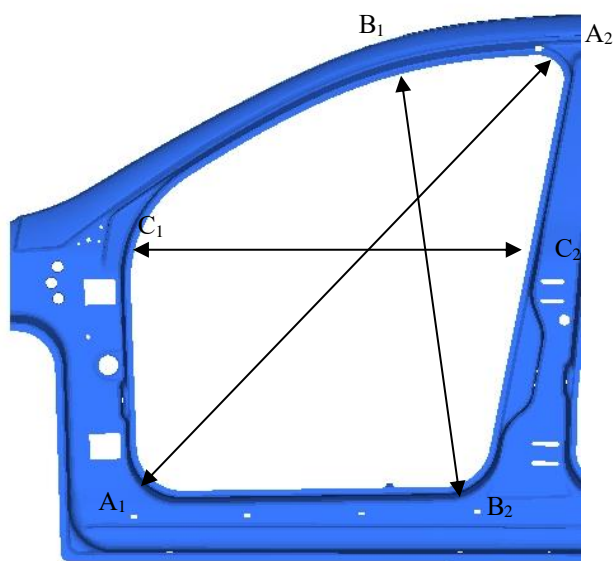


Рисунок 14 – Передняя дверь

Первоначальные значения по перемещениям в районе проема передней двери приведены в презентации к работе.

Заключение

В результате проведенных исследований:

- Получена зависимость между физико-механическими параметрами материалов и точностью расчета всего кузова автомобиля в целом.
- Получена зависимость между НДС стекла и вариантами его закрепления на кузове.
- Выявлена причина возникновения избыточных остаточных напряжений в стекле.
- Разработана методика расчета кузова на статическую жесткость при кручении и модального анализа кузова в свободном состоянии,
- Проведена валидация данных, полученных опытным и экспериментальным путем.
- Проведена корреляция данных, полученных экспериментальным путем.
- Проведены также параллельно с испытаниями кузова тензометрирование стекла, как одной из исследуемых областей. В результате тензометрирования, получены результаты напряжения стекла при закручивании кузова на стенде при различных нагружениях. Проведен пересчет данных с необходимым коэффициентом и получены новые данные.
- Проведена валидация полученных результатов по всем контрольным точкам замера кузова.
- Проведена валидация полученных данных по месту расположения тензодатчиков на стекле. Выявлена разница в значениях, что говорит о неполной соответствии математической модели кузова и стекла настоящему объекту.

Список используемых источников

1. Ахметзянов М.Х. Применение метода фотоупругих покрытий для определения напряжений и деформаций в гибких плитах и оболочках / М.Х. Ахметзянов – Изд. АН СССР. ОН. Механика и машиностроение, 1964. – № 1.
2. Биргер И.А. Некоторые математические методы решения инженерных задач / И.А. Биргер – М. : Физматгиз, 1961. – 284 с.
3. Бобровский А.В. Аналитическое исследование распределения остаточных напряжений в заготовке после механической обработки. Сборник научных трудов. Наука. Техника. Образование. Тольятти и регионы / А.В. Бобровский, В.А. Гуляев – Тольятти : 1999. – с. 178-182.
4. Браславский Д.А. Точность измерительных устройств / Д.А. Браславский, В.В. Петров – М. : Машиностроение, 1976. – 162 с.
5. Вознесенский В.А. Статистические методы планирования эксперимента в технико-экономических исследованиях / В.А. Вознесенский – М. : Статистика, 1974. – 192 с.
6. Зверева А.М., Гуляев В.А. Физическое моделирование конструкционных задач механики // Студенческий форум: электрон. научн. журн. 2020. № 23(116). URL: <https://nauchforum.ru/journal/stud/116/74578> (дата обращения: 29.06.2020)
7. Зорин И.С. О хрупком разрушении упругой плоскости, ослабленной тонким вырезом. Вестник ЛГУ / И.С. Зорин – Л. : 1982. – № 7.
8. Ивлев Д.Д. Теория упрочняющегося пластического тела / Д.Д. Ивлев, Г.И. Быковцев – М. : Наука, 1971. – 232 с.
9. Игнатьков Д.А. Остаточные напряжения в неоднородных деталях / Д.А. Игнатьков – Кишинев : Штиница, 1992. – 232 с.
10. Ильюшин, А.А. Механика сплошной среды / А.А. Ильюшин – М. : Изд. МГУ, 1978. – 256 с.

11. Кобрин М.М. Определение внутренних напряжений в цилиндрических деталях / М.М. Кобрин, Л.И. Дехтярь – М. : Машиностроение, 1965. – 175 с.
12. Койтер В.Т. Общие теоремы теории упруго-пластических сред / В.Т. Койтер – М. : Изд. Иностранной литературы, 1961. – 80 с.
13. Москвитин В.В. Пластичность при переменных нагрузениях / В.В. Москвитин – М. : Изд. МГУ, 1965. – 264 с.
14. Остаточные напряжения / Ред. Осгуд В.Р. – М. : ИЛ, 1957. – 169 с.
15. Пригоровский Н.И. Экспериментальные методы исследования объемного напряженного состояния / Н.И. Пригоровский – М. : Наука, 1966. – 238 с.
16. Прошко В.М. Исследование напряжений на объемных моделях / В.М. Прошко – М. : Изд. АН СССР, 1956. – 342 с.
17. Сердобинцев Ю. П., Иванников, А. В. Решение задач конструктора в рамках интеллектуальной информационной системы конструкторско-технологического проектирования пар трения с заданными триботехническими характеристиками: Тезисы докладов Юбилейной научно-технической конференции профессорско-преподавательского состава, посвященной 70-летию высшего строительного образования в Волгоградской области. / ВолгГАСА. – Волгоград, 2000. –76 с.
18. Сердобинцев Ю. П., Сосков, А. А., Игумнов, А. В. Метод повышения износостойкости штампового инструмента при производстве керамических изделий: Автоматизация технологических процессов в машиностроении // Межвуз. сб. науч. тр. / ВолгГТУ. – Волгоград, 1998. – 42 с.
19. Спиридонов А.А. Планирование эксперимента при исследовании технологических процессов / А.А. Спиридонов – М. : Машиностроение, 1981. – 184 с.

20. Сухарев И.П. Исследования деформаций и напряжений методом муаровых полос / И.П. Сухарев, Б.Н. Ушаков – М. : Машиностроение, 1969. – 208 с.
21. Технологические напряжения. Труды II Всесоюзного симпозиума / – М. : 1985. – 390 с.
22. Физика прочности композиционных материалов. Материалы III Всесоюзного семинара / – Л. : 1979. – 264 с.
23. Финк К. Измерение напряжений и деформаций / К. Финк, Х. Рорбах – М. : Машгиз, 1961. – 368 с.
24. Челноков В.А. О спектральном методе в прогнозировании прочности композиционных материалов / В.А. Челноков, М.Н. Голобородько – Л. : 1979. – 156 с.
25. Шевченко Ю.Н. Термопластичность при переменных нагрузениях / Ю.Н. Шевченко – К. : Наукова Думка, 1970. – 288 с.
26. Chen, H., Yang, Y., Wang, Y., & Wang, L. (2014). Study on the effect of beam parameters on automobile bumper collision performance. *Energy Education Science and Technology Part A: Energy Science and Research*, 32(5), 4373-4380
27. Gulyaev, V. & Kozlov, A. & Loginov, N. Problems of mathematical modelling of elastic boundary value in the stress-strain state of car body elements. In: *IOP Conference Series, Materials Science and Engineering*. 2019. Vol. 560. DOI: 10.1088/1757-899X/560/1/012143
28. Gulyaev, V. & Kozlov, A. & Loginov, N. Technological equipment parts rough surfaces elastic-plastic strain under compression mathematical modelling. In: *Overview of the International Conference on Applied Physics, Information Technologies and Engineering. Journal of Physics, Conference Series*. 2019. Vol. 1399. DOI: 10.1088/1742-6596/1399/4/044054
29. Dixit Y., Begeman P., Dhaliwal G. S., Newaz G., Board D., Chen Y., & Faruque O. (2017). Crashworthiness performance of carbon fiber composite (CFC) vehicle front bumper crush can (FBCC) assemblies subjected to high speed

40% offset frontal impact. Paper presented at the ASME International Mechanical Engineering Congress and Exposition, Proceedings (IMECE), 910.1115/IMECE2017-70357

30. Ispas N., & Nastasoiu M. (2017). Analysis of car's frontal collision against pole. Paper presented at the IOP Conference Series: Materials Science and Engineering, 252(1)10.1088/1757-899X/252/1/012012

31. Kostek R., & Aleksandrowicz P. (2017). Simulation of car collision with an impact block. Paper presented at the IOP Conference Series: Materials Science and Engineering, 252(1)10.1088/1757-899X/252/1/012008

32. Kostek R., & Aleksandrowicz P. (2017). Simulation of the right-angle car collision based on identified parameters. Paper presented at the IOP Conference Series: Materials Science and Engineering, 252(1)10.1088/1757-899X/252/1/012013

33. Kulkarni A., Vora R., & Ravi K. (2017). Study design and analysis of automobile bumper for pedestrian safety. Paper presented at the IOP Conference Series: Materials Science and Engineering, 263(6)10.1088/1757-899X/263/6/062060

34. Li Z., Duan L., Chen T., & Hu Z. (2018). Crashworthiness analysis and multi-objective design optimization of a novel lotus root filled tube (LFT). *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 57(2), 865-875. 10.1007/s00158-017-1782-5

35. Patil S., Tay Y. Y., Baratzadeh F., & Lankarani H. (2017). Modeling of friction-stir butt-welds and its application in automotive bumper impact performance part 2. impact modeling and bumper crash performance. *Journal of Mechanical Science and Technology*, 31(7), 3225-3232. 10.1007/s12206-017-0612-4

36. Teng T. -, Chang P. -, Liang C. -, & Fung D. -. (2017). Application of crash pulse on the car crashworthiness design. *Advances in Mechanical Engineering*, 9(9), 1-8. 10.1177/1687814017700096