МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Тольяттинский государственный университет»

Институт математики, физики и информационных технологий
(наименование института полностью)

Кафедра «Прикладная математика и информатика»
(наименование)

01.03.02 Прикладная математика и информатика
(код и наименование направления подготовки/специальности)

Компьютерные технологии и математическое моделирование
(направленность (профиль)/специализация)

ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА (БАКАЛАВРСКАЯ РАБОТА)

на тему Исследование свойств процедур построения портфеля инвестиций

Обучающийся А.О. Апаев
(Инициалы Фамилия) (личная подпись)

Руководитель к. ф.-м. н. О.В. Лелонд
(ученая степень (при наличии), ученое звание (при наличии), Инициалы Фамилия)

Консультант Е.В. Косс
(ученая степень (при наличии), ученое звание (при наличии), Инициалы Фамилия)

Тольятти 2022

Аннотация

Актуальность темы данной работы заключается в том, что процедура построения портфеля инвестиций является целым комплексом мероприятий, направленным на создание оптимального портфеля активов, позволяющего получить максимум дивидендов при наименьшей затрате ресурсов.

В связи с этим, с каждым годом, свойства процедуры построения портфеля инвестиций претерпевают изменений, совершенствуются в соответствии с требованиями современности.

Решение практических задач, связанных с исследованием свойств процедуры построения портфеля инвестиций, сопровождается различным количеством расчетов, с применением дифференциального или интегрального исчисления, причем как функций одной, так и нескольких переменных. Таким образом, владение математическим аппаратом становится неотъемлемой частью решения подобных задач. При решении более сложных задач, используются вычислительные мощности ЭВМ, для оптимизации времени решения задач. В зависимости от начальных условий могут возникать задачи, демонстрирующие различные ситуации, возникающие при построении портфеля инвестиций. Наличие правильной стратегии построения портфеля инвестиций гарантирует получение наибольшей прибыли, при наименьшем использовании ресурсов, что является по сути оптимизационной задачей. В последние годы, наиболее надежным механизмом при построении портфеля инвестиций является использование критерия VaR.

Структура работы определяется её актуальностью, целями, задачами, объектом, предметом и методом.

Представленная работа состоит из двух логически связанных между собой глав, введения и заключения. Главы разделены на параграфы, позволяющие акцентировать внимание на отдельных проблемах в рамках определенного вопроса.

Общий объем работы 62 страницы.

Abstract

The topic of the graduation work is «Study of the properties of procedures for building an investment portfolio».

The relevance of the topic of this work lies in the fact that the procedure for building an investment portfolio is a whole set of measures aimed at creating an optimal portfolio of assets that allows you to get maximum dividends in the least resource-intensive manner.

The issues of solution of practical problems related to the study of the properties of the procedure for building a portfolio of investments is accompanied by a different number of calculations using differential or integral calculus, both functions of one and several variables are highlighted in the project's general part.

We also examine how initial conditions can set the tasks, which demonstrate various situations that arise when building an investment portfolio. Having the right strategy for building a portfolio of investments guarantees the greatest profit, in the least resource-intensive manner, which is essentially an optimization task. The work is of interest to a limited number of persons.

We also report the results of experiments conducted and devoted to exploring the ways to use the VaR criterion.

The presented work consists of two logically related chapters, an introduction and a conclusion. The chapters are divided into paragraphs, allowing you to focus on individual problems within a specific issue.

The total volume of work is 62 pages.

Оглавление

Введение

Оптимизация портфеля инвестиций является одной из распространенных и важных финансовых задач, которая возникает в экономической сфере. Для инвестора решение данной задачи позволяет найти наиболее выгодный способ вложения собственного капитала в акции определенных компаний. Целью оптимизации портфеля ценных бумаг является формирование портфеля, который соответствует требованиям инвестора или предприятия, как по доходности, так и по возможному риску. Для достижения данной цели необходимо распределить ценные бумаги в портфеле.

Обычно предполагают, что распределение акций на рынке является нормальным. В то время как экспериментальные результаты отличаются от данного распределения. Поэтому осуществляется переход к эллиптической модели. Оценки риска и доходности по матрице корреляций Пирсона оказываются неустойчивыми при отклонении распределений от нормального. С другой стороны, показано, что оценки с помощью знаковой меры близости устойчивы в классе эллиптических распределений. Однако полученные результаты носят общий характер и не учитывают специфику задачи построения портфеля инвестиций.

Другая актуальная проблема, которая возникает в данной теме, связана с желанием инвестора сократить число активов в своём оптимальном портфеле. Решением данной проблемы является некоторый предварительный отбор акций на рассматриваемом рынке. В целом, актуальность работы заключается в исследовании сокращения числа акций в портфеле при условии, что для оценки ковариаций применяется вероятность совпадения знаков и полученные решения сравниваются с известными результатами.

Объект исследования – способы построения оптимального портфеля.

Предмет исследования – свойства процедур создания инвестиционного портфеля.

Цель бакалаврской работы заключается в анализе и сравнении свойств процедур формирования портфелей инвестиций.

Задачи бакалаврской работы:

– рассмотреть понятие портфеля инвестиций;

– выделить основные свойства портфеля инвестиций;

– выделить необходимые процедуры построения портфеля инвестиций;

– рассмотреть свойства процедур построения портфеля инвестиций.

Глава 1 Теоретические аспекты построения портфеля инвестиций

1.1 Понятие инвестирования

При определении сущности инвестирования, прежде всего, следует дать определение некоторым основополагающим понятиям инвестиционная среда и инвестиционный процесс. «В литературе дается следующее определение этих понятий: инвестиционная среда характеризуется типами бумаг, обращающихся на рынке, условиями их приобретения и продажи. Понятие инвестиционного процесса связано с тем, каким образом инвестор принимает решения при выборе бумаг, объемов и сроков инвестирования» [30].

«Под инвестированием понимается некий процесс, направленный на сохранение или увеличение первоначального инвестиционного капитала. Как правило, процесс инвестирования сопровождается изменением формы инвестиционного капитала. Объектом инвестирования (инвестиционным активом) может выступать любой объект, имеющий ценность (стоимость). Иными словами, процесс инвестирования направлен на приобретение активов, владея которыми инвестор достигает увеличения материальных ценностей посредством получения прибыли и увеличения стоимости основного капитала или получения прочих выгод» [30].

«При инвестировании основными факторами выступают стоимость и время. Каждый инвестиционный актив с течением времени изменяется в стоимости, т.е. практически любой инвестиционный актив имеет различную стоимость в различные моменты времени. Причем не всегда удается определить строгую зависимость стоимости объекта от времени. Неопределенность, связанная с отсутствием знаний о будущей стоимости инвестиционного актива, обосновывает необходимость учета фактора риска при инвестировании. Риск, так же, как и стоимость, неразрывно связан со временем и также не поддается однозначному определению» [31].

«Приведенные выше факторы являются основными, но не единственными. При размещении средств в инвестиционный актив не стоит пренебрегать его ликвидностью. Ликвидность отражает возможность извлечения вложенных средств из актива без ощутимой потери в стоимости и в короткий период времени. Эти и другие факторы будут рассматриваться более подробно в следующих разделах. Следует также отметить, что под инвестированием в широком смысле подразумевается размещение средств в реальные (производственные) активы такие как оборудование, здания иные производственные мощности, поскольку именно эти активы создают добавочную стоимость и, следовательно, являются инструментом для увеличение первоначального инвестиционного капитала. Кроме этого в последнее время неуклонно возрастает роль нематериальных (неосязаемых) активов, в связи с чем, широкое развитие получили инвестиции в нематериальные активы, такие как человеческий капитал, гудвил, научные исследования и конструкторские разработки и др. С развитием экономики, появлением новых форм собственности увеличился спектр инструментов, приносящих инвестору доход. Хотя акции, облигации и другие ценные бумаги не создают добавочной стоимости, они позволяют инвестору увеличивать стоимость первоначального капитала. В данной работе под инвестиционными инструментами будут пониматься именно финансовые инструменты, хотя при определенных допущениях методы, описанные в данной работе, могут применяться и для моделирования процесса инвестирования в широком смысле» [31].

«Возвращаясь к понятию инвестиционного процесса, следует обратить внимание на этапы процесса инвестирования. Детализация этого процесса имеет вид» [30]:

– «выбор инвестиционной политики. На этом этапе необходимо определить цели инвестора и объем инвестируемых средств» [30];

– «анализ рынка ценных бумаг. Данный этап включает изучение отдельных видов (групп) ценных бумаг» [31];

– «формирование портфеля ценных бумаг. На этом этапе происходит определение конкретных активов для вложения средств, а также пропорций распределения инвестируемого капитала между активами. Этот этап является основным, и именно ему будет уделяться большое внимание» [31];

– «пересмотр портфеля. Этот этап заключается в периодическом повторении трех первых этапов и связан с корректировкой текущего портфеля вследствие изменения рыночной конъюнктуры» [31];

– «оценка эффективности портфеля. Заключительный этап состоит в проведении периодической оценки эффективности инвестирования» [31].

Все эти этапы нашли отражение в данной работе и будут рассмотрены более подробно далее.

«Исторически появление ценных бумаг было связано прежде всего с необходимостью документального оформления различных долговых обязательств, но весь спектр возможностей открылся с лишь в двадцатом веке, когда свободное предпринимательство в развитых капиталистических странах стало охватывать широкие слои населения, превращая ценные бумаги в основной инвестиционный инструмент. Именно ценные бумаги представляют собой главный механизм перераспределения финансового капитала в пользу более эффективного бизнеса. В основе этого процесса лежит конкуренция» [31].

«Финансовые активы определены как некие контракты или соглашения между сторонами. Обязательства сторон, участвующих в контракте, фиксируются на специальных бланках, которые получили название ценные бумаги, хотя в настоящее время бумажная форма ценных бумаг не является обязательной» [31].

«Одной из сторон обязательства может выступать эмитент ценных бумаг. Эмитент ценных бумаг – это юридическое лицо, государственный орган, орган местной администрации, предприятие, учреждение, организация, выпускающее в обращение ценные бумаги и несущие от своего имени обязательства по ним перед владельцами ценных бумаг. Путем выпуска новых ценных бумаг формируется первичный рынок. Эмиссия ценных бумаг осуществляется» [31]:

– при учреждении акционерного общества;

– при увеличении размеров первоначального уставного капитала акционерного общества путем выпуска акций;

– при привлечении заемного капитала юридическими лицами, государством, государственными органами или органами местной администрации путем выпуска облигаций или иных долговых обязательств.

«В общем виде ценные бумаги представляют собой титулы собственности, т.е. такие юридические документы, которые свидетельствуют о праве их владельца на доход или на имущество. Права владельца ценных бумаг при совершении операций с ними, а также порядок подтверждения этих прав различен. Все множество видов ценных бумаг можно разделить на два типа: долевые и долговые. Долевые ценные бумаги- это те бумаги, которые выражают отношение совладения и дают право на получения части прибыли эмитента ценных бумаг. Примером долевой ценной бумаги служат акции (привилегированные и обыкновенные)» [31].

«В зависимости от инвестиционных целей практика акционерного дела выработала множество разновидностей акций. Акции не выпускаются государственными органами, они эмитируются только промышленными, торговыми и финансовыми корпорациями. По форме присваивания дохода акции подразделяются на простые (обыкновенные) и привилегированные акции. Основные отличия между этими типами акций заключаются в характере получения дохода и участия в управлении акционерным обществом» [30].

«Обыкновенная (простая) акция дает право голоса на собрании акционеров и размер получаемого по ней дохода (дивиденда) зависит от результатов работы общества за определенный период времени» [31].

«Привилегированная акция не дает владельцу права голоса на общем собрании акционеров. Привилегии по ней состоят в возможности получения, с одной стороны, гарантированного дохода вне зависимости от результатов хозяйственной деятельности общества, а с другой – в праве первоочередной выплаты стоимости акции при ликвидации общества» [31].

«Существует тесная взаимосвязь между динамикой дивиденда и курсом акции. Рейтинг акционерной корпорации у инвесторов будет тем выше, чем устойчивее динамика дивиденда к росту, пусть очень даже незначительному, но постоянному. Именно постоянство роста дивиденда и определяет устойчивость курса. Как только замирает рост дивидендов, или он идет вниз – стремительно падает и курс акций. Причем "скорость" изменения курса акций на рынке, как правило, превышает "скорость" изменения суммы выплачиваемого дивиденда как в ту, так и в другую сторону. Отсюда доход акционера складывается из двух составляющих и поэтому говорят о совокупной доходности определенной акции» [30].

«Номинальная цена акции практически не имеет никакого значения для дальнейшего движения акции на рынке ценных бумаг и носит чисто информационный характер, указывая на величину долевого капитала (иногда на акциях вместо номинальной цены указывается то количество частей, на которое разбит акционерный капитал корпорации); эмиссионную цену, по которой она продается на первичном рынке (эмитируется). Эмиссионная цена чаще всего отличается от номинальной, поскольку размещение акции эмитент производит, как правило, через посредническую дилерскую фирму» [30].

Дилер скупает у эмитента по согласованной цене выпущенную в продажу партию акций, которую реализует потом среди инвесторов; • рыночную (курсовую) цену, по которой она котируется (оценивается) на вторичном рынке ценных бумаг. Это основная форма цены акции для фондового рынка. Именно курсовая цена определяет реальную ценность данной акции. Вторичный рынок, являясь механизмом постоянной перепродажи ценных бумаг, определяет степень доверия инвесторов к данной акции; «Вторым наиболее распространенным видом ценных бумаг являются долговые ценные бумаги- бумаги, которые удостоверяют отношения займа между эмитентом (должником) и владельцем (кредитором) ценных бумаг. К этому виду ценных бумаг можно отнести векселя, облигации, депозитные сертификаты и т.д» [31].

«В настоящий момент наиболее ликвидным рыночным инструментом являются облигации, поэтому следует более подробно остановиться на описании базовых характеристик этого инструмента. Как говорилось ранее, облигация удостоверяет право владельца на получение в установленный срок ее номинальной стоимости или иного имущественного эквивалента. Зачастую облигация предоставляет держателю право на получение фиксированного процента (купона) от ее номинальной стоимости. Таким образом, облигации можно подразделить на бескупонные (дисконтные) и купонные. В первом случае держатель облигации получает доход в виде разницы между ценой продажи (или погашения) и ценой покупки. В случае купонной облигации эмитент совершает купонные платежи в течении всего срока обращения облигации на заранее оговоренных условиях» [31].

«Облигация представляет собой инструмент, позволяющий эмитенту привлечь финансовые ресурсы на рынке. В отличие от держателей акций владелец облигации не имеет права голоса, хотя некоторые виды облигаций (конвертируемые) позволяют владельцу обменивать их на обыкновенные акции. Конвертируемые облигации сочетают в себе характеристики облигаций и акций (например, их максимальная цена не ограничена)» [31].

«В целом облигации можно классифицировать по нескольким параметрам» [31]:

а) тип эмитента:

1) федеральное правительство,

2) субъекты федерации,

3) муниципальные власти,

4) корпорации;

б) срок погашения:

1) краткосрочные,

2) среднесрочные,

3) долгосрочные);

в) наличие фиксированного срока погашения облигации, при наступлении которого владелец получит фиксированную номинальную стоимость, является одним из основных отличий от акций;

г) ставка купонного дохода:

1) бескупонные обязательства,

2) облигации с постоянной ставкой купонного дохода,

3) с убывающей / возрастающей ставкой,

4) с привязанной к индексу ставкой;

д) купонный период:

1) квартал,

2) полгода,

3) год;

е) наличие или отсутствие встроенного опциона:

1) put option,

2) call option;

ж) наличие или отсутствие обеспечения;

и) наличие или отсутствие механизма индексации номинальной стоимости вследствие изменения курса национальной валюты по отношению других видов валют.

«Участники рынка ценных бумаг всегда знают условия выпуска, которые остаются неизменными в течение всего срока обращения бумаг, и основные характеристики облигаций, что позволяет в любой момент рассчитать стоимость облигаций и сравнить ее с рыночной ценой. Это позволяет определить, насколько верно оценена облигация рынком» [30].

«Приведенная выше классификация не включает многие финансовые объекты инвестирования. Помимо долговых и долевых ценных бумаг на рынке обращаются так называемые производные ценные бумаги. К этому виду ценных бумаг можно отнести фьючерсы, опционы и др. Эти бумаги фиксируют права и обязанности участников контракта при так называемых срочных торговых сделках с основными ценными бумагами. В соответствие с этими правами одна из сторон приобретает возможность купить или продать по заранее оговоренной цене и в указанный срок заданное количество одного из видов ценных бумаг (или товаров), а другая сторона обязана обеспечить реализацию этой сделки» [30].

«Опцион – ценная бумага, дающая право купить или продать в течение установленного периода определенное количество акций, других ценных бумаг по фиксированной цене. Продавец опциона принимает на себя обязательства, по которым он в зависимости от вида опциона должен либо приобрести у покупателя соответствующее ценные бумаги, либо продать их ему» [31].

«Фьючерс – ценная бумага, дающая право на покупку или продажу финансовых инструментов при условии их оплаты по оговоренной цене через определенный срок после заключения сделки» [31].

На развитых рынках получили большое распространение варранты.

«Варрант – вид сертификата, предусматривающий возможность приобретения пакета ценных бумаг по номиналу до их выпуска в обращение. Особенностью варранта является разрыв сроков приобретения сертификата и приобретения ценных бумаг. Цена варранта – это величина, исходящая из прогноза курсовой стоимости данных ценных бумаг. Цена (премия) выплачивается сразу при покупке варранта, сами же ценные бумаги оплачиваются при их получении. От покупки ценных бумаг можно отказаться, но при этом премия плательщику не возвращается» [31].

«Кроме того, к объектам инвестирования можно отнести драгоценные металлы, иностранные валюты, как СКВ, так и ОКВ. Набор инструментов в инвестиционном портфеле может быть совершенно, различным, но все активы обязательно должны обладать свойством увеличения стоимости» [31].

«Как видно из вышеизложенного инвестиционный портфель может включать в себя множества различных инструментов. Инструменты могут относиться к различным видам активов, предоставлять различные права инвестору, но все они должны обладать сопоставимыми характеристиками, позволяющими инвестору сделать свой выбор» [31].

1.2 Методы оценки эффективности и риска портфеля ценных бумаг

Портфелем ценных бумаг является некоторое множество акций, облигаций, которые имеют разные степени обеспечения и риска, а также бумаг, имеющих постоянный доход, который обеспечивается государством, следовательно, обеспечивающий минимальное количество потерь [4].

В идеальной теории, портфель ценных бумаг может быть наполнен лишь бумагами одного вида, а также может изменять свою конфигурацию в результате замещения одного вида бумаг другими [6].

Предназначение портфеля ценных бумаг выражается в оптимизации условий инвестирования, путем обеспечения качественно новых инвестиционных свойств, которые будут работать, только в симбиозе с другими видами ценных бумаг [5].

Отсюда следует, что при создании портфеля ценных бумаг получается новая инвестиционная почва, имеющая более выгодные характеристики. Портфель является важным инструментарием инвестора, помогающий ему добиться определенного уровня устойчивости доходов, при этом принимая минимальные риски [10].

Существует несколько важных особенностей портфеля ценных бумаг, отличающих его от других видов портфелей:

- более высокий уровень ликвидности,
- достаточно понятный механизм управления,
- более низкий уровень доходности,
- низкий уровень инфляционной защищенности,
- низкий уровень вариативности выбора инструментов.

Доходностью портфеля является значение относительного дохода, который измеряется в годовых процентах [15].

Риском является количественная характеристика неопределенности, которую испытывает инвестор, по отношению к предстоящим доходам или убыткам, тех бумаг, которые входят в исходный портфель [11].

Также одной из важных составляющих портфеля ценных бумаг является период владения, который выражается в количестве времени, которое затрачивает инвестор на содержание портфеля. Для определенного портфеля, период владения является постоянной величиной [9].

Рассматривая все характеристики в совокупности можно сказать, что доходность и риск являются объективным характеристиками, т.е. такими, на которые не влияет инвестор, а период владения является субъективной характеристикой [19].

Существуют некоторые обобщенные закономерности, которые выражают связь между риском и доходностью деятельности инвестора:

– чем выше риск вложения, тем больше его доходность;

– чем выше становится доход, тем меньшей становится возможность его получения [22].

В инвестиционный портфель могут входить как бумаги одного вида, так и бумаги разных видов [10].

Ведущей целью создания портфеля ценных бумаг является получение возможности найти нужный уровень ожидаемой доходности в условиях наименьшего уровня риска. Поставленную цель можно выполнить благодаря диверсификации портфеля, которая выражается в разделении средств инвестора между разными видами активов, а также благодаря выверенному выбору финансовых инструментов [13].

Для достижения оптимального уровня диверсификации, портфель ценных бумаг должен содержать от 8 до 20 видов активов. Достаточно важно не увеличивать количество видов активов, так как это непременно приведет к излишней диверсификации, которая имеет негативные последствия [23].

Вариаций портфелей ценных бумаг достаточно большое количество, так как инвесторы имеют свои определенные стратегии инвестирования. Тип портфеля ценных бумаг определяется соотношением между доходностью и риском [15].

Выделяют следующую классификацию портфелей ценных бумаг.

Портфель агрессивного роста.

Особенностью данного портфеля является стремление к максимальному значению прироста капитала. Для его формирования подходят акции быстрорастущих, молодых предприятий, риск инвестирования соответственно становится выше, тогда и уровень доходности будет намного выше [14].

Портфель консервативного роста.

Особенностью данного портфеля является относительная постоянность его состава, которая направлена на сохранение размера капитала.

Портфель среднего роста [29].

Особенностью данного портфеля является то, что он сочетает в себе признаки сразу двух ранее рассмотренных видов портфелей. Следовательно, в него могут входить как надежные, так и рискованные ценные бумаги. При таком выборе, создается условный баланс между доходностью и риском. Инвесторы в большинстве случаев выбирают именно этот вид портфелей.

В условиях более развитого ринка, чтобы избавиться от нестандартного риска, портфель должен состоять из нескольких десятков видов ценных бумаг [16].

В результате анализа рисков и постоянного мониторинга портфеля инвестор получает возможность с течением времени увеличивать уровень доходности портфеля.

В случае, когда владелец портфеля ценных бумаг, не получает ожидаемый уровень доходности, в результате потери средств, тогда в силу вступает понятие риска портфеля. В свою очередь происходит количественная и качественная оценка уровня ожидаемой доходности, а инвестиционный риск выступает как неопределенность. Следовательно, ожидаемый уровень доходности выступает в роли случайной величины, что в свою очередь говорит о том, что количественная оценка доходности не является постоянной [17].

К определению понятия риска, в случае финансовых инвестиций, можно подходить по-разному. Существует два основных аспекта, это методика оценивания риска и уровень эффективности управления портфелем ценных бумаг.

Также стоит отметить, что в процессе расчета степени риска, совокупные свойства всего портфеля могут разниться со свойствами определенного вида активов. Для оценки риска не обязательно пользоваться средневзвешенной величиной, так как каждый актив может вести себя по-разному в зависимости от действующей конъюнктуры рынка.

Разница между уровнями фактической и ожидаемой доходности иногда может сыграть полезную роль в процессе нивелирования рисков портфеля ценных бумаг. Поэтому величина рискованности портфеля ценных бумаг во многом определяется разнообразием активов, которые входят в данный портфель, а также от реакции различных видов активов на текущее состояние рынка. Чаще всего, чтобы оценить величину рисков для каждого актива используются достаточно распространенные понятия математической статистики, а именно ковариация и корреляция [18].

Для того чтобы провести качественную оценку портфеля, нужно обратить внимание в первую очередь на такие два аспекта как, анализ текущего состояния рынка, а также на анализ содержания портфеля. Первый вид анализа осуществляется на старте создания портфеля. Что касается второго вида анализа, то его основной целью является проверка ликвидности ценных бумаг, которые в конечном итоге и сформируют портфель.

Существует ряд разработанных методов, дающих возможность максимально точно оценить имеющийся портфель ценных бумаг.

Анализ динамики цен активов [18].

Пожалуй, одним из самых весомых факторов привлекательности всех видов активов является уровень их рыночной цены. Инвестора в данном случае интересует текущая ситуация на рынке, которую формируют все приведенные показатели в совокупности. Для того чтобы оценить ситуацию на рынке, рассматриваются значения курсовой стоимости.

Макроэкономические и микроэкономические факторы, ранее влиявшие на доходы компании и курсы активов.

Оценка оптимальности управления портфелями активов.

В данном методе используется теория математической статистики, с помощью которой происходит оценка различных видов данных, касающихся портфеля ценных бумаг.

Для того чтобы провести анализ фондового рынка в теории были получены следующие методы: технический, фундаментальный и количественный [19].

Использование технического анализа для оценки фондового рынка подразумевает использование разновидностей прикладных методов анализа. Основной идеей данного вида анализа является то, что вся важная информация находится в значениях цен активов.

Использование фундаментального анализа подразумевает оценку влияния макроэкономических и микроэкономических факторов на будущий уровень доходности эмитента [20].

Количественный подход является симбиозом традиционной финансовой экономики и фундаментального анализа, который хорошо себя показывает в оценке фондового рынка в условиях неопределенности.

Правильный подход к расчёту рисков является залогом успеха при составлении портфеля ценных бумаг, который будет обеспечивать максимально возможный уровень доходности [24].

Связь доходности и риска достаточно очевидна, так как доходность является своего рода векторной величиной, которая характеризует направление роста или падения цен активов, либо же всего портфеля. Риск представляет собой стандартное отклонение цены (Рисунок 1).

Рисунок 1 – Доходность и риск на примере графика цены акций «НОВАТЭК»

Риск инвестиционного портфеля может быть рассчитан с помощью методов математической статистики, как сумма произведений весовых коэффициентов, а также стандартных отклонений заданных активов, которые формируют портфель. В данную формулу входят следующие величины [25]:

– σ_p – риск портфеля (его стандартное отклонение);

– σ_{ij} – произведение стандартных отклонений активов, входящих в портфель;

– X – весовая доля каждой бумаги.

Таким образом получается эффект усреднения относительно показателя доходности по всем активам портфеля, имеющим свой весовые коэффициенты [22].

$$\sigma_p = \sqrt{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} X_i X_j \sigma_{ij}}\,, \tag{1}$$

1.3 Двухкритериальный подход в задаче выбора портфеля ценных

бумаг

В процессе формирования портфеля ценных бумаг, перед инвестором встает задача оптимального распределения инвестиционных средств между различными видами активов, с целью получения максимального уровня доходности [26].

Чаще всего используется диверсифицированный портфель, внутри которого содержатся различные виды активов, что позволяет минимизировать риск потери доходности [24].

Допустим, инвестор имеет определенную сумму средств, объем которых равен F на интервале $[0,T]$. По условию, представленная сумма предназначена для покупки n видов ценных бумаг в объемах $V_1,...,V_n$. Начальная стоимость равна λ_i, а предполагаемая стоимость β_i. Также стоит учесть, что $\beta_i > \lambda_i, (i = 1...N)$.

Таким образом, поставленную задачу можно формализовать как задачу целочисленного линейного программирования с булевыми переменными:

$$\max \sum_{i=1}^{n} V_i x_i (\beta_i - \lambda_i) \le F, x_i \in \{0,1\}, \tag{2}$$

при ограничении

$$\sum_{i=1}^{n} V_i x_i \lambda_i \le F, x_i \in \{0,1\}, \tag{3}$$

Задача имеет вид:

Пусть λ_i – первоначальная цена актива $i, i = 1..N$;

R_{ij} – ожидаемый доход по активу вида i с вероятностью получения $P, i = 1...M, j = 1...N$;

P – веса возможных доходов, где $\sum_{ij} P_{ij} = 1$;

V – количество ценных бумаг вида i;

$E = \sum_{j=1}^{N} R_{ij} \cdot P_{ij}$ - ожидаемый доход по i-й ценной бумаге [27];

$S = \dfrac{E_i}{\lambda_i}$ – относительный ожидаемый доход по i-й ценной бумаге за 1 шт.;

$\sigma_i = \sqrt{\sum_{j=1}^{N} P_{ij} \cdot \left(R_{ij} - E_i\right)^2}$ - мера риска.

Функция вероятностей является неотрицательной, т.е. $(P_{i1}...P_{iN}) \geq 0$, и имеет N минимумов тогда, когда одна из вероятностей $P_{il} = 1$, а остальные вероятности равны нулю. Для нахождения максимального значения нужно решить задачу вида [26]:

$$\max \sum_{j=1}^{N} P_{ij} \left(R_{ij} - \sum_{j=1}^{N} R_{ij} P_{ij} \right)^2, \tag{4),}$$

$$\sum_{j=1}^{N} P_{ij} = 1, \tag{5}$$

Задача безусловной оптимизации будет иметь вид:

$$\max L\left(P_{i1},...,P_{ij}\right) = L + \lambda\left(\sum_{j=1}^{N} P_{ij} - 1 \right), \tag{6}$$

Максимум этой функции находится исходя из системы уравнений вида:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial P_{ij}} = R_{ij} - \sum_{j=1}^{N} R_{ij} P_{ij} + 2\left(- R_{ij}\right) P_{ij} + \lambda = 0, i = 1..M \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda} = \sum_{j=1}^{N} P_{ij} - 1 = 0 \end{cases}, \tag{7}$$

$W = \dfrac{\sigma_i}{\lambda_i}$ – относительная мера риска по i-ой ценной бумаге,

F – затраты, на создание портфеля.

При данных условиях задача принимает вид:

$$\sum_{i=1}^{N} S_i \to \max , \tag{8}$$

$$\sum_{i=1}^{N} W_i \to \min , \tag{9}$$

$$\sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{M} V_i \lambda_i X_j \leq F , \tag{10}$$

$$\sum_{i=1}^{N} S_i \to \max , \tag{11}$$

$$\lambda_i \geq 0, X_j \in \{0,1\} \ , \qquad (12)$$

Вариант 1 (общий случай) - максимизация дохода [28].

В данном случае задача решается следующим образом.

Все пакеты активов ранжируются по величине $S(i = 1...N)$. Далее, выделенные инвестиции направляются для активов первого вида, затем второго и т.д. до тех пор, пока количество инвестиций уменьшится настолько, что уже нельзя будет приобрести актив вида g в объеме $V^g, g = 1...N$.

При таком развитии событий, нивелируются ограничения, накладываемые на количество купленных активов вида g . Объем вычисляется следующим образом [28]:

$$V = \frac{F^{g-1}}{\lambda_g}, \qquad (13),$$

где F^{g-1} – величина средств после покупки первых $g-1$пакетов акций ($1 \leq g \leq N$).Оценка доходности:

$$E = \sum_{i=1}^{g-1} E_i + V_g^1 \cdot S_g^1 - \sum_{i=1}^{g-1} V_i \lambda_i \ , \qquad (14)$$

Вариант 2 (общий случай) - минимизация риска.

Все виды ценных бумаг ранжируются по величине $(i = 1...N)$. Нумеруя значения σ, получается $\sigma_1 \leq \sigma_2 ... \sigma_k, (k = 1...N)$. Далее, выделенные инвестиции направляются для активов первого вида, затем второго и т.д. до тех пор, пока количество инвестиций уменьшится настолько, что уже нельзя будет приобрести актив вида g в объеме V^g, $g = 1...N$.

При таком развитии событий, нивелируются ограничения, накладываемые на количество купленных активов вида g . Объем вычисляется следующим образом:

$$V = \frac{F^{g-1}}{\lambda_g}, \qquad (15)$$

Оценка риска портфеля:

$$Q = \sum_{i=1}^{g-1} W_i + V_g^1 \cdot W_g^1, \qquad (16)$$

Вариант 3.

Инвестор, который отвечает за принятие решений, устанавливает допустимый для него уровень риска, который не может быть уменьшен, тогда вводится дополнительное ограничение.

Оценка доходности портфеля [29]:

$$K = \frac{W_i}{S_i}, \qquad (17)$$

В результате, решение будет находится, исходя из одномерной задачи оптимизации.

Естественно предположить, что поставленная задача будет иметь решение, хотя бы в одном из частных случаев.

1.4 Учет риска и неопределенности при формировании портфеля инвестиций. Решение задачи инвестирования с ведением дополнительных ограничений разного типа

В настоящие время в банковской практике широко применяется оценка риска при помощи VaR (Value at Risk). «Концепция VaR была разработана в 80-х годах крупнейшими банками США. Одной из причин, побудившей к разработке данной концепции, являлось бурное развитие рынка производных финансовых инструментов и необходимость во внедрении методологии адекватной оценки рисков по открытым позициям. Разработанная концепция позволила оценивать возможные потери по открытым позициям и агрегировать риск в рамках всего портфеля. Другим важным побуждающим моментом была необходимость приведения к общему знаменателю количественные оценки риска производных инструментов и других инструментов финансового рынка. Мы остановимся более подробно на описании данного метода оценки риска» [31].

«Согласно определению, VaR - это выраженная в данных денежных единицах (базовой валюте) оценка максимальных, ожидаемых в течение данного периода времени с данной вероятностью потерь данного портфеля (Рис. 2). Таким образом, выражение «квартальный 99 процентный VaR по активу А составил 1000$» означает, что размер убытков по активу А за квартал не превысит с вероятностью 99% 1000$ при условии сохранения параметров распределения» [31].

«Применение VaR для оценки риска может использоваться на всех уровнях риск-менеджмента от микроуровня (оценка рисков по отдельным позициям) до макро-уровня (расчет риска совокупного портфеля), кроме этого, количественные оценки VaR могут использоваться на всех уровнях управления от аналитиков до высшего менеджмента компании и держателей акций» [31].

«Расчет VaR может применяться для оценки рисков, сопутствующих различным временным горизонтам, с различным уровнем достоверности. VaR может измеряться как в процентном выражении (изменение рыночной цены в процентах), так и в абсолютных величинах (доллары США, рубли РФ). Существует три разновидности VaR» [31]:

«Относительный (Relative) VaR. Относительный VaR измеряет риск недополучения дохода по отношению к заранее определенному рыночному индикатору (benchmark), в качестве которого могут использоваться рыночные индексы (S&P 500 Index, EMBI+ index, RTS и т.д.). Данный метод используется многими институциональными инвесторами, т.к. эффективность их инвестиционной деятельности зачастую сравнивается с целевой доходностью benchmark» [31].

«Допустим, что месячный относительный VaR с 99-процентным уровнем достоверности равен 8 млн. долл. Другими словами, в среднем только в 1 месяце из 100 недополученный доход по сравнению с benchmark может превысить 8 млн.долл.» [31].

«Относительный VaR может быть выражен как в относительных и абсолютных величинах» [31].

«Маргинальный (Marginal) VaR. Маргинальный VaR показывает, насколько открытие новой позиции увеличит риск общего портфеля. Рассчитать маргинальный VaR можно как разницу между VaR портфеля, содержащий некоторый актив и VaR портфеля без указанного актива» [31].

«Инкрементальный (Incremental) VaR. Инкрементальный VaR тесно связан с маргинальным. Инкрементальный VaR показывает изменение риска общего портфеля из-за небольших изменений доли актива (в то время как маргинальный VaR показывает изменение риска портфеля при полном исключении актива из портфеля)» [31].

«Сохраняя преемственность с современной портфельной теорией, методология расчета VaR базируется на исторических данных. Для расчета VaR существует несколько подходов, которые можно объединить в группу методов, основанных на локальном оценивании (дельта-нормальный метод, дельта-гамма-вега приближение), и группу методов, базирующихся на полном оценивании (метод исторических симуляций, стресс-тестинг, метод симуляций Монте-Карло). Каждый из перечисленных методов имеет свои особенности применения, зависящие от рыночных условий. Так, существенным допущением методов, основанных на локальном оценивании является гипотеза о нормальном распределении, что, как правило, выполняется с большими допущениями. Кроме этого, использование методов данной группы дает плохие результаты в условиях нестационарного рынка. Методы полного оценивания, хотя и не строятся на предпосылке о нормальном распределении, сопряжены с большими вычислительными затратами» [31].

«Далее остановимся более подробно на некоторых из указанных методов.

Дельта-нормальный метод. Как было уже отмечено выше, данный метод строится на предположении о нормальном распределении доходностей активов. В силу того, что портфель есть линейная комбинация финансовых активов, доходность портфеля тоже распределена нормально. В данном случае доверительный интервал (1-a) характеризуется квантилем $ki._{a}$. Для доверительных интервалов 95% и 99% соответствующие квантили будут равны 1,65 и 2,33 стандартных отклонений от доходности портфеля» [31].

«Основным преимуществом данного метода является его вычислительная простота, что особенно актуально для расчета портфельного VaR для диверсифицированных портфелей с большим количеством активов для целей проведения анализа в режиме on-line. Как было отмечено выше, предположение о нормальном распределении доходностей факторов риска накладывает определенные ограничения на применение данного метода на практике, где распределение, как правило, характеризуется более острой вершиной и толстыми хвостами (лептокуртозис). Решением данной проблемы может являться использование распределения другого вида, которое лучшим образом будет аппроксимировать эмпирические данные. К недостаткам данного метода можно отнести недостаточную адекватность при анализе инструментов с нелинейными ценовыми характеристиками (производные инструменты). Для оценки рисков по этим инструментам применяют дельта-гамма-нормальный метод либо методы полного оценивания» [31].

«Метод исторических симуляций. Основополагающей гипотезой данного метода является гипотеза о стационарности рынка в обозримом будущем. Соответственно, характер будущих изменений ценовых характеристик рыночных инструментов будет подобен характеру изменений, произошедших в прошлом. Результаты применения данного метода в большой мере зависят от глубины выборки, используемой для расчетов» [31].

«Следует упомянуть о некоторых особенностях вычисления VaR для облигаций и других инструментов, которые торгуются на рынке и имеют ограниченный срок обращения и фиксированную цену погашения. Существенным отличием динамики облигаций от акций и других бессрочных инструментов является зависимость волатильности от дюрации облигации. Так, при уменьшении срока до погашения облигации амплитуда изменений цен, как правило, снижается. Кроме этого, если распределение доходностей акций, как правило, симметрично и может быть аппроксимировано нормальным законом распределения и для оценки рыночного риска достаточным будет использование математического ожидания и среднеквадратичного отклонения, то распределение доходностей облигаций характеризуется асимметрией и «толстыми» хвостами, следовательно, требуется больше параметров в качестве характеристик распределения» [31].

Принцип оптимальности «максимизация эффективности с ограничением по риску»

Пусть оценкой эффективности заданной стратегии i выступает математическое ожидание выигрыша $\overline{a_i} = \sum_{j=1}^{m} a_{ij} q_j$. а в качестве оценки риска –

$$\sigma_i = \sqrt{\sum_{j=1}^{m} \left(a_{ij} - \overline{a_i}\right)^2 q_j}\ , \qquad (18)$$

Тогда получается новая постановка задачи двухкритериальной оптимизации. В данной задаче, опять один из критериев является ограничением [8]. В случае, когда ограничением является функция среднеквадратического отклонения, у которой верхнее пороговое значение равно σ_0 , получается задача

$$\sum_{j=1}^{m} a_{ij} q_j \to \max_{i \in I}, I = \{i \mid \sigma_i \le \sigma_0\}, \qquad (19)$$

В данном случае смешанная стратегия этой задачи состоит в оптимальном распределении финансовых средств между различными активами. Стоит отметить, что доходности при инвестировании могут быть коррелированными. Для упрощения, полагаем, что коррелированности нет. Следовательно, все полученные результаты можно перенести на тот случай, когда коррелированность присутствует [8].

Пусть p_i доля средств, которые инвестируются в i-й финансовый актив. Величины a_{ij} будут характеризовать уровень доходности каждого актива, в каждом из состояний природы. Отсюда можно найти математическое ожидание доходности стратегии $p = (p_1, \ldots, p_n)$ как $\sum_{i=1}^{n} \overline{a_i} p_i \to \max_{i \in I}, I = \{i \mid \sigma_i \le \sigma_0\}$, а среднеквадратическое отклонение случайной величины доходности в случае отсутствия коррелированности определяется, по формуле [32]

$$\sigma = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \sigma_i^2 p_i^2}\ , \qquad (20)$$

Таким образом, получается новая постановка задачи максимизации:

$$\sum_{i=1}^{n} \overline{a_i} p_i \to \max_{p \in S_1}, S_1 = \left\{ p \mid \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \sigma_i^2 p_i^2} \le \sigma_0, \sum_{i=1}^{n} p_i = 1, p_i \ge 0, i = 1,...,n \right\}, \qquad (21)$$

Во всех дальнейших выкладках значения $\overline{a_i}$ будут различны. Данное нововведение не меняет условие задачи, из-за того, что, если стратегии будут иметь идентичные математические ожидания, тогда при равенстве среднеквадратических отклонений, можно убрать одну из стратегий. Если же одна из стратегий имеет большее среднеквадратическое отклонение, тогда она не может входить в оптимальную стратегию, имеющую ненулевой вес.

Теорема 1. Если $\sigma_0 > \min\limits_{1 \le i \le n} \sigma_i$ и все $\overline{a_i}$ различны, то задача имеет решение и истинно смешанная оптимальная стратегия $p_i^0 = \dfrac{\overline{a_i} + \mu^0}{\lambda^0 \sigma_i^2}, i \in I_0, p_i^0 = 0, i \notin I_0$, где I_0 некоторое подмножество множества индексов [8].

$$I = \{1,...,n\}, \lambda^0 = \sqrt{\frac{k_1 k_3 - k_2^2}{\sigma_0^2 k_3 - 1}}, \mu^0 = -\frac{k_2}{k_3} + \frac{1}{k_3}\sqrt{\frac{k_1 k_3 - k_2^2}{\sigma_0^2 k_3 - 1}}, k_1 = \sum_{i \in I_0} \frac{\overline{a_i}^2}{\sigma_i^2}, k_2 = \sum_{i \in I_0} \frac{\overline{a_i}}{\sigma_i^2}, k_3 = \sum_{i \in I_0} \frac{1}{\sigma_i^2}$$

(22)

Доказательство. Достаточно очевидным является тот факт, что при $\sigma_0 > \min\limits_{1 \le i \le n} \sigma_i$ множество S_1 не пусто, замкнуто и ограничено, поэтому задача имеет решение.

Для того чтобы найти решение задачи нужно создать условия применяемости условий Каруша-Куна-Таккера (ККТ).

$$L_1(p, \lambda, \mu) = \sum_{i=1}^{n} \overline{a_i} p_i + \frac{1}{2}\lambda\left(\sigma_0^2 - \sum_{i=1}^{n} \sigma_i^2 p_i^2\right) + \mu\left(\sum_{i=1}^{n} p_i - 1\right), \lambda \ge 0\,, \qquad (23)$$

Теперь нужно рассмотреть множество индексов I_0, соответствующих ненулевым p_i. В таком случае условия оптимальности будут задаваться следующим образом [8]:

$$\overline{a_i} - \lambda\sigma_i^2 p_i + \mu = 0, i \in I_0, \overline{a_i} - \lambda\sigma_i^2 p_i + \mu \le 0, i \notin I_0, \tag{24}$$

Если $\lambda = 0$, тогда $\overline{a_i} + \mu = 0, \forall i \in I_0$.

В случае, когда квадратичное ограничение в исходной задаче неактивно, тогда $\lambda = 0$. Для того чтобы получить смешанную оптимальную стратегию, нужно обеспечить действие квадратичного ограничения при котором $\lambda > 0$ [8]. Тогда имеем $p_i = \dfrac{\overline{a_i} + \mu}{\lambda\sigma_i^2}, i \in I_0$. Далее, $\sum\limits_{i \in I_0} \dfrac{\overline{a_i} + \mu}{\lambda\sigma_i^2} = 1$, откуда $\lambda = \sum\limits_{i \in I_0} \dfrac{\overline{a_i} + \mu}{\sigma_i^2}$. Так как в силу сделанного замечания первое ограничение в задаче является активным, то имеет место также равенство $\sum\limits_{i \in I_0} \dfrac{\left(\overline{a_i} + \mu\right)^2}{\lambda^2\sigma_i^2} = \sigma_0^2$, откуда $\lambda^2 = \sigma_0^{-2} \sum\limits_{i \in I_0} \dfrac{\left(\overline{a_i} + \mu\right)^2}{\sigma_i^2}$ и $\left(\sum\limits_{i \in I_0} \dfrac{\overline{a_i} + \mu}{\sigma_i^2}\right)^2 = \sigma_0^{-2} \sum\limits_{i \in I_0} \dfrac{\left(\overline{a_i} + \mu\right)^2}{\sigma_i^2}$.

Пусть $k_1 = \sum\limits_{i \in I_0} \dfrac{\overline{a_i}^2}{\sigma_i^2}, k_2 = \sum\limits_{i \in I_0} \dfrac{\overline{a_i}}{\sigma_i^2}, k_3 = \sum\limits_{i \in I_0} \dfrac{1}{\sigma_i^2}$ тогда $\lambda = k_2 + k_3\mu$ и $\sigma_0^2\lambda^2 = k_1 + 2k_2\mu + k_3\mu^2$ [8]. В результате, получилось квадратное уравнение для определения $\mu : \mu^2 + 2\mu\dfrac{k_2}{k_3} + \dfrac{k_1 - \sigma_0^2 k_2^2}{k_3\left(1 - \sigma_0^2 k_3\right)} = 0$. Решения данного уравнения имеют вид: $\mu_{1,2} = -\dfrac{k_2}{k_3} \pm \dfrac{1}{k_3}\sqrt{\dfrac{k_1 k_3 - k_2^2}{\sigma_0^2 k_3 - 1}}$.

Теперь нужно доказать, что подкоренное выражение является положительным. Для этого нужно использовать неравенство Коши-Буняковского: $\langle x, y \rangle \le \|x\|^2 \cdot \|y\|^2$. Пусть заданы векторы x и y с компонентами $x_i = \dfrac{\overline{a_i}}{\sigma_i}, y_i = \dfrac{1}{\sigma_i}, i \in I_0$. Тогда $\|x\|^2 = k_1, \|y\|^2 = k_3, \langle x, y \rangle = k_2$ и $k_1 k_3 - k_2^2 \ge 0$.

Таким образом, имея хотя бы две компоненты у этих векторов числитель положителен [8].

Чтобы показать, что знаменатель подкоренного выражения будет положителен, нужно использовать условие теоремы $\sigma_0 > \min\limits_{1\le i\le n} \sigma_i$. Так как $k_3 = \sum\limits_{i\in I_0} \frac{1}{\sigma_i^2} \ge \frac{1}{\min\limits_{1\le i\le n} \sigma_i^2} > \frac{1}{\sigma_0^2}$, то $\sigma_0^2 k_3 - 1 > 0$.

$\lambda = k_2 + k_3\mu > 0$ и $k_3 > 0$, то $\mu > -\frac{k_2}{k_3}$. Следовательно, решение задаётся следующими соотношениями: $\mu^0 = -\frac{k_2}{k_3} + \frac{1}{k_3}\sqrt{\frac{k_1k_3 - k_2^2}{\sigma_0^2 k_3 - 1}}$, $\lambda^0 = \sqrt{\frac{k_1k_3 - k_2^2}{\sigma_0^2 k_3 - 1}}$, $p_i^0 = \frac{\overline{a_i} + \mu^0}{\lambda^0 \sigma_i^2}, i \in I_0, p_i^0 = 0, i \notin I_0$ ч.т.д.

Таким образом, решение задачи (2) основано на обыкновенном переборе множеств ненулевых компонент I_0. В силу того, что условия ККТ также обладают достаточностью, тогда можно получить оптимальное решение, которое имеет вид, $\overline{a_i} + \mu^0 \le 0, i \notin I_0$ [8].

Принцип оптимальности «минимизация риска с ограничением по эффективности»

В случае, когда математическое ожидание со значением нижнего порога равным a_0, становится ограничением, тогда в чистых стратегиях получается задача

$$\sigma_i \to \min_{i\in I}, I = \left\{ i \mid \sum_{j=1}^{m} a_{ij} q_j \ge a_0 \right\}, \tag{25}$$

Тогда новая постановка задач на нахождение минимального значения среднеквадратического отклонения, имеющая ограничения снизу на математическое ожидание будет в смешанных стратегиях, и будет задаваться следующим образом [8]

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{n} \sigma_i^2 p_i^2} \to \min_{p\in S_2}, S_2 = \left\{ p \mid \sum_{i=1}^{n} \overline{a_i} p_i \ge a_0, \sum_{i=1}^{n} p_i = 1, p_i \ge 0, i = 1,...,n \right\}, \tag{26}$$

Теорема 2. Если $a_0 \le \max\limits_{1\le i\le n} \overline{a_i}$ и все $\overline{a_i}$ различны то задача (26) имеет решение, а оптимальная смешанная стратегия $p_i^0 = \dfrac{\lambda^0 \overline{a_i} + \mu^0}{\sigma_i^2}, i \in I_0, p_i^0 = 0, i \notin I_0$, где I_0 некоторое подмножество множества индексов $I, \lambda^0 = \dfrac{k_3 a_0 - k_2}{k_1 k_3 - k_2^2}, \mu^0 = \dfrac{k_1 - k_2 a_0}{k_1 k_3 - k_2^2}$, если $k_3 a_0 - k_2 > 0$, $\lambda = 0, \mu^0 = \dfrac{1}{k_3}$ в противном случае [8].

Доказательство. При $a_0 \le \max\limits_{1\le i\le n} \overline{a_i}$ множество S_2 непустое, замкнуто и ограничено, поэтому задача (26) имеет решение. При проведении операции возведения в квадрат никаких изменений не происходит, тогда функция Лагранжа для задачи имеет вид

$$L_2(p,\lambda,\mu) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} \sigma_i^2 p_i^2 + \lambda\left(a_0 - \sum_{i=1}^{n} \overline{a_i} p_i\right) - \mu\left(\sum_{i=1}^{n} p_i - 1\right), \lambda \ge 0, \tag{27}$$

Для ненулевых значений p_i, условия оптимальности имеют вид $\sigma_i^2 p_i^2 - \lambda \overline{a_i} - \mu = 0, i \in I_0$. Отсюда, $p_i = \dfrac{\lambda \overline{a_i} + \mu}{\sigma_i^2}$, тогда получаются два линейных уравнения $\sum\limits_{i=1}^{n} \overline{a_i} p_i = a_0, \sum\limits_{i=1}^{n} p_i = 1$. Подставляя p_i в эти уравнения, получится система уравнений для λ и μ: $\lambda k_1 + \mu k_2 = a_0, \lambda k_2 + \mu k_3 = 1$, По условию теоремы все $\overline{a_i}$ различны, тогда всё аналогично ранее доказанной теореме. Поэтому определитель этой системы строго больше нуля, и она имеет решение $\lambda = \dfrac{k_3 a_0 - k_2}{k_1 k_3 - k_2^2}, \mu = \dfrac{k_1 - k_2 a_0}{k_1 k_3 - k_2^2}$. При этом в силу условий ККТ должно выполняться $\lambda \ge 0$ [8].

Исходя из вышеперечисленных фактов, решение поставленной задачи имеет вид:

$$\lambda^0 = \frac{k_3 a_0 - k_2}{k_1 k_3 - k_2^2}, \mu^0 = \frac{k_1 - k_2 a_0}{k_1 k_3 - k_2^2}, p_i^0 = \frac{\lambda^0 \overline{a_i} + \mu^0}{\sigma_i^2}, i \in I_0, p_i^0 = 0, i \notin I_0, \tag{28}$$

Они справедливы как при $\lambda^0 > 0$, так и при $\lambda^0 = 0$. Последний (вырожденный) случай имеет место при $k_3 a_0 - k_2 = 0$. Тогда

$$\mu^0 = \frac{k_1 - k_2 a_0}{k_1 k_3 - k_2^2} = \frac{k_1 k_3 - k_2^2}{(k_1 k_3 - k_2^2) k_3} = \frac{1}{k_3}, \tag{29}$$

Если же первое ограничение в задаче (27) не является активным, то $\lambda^0 = 0$, а $\mu^0 = \frac{1}{k_3}$ из второго уравнения. В любом случае, при $\lambda^0 = 0$ имеют место формулы $p_i^0 = \frac{\mu^0}{\sigma_i^2} = \frac{1}{k_3 \sigma_i^2}$. Теорема доказана.

Математическая постановка двухкритериальной задачи инвестирования с функцией VAR

Одной из фундаментальных и важных задач оптимизации в инвестиционной сфере является задача двухкритериальной оптимизации, у которой один из критериев может выступать ограничением. Классическая постановка этой задачи может быть представлена как:

$$\sum_{j=1}^{m} a_{ij} q_j \to \max_{i \in I}, I = \{ i \mid P_i(x) \le r_0 \}, \tag{30}$$

Функция VAR, является ограничением и имеет параметр x, а также пороговое значение равное r_0 [7].

Для нахождений значений $P_i(x)$ нужно рассмотреть перестановку элементов i-й строки π_i [7]. После применения $\pi_i(a_{i1},...,a_{im})$ получается строка $a_{ij_1},...,a_{ij_m}$. Тогда

$$P_i(x) = \sum_{j=j_1}^{j_k} q_j \ , \qquad (31),$$

где значения j_k можно находить прямо из $a_{ij_1} \le x < a_{ij_{k+1}}$. При этом если $x < a_{ij}$, то $P_i(x) = 0$. Определенное время перед исследователями ставился вопрос о том, можно ли использовать смешанные стратегии, при заданной постановке задачи [7].

Однако в данной постановке, смешанные стратегии применимы.

$$\sum_{i=1}^{n} \bar{a}_i p_i \to \max_{p \in S}, S = \left\{ p \mid \sum_{i=1}^{n} p_i P_i(x) \le r_0, \sum_{i=1}^{n} p_i = 1, p_i \ge 0, i = 1,...,n \right\}, \tag{32}$$

Выводы к главе 1:

– процесс инвестирования является многокомпонентной структурой, которая зависит от большого количества факторов, которые могут влиять как в положительную, так и в негативную сторону при его осуществлении;

– также в главе было рассмотрено понятие портфеля ценных бумаг, выделены базовые особенности портфеля, определена классификация портфеля ценных бумаг, а также основные плюсы и минусы каждого из них. Также было показано, какие факторы влияют на доходность портфеля, а какие нет. В конце главы была рассмотрена двухкритериальная задача оптимизации в задачах фондового инвестирования. Рассмотрена постановка задачи, а также необходимые условия-ограничения;

– формирование портфеля ценных бумаг должно опираться на результаты чётко выстроенной аналитической работы, направленной на оценку влияния всех факторов, а также рисков, которые также в определенной степени определяют наполнение исходного портфеля;

– одним из показателей оценки риска является критерий VaR, который сравнительно недавно приобрел достаточно большую популярность, благодаря своей точности и простоте в применении.

Глава 2 Исследование свойств процедур построения портфеля инвестиций

2.1 Классификация методов построения портфеля инвестиций

«Первый способ построения портфеля – классический. Эффективный фронт строится по всем акциям, без отбора по какому-либо критерию. Для построения оптимального портфеля применяется модель Гарри Марковица» [30].

Теория построения портфеля по модели Марковица [33]

«Впервые законченную систему создания сбалансированного по доходности и риску портфеля инвестиционных инструментов создал Гарри Марковиц. В 1950-1951 годах при подготовке докторской диссертации Марковиц сформулировал основные положения портфельной теории. Первой работой, где описана данная теория, считается статья «Выбор портфеля», опубликованная в «Финансовом журнале» в 1952 году. В этой статье Гарри Марковиц впервые предложил математическую модель формирования оптимального портфеля» [30].

«На данный момент модель Марковица является одной из самых популярных инструментов для практического выбора портфеля и оптимизации. Основной концепцией оптимизации портфеля в рамках модели Марковица является эффективный фронт множества акций» [30].

«Этапы формирования портфеля инвестиций по модели Марковица. Пусть S – это подмножество акций на финансовом рынке, N –это количество акций в множестве S[1]. За n обозначается число наблюдений» [30].

«За $p_i(t)$ обозначается цена i-той акции за день t, где i меняется от 1 до N, а t– от 1 до n. Сначала определяется ежедневная доходность акции i за период с t-1 дня по день t» [30]:

$$r_i(t) = \ln \frac{p_i(t)}{p_i(t-1)}, \tag{33}$$

Затем вычисляется ожидаемая доходность акции по формуле:

$$E(R_i) = \frac{\sum_{t=1}^{n} r_i(t)}{n}, \tag{34}$$

На следующем шаге определяется риск i-той акции в S, то есть среднеквадратичное отклонение:

$$\sigma(R_i) = \frac{\sum_{t=1}^{n} \left(r_i(t) - E(R_i)\right)^2}{n-1}, \tag{35}$$

«Таким образом, получили первоначальные необходимые данные для оценки долей данных акций в инвестиционном портфеле» [30].

«Портфель акций из S определяется вектором $f=(f_1, f_2, \ldots ,f_N)$, где $f_i \geq 0$ представляет собой часть капитала, который инвестируется в акцию i. По условию $\sum_{i=1}^{N} f_i = 1$» [30].

Портфель Марковица базируется на двух характеристиках:

Ожидаемая доходность портфеля $E(R) = \sum_{i=1}^{N} f_i E(R_i)$,

f_i – доля общего вложения, приходящаяся на i-ю акцию

$E(R_i)$– ожидаемая доходность i-й ценной бумаги, %

$$\sigma^2(R) = \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} \sigma_{i,j} f_i f_j, \tag{36}$$

Мера риска портфеля σ(R) ,где

$\sigma_{i,j}$ – ковариация между доходностями i-й и j-й акциями;

f_i и f_j – доли общего вложения, приходящиеся на i-ю и j-ю ценные бумаги;

«Ковариация доходностей ценных бумаг ($\sigma_{i,j}$) равна корреляции между ними, умноженной на произведение их стандартных отклонений» [30]:

$\sigma_{i,j} = \rho_{i,j}\sigma_i\sigma_j$, где $\rho_{i,j}$– коэффициент корреляции доходностей i-ой и j-ой акций;σ_i, σ_j – стандартные отклонения доходностей i-ой и j-ой акций.

«Выделяют две инвестиционные стратегии при формировании портфеля» [30]:

Понятие эффективного фронта

«Эффективный фронт рынка является множеством оптимальных по Парето точек на плоскости (E,σ). Эффективный фронт для исследуемого набора акций – это кривая на плоскости, на которой расположены оптимальные портфели, удовлетворяющие двум критериям» [30]:

$$\begin{matrix} E(R) \rightarrow \max \\ \sigma(R) \rightarrow \min \end{matrix}, \tag{37}$$

«По горизонтали указывается риск определенного портфеля инвестиций эффективного фронта, по вертикали отображены значения ожидаемой доходности данного портфеля (Рисунок. 2)» [30].

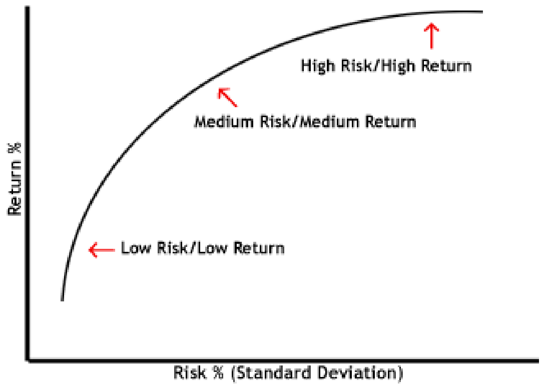


Рисунок 2 – Эффективный фронт

«Портфели, лежащие слева от эффективного фронта применить нельзя, так как они не принадлежат допустимому множеству. Внутренние портфели, находящиеся справа и ниже эффективной границы, не являются эффективными, потому что существуют портфели, которые при данном уровне риска обеспечивают более высокую доходность, либо более низкий риск для данного уровня доходности» [30].

«Выбор оптимального портфеля зависит от предпочтений и возможностей инвестора, а также от толерантности к риску. Однако, верен тот факт, что эффективный фронт неизменен для всех инвесторов. Рациональный инвестор будет стремиться получить максимальную прибыль и минимизировать свой риск. Поэтому всем возможным портфелям допустимого множества вкладчик предпочтет только те, которые расположены на эффективном фронте, поскольку они являются доминирующими по отношению к портфелям с тем же уровнем риска или с той же доходностью» [30].

Таким образом, главным достоинством модели Марковица является системный подход к созданию инвестиционного портфеля, а также управлению его доходностью и риском.

2.2 Построение оптимального портфеля на акциях максимального независимого множества с коэффициентом Шарпа

Первым шагом в построении портфеля предлагаемым способом является вычисление отношения Шарпа [34].

Коэффициент Шарпа и отбор акций с помощью коэффициента

«Рассмотрим один из самых популярных показателей, которым пользуются финансовые и инвестиционные аналитики –коэффициент Шарпа» [30].

«Коэффициент Шарпа– это показатель, оценивающий эффективность и результативность управления инвестиционным портфелем. Данный коэффициент был разработан У. Шарпом в 1966 году. Коэффициент Шарпа показывает эффективность инвестиционного актива или портфеля в виде соотношения доходности и риска (стандартного отклонения)» [30].

Формула расчета коэффициента Шарпа:

$$S(X) = \frac{E(R(X))}{\sigma(x)}, \tag{38}$$

S(X) — коэффициент Шарпа;

X — выбранный актив;

R(X) — доходность инвестиционного актива;

E(R(X)) — математическое ожидание актива X;

$\sigma(X)$ — стандартное отклонение актива X.

«Коэффициент Шарпа предназначен для того, чтобы понять, насколько доходность актива компенсирует риск, принимаемый инвестором. Если сравнивать два актива с одинаковым ожидаемым доходом, то вложение в актив с более высоким коэффициентом Шарпа будет менее рискованным» [30].

«Следующим шагом является задание определенного порога, чтобы произвести отбор акций с данным коэффициентом. Если коэффициент Шарпа у акции X_i больше заданного порога, то данная акция добавляется в множество отобранных акций. Если акция меньше заданного порога, то она не входит в данное множество» [35].

X_i –i-тая акция, где i меняется от 1 до N;

N – количество акций в множестве S.

«Таким образом, получается множество акций с коэффициентом Шарпа больше заданного порога. Следующим этапом в построении данного портфеля инвестиций является вычисление вероятности совпадения знаков акций, корреляции Пирсона и построение графа рынка» [30].

«Идентификация максимального независимого множества графа рынка и построение оптимального портфеля. Изучение сетевых моделей $G = (V,E, \gamma)$ естественно сводится к изучению ключевых характеристик соответствующих графов. В теории графов предложено достаточно большое количество таких характеристик: отсеченный граф, клики, независимые множества, максимальное островное дерево, степени вершин, центральность, диаметр и другое» [36].

«В данной работе в графе рынка находится максимальное независимое множество (maximum independent set). Считается, что это может быть полезно, если необходимо построить оптимальный портфель. То есть целью нахождения данного множества является сохранение в портфеле небольшого числа активов» [30].

«Подводя итог, на основе акций, входящих в максимальное независимое множество, строится эффективный фронт оптимальных портфелей. В данной работе также исследуется процедура построения эффективного фронта по максимальному независимому множеству в знаковой сети или корреляции Пирсона без отбора по коэффициенту Шарпа» [37].

Моделирование данных

«Для того чтобы изучить свойства процедур формирования инвестиционного портфеля, необходимо смоделировать данные. В данном случае моделирование означает генерирование наблюдений по акциям из соответствующих распределений: многомерное нормальное, распределение Стьюдента, эллиптическое распределение» [30].

В данной работе эллиптическое распределение включает многомерное нормальное и многомерное распределение Стьюдента.

Пусть распределение случайного вектора X принадлежит классу эллиптического распределения с функциями плотности [8]

$$f(x;\mu;\Lambda)=|\Lambda|^{-\frac{1}{2}}g\left\{(x-\mu)'\Lambda^{-1}(x-\mu)\right\}, \tag{39}$$

где Λ- положительно определённая матрица, g (x) ≥ 0, и

$$\int_{-\infty}^{\infty}\ldots\int_{-\infty}^{\infty}g(y'y)dy_1\ldots dy_N=1, \tag{40}$$

Для моделирования наблюдений по распределению следует вычислить матрицу корреляций и вектор математических ожиданий для акций рынка выбранной страны в определённый период времени.

2.3 Понятие истинного и выборочного портфеля

В данной работе сравниваются результаты, полученные на основе реальных данных с определённого рынка инвестиций и с использованием сгенерированных наблюдений по двум распределениям.

«Истинными портфелями считаются те портфели, которые созданы по данным рынка акций. Сначала строится портфель по всем акциям. Истиной является доходность и риск данного портфеля. Фиксируется истинная корреляционная матрица и вектор математических ожиданий доходностей. Портфель по всем активам обозначается как $П_0$.Затем находим истинные структуры для второй процедуры с отношением Шарпа. Граф рынка с использованием вероятности совпадения знаков или корреляции Пирсона, максимальное независимое множество, доходность и риск портфеля являются истиной для портфеля $П_1$, сформированный по второй процедуре. Такие же истинные структуры находятся для портфеля $П_2$. Данный портфель строится по акциям максимального независимого множества без применения отношения Шарпа на первом шаге процедуры» [30].

Таким образом $П_0$,$П_1$,$П_2$, являются истинными портфелями.

«Выборочные портфели – это портфели по акциям смоделированных данных по нормальному распределению и распределению Стьюдента. После применения процедур с использованием знаковой меры и корреляции Пирсона к моделированным наблюдениям получаем граф рынка, максимальное независимое множество. Таким образом, данные структуры являются выборочными для исследуемых процедур построения портфеля инвестиций по сгенерированным данным» [30].

Оценка качества процедур построения портфелей

«Качество рассматриваемых процедур построения портфеля инвестиций оценивается вектором, который содержит среднее число ошибок первого и второго рода, а также общую долю ошибок» [30].

«Число ошибок первого рода - это число акций, которые включены в выборочное максимальное независимое множество, но не содержатся в истинной структуре (ложное включение акции в портфель). Ошибка второго рода – это ложное невключение актива в инвестиционный портфель. То есть акция является частью истинного множества, но не добавлена в выборочный портфель» [30].

2.4 Математическая постановка двухкритериальной задачи инвестирования с функцией VAR

Одной из фундаментальных и важных задач оптимизации в инвестиционной сфере является задача двухкритериальной оптимизации, у которой один из критериев может выступать ограничением. Классическая постановка этой задачи может быть представлена как:

$$\sum_{j=1}^{m} a_{ij} q_j \to \max_{i \in I}, I = \{ i \mid P_i(x) \le r_0 \}, \tag{41}$$

Функция VAR, является ограничением и имеет параметр x, а также пороговое значение равное r_0 [7].

Для нахождений значений $P_i(x)$ нужно рассмотреть перестановку элементов i-й строки π_i [7]. После применения $\pi_i(a_{i1},...,a_{im})$ получается строка $a_{ij_1},...,a_{ij_m}$. Тогда

$$P_i(x) = \sum_{j=j_1}^{j_k} q_j \; , \tag{42),}$$

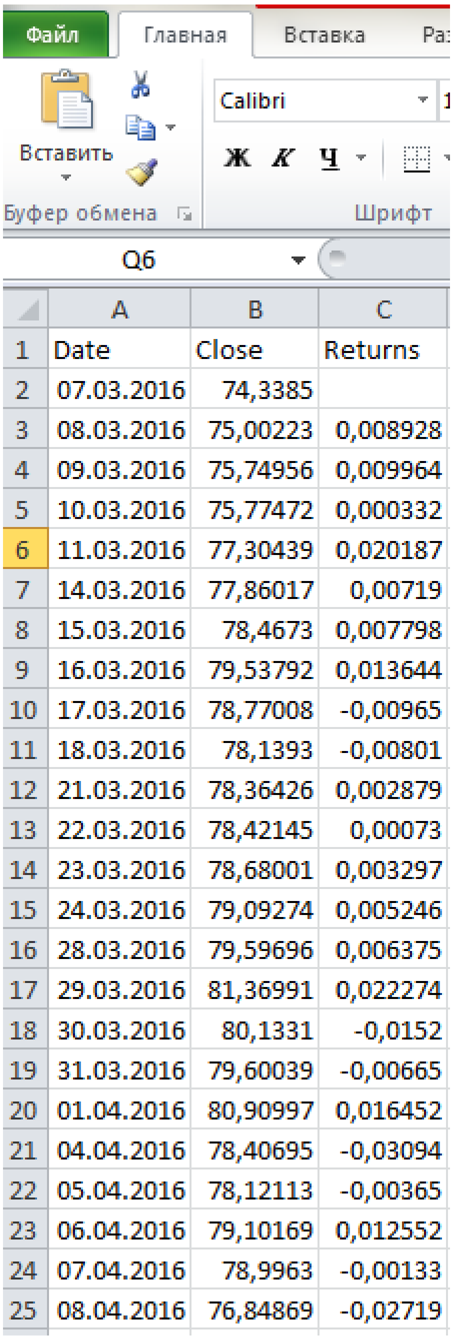
где значения j_k можно находить прямо из $a_{ij_1} \le x < a_{ij_{k+1}}$. При этом если $x < a_{ij}$, то $P_i(x) = 0$. Определенное время перед исследователями ставился вопрос о том, можно ли использовать смешанные стратегии, при заданной постановке задачи [7].

Однако в данной постановке, смешанные стратегии применимы.

$$\sum_{i=1}^{n} \bar{a}_i p_i \to \max_{p \in S}, S = \left\{ p \mid \sum_{i=1}^{n} p_i P_i(x) \le r_0, \sum_{i=1}^{n} p_i = 1, p_i \ge 0, i = 1,...,n \right\}, \tag{43}$$

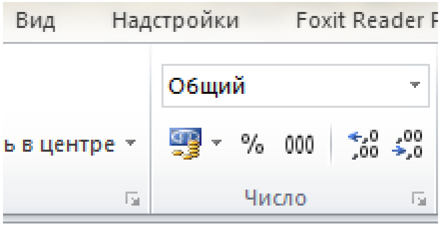
Рассмотрим пример.

Для примера проанализируем доходность инвестирования в акции компаний Linkel, Greenhouse, Rosedim методом VAR с помощью программы Excel. Сначала нужно сформировать достаточный массив данных, чтобы обеспечить качественную оценку [1]. Для моделирования были рассмотрены котировки за период с 2016 по 2018 год [2]. В качестве стратегий, будет выбрана величина дивидендов от инвестирования в акции компаний, в зависимости от временных периодов и котировок этих акций в разные периоды времени. На рисунках 3-5 сформированы три массива данных, 480, 480, 482 позиций [3].



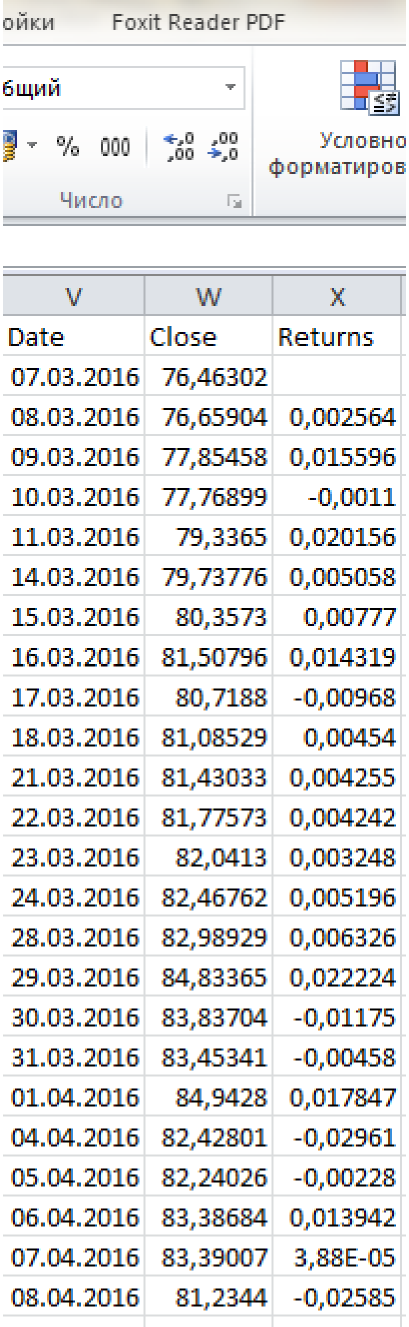
	A	B	C
1	Date	Close	Returns
2	07.03.2016	74,3385	
3	08.03.2016	75,00223	0,008928
4	09.03.2016	75,74956	0,009964
5	10.03.2016	75,77472	0,000332
6	11.03.2016	77,30439	0,020187
7	14.03.2016	77,86017	0,00719
8	15.03.2016	78,4673	0,007798
9	16.03.2016	79,53792	0,013644
10	17.03.2016	78,77008	-0,00965
11	18.03.2016	78,1393	-0,00801
12	21.03.2016	78,36426	0,002879
13	22.03.2016	78,42145	0,00073
14	23.03.2016	78,68001	0,003297
15	24.03.2016	79,09274	0,005246
16	28.03.2016	79,59696	0,006375
17	29.03.2016	81,36991	0,022274
18	30.03.2016	80,1331	-0,0152
19	31.03.2016	79,60039	-0,00665
20	01.04.2016	80,90997	0,016452
21	04.04.2016	78,40695	-0,03094
22	05.04.2016	78,12113	-0,00365
23	06.04.2016	79,10169	0,012552
24	07.04.2016	78,9963	-0,00133
25	08.04.2016	76,84869	-0,02719

Рисунок 3 – Массив данных компании Linkel



L	M	N
Date	Close	Returns
07.03.2016	75,432	
08.03.2016	75,62658	0,002579
09.03.2016	76,80722	0,015612
10.03.2016	76,724	-0,00108
11.03.2016	78,27168	0,020172
14.03.2016	78,66879	0,005073
15.03.2016	79,28125	0,007785
16.03.2016	80,41777	0,014335
17.03.2016	79,6404	-0,00967
18.03.2016	80,00324	0,004556
21.03.2016	80,34493	0,004271
22.03.2016	80,68698	0,004257
23.03.2016	80,95026	0,003263
24.03.2016	81,37216	0,005212
28.03.2016	81,88816	0,006341
29.03.2016	83,70934	0,02224
30.03.2016	82,72721	-0,01173
31.03.2016	82,34992	-0,00456
01.04.2016	83,8209	0,017863
04.04.2016	81,34056	-0,02959
05.04.2016	81,15653	-0,00226
06.04.2016	82,28924	0,013957
07.04.2016	82,29368	5,4E-05
08.04.2016	80,16757	-0,02584

Рисунок 4 – Массив данных компании Greenhouse



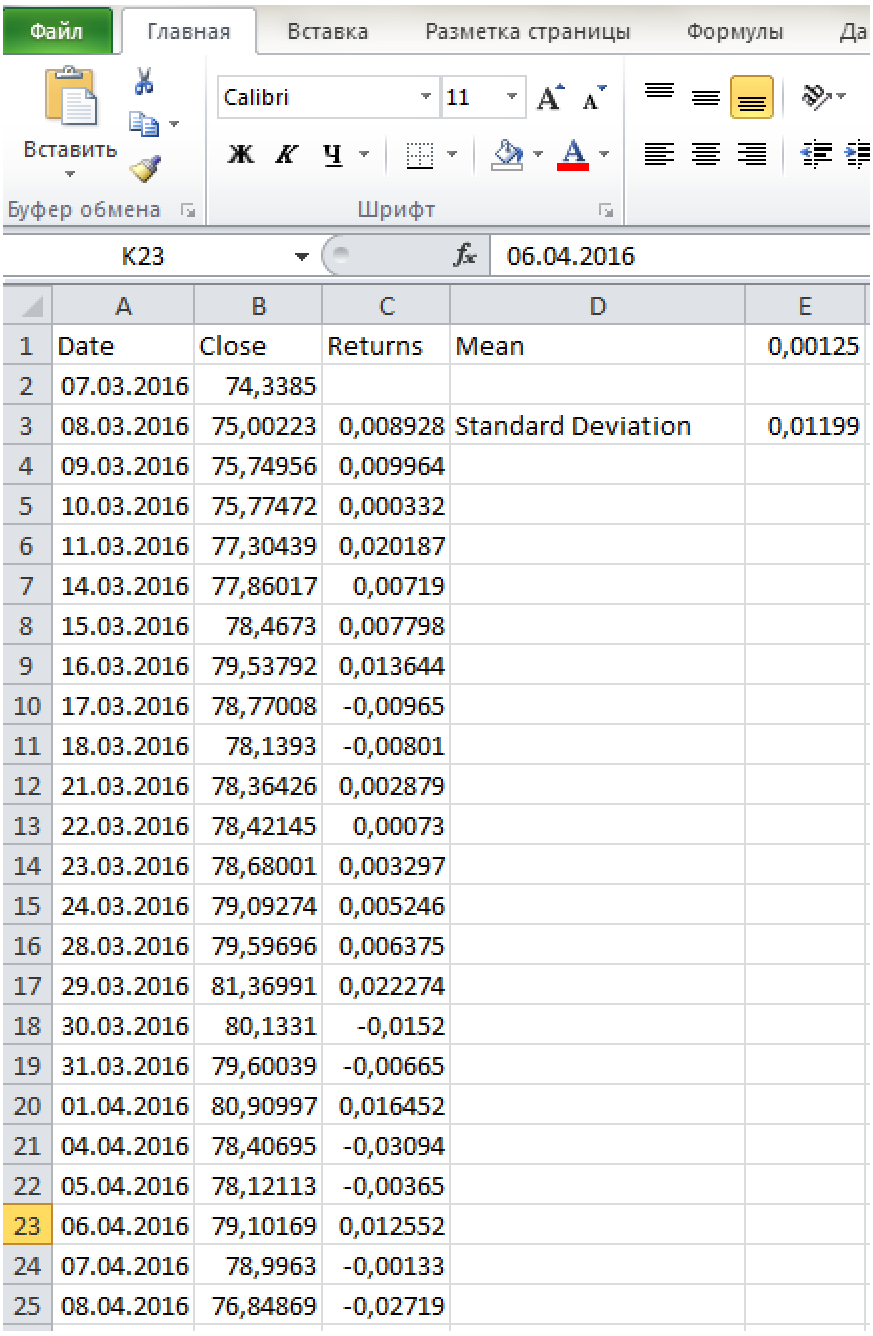
V	W	X
Date	Close	Returns
07.03.2016	76,46302	
08.03.2016	76,65904	0,002564
09.03.2016	77,85458	0,015596
10.03.2016	77,76899	-0,0011
11.03.2016	79,3365	0,020156
14.03.2016	79,73776	0,005058
15.03.2016	80,3573	0,00777
16.03.2016	81,50796	0,014319
17.03.2016	80,7188	-0,00968
18.03.2016	81,08529	0,00454
21.03.2016	81,43033	0,004255
22.03.2016	81,77573	0,004242
23.03.2016	82,0413	0,003248
24.03.2016	82,46762	0,005196
28.03.2016	82,98929	0,006326
29.03.2016	84,83365	0,022224
30.03.2016	83,83704	-0,01175
31.03.2016	83,45341	-0,00458
01.04.2016	84,9428	0,017847
04.04.2016	82,42801	-0,02961
05.04.2016	82,24026	-0,00228
06.04.2016	83,38684	0,013942
07.04.2016	83,39007	3,88E-05
08.04.2016	81,2344	-0,02585

Рисунок 5 – Массив данных компании Rosedim

Котировки компании в каждый из временных промежутков приведены в колонке «Close» [12].

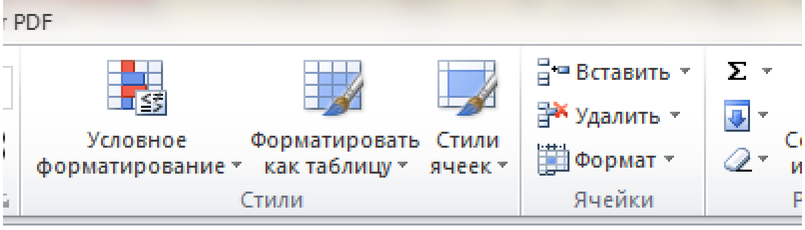
Доходность компании в каждый из временных промежутков приведены в колонке «Returns». Для этого используется формула вида $\frac{B3-B2}{B2}$.

Далее вычисляется значение математического ожидания и среднеквадратического отклонения [21]. Для нахождения математического ожидания используется функция СРЗНАЧ [18]. Для нахождения среднеквадратического отклонения используется функция СТАНДОТКЛОН(C3:C478) (Рисунок 6-8)



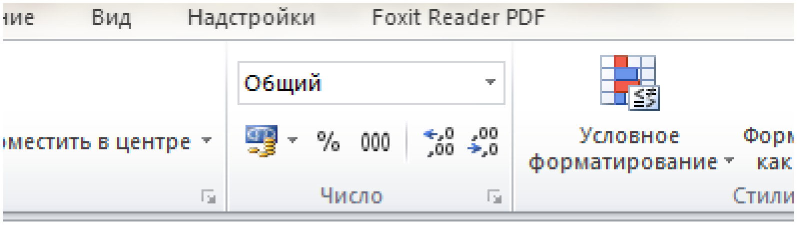
	A	B	C	D	E
1	Date	Close	Returns	Mean	0,00125
2	07.03.2016	74,3385			
3	08.03.2016	75,00223	0,008928	Standard Deviation	0,01199
4	09.03.2016	75,74956	0,009964		
5	10.03.2016	75,77472	0,000332		
6	11.03.2016	77,30439	0,020187		
7	14.03.2016	77,86017	0,00719		
8	15.03.2016	78,4673	0,007798		
9	16.03.2016	79,53792	0,013644		
10	17.03.2016	78,77008	-0,00965		
11	18.03.2016	78,1393	-0,00801		
12	21.03.2016	78,36426	0,002879		
13	22.03.2016	78,42145	0,00073		
14	23.03.2016	78,68001	0,003297		
15	24.03.2016	79,09274	0,005246		
16	28.03.2016	79,59696	0,006375		
17	29.03.2016	81,36991	0,022274		
18	30.03.2016	80,1331	-0,0152		
19	31.03.2016	79,60039	-0,00665		
20	01.04.2016	80,90997	0,016452		
21	04.04.2016	78,40695	-0,03094		
22	05.04.2016	78,12113	-0,00365		
23	06.04.2016	79,10169	0,012552		
24	07.04.2016	78,9963	-0,00133		
25	08.04.2016	76,84869	-0,02719		

Рисунок 6 – Вычисление математического ожидания и среднеквадратического отклонения для массива данных компании Linkel



L	M	N	O	P
Date	Close	Returns	Mean	0,001817
07.03.2016	75,432			
08.03.2016	75,62658	0,002579	Standard Deviation	0,011969
09.03.2016	76,80722	0,015612		
10.03.2016	76,724	-0,00108		
11.03.2016	78,27168	0,020172		
14.03.2016	78,66879	0,005073		
15.03.2016	79,28125	0,007785		
16.03.2016	80,41777	0,014335		
17.03.2016	79,6404	-0,00967		
18.03.2016	80,00324	0,004556		
21.03.2016	80,34493	0,004271		
22.03.2016	80,68698	0,004257		
23.03.2016	80,95026	0,003263		
24.03.2016	81,37216	0,005212		
28.03.2016	81,88816	0,006341		
29.03.2016	83,70934	0,02224		
30.03.2016	82,72721	-0,01173		
31.03.2016	82,34992	-0,00456		
01.04.2016	83,8209	0,017863		
04.04.2016	81,34056	-0,02959		
05.04.2016	81,15653	-0,00226		
06.04.2016	82,28924	0,013957		
07.04.2016	82,29368	5,4E-05		
08.04.2016	80,16757	-0,02584		

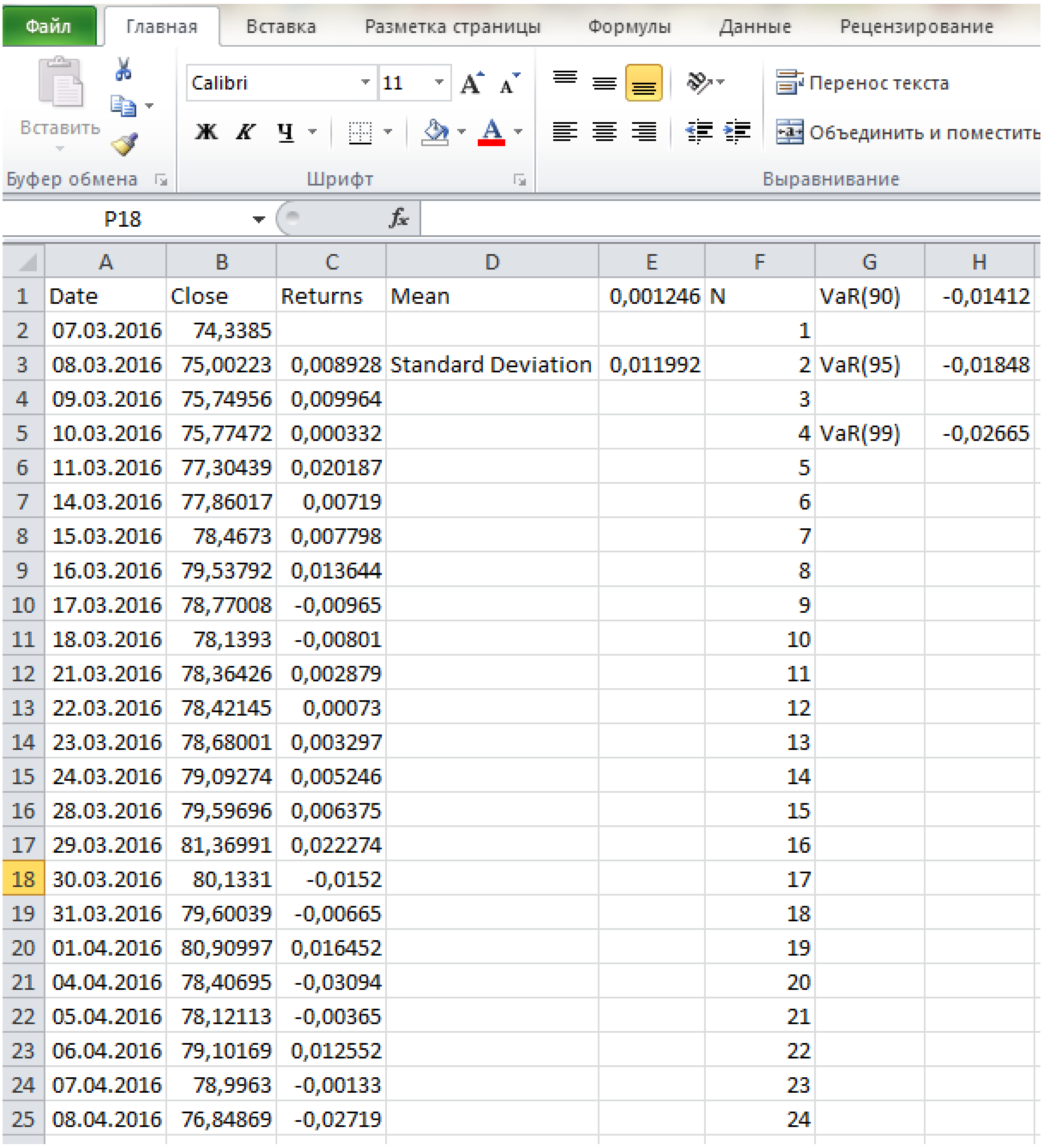
Рисунок 7 – Вычисление математического ожидания и среднеквадратического отклонения для массива данных компании Greenhouse



V	W	X	Y	Z
Date	Close	Returns	Mean	0,001807
07.03.2016	76,46302			
08.03.2016	76,65904	0,002564	Standard Deviation	0,011969
09.03.2016	77,85458	0,015596		
10.03.2016	77,76899	-0,0011		
11.03.2016	79,3365	0,020156		
14.03.2016	79,73776	0,005058		
15.03.2016	80,3573	0,00777		
16.03.2016	81,50796	0,014319		
17.03.2016	80,7188	-0,00968		
18.03.2016	81,08529	0,00454		
21.03.2016	81,43033	0,004255		
22.03.2016	81,77573	0,004242		
23.03.2016	82,0413	0,003248		
24.03.2016	82,46762	0,005196		
28.03.2016	82,98929	0,006326		
29.03.2016	84,83365	0,022224		
30.03.2016	83,83704	-0,01175		
31.03.2016	83,45341	-0,00458		
01.04.2016	84,9428	0,017847		
04.04.2016	82,42801	-0,02961		
05.04.2016	82,24026	-0,00228		
06.04.2016	83,38684	0,013942		
07.04.2016	83,39007	3,88E-05		
08.04.2016	81,2344	-0,02585		

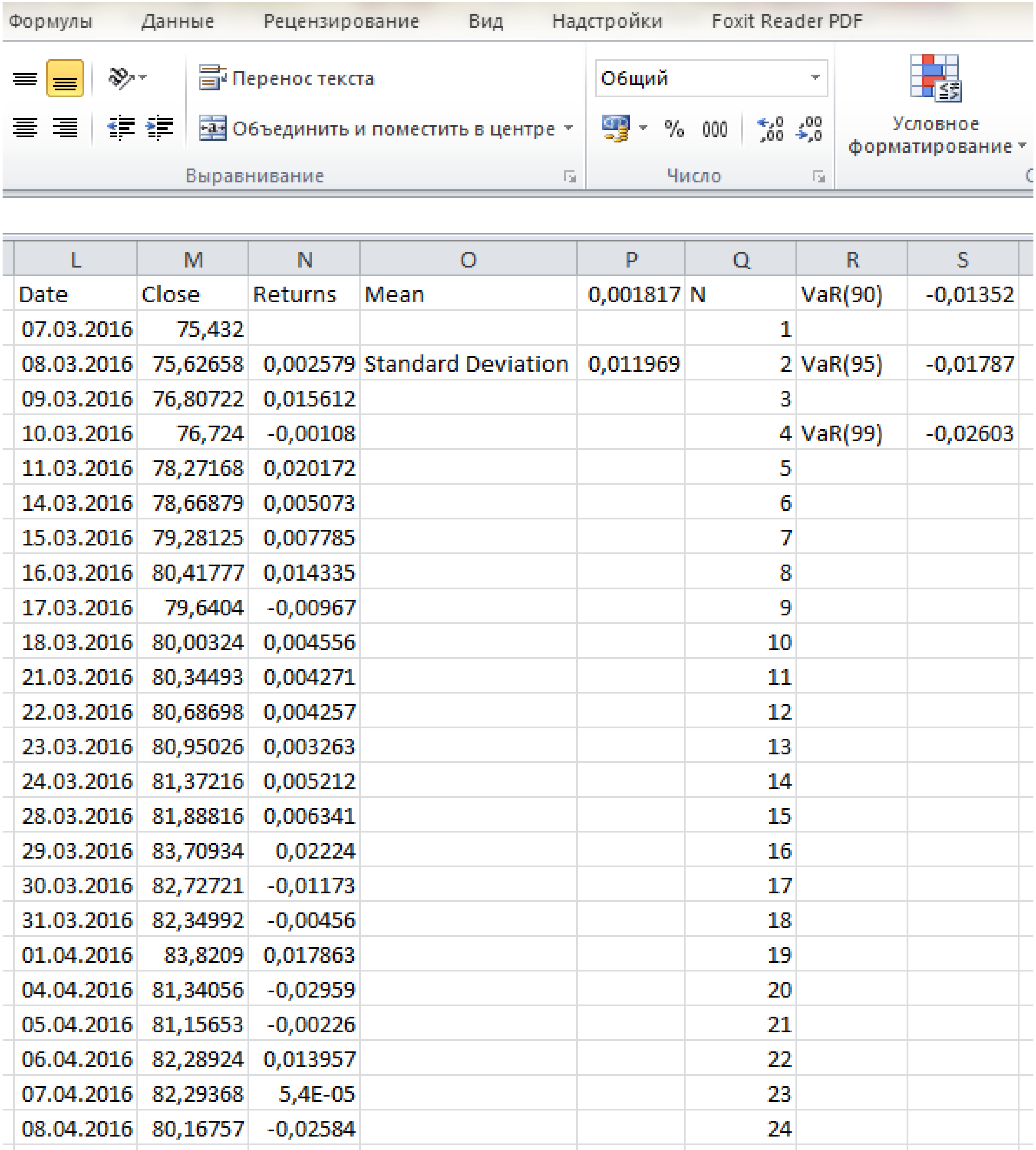
Рисунок 8 – Вычисление математического ожидания и среднеквадратического отклонения для массива данных компании Rosedim

Далее нужно найти функцию квантиля нормального распределения. В задаче заранее подразумевается, что данные всех трёх массивов имеют нормальное распределение. Возьмем значения вероятности равные соответственно 90%, 95%, 99%. Для вычисления значения критерия используется функция НОРМОРБР(Рисунок 9-11).



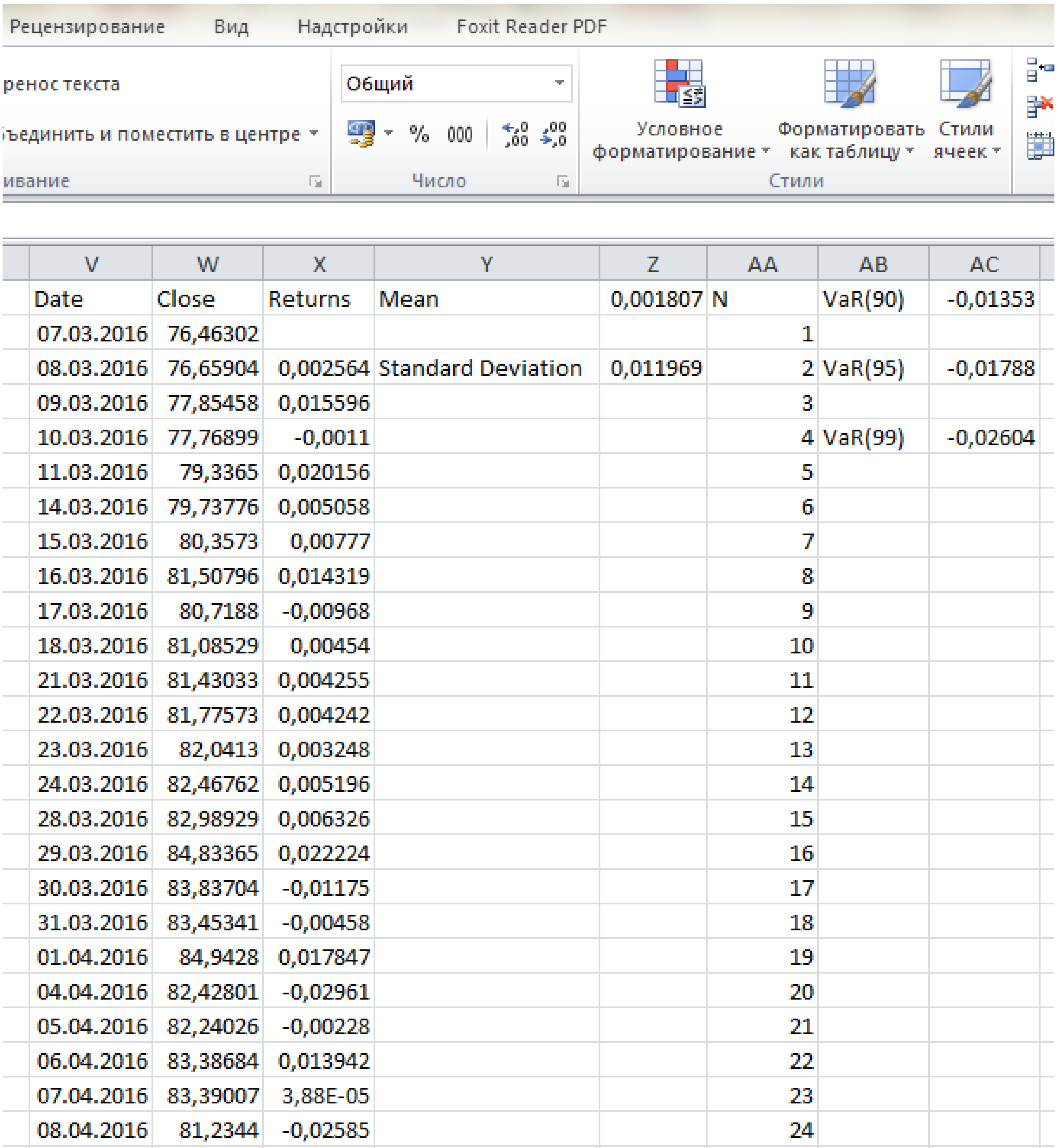
	A	B	C	D	E	F	G	H
1	Date	Close	Returns	Mean	0,001246	N	VaR(90)	-0,01412
2	07.03.2016	74,3385				1		
3	08.03.2016	75,00223	0,008928	Standard Deviation	0,011992	2	VaR(95)	-0,01848
4	09.03.2016	75,74956	0,009964			3		
5	10.03.2016	75,77472	0,000332			4	VaR(99)	-0,02665
6	11.03.2016	77,30439	0,020187			5		
7	14.03.2016	77,86017	0,00719			6		
8	15.03.2016	78,4673	0,007798			7		
9	16.03.2016	79,53792	0,013644			8		
10	17.03.2016	78,77008	-0,00965			9		
11	18.03.2016	78,1393	-0,00801			10		
12	21.03.2016	78,36426	0,002879			11		
13	22.03.2016	78,42145	0,00073			12		
14	23.03.2016	78,68001	0,003297			13		
15	24.03.2016	79,09274	0,005246			14		
16	28.03.2016	79,59696	0,006375			15		
17	29.03.2016	81,36991	0,022274			16		
18	30.03.2016	80,1331	-0,0152			17		
19	31.03.2016	79,60039	-0,00665			18		
20	01.04.2016	80,90997	0,016452			19		
21	04.04.2016	78,40695	-0,03094			20		
22	05.04.2016	78,12113	-0,00365			21		
23	06.04.2016	79,10169	0,012552			22		
24	07.04.2016	78,9963	-0,00133			23		
25	08.04.2016	76,84869	-0,02719			24		

Рисунок 9 – Расчёт значения VAR для массива данных компании Linkel



L	M	N	O	P	Q	R	S
Date	Close	Returns	Mean	0,001817	N	VaR(90)	-0,01352
07.03.2016	75,432				1		
08.03.2016	75,62658	0,002579	Standard Deviation	0,011969	2	VaR(95)	-0,01787
09.03.2016	76,80722	0,015612			3		
10.03.2016	76,724	-0,00108			4	VaR(99)	-0,02603
11.03.2016	78,27168	0,020172			5		
14.03.2016	78,66879	0,005073			6		
15.03.2016	79,28125	0,007785			7		
16.03.2016	80,41777	0,014335			8		
17.03.2016	79,6404	-0,00967			9		
18.03.2016	80,00324	0,004556			10		
21.03.2016	80,34493	0,004271			11		
22.03.2016	80,68698	0,004257			12		
23.03.2016	80,95026	0,003263			13		
24.03.2016	81,37216	0,005212			14		
28.03.2016	81,88816	0,006341			15		
29.03.2016	83,70934	0,02224			16		
30.03.2016	82,72721	-0,01173			17		
31.03.2016	82,34992	-0,00456			18		
01.04.2016	83,8209	0,017863			19		
04.04.2016	81,34056	-0,02959			20		
05.04.2016	81,15653	-0,00226			21		
06.04.2016	82,28924	0,013957			22		
07.04.2016	82,29368	5,4E-05			23		
08.04.2016	80,16757	-0,02584			24		

Рисунок 10 – Расчёт значения VAR, для массива данных компании Greenhouse



V	W	X	Y	Z	AA	AB	AC
Date	Close	Returns	Mean	0,001807	N	VaR(90)	-0,01353
07.03.2016	76,46302				1		
08.03.2016	76,65904	0,002564	Standard Deviation	0,011969	2	VaR(95)	-0,01788
09.03.2016	77,85458	0,015596			3		
10.03.2016	77,76899	-0,0011			4	VaR(99)	-0,02604
11.03.2016	79,3365	0,020156			5		
14.03.2016	79,73776	0,005058			6		
15.03.2016	80,3573	0,00777			7		
16.03.2016	81,50796	0,014319			8		
17.03.2016	80,7188	-0,00968			9		
18.03.2016	81,08529	0,00454			10		
21.03.2016	81,43033	0,004255			11		
22.03.2016	81,77573	0,004242			12		
23.03.2016	82,0413	0,003248			13		
24.03.2016	82,46762	0,005196			14		
28.03.2016	82,98929	0,006326			15		
29.03.2016	84,83365	0,022224			16		
30.03.2016	83,83704	-0,01175			17		
31.03.2016	83,45341	-0,00458			18		
01.04.2016	84,9428	0,017847			19		
04.04.2016	82,42801	-0,02961			20		
05.04.2016	82,24026	-0,00228			21		
06.04.2016	83,38684	0,013942			22		
07.04.2016	83,39007	3,88E-05			23		
08.04.2016	81,2344	-0,02585			24		

Рисунок 11– Расчёт значения VAR, для массива данных компании Rosedim

Пусть в задаче $x = -0{,}021(2{,}1\%)$, и на основании формулы вычисления функции распределения имеем $P1(-0{,}021) = 0{,}05$, $P2(-0{,}021) = 0{,}0375$, $P3(-0{,}021) = 0{,}037344$. Пороговое значение для функции VAR, принятого равным $r_0 = 0{,}04$. Ограничение задачи выполняется для стратегий 2 и 3, и решением в чистых стратегиях является вложение в акции компании Greenhouse (Рисунок 12-14).

C	D
Returns	P1(x)
	0,002083
-0,05638	0,004167
-0,04497	0,00625
-0,04474	0,008333
-0,03996	0,010417
-0,0331	0,0125
-0,03303	0,014583
-0,03291	0,016667
-0,03024	0,01875
-0,02922	0,020833
-0,02804	0,022917
-0,02775	0,025
-0,02649	0,027083
-0,02607	0,029167
-0,02539	0,03125
-0,02476	0,033333
-0,02433	0,035417
-0,02289	0,0375
-0,02208	0,039583
-0,02189	0,041667
-0,02137	0,04375
-0,0212	0,045833
-0,02116	0,047917
-0,02077	0,05

Рисунок 12 – Предельное значение функции VAR для массива данных компании Linkel

N	O
Returns	P2(x)
	0,002083
-0,05584	0,004167
-0,04453	0,00625
-0,04432	0,008333
-0,03954	0,010417
-0,03256	0,0125
-0,03255	0,014583
-0,03243	0,016667
-0,02959	0,01875
-0,02749	0,020833
-0,02714	0,022917
-0,02584	0,025
-0,02546	0,027083
-0,02474	0,029167
-0,02375	0,03125
-0,02227	0,033333
-0,02162	0,035417
-0,02076	0,0375
-0,02074	0,039583
-0,0203	0,041667
-0,02003	0,04375
-0,01972	0,045833
-0,01912	0,047917
-0,01876	0,05

Рисунок 13 – Предельное значение функции VAR для массива данных компании Greenhouse

X	Y
Returns	P3(x)
	0,002075
-0,05585	0,004149
-0,04454	0,006224
-0,04433	0,008299
-0,03954	0,010373
-0,03257	0,012448
-0,03256	0,014523
-0,03244	0,016598
-0,02961	0,018672
-0,0275	0,020747
-0,02715	0,022822
-0,02585	0,024896
-0,02547	0,026971
-0,02476	0,029046
-0,02377	0,03112
-0,02229	0,033195
-0,02163	0,03527
-0,02076	0,037344
-0,02074	0,039419
-0,0203	0,041494
-0,02004	0,043568
-0,01973	0,045643
-0,01913	0,047718
-0,01878	0,049793

Рисунок 14 – Предельное значение функции VAR для массива данных компании Rosedim

Теперь нужно найти решение задачи в смешанных стратегиях. Для этого $x = -0{,}021, r_0 = 0{,}0374$. Целевая функция будет иметь вид:

$$0{,}001246\, p_1 + 0{,}001817\, p_2 + 0{,}001807\, p_3 \to \max$$

Ограничения будут иметь вид:

$$\begin{cases} 0{,}05 p_1 + 0{,}0375 p_2 + 0{,}037344 p_3 \le 0{,}0374 \\ p_1 + p_2 + p_3 = 1 \end{cases}$$

$$p_i \ge 0, i = 1{,}2{,}3$$

Для решения этой задачи можно использовать надстройку «Поиск решений» в Excel (Рисунок 15).

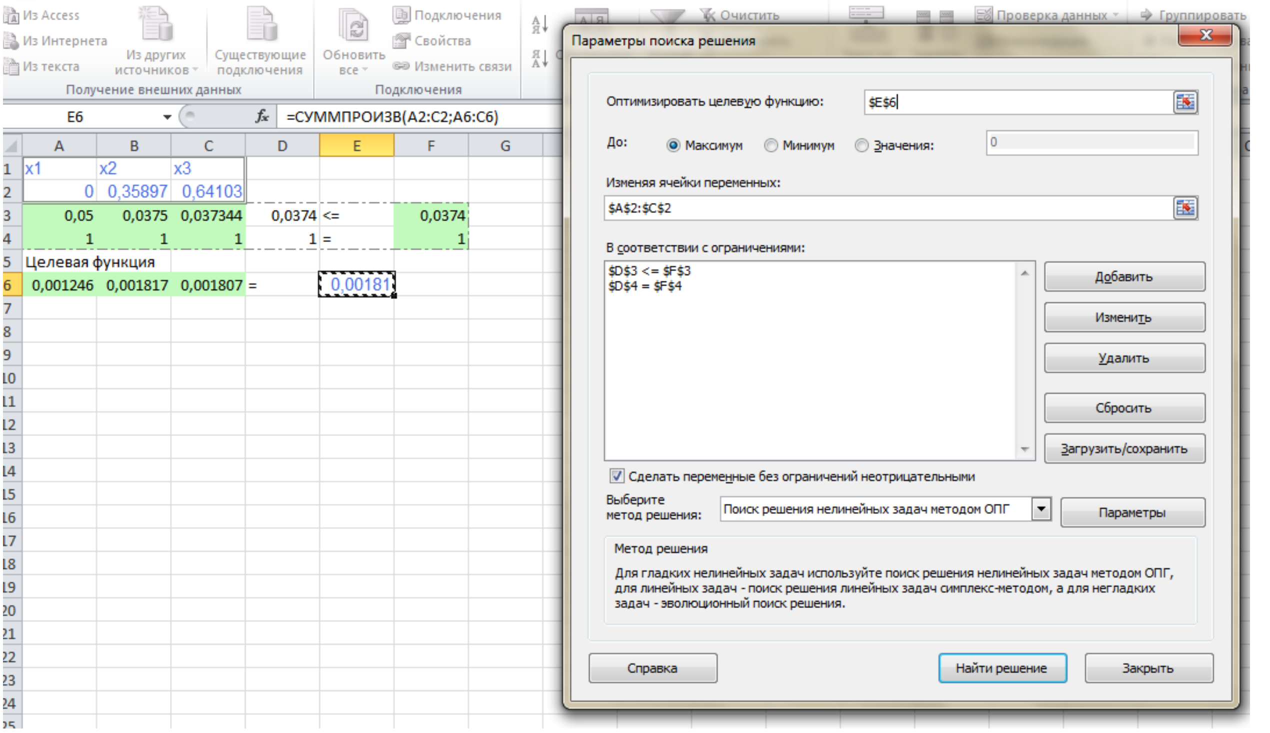


Рисунок 15 – Решение задачи

В результате получается оптимальная смешанная стратегия вида $p^0 = (0;0{,}35897;0{,}64103)$, следовательно, решением является вложение инвестиций в компанию Greenhouse и Rosedim.

В силу того, что в рассмотренной задаче есть 2 ограничения по VAR, также по долям, то в результате, при любом количестве ценных бумаг, всегда, будут получаться 2 ненулевые компоненты [21]. Это является особенностью рассматриваемой задачи [22]. Если же поставить цель диверсификации портфеля, тогда нужно добавить еще какое-либо дополнительное ограничение по долям, что даст возможность получить значение $x_1 \neq 0$. К примеру, пусть дополнительное ограничение рассмотренной задачи имеет вид $x_1 \geq 0{,}003$

Рассмотренная задача примет вид:

$$0{,}001246\ p_1 + 0{,}001817\ p_2 + 0{,}001807\ p_3 \to \max$$

Ограничения будут иметь вид:

$$\begin{cases} 0{,}05 p_1 + 0{,}0375 p_2 + 0{,}037344 p_3 \leq 0{,}0374 \\ p_1 + p_2 + p_3 = 1 \\ p_1 \geq 0{,}003 \end{cases}$$

$$p_i \geq 0, i = 1,2,3$$

Для решения этой задачи можно использовать надстройку «Поиск решений» в Excel (Рисунок 16).

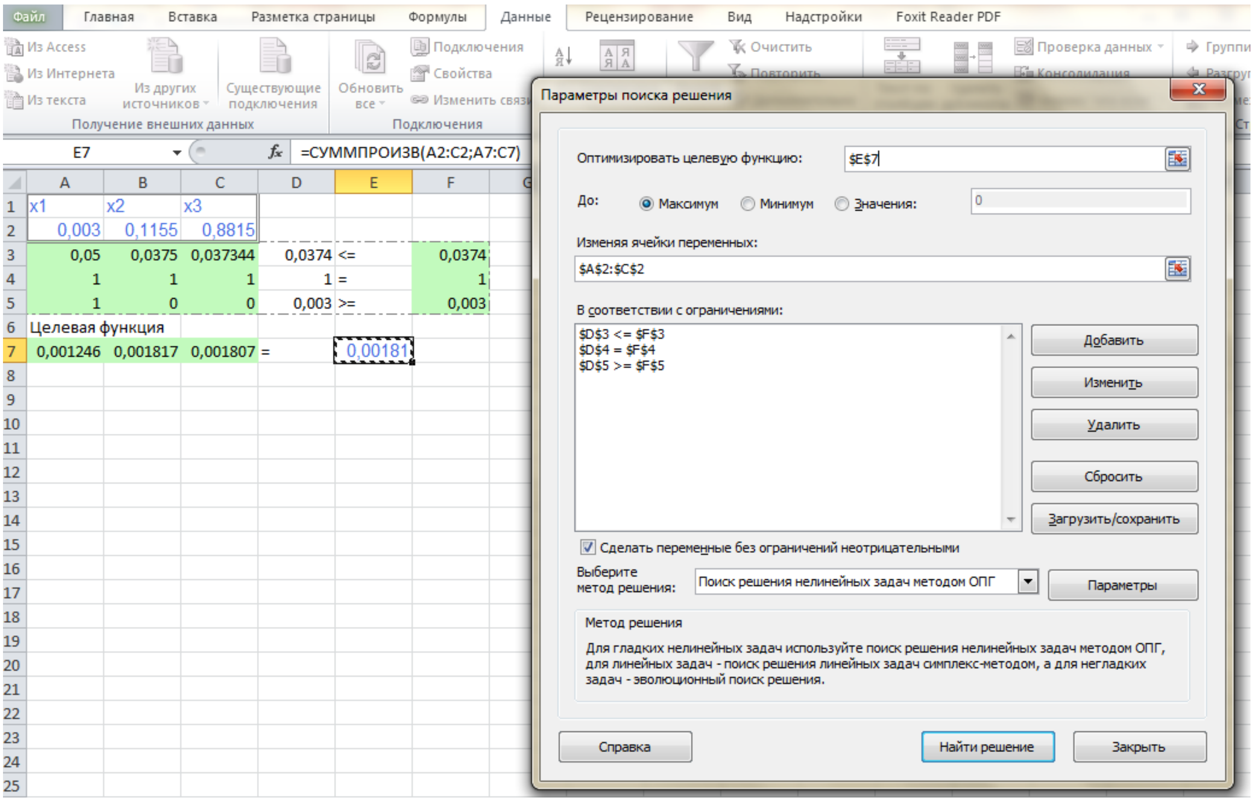


Рисунок 16 – Решение задачи с дополнительным условием

В результате получается полностью диверсифицированный портфель, то есть во все x будут вкладываться средства [32]. Оптимальная смешанная стратегия имеет вид $p^0 = (0{,}003;0{,}1155;0{,}8815)$, следовательно, решением является вложение инвестиций во все компании [29].

Применение данного критерия VAR эффективно для нахождения оптимальных стратегий инвестирования.

Выводы к главе 2:

– в представленной главе, были рассмотрены основные свойства процедур построения портфеля инвестиций. Первый пункт главы дал возможность рассмотреть классификацию портфелей ценных бумаг. Каждый из этих портфелей обладает своими преимуществами и недостатками, которые проявляются в зависимости от текущей ситуации, в которой оказывается инвестор;

– далее, детально была рассмотрена процедура построения оптимального портфеля инвестиций на акциях максимального независимого множества с коэффициентом Шарпа. С помощью данного коэффициента, с высокой степенью точности можно спрогнозировать насколько эффективно и результативно проводятся операции с инвестиционным портфелем. Фундаментальным понятием, связанным с коэффициентом Шарпа является соотношение доходности и риска. Риск, в данном случае, интерпретируется с помощью стандартного отклонения;

– в практической части работы было рассмотрено решение двухкритериальной задачи инвестирования с помощью функции VaR. Основными данными, с которыми велась работа, являются котировки трех компаний, в течении нескольких лет. Проведен поэтапны расчет доходности каждой компании, на основе данного критерия сделан вывод об оптимальном портфеле, с наибольшей эффективностью.

Заключение

Подводя итог, для формирования портфеля инвестиций были использованы рассматриваемые процедуры и исследованы их свойства: устойчивость к изменению вероятностной модели и зависимость ошибок от объема наблюдений. Были вычислены различные критерии для отбора активов: коэффициент Шарпа, знаковая мера, корреляция Пирсона. Последние два значения были подсчитаны для построения графа рынка. Затем в данном графе было найдено максимальное независимое множество, целью которого является сохранение в портфеле небольшого числа активов. Таким образом, если инвестор хочет сократить количество акций в портфеле, то доходность и риск финансового инструмента будут приближены к значениям величин классического портфеля. После применения процедур для смоделированных наблюдений и данных рынка Индии, было сделано несколько выводов. Во-первых, при увеличении объема выборки, уменьшается число ошибок первого и второго рода, а также общая доля ошибок. При использовании корреляции Пирсона для отбора акций в граф рынка выявлена неустойчивость данной меры к изменению вероятностной модели. Число ошибок у многомерного нормального распределения меньше, чем у распределения Стьюдента при отборе акций с помощью корреляции Пирсона. При исследовании вероятности совпадения знаков наблюдается, что ошибки первого и второго рода не изменяются в своих значениях при различных распределениях. Поэтому данная мера связи является устойчивой к изменению вероятностной модели. В следствие, в процессе исследования свойств процедур для построения портфеля инвестиций я научился применять различные способы формирования портфелей, моделировать данные, рассчитывать различные виды ошибок. Подводя итог, выполнен ряд задач для исследования свойств процедур построения портфелей, и поставленная цель была достигнута.

Список используемой литературы

1. Аксимов Ю.Д. Математика. Выпуск 7. Теория вероятностей. Опорный конспект. – СПб.: Изд. СПбГТУ, 2000, 2002.

2. Аксимов Ю.Д., Хватов Ю.А. Примерная учебная программа дисциплины «Математика» и научно-методические основы ее разработки. / Под ред. В.Н. Козлова. – СПб.: Изд. СПбГПУ, 2003.

3. Багманов А.Т., Толстых И.В. Математика. Избранные задачи. Абитуриенту 2002 для самостоятельной работы. – СПб.: Изд. СПбГТУ, 2001.

4. Балабанов И.Т. Финансовый менеджмент. М.: Финансы и статистика, 1997.

5. Биета Ф., Смилянец П. Теория игр и финансовые рынки // Вопросы экономики. 2007 №10.

6. Бланк И.А. Основы финансового менеджмента. Киев: Ника-Центр, 1999.

7. Горелик В.А., Золотова Т.В. Принцип оптимальности «математическое ожидание -VAR» и его применение в задачах фондового инвестирования// Управление развитием крупномасштабных систем: Труды 12 международной конференции. М.: ИПУ РАН, 2019. С.148-155.

8. Горелик В.А., Золотова Т.В. Управление риском в стохастических задачах фондового инвестирования // Управление развитием крупномасштабных систем: Труды 12 международной конференции. М.: ИПУ РАН, 2019. С.303-311.

9. Горяйнова А.Д., Контаева Е.А. Оценка эффективности вложений с помощью коэффициента Шарпа // Сборник научных трудов по материалам I Международной научно-практической конференции. НОО «Профессиональная наука». 2016. С. 11-15.

10. Гринева Е.В., Матвеев М.Г. Выбор портфеля инвестиций // Современная экономика: проблемы и решения. 2012. № 5 (29). С. 140-149.

11. Губко М.В., Новиков Д.А. – Теория игр в управлении организационными системами. (2-е издание) 1970 г. Москва. Теория игр с примерами из математической экономики. Мулен Э. Издательство: Москва, Мир, 1985 г.

12. Красс М.С. Математика для экономических специальностей. М.: Дело, 2002

13. Крушевский А.В. – Теория игр. 1977 г.

14. Лабскер Л.Г., Бабешко Л.О. Игровые методы в управлении экономикой и бизнесом: Учебное пособие. — М.: Дело, 2001.

15. Лившиц В.Н., Лившиц С.В. Макроэкономические теории, реальные инвестиции и государственная российская экономическая политика. — М.: Институт системного анализа РАН, 2005.

16. Максимов Ю.Д. Математика. Выпуск 8. Математическая статистика. Опорный конспект. – СПб.: Изд. СПбГТУ, 2002, 97 с.

17. Максимов Ю.Д. Математика. Выпуск 9. Теория вероятностей. Детализированный конспект. Справочник по одномерным непрерывным распределениям. – СПб.: Изд. СПбГПУ, 2002.

18. Максимов Ю.Д., Куклин Б.А., Хватов Ю.А. Математика. Выпуск 6. Теория вероятностей. Контрольные задания с образцами решений. Тесты. Конспект – справочник. – СПб.: Изд. СПбГТУ, 2000, 2002.

19. Марковиц Г. Отраслевые экономико-математические модели. Анализ производственных процессов. М., 1967.

20. Мулен Э. Теория игр с примерами из экономики. М.: Мир, 1985.

21. Олемской И.В., Фирюлина О.С. Алгоритм поиска максимального независимого множества//Вестник Санкт-Петербургского университета. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2014. № 1. С. 79-89.

22. Подсыпанин Е.В. Математика. Учебное пособие для поступающих в вузы. / Под ред. В.В. Глухова. – СПб.6 Изд. Северная звезда, 2003.

23. Серова Е.Г., Шипицын А.В. Эффективность инвестиций в портфеле ценных бумаг // Вестник Белгородского государственного технологического университета им. В.Г. Шухова. 2012.№ 2. С. 99-103.

24. Теория игр для экономистов-кибернетиков. Воробьев Н.Н. Издательство: Москва, Наука, 1985 г.

25. Теория игр и экономическое поведение. Дж. фон Нейман, О. Моргенштерн. Перев. с англ. под ред. и с доб. Н.Н. Воробьева. Главная редакция физико-математической литературы, изд-ва «Наука», 1970.

26. Теория игр и экономическое поведение. Нейман фон Дж., Моргенштерн О. Издательство: Москва, Наука, 1970 г.

27. Теория игр. Петросян Л.А., Зенкевич Н.А., Семина Е.А. Издательство: Москва, Высшая школа, 1998 г.

28. Теория игр. Оуэн Г. Издательство: Москва, Мир, 1971.

29. Тихомиров С.Р., Подсыпанин Е.В., Преображенский С.П., Хватов Ю.А. Математика для поступающих в вузы. /Под ред. Тихомирова С Р и Подсыпанина Е.В. – СПб.: Изд. Нестор, 2000–2004.

30. Тюняева М.Н., Свойства процедур построения портфеля инвестиций https://otherreferats.allbest.ru/bank/01181007_0.html // Нижний Новгород, 2019

31. Хвостова, Анна Михайловна диссертация кандидата экономических наук : 08.00.13 Москва, 2004 https://viewer.rsl.ru/ru/rsl01002662173

32. Электронный учебник по высшей математике для дистанционного образования. Технические направления. Авторы: Хватов Ю.А., Максимов Ю.Д., Лобкова Н.И., Романов М.Ф., Рыжаков И.Ю.и др. – СПб.: СПбГТУ, 2000.

33. Gupta A.K., Varga T., Bodnar T., Elliptically Contoured Models in Statistics and Portfolio Theory, Springer-Verlag // New York, 2013, 321 pp.

34. Kalyagin V. A., Koldanov A. P., Petr A. Koldanov. Robust identification in random variables networks // Journal of Statistical Planning and Inference. 2017. Vol. 181. No. Feb . P. 30-40.

35. Kalyagin, V.A., Koldanov, A.P., Koldanov, P.A., Pardalos, P.M., Zamaraev, V.A., 2014. Measures of uncertainty in market network analysis // Physica A 413 (1), P.59-70.

36. Koldanov P., Kalyagin V. A., Koldanov A. P., Zamaraev V. A. Market Graph and Markowitz Model // Optimization oi Science and Engineering (In Honor of the 60th Birthday of Panos M. Pardalos). NY : Springer Science, Business Media, 2014. Ch. 15. P. 301-313.

37. Matlabdocumentation//URL:https://www.mathworks.com/help/matlab /index.html