Е.В. Бахусова

ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ НЕЧЁТКИХ МНОЖЕСТВ

Тольятти
Издательство ТГУ
2013

Министерство образования и науки Российской Федерации
Тольяттинский государственный университет
Институт математики, физики и информационных технологий
Кафедра «Информатика и вычислительная техника»

Е.В. Бахусова

ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ НЕЧЁТКИХ МНОЖЕСТВ

Учебно-методическое пособие

Тольятти
Издательство ТГУ
2013

УДК 681.3.068
ББК 32.973.26
Б30

Рецензенты:
канд. физ.-мат. наук, доц. Тольяттинского филиала
Российского государственного университета *Е.А. Русанов*;
канд. пед. наук, доц. Тольяттинского государственного
университета *С.В. Лаптева*.

Б30 Бахусова, Е.В. Элементы теории нечетких множеств : учеб.-метод. пособие / Е.В. Бахусова. – Тольятти : Изд-во ТГУ, 2013. – 116 с. : обл.

В учебно-методическом пособии изложен математический аппарат теории нечёткиx множеств и нечёткой логики, приведены примеры решения задач и упражнения по нечёткой математике, представлены математические модели и алгоритмы системы нечёткого вывода, метода анализа иерархий, задач принятия решений на основе нечёткой математики.

Предназначено студентам направлений подготовки 080800.62 «Прикладная информатика», 230700.62 «Прикладная информатика» (профиль «Прикладная информатика в социальной сфере»), преподавателям математики для чтения лекций и ведения практических занятий по дисциплине «Элементы теории нечётких множеств».

УДК 681.3.068
ББК 32.973.26

Рекомендовано к изданию научно-методическим советом Тольяттинского государственного университета.

ВВЕДЕНИЕ

Изучение дисциплины «Элементы теории нечётких множеств» согласно учебному плану предусматривает следующее распределение часов по видам учебных занятий:

Название специальности (направления)	4 семестр				
	Лекц. (час.)	Лаб. (час.)	Прак. (час.)	Формы контроля	
080800.62 «Прикладная информатика» (бакалавр)	16		16	Зачёт	

Целью дисциплины является формирование у студентов

- современного математического мышления;
- способности решать разнообразные информационные и управленческие проблемы с эффективным использованием аналитических и вычислительных методов, основанных на теории нечётких множеств;
- навыка нечёткого моделирования в описании процессов принятия решений.

Задачи дисциплины – дать студентам представление:

1) об истории зарождения и развития нечёткой математики, о многочисленных приложениях в разных сферах деятельности человека;
2) сущности теории нечетких множеств и нечёткой логики;
3) связи нечёткой и классической математики, преимуществах нечёткой математики по сравнению с классической;
4) содержании методов нечеткой математики в решении задач принятия решений;
5) нечётком моделировании;
6) программных пакетах и системах, основанных на теории нечёткой математики.

Тема 1. ИСТОРИЯ РАЗВИТИЯ ТЕОРИИ И ПРИЛОЖЕНИЙ НЕЧЕТКОЙ МАТЕМАТИКИ

Учебные вопросы

1. История зарождения и развития нечёткой математики.
2. Промышленные приложения нечёткой математики в Японии, Европе, Америке.
3. Особенности развития и применения нечёткой математики в России.

Изучив данную тему, студент должен знать:

- историю зарождения нечёткой математики;
- имена основателей теории нечётких множеств и нечёткой логики;
- приложение нечёткой математики в промышленности и различных областях знания;
- достижения отечественных учёных в развитии и применении нечёткой математики.

Методические рекомендации по изучению темы

При освоении темы необходимо:

- изучить содержание темы 1 «История развития теории и приложений нечёткой математики»;
- акцентировать внимание на связи между классической и нечёткой математикой: на особенностях развития и применения нечёткой математики в Японии, Америке, странах Европы и России;
- ответить на контрольные вопросы.

Теория нечеткой математики позволяет описывать качественные, неточные понятия и наши знания об окружающем мире, а также оперировать этими знаниями с целью получения новой информации. Основанные на этой теории методы построения информационных моделей существенно расширяют традиционные области применения компьютеров и образуют самостоятельное направление научно-прикладных исследований, которое получило специальное название – *нечеткое моделирование*. Нечеткое моделирование оказывается особенно полезным, когда в описании технических систем и бизнес-процессов присутствует неопределенность, которая затрудняет или даже исключает применение точных количественных методов и подходов.

В области управления техническими системами нечеткое моделирование позволяет получать более адекватные результаты по сравнению с результатами, которые основываются на использовании традиционных аналитических моделей и алгоритмов управления. Нечеткая логика в качестве основы для реализации методов нечеткого управления более естественно описывает характер человеческого мышления и ход рассуждений, чем традиционные формально-логические системы. Именно поэтому изучение и использование математических средств для представления нечеткой исходной информации позволяет строить модели, которые наиболее адекватно отражают различные аспекты неопределенности, постоянно присутствующей в окружающей нас реальности.

Первой публикацией по теории нечетких множеств принято считать работу профессора из Университета Беркли (штат Калифорния, США) Лотфи Заде, которая относится к 1965 году. Понятие нечеткого множества в смысле Л. Заде положило начало новому импульсу в области математических и прикладных исследований, в рамках которых за короткий срок были предложены нечеткие обобщения всех основных теоретико-множественных и формально-логических понятий.

Основанием для создания новой теории послужил спор профессора Л. Заде со своим другом о том, чья из жен привлекательнее. К единому мнению они так и не пришли. Это вынудило ученого сформировать концепцию, которая выражает нечеткие понятия типа «привлекательность» в числовой форме.

В отличие от стандартной логики, которая сводится к двум бинарным состояниям (1/0, Да/Нет, Истина/Ложь и т. д.), *нечеткая логика* позволяет определять промежуточные значения между стандартными оценками. К нечетким оценкам (в отличие от стандартных оценок «привлекательная» или «непривлекательная», «вправо» или «влево», «да» или «нет») можно отнести оценки типа «более привлекательная», «менее привлекательная», «скорее да, чем нет», «наверное, да», «немного вправо», «резко влево». С помощью соответствующего математического аппарата стало возможным выразить перечисленные оценки математически и впоследствии обработать с помощью ЭВМ. Таким образом, удалось максимально приблизить механизм компьютерной обработки и анализа данных к человеческому мышлению.

Важным достижением теории нечеткой математики является введение так называемых *нечетких чисел* – нечетких подмножеств специализированного вида, соответствующих высказываниям типа «значение переменной примерно равно а». В работах Д. Дюбуа (Dubois D.) и Х. Прада (Prade H.) был предложен набор операций над нечеткими числами, которые сводятся к алгебраическим операциям с обычными числами при задании определенного интервала достоверности (уровня принадлежности), получивший впоследствии название «мягкие вычисления».

Параллельно с разработкой теоретических основ новой науки Л. Заде прорабатывал различные возможности ее практического применения. В 1973 году ему удалось показать, что нечеткая логика может быть положена в основу нового поколения интеллектуальных систем управления. Наиболее значимыми из работ в этой области следует отметить публикации Л. Заде, Д. Дюбуа и Х. Прада по теории нечеткой меры и меры возможности, М. Сугено (M. Sugeno) по нечеткому выводу и нечеткому интегралу, Дж. Беждека (J. Bezdek) по нечеткой кластеризации и распознаванию образов, Р. Ягера (R. Yager) по нечеткой логике.

Однако, несмотря на большое количество теоретических работ, прикладное значение нечетких моделей долгое время ставилось под сомнение.

Первые реализации нечетких моделей в промышленности относятся к середине 1970-х гг. Именно в этот период в Великобритании Эбрахим Мамдани (Ebrahim Mamdani) использовал нечеткую логику для управления парогенератором. Решение этой задачи обычными методами было сопряжено с целым рядом трудностей вычислительного характера. Предложенный Э. Мамдани алгоритм, основанный на *нечетком логическом выводе*, позволил избежать чрезмерно большого объема вычислений и был по достоинству оценен специалистами. В этот же период небольшая предприимчивая фирма из Дании применила принципы нечёткого моделирования для усовершенствования системы управления доменной печью для обжига цемента.

В начале 1980-х гг. нечеткая математика получила свое дальнейшее развитие в целом ряде программных средств поддержки принятия решений и в экспертных системах анализа данных. Хотя многие из этих программных инструментариев так и не вышли за пределы научно-исследовательских лабораторий и институтов, в ходе их разработки были получены важные эмпирические результаты по моделированию с помощью нечеткой логики процессов человеческих рассуждений и принятия решений.

В конце 80-х годов Бартоломеем Коско была доказана теорема о нечеткой аппроксимации (Fuzzy Approximation Theorem), подтвердившая полноту нечеткой логики, согласно которой любая математическая система может быть аппроксимирована системой, основанной на нечеткой логике. Была исследована взаимосвязь нечеткой логики и теории нейронных сетей. Известная книга Бартоломея Коско «Fuzzy Thinking» («Нечеткое мышление») начинается со слов: «Однажды утром я проснулся и понял, что наука идет не туда». Далее автор показывает, что два тысячелетия назад человечество сделало роковую ошибку, заложив в фундамент науки не зыбкую поэтику ранних восточных философий, а выхолощенную двоичную логику Аристотеля. И с тех пор классическая «черно-белая» бинарная логика, зажатая шорами закона «исключенного третьего», все более отдаляется от реального многоцветного мира, где нет ничего абсолютного, а все самое интересное происходит в туманной области между «да» и «нет».

В работах М. Земанковой (Maria Zemankova-Leech) и А. Кандела (Abraham Kandel) были заложены основы теории нечетких систем управления базами данных, способных оперировать неточными данными, обрабатывать нечетко заданные запросы, а также использовать качественные параметры наряду с количественными. Была разработана нечеткая алгебра – необычная наука, позволяющая использовать при вычислениях как точные, так и приблизительные значения переменных. Широкое распространение получили изобретенные Б. Коско нечеткие когнитивные модели (Fuzzy Cognitive Maps), на которых базируется большинство современных систем динамического моделирования в области финансов, политики и бизнеса.

После первых промышленных приложений в Европе Япония за короткий период времени вышла на первое место в мире по количеству устройств и механизмов, в которых были реализованы нечеткие технологии. Появление микропроцессоров и микроконтроллеров инициировало резкое увеличение бытовых приборов и промышленных установок с алгоритмами управления на основе нечеткой логики. Сегодня их можно найти в стиральных машинах и видеокамерах, цехах заводов, моторных отсеках автомобилей, в системах управления складскими роботами и боевыми вертолетами.

К 1990 году появилось около 40 патентов, относящихся к нечеткой логике (из них 30 японских). Сорок восемь японских компаний образовали совместную лабораторию LIFE (Laboratory for International Fuzzy Engineering – Международная лаборатория разработок, основанных на нечеткой логике), японское правительство финансировало пятилетнюю программу по нечеткой логике, включавшую 19 различных проектов – от систем оценки глобального загрязнения атмосферы и предсказания землетрясений до автоматизированных систем управления заводскими цехами и складами.

Имеется целый ряд обстоятельств, которые объясняют причины столь впечатляющей популярности нечеткой логики в Японии. Во-первых, нечеткая логика поддерживает разработку быстрого прототипа технического устройства с последующим усложнением его функциональности, что характерно для стиля работы японских инженеров. Во-вторых, нечеткая логическая модель более проста для понимания, чем аналогичная математическая модель на основе дифференциальных или разностных уравнений. В-третьих, нечеткие модели оказываются более простыми для своей аппаратной реализации по сравнению с классическими алгоритмами управления техническими системами.

Пионером в применении нечеткой логики в бытовых изделиях выступила фирма Matsushita. В феврале 1991 года она анонсировала первую «интеллектуальную» стиральную машину, в системе управления которой сочетались нечеткая логика и нейронная сеть. Автоматически определяя нечеткие входные факторы (объем и качество белья, уровень загрязненности, тип порошка и т. д.), стиральная машина безошибочно выбирала оптимальный режим стирки из 3800 возможных вариантов. А спустя пару лет использование приемов нечеткой логики в производстве японской бытовой техники стало повсеместным. Например, компании Fishel и Sanyo производят нечеткие логические видеокамеры, в которых применяется нечеткая фокусировка и стабилизация изображения.

Компания Mitsubishi выпустила первый в мире автомобиль, где управление каждой системой основано на нечеткой логике. Mitsubishi также производит «нечеткий» кондиционер, который управляет изменением температуры и влажности в помещении согласно человеческому восприятию степени комфорта. Компания Nissan разработала «нечеткую» автоматическую трансмиссию и «нечеткую» противоскользящую тормозную систему и реализовала их в одном из своих автомобилей повышенной комфортности.

Японский город Сендай имеет метрополитен с 16 станциями, который управляется нечетким компьютером. При этом нечеткий компьютер регулирует процессы ускорения и торможения поездов метро, делая на 70% меньше ошибок, чем соответствующий человек-оператор.

На фондовом рынке Токио используется несколько трейдерных систем, основанных на нечеткой логике, которые превосходят по скоростным и динамическим характеристикам традиционные информационные системы. В Японии имеются также «нечеткие» системы управления уличным движением, «нечеткие» тостеры, «нечеткие» рисовые печи, «нечеткие» пылесосы и многие другие бытовые и технические устройства.

Только в начале 1990-х гг. ведущие европейские корпорации поняли, что они практически уступили Японии одну из ключевых современных технологий. С этого времени были предприняты серьезные усилия наверстать упущенные возможности в этой области. Именно в этот период в Европе появилось более 200 видов промышленных изделий и устройств, в которых были реализованы нечеткие модели. Это были главным образом бытовые приборы, которые характеризовались более эффективной экономией электроэнергии и водопотребления без дополнительного увеличения цены изделия. Другие промышленные приложения относились к автоматизации производства, включая управление химическими и биологическими процессами, управление станками и сборочными конвейерами, а также различные интеллектуальные датчики.

Поскольку этим приложениям сопутствовал коммерческий успех, в настоящее время нечеткая логика рассматривается как стандартный метод проектирования, она получила широкое признание среди инженеров и проектировщиков. Известны приложения из области теле- и радиосвязи, направленные на устранение влияния отраженных ТВ-сигналов и радиосигналов. Предложены и реализованы программные алгоритмы для сетевой маршрутизации и распознавания речи на основе нечеткой логики. В настоящее время в США развернуты серьезные исследования по нейросетевым технологиям. Все эксперты соглашаются с тем, что комбинация нейронных сетей и нечеткой логики будет следующим серьезным шагом в дальнейшем прогрессе высоких технологий.

Лишь в конце 90-х гг. со стороны российской научной элиты появился интерес к исследованиям в области экономики, бизнеса и финансов, построенным на принципах нечетких множеств. Начиная с 1995 года на российском рынке стали появляться программные продукты для персональных компьютеров, рассчитанные на их массовое использование. Именно с этого момента большинство повседневных задач, в которых возникает необходимость приближенного задания условий и, соответственно, получения столь же приближенных результатов, стало возможным быстро и с приемлемой точностью решать, не прибегая к помощи программистов. Математический аппарат, предоставляющий такие возможности, детально описанный в специальной литературе и в полной мере реализованный в программных пакетах, спрятан «за кадром», что делает процесс освоения этих инструментов более доступным и интуитивно понятным для любого пользователя.

В октябре 2002 года состоялась международная конференция в Минске, где целая секция была посвящена нечетко-множественным исследованиям в экономике. С 17 по 20 июня 2004 года в Санкт-Петербурге проводилась международная научно-практическая конференция «Нечеткие множества и мягкие вычисления в экономике и финансах», на которой было представлено свыше 60 докладов ученых более чем из 20 стран мира. Результаты конференции показали, что в мировом научном сообществе накоплен огромный запас знаний по применению нечетких множеств и мягких вычислений в экономических и финансовых задачах. Однако степень реализации этих знаний невелика, поскольку в глазах большинства лиц, принимающих решения о финансировании соответствующих проектов, они были и остаются некоторой экзотикой. Более того, в силу относительной новизны направления многие работники, от которых зависит судьба соответствующих проектов, не имеют даже слабого представления о том, что такое нечеткие множества и мягкие вычисления.

Большим достижением для России в области нечетко-множественного анализа и моделирования можно считать то, что программные продукты, содержащие элементы нечеткой логики, созданные отечественными учеными, уже начали продаваться. Так, Пенсионный фонд РФ приобрел решение по оптимизации фондового портфеля от Siemens Business Services Russia. Научную основу этого решения составили разработки доктора экономических наук А.О. Недосекина, являющегося главным консультантом и бизнес-аналитиком департамента программных проектов вышеуказанной организации.

Стоит отметить российских ученых, внесших огромный вклад в развитие данного научного направления в последние годы: А.О. Недосекин, А. Овсянко, К.И. Воронов, О.Б. Максимов, Г.С. Павлов, С.Н. Фролов.

Важным для России шагом в развитии данной науки можно считать регистрацию российского представительства в лаборатории международных нечетко-множественных исследований в области экономики IFEL Rus (International Fuzzy Economics Lab) со штаб-квартирой в Москве и регистрацию лабораторией своего собственного печатного издания научно-практической направленности – журнала «Банки и риски». Первый номер журнала «Банки и риски» вышел в 2005 году. Журнал просуществовал 3 года, было выпущено 10 номеров.

В мае 2002 года Институт проблем управления РАН и компания Softline при участии компании MathWorks провели первую открытую Всероссийскую научную конференцию «Проектирование научных и инженерных приложений в среде MATLAB». Работа конференции проходила по следующим направлениям:

- MATLAB – система инженерных и научных расчетов;
- применение пакетов прикладных программ для решения практических задач;
- моделирование и исследование динамических систем;
- нейронные сети и их приложения;
- имитационное моделирование. Simulink и Stateflow;
- MATLAB в Интернете и образовании.

Было принято решение проводить конференцию регулярно. Конференция «Проектирование научных и инженерных приложений в среде MATLAB» проводилась в 2004, 2007, 2009 и 2011 гг. В настоящее время практически каждая научная конференция по математике и информатике имеет секцию, на которой освещаются вопросы развития и применения нечёткой математики.

Однако некоторые современные ученые до сих пор считают теорию нечеткой логики шаманством и лженаукой, а ее авторов – баламутами и возмутителями спокойствия.

Контрольные вопросы

1. Что вы раньше слышали или читали о нечёткой математике?
2. Как соотносятся между собой классическая и нечёткая математика?
3. В чём принципиальное отличие нечёткой математики от классической?
4. Каковы сферы приложений нечёткой математики?
5. Какие синонимы используются для прилагательного «нечёткий» в контексте изучаемой дисциплины?
6. Разделяете ли вы мнение Бартоломея Коско о том, что «два тысячелетия назад человечество сделало роковую ошибку, заложив в фундамент науки не зыбкую поэтику ранних восточных философий, а выхолощенную двоичную логику Аристотеля»?

7. В чём вы видите причины того, что некоторые современные ученые до сих пор считают нечёткую математику шаманством и лженаукой, а ее авторов – баламутами и возмутителями спокойствия?
8. Почему Россия отстала от передовых стран мира в развитии и приложениях нечёткой математики?
9. В каких областях деятельности имеют место приложения нечёткой математики в России?

Тема 2. НЕЧЁТКИЕ МНОЖЕСТВА

Учебные вопросы

1. Определение нечеткого множества.
2. Прямые и косвенные способы задания функций принадлежности.
3. Основные характеристики нечёткого множества: носитель, высота, ядро, точки перехода, границы нечёткого множества, множество α-уровня, ближайшее чёткое множество.
4. Виды функций принадлежности: треугольные, трапециевидные, S-образные и Z-образные.
5. Сравнение нечётких множеств.
6. Операции над нечёткими множествами.
7. Расстояние между нечёткими множествами.
8. Индексы нечёткости.

Изучив данную тему, студент должен:

знать

- определение нечёткого множества;
- способы задания нечёткого множества;
- определения характеристик нечёткого множества;
- виды функций принадлежности;
- определение равенства и включения нечётких множеств;
- определение максминных операций объединения, пересечения, разности, симметрической разности, дополнения нечётких множеств;
- формулы для определения линейного и квадратичного расстояния между множествами, формулы относительного расстояния между множествами;
- формулы для вычисления индексов нечёткости;

уметь

- задавать конечные и бесконечные нечёткие множества, используя прямые и косвенные методы;
- находить характеристики нечёткого множества;
- задавать аналитически и графически нечёткие множества, характеризуемые различными видами функций принадлежности;
- сравнивать нечёткие множества;

- доказывать свойства операций над нечёткими множествами;
- находить расстояние между множествами и индексы нечёткости;

понимать

- смысл операций над нечёткими множествами;
- смысл понятий «расстояние между множествами», «относительное расстояние между множествами», «индекс нечёткости».

Методические рекомендации по изучению темы

При освоении темы необходимо:

- изучить учебный материал по теме 2 «Нечёткие множества»;
- акцентировать внимание на особенности определения нечёткого множества, его основных характеристик, операций по сравнению с соответствующими определениями для обычных множеств;
- после изучения каждого параграфа темы 2 выполнить упражнения;
- ответить на контрольные вопросы после каждого параграфа.

§ 2.1. Определение и основные характеристики нечёткого множества

Пусть X – универсальное множество (универсум), то есть множество, из элементов которого образованы все остальные множества, рассматриваемые в данном классе задач, A – подмножество множества X ($A \subseteq$ X).

Характеристическая функция обычного множества A – это функция $\mu_A(x)$, значения которой указывают, является ли $x \in$ X элементом множества A:

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 1, x \in A \\ 0, x \notin A \end{cases}.$$

Особенностью этой функции является бинарный характер ее значений.

С точки зрения характеристической функции нечеткие множества есть естественное обобщение обычных множеств, когда мы отказываемся от бинарного характера этой функции и предполагаем, что она может принимать любые значения на отрезке [0,1]. В теории нечетких множеств характеристическая функция называется *функцией принадлежности*, а ее значение $\mu_A(x)$ – *степенью* *принадлежности элемента x нечеткому множеству A.* Функция принадлежности указывает степень (или уровень) принадлежности элемента x множеству A.

Дадим строгое определение нечёткого множества.

Определение 2.1. Пусть X – универсальное множество, множество A – подмножество X ($A \subseteq$ X). Нечетким множеством A называется совокупность упорядоченных пар вида: $\langle x, \mu_A(x) \rangle$, где $\boldsymbol{x} \in$X, а $\mu_A(x)$ – функция принадлежности, которая ставит в соответствие каждому элементу $x \in$X некоторое действительное число из отрезка [0,1]. При этом значение $\mu_A(x) = 1$ для некоторого $x \in$X означает, что элемент x определённо принадлежит нечёткому множеству A, а значение $\mu_A(x) = 0$ означает, что элемент x определённо не принадлежит нечёткому множеству A. Остальные значения функции $\mu_A(x)$ из интервала (0,1) означают, что элемент x принадлежит множеству A в той или иной степени.

Нечёткие множества, как и обычные множества, будем обозначать большими буквами латинского алфавита: A, B, C, D...

Чтобы задать нечёткое множество, необходимо:

1) задать универсальное множество X;
2) задать функцию принадлежности $\mu_A(x)$ каждого элемента $x \in$X нечёткому множеству A.

Пример 2.1. Пусть X = $\{a, b, c, d, e\}$, $A = \{\langle a; 0\rangle, \langle b; 0{,}1\rangle, \langle c; 0{,}5\rangle, \langle d; 0{,}9\rangle, \langle \mathrm{e}, 1\rangle\}$.

Будем говорить, что элемент a не принадлежит множеству A, элемент b принадлежит ему в малой степени, элемент c более или менее принадлежит, элемент d принадлежит в значительной степени, e является элементом множества A.

Пример 2.2. Пусть универсум X есть множество действительных чисел (X = R), нечеткое множество A обозначает «множество чисел, близких к 10». Функцию принадлежности $\mu_A(x)$ можно задать следующей формулой:

$$\mu_A(x) = (1 + |x - 10|^m)^{-1},$$

где $m \in N$ (рис. 1).

Показатель степени m выбирается в зависимости от степени близости чисел к 10. Например, для описания «множества чисел, очень близких к 10» можно положить $m = 4$ (на рисунке соответствующий график изображён пунктирной линией); для «множества чисел не очень далеких от 10» $m = 1$ (на рисунке соответствующий график изображён сплошной линией).

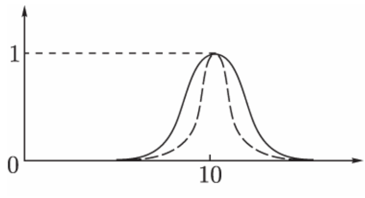

Рис. 1. Функции принадлежности нечётких множеств «числа, очень близкие к 10» и «числа, не очень далёкие от 10»

Пример 2.3. Пусть X = {0, 1, 2, .., 10}. Нечеткое множество *A* – «несколько» можно определить следующим образом:

$$A = \{<3; 0{,}5>, <4; 0{,}8>, <5; 1>, <6; 1>, <7; 0{,}8>, <8; 0{,}5>\}.$$

Пример 2.4. Пусть X = [1,100] соответствует понятию «возраст», тогда нечеткое множество *A* «молодой» может быть определено с помощью функции принадлежности $\mu_A(x)$:

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 1, x \in [1,25] \\ \dfrac{1}{1+\left(\dfrac{x-25}{5}\right)^2}, x \geq 25 \end{cases}. \tag{2.1}$$

Из всех нечётких множеств выделим два частных случая – *пустое множество и чёткое множество.*

Пример 2.5. Нечёткое множество *A* называется пустым, если все элементы этого множества имеют значения функции принадлежности, равные 0, то есть пустое множество – это множество, не содержащее элементов. Пустое множество обозначается символом Ø.

Пример 2.6. Универсум X (чёткое множество) является частным случаем нечёткого множества. Каждый элемент $x \in$ X имеет значение функции принадлежности, равное 1.

Опишем способы задания нечётких множеств. Функция принадлежности $\mu_A(x)$ элемента *x* нечёткому множеству *A* – это субъективная мера того, насколько *x* соответствует понятию, смысл которого формализуется нечётким множеством *A*. Под субъективной мерой понимается определяемая опросом экспертов степень соответствия элемента x понятию, формализуемому нечётким множеством $\boldsymbol{A}$.

В приведенных выше примерах использованы *прямые методы*, когда эксперт либо просто задает для каждого $x \in X$ значение $\mu_A(x)$, либо определяет функцию принадлежности в виде графика или аналитически. Как правило, прямые методы задания функции принадлежности используются для измеримых понятий, таких как скорость, время, расстояние, давление, температура и т. д.

Во многих задачах при характеристике объекта можно выделить набор признаков и для каждого из них определить полярные значения, соответствующие значениям функции принадлежности 0 или 1.

Пример 2.7. Рассмотрим задачу распознавания лиц людей. В табл. 2.1 представлены признаки для описания лица человека и соответствующие им полярные значения. В данном примере в качестве универсального множества выступает множество признаков $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9\}$. Для конкретного лица A эксперт, исходя из приведенной шкалы, задает для каждого $x \in X$ значение $\mu_A(x)$, формируя нечёткое множество:

$$A = \{<x_1; \mu_A(x_1)>, <x_2; \mu_A(x_2)>, ..., <x_9; \mu_A(x_9)>\}.$$

Таблица 2.1

Элемент множества X	Признак	Полярное значение, соответствующее значению функции принадлежности	
		0	1
$\boldsymbol{x}_1$	Высота лба	низкий	широкий
$\boldsymbol{x}_2$	Профиль носа	курносый	горбатый
$\boldsymbol{x}_3$	Длина носа	короткий	длинный
$\boldsymbol{x}_4$	Разрез глаз	узкие	широкие
$\boldsymbol{x}_5$	Цвет глаз	светлые	темные
$\boldsymbol{x}_6$	Форма подбородка	остроконечный	квадратный
$\boldsymbol{x}_7$	Толщина губ	тонкие	толстые
$\boldsymbol{x}_8$	Цвет лица	темный	светлый
$\boldsymbol{x}_9$	Очертание лица	овальное	квадратное

При прямых методах используются также *групповые прямые методы*, когда, например, группе из m экспертов надо решить вопрос о принадлежности элемента $x \in X$ нечёткому множеству A. Обозначим через n_1 число экспертов, решивших этот вопрос утвердительно, а через n_2 – отрицательно ($n_1 + n_2 = m$). Тогда значение функции принадлежности для элемента x находится по формуле

$$\mu_A(x) = \frac{n_1}{n_1 + n_2}\,. \tag{2.2}$$

Это схема самая простая, но и самая грубая.

Косвенные методы определения значений функции принадлежности используются в случаях, когда нет элементарных измеримых свойств, через которые определяется интересующее нас нечеткое множество. Как правило, это методы *количественных парных сравнений степеней принадлежности*. Такая схема допускает и одного эксперта.

Результатом опроса эксперта является матрица $M_{n\times n} = (a_{ij})$ (2.3), $i, j = 1, 2 \ldots n$, где n – число точек, в которых сравниваются значения степени принадлежности.

$$M := \begin{pmatrix} a11 & a12 & a13 & .. & a1n \\ a21 & a22 & a23 & .. & a2n \\ a31 & a32 & a33 & .. & a3n \\ .. & .. & .. & .. & .. \\ an1 & an2 & an3 & .. & ann \end{pmatrix}. \tag{2.3}$$

Число a_{ij} показывает, во сколько раз, по мнению эксперта, степень принадлежности $\mu_A(x_i)$ больше $\mu_A(x_j)$. При этом эксперт оперирует понятиями, представленными в табл. 2.2.

Таблица 2.2

Смысл сравнения $\mu_A(x_i)$ *и* $\mu_A(x_j)$	m_{ij}
$\mu_A(x_i)$ равна $\mu_A(x_j)$	1
$\mu_A(x_i)$ немного больше $\mu_A(x_j)$	3
$\mu_A(x_i)$ больше $\mu_A(x_j)$	5
$\mu_A(x_i)$ заметно больше $\mu_A(x_j)$	7
$\mu_A(x_i)$ намного больше $\mu_A(x_j)$	9
Значения, промежуточные по степени между перечисленными	2, 4, 6, 8

Элементы, симметричные относительно диагонали матрицы, должны удовлетворять требованию

$$a_{ij} = \frac{1}{a_{ij}}. \qquad (2.4)$$

Это условие означает, что если степень принадлежности элемента x_i в a_{ij} раз сильнее степени принадлежности элемента x_j, то степень принадлежности элемента x_j должна быть в $\frac{1}{a_{ij}}$ раз сильнее степени принадлежности элемента x_i. Задача построения функции принадлежности сводится к нахождению собственного вектора B матрицы $M_{n\times n}$, соответствующего наибольшему собственному значению матрицы, то есть вектора, который является решением уравнения

$$M_{n\times n} \cdot B = B \cdot \lambda_{\max}, \qquad (2.5)$$

где $\lambda_{\max}$ – наибольшее собственное значение матрицы.

Опишем построение вектора B. Сначала найдём компоненты вектора B' по формуле (2.6), то есть каждая компонента b_1, b_2, ..., b_n вектора B' вычисляется из элементов соответствующей строки матрицы $M_{n\times n}$ как среднее геометрическое элементов строки матрицы: по первой строке матрицы находится компонента b_1, по второй строке – компонента b_2,..., по n строке – компонента b_n.

$$b_i = \sqrt[n]{a_{i1} \cdot a_{i2} \cdot \ldots \cdot a_{in}}, \qquad (2.6)$$

где $i = 1, ..., n$.

Затем вектор $B' = \{b_1, b_2, ..., b_n\}$ нормализуется по формуле (2.7). Для этого вычисляется сумма компонент вектора $\sum_{i=1}^{n} b_i$. Затем каждая компонента b_1, b_2, ..., b_n делится на найденную сумму. Таким образом получаем вектор B матрицы M:

$$B = \left\{ \frac{b_1}{\sum_{i=1}^{n} b_i}; \frac{b_2}{\sum_{i=1}^{n} b_i}; \frac{b_n}{\sum_{i=1}^{n} b_i} \right\}. \qquad (2.7)$$

Компоненты вектора B и есть искомые значения функции принадлежности элементов нечёткого множества.

Пример 2.8. Пусть на множестве $X = \{x_1, x_2, x_3\}$ задано нечёткое отношение A. В результате опроса экспертов построена матрица парных сравнений M:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0{,}1 & 0{,}7 \\ 0{,}9 & 1 & 0{,}2 \\ 0{,}3 & 0{,}4 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Найдём компоненты вектора B' по формуле (2.6)

$$b_1 = \sqrt[3]{1 \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}7} = 0{,}000343;$$

$$b_2 = \sqrt[3]{0{,}9 \cdot 1 \cdot 0{,}2} = 0{,}562642;$$

$$b_3 = \sqrt[3]{0{,}3 \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}2} = 0{,}288449.$$

$$B' = \{0.000343,\ 0.562642,\ 0.288449\}.$$

2. Нормализуем вектор B' по формуле (2.7)

$$b_1 + b_2 + b_3 = 0{,}851434;$$

$$B = \{0;\ 0.66;\ 0.34\}.$$

Таким образом, нечёткое множество A имеет вид:

$$A = \{\langle x_1;\ 0\rangle,\ \langle x_2;\ 0{,}66\rangle,\ \langle x_3;\ 0{,}34\rangle\}.$$

Рассмотрим особенности построения функции принадлежности на непрерывном множестве.

Выбор вида функции принадлежности и её параметров определяется в большей степени опытом и интуицией экспертов.

В ряде случаев исследователь может задать самостоятельно функцию, исходя из личного опыта. В более сложных и ответственных случаях задание функции принадлежности нечётких множеств выполняется с привлечением группы экспертов с последующей обработкой их оценок.

Введём определения *основных характеристик нечётких множеств*.

Пусть A – нечеткое множество с элементами из универсального множества X.

Определение 2.2. Величина $h = \sup\limits_{x \in X} \mu_A(x)$ называется *высотой нечеткого множества A*.

Определение 2.3. Нечеткое множество А *нормально*, если его высота равна 1, т. е. $\sup\limits_{x \in X} \mu_A(x) = 1$.

Определение 2.4. Если $\sup\limits_{x \in X} \mu_A(x) < 1$, то нечеткое множество называется *субнормальным*.

Непустое субнормальное множество можно нормализовать по формуле

$$\mu'_A(x) = \frac{\mu_A(x)}{\sup\limits_{x \in X} \mu_A(x)}.$$

Определение 2.5. Нечеткое множество *A унимодально*, если $\mu_A(x) = 1$ только на одном элементе $x \in X$. Этот элемент x называют модальным значением или модой нечёткого множества.

Определение 2.6. *Носителем нечеткого множества A* является обычное подмножество A_S множества X, которое содержит те и только те элементы X, для которых значения функции принадлежности нечёткого множества A не равны 0, т. е. $A_s = \{x | x \in X, \mu_A(x) > 0\}$.

Определение 2.7. Нечёткое множество называется *конечным*, если его носитель конечное множество. В противном случае множество называется *бесконечным*.

Определение 2.8. Множество T_A, состоящее из элементов $x \in X$, для которых $\mu_A(x) = 0{,}5$, называется *точками перехода нечёткого множества A,* т. е. $T_A = \{x | x \in X, \mu_A(x) = 0{,}5\}$.

Определение 2.9. *Границами G_A нечёткого множества A* называются такие элементы универсума X, для которых значения функции принадлежности $\mu_A(x)$ отличны от 0 и 1, т. е. $G_A = \{x | x \in X, 0 < \mu_A(x) < 1\}$.

Определение 2.10. *Ядром нечёткого множества A* называют обычное множество A_1, элементы которого удовлетворяют условию $A_1 = \{x | x \in X | \mu_A(x) = 1\}$.

Определение 2.11. *Множеством уровня* α *(α-срезом) нечеткого множества A* называется четкое подмножество универсального множества X, определяемое по формуле $A_\alpha = \{x | x \in X | \mu_A(x) \geq \alpha\}$, где $\alpha \in [0,1]$.

Множество строгого α*-уровня* определяется в виде $A_\alpha = \{x | x \in X | \mu_A(x) > \alpha\}$. В частности, носителем нечеткого множества A является множество элементов, для которых $\mu_A(x) > 0$.

Определение 2.12. *Четкое множество A^*, ближайшее к нечеткому множеству A,* состоит из тех элементов универсума, для которых значения функции принадлежности $\mu_A(x) > 0{,}5$, а элементы, у которых $\mu_A(x) = 0{,}5$, могут принадлежать или могут не принадлежать множеству A^*, то есть характеристическая функция множества A^* определяется следующим образом:

$$\mu_A * (x) = \begin{cases} 0, & \text{если } \mu_A(x) < 0{,}5 \\ 1, & \text{если } \mu_A(x) > 0{,}5 \\ 0 \text{ или } 1, & \text{если } \mu_A(x) = 0{,}5 \end{cases}$$

Пример 2.9

1. Найдём характеристики нечёткого множества из примера 2.3:

– *высота* множества $h = 1$;
– *множество нормально*;
– множество *не является унимодальным*;
– *носитель* $A_S = \{3, 4, 5, 6, 7, 8\}$;
– *точки перехода* $T_A = \{3, 8\}$;
– *границы* $G_A = \{3, 4, 7, 8\}$; $A_1 = \{5, 6\}$;
– множество конечное.

2. Найдём множество уровня 0,6 ($\alpha = 0{,}6$): $A_{0,6} = \{4, 5, 6, 7\}$.

3. Найдём чёткое множество A^*, ближайшее к A: $A^* = \{4, 5, 6, 7\}$.

Заметим, что в качестве A^* можно взять множество $A^* = \{3, 4, 5, 6, 7, 8\}$.

Упражнения

1. Задайте следующие нечёткие множества:

a) «описание лица знакомого человека», используя табл. 2.1 (пример 2.7);
b) «действительные числа, приближённо равные друг другу на универсуме $X = \{-2, -1, 1, 2\}$, используя метод количественных парных сравнений (табл. 2.2);
c) «средняя скорость автомобиля»;
d) «горячий напиток»;
e) «высокий уровень доходов».

2. Найдите основные характеристики множеств из упражнения 1.

3. Приведите 5 примеров нечётких множеств, обладающих следующими характеристиками:
a) A_1 субнормально;
b) A_2 унимодально и бесконечно;
c) A_3 не содержит точек перехода и нормальное;
d) A_4 конечно и не содержит ядро;
e) A_5 бесконечно и не содержит границы.

4. Для каждого нечёткого множества из упражнения 1 постройте множества уровня 0,4.

5. Для каждого нечёткого множества из упражнения 1 постройте ближайшее чёткое множество.

Контрольные вопросы

1. В чём принципиальная разница между обычным множеством и нечётким множеством?
2. Можно ли задать обычное множество как нечёткое?
3. В чём разница между описанием конечного и бесконечного нечёткого множества?
4. Какие характеристики нечётких множеств имеют смысл для обычных множеств? Ответ аргументируйте.

§ 2.2. Виды функций принадлежности

Формальное определение нечёткого множества не накладывает никаких ограничений на выбор конкретной функции принадлежности для его представления. Однако на практике удобно использовать те из них, которые имеют аналитическое представление в виде некоторой простой математической функции. Рассмотрим кусочно-линейные функции принадлежности. В качестве универсума выберем множество действительных чисел ($X = R$).

Треугольная функция принадлежности в общем случае может быть задана аналитическим выражением:

$$f\Delta(x; a, b, c) = \begin{cases} 0, \text{ если } x \le a \\ \dfrac{x - a}{b - a}, \text{ если } a < x \le b \\ \dfrac{c - x}{c - b}, \text{ если } b < x \le c \\ 0, \text{ если } c < x \end{cases}, \qquad (2.8)$$

где a, b, c – некоторые числовые параметры, принимающие произвольные действительные значения и упорядоченные отношением $a \le b \le$ с.

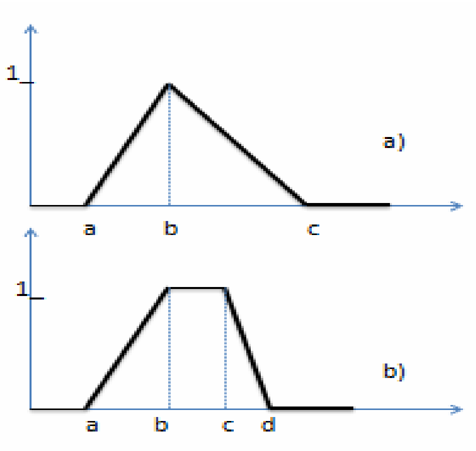

Рис. 2. Графики функций принадлежности треугольной (a), трапециевидной (b)

Параметры a и c характеризуют основание треугольника, а параметр b – его вершину (рис. 2). Эта функция принадлежности порождает нормальное выпуклое унимодальное нечёткое множество с носителем – интервалом (a, c), границами (a, c)\{b}, ядром {b} и модой b.

Трапециевидная функция принадлежности в общем случае может быть задана следующим аналитическим выражением:

$$f_m(x; a, b, c, d) = \begin{cases} 0, \text{ если } x \le a \\ \dfrac{x - a}{b - a}, \text{ если } a < x \le b \\ \dfrac{d - x}{d - c}, \text{ если } c < x \le d \\ 0, \text{ если } d < x \end{cases}, \qquad (2.9)$$

где a, b, c, d – некоторые числовые параметры, принимающие произвольные действительные значения и упорядоченные отношением $a \leq b \leq c \leq d$.

Параметры a и d характеризуют нижнее основание трапеции, а параметры b и c верхнее основание трапеции (рис. 2). Эта функция принадлежности порождает нормальное выпуклое нечёткое множество с носителем – интервалом (a, d), границами $(a, b) \cup (c, d)$ и ядром $[b, c]$.

Эти функции используются для задания таких свойств множеств, которые характеризуются неопределённостью типа «приблизительно равно», «среднее значение», «расположен в интервале», «подобен объекту», «похож на предмет» и др. Они также служат для представления нечётких чисел и интервалов, которые будут рассмотрены ниже.

Z-образные и S-образные функции принадлежности также получили своё название по виду кривых, которые представляют их графики (рис. 3).

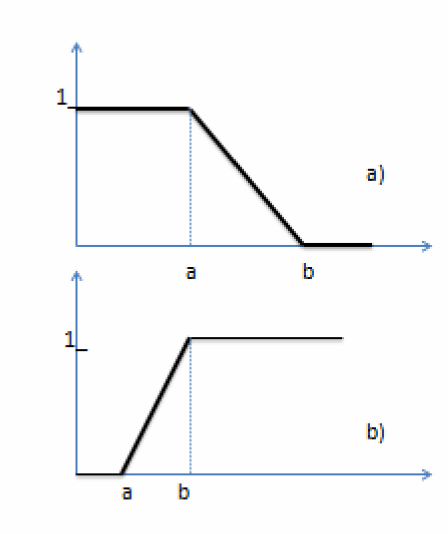

Рис. 3. Графики линейной Z-образной (a) и S-образной (b) функций принадлежности

Первая из функций этой группы называется *Z-образной* кривой или *сплайн-функцией* и в общем случае аналитически может быть задана следующим выражением:

$$f_Z(x; a, b) = \begin{cases} 1, \text{ если } x \le a \\ \dfrac{b - x}{b - a}, \text{ если } a < x < b \\ 0, \text{ если } b \le x \end{cases}, \tag{2.10}$$

где a и b – некоторые числовые параметры, принимающие произвольные действительные значения и упорядоченные отношением $a < b$. График этой функции для некоторого нечёткого множества A изображён на рис. 3,*a*.

Линейные Z-образные функции используются для представления таких нечётких множеств, которые характеризуются неопределённостью типа «низкое качество», «незначительная величина», «низкий уровень доходов или цен», «низкая процентная ставка».

Вторая из этих функций в общем случае может быть задана аналитически следующим выражением:

$$f_S(x; a, b) = \begin{cases} 0, \text{ если } x \le a \\ \dfrac{x - a}{b - a}, \text{ если } a < x < b \\ 1, \text{ если } b \le x \end{cases}, \tag{2.11}$$

где a и b – некоторые числовые параметры, принимающие произвольные действительные значения и упорядоченные отношением $a < b$. График этой функции для некоторого нечёткого множества A изображён на рис. 3,*b*.

Данные функции принадлежности порождают нормальные выпуклые нечёткие множества с границами (a, b).

Линейные *S*-образные функции используются для представления таких нечётких множеств, которые характеризуются неопределённостью типа «отличное качество», «значительная величина», «высокий уровень доходов и цен», «высокая норма прибыли», «высокое качество услуг».

Упражнения

1. Задайте нечёткие множества, характеризующиеся неопределённостью типа:

a) «отличное качество»;
b) «высокий уровень доходов и цен»;
c) «высокая норма прибыли»;
d) «приблизительно равно»;
e) «расположен в интервале»;
f) «низкое качество»;
g) «незначительная величина»;
h) «значительная величина»;
i) «средний уровень доходов и цен».

Задайте формулы функций принадлежности, постройте графики.

2. Найдите основные характеристики множеств, построенных в упражнении 1.

Контрольные вопросы

1. Как изменятся формулы и графики кусочно-линейных функций принадлежности, если их рассматривать на множестве N натуральных чисел? на множестве Z целых чисел?
2. К какому виду принадлежит график функции принадлежности универсума? пустого множества?
3. Приведите примеры нечёткого множества, функции принадлежности которых не относятся к треугольным, трапециевидным, S-образным и Z-образным функциям принадлежности.

§ 2.3. Сравнение нечётких множеств, операции над нечёткими множествами

То или иное нечёткое множество является обобщением классического множества. Поэтому любое определение той или иной операции над нечёткими множествами должно быть справедливо и в том случае, когда эти операции применяются к обычным множествам.

Сравнение нечётких множеств или выполнение над ними операций возможно только в том случае, когда эти нечёткие множества определены на одном и том же универсуме X.

Пусть нечёткие множества A и B заданы на универсуме X.

Определение 2.13. Говорят, *что A содержится в B*, если для всех элементов $x \in X$ выполняется условие $\mu_A(x) \le \mu_B(x)$. Обозначение: $A \subset B$. Иногда используют термин *«доминирование»*, т. е. в случае когда $A \subset B$, говорят, что B доминирует A.

Определение 2.14. A и B *равны*, если для всех элементов $x \in X$ выполняется условие $\mu_A(x) = \mu_B(x)$. Обозначение: $A = B$.

Пусть нечёткие множества A и B заданы на универсуме X.

Определение 2.15. Множество $\overline{A}$ является *дополнением* множества A, если для всех элементов $x \in X$ выполняется условие $\mu_{\overline{A}}(x) = 1 - \mu_A(x)$.

Определение 2.16. *Объединением нечётких множеств A* и *B* называется нечёткое множество $A \cup B$, функция принадлежности которого имеет вид: $\mu_{A \cup B}(x) = \max\{\mu_A(x), \mu_B(x)\}$ *(максминное объединение)*.

Определение 2.17. *Пересечением нечётких множеств A* и *B* называется нечёткое множество $A \cap B$, функция принадлежности которого имеет вид: $\mu_{A \cap B}(x) = \min\{\mu_A(x), \mu_B(x)\}$ *(максминное пересечение)*.

Пример 2.10. Пусть нечеткие множества A: «от 5 до 8» и B: «около 4» заданы своими функциями принадлежности на множестве действительных чисел R (рис. 4).

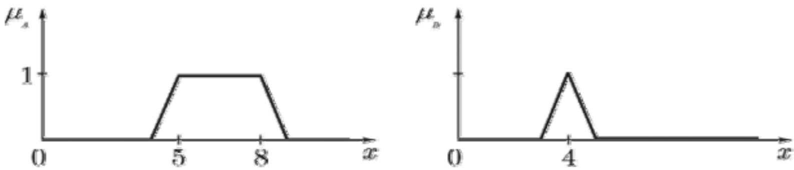

Рис. 4. Графики функций принадлежности множества A и множества B

Рис. 5. Графики функций принадлежности пересечения множеств A и B, объединения множеств A и B, дополнения множества B

Тогда, используя максминные операции пересечения и объединения и операцию дополнения, мы получим множества, изображенные на рис. 5.

Определение 2.18. *Разностью* нечётких множеств A и B называется нечёткое множество $A \backslash B$, функция принадлежности которого имеет вид: $\mu_{A/B}(x) = \min\{\mu_A(x), 1 - \mu_B(x)\}$.

Определение 2.19. *Симметрической разностью* нечётких множеств A и B называется нечёткое множество $A \Delta B$, функция принадлежности которого имеет вид:

$$\mu_{A \Delta B}(x) = \max\{\min\{\mu_A(x), 1 - \mu_B(x)\}; \min\{1 - \mu_B(x), \mu_A(x)\}\}.$$

Рассмотрим свойства максминных операций объединения и пересечения.

Пусть A, B, C – нечеткие множества, заданные на универсуме X. Тогда выполняются следующие свойства:

1) $\left.\begin{array}{l} A \cup B = B \cup A \\ A \cap B = B \cap A \end{array}\right\}$ *коммутативность* операций объединения и пересечения;

2) $\left.\begin{array}{l} (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C) \\ A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C \end{array}\right\}$ *ассоциативность* операций объединения и пересечения;

3) $\left.\begin{array}{l} A \cup A = A \\ A \cap A = A \end{array}\right\}$ *идемпотентность* операций объединения и пересечения (для граничных операций не выполняется);

4) $\left.\begin{array}{l} (A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C) \\ A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C) \end{array}\right\}$ *дистрибутивность* операций пересечения относительно объединения и объединения относительно пересечения (для граничных операций не выполняется);

5) $A \cup (A \cap B) = A \cap (A \cup B) = A$ – *поглощение* одного из нечётких множеств при операциях объединения и пересечения;

6) $A \cup \varnothing = A$; $A \cap \varnothing = \varnothing$; $A \cup X = X$; $A \cap X = A$ – *универсальная верхняя и нижняя границы* операций объединения и пересечения;

7) $\overline{\overline{A}} = A$ – *двойное дополнение* нечёткого множества;

8) $\left.\begin{array}{l} \overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B} \\ \overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B} \end{array}\right\}$ *законы де Моргана.*

Особенность рассматриваемых операций над нечёткими множествами состоит в том, что для них не выполняются закон исключённого третьего и закон тождества, то есть в общем случае имеют место неравенства:

$$A \cup \overline{A} \neq X,\ A \cap \overline{A} \neq [\varnothing].$$

Рассмотренные операции над нечёткими множествами получили наибольшее распространение при решении практических задач нечёткого моделирования, так как эти операции наиболее естественны для интуитивного представления неопределённости, связанной с использованием соответствующи[им логических связок «и», «или», «не» (табл. 2.3), а также удовлетворяют свойствам 1–8, что в максимальной степени приближает структуру нечётких множеств к булевой алгебре.

Таблица 2.3

Результаты операций над нечёткими множествами *A* и *B*	Свойства нечётких множеств, полученных в результате операций
$A \cup B = C$	Элементы нечёткого множества С обладают свойствами элементов нечёткого множества А **или** свойствами элементов нечёткого множества В
$A \cap B = Д$	Элементы нечёткого множества Д обладают свойствами элементов нечёткого множества А **и** свойствами элементов нечёткого множества В
$\overline{A}$	Элементы нечёткого множества $\overline{A}$ **не** обладают свойствами элементов нечёткого множества А
$A \backslash B = F$	Элементы нечёткого множества F обладают свойствами элементов нечёткого множества А, но **не** обладают свойствами элементов нечёткого множества В
$A \Delta B = G$	Элементы нечёткого множества G обладают свойствами элементов нечёткого множества А, но **не** обладают свойствами элементов нечёткого множества В **или** обладают свойствами элементов нечёткого множества В, но **не** обладают свойствами элементов нечёткого множества А

Максминные операции объединения и пересечения нечётких множеств не являются единственными. Рассмотрим альтернативные операции пересечения и объединения.

Определение 2.20. *Алгебраическим объединением* нечётких множеств A и B называется нечёткое множество $D = A + B$, заданное на том же универсуме X, функция принадлежности которого имеет вид: $\mu_D(x) = \mu_A(x) + \mu_B(x) - \mu_A(x)\,\mu_B(x)$.

Определение 2.21. *Алгебраическим пересечением* нечётких множеств A и B называется нечёткое множество $C = A \cdot B$, заданное на том же универсуме X, функция принадлежности которого имеет вид: $\mu_C(x) = \mu_A(x)\,\mu_B(x)$.

Пример 2.11. Пусть на универсуме X = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9} заданы нечёткие множества A и B: A – «небольшое натуральное число», A = {<1, 1>,<2, 1>, <3, 0.9>, <4, 0.8>, <5, 0.6>, <6, 0.5>, <7, 0.4>, <8, 0.2>, <9, 0.1>}, B – «натуральное число, приближённо равное 2», B = {<1, 0.5>, <2, 1>, <3, 0.6>, <4, 0.4>, <5, 0.2>, <6, 0>, <7, 0>, <8, 0>, <9, 0>}. Найдём множество D как результат операции алгебраического объединения и множество C как результат алгебраического пересечения. D = {<1, 1>, <2, 1>, <3, 0.96>, <4, 0.88>, <5, 0.68>, <6, 0.5>, <7, 0.4>, <8, 0.2>, <9, 0.1>}; C = {<1, 0.5>, <2, 1>, <3, 0.54>, <4, 0.32>, <5, 0.12>, <6, 0>, <7, 0>, <8, 0>, <9, 0>}.

Для операций алгебраического объединения и пересечения имеют место лишь некоторые из свойств, аналогичные свойствам теоретико-множественных операций.

Пусть A, B, C – нечеткие множества, заданные на универсуме X. Тогда выполняются следующие свойства:

9) $\left.\begin{aligned} A + B = B + A \\ A \cdot B = B \cdot A \end{aligned}\right\}$ – *коммутативность* операций алгебраического объединения и пересечения;

10) $\left.\begin{aligned} (A + B) + C = A + (B + C) \\ A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C \end{aligned}\right\}$ – *ассоциативность* операций алгебраического объединения и пересечения;

11) $A + \varnothing = A$; $A \cdot \varnothing = \varnothing$; $A + X = X$; $A \cdot X = A$ – *универсальная верхняя и нижняя границы* операций объединения и пересечения;

12) $\left.\begin{aligned} \overline{A + B} = \overline{A} + \overline{B} \\ \overline{A \cdot B} = \overline{A} \cdot \overline{B} \end{aligned}\right\}$ *законы де Моргана.*

Остальные законы не выполняются.

$$\left.\begin{array}{l} A + A \neq A \\ A \cdot A \neq A \end{array}\right\}$$ — *идемпотентность* операций алгебраического объединения и пересечения;

$$\left.\begin{array}{l} (A + B) \cdot C \neq (A \cdot C) + (B \cdot C) \\ A + (B \cdot C) \neq (A + B) \cdot (A + C) \end{array}\right\}$$ — *дистрибутивность* операций алгебраического пересечения относительно объединения и объединения относительно пересечения.

$A + (A \cdot B) \neq A$ — *поглощение* одного из нечётких множеств при операциях алгебраического объединения и пересечения $A \cdot (A + B) \neq A$.

$A \cdot \overline{A} \neq \varnothing$, $A + \overline{A} \neq X$ — закон исключённого третьего и закон тождества.

Определение 2.22. *Граничным объединением* нечётких множеств A и B называется нечёткое множество $D = A \oplus B$, заданное на том же универсуме X, функция принадлежности которого имеет вид: $\mu_D(x) = \min\{1, \mu_A(x) + \mu_B(x)\}$.

Определение 2.23. Граничным пересечением нечётких множеств A и B называется нечёткое множество $C = A \otimes B$, заданное на том же универсуме X, функция принадлежности которого имеет вид: $\mu_C(x) = \max\{0, \mu_A(x) + \mu_B(x) - 1\}$.

Пример 2.12. Для нечётких множеств A и B из примера 2.11 найдём множество D как результат операции граничного объединения $D = A \oplus B$ и множество C как результат граничного пересечения $C = A \otimes B$. D = {<1, 1>, <2, 1>, <3, 1>, <4, 1>, <5, 0.8>, <6, 0.5>, <7, 0.4>, <8, 0.2>, <9, 0.1>}; C = {<1, 0.5>,<2, 1>, <3, 0.5>, <4, 0.2>, <5, 0>, <6, 0>, <7, 0>, <8, 0>, <9, 0>}.

Замечание. В случае граничных операций не будут выполняться свойства идемпотентности и дистрибутивности.

Определим дополнительные операции над нечёткими множествами.

Определение 2.24. На основе операции алгебраического произведения определяется операция *возведения в степень* α нечеткого множества A, где α – положительное число. Нечеткое множество A^α определяется функцией принадлежности $\mu_{A^\alpha}(x) = \mu^\alpha{}_A(x)$.

Операцию возведения множества A в степень $\alpha = 2$ называют *концентрированием* и обозначают CON(A). Операцию возведения множества A в степень $\alpha = \frac{1}{2}$ называют *растяжением* и обозначают DIL(A). На рис. 6 представлены графики функций множества A, CON(A) = A^2, DIL(A) = $A^{0,5}$.

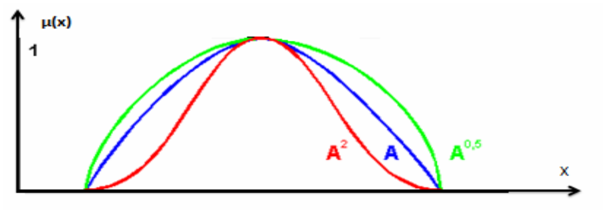

Рис. 6. Графики функций множества A, A^2, $A^{0,5}$

Применение операции концентрирования к нечёткому множеству означает уменьшение нечёткости или неопределённости в задании этого множества. Это может быть следствием поступления дополнительной информации, которая уточняет некоторые аспекты соответствующей предметной области. Напротив, применение операции растяжения означает усиление неопределённости в задании нечёткого множества, что может быть следствием либо потери информации, либо поступления информации о дополнительных факторах, не учитываемых в исходной нечёткой модели.

Операция возведения в степень нечёткого множества поможет задать функции принадлежности для нечётких множеств, в описании которых используются модификаторы типа «очень», «слегка» и т. д. (табл. 2.4).

Таблица 2.4

Результат операции	Свойства нечётких множеств, полученных в результате операций
A^n, где n>1	Элементы нечёткого множества A^n обладают свойствами элементов нечёткого множества A в меньшей степени («слегка», «умеренно» и т. д.)
A^n, где 0<n<1	Элементы нечёткого множества A^n обладают свойствами элементов нечёткого множества A в превосходной степени («очень», «слишком» и т. д.).

Определение 2.25. *Умножение множества на число*: если α – положительное число, такое, что $\alpha \max\limits_{x \in X} \mu_A(x) \le 1$, то нечеткое множество αA имеет функцию принадлежности: $\mu_{\alpha A}(x) = \alpha\mu_A(x)$.

Определение 2.26. Пусть $A_1, A_2, ..., A_n$ – нечеткие множества, заданные на универсальном множестве X, а $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ – неотрицательные числа, сумма которых равна 1: $\alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_n = 1$. *Выпуклой комбинацией* $A_1, A_2, ..., A_n$ называется нечеткое множество A с функцией принадлежности:

$$\mu_A(x_1, x_2, ..., x_n) = \alpha_1\mu_{A_1}(x_1) + \alpha_2\mu_{A_2}(x_2) + ... + \alpha_n\mu_{A_n}(x_n).$$

Упражнения

1. На множестве X = [0; 45] задайте бесконечные нечёткие множества A: «*высокая температура воздуха*», B: «*нормальная температура воздуха*», C: «*низкая температура воздуха*». Найдите:

1) максминное объединение множеств: $A \cup B$, $A \cup C$, $C \cup B$;
2) максминное пересечение множеств: $A \cap B$, $A \cap C$, $C \cap B$;
3) разность множеств: $A \setminus B$, $A \setminus C$, $C \setminus B$;
4) дополнение множеств: $\overline{A}$, $\overline{B}$, $\overline{C}$;
5) симметрическую разность множеств: $A \Delta B$, $C \Delta B$, $A \Delta C$;
6) алгебраическое объединение множеств: A+B, A+C, C+B;
7) алгебраическое пересечение множеств: $A \cdot B$, $C \cdot B$, $A \cdot C$;
8) граничное объединение множеств: $A \oplus B$, $C \oplus B$, $A \oplus C$;
9) граничное пересечение множеств: $A \otimes B$, $C \otimes B$, $A \otimes C$;
10) A^2, $A^{0,5}$;
11) 0,5A + 0,3B + 0,1C.

2. Докажите свойства 1–8 операций $\cup$ и $\cap$ нечётких множеств.

3. Докажите, что для максминных операций объединения и пересечения в общем случае не выполняются закон исключённого третьего и закон тождества: $A \cup \overline{A} \ne X$, $A \cap \overline{A} \ne \varnothing$.

4. Докажите свойства 9–12 операций алгебраического объединения и пересечения нечётких множеств.

5. Докажите, что для алгебраических операций объединения и пересечения в общем случае не выполняются законы *идемпотентности, дистрибутивности, поглощения, исключённого третьего тождества.*

6. Докажите, что для граничных операций объединения и пересечения в общем случае не выполняются свойства *идемпотентности и дистрибутивности*.

Контрольные вопросы

1. Как вы считаете, зачем вводятся альтернативные операции над нечёткими множествами?
2. Обычное множество является частным случаем нечёткого множества. Нет ли противоречия в том, что при максминных операциях объединения и пересечения нечётких множеств не выполняются законы тождества и исключённого третьего, которые имеют место при операциях объединения и пересечения обычных множеств?
3. Приведите пример нечёткого множества A, для которого имеют место неравенства $A \cup \overline{A} \neq X$, $A \cap \overline{A} \neq \varnothing$.

§ 2.4. Расстояние между нечёткими множествами. Индексы нечёткости

Пусть A и B – нечеткие множества, заданные на универсуме X. Введем понятие расстояния $\rho\,(A, B)$ между нечеткими множествами. При введении расстояния обычно предъявляются следующие требования:

1) $\rho(A, B) \geq 0$ – неотрицательность;
2) $\rho(A, B) = \rho(B, A)$ – симметричность;
3) $\rho(A, B) \leq \rho(A, C) + \rho(C, B)$;
4) $\rho(A, A) = 0$.

Определим расстояния между нечёткими множествами, используя разные подходы.

- *Расстояние Хемминга* (или *линейное расстояние*):

$$\rho(A, B) = \sum_{i=1}^{n} |\mu_A(x_i) - \mu_B(x_i)|, \quad \rho(A, B) \in [0, n]. \qquad (2.12)$$

- *Евклидово или квадратичное расстояние:*

$$\varepsilon(A, B) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (\mu_A(x_i) - \mu_B(x_i))^2}\,, \ \varepsilon(A, B) \in [0, \sqrt{n}\,]. \qquad (2.13)$$

• *Относительное расстояние Хемминга:*

$$\rho(A,B)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left|\mu_A(x_i)-\mu_B(x_i)\right|,\ \rho(A,\ B)\in[0,1]. \tag{2.14}$$

• *Относительное евклидово расстояние:*

$$\varepsilon(A,B)=\frac{1}{\sqrt{n}}\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(\mu_A(x_i)-\mu_B(x_i))^2},\ \varepsilon(A,\ B)\in[0,1]. \tag{2.15}$$

Расстояние Хемминга и квадратичное расстояние, в случае когда X бесконечно, определяются аналогично с условием сходимости соответствующих сумм, а именно:

• если X счетное, то

$$\rho(A,\ B)=\sum_{i=1}^{\infty}\left|\mu_A(x_i)-\mu_B(x_i)\right|; \tag{2.16}$$

$$\varepsilon(A,\ B)=\sqrt{\sum_{i=1}^{\infty}(\mu_A(x_i)-\mu_B(x_i))^2}; \tag{2.17}$$

• если X = R (множество действительных чисел), то

$$\rho(A,B)=\int_{-\infty}^{\infty}\left|\mu_A(x_i)-\mu_B(x_i)\right|dx; \tag{2.18}$$

$$\varepsilon(A,B)=\sqrt{\int_{-\infty}^{\infty}(\mu_A(x_i)-\mu_B(x_i))^2\,dx}. \tag{2.19}$$

Здесь приведены два наиболее часто встречающихся определения расстояния между нечёткими множествами. Разумеется, для нечетких множеств можно ввести и другие определения расстояния.

Перейдем к *индексам нечеткости* или *показателям размытости* нечетких множеств.

Пусть элементы $x \in$ X нечёткого множества A обладают общим характеристическим свойством S этого нечёткого множества в той или иной степени, что проявляется в значении функции принадлежности $\mu_A(x)$. Если элемент $\boldsymbol{x}$ обладает характеристическим свойством S лишь в частной мере, т. е. $0 < \mu_A(x) < 1$, то внутренняя неопределенность, двусмысленность объекта $\boldsymbol{x}$ в отношении свойства S проявляется в том, что он, хотя и в разной степени, принадлежит сразу двум нечётким множествам: нечёткому множеству A, элементы которого обладают свойством S, и нечёткому множеству $\overline{A}$, элементы которого не обладают свойством S. Эта двусмысленность максимальна, когда степени принадлежности элемента x обоим множествам равны, т. е. $\mu_A(x) = \mu_{\overline{A}}(x) = 0{,}5$, и минимальна, когда объект принадлежит только одному классу, т. е. либо $\mu_A(x) = 1$ и $\mu_{\overline{A}}(x) = 0$, либо $\mu_A(x) = 0$ и $\mu_{\overline{A}}(x) = 1$.

В общем случае показатель размытости нечеткого множества можно определить в виде функции $d(A)$ со значениями во множестве положительных действительных чисел $\boldsymbol{R}+$, удовлетворяющего условиям:

1) $d(A) = 0$ тогда и только тогда, когда A – обычное множество;
2) $d(A)$ максимально тогда и только тогда, когда $\mu_A(x) = 0{,}5$ для всех $x \in X$;
3) $d(\mathrm{A}) = d(B)$, если A является *заострением* B, т. е.
   $\mu_A(x) \le \mu_B(x)$ при $\mu_B(x) < 0{,}5$;
   $\mu_A(x) \ge \mu_B(x)$ при $\mu_B(x) > 0{,}5$;
   $\mu_A(x)$ – любое при $\mu_B(x) = 0{,}5$;
4) $d(A) = \mathrm{d}(\overline{A})$ – симметричность по отношению к 0,5;
5) $d(A \cup B) + d(A \cap B) = d(A) + d(B)$.

Замечание. Приведенная система аксиом при введении конкретных показателей размытости часто используется частично: например, ограничиваются свойствами 1, 2 и 3, либо некоторые свойства усиливаются или ослабляются в зависимости от решаемой задачи.

Рассмотрим индексы нечеткости (показатели размытости), которые можно определить, используя понятие расстояния.

Пусть A – нечеткое множество. *Обычное множество* $\underline{A} \subset X$ *является ближайшим к* A, т. е. находится на наименьшем евклидовом расстоянии от нечеткого множества A, если функция принадлежности $\underline{A}$ задаётся формулой

$$\mu_{\underline{A}}(x) = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad \mu_A(x) < 0{,}5 \\ 1, & \text{если} \quad \mu_A(x) > 0{,}5 \\ 0 \text{ или } 1, & \text{если} \quad \mu_A(x) = 0{,}5. \end{cases} \qquad (2.20)$$

Обычно принимают $\mu_{\underline{A}}(x_i) = 0$, если $\mu_A(x_i) = 0{,}5$.

Используя понятие обычного множества, ближайшего к нечеткому, введем следующие индексы нечеткости нечеткого множества А.

• *Линейный индекс нечеткости*:

$$d(A) = \frac{2}{n}\ \rho(A, \underline{A}), \tag{2.21}$$

где $\rho(A,\ \underline{A})$ – линейное (хеммингово) расстояние; множитель $\frac{2}{n}$ обеспечивает выполнение условия $0 \le d(A) \le 1$.

• *Квадратичный индекс нечеткости:*

$$d(A) = \frac{2}{\sqrt{n}}\ \varepsilon(A, \underline{A}),\ 0 \le d(A) \le 1 \tag{2.22}$$

где $\varepsilon(A, \underline{A})$ – квадратичное (евклидово) расстояние.

Мы ввели линейный и квадратичный индексы нечеткости, используя понятие расстояния и понятие обычного множества, ближайшего к нечеткому. Эти же индексы можно определить, используя операцию дополнения, следующим образом.

• *Линейный индекс нечёткости:*

$$d(A) = \frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n}\min(\mu_A(x_i),\ \mu_{\overline{A}}(x_i)). \tag{2.23}$$

• *Квадратичный индекс нечёткости:*

$$d(A) = \frac{2}{\sqrt{\mathrm{n}}}\sqrt{\textstyle\sum_{i=1}^{n}\min\left(\mu_A^2(x_i),\ \mu_{\overline{A}}^2(x_j)\right)}. \tag{2.24}$$

Отметим свойства, связанные с ближайшим обычным множеством:

1) $\underline{A \cap B} = \underline{A} \cap \underline{B}$;

2) $\underline{A \cup B} = \underline{A} \cup \underline{B}$;

3) $\forall x \in \mathrm{X}$: $|\mu_{\mathrm{A}}(x_i)\text{-}\mu_{\underline{\mathrm{A}}}(x_i)| = \mu_{A\cap\overline{A}}(x_i)$, откуда для линейного индекса нечеткости имеем: $d(A) = \frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n}\mu_{A\cap\overline{A}}(x_i)$, т. е. в этом представлении становится очевидным, что $d(A) = d(\overline{A})$.

Упражнения

На множестве X = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10} задайте нечёткое множество A «небольшие натуральные числа» и нечёткое множество B «натуральные числа около 5». Найдите:

1. Расстояние между нечёткими множествами, используя формулы:

a) линейного расстояния;

b) квадратичного расстояния;

c) относительного хеммингова расстояния;
d) относительного евклидова расстояния.

2. Ближайшие чёткие множества для A и B.

3. Линейный и квадратичный индексы нечёткости для A и B (формулы (2.23)–(2.24).

4. Докажите свойства, связанные с ближайшим обычным множеством.

Контрольные вопросы

1. В чём принципиальная разница между линейным расстоянием Хемминга и относительным расстоянием Хемминга (квадратичным расстоянием и относительным квадратичным расстоянием)?
2. Объясните, почему в формуле (2.12) значение $\rho(A, B)$ принадлежит отрезку $[0, n]$? Почему в формуле (2.13) значение $\varepsilon(A, B)$ принимает значение из отрезка $[0, \sqrt{n}]$? Почему величина относительного расстояния в формулах (2.14) и (2.15) принимает значения из отрезка [0, 1]?
3. В чём смысл понятия «индекс нечёткости»? Что можно сказать о нечётком множестве, у которого индекс нечёткости равен 0? равен 1? равен 0,5?

Тема 3. НЕЧЁТКИЕ ВЕЛИЧИНЫ, ЧИСЛА И ИНТЕРВАЛЫ

Учебные вопросы

1. Определение нечёткой величины.
2. Определение треугольного нечёткого числа.
3. Определение трапециевидного нечёткого интервала.
4. Правила арифметических действий над треугольными нечёткими числами.
5. Правила арифметических действий над трапециевидными нечёткими интервалами.

Изучив данную тему, студент должен:

знать

- определение нечётких величин, чисел и интервалов;
- правила арифметических действий над нечёткими числами и интервалами;

уметь

- задавать треугольные числа и трапециевидные интервалы;
- складывать, вычитать, умножать и делить треугольные числа и трапециевидные интервалы.

Методические рекомендации по изучению темы

При освоении темы необходимо:

- изучить учебный материал по теме 3 «Нечёткие величины, числа и интервалы»;
- после изучения каждого параграфа темы 3 выполнить упражнения;
- ответить на контрольные вопросы.

§ 3.1. Определения нечёткой величины, нечёткого числа и нечёткого интервала

Процесс нечёткого моделирования основывается на количественном представлении входных и выходных переменных системы в форме нечётких множеств. Такое представление связано с рассмотрением специальных нечётких множеств, которые задаются на множестве действительных чисел R и обладают некоторыми дополнительными свойствами. Наиболее общим в этом контексте является понятие нечёткой величины.

Определение 3.1. *Нечёткой величиной* называется произвольное нечёткое множество A, заданное на множестве действительных чисел R, т. е. для которого универсумом X служит всё множество R. Если в качестве универсума взять подмножество неотрицательных действительных чисел $R+$, то получим определение *неотрицательной нечёткой величины*.

Наибольший интерес для нечёткого моделирования представляет конкретизация нечёткой величины в виде нечётких чисел и интервалов.

Определение 3.2. *Нечётким числом* называется нечёткая величина, функция принадлежности которой является выпуклой и унимодальной.

На рис. 7 приведён график нечёткого числа «примерно 9».

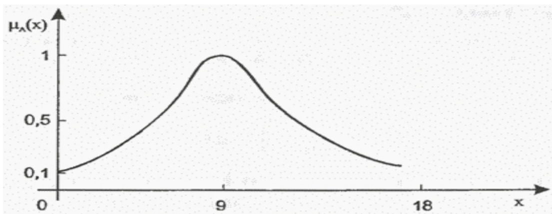

Рис. 7. График функции нечёткого числа «примерно 9»

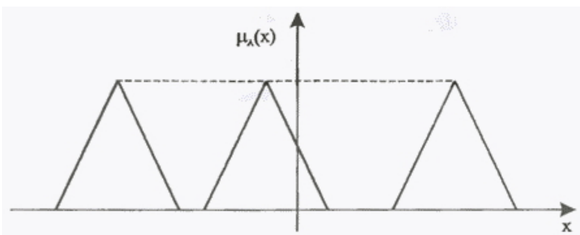

Рис. 8. Графики функции нечётких чисел разных знаков

Нечеткое число A положительно, если $\mu(x) = 0$ для всех $x < 0$. Нечеткое число A отрицательно, если $\mu(x) = 0$ для всех $x > 0$. На рис. 8 представлены графики функций положительного и отрицательного нечетких чисел, а также такого нечеткого числа, которое не является ни положительным, ни отрицательным.

Определение 3.3. *Нечётким интервалом* называется нечёткая величина с выпуклой функцией принадлежности.

На рис. 9 представлен график функции нечёткого интервала «в пределах от 3 до 6».

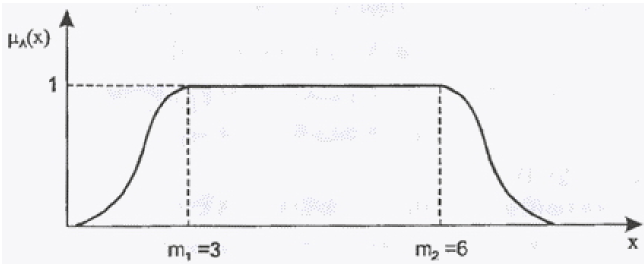

Рис. 9. График функции нечёткого интервала «в пределах от 3 до 6»

Определение 3.4. *Треугольным нечётким числом* (ТНЧ) называется нечёткое число АΔ, функция принадлежности которого имеет треугольный вид $f\Delta(x; a, b, c)$. ТНЧ удобно представить в виде упорядоченного множества АΔ = $<d, \alpha, \beta>$, где d – модальное значение ТНЧ; α – левый коэффициент нечёткости и β – правый коэффициент нечёткости: $d = b$, $\alpha = b - a$, $\beta = c - b$. На рис. 10 приведён пример ТНЧ АΔ = <3, 1, 2>, которое соответствует «нечёткой тройке».

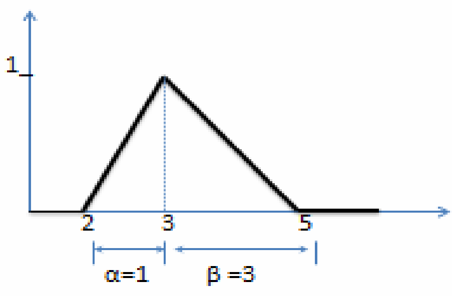

Рис. 10. График функции ТНЧ АΔ = <3, 1, 2>

Определение 3.5. *Трапециевидным нечётким интервалом* (ТНИ) называется нечёткий интервал A_T с трапециевидной функцией принадлежности f_T. ТНИ удобно представлять в виде упорядоченного множества $A_T = \langle a, в, \alpha, \beta \rangle$, где a и $в$ соответственно верхнее и нижнее модальное значение ТНИ, α – левый коэффициент нечёткости и β – правый коэффициент нечёткости ТНИ.

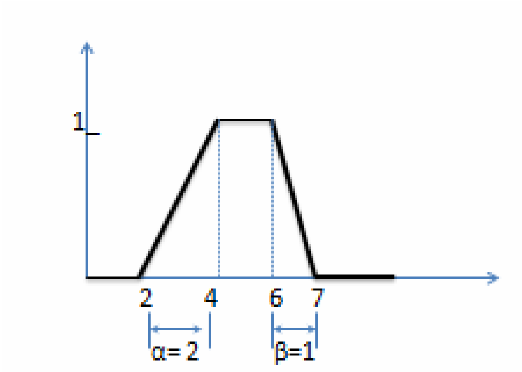

Рис. 11. График функции ТНИ $A_T = \langle 4, 6, 2, 1 \rangle$

Как нетрудно заметить, треугольное нечёткое число $A\Delta = \langle d, \alpha, \beta \rangle$ является частным случаем трапециевидного нечёткого интервала $A_T = \langle a, в, \alpha, \beta \rangle$ при $a = в$. На рис. 11 изображён пример ТНИ $\langle 4, 6, 2, 1 \rangle$, которое соответствует «нечёткому интервалу от 4 до 6».

§ 3.2. Операции над ТНЧ и ТНИ

Определим некоторые простейшие операции над ТНЧ, аналогичные обычным арифметическим операциям над обычными числами и интервалами.

Пусть $A\Delta \langle a_1, \alpha_1, \beta_1 \rangle$ и $B\Delta \langle a_2, \alpha_2, \beta_2 \rangle$ – два произвольных треугольных нечётких числа.

Определение 3.6. *Сложение*: операция сложения нечётких чисел обозначается через $A\Delta + B\Delta = C\Delta$, нечёткое число $C\Delta = \langle a, \alpha, \beta \rangle$ имеет параметры a, α и β, которые определяются следующим образом:

$$a = a_1 + a_2,\ \alpha = \alpha_1 + \alpha_2,\ \beta = \beta_1 + \beta_2. \tag{3.1}$$

Определение 3.7. *Вычитание:* операция вычитания нечётких чисел обозначается через $A\Delta - B\Delta = C\Delta$, нечёткое число $C\Delta = < a, \alpha, \beta>$ имеет параметры a, α и β, которые определяются следующим образом:

$$a = a_1 - a_2, \quad \alpha = \alpha_1 + \beta_2, \beta = \beta_1 + \alpha_2. \tag{3.2}$$

Определение операций умножения и деления нечётких чисел зависит от знака модальных значений нечётких чисел.

Определение 3.8. *Умножение положительных нечётких чисел $A\Delta$* и $B\Delta$, носители которых есть подмножества $R+$, модальные значения $a_1 > 0$, $a_2 > 0$. Операция умножения таких нечётких чисел обозначается через $A\Delta \cdot B\Delta = C\Delta$, нечёткое число $C\Delta = <a, \alpha, \beta>$ имеет параметры a, α и β, которые определяются следующим образом:

$$a = a_1 a_2, \alpha = a_1\alpha_2 + a_2\alpha_1, \beta = a_1\beta_2 + a_2\beta_1. \tag{3.3}$$

Определение 3.9. *Умножение нечётких чисел $A\Delta$* и $B\Delta$, для которых модальные значения имеют разные знаки: $a_1 < 0$ и $a_2 > 0$. Операция умножения таких нечётких чисел обозначается через $A\Delta \cdot B\Delta = C\Delta$, нечёткое число $C\Delta = < a, \alpha, \beta>$ имеет параметры a, α и β, которые определяются следующим образом:

$$a = a_1 a_2, \alpha = a_2\alpha_1 - a_1\beta_2, \beta = a_2\beta_1 - a_1\alpha_2. \tag{3.4}$$

Определение 3.10. *Умножение нечётких чисел $A\Delta$* и $B\Delta$, для которых модальные значения имеют отрицательные знаки: $a_1 < 0$, $a_2 < 0$. Операция умножения таких нечётких чисел обозначается через $A\Delta \cdot B\Delta = C\Delta$, нечёткое число $C\Delta = <a, \alpha, \beta>$ имеет параметры a, α и β, которые определяются следующим образом:

$$a = a_1 a_2, \alpha = -a_2\beta_1 - a_1\beta_2, \beta = -a_2\alpha_1 - a_1\alpha_2. \tag{3.5}$$

Определение 3.11. *Деление положительных нечётких чисел $A\Delta$* и $B\Delta$, носители которых есть подмножества $R+$, модальные значения $a_1 > 0$, $a_2 > 0$. Операция деления таких нечётких чисел обозначается через $A\Delta \div B\Delta = C\Delta$, нечёткое число $C\Delta = <a, \alpha, \beta>$ имеет параметры a, α и β, которые определяются следующим образом:

$$a = \frac{a_1}{a_2}, \quad \alpha = \frac{a_1\beta_2 + a_2\alpha_1}{(a_2)^2}, \quad \beta = \frac{a_1\alpha_2 + a_2\beta_1}{(a_2)^2}. \tag{3.6}$$

Определение 3.12. *Обратное нечёткое число:* для положительного нечёткого числа $A\Delta$ (носитель которого есть подмножества $R+$ модальное значение $a_1 > 0$) обратное число обозначается через $A\Delta^{-1} = <a, \alpha, \beta>$ и имеет параметры a, α и β, которые определяются следующим образом:

$$a = \frac{1}{a_1}, \quad \alpha = \frac{\beta_1}{(a_1)^2}, \quad \beta = \frac{a_1}{(a_1)^2}. \qquad (3.7)$$

Например, для конкретных ТНЧ $A\Delta <3, 1, 2>$ и $B\Delta <2, 2, 1>$ результаты арифметических операций равны: $A\Delta + B\Delta = <5, 3, 3>$, $A\Delta - B\Delta = <1, 2, 4>$, $A\Delta \cdot B\Delta = <6, 8, 7>$, $A\Delta \div B\Delta = <1{,}5;\ 1{,}25;\ 2{,}5>$,

$$A\Delta^{-1} = < \frac{1}{3}, \frac{2}{9}, \frac{1}{9} >.$$

Определим арифметические операции над ТНИ.

Пусть $A_T = <a_1, в_1, \alpha_1, \beta_1>$ и $B_T = <a_2, в_2, \alpha_2, \beta_2>$ – два произвольных трапециевидных нечётких интервала.

Определение 3.13. *Сложение*: операция сложения нечётких интервалов обозначается через $A_T + B_T = C_T$, нечёткий интервал $C_T = < a, в, \alpha, \beta>$ имеет параметры a, $в$, α и β, которые определяются следующим образом:

$$a = a_1 + a_2, \quad в = в_1 + в_2, \quad \alpha = \alpha_1 + \alpha_2, \quad \beta = \beta_1 + \beta_2. \qquad (3.8)$$

Определение 3.14. *Вычитание:* операция вычитания ТНИ обозначается через $A_T - B_T = C_T$, нечёткое число $C_T = <a, в, \alpha, \beta>$ имеет параметры a, $в$, α и β, которые определяются следующим образом:

$$a = a_1 - a_2, \quad в = в_1 - в_2, \quad \alpha = \alpha_1 + \beta_2, \quad \beta = \beta_1 + \alpha_2. \qquad (3.9)$$

Определение операций умножения и деления нечётких чисел зависит от знака модальных значений нечётких чисел.

Определение 3.15. Рассмотрим *умножение положительных ТНИ* A_T и B_T, т. е. носители которых есть подмножества $R+$, а все модальные значения положительны. Операция умножения таких ТНИ обозначается через $A_T \cdot B_T = C_T = <a, в, \alpha, \beta>$ и имеет параметры a, $в$, α и β, которые определяются следующим образом:

$$a = a_1 a_2, \quad в = в_1 в_2, \quad \alpha = a_1\alpha_2 + a_2\alpha_1, \quad \beta = в_1\beta_2 + в_2\beta_1. \qquad (3.10)$$

Определение 3.16. *Деление положительных ТНИ* $A_т$ и $B_т$, т. е. носители которых есть подмножества $R+$, модальные значения $a_1 > 0$, $a_2 > 0$. Операция деления таких ТНИ обозначается через $A_T \div B_T = C_T$, нечёткое число $C_T = <a, в, \alpha, \beta>$ имеет параметры a, $в$, α и β, которые определяются следующим образом:

$$a = \frac{a_1}{в_2}, \quad в = \frac{в_1}{a_2}, \quad \alpha = \frac{a_1\beta_2 + в_2\alpha_1}{(в_2)^2}, \quad \beta = \frac{в_1 a_2 + a_2\beta_1}{(a_2)^2}. \quad (3.11)$$

Например, для конкретных ТНИ Ат = <3, 5, 1, 2> – «нечёткий интервал от 3 до 5» и B_T <1, 2, 1, 1> – «нечёткий интервал от 1 до 2» результаты арифметических операций равны:

$$A_T + B_T = <4, 7, 2, 3>, \quad A_T - B_T = <2, 3, 2, 3>.$$

Упражнения

1. Проверьте выполнение следующих свойств операций над ТНЧ и ТНИ:

а) коммутативность операций сложения и умножения;

б) дистрибутивность умножения относительно сложения и вычитания.

2. Задайте в виде нечётких чисел или нечётких интервалов следующие величины:

а) «примерное время выполнения домашней работы»;

б) «молодой человек»;

в) «ожидаемый доход»;

г) «возможные расходы»;

д) «предполагаемая температура».

3. Решите задачи, в которых известны нечёткие начальные данные.

• Требуется рассчитать возможную стоимость материалов для заливки бетоном площадки, имеющей прямоугольную форму со сторонами, примерно равными A м и B м, приблизительная глубина заливки H м. Бетон состоит из песка и цемента в пропорции 2 к 1. Смесь песка с цементом разводится водой: на 1 часть смеси берётся 2 части воды. Цена 1 м^3 песка примерно равна N руб., 1 м^3 цемента – M руб. Величины A, B, H, N, M заданы нечёткими треугольными числами:

$$A = <4, 0.1, 0.1>, \quad \boldsymbol{B} = <5, 0.1, 0.1>, \quad H = <2, 0.1, 0.1>,$$
$$N = <100, 10, 10>, \quad M = <400, 10, 10>.$$

• На одном и том же полуторатонном грузовике проверенный опытом водитель имеет норму расхода бензина $A = <16,1,1>$ литров на 100 км, а молодой, менее опытный водитель $B = <19,20,1,2>$ литров на 100 км. За день водитель проезжает $C = <1000, 50, 50>$ км, стоимость бензина равна $D = <24, 1, 1>$ руб. Какова разница в цене за бензин за день у опытного и менее опытного водителя?

4. Придумайте и решите задачу с нечёткими начальными данными.

Контрольные вопросы

1. Какими особенностями должно обладать нечёткое множество, чтобы его можно было назвать нечёткой величиной?
2. Приведите пример нечёткого множества, которое не является нечёткой величиной.
3. Поясните, почему нечёткий интервал является нечётким числом. Верно ли обратное утверждение?
4. Можно ли обычное число представить как нечёткое число, а обычный числовой интервал – как нечёткий интервал?
5. Приведите примеры из жизни, где мы используем нечёткие числа и интервалы для описания приблизительных числовых величин.

Тема 4. НЕЧЁТКИЕ ОТНОШЕНИЯ

Учебные вопросы

1. Определение нечёткого отношения.
2. Бинарные нечёткие отношения.
3. Характеристики бинарных нечётких отношений.
4. Сравнения нечётких отношений, операции над нечёткими отношениями.
5. Композиция нечётких бинарных отношений.
6. Свойства бинарных нечётких отношений, заданных на множестве $X \times X$.

Изучив данную тему, студент должен

знать

- определение n-арного нечёткого отношения и бинарного нечёткого отношения;
- способы задания нечётких множеств: аналитический, графический, табличный;
- определения основных характеристик бинарных отношений: носитель, ядро, точки перехода, границы отношения;
- определения операций над нечёткими бинарными отношениями;
- определение операции композиции бинарных нечётких отношений;
- свойства бинарных нечётких отношений, заданных на множестве $X \times X$: рефлексивность, антирефлексивность, симметричность, антисимметричность, транзитивность, полнота;

уметь

- задавать нечёткие отношения разными способами;
- определять основные характеристики нечёткого отношения;
- находить результаты операций над нечёткими отношениями;
- находить композицию нечётких отношений;
- определять свойства нечётких отношений, заданных на множестве $X \times X$;

понимать:

- смысл операций над нечёткими отношениями;
- смысл операции композиции;

- смысл свойств бинарных нечётких отношений, заданных на множестве $X \times X$: рефлексивность, антирефлексивность, симметричность, антисимметричность, транзитивность, полнота.

Методические рекомендации по изучению темы

При освоении темы необходимо:

- изучить содержание параграфов;
- акцентировать внимание на смысле следующих операций: объединение, пересечение, разность, симметрическая разность, дополнение бинарных отношений, композиция;
- выполнить упражнения после параграфов;
- ответить на контрольные вопросы после параграфов.

§ 4.1. Определение нечёткого отношения

Пусть $X = X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_n$ – прямое (декартово) произведение универсальных множеств.

Определение 4.1. *Нечетким n-арным отношением* называется нечёткое множество Q, заданное на универсуме X. Символически определение нечёткого отношения записывается в виде:

$$Q = \{<<x_1, x_2, \ldots, x_n>, \mu_Q<x_1, x_2, \ldots, x_n>> \mid x_1 \in X_1, x_2 \in X_2, \ldots, x_n \in X_n, \mu_Q \in [0,1]\}.$$

Пустое нечёткое отношение – это нечёткое отношение, в котором каждый элемент универсума $X = X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_n$ имеет значение функции принадлежности, равное 0. Пустое отношение обозначается ϕ Ø.

Полное нечёткое отношение – это нечёткое отношение, в котором каждый элемент универсума $X = X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_n$ имеет значение функции принадлежности, равное 1, то есть полное нечёткое отношение совпадает с универсумом $X = X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_n$.

В случае $n = 2$ нечетким отношением Q между множествами X и Y будет называться функция $R:(X, Y) \to [0, 1]$, которая ставит в соответствие каждой паре элементов $<x, y> \in X \times Y$ величину $\mu_Q(x, y) \in [0, 1]$. Такое отношение называется *бинарным*. Символическое определение нечёткого бинарного отношения: $Q = \{<<x_1, x_2>, \mu_Q<x_1, x_2>> \mid x_1 \in X_1, x_2 \in X_2, \mu_Q \in [0, 1]\}$.

В случае когда X = Y, т. е. X и Y совпадают, нечеткое отношение Q: $X \times X \to [0, 1]$ называется нечетким отношением на множестве X.

Рассмотрим подробно способы задания бинарных отношений.

Если X и Y множества бесконечные, то функцию принадлежности можно задать *аналитически*.

Пример 4.1. Пусть X = Y = R, т. е. множество всех действительных чисел. Отношение x>>y: *«x намного больше y»* можно задать функцией принадлежности:

$$\mu_R(x, y) = \begin{cases} 0, \text{ если } x \le y \\ \dfrac{1}{1 + \dfrac{1}{(x-y)^2}}, \text{ если } x < y \end{cases}.$$

Пример 4.2. Отношение Q, для которого $\mu_Q(x, y) = \boldsymbol{e}^{-k(x-y)2}$, при достаточно больших k можно интерпретировать так: «x и y – близкие друг к другу числа».

Если множества X и Y конечные, то бинарное отношение можно задать перечислением всех элементов. Удобнее это делать в виде *таблицы* (матрицы).

Пример 4.3. Пусть $X = \{x_1, x_2, x_3\}$, $Y = \{y_1, y_2, y_3, y_4\}$. Нечеткое отношение Q может быть задано, к примеру, таблицей:

	y_1	y_2	y_3	y_4
x_1	0	0	0,1	0,3
x_2	0	0,8	1	0,7
x_3	1	0,5	0,6	1

В случае конечных или счетных универсальных множеств нечёткие отношения можно представить в виде *нечёткого графа*. Если нечёткое отношение Q задано на $X \times X$, пара вершин (x_i, x_j) соединяется ребром с весом $\mu_Q(x_i, x_j)$.

Пример 4.4. Пусть на множестве $X = \{x_1, x_2, x_3\}$ задано нечеткое отношение R: $X \times X \to [0, 1]$, представимое графом, изображённым на рис. 12.

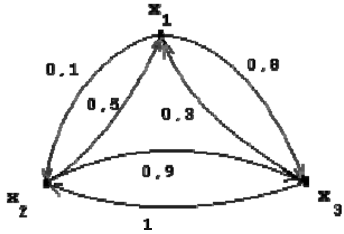

Рис. 12. Нечёткий граф отношения R на X×X

Если нечёткое отношение Q задано на X × Y, то пара вершин (x_i, y_j) соединяется ребром с весом $\mu_R(x_i, y_j)$.

Пример 4.5. Пусть $X = \{x_1, x_2\}$ и $Y = \{y_1, y_2, y_3\}$, тогда нечеткий граф, изображённый на рис. 13, задаёт нечёткое отношение Q.

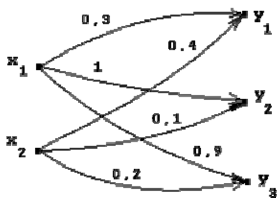

Рис. 13. Нечёткий граф отношения Q на X×Y

Так как нечёткие отношения являются частными случаями нечётких множеств, то все определения основных характеристик для нечётких множеств и операции над нечёткими множествами остаются в силе и для нечётких отношений.

Упражнения

1. Сформулируйте определение *носителя*, *ядра*, *границ, точек перехода* нечёткого бинарного отношения *Q*, заданного на множестве X×Y.

2. Для нечётких отношений Q_1 и Q_2, заданных на множестве X×Y, сформулируйте определение операций *объединения*, *пересечения*, *разности*, *симметрической разности*, *дополнения*.

3. На множестве X×Y, X = Y = {1, 2, 3, 4} задайте отношение *Q* «x_i *примерно равен* x_j» и отношение R «x_j *немного меньше* x_j» в виде матриц отношений M_Q и M_R. Найдите:

а) носитель, ядро, границы, точки перехода отношения Q и отношения R;
б) объединение Q и R, пересечение Q и R, разность Q и R, симметрическую разность Q и R, дополнение Q и дополнение R.

4. Приведите примеры нечётких отношений Q и R, заданных на множестве X×Y, если:
а) множества X и У бесконечные;
б) множества X и У конечные;
в) множество X конечное, Y – бесконечное.

Контрольные вопросы

1. Приведите примеры бинарных отношений из повседневной жизни.
2. Объясните смысл операций объединения, пересечения, разности, симметрической разности, дополнения нечётких бинарных отношений.

§ 4.2. Композиция двух бинарных нечётких отношений

Пусть Q и R – конечные или бесконечные нечёткие отношения, причём нечёткое отношение

$$Q = \{<<x_i, x_j>, \mu_R<x_i, x_j>> \mid x_i \in \mathbf{X_1}, x_j \in \mathbf{X_2}, \mu_Q \in [0, 1]\}$$

задано на декартовом произведении универсумов $X_1 \times X_2$, а нечёткое отношение

$$R = \{<<x_j, x_k>, \mu_R<x_j, x_k>> \mid x_j \in \mathbf{X_2}, x_k \in \mathbf{X_3}, \mu_R \in [0, 1]\}$$

– на декартовом произведении универсумов $X_2 \times X_3$.

Определение 4.2. *Композицией двух бинарных нечётких отношений Q и R* называется нечёткое отношение $Q \otimes R$, заданное на множестве $X_1 \times X_{3,}$ функция принадлежности которого для $\forall <x_i, x_k> \in X_1 \times X_3$ определяется формулой

$$\mu_Q \otimes_R (<x_i, \boldsymbol{x_k}>) = \max x_j \in x_2 \{\min\{\mu_Q(<x_i, x_j>), \mu_R(<x_j, x_k>)\}\}.$$

Определённую таким образом композицию нечётких отношений называют *max-min композицией* или *максминной* свёрткой нечётких отношений.

Пример 4.6. Пусть R_1 – нечеткое отношение на множестве $X \times Y$, а R_2 – нечеткое отношение на множестве $Y \times Z$, $X = \{x_1, x_2\}$, $Y = \{y_1, y_2, y_3\}$, $Z = \{z_1, z_2, z_3, z_4\}$. Отношения R_1 и R_2 заданы матрицами M_{R1} и M_{R2}. Композицией нечетких отношений R_1 и R_2 является нечёткое отношение R на множестве $X \times Z$, представленное матрицей M_R (рис. 14).

M_{R1}

	y_1	y_2	y_3
x_1	0,1	0,7	0,4
x_2	1	0,5	0

M_{R2}

	z_1	z_2	z_3	z_4
y_1	0,9	0	1	0,2
y_2	0,3	0,6	0	0,9
y_3	0,1	1	0	0,5

M_R

	z_1	z_2	z_3	z_4
x_1	0,3	0,6	0,1	0,7
x_2	0,9	0,5	1	0,5

Рис. 14. Матрицы нечётких отношений R_1 и R_2 и их композиции R

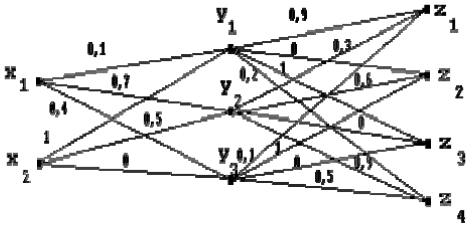

Рис. 15. Представление операции композиции нечётких отношений R_1 и R_2 в виде нечёткого графа

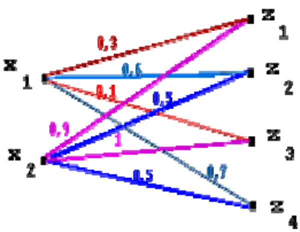

Рис. 16. Нечёткий граф отношения R

На рис. 15 приведены графы, соответствующие R_1 и R_2, «склеенные» по Y. В полученном графе рассматриваем пути от x_i к z_j и каждому ставим в соответствие минимальный из «весов», его составляющих. Затем определяем максимум по всем путям из x_i

в z_j, который и дает искомое значение функции принадлежности $\mu_R(x_i, z_j)$ отношения R.

На рис. 16 представлен нечёткий граф отношения R.

Из определения операции композиции бинарных нечётких отношений следует, что она ассоциативна, дистрибутивна относительно нечёткого пересечения. Другими словами, для произвольных бинарных нечётких отношений *P*, *Q* и *R*, заданных на декартовых произведениях $X_1 \times X_2$, $X_2 \times X_3$ и $X_1 \times X_3$ соответственно, имеет место свойство:

1) $P \otimes (Q \otimes R) = (P \otimes Q \otimes R)$ – *свойство ассоциативности операции композиции*.

Для бинарных отношений *P*, *Q* и *R*, заданных на декартовых произведениях $X_1 \times X_2$, $X_2 \times X_3$ и $X_1 \times X_3$ соответственно, имеют место следующие свойства:

2) $P \otimes (QR) = (\boldsymbol{P} \otimes QR)$ – *свойство дистрибутивности операции композици относительно операции объединения;*

3) $P \otimes (Q \cap R) = (P \otimes Q) \cap (P \otimes R)$ – *свойство дистрибутивности операции композиции относительно операции пересечения*.

Кроме того, для max-min композиции произвольных бинарных нечётких отношений *P, Q* и *R*, заданных на декартовых произведениях $X_1 \times X_2$, $X_2 \times X_3$ и $X_2 \times X_3$ соответственно, выполняется свойство:

4) если $Q \subseteq R$, то $(P \otimes Q) \subseteq (P \otimes R)$ – *свойство монотонности*.

Упражнения

1. *Нечёткая модель «Выбор профессии»*. Рассмотрим типичную ситуацию, связанную с консалтингом в области выбора профессии для последующего обучения и получения специальности. С этой целью построим нечёткую модель, основанную на двух бинарных нечётких отношениях S и Z.

На множествах X и У задано нечёткое отношение S, на множествах У и Z задано нечёткое отношение G. X – множество специальностей, по которым проводится набор на обучение, У – множество психофизиологических характеристик специальностей. Отношение S содержательно описывает психофизиологическое профилирование специальностей. Z – множество кандидатов на обучение. Отношение G содержательно описывает психофизиологическое профилирование кандидатов на обучение.

Пусть множество

$$X = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\},$$

где x_1 – «менеджер»; x_2 – «программист»; x_3 – «водитель»; x_4 – «секретарь-референт»; x_5 – «переводчик».

$$У = \{y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6, y_7, y_8, y_9, y_{10}\},$$

где y_1 – «быстрота и гибкость мышления»; y_2 –«умение быстро принимать решение»; y_3 – «устойчивость и концентрация внимания»; y_4 – «зрительная память»; y_5 – «быстрая реакция»; y_6 – «двигательная память»; y_7 – «физическая выносливость»; y_8 – «координация движений»; y_9 – «эмоциональная устойчивость»; y_{10} – «ответственность».

$$Z = \{z_1, z_2, z_3, z_4, z_5\},$$

где элементы множества Z – хорошо известные вам люди, например ваши друзья. Отношение S задано матрицей M_S.

$$Ms := \begin{pmatrix} 0.9 & 0.9 & 0.8 & 0.4 & 0.5 & 0.3 & 0.6 & 0.2 & 0.9 & 0.8 \\ 0.8 & 0.5 & 0.9 & 0.3 & 0.1 & 0.2 & 0.2 & 0.2 & 0.5 & 0.5 \\ 0.3 & 0.9 & 0.6 & 0.5 & 0.9 & 0.8 & 0.9 & 0.8 & 0.6 & 0.3 \\ 0.5 & 0.4 & 0.5 & 0.5 & 0.2 & 0.2 & 0.3 & 0.3 & 0.9 & 0.8 \\ 0.7 & 0.8 & 0.8 & 0.2 & 0.6 & 0.2 & 0.2 & 0.3 & 0.3 & 0.2 \end{pmatrix}$$

Задайте нечёткое отношение G при помощи матрицы Mg. Постройте max-min композицию S°G нечётких отношений S и G на множествах X и Z. Сделайте вывод о предпочтительном выборе специальностей из множества У кандидатами на обучение из множества Z.

2. Постройте композицию нечётких отношений S и G на множествах X и Z из задания 1, используя *альтернативную операцию композиции двух бинарных нечётких отношений* S*G, функция принадлежности которой определяется следующим образом:

$$\mu_{S*G}(<x_i,\ x_k>) = \max_{x_j \in Y}\left(\mu_S(<x_i,\ x_j>)\cdot \mu_G(<x_j,\ x_k>)\right),$$

для $\forall < x_i,\ x_k > \in X \times Z x_j \in Y,$ где операция «·» – операция алгебраического умножения множеств.

Сравните результат с результатом задания 1.

3. Постройте нечёткую модель ситуаций «выбор руководителя фирмы», «диагностика заболеваний» или любой другой.

Контрольные вопросы

1. Какие условия должны быть выполнены для осуществления операции композиции между нечёткими отношениями P и Q?
2. Объясните смысл операции композиции между нечёткими отношениями P и Q.

§ 4.3. Свойства бинарных нечётких отношений, заданных на одном универсуме

В контексте нечёткого моделирования наибольший интерес представляют такие свойства бинарных нечётких отношений, которые обобщают известные свойства обычных отношений, в частности рефлексивность, симметричность и транзитивность, поскольку эти свойства используются в дальнейшем при определении некоторых специальных типов бинарных нечётких отношений.

Пусть на универсуме $X \times X$ определено нечёткое отношение Q с функцией принадлежности $\mu_Q(<x_i, x_j>)$.

Определение 4.3. *Рефлексивность.* Бинарное нечёткое отношение Q называется рефлексивным, если $\forall <x_i, x_i> \in X \times X$ выполняется равенство $\mu_Q(<x_i, x_i>) = 1$.

Пример 4.7. Нечёткое отношение Q «x_i приблизительно равен x_j», заданное на множестве $X \times X$, где X – любое числовое множество, является рефлексивным.

Определение 4.4. *Антирефлексивность.* Бинарное нечёткое отношение Q называется антирефлексивным, если $\forall<x_i, x_i>\in X \times X$ выполняется равенство $\mu_Q(<x_i, x_i>) = 0$.

Пример 4.8. Нечёткое отношение Q «x_i намного больше x_j», заданное на множестве $X \times X$, где X – любое числовое множество, является антирефлексивным.

Определение 4.5. *Симметричность.* Бинарное нечёткое отношение Q называется симметричным, если $\forall<x_i, x_j>\in X \times X$ выполняется равенство

$$\mu_Q(<x_i, x_j>) = \mu_Q(<x_j, x_i>).$$

Нечёткое бинарное отношение из примера 4.7 является симметричным.

Определение 4.6. *Антисимметричность.* Бинарное нечёткое отношение Q называется антисимметричным, если $\forall\langle x_i, x_j\rangle \in X \times X$, причём $x_i \neq x_j$, выполняется условие

$$\min\{\mu_Q(\langle x_i, x_j\rangle), \mu_Q(\langle x_j, x_i\rangle)\} = 0.$$

Нечёткое отношение из примера 4.8 является антисимметричным.

Определение 4.7. *Транзитивность.* Бинарное нечёткое отношение Q называется транзитивным, если $\forall x_i, x_j, x_k \in X$, выполняется условие

$$\mu_Q(\langle x_i, x_k\rangle) \geq \max x_i \in X\{\min\{\mu_Q(\langle x_i, x_j\rangle), \mu_Q(\langle x_j, x_k\rangle)\}\}.$$

Нечёткое отношение из примера 4.8 является транзитивным.

Замечание. Непосредственная проверка свойств транзитивности для конкретных нечётких отношений является трудоёмкой процедурой. Более конструктивным представляется способ эмпирического установления данного свойства на основе выполнения операции нечёткого транзитивного замыкания соответствующего нечёткого отношения, о котором пойдёт речь в следующем параграфе.

Определение 4.8. *Сильная полнота.* Бинарное нечёткое отношение Q называется сильно полным, если $\forall\langle x_i, x_j\rangle \in X \times X$, выполняется условие

$$\max\{\mu_Q(\langle x_i, x_j\rangle), \mu_Q(\langle x_j, x_i\rangle)\} = 1.$$

Определение 4.9. *Слабая полнота.* Бинарное нечёткое отношение Q называется слабо полным, если $\forall\langle x_i, x_j\rangle \in X \times X$, причём $x_i \neq x_j$, выполняется условие

$$\max\{\mu_Q(\langle x_i, x_j\rangle), \mu_Q(\langle x_j, x_i\rangle)\} > 0.$$

Рассмотрим произвольное конечное бинарное нечёткое отношение Q, заданное на множестве $X \times X$, M_Q – матрица отношения. В основе операции транзитивного замыкания лежит операция (max-min) – композиция бинарных нечётких отношений.

Определение 4.10. *Транзитивным замыканием* нечёткого бинарного отношения Q называется нечёткое бинарное отношение Q^T, заданное на том же универсуме, матрица которого $M_Q{}^T$ находится по формуле

$$M_Q{}^T = M_Q \cup M_Q{}^2 \cup M_Q{}^3 \cup \ldots \cup M_Q{}^k \cup \ldots, \tag{4.1}$$

где

$$M_Q^{k} = M_Q \otimes M_Q^{k-1} \quad (4.2)$$

для любого натурального $k > 1$.

При этом имеет место замечательное свойство, которое существенно упрощает численные расчёты, связанные с выполнением операций (4.1) и (4.2), а именно для получения матрицы транзитивного замыкания бинарного нечёткого отношения M_Q^{T} достаточно ограничиться одним из следующих условий.

• Если для некоторого натурального k ($1 < k < n$), где n – мощность множества X, выполнено равенство $M_Q^{k} = M_Q^{k-1}$, то дальнейшие расчёты степеней композиции матрицы нечёткого отношения можно прекратить, а матрица транзитивного замыкания рассматриваемого нечёткого отношения будет равна:

$$M_Q^{T} = M_Q \cup M_Q^{2} \cup M_Q^{3} \cup \ldots \cup M_Q^{k}. \quad (4.3)$$

• Выражение (4.3) всегда имеет место при $k = n$.

В качестве примера использования операции транзитивного замыкания нечёткого отношения рассмотрим задачу анализа эффективности коммуникаций, известную также как задачу распространения слухов среди хорошо знакомых между собой людей. С этой целью рассмотрим в качестве исходного универсума $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ некоторую совокупность людей. Определим на этом универсуме бинарное нечёткое отношение Q «человек x_i хорошо знаком с человеком x_j». Это отношение рефлексивно и симметрично, но в общем случае не транзитивно, так как факт знакомства имеет место между парами людей. Предположим, нас интересует возможность передачи информации (или распространения слухов) между парами людей. Эта задача может быть решена применением операции транзитивного замыкания данного нечёткого отношения.

Упражнения

1. Выясните, какими свойствами обладают следующие бинарные отношения:

а) нечёткое отношение Q «x_i дружит с x_j», заданное на множестве $X \times X$, где X – множество людей;

б) нечёткое отношение Q «x_i учится в одной группе с x_j», заданное на множестве X×X, где X – множество студентов университета;
в) нечёткое отношение Q «x_i симпатизирует x_j», заданное на множестве X×X, где X – множество студентов группы;
г) нечёткое отношение Q «x_i и x_j расположены недалеко от 5», заданное на множестве X×X, где X = Z (Z – множество целых чисел);
д) нечёткое отношение Q «небольшое расстояние между x_i и x_j», заданное на множестве X×X, где X = R (R – множество действительных чисел).

2. Приведите примеры нечётких отношений, заданных на множестве X×X, обладающих свойствами:
а) рефлексивности, симметричности, транзитивности;
б) антирефлексивности, симметричности;
в) рефлексивности, симметричности;
г) сильной полноты;
д) слабой полноты.

3. На множестве из пяти человек X = {x_1, x_2, x_3, x_4, x_5} задайте нечёткое отношение Q «человек x_i хорошо знаком с человеком x_j» в виде матрицы M_Q (среди элементов матрицы задайте несколько 0, т. е. не все люди знакомы между собой). Найдите транзитивное замыкание нечёткого отношения. Проанализируйте решение.

Контрольные вопросы

1. Какими особенностями обладает матрица рефлексивного отношения? антирефлексивного отношения?
2. Какими особенностями обладает матрица симметричного отношения? антисимметричного отношения?
3. Какими особенностями обладает матрица сильно полного отношения? слабо полного отношения?
4. Каков смысл операции транзитивного замыкания?

Тема 5. ЭЛЕМЕНТЫ НЕЧЁТКОЙ ЛОГИКИ

Учебные вопросы

1. Нечёткие высказывания и логические операции над ними.
2. Нечёткие логические формулы.
3. Степень равносильности нечётких формул. Нечётко близкие формулы.
4. Нечётко истинные и нечётко ложные формулы.
5. Нечёткие предикаты.
6. Степень общности свойств нечёткого предиката. Квантор нечёткой общности.
7. Степень существования свойств нечёткого предиката. Квантор нечёткого существования.
8. Нечёткая переменная. Нечёткая лингвистическая переменная.
9. Нечёткие лингвистические высказывания.

Изучив данную тему, студент должен:

знать

- определение логических операций над нечёткими высказываниями;
- определение нечёткой логической формулы;
- определение степени равносильности нечётких формул;
- определение нечётко близких формул, нечётко истинных и нечётко ложных формул;
- определение нечёткого предиката;
- определение степеней общности и существования нечётких предикатов;
- определение нечёткой лингвистической переменной;
- определение нечёткого лингвистического высказывания;

уметь

- приводить примеры нечётких высказываний;
- находить результаты логических операций над нечёткими высказываниями;
- находить степень равносильности нечётких формул на заданных значениях истинности нечётких высказывательных переменных;

- выяснять, являются ли данные формулы нечётко близкими при заданных значениях истинности нечётких высказывательных переменных;
- доказывать нечёткую близость формул;
- приводить примеры нечётких предикатов;
- находить степени общности и существования нечётких предикатов;
- приводить примеры нечётких лингвистических переменных и высказываний.

Методические рекомендации по изучению темы

При освоении темы необходимо:

- изучить содержание параграфов темы;
- выполнить упражнения после каждого параграфа;
- ответить на контрольные вопросы после параграфов.

§ 5.1. Нечёткие высказывания и логические операции над ними

Определение 5.1. *Нечётким высказыванием A* называется любое утверждение, о котором имеет смысл судить, истинно оно или ложно в той или иной степени.

Каждому нечёткому высказыванию A поставим в соответствие *функцию истинности* $\lambda(A)$, принимающую любые значения на отрезке [0; 1]. Значение функции истинности нечёткого высказывания A будем также называть *степенью истинности* нечёткого высказывания. 0 и 1 – предельные значения функции истинности, совпадающие со значениями ложь и истина для чётких высказываний.

Нечёткое высказывание, принимающее значение истинности 0,5, называется *индифферентностью*, поскольку оно истинно в той же мере, что и ложно.

Определим нечёткие логические операции на множестве нечётких высказываний.

Пусть A и B – нечёткие высказывания, $\lambda(A)$ и $\lambda(B)$ – соответствующие значения степени истинности.

Определение 5.2. *Отрицанием* нечёткого высказывания A называется нечёткое высказывание $\overline{A}$, степень истинности которого определяется выражением $\lambda(\overline{A}) = 1 - \lambda(A)$.

Определение 5.3. *Конъюнкцией* нечётких высказываний A и B называется нечёткое высказывание $A \wedge B$, степень истинности которого совпадает со степенью истинности наименее истинного высказывания: $\lambda(A \wedge B) = \min\{\lambda(A); \lambda(B)\}$.

Определение 5.4. *Дизъюнкцией* нечётких высказываний A и B называется нечёткое высказывание $A \vee B$, степень истинности которого совпадает со степенью истинности наиболее истинного высказывания: $\lambda(A \vee B) = \max\{\lambda(A); \lambda(B)\}$.

Определение 5.5. *Импликацией* нечётких высказываний A и B называется нечёткое высказывание $A \to B$, степень истинности которого определяется выражением: $\lambda(A \to B) = \max\{1-\lambda(A); \lambda(B)\}$. Степень истинности импликации не меньше, чем степень ложности её посылки или степень истинности её следствия.

Определение 5.6 *Эквиваленцией* нечётких высказываний A и B называется нечёткое высказывание $A \leftrightarrow B$, степень истинности которого определяется выражением: $\lambda(A \leftrightarrow B) = \min\{\max\{1-\lambda(A); \lambda(B)\}; \max\{1-\lambda(B); \lambda(A)\}\}$. Степень истинности эквиваленции совпадает со степенью истинности менее истинной из импликаций $A \to B$ и $B \to A$.

Из нечётких высказываний при помощи логических операций можно строить составные нечёткие высказывания, степень истинности которых определяется в соответствии с введёнными определениями логических операций. Порядок выполнения операций над нечёткими высказываниями следующий: скобки, отрицание, конъюнкция, дизъюнкция, затем импликация и эквиваленция в порядке следования.

Пример 5.1. Пусть $\lambda(A) = 0{,}4$, $\lambda(B) = 0{,}7$, $\lambda(C) = 0{,}5$. Найдём степень истинности нечёткого высказывания: $(\mathrm{A} \to \mathrm{B}) \vee \mathrm{C}$.

$\lambda((A \to B) \vee C) = \max\{\max\{1-\lambda(A); \lambda(B)\}; \lambda(C)\} = \max\{\max\{1-0{,}4; 0.7\}; 0{,}5\} = \max\{0{,}7; 0{,}5\} = 0{,}7$.

Упражнения

1. Докажите, что все определения логических операций над нечёткими высказываниями не противоречат логическим операциям над чёткими высказываниями.

2. Найдите степень истинности следующих высказываний:
а) $(((A \wedge C) \to B) \to \overline{C})$, где $\lambda(A) = 0{,}9$, $\lambda(B) = 0{,}3$, $\lambda(C) = 0{,}6$;
б) $\overline{A \wedge C} \to \overline{B \leftrightarrow \overline{C}}$, где $\lambda(A) = 0{,}2$, $\lambda(B) = 0{,}6$, $\lambda(C) = 0{,}8$;
в) $((A \to C) \to B) \to A$, где$\lambda(A) = 0{,}7$, $\lambda(B) = 0{,}6$, $\lambda(C) = 0{,}5$.

Контрольные вопросы

1. В чем принципиальное отличие нечёткого от обычного высказывания?
2. Как соотносятся между собой нечёткие и обычные высказывания?
3. Приведите пример утверждения, которое не является высказыванием.
4. Вспомните, какими словами в речи заменяются логические операции: отрицание высказывания $\overline{C}$; конъюнкция высказываний $A \wedge B$; дизъюнкция высказываний $A \vee B$; импликация высказываний $A \to B$; эквиваленция высказываний $A \leftrightarrow B$.

§ 5.2. Нечёткие логические формулы и их свойства

Нечёткой высказывательной переменной называется любая переменная x, вместо которой имеет смысл подставить нечёткое высказывание.

Определение 5.7. Дадим *индуктивное определение нечёткой логической формулы:*

1) любая нечёткая высказывательная переменная является нечёткой логической формулой;
2) если F_1 и F_2 – нечёткие логические формулы, то $F_1 \wedge F_2$, $F_1 \vee F_2$, $F_1 \to F_2$, $F_1 \leftrightarrow F_2$ – нечёткие логические формулы;
3) других правил для образования нечётких логических формул не существует.

В частности, составное нечёткое высказывание является нечёткой логической формулой, если вместо нечётких высказываний подставить нечёткие переменные.

Определение 5.8. *Степень равносильности формул*

$$F_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) \text{ и } F_2(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

обозначается

$$d(F_1(x_1, x_2, ..., x_n);\ F_2(x_1, x_2, ..., x_n))$$

и определяется выражением

$$d(F_1(x_1, x_2, ..., x_n);\ F_2(x_1, x_2, ..., x_n)) = \wedge(F_1(x_1, x_2, ..., x_n)\leftrightarrow F_2(x_1, x_2, ..., x_n)),$$

где операция $\wedge$ берётся по всем определённым наборам степеней истинности высказывательных переменных.

Определение 5.9. Если степень равносильности нечётких логических формул $F_1(x_1, x_2, ..., x_n)$ и $F_2(x_1, x_2, ..., x_n)$ на всех определённых наборах значений переменных больше или равна 0,5, то такие формулы будем называть *нечётко близкими* на этих наборах и обозначать $F_1(x_1, x_2, ..., x_n) \approx F_2(x_1, x_2, ..., x_n)$.

Если $d(F_1(x_1, x_2, ..., x_n);\ F_2(x_1, x_2, ..., x_n)) \le 0{,}5$, то формулы не являются нечётко близкими: $F_1(x_1, x_2, ..., x_n) \approx F_2(x_1, x_2, ..., x_n)$.

Если $d(F_1(x_1, x_2, ..., x_n);\ F_2(x_1, x_2, ..., x_n)) = 0{,}5$, то формулы одновременно являются и не являются нечётко близкими. Их называют *взаимно индифферентными*.

Равносильность чётких логических формул является частным случаем нечёткой близости.

Если нечёткие формулы $F_1(x_1, x_2, ..., x_n)$ и $F_2(x_1, x_2, ..., x_n)$ на одних и тех же наборах значений переменных принимают одинаковые значения истинности, то значение истинности эквиваленции этих формул всегда больше или равно 0,5, следовательно, эти формулы являются нечётко близкими.

Пример 5.2. *Определить степень равносильности формул*

$$F_1(x_1, x_2) = \bar{x}_1 \to x_2,\ F_2(x_1, x_2) = x_1 \wedge \bar{x}_2,$$

если $x_1 \in \{0.8,\ 0.6,\ 0.7\}$ и $x_2 \in \{0{,}3;\ 0{,}4\}$.

Решение: $d(F_1(x_1, x_2);\ F_2(x_1, x_2)) = \wedge(\bar{x}_1 \to x_2)(x_1 \wedge \bar{x}_2)$. Выбирая все возможные наборы значений переменных, запишем:

$$\begin{aligned}
&d(F_1;\ F_2) = ((\overline{0{,}8} \to 0{,}3) \leftrightarrow (0{,}8 \wedge \overline{0{,}3})) \wedge ((\overline{0{,}8} \to 0{,}4)(0{,}8 \wedge \overline{0{,}4})) \wedge \\
&\wedge((\overline{0{,}6} \to 0{,}3) \leftrightarrow (0{,}6 \wedge \overline{0{,}3})) \wedge ((\overline{0{,}6} \to 0{,}4) \leftrightarrow (0{,}6 \wedge \overline{0{,}4})) \wedge \\
&\wedge((\overline{0{,}7} \to 0{,}3) \leftrightarrow (0{,}7 \wedge \overline{0{,}3})) \wedge ((\overline{0{,}7} \to 0{,}4) \leftrightarrow (0{,}7 \wedge \overline{0{,}4})) = \\
&= (0{,}8 \leftrightarrow 0{,}7) \wedge (0{,}8 \leftrightarrow 0{,}6)(0{,}6 \leftrightarrow 0{,}6) \wedge \\
&\wedge (0{,}6 \leftrightarrow 0{,}6) \wedge (0{,}7 \leftrightarrow 0{,}7) \wedge (0{,}7 \leftrightarrow 0{,}6) = \\
&= 0{,}7 \wedge 0{,}6 \wedge 0{,}6 \wedge 0{,}6 \wedge 0{,}7 \wedge 0{,}6 = 0{,}6.
\end{aligned}$$

Формулы $F_1(x_1, x_2) = x_2$ и $F_2(x_1, x_2) = x_1$ нечётко близкие на заданных наборах значений переменных.

Определение 5.10. Если при всех определённых наборах значений переменных формула $F_1(x_1, x_2, ..., x_n)$ принимает значение истинности больше или равное 0,5, то формула называется *нечётко истинной* на данных наборах значений переменных и обозначается И. Если при всех определённых наборах значений переменных формула $F_1(x_1, x_2, ..., x_n)$ принимает значение истинности меньше или равное 0,5, то формула называется *нечётко ложной* на данных наборах значений переменных и обозначается Л.

Пример 5.3. Приведём пример нечётко истинной и нечётко ложной формул на всех наборах значений переменных: И $= x \vee \bar{x}$, Л $= x \wedge \bar{x}$.

Докажем первое равенство:
если $\lambda(x) \leq 0{,}5$, то $\lambda(\bar{x}) \geq 0{,}5$ и $\lambda(x \vee \bar{x}) = \max\{\lambda(x); \lambda(\bar{x})\} = \lambda(\bar{x}) \geq 0{,}5$;
если $\lambda(x) \geq 0{,}5$, то $\lambda(\bar{x}) \leq 0{,}5$ и $\lambda(x \vee \bar{x}) = \max\{\lambda(x); \lambda(\bar{x})\} = \lambda(\bar{x}) \geq 0{,}5$, значит, формула $x \vee \bar{x}$ является нечётко истинной.

Рассмотрим основные *соотношения для нечётких логических формул*.

Пусть $И_1$, $И_2$, $Л_1$, $Л_2$ – некоторые нечётко истинные и нечётко ложные формулы на одних и тех же наборах значений переменных, тогда имеют место соотношения:

1) $И_1 \vee И_2 \approx И_1 \approx И_2 \approx И_1 \wedge И_2$;
2) $Л_1 \vee Л_2 \approx Л_1 \approx Л_2 \approx Л_1 \wedge Л_2$;
3) $Л_1 \wedge И_1 \approx Л_1$;
4) $Л_1 \vee И_1 \approx И_1$.

Если F_1 и $\boldsymbol{F}_2$ – произвольные формулы, определённые на тех же наборах значений переменных, что и $И_1$, $И_2$, $Л_1$, $Л_2$, то:

5) $F_1 \vee И_1 \approx \mathrm{F}_2 \vee И_2$;
6) $F_1 \wedge Л_1 \approx \mathrm{F}_2 \wedge Л_2$.

Пусть F, G и H – произвольные нечёткие логические формулы, тогда:

7) $\overline{\overline{F}} \approx F$;
8) $F \wedge F \approx F$; $F \vee F \approx F$;
9) $F \wedge G \approx G \wedge F$; $F \vee G \approx G \vee F$;
10) $(F \wedge G) \wedge H \approx F \wedge (G \wedge H)$; $(F \vee G) \vee H \approx F \vee (C \vee H)$;
11) $H \vee (F \wedge G) \approx (H \vee F) \wedge (H \vee G)$; $H \wedge (F \vee G) \approx (H \wedge F) \vee (H \wedge G)$;
12) $(\overline{F \wedge G}) \approx \overline{F} \vee \overline{G}$, $(\overline{F \vee G}) \approx \overline{F} \wedge \overline{G}$;

13) $H \vee (F \wedge H) \approx \boldsymbol{H} \wedge (F \vee H) \approx H$;

14) $F \to G \approx \overline{F} \vee G$;

15) $F \to G \approx \overline{G} \to \overline{F}$;

16) $F \leftrightarrow G \approx (F \leftrightarrow G) \wedge (G \leftrightarrow F)$;

Для доказательства соотношений 1–16 необходимо показать, что формулы, стоящие в правой и левой части соотношения на одинаковых наборах значений переменных, принимают значения истинности одновременно $\geq 0{,}5$ или одновременно $\leq 0{,}5$.

Упражнения

1. Найдите степень равносильности следующих нечётких формул:

а) $F(x, y) = \overline{x \wedge y}$ и $G(x, y) = x \to y$, где $x \in \{0{,}1;\ 0{,}5\}$, $y \in \{0{,}4;\ 0{,}7;\ 0{,}8\}$;

б) $F(x, y) = x \leftrightarrow y$ и $G(x, y) = \overline{x \to y}$, где $x \in \{0{,}7;\ 0{,}9\}$, $y \in \{0{,}5;\ 0{,}8\}$;

в) $F(x, y) = \bar{x} \wedge y$ и $G(x, y) = \overline{x \vee y}$, где $x \in \{0{,}1;\ 0{,}3;\ 0{,}9\}$, $y \in \{0{,}2;\ 0{,}8\}$.

Какие из данных формул являются нечётко близкими на заданных наборах значений переменных?

2. Выясните, какие из следующих формул являются нечётко истинными, а какие нечётко ложными на заданных наборах значений переменных:

а) $F(x, y) = (x \to y) \vee (\bar{x} \wedge \bar{y})$, где $x \in \{0.1, 0.2\}$, $y \in \{0.4, 0.7\}$;

б) $F(x, y) = x \wedge (\overline{x \to y})$, где $x \in \{0.7, 0.9\}$, $y \in \{0.5\}$;

в) $G(x, y) = (\bar{x} \wedge y) \to (\overline{x \vee y})$, где $x \in \{0.1\}$, $y \in \{0.2, 0.8\}$.

3. Докажите нечёткую ложность формул:

а) $F(x_1, x_2) = (x_1 \to x_2) \wedge \neg(x_1 \to x_2)$;

б) $F(x_1, x_2) = (x_1 \leftrightarrow x_2) \wedge \neg(x_1 \leftrightarrow x_2)$.

4. Докажите нечёткую истинность формул

а) $F(x_1, x_2) = (x_1 \to x_2) \vee \neg(x_1 \to x_2)$;

б) $F(x_1, x_2) = (x_1 \leftrightarrow x_2) \vee \neg(x_1 \leftrightarrow x_2)$.

5. Докажите нечёткую близость формул

а) $F(x, y) = (x \vee \neg x) \vee (y \wedge \neg y)$ и $\boldsymbol{G}(x) = x \vee \neg x$;

б) $F(x, y) = (x \wedge \neg x) \wedge (y \vee \neg y)$ и $G(x) = x \wedge \neg x$.

6. Докажите соотношения 1–16.

Контрольные вопросы

1. В чём принципиальное отличие определения нечёткой логической формулы от обычной логической формулы?
2. Почему при изучении нечётких логических формул не вводятся в рассмотрение таблицы истинности формул?
3. Какие логические законы, имеющие место для обычных логических формул, не выполняются на множестве нечётких логических формул?
4. Какие значения будет принимать степень равносильности обычных формул?

§ 5.3. Нечёткие предикаты и кванторы

Определение 5.11. Пусть X_1, X_2, ..., X_n – универсальные множества, $X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_n$ – декартово произведение множеств. *n-местным нечётким предикатом* $P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, заданным на множестве $X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_n$, называется переменное высказывание, зависящее от нечётких переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ($x_1 \in X_1$, $x_2 \in X_2$, ..., $x_n \in X_n$), которое превращается в нечёткое высказывание, если всем переменным придать конкретные значения из соответствующих множеств.

Пример 5.4. На множестве $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ зададим одноместный предикат $P(x)$: «x примерно равно 4». Если нечёткой переменной придать конкретное значение, например $x = 3$, и подставить в нечёткий предикат, то получим нечёткое высказывание $P(3,5)$: «3,5 примерно равно 4». Для каждого конкретного $x \in X$ можно определить степень истинности нечёткого высказывания $P(x)$, например так: $\lambda(P(1)) = 0{,}1$, $\lambda(P(2)) = 0{,}3$, $\lambda(P(3)) = 0{,}6$, $\lambda(P(4)) = 1$, $\lambda(P(5)) = 0{,}6$.

Пример 5.5. На множестве $X \times X$, где X – множество людей, зададим нечёткий 2-местный предикат $P(x_1, x_2)$: «x_1 дружит с x_2».

Пример 5.6. На множестве $X_1 \times X_2 \times X_3$, где X_1 – множество людей, X_2 – множество профессий, X_3 – множество городов, зададим нечёткий предикат $P(x_1, x_2, x_3)$: «x_1 имеет замечательную профессию x_2 и живёт в красивом городе $x3$».

Рассмотрим одноместные предикаты $P(x)$, заданные на конечном множестве. Пусть на $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ задан предикат $P(x)$. Для каждого $x_i \in$X можно определить значение истинности $\lambda(P(x_i))$, так как $P(x_i)$ – нечёткое высказывание.

Определение 5.12. Величина $v(P) = \lambda(P(x_1))\wedge\lambda(P(x_2))\wedge\ldots\wedge\lambda(P(x_n))$ называется *степенью общности свойств предиката* $P(x)$ для элементов множества X.

Если $v(P) \geq 0{,}5$, то на предикат $P(x)$ может быть навешан *квантор нечёткой общности* (символ читается «всякий», «каждый»). Выражение $xP(x)$ читается «для всех x степень истинности $P(x)$ больше или равна 0,5».

Пример 5.7. Найдём степень общности свойств предиката P(x) из примера 5.4:

$$v(P) = \lambda(P(1))\wedge\lambda(P(2))\wedge\lambda(P(3))\wedge\lambda(P(4))\wedge\lambda(P(5)) =$$
$$= \min\{0.1,\ 0.3,\ 0.6,\ 1,\ 0.6\} = 0{,}1.$$

Так как $v(P) < 0{,}5$, то на нечёткий предикат $P(x)$ нельзя навесить квантор нечёткой общности.

Определение 5.13. Величина $\tau(P) = \lambda(P(x_1))\wedge\lambda(P(x_2))\wedge\ldots\wedge\lambda(P(x_n))$ называется *степенью существования свойств предиката* $P(x)$ для элементов множества X.

Если $\tau(P) \geq 0{,}5$, то на предикат $P(x)$ может быть навешан *квантор нечёткого существования* $\exists$ (символ $\exists$ читается «существует», «найдётся»). Выражение $\exists xP(x)$ читается «найдётся x такой, что степень истинности $P(x)$ больше или равна 0,5» или «для некоторых x степень истинности $P(x)$ больше или равна 0,5».

Пример 5.8. Найдём степень существования свойств предиката P(x) из примера 1:

$$\tau(P) = \lambda(P(1))\vee\lambda(P(2))\vee\lambda(P(3))\vee\lambda(P(4))\vee\lambda(P(5)) =$$
$$= \max\{0{,}1,\ 0{,}3,\ 0{,}6,\ 1,\ 0{,}6\} = 1.$$

Так как $v(P) \geq 0{,}5$, то на нечёткий предикат P(x) можно навесить квантор нечёткого существования. Выражение $\exists xP(x)$ читается так: «среди элементов множества X = {1, 2, 3, 4, 5} найдётся элемент x такой, что степень истинности P(x) будет больше или равна 0,5».

Упражнения

Приведите пример нечёткого одноместного предиката $P(x)$, заданного на множестве X, на который:

1) можно навесить квантор нечёткой общности, но нельзя навесить квантор нечёткого существования;
2) можно навесить квантор нечёткого существования, но нельзя навесить квантор нечёткой общности;
3) можно навесить и квантор нечёткой общности, и квантор нечёткого существования;
4) нельзя навесить квантор нечёткой общности и квантор нечёткого существования.

Контрольные вопросы

1. В чём принципиальное отличие в определении нечёткого предиката и обычного предиката?
2. Можно ли ввести понятие степени общности свойств обычного предиката? Можно ли определить операцию навешивания квантора всеобщности на обычный предикат через понятие степени общности свойств предиката?
3. Можно ли ввести понятие степени существования свойств обычного предиката? Можно ли определить операцию навешивания квантора существования на обычный предикат через понятие степени существования свойств предиката?

§ 5.4. Нечеткая и лингвистическая переменные. Нечёткие лингвистические высказывания

Понятие нечеткой и лингвистической переменных используется при описании объектов и явлений с помощью нечетких множеств.

Определение 5.14. *Нечеткая переменная* характеризуется тройкой $<\alpha, X, A>$, где α – наименование переменной; X – универсальное множество (область определения α); A – нечеткое множество на X, с функцией принадлежности $\mu_A(x)$, описывающей возможные значения, которые принимает нечёткая переменная α. В качестве примера нечёткой переменной α можно привести нечёткое множество A «Средняя скорость автомобиля». В этом случае соответствующая нечёткая переменная может быть представлена следующим образом: <«Средняя скорость автомобиля», X = [0, 400), A>, где A – нечёткое множество с функцией принадлежности в виде ТНИ A_T = <40, 80, 10, 10>.

Определение 5.15. *Нечёткой лингвистической переменной* называется набор $<\beta, T, X, G, M>$, где β – наименование лингвистической переменной; T – множество ее значений (терм-множество), представляющих собой наименования нечетких переменных, областью определения каждой из которых является множество X. Множество T называется базовым терм-множеством лингвистической переменной; X – универсальное множество – область определения нечётких переменных, которые входят в определение лингвистической переменной β; G – синтаксическая процедура, которая описывает процесс образования из множества T новых значений (термов) для данной лингвистической переменной, например при помощи логических операций «и», «или», «не», модификаторов типа «очень», «слегка» и т. д.; M – семантическая процедура, позволяющая превратить каждое новое значение лингвистической переменной, образуемое процедурой G, в нечеткую переменную, т. е. сформировать соответствующее нечеткое множество.

Пример 5.9. Пусть эксперт определяет толщину выпускаемого изделия с помощью понятий «*малая толщина*», «*средняя толщина*» и «*большая толщина*», при этом минимальная толщина равна 10 мм, а максимальная – 80 мм.

Формализация такого описания может быть проведена с помощью лингвистической переменной $<\beta, T, X, G, M>$, где β – толщина изделия; T – {«*малая толщина*», «*средняя толщина*», «*большая толщина*»}; X – [10, 80]; G – процедура образования новых термов с помощью связок «*и*», «*или*» и модификаторов типа «*очень*», «*не*», «*слегка*» и др. Например: «*малая или средняя толщина*», «*очень малая толщина*» и др.; M – процедура задания на X = [10, 80] нечетких множеств A_1 = «*малая толщина*», A_2 = «*средняя толщина*», A_3 = «*большая толщина*» (рис. 17), а также нечетких множеств для термов из G в соответствии с правилами трансляции нечетких логических операций «*и*», «*или*», «*не*» и операции возведения в степень, в частности операции концентрации и растяжения «*очень*», «*слегка*» и др. операции над нечеткими множествами вида: $A_1 \cap A_2$, $A_1 \cup A_2$ $\overline{A}$, A^2, $A^{0,5}$ и др.

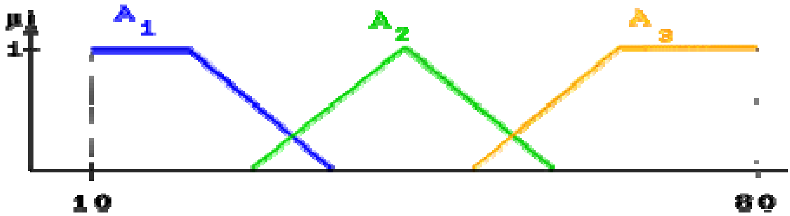

Рис. 17. Функции принадлежности нечетких множеств: *«малая толщина»* = A_1; *«средняя толщина»* = A_2; *«большая толщина»* = A_3

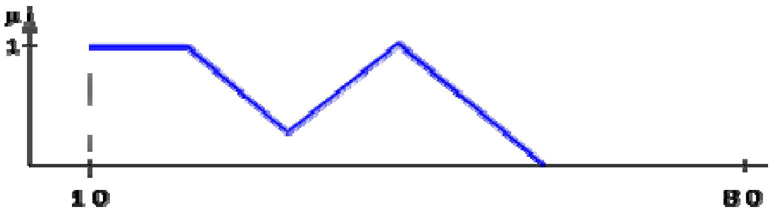

Рис. 18. Функция принадлежности: нечеткое множество *«малая или средняя толщина»* = $A_1 \cup A_2$

Замечание. Наряду с рассмотренными выше базовыми значениями лингвистической переменной *«толщина»* (T = {*«малая толщина»*, *«средняя толщина»*, *«большая толщина»*}) возможны значения, зависящие от области определения X. Например, значения лингвистической переменной «толщина изделия» могут быть определены как *«около 20 мм»*, *«около 50 мм»*, *«около 70 мм»*, «в пределах от 55 до 60 мм», т. е. в виде нечетких чисел и интервалов.

Определение 5.16. *Нечёткым лингвистическим высказыванием* будем называть нечёткие высказывания следующих видов.

1. Высказывание «β есть α», где β – наименование лингвистической переменной; α – её значение, которому соответствует отдельный лингвистический терм из базового терм-множества T лингвистической переменной β.

2. Высказывание «β есть ∇ α», где ∇ – модификатор, соответствующий таким словам, как «очень», «более или менее», «много больше» и другим, которые могут быть получены с использованием процедур G и M данной лингвистической переменной.

3. Составные высказывания, образованные из высказываний видов 1 и 2 и нечётких логических операций конъюнкции, дизъюнкции, отрицания, импликации.

Пример 5.10. Нечёткое лингвистическое высказывание первого вида – «скорость автомобиля высокая», где лингвистической переменной «скорость автомобиля» присваивается значение «высокая».

Нечёткое лингвистическое высказывание второго вида – «скорость автомобиля очень высокая» означает, что лингвистической переменной «скорость автомобиля» присваивается значение «высокая» с модификатором «очень».

Нечёткое лингвистическое высказывание третьего типа «скорость автомобиля высокая и расстояние до светофора близкое» означает, что первой лингвистической переменной «скорость автомобиля» присваивается значение «высокая», а второй лингвистической переменной «расстояние до светофора» присваивается значение «близкое». Эти нечёткие высказывания первого типа соединены логической операцией нечёткой конъюнкции.

Упражнения

1. Задайте нечёткие лингвистические переменные:

а) «скорость автомобиля»;

б) «возраст человека»;

в) «температура воздуха»;

г) «размер зарплаты».

2. Придумайте пример нечёткой лингвистической переменной.

3. Приведите пример нечёткого лингвистического высказывания.

Контрольные вопросы

1. Как вы понимаете смысл словосочетаний «нечёткая лингвистическая переменная» и «нечёткое лингвистическое высказывание»?
2. Существуют ли аналоги нечётких лингвистических переменных и высказываний в классической логике?

Тема 6. СИСТЕМЫ НЕЧЁТКОГО ЛОГИЧЕСКОГО ВЫВОДА

Учебные вопросы

1. Основные этапы нечёткого логического вывода.
2. База правил нечёткого вывода.
3. Фаззификация входных переменных.
4. Агрегирование условий базы правил.
5. Активация подзаключений базы правил.
6. Аккумулирование заключений нечётких правил.

Изучив данную тему, студент должен:

знать

- сущность и назначение систем нечёткого логического вывода;
- последовательность и назначение каждого этапа нечёткого логического вывода;

уметь

- определять задачи, для которых применим нечёткий логический вывод;
- применять нечёткий логический вывод для решения конкретных задач.

Методические рекомендации по изучению темы

При освоении темы необходимо:

- изучить учебный материал параграфов темы;
- выполнить упражнения после параграфов;
- ответить на контрольные вопросы.

§ 6.1. Механизм нечёткого логического вывода

Системы нечёткого вывода позволяют решать задачи автоматического управления, классификации данных, распознавания образов, принятия решения, машинного обучения и др.

Процесс нечёткого вывода представляет собой алгоритм получения нечётких заключений на основе нечётких условий или предпосылок с использованием аппарата нечёткой логики. Системы нечёткого вывода предназначены для реализации процесса нечёткого вывода.

Механизм нечёткого вывода включает следующие этапы:

- формирование базы нечётких правил, связывающих входные и выходные переменные;
- фаззификация входных переменных;
- агрегирование условий в нечётких правилах;
- активация подзаключений в нечётких правилах;
- аккумулирование заключений нечётких правил;
- дефаззификация.

Рассмотрим каждый этап нечёткого вывода и продемонстрируем его на конкретном примере.

Задача. Пусть имеется реактор, описываемый тремя параметрами: температура, давление и расход рабочего вещества. Все показатели измеримы, множество возможных значений известно. Из опыта работы с системой известны некоторые правила, связывающие значения этих параметров: *если температура низкая и расход рабочего вещества малый, то давление низкое; если температура средняя, то давление среднее; если температура высокая или расход большой, то давление высокое.* Предположим, что сломался датчик, измеряющий значение давления, но знать его показания необходимо хотя бы приблизительно. Тогда встает задача об отыскании показателя давления при известных показателях двух других параметров: температура – 85 и расход – 3,5.

§ 6.2. Формирование базы нечётких правил

Правила систем нечёткого вывода предназначены для формального представления эмпирических знаний или знаний экспертов в той или иной проблемной области. Правила формулируются в виде импликации, то есть с использованием связки «Если..., то...». Условия и заключения правил формулируются в терминах нечётких лингвистических высказываний.

База правил представляет собой конечное множество правил, согласованных относительно используемых в них лингвистических переменных. Наиболее часто база правил представляется в виде структурированного текста:

ПРАВИЛО 1: ЕСЛИ «Условие 1», ТО «Заключение 1» (F_1)

ПРАВИЛО 2: ЕСЛИ «Условие 2», ТО «Заключение 2» (F_2)

...

ПРАВИЛО n: ЕСЛИ «Условие n», ТО «Заключение n» (F_n)

Здесь через F_i ($i \in \{1, 2, ..., n\}$) обозначены коэффициенты определённости или весовые коэффициенты соответствующих правил. Эти коэффициенты могут принимать значения из интервала [0; 1]. Весовые коэффициенты показывают степень важности каждого правила относительно других правил: чем ближе значение коэффициента к 1, тем значимее это правило. В случае если весовые коэффициенты отсутствуют, считается, что их значения равны 1.

Условия, входящие в правила, могут быть простыми и составными. Простое условие имеет вид «β есть α», где β – нечёткая лингвистическая переменная, а α – одно из возможных значений лингвистической переменной. Составное условие представляет собой конъюнкцию или дизъюнкцию простых условий, например: «β_1 есть α_1^1» И «β_2 есть α_2^1» или «β_1 есть α_1^1» ИЛИ «β_2 есть α_2^1».

Заключения нечётких правил также могут быть простыми, то есть иметь вид «ω есть γ», где ω – нечёткая лингвистическая переменная, а γ – одно из возможных значений лингвистической переменной, или составными, то есть иметь вид «ω_1 есть γ_1^1» И «ω_2 есть γ_2^1» или «ω_1 есть γ_1^1» ИЛИ«ω_2 есть γ_2^1».

В системах нечёткого вывода лингвистические переменные, которые используются в нечётких высказываниях условий правил, называют *входными лингвистическими переменными*, а переменные, которые используются в нечётких высказываниях заключений правил, называют *выходными лингвистическими переменными*.

Таким образом, при задании базы правил необходимо определить:

- множество правил $P = \{P_1, P_2, ..., P_n\}$;
- множество входных лингвистических переменных $V = \{\beta_1, \beta_2, ..., \beta_n\}$;
- для каждой лингвистической переменной β_i универсум X_i, терм-множество $T_{\beta i} = \{\alpha_i^1, \alpha_i^2, ..., \alpha_i^t\}$, процедуры G и M, графики функций принадлежности для всех термов;

- множество выходных лингвистических переменных $W = \{\omega_1, \omega_2, ..., \omega_m\}$;
- для каждой выходной лингвистической переменной ω_j универсум Y_j, терм-множество $T_{\alpha j} = \{\gamma_j^1, \gamma_j^2, ..., \gamma_j^r\}$, процедуры G и M, графики функций принадлежности для всех термов.

В качестве функций принадлежности термов чаще всего используются кусочно-линейные функции принадлежности.

Полнота базы правил означает, что для каждой возможной ситуации, рассматриваемой в задаче, существует хотя бы одно нечёткое правило, посылка которого имеет ненулевую степень принадлежности.

Непротиворечивость базы правил трактуется как отсутствие правил, имеющих сходные посылки и различные или взаимоисключающие следствия.

Сформулируем базу правил для задачи о работе реактора.

ПРАВИЛО 1: ЕСЛИ «*температура низкая*» И «*расход рабочего вещества малый*», ТО «*давление низкое*» ($F_1 = 1$).

ПРАВИЛО 2: ЕСЛИ «*температура средняя*», ТО «*давление среднее*» ($F_2 = 1$).

ПРАВИЛО 3: ЕСЛИ «*температура высокая*» ИЛИ «*расход рабочего вещества большой*», ТО «*давление высокое*» ($F_3 = 1$).

Множество входных лингвистических переменных содержит две переменные: β_1 – «температура» и β_2 – «расход рабочего вещества».

Входная переменная β_1 –«температура» может принимать значения из терм-множества $T_{\beta 1} = \{\alpha_1^1$ – «низкая»; α_1^2 – «средняя»; α_1^3 – «высокая»$\}$. Термы заданы на универсуме $X_1 = [0;\ 150]$. На рис. 19 представлены графики функций принадлежности термов множества $T_{\beta 1}$.

Входная переменная β_2 – «расход рабочего вещества» принимает значения из терм-множества $T_{\beta 2} = \{\alpha_2^1$ – «малый»; α_2^2 – «средний»; α_2^3 – «высокий»$\}$. Термы заданы на универсуме $X_2 = [0;\ 8]$. На рис. 20 представлены графики функций принадлежности термов множества $T_{\beta 2}$.

Рис. 19. Графики функций принадлежности термов входной лингвистической переменной β_1 – «температура»

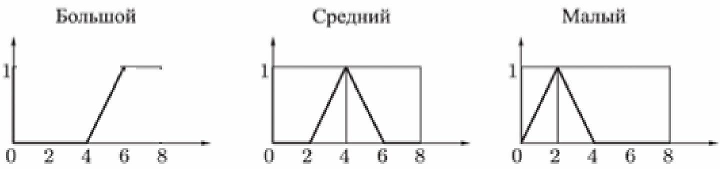

Рис. 20. Графики функций принадлежности термов входной лингвистической переменной β_2 – «расход рабочего вещества»

Множество выходных лингвистических переменных состоит из одной переменной ω_1 – «давление», которая принимает значения на терм-множестве $T_{\omega 2} = \{\gamma_1^1$ – «низкое»; γ_1^2 – «среднее»; γ_1^3 – «высокое»$\}$. Термы заданы на универсуме $У = \{0; 100\}$. На рис. 21 представлены графики функций принадлежности термов множества $T_{\omega 2}$.

Рис. 21. Графики функций принадлежности термов выходной лингвистической переменной ω_1 – «давление».

§ 6.3. Фаззификация

Целью этапа фаззификации (введение нечёткости) является установление соответствия между конкретным (обычно численным) значением x_i из универсума X_i каждой входной лингвистической переменной β_i системы нечёткого вывода и значением функций принадлежности термов входной лингвистической переменной. После завершения этого этапа для всех входных переменных должны быть определены конкретные значения функций принадлежности по каждому из лингвистических термов, которые используются в условиях (подусловиях) базы правил системы нечёткого вывода.

В условии задачи о реакторе известны значения входной переменной β_1 –«температура» $x_1 = 85$ и входной переменной β_2 – «расход топлива» $x_2 = 3{,}5$. Найдем значения функций принадлежности каждого терма входных лингвистических переменных.

Для термов входной лингвистической переменной β_1 – «температура»:

– терм α_1^1 – «температура высокая» при $x_1 = 85$ имеет значение функции принадлежности $\mu(\alpha_1^3(85)) = 0{,}7$;
– терм α_1^2 – «температура средняя» при $x_1 = 85$ имеет значение функции принадлежности $\mu(\alpha_1^2(85)) = 1$;
– терм α_1^3 – «температура низкая» при $x_1 = 85$ имеет значение функции принадлежности $\mu(\alpha_1^3(85)) = 0{,}3$.

Для термов входной лингвистической переменной β_2 – «расход рабочего вещества»:

– терм α_2^1 – «расход большой» при $x_2 = 3{,}5$ имеет значение функции принадлежности $\mu(\alpha_2^3(3{,}5)) = 0$;
– терм α_2^2 – «расход средний» при $x_2 = 3{,}5$ имеет значение функции принадлежности $\mu(\alpha_2^2(3{,}5)) = 0{,}75$;
– терм α_2^3 – «расход малый» при $x_2 = 3{,}5$ имеет значение функции принадлежности $\mu(\alpha_2^1(3{,}5)) = 0{,}25$.

§ 6.4. Агрегирование условий

Агрегирование условий представляет собой процедуру определения степени истинности условий по каждому из правил системы нечёткого вывода. Если условие правила является простым, то степень истинности такого условия уже найдена на предыдущем этапе. Если условие составное, то согласно определению операций «конъюнкция» и «дизъюнкция» находится степень истинности составного условия.

Вычислим степени истинности условий по каждому из правил нечёткого вывода в задаче о реакторе.

Правило 1. Условие 1: «температура низкая» И «расход малый», $\mu_1 = \min(0,3,\ 0,25) = 0,25$.

Правило 2. Условие 2: «температура средняя», $\mu_2 = 1$.

Правило 3. Условие 3: «температура высокая» ИЛИ «расход большой», $\mu_3 = \max(0.7,\ 0) = 0,7$.

§ 6.5. Активация подзаключений

Активация в системах нечёткого вывода представляет собой процесс нахождения *степени истинности каждого из подзаключений* правил нечётких продукций и определения *функции принадлежности всех подзаключений* для каждого правила в базе нечётких правил.

Если заключение нечёткого правила является простым, то степень истинности заключения λ равна произведению степени истинности μ условия данного правила на весовой коэффициент F правила: $\lambda = \mu \cdot F$.

Если заключение составное, то есть представляет собой конъюнкцию или дизъюнкцию двух или более подзаключений, то степень истинности каждого из подзаключений находится как произведение степени истинности условия данного правила на весовой коэффициент этого правила. В результате имеем множество C значений истинности каждого подзаключения базы правил $C = \{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p\}$, где p – общее количество подзаключений в базе правил.

В задаче о реакторе все правила имеют простые заключения и весовые коэффициенты $F_1 = F_2 = F_3 = 1$. Найдём значения степени истинности заключения для каждого правила.

Правило 1: заключение «давление низкое» $\lambda_1 = 0,25 \cdot 1 = 0,25$.

Правило 2: заключение «давление среднее» $\lambda_2 = 1 \cdot 1 = 1$.

Правило 3: заключение «давление высокое» $\lambda_3 = 0,7 \cdot 1 = 0,7$.

Функции принадлежности каждого подзаключения для выходных лингвистических переменных находятся по одному из следующих правил:

– min-активация:

$$\gamma'(y) = \min\{\lambda_i; \gamma(y)\};$$

– prod-активация:

$$\gamma'(y) = \lambda_i \cdot \gamma(y);$$

– averg-активация:

$$\gamma'(y) = 0{,}5(\lambda_i + \gamma(y)),$$

где $\gamma(y))$ – функция принадлежности терма, который является значением некоторой выходной переменной ω_j, заданной на универсуме Y.

Этап активации считается законченным, если для каждой выходной лингвистической переменной ω_j, входящей в отдельные подзаключения нечётких правил, будут определены функции принадлежности $\gamma'^{k}_{j}(y)$, соответствующие нечёткому множеству C_j^k их значений, где j – номер переменной; k – номер нечёткого правила.

Для задачи о реакторе найдём функции принадлежности выходной лингвистической переменной для заключения каждого нечёткого правила по формуле min-активации.

Правило 1: $\gamma'^{1}_{1}(y) = \min\{0{,}25; \gamma_1^1(y)\}$.

Правило 2: $\gamma'^{2}_{1}(y) = \min\{1; \gamma_1^2(y)\} = \gamma_1^2(y)$.

Правило 3: $\gamma'^{3}_{1}(y) = \min\{0{,}7; \gamma_1^3(y)\}$.

На рис. 22 представлены графики функций $\gamma'^{1}_{1}(y)$, $\gamma'^{2}_{1}(y)$, $\gamma'^{3}_{1}(y)$ выходной лингвистической переменной ω_1 «давление» для каждого нечёткого правила. С каждой функцией принадлежности отождествляется некоторое нечёткое множество. Например, $\gamma'^{1}_{1}(y)$ является функцией принадлежности нечёткого множества C_1^1, $\gamma'^{2}_{1}(y)$ является функцией принадлежности нечёткого множества C_1^2, $\gamma'^{3}_{1}(y)$ является функцией принадлежности нечёткого множества C_1^3.

Рис. 22. Графики функций $\gamma'^{1}_{1}(y)$, $\gamma'^{2}_{1}(y)$, $\gamma'^{3}_{1}(y)$ выходной лингвистической переменной ω_1 «давление»

§ 6.6. Аккумулирование заключений нечётких правил

Аккумулирование (или аккумуляция) заключений в системах нечёткого вывода представляет собой процедуру нахождения функции принадлежности для каждой из выходных лингвистических переменных. Цель аккумулирования заключается в объединении (аккумуляции) всех степеней истинности заключений (подзаключений) для получения функции принадлежности каждой из выходных переменных ω_j. Результат аккумуляции для выходной лингвистической переменной ω_j находится в виде графика функции $\gamma'_j(y)$ принадлежности множества $C = \bigcup_k C_j^k$.

В задаче о ректоре рассматривается только одна выходная переменная ω_1, поэтому результат аккумулирования заключений нечётких правил представлен одним графиком функции $\gamma'_1(y)$, которая изображена на рис. 23. $\gamma'_1(y) = \max\{\gamma'^1_1(y),\ \gamma'^2_1(\mathrm{y}),\ \gamma'^3_1(y)\}$, где max берётся по всем значениям $y \in У_1$.

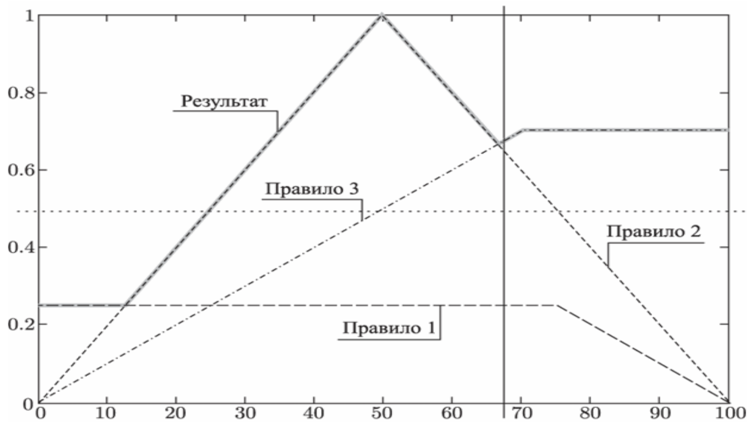

Рис. 23. График функции $\gamma'_1(y)$

$\gamma'_1(y)$ является функцией принадлежности нового терма выходной переменной ω_1 «давление». Его функция принадлежности говорит о степени уверенности в значении давления при заданных значениях входных параметров и использовании правил, определяющих соотношение входных и выходных переменных. Но обычно все-таки необходимо какое-то конкретное числовое значение. Для его получения используется этап дефаззификации, т. е. получения конкретного значения из универсума Y по заданной на нем функции принадлежности.

§ 6.7. Дефаззификация

Дефаззификация в системах нечёткого вывода представляет собой процедуру нахождения обычного (не нечёткого) значения для каждой из выходных лингвистических переменных $W = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_m\}$. Цель дефаззификации заключается в том, чтобы, используя результаты аккумуляции всех выходных переменных, получить обычное количественное значение каждой из выходных переменных, которое может быть использовано специальными устройствами, внешними по отношению к системе нечёткого вывода. Дефаззификацию называют приведением к чёткости.

Результат дефаззификации для выходной лингвистической переменной ω_j ($\gamma'_j(y)$ – функция принадлежности результирующего терма выходной лингвистической переменной ω_j, полученная на этапе аккумулирования, определяется в виде количественного значения $y_j \in Y$, получаемого по одной из следующих формул, названных *методами дефаззификации*.

1. *Центр тяжести* площади, ограниченной графиком функции $\gamma'_j(y)$:

$$y_j = \frac{\int_{\min}^{\max} y \cdot \gamma'_{j(y)dy}}{\int_{\min}^{\max} \gamma'_{j(y)dy}}. \tag{6.1}$$

В формуле (6.1) используются следующие обозначения: y_j – результат дефаззификации; y – переменная, соответствующая выходной лингвистической переменной ω_j; $\gamma'_j(y)$ – функция принадлежности нечёткого множества, соответствующего выходной лингвистической переменной ω_j после этапа аккумуляции; min и max – левая и правая точки интервала носителя нечёткого множества рассматриваемой выходной переменной.

2. *Метод центра тяжести* для одноточечных множеств рассчитывается по формуле

$$y_j = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i \cdot \gamma'_{j(yi)}}{\sum_{i=1}^{n} \gamma'_{j(yi)}}. \qquad (6.2)$$

В формуле (6.2) n – число одноточечных (одноэлементных) нечётких множеств, каждое из которых характеризует единственное значение рассматриваемой выходной лингвистической переменной.

3. *Метод центра площади*. Центр площади $y_j = u$ определяется из уравнения

$$\int_{\min}^{u} \gamma'_{j(y)dy} = \int_{u}^{\max} \gamma'_{j(y)dy}. \qquad (6.3)$$

Центр площади равен абсциссе, которая делит площадь, ограниченную графиком кривой функции принадлежности выходной переменной, на две равные части. Иногда центр площади называют биссектрисой площади. Этот метод не может быть использован в случае одноточечных множеств.

4. *Метод левого модального значения*. Левое модальное значение рассчитывается по формуле

$$y_j = \min \{y_m\}, \qquad (6.4)$$

где y_m – модальное значение нечёткого множества, соответствующего выходной переменной после аккумуляции.

Другими словами, значение выходной переменной определяется как мода нечёткого множества для соответствующей выходной переменной или наименьшая из мод (самая левая), если нечёткое множество имеет несколько модальных значений.

5. *Метод правого модального значения*. Правое модальное значение рассчитывается по формуле

$$y_j = \max \{y_m\}, \qquad (6.5)$$

В этом случае значение выходной переменной также определяется как мода нечёткого множества для соответствующей выходной переменной или наибольшая из мод (самая правая), если нечёткое множество имеет несколько модальных значений.

Для задачи о реакторе воспользуемся методом левого модального значения, формулой (6.4): $y_1 = 50$. Заметим, что метод правого модального значения – формула (6.5) даст такой же результат, так как рассматриваемое множество содержит только одно модальное значение.

Упражнения

1. *Отбор игрока в баскетбольную команду*. Требуется оценить шансы игрока быть отобранным в баскетбольную команду на основе оценки техники игры и роста игрока. Техника игры оценивается в баллах от 0 до 100 в соответствии с табл. 1. Рост игрока измеряется в сантиметрах и оценивается по табл. 2. Уверенность игрока быть зачисленным в команду определяется из табл. 3. Для некоторого игрока известно: техника игры оценивается в 47 баллов, а его рост равен 206 см. Зависимость *уверенности игрока быть зачисленным в команду* от его *роста* и *техники игры* представлена в табл. 4.

Таблица 1

Характеристики оценки техники игры

Техника игры	*Нижнее значение*	*Верхнее значение*
Отличная	85	100
Очень хорошая	60	90
Хорошая	45	70
Не очень плохая	25	50
Плохая	10	35

Таблица 2

Характеристики роста игроков

Рост	*Нижнее значение*	*Верхнее значение*
Очень высокий	220	230
Высокий	205	223
Не очень высокий	190	210
Низкий	180	195

Таблица 3

Характеристика уверенности отбора в команду (0–100%)

Уверенность	*Нижнее значение*	*Верхнее значение*
Полная	80	100
Средняя	60	85
Малая	35	65
Очень малая	20	40
Нет	0	25

Таблица 4

Рост / Техника	Очень высокий	Высокий	Не очень высокий	Низкий
Отличная	полная	полная	средняя	средняя
Очень хорошая	полная	полная	средняя	средняя
Хорошая	полная	полная	средняя	очень малая
Не очень хорошая	средняя	средняя	очень малая	нет
Плохая	очень малая	очень малая	очень малая	нет

2. *Задача о чаевых в ресторане*. Разработать экспертную систему, которая была бы реализована в виде системы нечёткого вывода и позволяла бы определять величину чаевых на основе субъективных оценок посетителей ресторана качества обслуживания и качества приготовления заказных блюд. Эмпирические знания о рассматриваемой проблеме представлены в форме следующих эмпирических правил: *если обслуживание плохое или ужин подгоревший, то чаевые малые; если обслуживание хорошее, то чаевые средние; если обслуживание отличное или ужин превосходный, то чаевые высокие*.

3. Придумайте задачу, которая решается при помощи системы нечёткого вывода.

Контрольные вопросы

1. Перечислите, какие понятия нечёткой математики используются для проектирования системы нечёткого логического вывода.
2. Прокомментируйте каждый шаг алгоритма нечёткого вывода. Какой смысл они имеют?

Тема 7. ЗАДАЧИ ПРИНЯТИЯ РЕШЕНИЙ НА БАЗЕ НЕЧЁТКОЙ МАТЕМАТИКИ

Учебные вопросы

1. Задача принятия решения группой экспертов, характеризуемых весовыми коэффициентами.
2. Задача принятия решения группой экспертов, характеризуемых нечётким отношением нестрогого предпочтения.

Изучив данную тему, студент должен:

знать

- алгоритм задачи принятия решения группой экспертов, характеризуемых весовыми коэффициентами;
- алгоритм задачи принятия решения группой экспертов, характеризуемых нечётким отношением нестрогого предпочтения;

уметь

- формулировать задачи, для решения которых можно применить названные алгоритмы;
- решать задачи принятия решения, используя названные алгоритмы.

Методические рекомендации по изучению темы

При освоении темы необходимо:

- изучить учебный материал параграфов;
- акцентировать внимание на математическом аппарате, который используется в алгоритмах;
- выполнить упражнения после параграфов;
- ответить на контрольные вопросы после параграфов.

§ 7.1. Задача принятия решения группой экспертов, характеризуемых весовыми коэффициентами

Постановка задачи. Лицу, принимающему решение (ЛПР), требуется принять решение по некоторой проблеме. $U = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ – множество альтернативных решений проблемы, где u_i – возможные решения проблемы ($i = 1, \ldots, n$). ЛПР имеет мнение m экспертов $e_1, e_2, \ldots, e_m$ относительно существующих альтернатив в виде нечётких отношений нестрогого предпочтения. Каждый эксперт e_i задаёт свое нечёткое отношение нестрогого предпочтения Q_i в виде матриц M_{Qi}, в котором выражает степень предпочтения альтернативы u_i над альтернативой uj. ЛПР по-разному относится к мнению экспертов, что находит отражение в соответствующих весовых коэффициентах $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_m$, то есть ЛПР каждому эксперту u_i присваивает коэффициент λ_i, $0 \leq \lambda_i \leq 1$, $(i = 1, ..., n)$, $\lambda_1 + \lambda_2 + ... + \lambda_m = 1$.Чем ближе значение весового коэффициента к 1, тем выше ЛПР ценит мнение эксперта. Требуется принять решение по проблеме с учётом мнения экспертов относительно множества альтернатив U и отношения ЛПР к экспертам.

Алгоритм решения задачи

1. Найти нечёткое отношение нестрогого предпочтения Q как *пересечение* нечётких отношений $Q_1, Q_2, ..., Q_m$. M_Q – матрица отношения Q. (Нечёткое отношение Q_{MP} выражает *совместное пессимистическое, критическое или минимальное мнение экспертов* относительно парных сравнений альтернатив из множества U.)

2. Найти нечёткое отношение Q^{-1}, обратное к нечёткому отношению Q. M_{Q-1} – матрица отношения Q^{-1}, $M_{Q-1} = M_Q^{\mathrm{T}}$. (Отношение Q выражает степень предпочтения альтернативы u_i перед альтернативой u_j, отношение Q^{-1} выражает степень предпочтения альтернативы u_j перед альтернативой u_i.)

3. Найти разность нечётких отношений Q и Q^{-1}. Результатом является нечёткое отношение строгого предпочтения Q_S. M_{QS} – матрица отношения Q_S. (Элементы нечёткого отношения строгого предпочтения Q_S выражают, какие альтернативы u_i доминируют над альтернативами u_j и с какой разницей это доминирование происходит.)

4. В каждом столбце матрицы M_{QS} найти максимальное значение и вычесть его из 1. В результате получаем множество недоминируемых альтернатив

$$U_{QND} = \{<u_1, \mu_{\mathrm{Q}}(u_1) >, <u_2, \mu_Q(u_2)>, ..., <u_n, \mu_Q(u_n)>\}.$$

(Элементы j-го столбца матрицы $M_{Q\mathrm{s}}$ показывают степени доминируемости альтернативы ui над альтернативой u_j. Максимальный элемент j-го столбца показывает максимальную степень доминируемости над альтернативой u_j. Если вычесть из 1 максимальную степень доминируемости над альтернативой u_j, получим число, смысл которого – степень недоминируемости альтернативы u_j над другими альтернативами.)

5. Найти выпуклую комбинацию K нечётких отношений Q_1, Q_2, ..., Q_m относительно весовых коэффициентов:

$$K = \lambda_1 \cdot Q_1 + \lambda_2 \cdot Q_2 + ...+ \lambda_m \cdot Q_m.$$

M_K – матрица нечёткого отношения K. Операция умножения отношения Q_i на соответствующий весовой коэффициент λ_i позволяет учесть отношение ЛПР к мнению эксперта e_i. Чем меньше коэффициент λ_i, тем меньше значения функции принадлежности элементов отношения $\lambda_i \cdot Q$. K – нечёткое отношение, в котором интегрально отражены мнения всех экспертов e_1, e_2, ..., e_n относительно альтернатив с учётом отношения ЛПР к мнениям экспертов.

6. Найти нечёткое отношение K^{-1}, обратное к нечёткому отношению K. $M_{K\text{-}1}$ – матрица отношения K^{-1}, $M_{K\text{-}1} = M_K^{-1}$. (Смысл этого шага аналогичен шагу 2.)

7. Найти разность нечётких отношений K и K^{-1}. Результатом является нечёткое отношение строгого предпочтения K_S. M_{KS} – матрица отношения K_S. (Смысл этого шага аналогичен шагу 3.)

8. В каждом столбце матрицы M_{KS} найти максимальный элемент, затем вычесть этот элемент из 1. В результате получится нечёткое множество недоминируемых альтернатив

$$U_{KND} = \{<u_1, \mu_k(u_1)>, <u_2, \mu_k(u_2)>, ..., <u_n, \mu_k(u_n)>\}.$$

(Смысл этого шага аналогичен шагу 4.) Элементы нечёткого множества U_{KND} выражают степени недоминируемости альтернатив в контексте интегрального отношения всех экспертов к альтернативам с учётом отношения ЛПР ко всем экспертам.

9. Найти пересечение нечётких множеств U_{QND} и U_{KND}. Результатом является множество

$$U^* == \{<u_1, \mu(u_1)>, <u_2, \mu(u_2)>, ... ,<u_n, \mu(u_n)>\}$$

недоминируемых альтернатив в контексте отношений Q и K.

10. Среди элементов множества U^* выбирается та альтернатива u_i, которая имеет максимальное значение функции принадлежности $\mu(u_i)$.

Упражнение

Сформулируйте любую проблему и множество U возможных решений этой проблемы (множество U должно содержать не менее 5 элементов). Среди знакомых вам людей выберите группу экспертов (не менее 4 человек). Задайте весовые коэффициенты для каждого эксперта. Попросите высказаться экспертов относительно возможных решений проблемы в виде нечётких отношений нестрогих предпочтений. Используя алгоритм решения задачи принятия решения, найдите наиболее предпочтительную альтернативу.

§ 7.2. Задача принятия решения группой экспертов, характеризуемых нечётким отношением нестрогого предпочтения между ними

Постановка задачи аналогична предыдущей, только ЛПР выражает своё отношение к мнению экспертов в виде нечёткого отношения нестрогого предпочтения N, функция принадлежности которого $\mu_N(e_i, e_j)$ означает степень предпочтения эксперта e_i по сравнению с экспертом e_j, M_N – матрица отношения N. Таким образом, имеется:

1) множество решений проблемы $U = \{u_1, u_2, ..., u_n\}$;
2) группа экспертов $E = \{e_1, e_2, ..., e_m\}$ и, соответственно, нечёткие отношения $Q_1, Q_2, ..., Q_m$, заданные матрицами $M_{Q1}, M_{Q2}, ..., M_{Qm}$;
3) нечёткое отношение N, заданное матрицей M_N.

Требуется принять решение по проблеме с учётом мнения экспертов относительно множества альтернатив U и отношения ЛПР к экспертам.

Алгоритм решения задачи

1. Для каждого нечёткого отношения нестрогого предпочтения $Q_1, Q_2, ..., Q_m$ найти нечёткое множество недоминируемых альтернатив $U_{Q1ND}, U_{Q2ND}, ..., U_{QmND}$. (1–4 шаги алгоритма из § 7.1)

2. Построить нечёткое отношение Φ на множестве $U \times E$. Это отношение задаётся матрицей M_Φ размерности $m \times n$, строки этой матрицы образуют значения функций принадлежности элементов нечётких множеств недоминируемых альтернатив $U_{Q1ND}, U_{Q2ND}, ..., U_{QmND}$.

3. Построить композицию $Г$ отношений $Ф^{\mathrm{T}}$, N, $Ф$: $\Gamma = Ф^{\mathrm{T}} \circ N \circ Ф$. Матрица $M_Г$ отношения $Г$. ($Г$ – единое результирующее нечёткое отношение, полученное с учётом информации об относительной важности нечётких отношений Q_i.)

4. Для нечёткого отношения $Г$ построить нечёткое отношение строгого предпочтения $Г^S$ и множество недоминируемых альтернатив $U_Г^{nd}$.

5. Множество $U_Г^{nd}$ скорректировать до множества $U_Г^{nd*}$ с функцией принадлежности $\lambda_{\Gamma\mathrm{nd}} \cdot (u_i) = \min(\lambda_{Гnd}(u_i), \lambda_Г(u_i, u_i))$.

6. Выбирается та альтернатива, для которой значение функции принадлежности скорректированного множества $U_Г^{nd*}$ недоминируемых альтернатив максимально.

Упражнение

Сформулируйте любую проблему и множество U возможных решений этой проблемы (множество U должно содержать не менее 5 элементов). Среди знакомых вам людей выберите группу экспертов (не менее 4 человек). Задайте на множестве экспертов нечёткое отношение нестрогого предпочтения N. Попросите высказаться экспертов относительно возможных решений проблемы в виде нечётких отношений нестрогих предпочтений. Используя алгоритм решения задачи принятия решения, найдите наиболее предпочтительную альтернативу.

Контрольные вопросы

1. Перечислите, какие понятия нечёткой математики используются для реализации алгоритмов задач принятия решений.
2. Прокомментируйте каждый шаг алгоритмов. Какой смысл они имеют?

Тема 8. МЕТОД АНАЛИЗА ИЕРАРХИЙ (МАИ)

Учебные вопросы

1. Построение модели проблемы в виде иерархии.
2. Определение приоритетов всех элементов иерархии.
3. Синтез глобальных приоритетов альтернатив.
4. Проверка суждений на согласованность.

Изучив данную тему, студент должен:

иметь представление о том, какие задачи можно решать методом анализа иерархий;

знать

- особенности построения модели проблемы в виде иерархии;
- методы определения приоритетов всех элементов иерархии;
- способы синтеза глобальных приоритетов альтернатив;
- методы проверки суждений на согласованность;

уметь реализовывать метод анализа иерархий для решения конкретных задач.

Методические рекомендации по изучению темы

При освоении темы необходимо:

- изучить учебный материал параграфов;
- выполнить упражнения после параграфов;
- ответить на контрольные вопросы после параграфов.

§ 8.1. Этапы метода анализа иерархий

МАИ – математический инструмент системного подхода к сложным проблемам принятия решений. МАИ не предписывает лицу, принимающему решение (ЛПР), какое-либо «правильное» решение, а позволяет ему в интерактивном режиме найти такой вариант (альтернативу), который наилучшим образом согласуется с его пониманием сути проблемы и требованиями к ее решению. Этот метод разработан американским математиком Томасом Саати, который написал о нем книги, разработал программные продукты и в течение 20 лет проводит симпозиумы ISAHP (англ. *International Symposium on Analytic Hierarchy Process*). МАИ широко используется на практике и активно развивается учеными всего мира. В его основе наряду с математикой заложены и психологические аспекты. МАИ позволяет понятным и рациональным образом структурировать сложную проблему принятия решений в виде иерархии, сравнить и выполнить количественную оценку альтернативных вариантов решения. Метод анализа иерархий используется во всем мире для принятия решений в разнообразных ситуациях: от управления на межгосударственном уровне до решения отраслевых и частных проблем в бизнесе, промышленности, здравоохранении и образовании. Для компьютерной поддержки МАИ существуют программные продукты, разработанные различными компаниями. Анализ проблемы принятия решений в МАИ начинается с построения иерархической структуры, которая включает цель, критерии, альтернативы и другие рассматриваемые факторы, влияющие на выбор. Эта структура отражает понимание проблемы лицом, принимающим решение. Каждый элемент иерархии может представлять различные аспекты решаемой задачи, причем во внимание могут быть приняты как материальные, так и нематериальные факторы, измеряемые количественные параметры и качественные характеристики, объективные данные и субъективные экспертные оценки. Иными словами, анализ ситуации выбора решения в МАИ напоминает процедуры и методы аргументации, которые используются на интуитивном уровне. Следующим этапом анализа является определение приоритетов, представляющих относительную важность или предпочтительность элементов построенной иерархической структуры, с помощью процедуры парных сравнений. Безразмерные приоритеты позволяют обоснованно сравнивать разнородные факторы, что является отличительной особенностью МАИ. На заключительном этапе анализа выполняется синтез (линейная свертка) приоритетов на иерархии, в результате чего вычисляются приоритеты альтернативных решений относительно главной цели. Лучшей считается альтернатива с максимальным значением приоритета.

Решение задачи методом анализа иерархий включает следующие этапы:

1) построение качественной модели проблемы в виде иерархии, включающей цель, альтернативные варианты достижения цели и критерии для оценки качества альтернатив;

2) определение приоритетов всех элементов иерархии с использованием метода парных сравнений;
3) синтез глобальных приоритетов альтернатив путем линейной свертки приоритетов элементов иерархии;
4) проверка суждений на согласованность;
5) принятие решения на основе полученных результатов.

Рассмотрим эти этапы подробнее.

§ 8.2. Построение модели проблемы в виде иерархии

При принятии управленческих решений и прогнозировании возможных результатов лицо, принимающее решение (ЛПР), обычно сталкивается со сложной системой взаимосвязанных компонент (ресурсы, желаемые исходы или цели, лица или группа лиц и т. д.), которую нужно проанализировать. ЛПР обращается к экспертам. Эксперты производят декомпозицию сложной проблемы – определяют её компоненты и отношения между ними. Получается модель реальной действительности, построенная в виде иерархической структуры, объединяющей цель выбора, критерии, альтернативы и другие факторы, влияющие на выбор решения. Построение такой структуры помогает проанализировать все аспекты проблемы и глубже вникнуть в суть задачи.

Иерархическая структура – это графическое представление проблемы в виде перевернутого дерева, где каждый элемент, за исключением самого верхнего, зависит от одного или более вышерасположенных элементов. Иерархические структуры используются для лучшего понимания сложной реальности: исследуемая проблема раскладывается на составные части, затем составные части разбиваются на более мелкие и т. д. На каждом шаге важно фокусировать внимание на понимании текущего элемента, временно абстрагируясь от всех прочих компонентов. При проведении подобного анализа приходит понимание всей сложности и многогранности исследуемого предмета.

Когда мы решаем сложную проблему, мы можем использовать иерархию как инструмент для обработки и восприятия больших объемов информации. По мере проектирования этой структуры у нас формируется все более полное понимание проблемы. На рис. 24 представлен вид простейшей иерархии.

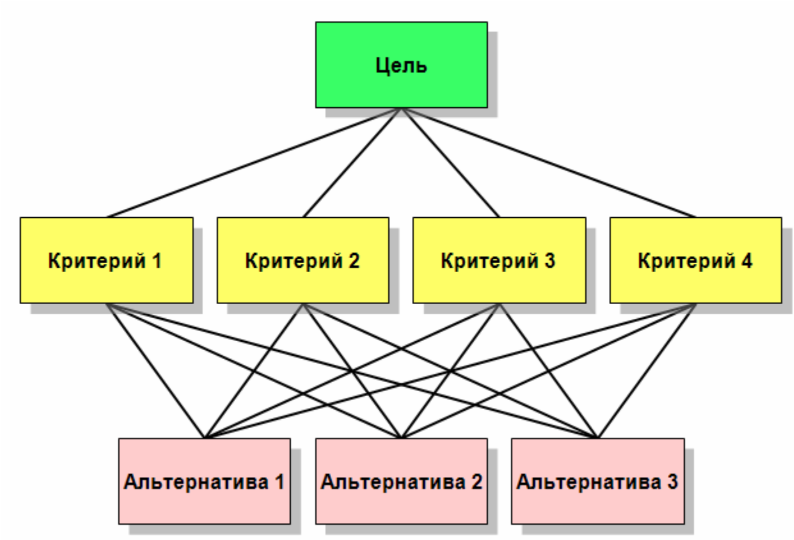

Рис. 24. Вид простейшей иерархии

Вершиной иерархии является *главная цель*; элементы самого нижнего уровня представляют множество *вариантов достижения цели (альтернатив)*; элементы промежуточных уровней соответствуют *критериям или факторам*, которые связывают цель с альтернативами. Существуют специальные термины для описания иерархической структуры МАИ. Каждый уровень состоит из узлов. Элементы, исходящие из узла, принято называть его детьми (дочерними элементами). Элементы, из которых исходит узел, называются родительскими. Группы элементов, имеющие один и тот же родительский элемент, называются группами сравнения. Родительские элементы альтернатив, как правило исходящие из различных групп сравнения, называются покрывающими критериями. Используя эти термины для описания представленной на рис. 24 иерархии, можно сказать, что четыре критерия – это дети цели; в свою очередь, цель – это родительский элемент для любого из критериев. Каждая альтернатива – это дочерний элемент каждого из включающих ее критериев. Вид любой иерархии МАИ будет зависеть не только от объективного характера рассматриваемой проблемы, но и от знаний, суждений, системы ценностей, мнений, желаний и т. п. участников процесса.

В наиболее элементарном виде иерархия строится с вершины – целей с точки зрения управления, через промежуточные уровни – критерии, от которых зависят последующие уровни, к самому низкому уровню, который обычно является перечнем альтернатив решения проблемы. На рис. 25 представлен пример иерархии «Выбор руководителя фирмы».

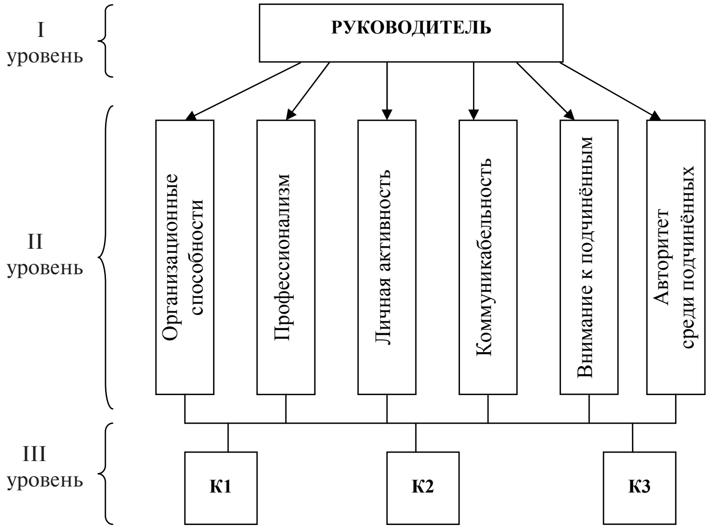

Рис. 25. Иерархия «Выбор руководителя фирмы»

На первом уровне находится *цель – выбор руководителя*, на втором уровне шесть критериев, которыми должен обладать руководитель (это факторы, уточняющие цель), на третьем уровне три кандидата K_1, K_2 и K_3, которые должны быть оценены по отношению к критериям второго уровня.

Построение иерархии исходит из естественной способности людей думать логически и творчески, определять события и устанавливать отношения между ними. На практике не существует установленной процедуры генерирования целей, критериев и видов деятельности для включения в иерархию.

При построении иерархии следует помнить, что основные цели устанавливаются на вершине иерархии, их подцели – ниже вершины, и в самом низу находится уровень различных исходов.

§ 8.3. Определение приоритетов всех элементов иерархии при помощи метода парных сравнений

После построения иерархии определяются приоритеты узлов иерархии на каждом уровне. Приоритеты – это числа, представляющие относительные веса элементов в каждой группе сравнения (на каждом уровне иерархии). Подобно вероятностям, приоритеты – безразмерные величины, которые могут принимать значения от нуля до единицы. Чем больше величина приоритета, тем более значимым является соответствующий ему элемент. Сумма приоритетов элементов в группе сравнения равна 1. Приоритет цели по определению равен 1. Чтобы найти приоритеты узлов иерархии, составляются *матрицы сравнений относительной важности*: матрица для сравнений относительной важности критериев на II уровне по отношению к общей цели на I уровне и матрицы парных сравнений каждой альтернативы на III уровне по отношению к критериям на II уровне. Таким образом, для проблемы выбора руководителя требуется составить 7 матриц (рис. 26–32). Парные суждения производятся при помощи *шкалы относительной важности* (табл. 8.1).

Каждый элемент строки матрицы сравнивается с элементом столбца. При сравнении с самим собой отношение равно 1. Если первый элемент важнее, чем второй, то используется целое число из шкалы, в противном случае применяется обратная величина. В любом случае обратные друг к другу отношения заносятся в симметричные позиции матрицы. Таким образом, при заполнении матриц надо руководствоваться следующими правилами:

1) если $a_{ij} = \alpha$, то $a_{ji} = 1/\alpha$;
2) если сравниваемые элементы имеют одинаковую важность, то $a_{ij} = a_{ji} = 1$, в частности $a_{ii} = 1$;
3) все ячейки матрицы заполняются значениями одной шкалы.

Замечание. Мы описывали процедуру построения матрицы парных сравнений в параграфе 2.1 при изучении способов построения функций принадлежности нечёткого множества.

Таблица 8.1

Интенсивность относительной важности	Определение
1	Равная важность
3	Умеренное превосходство одного над другим
5	Существенное превосходство
7	Значительное превосходство
9	Очень сильное превосходство
2, 4, 6, 8	Промежуточные решения между двумя соседними решениями
Обратные величины приведённых выше чисел	Если при сравнении одного параметра с другим получено одно из вышеуказанных чисел, то при сравнении другого с первым получим обратную величину

Качества руководителя	Организационные способности	Профессионализм	Личная активность	Коммуникабельность	Внимание к подчинённым	Авторитет среди подчинённых
Организационные способности						
Профессионализм						
Личная активность						
Коммуникабельность						
Внимание к подчинённым						
Авторитет среди подчинённых						

Рис. 26. Матрица парных сравнений на I уровне иерархии (матрица 0)

Организационные способности	К1	К2	К3
К1			
К2			
К3			

Рис. 27. Матрица 1

Профессионализм	К1	К2	К3
К1			
К2			
К3			

Рис. 28. Матрица 2

Личная активность	К1	К2	К3
К1			
К2			
К3			

Рис. 29. Матрица 3

Комму-ника-бельность	К1	К2	К3
К1			
К2			
К3			

Рис. 30. Матрица 4

Внимание к под-чинённым	К1	К2	К3
К1			
К2			
К3			

Рис. 31. Матрица 5

Авторитет среди под-чинённых	К1	К2	К3
К1			
К2			
К3			

Рис. 32. Матрица 6

Математическая обработка полученных суждений включает вычисление *вектора локальных приоритетов*. Вектор локальных приоритетов матрицы $M_{n \times n}$ выражает относительную силу, величину, ценность каждого объекта, который сравнивается в матрице.

Каждая компонента $b_1, b_2, ..., b_n$ вектора приоритетов B матрицы $M_{n \times n}$ (рис. 33) вычисляется из элементов каждой строки матрицы (по первой строке матрицы находится компонента b_1, по второй строке – компонента b_2, ..., по n строке – компонента b_n) по формуле

$$b_i = \sqrt[n]{a_{i1} \cdot a_{i2} \cdot \ldots \cdot a_{in}}\,. \tag{8.1}$$

где $i = 1, ..., n$.

$$M := \begin{pmatrix} a11 & a12 & a13 & .. & a1n \\ a21 & a22 & a23 & .. & a2n \\ a31 & a32 & a33 & .. & a3n \\ .. & .. & .. & .. & .. \\ an1 & an2 & an3 & .. & ann \end{pmatrix}$$

Рис. 33. Матрица

Затем вектор $B = \{b_1, b_2, ..., b_n\}$ нормализуется. Для этого вычисляется сумма компонент вектора $\sum_{i=1}^{n} bi$.Затем каждая компонента b_1, b_2, ..., b_n делится на найденную сумму. В итоге получаем нормализованный вектор локальных приоритетов X матрицы M:

$$X = \left[\frac{b_1}{\sum_{i=1}^{n} b_i}; \frac{b_2}{\sum_{i=1}^{n} b_i}; \frac{b_n}{\sum_{i=1}^{n} b_i} \right] \tag{8.2}$$

Для решения проблемы выбора руководителя надо получить 7 векторов локальных приоритетов X_0, X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6 для каждой из семи матриц: $X_0 = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6\}$, $X_i = \{x_{i1}, x_{i2}, x_{i3}\}$, где $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$.

§ 8.4. Синтез глобальных приоритетов альтернатив

Компоненты векторов локальных приоритетов заносятся в табл. 8.2. Приоритеты синтезируются, начиная со второго уровня. Локальные приоритеты перемножаются на приоритет соответствующего критерия на вышестоящем уровне и суммируются по каждому элементу. В результате получаем вектор *глобальных приоритетов* $\{c_1, c_2, c_3\}$, каждая компонента этого вектора – глобальный приоритет соответствующего кандидата. Например, глобальный приоритет кандидата K_1 вычисляется по формуле

$$c_1 = x_{11} \times x_1 + x_{21} \times x_2 + x_{31} \times x_3 + x_{41} \times x_4 + x_{51} \times x_5 + x_{61} \times x_6.$$

Таблица 8.2

Качества руководителя	Организационные способности	Профессионализм	Личная активность	Коммуникабельность	Внимание к подчинённым	Авторитет среди подчинённых	Глобальные приоритеты
Компоненты вектора приоритетов матрицы M_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
Кандидаты							
K_1	x_{11}	x_{21}	x_{31}	x_{41}	x_{51}	x_{61}	c_1
K_2	x_{12}	x_{22}	x_{32}	x_{42}	x_{52}	x_{62}	c_2
K_3	x_{13}	x_{23}	x_{33}	x_{43}	x_{53}	x_{63}	c_3
	Компоненты вектора приоритетов матрицы 1	Компоненты вектора приоритетов матрицы 2	Компоненты вектора приоритетов матрицы 3	Компоненты вектора приоритетов матрицы 4	Компоненты вектора приоритетов матрицы 5	Компоненты вектора приоритетов матрицы 6	

Компоненты вектора глобального приоритета заносятся в табл. 8.2.

Кандидат, соответствующий самой большой компоненте, является предпочтительным в выборе на должность руководителя фирмы.

§ 8.5. Проверка суждений на согласованность

Для получения результатов, соответствующих действительности, в методе анализа иерархий рекомендуется проверять согласованность заполняемых матриц M.

Под согласованностью матриц понимается её численная (кардинальная $a_{ij} \cdot a_{jk} = a_{ik}$) согласованность и транзитивная (порядковая согласованность). Совершенной согласованности трудно достичь при измерении даже наиболее точными инструментами на практике, поэтому нужен способ оценки согласованности.

Пусть $M_{nxn} = (a_{ij})$ – матрица суждений, $X = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$ – вектор приоритетов матрицы. *Индекс согласованности* (*ИС*) матрицы суждений и *отношение согласованности* (*ОС*) находится по следующему алгоритму:

1) суммируется каждый столбец матрицы суждений M: $m_j = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}$;
2) сумма первого столбца умножается на величину первой компоненты нормализованного вектора приоритетов X данной матрицы, сумма второго столбца – на вторую компоненту и т. д. Полученные числа суммируются и обозначаются λ: $\lambda = \sum_{j=1}^{n} m_j \cdot x_j$;
3) индекс согласованности ИС находится по формуле

$$ИС = \frac{\lambda - n}{n - 1},$$

где n – число сравниваемых элементов;

4) отношение согласованности (ОС) находится по формуле

$$ОС = \frac{ИС}{\textit{число случайной согласованности}}.$$

Число случайной согласованности для матриц разного порядка выбирается из табл. 8.3. Величина ОС должна быть не более 0,2. Если ОС выходит за эти пределы, то элементы матрицы желательно пересмотреть.

Таблица 8.3

N	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Число случайной согласованности	0	0	0,58	0,9	1,12	1,24	1,32	1,41	1,45	1,49

В задачах, требующих очень точных результатов, необходимо стремиться к высокому уровню согласованности.

Упражнения

1. Решите задачу выбора руководителя фирмы, где в качестве кандидатов возьмите любых известных вам людей.

2. Сформулируйте задачу, которая может быть решена МАИ, и решите её.

Контрольные вопросы

1. Перечислите, какие понятия нечёткой математики используются для реализации МАИ.
2. Прокомментируйте каждый шаг алгоритма МАИ. Какой смысл они имеют?

Рекомендуемые интернет-ресурсы

1. Масалович, А. Решение задач с применением инструментов, основанных на нечеткой логике [Электронный ресурс] / А. Масалович. – URL : http://www.tora-centre.ru/papers.htm (дата обращения: 26.04.2012).
2. Масалович, А. Нечёткая логика и точные знания [Электронный ресурс] / А. Масалович, В. Золотарев. – URL : http://www.tora-centre.ru/papers.htm (дата обращения: 26.04.2012).
3. Штовба, С.Д. Введение в теорию нечетких множеств и нечеткую логику [Электронный ресурс] / С.Д. Штовба. – URL : http://matlab.exponenta.ru/fuzzylogic/book1/index.php (дата обращения: 26.04.2012).

Вопросы к зачёту

1. История зарождения и развития нечёткой математики.
2. Промышленные приложения нечёткой математики в Японии, Европе, Америке.
3. Особенности развития и применения нечёткой математики в России.
4. Определение нечеткого множества.
5. Прямые и косвенные способы задания функций принадлежности.
6. Основные характеристики нечёткого множества: носитель, высота, ядро, точки перехода, границы нечёткого множества, множество α-уровня, ближайшее чёткое множество.
7. Виды функций принадлежности: треугольные, трапециевидные, S-образные и Z-образные.
8. Сравнение нечётких множеств.
9. Операции над нечёткими множествами.
10. Расстояние между нечёткими множествами.
11. Индексы нечёткости.
12. Определение нечёткой величины.
13. Определение треугольного нечёткого числа.
14. Определение трапециевидного нечёткого интервала.
15. Правила арифметических действий над треугольными нечёткими числами.
16. Правила арифметических действий над трапециевидными нечёткими интервалами.
17. Определение нечёткого отношения.
18. Бинарные нечёткие отношения.
19. Характеристики бинарных нечётких отношений.
20. Сравнения нечётких отношений, операции над нечёткими отношениями.
21. Композиция нечётких бинарных отношений.
22. Свойства бинарных нечётких отношений, заданных на множестве $X \times X$.
23. Нечёткие высказывания и логические операции над ними.
24. Нечёткие логические формулы.
25. Степень равносильности нечётких формул. Нечётко близкие формулы.

26. Нечётко истинные и нечётко ложные формулы.
27. Нечёткие предикаты.
28. Степень общности свойств нечёткого предиката. Квантор нечёткой общности.
29. Степень существования свойств нечёткого предиката. Квантор нечёткого существования.
30. Нечёткая переменная. Нечёткая лингвистическая переменная.
31. Нечёткие лингвистические высказывания.
32. Основные этапы нечёткого логического вывода.
33. База правил нечёткого вывода.
34. Фаззификация входных переменных.
35. Агрегирование условий базы правил.
36. Активация подзаключений базы правил.
37. Аккумулирование заключений нечётких правил.
38. Задача принятия решения группой экспертов, характеризуемых весовыми коэффициентами.
39. Задача принятия решения группой экспертов, характеризуемых нечётким отношением нестрогого предпочтения.
40. Построение модели проблемы в виде иерархии.
41. Определение приоритетов всех элементов иерархии.
42. Синтез глобальных приоритетов альтернатив.
43. Проверка суждений на согласованность.

Библиографический список

1. Леоненков, А. Нечёткое моделирование в среде MATLAB и fuzzyTECH / А. Леоненков. – СПб. : БХВ-Петербург, 2005. – 736 с.
2. Саати, Т. Принятие решений. Метод анализа иерархий / Т. Саати. – М. : Радио и Связь, 1989. – 316 с.
3. Саати, Т.Л. Принятие решений при зависимостях и обратных связях: аналитические сети / Т.Л. Саати. — М. : Изд-во ЛКИ, 2008. – 360 с.
4. Ярушкина, Н.Г. Основы теории нечетких и гибридных систем : учеб. пособие для вузов / Н.Г. Ярушкина. – М. : Финансы и статистика, 2004.
5. Новак, В. Математические принципы нечеткой логики = Mathematical Principles of Fuzzy Logic / В. Новак, И. Перфильева, И. Мочкорж ; пер. с англ. А.Н. Аверкина. – М. : ФИЗМАТЛИТ, 2006. – 347 с.
6. Яхъяева, Г.Э.Нечеткие множества и нейронные сети : учеб. пособие / Г.Э. Яхъяева. – М. : Интернет-ун-т информ. технологий : Бином, 2006. – 315 с.

Глоссарий

Агрегирование условий базы правил – процедура определения степени истинности условий по каждому из правил системы нечёткого вывода.

Аккумулирование заключений нечётких правил – процедура нахождения функции принадлежности для каждой из выходных лингвистических переменных.

Активация подзаключений базы правил – процедура нахождения степени истинности каждого из подзаключений правил нечётких продукций и определения функции принадлежности всех подзаключений для каждого правила в базе нечётких правил.

Антирефлексивное нечёткое отношение – бинарное нечёткое отношение, заданное на множестве X×X, удовлетворяющее условию: $\forall <x_i, x_i> \in$ X×X функция принадлежности отношения $\mu_Q(<x_i, x_i>) = 0$.

Антисимметричное нечёткое отношение – бинарное нечёткое отношение, заданное на множестве X×X, удовлетворяющее условию: $\forall <x_i, x_j>$X×X, причём $x_i \neq x_j$, выполняется равенство: $\min\{\mu_Q(<x_i, x_j>), \mu_Q(<x_j, x_i>)\} = 0$.

База правил системы нечёткого вывода – конечное множество правил вида «ЕСЛИ..., ТО...», согласованных относительно используемых в них лингвистических переменных.

Бинарные нечёткие отношения – *n*-арное нечёткое отношение при $n = 2$. Q – бинарное нечёткое отношение, если $Q = \{<<x_1, x_2>, \mu_Q<x_1, x_2>> \mid x_1 \in X_1, x_2 \in X_2, \mu_Q \in [0, 1]\}$.

Ближайшее чёткое множество A^* относительно нечеткого множества A состоит из тех элементов универсума, для которых значения функции принадлежности $\mu_A(x) > 0{,}5$, а элементы, у которых $\mu_A(x) = 0{,}5$, могут принадлежать или могут не принадлежать множеству A^*.

Высота нечёткого множества A – числовая характеристика h нечёткого множества, которая находится по формуле $h = \sup\limits_{x \in X} \mu_A(x)$.

Границы нечёткого множества A **– подмножество универсума X,** обозначаемое G_A, *содержащее* такие элементы универсума X, для которых значения функции принадлежности $\mu_A(x)$ отличны от 0 и 1, т. е. $G_A = \{x | x \in X, 0 < \mu_A(x) < 1\}$.

Дополнение нечёткого множества A – нечёткое множество $\overline{A}$, для всех элементов которого $x \in X$ выполняется условие: $\mu_{\overline{A}}(x) = 1 - \mu_A(x)$.

Иерархия (*иерархическая структура*) – графическое представление проблемы в виде перевернутого дерева, где каждый элемент, за исключением самого верхнего, зависит от одного или более элементов, расположенных выше рассматриваемого элемента.

Композиция нечётких бинарных отношений Q *и* R – нечёткое отношение $Q \otimes R$, заданное на множестве $X_1 \times X_3$, функция принадлежности которого для $\forall <x_i, x_k> \in X_1 \times X_3$ определяется формулой

$$\mu_{Q \otimes R}(<x_i, x_k>) = \max_{xj \in X2} \{\min\{\mu_Q(<x_i, x_j>), \mu_R(<x_j, x_k>)\}\}.$$

Множество α**-уровня** нечеткого множества A – чёткое подмножество универсального множества X, определяемое по формуле $A_\alpha = \{x | x \in X, |\mu_A(x) \geq \alpha\}$, где $\alpha \in [0,1]$.

Нечёткая величина – произвольное нечёткое множество A, заданное на множестве действительных чисел R, т. е. нечёткое множество, для которого универсумом X служит всё множество R.

Нечёткая лингвистическая переменная – набор $<\beta, T, X, G, M>$, где β – наименование лингвистической переменной; T – множество ее значений (терм-множество), представляющих собой наименования нечетких переменных, областью определения каждой из которых является множество X; X – универсальное множество – область определения нечётких переменных, которые входят в определение лингвистической переменной β; G – синтаксическая процедура, которая описывает процесс образования из множества T новых значений (термов) для данной лингвистической переменной, например при помощи логических операций «и», «или», «не», модификаторов типа «очень», «слегка» и т. д.; M – семантическая процедура, позволяющая превратить каждое новое значение лингвистической переменной, образуемое процедурой $\boldsymbol{G}$, в нечеткую переменную, т. е. сформировать соответствующее нечеткое множество.

Нечёткая переменная – упорядоченная тройка элементов $<\alpha$, X, $A>$, где α – наименование переменной; X – универсальное множество (область определения α); A – нечеткое множество на X, с функцией принадлежности $\mu_A(x)$, описывающей возможные значения, которые принимает нечёткая переменная α.

Нечёткое лингвистическое высказывание – нечёткое высказывание одного из следующих видов:

1) высказывание «β есть α», где β – наименование лингвистической переменной, α – её значение, которому соответствует отдельный лингвистический терм из базового терм-множества T лингвистической переменной β;
2) высказывание «β есть $\nabla\alpha$», где ∇ – модификатор, соответствующий таким словам, как «очень», «более или более», «много больше» и другим, которые могут быть получены с использованием процедур G и M данной лингвистической переменной;
3) составные высказывания, образованные из высказываний видов 1 и 2 и нечётких логических операций конъюнкции, дизъюнкции, отрицания, импликации.

Нечёткая логическая формула определяется индуктивно следующим образом:

1) любая нечёткая высказывательная переменная является нечёткой логической формулой;
2) если F_1 и F_2 – нечёткие логические формулы, то $\overline{F}_1$, $F_1 \wedge F_2$, $F_1 \vee F_2$, $F_1 \rightarrow F_2$, $F_1 \leftrightarrow F_2$ – нечёткие логические формулы;
3) других правил для образования нечётких логических формул не существует.

Нечёткий *n*-местный предикат $P(x_1, x_2, ..., x_n)$, заданный на множестве $X_1 \times X_2 \times ... \times X_n$, – переменное высказывание, зависящее от нечётких переменных $x_1, x_2, ..., x_n$ ($x_1 \in X_1, x_1 \in X_1, ..., x_n \in X_n$), которое превращается в нечёткое высказывание, если всем переменным придать конкретные значения из соответствующих множеств.

Нечётко близкие формулы – нечёткие формулы, у которых степень равносильности на всех определённых наборах значений переменных больше или равна 0,5.

Нечётко истинные формулы – нечёткие формулы, которые на всех определённых наборах значений переменных принимают значение истинности больше или равное 0,5.

Нечётко ложные формулы – нечёткие формулы, которые на всех определённых наборах значений переменных принимают значение истинности меньше или равное 0,5/

Нечёткое высказывание – любое утверждение, о котором имеет смысл судить, истинно оно или ложно в той или иной степени.

Нечеткое множество: пусть X – универсальное множество, множество A – подмножество X ($A \subseteq$ X). Нечетким множеством A называется совокупность упорядоченных пар вида: $<x, \mu_A(x)>$, где $x \in$ X, а $\mu_A(x)$ – функция принадлежности, которая ставит в соответствие каждому элементу $x \in$ X некоторое действительное число из отрезка [0, 1]. При этом значение $\mu_A(x) = 1$ для некоторого $x \in$ X означает, что элемент x определённо принадлежит нечёткому множеству A, а значение $\mu_A(x) = 0$ означает, что элемент x определённо не принадлежит нечёткому множеству A. Остальные значения функции μ_A(x) из интервала (0,1) означают, что элемент x принадлежит множеству A в той или иной степени.

Нечёткое отношение: нечетким n-арным отношением называется нечёткое множество Q, заданное на универсуме X. X $= x_1 \times x_2 \times \ldots \times x_n$.·Символически определение нечёткого отношения записывается в виде:

$$Q = \{<<x_1, x_2, \ldots, x_n>, \mu_Q < x_1, x_2, \ldots, x_n>> \mid x_1 \in X_1, x_2 \in X_2, \ldots, x_n \in X_n, \mu_Q \in [0,1]\}.$$

Носитель нечёткого множества A – обычное подмножество A_s множества X, которое содержит те и только те элементы X, для которых значения функции принадлежности нечёткого множества A не равны 0, т. е. $A_S = \{x| \, x \in X, \mu_A(x) > 0\}$.

Объединение нечётких множеств A и B – нечёткое множество $A \cup B$, функция принадлежности которого имеет вид: $\mu_{A \cup B}(x) = \max\{\mu_A(x), \mu_B(x)\}$ *(максминное объединение)*.

Относительное расстояние между нечёткими множествами находится по формулам:

– *относительное расстояние Хемминга:*

$$\rho(A, B) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left|\mu_A(x_i) - \mu_B(x_i)\right|,\ \rho(A, B) \in [0,1];$$

– *относительное евклидово расстояние:*

$$\varepsilon(A, B) = \frac{1}{\sqrt{n}}\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(\mu_A(x_i) - \mu_B(x_i))^2},\ \varepsilon(A, B) \in [0,1].$$

Пересечение нечётких множеств A и B – нечёткое множество $A \cap B$, функция принадлежности которого имеет вид: $\mu_{A \cap B}(x) = \min\{\mu_A(x), \mu_B(x)\}$ *(максминное пересечение)*.

Разность нечётких множеств A и B – нечёткое множество $A \backslash B$, функция принадлежности которого имеет вид: $\mu_{A \backslash B} = \min\{\mu_A(x), 1 - \mu_B(x)\}$.

Расстояние между нечёткими множествами A и B находится по формулам:

– *расстояние Хемминга* (или *линейное расстояние*):

$$\rho(A, B) = \sum_{i=1}^{n}|\mu_A(x_i) - \mu_B(x_i)|,\quad \rho(A, B) \in [0, n];$$

– *евклидово или квадратичное расстояние*:

$$\varepsilon(A, B) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(\mu_A(x_i) - \mu_B(x_i))^2},\ \varepsilon(A, B) \in [0, \sqrt{n}\,].$$

Симметрическая разность нечётких множеств A и B – нечёткое множество $A \Delta B$, функция принадлежности которого имеет вид: $\mu_{A \Delta B} = \max\{\min\{\mu_A(x), 1 - \mu_B(x)\}; \min\{1 - \mu_B(x), \mu_A(x)\}\}$.

Симметричное нечёткое отношение – бинарное нечёткое отношение Q, заданное на множестве X×X, удовлетворяющее условию: $\forall \langle x_i, \boldsymbol{x}_j\rangle \in X \times X$ выполняется равенство: $\mu_Q(\langle x_i, x_j\rangle) = \mu_Q(\langle x_j, x_i\rangle)$.

Степень общности свойств нечёткого предиката $P(x)$ – для элементов множества X называется величина $v(P) = (P(x_1)) \wedge \lambda(P(x_2)) \wedge \ldots \wedge \lambda(P(x_n))$.

Степень равносильности нечётких формул $F_1(x_1, x_2, ..., x_n)$ и $F_2(x_1, x_2, ..., x_n)$ обозначается $d(F_1(x_1, x_2, ..., x_n); F_2(x_1, x_2, ..., x_n))$ и определяется выражением

$(F_1(x_1, x_2, ..., x_n); F_2(x_1, x_2, ..., x_n)) = \wedge(F_1(x_1, x_2, ..., x_n) \leftrightarrow F_2(x_1, x_2, ..., x_n))$,

где операция $\wedge$ берётся по всем определённым наборам степеней истинности высказывательных переменных.

Степень существования свойств нечёткого предиката $P(x)$ – для элементов множества X называется величина $vP = \lambda(P(x_1)) \wedge \lambda(P(x_2)) \wedge ... \wedge \lambda(P(x_n))$.

Точки перехода нечёткого множества A – множество T_A, состоящее из элементов $x \in$ X, для которых $\mu_A(x) = 0{,}5$ называются точками перехода нечёткого множества A, т. е. $T_A = \{x | x \in X, \mu_A(x) = 0{,}5\}$.

Транзитивное нечёткое отношение – бинарное нечёткое отношение Q, удовлетворяющее условию $\forall\ x_i, x_j, x_k \in$ X, имеет место равенство: $\mu_Q(<x_i, x_k>) \geq \max_{xj \in X} \{\min\{\mu_Q(<x_i, x_j>), \mu_Q(<x_j, x_k>)\}\} = 0$.

Треугольная функция принадлежности – функция принадлежности нечёткого множества, которая задаётся алитическим выражением

$$f\Delta(x; a, b, c) = \begin{cases} 0, \text{ если } x \leq a \\ \dfrac{x - a}{b - a}, \text{ если } a \leq x \leq b \\ \dfrac{c - x}{c - b}, \text{ если } b \leq x \leq c \\ 0, \text{ если } c \leq x \end{cases},$$

где a, b, c – некоторые числовые параметры, принимающие произвольные действительные значения и упорядоченные отношением $a \leq b \leq$ c.

Треугольное нечёткое число (ТНЧ) – нечёткое число $A\Delta$, функция принадлежности которого имеет треугольный вид $f\Delta(x; a, b, c)$. ТНЧ удобно представить в виде упорядоченного множества $A\Delta = <d, \alpha, \beta>$, где d – модальное значение ТНЧ, α – левый коэффициент нечёткости и β – правый коэффициент нечёткости: $d = b$, $\alpha = b - a$, $\beta = c - b$.

Универсум – обычное множество, то есть множество, из элементов которого образованы все остальные множества.

Фаззификация входных переменных (введение нечёткости) – процедура нечёткого логического вывода, целью которой является установление соответствия между конкретным (обычно численным) значением x_i из универсума X_i каждой входной лингвистической переменной β_i системы нечёткого вывода и значением функций принадлежности термов входной лингвистической переменной.

Функция принадлежности нечёткого множества A – функция, которая каждому элементу x универсума X ставит в соответствие число $\mu_A(x)$ из отрезка $[0,1]$, которое показывает, в какой степени данный элемент x обладает свойствами нечёткого множества.

Ядро нечёткого множества A – обычное множество A_1, элементы которого удовлетворяют условию: $A_1 = \{x|x \in X|\mu_A(x) = 1\}$.

S-образная функция принадлежности (или *сплайн-функция*) в общем случае аналитически может быть задана следующим выражением:

$$f_Z(x; a, b) = \begin{cases} 1, \text{ если } x \le a \\ \dfrac{b - x}{b - a}, \text{ если } a < x < b \\ 0, \text{ если } b \le x \end{cases},$$

где a и b – некоторые числовые параметры, принимающие произвольные действительные значения и упорядоченные отношением $a < b$.

S-образная функция принадлежности в общем случае аналитически может быть задана следующим выражением:

$$f_S(x; a, b) = \begin{cases} 0, \text{ если } x \le a \\ \dfrac{x - a}{b - a}, \text{ если } a < x < b \\ 1, \text{ если } b \le x \end{cases},$$

где a и b – некоторые числовые параметры, принимающие произвольные действительные значения и упорядоченные отношением $a < b$.

Содержание

Учебное издание

Бахусова Елена Васильевна

ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ НЕЧЁТКИХ МНОЖЕСТВ

Учебно-методическое пособие

Редактор *Г.В. Данилова*
Технический редактор *З.М. Малявина*
Вёрстка: *Л.В. Сызганцева*
Дизайн обложки: *Г.В. Карасева*

Подписано в печать 06.05.2013. Формат 60×84/16.
Печать оперативная. Усл. п. л. 6,74.
Тираж 100 экз. Заказ № 1-52-12.

Издательство Тольяттинского государственного университета
445667, г. Тольятти, ул. Белорусская, 14