

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ  
федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования  
«Тольяттинский государственный университет»

Институт Математики, физики и информационных технологий  
(наименование института полностью)

Кафедра «Прикладная математика и информатика»  
(наименование)

01.03.02 Прикладная математика и информатика  
(код и наименование направления подготовки / специальности)

Компьютерные технологии и математическое моделирование  
(направленность (профиль) / специализация)

## ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА (БАКАЛАВРСКАЯ РАБОТА)

на тему «Исследование численных методов решения задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений»

Обучающийся

М.А. Логинов

(Инициалы Фамилия)

(личная подпись)

Руководитель

к.т.н., Т.Г. Султанов

(ученая степень (при наличии), ученое звание (при наличии), Инициалы Фамилия)

Консультант

Е.В. Косс

(ученая степень (при наличии), ученое звание (при наличии), Инициалы Фамилия)

Тольятти 2022

## Аннотация

Тема выпускной квалификационной работы - «Исследование численных методов решения задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений».

Ключевые слова: задача Коши, дифференциальные уравнения, одношаговые методы, многошаговые методы, функция, начальное условие, интервал, шаг, значения, приближения, конечная разность.

Объектом исследования бакалаврской работы является задача Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений.

Предметом исследования бакалаврской работы является решение задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений.

Цель бакалаврской работы – исследование численных методов и алгоритмов решения задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений.

В работе были проанализированы основные понятия теории обыкновенных дифференциальных уравнений, суть и понятие задачи Коши, а также были рассмотрены, одношаговые и многошаговые методы.

Практическая значимость бакалаврской работы заключается в разработке программ, использующих метод Эйлера, Рунге- Кутта, Адамса для обыкновенных дифференциальных уравнений. В работе представлены результаты в виде таблицы.

Результаты бакалаврской работы представляют научно-практический интерес и могут быть рекомендованы для численного решения задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений.

Выпускная квалификационная работа состоит из 43 страниц текста, включая приложение, 10 рисунков, 6 таблиц и 25 источников литературы.

## **Abstract**

The title of the graduation work is "Numerical solution of the Cauchy problem for ordinary differential equations".

Key words: Cauchy problem, differential equations, one-step methods, multistep methods, function, initial condition, interval, step, values, approximations, finite difference.

The object of the graduation work is the numerical solution of the Cauchy problem for ordinary differential equations.

The subject of the graduation work is the ordinary differential equations and methods of solution of ordinary differential equations.

The aim of the work is to study the scientific and methodical literature, to present a numerical solution of the Cauchy problem for three types of ordinary differential equations by these three methods: Euler, Runge-Cutt, Adams, to develop a program and analyze the results.

In the work the basic concepts of the theory of ordinary differential equations, the essence and concept of the Cauchy problem are analyzed, and, one-step and multistep methods are considered.

The practical relevance of the work is in development of programs using Euler, Runge-Cutt, Adams methods for linear FE, separable-variable equation and homogeneous FE. The results are presented in the form of a table.

In conclusion we'd like to stress this work is relevant and of scientific and practical interest and can be recommended for numerical solution of Cauchy's problem for the ordinary differential equations.

The senior paper consists of 43 pages of text, including application, 10 figures, 6 tables and 25 literature sources.

## Оглавление

Введение.....	5
Глава 1. Анализ численных методов решения обыкновенных дифференциальных уравнений.....	7
1.1 Основные понятия теории обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка .....	7
1.2 Метод Эйлера .....	13
1.3 Метод Рунге-Кутты 4-го порядка.....	15
1.4 Метод Адамса.....	18
Глава 2 Анализ алгоритмов решения задачи Коши для некоторых типов обыкновенных дифференциальных уравнений .....	25
2.1 Анализ численного метода Эйлера для решения обыкновенного дифференциального уравнения .....	25
2.2 Анализ численного метода Рунге-Кутты для решения обыкновенного дифференциального уравнения .....	29
2.3 Анализ численного метода Адамса для решения обыкновенного дифференциального уравнения .....	32
Глава 3. Реализация и тестирование алгоритмов решения задачи Коши .....	34
3.1 Разработка программы .....	34
3.2 Сравнительный анализ полученных результатов.....	36
Заключение .....	39
Список используемой литературы .....	41
Приложение А Листинг программы, реализующей метод Эйлера.....	43

## Введение

«Дифференциальное уравнение – это такое уравнение, в составе которого есть функции производных, а также, входит сама функция, независимые переменные и параметры» [17].

Для математического описания природных явлений применяются дифференциальные уравнения [1].

Задача Коши - это самая основная задача для решения уравнений с частными производными и для решения обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ).

Смысл задачи состоит в нахождении решения дифференциального уравнения, удовлетворяющего начальным условиям.

Чтобы решить задачу Коши для типичного ОДУ, необходимо выяснить числовое значение зависимой переменной, при уже вычисленном значении независимой переменной, а если требуется решить ОДУ высших порядков, тогда, также, необходимо вычислить значения производных при определенном значении независимой переменной.

«Объектом исследования бакалаврской работы является задача Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений.

Предметом исследования бакалаврской работы является решение задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений.

Цель бакалаврской работы – исследование численных методов и алгоритмов решения задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений» [6].

Чтобы успешно достигнуть вышеупомянутую и основную цель данной работы, требуется выполнить следующие задания:

- сделать анализ методов решения задачи Коши для некоторых типов обыкновенных дифференциальных уравнений;

- сделать анализ алгоритмов решения задачи Коши для некоторых типов обыкновенных дифференциальных уравнений;
- реализовать и протестировать алгоритмы решения задачи Коши методами Эйлера, Рунге - Кутта, Адамса.

Практическая значимость бакалаврской работы заключается в разработке программы, реализующей алгоритмы решения задачи Коши методами Эйлера, Рунге - Кутта, Адамса.

Выпускная квалификационная работа состоит из введения, трех глав, заключения, списка использованной литературы и приложения.

«В первой главе рассматриваются основы теории ОДУ первого порядка, суть задачи Коши и различные методы решения задачи Коши для ДУ: одношаговые методы Рунге-Кутта и Эйлера и многошаговые методы Адамса.

Во второй главе проведен анализ алгоритмов решения задачи Коши для некоторых типов обыкновенных дифференциальных уравнений.

В третьей главе выполнена реализация программы и проведено тестовое решение задачи Коши для каждого заданного дифференциального уравнения тремя методами, а также выполнен сравнительный анализ полученных результатов» [17].

В заключении описываются результаты выполнения выпускной квалификационной работы.

Бакалаврская работа состоит из 43 страниц текста, 10 рисунков, 6 таблиц и 25 источников.

## **Глава 1. Анализ численных методов решения обыкновенных дифференциальных уравнений**

«По пройденной литературе и анализе источников, для анализа численных методов, было упомянуто три основных метода решения обыкновенных дифференциальных уравнений:

- метод Эйлера;
- метод Рунге-Кутты;
- метод Адамса.

Разберем и сравним свойства методов на предмет эффективного решения ОДУ» [14].

Стоит отметить важный момент, для численного решения задачи Коши для решения обыкновенных дифференциальных уравнений, для сравнения, можно построить график погрешностей приближенных значений, который выявит какой из методов наиболее точный и эффективный.

### **1.1 Основные понятия теории обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка**

Задача Коши является той задачей, без которой сложно представить теорию дифференциальных уравнений; сам смысл задачи, состоит в нахождении решения ОДУ и решение которой, должно соответствовать начальным данным задачи [10].

При анализе процессов, которые находятся дифференциальным законом эволюции и первоначальными данными, возникает и искомая задача Коши, в очень регулярных случаях.

Отличие задачи Коши от краевых задач в том, что в задачи Коши заранее не известна область, в которой должно быть найдено решение. Но несмотря на это, многие рассматривают задачу Коши как краевую задачу.

Главные вопросы свойственные задаче Коши:

- Существует ли для него решение?
- если решение есть, то какой промежуток или область, на котором оно существует?
- единственное решение или нет?
- если решение одно, тогда следует ли из этого, что решение корректно, т.е. является ли решение непрерывным?

Общая формула для Задачи Коши, для дифференциального уравнения  $n$ -го порядка (1):

$$y^{(n)}=f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}) \quad (1)$$

Формула для задачи Коши заключается в нахождении функции  $y=y(x)$ , которое удовлетворяет следующему уравнению и начальным условиям [3]:

Задача Коши для любого обыкновенного дифференциального уравнения (2):

$$y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y'_0, \dots, y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}, \quad (2)$$

где  $x_0, y_0, y'_0, \dots, y_0^{(n-1)}$  – заданные числа.

Решение задачи может быть сведено к поиску значений производных постоянных, при условии, что возможно, найти общее решение уравнения. Далеко не всегда, у задачи Коши можно отыскать общее решение, поэтому задачу Коши, как правило, решают приближенными методами.

Используя численные методы, для решения дифференциальных уравнений:  $y' = f(x, y)$  или  $dy/dx = f(x, y)$  формулы представляются в табличном виде, т. е. вывода является совокупность значений  $y_i$  и  $x_i$ . Решение имеет шаговый характер, т. е. одна или некоторое количество точек по условию  $(x,$



у) уже за пройденный шаг, способны найти следующую точку, а после еще неопределенное количество точек. Шаг- это вычитание двух ближайших аргументов  $h = x_{i+1} - x_i$ .

Всего известно в теории два класса: одношаговые и многошаговые. Для нахождения значений функции, одношагового класса, требуется значения только одной данной точки, т. е.:  $y_{i+1} = F[f(x_i, y_i)]$ , а второму – нескольких, например:  $y_{i+1} = F[y_{i-3}, y_{i-2}, y_{i-1}, y_i]$ . Методами второго класса, нельзя начать решение, решение всегда начинается одношаговыми методами. К очевидным недостаткам многошаговых методов можно отнести невозможность изменить в процессе решения величины шага (т. к. они используют предыдущие точки с уже ранее применяемым шагом) это бывает необходимо, для увеличения эффективности метода. К явным преимуществам многошаговых методов, можно выделить свойство, требуется небольшой размер компьютерной памяти, который необходим для решения и теоретической оценки погрешности решения. Методы коррекции и прогноза, а также, рассматриваемый метод Адамса, явно относятся к классу многошаговых методов [16].

Основные понятия теории обыкновенных дифференциальных уравнений.

Формула для ОДУ  $n$  – го порядка и для функции  $Y$  аргумента  $X$  является (3):

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0 \quad (3)$$

где  $F$  – искомая функция от своих аргументов.

В данном случае, определение “дифференциальное”, указывает, что в математических уравнениях, содержатся производные  $y', y'', \dots, y^{(n)}$ , сами функции, получившиеся как итог дифференцирования [17].

ОДУ может и не содержать аргумент  $X$ , в каком-либо виде, функцию  $u(x)$ , у которой требуется найти решение и производные функции.

Только самое главное и важное условие должно быть истинно: в уравнение  $n$ -ого порядка, обязательно должна входить старшая производная  $y^{(n)}(x)$ .

Рассмотрим примеры

$$6x' + 2y = e^x + \cos x - \text{уравнение первого порядка};$$

$$y''' + 4xy' - 7x + 7y = 3x - \text{уравнение третьего порядка}.$$

Очень часто на практике, вместо самих производных пишут дифференциалы:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + (4y^2 - 3x) \frac{dy}{dx} = 0 - \text{уравнение второго порядка};$$

$$3y^2 dx - (2y + x)y dx = 0 - \text{уравнение первого порядка},$$

Решением ОДУ является функция  $\varphi(x)$ , при подстановке, которое:

$$y = \varphi(x), y' = \varphi'(x), \dots, y^{(n)} = \varphi^{(n)}(x) \text{ обращается в тождество [21].}$$

К примеру, уравнение 3-го порядка  $y'' + 2y'' - y' - 3y + e^{-x} + 2 = 0$  будет иметь следующее решение:  $\varphi(x) = e^{-x} + \frac{2}{3}$ .

Рассмотрим основные моменты, определения и понятия ОДУ 1-го порядка.

ОДУ 1-го порядка, где  $N=1$  имеет следующий вид:  $F(x, y, y') = 0$ . Решение в общем виде  $Y=Y(X, C)$  или интеграл общего вида  $\Phi(x, y(x), C)=0$  уравнения 1-го порядка, несут в себе единственную постоянную произвольную. Только начальное условие для уравнения 1-го порядка  $y(x_0) = y_0$  может найти постоянную константу из решения, которое имеет общий характер, или имеет решение общего интеграла.

«Т.е. можно сделать вывод, по написанным формулам, что будет найдено частное решение, или если сказать по другому, будет найдено решение для задачи Коши.

Дифференциальные уравнения 1-го порядка с разделяющимися переменными.

Дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными (4)» [11]:

$$y' = f(x)gy, \quad (4)$$

или уравнение, которое можно преобразовать в уравнение (4):

$$f_1(x)g_1(y)dy + f_2(x)g_2(y)dx = 0 \quad (5)$$

С целью разделения переменных в уравнении, или иными словами, привести данное уравнение к уравнению с разделенными переменными, необходимо сделать следующие шаги (6):

$$\frac{dy}{dx} f(x)g(y); \frac{dy}{g(y)} = f(x)dx; g(y) \neq 0; \int \frac{dy}{g(y)} \int f(x)dx + C; \quad (6)$$

«Рассмотрим однородные дифференциальные уравнения 1-го порядка.

Общая формула для однородного уравнения 1-го порядка (7):

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0 \quad (7)$$

Уравнение называется однородным, если  $M(x,y)$  и  $N(x,y)$  функции одной и той же степени» [11].

Функция вида  $f(x,y)$  является однородной функцией  $k$ -й степени, если для любого  $t$  выполняется равенство  $f(tx, ty) = t^k f(x,y)$ .

В частном случае, если однородная функция имеет нулевую степень, то выполняется равенство  $f(tx, ty) = t^k f(x,y)$ .

Рассмотрим линейные дифференциальные уравнения 1-го порядка.

Линейное уравнение 1-го порядка (8):

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x), \quad (8)$$

Непрерывными функциями являются:  $P(X)$  и  $Q(X)$

Если  $Q(x) \equiv 0$ , То уравнение (6) будет представляться в следующем виде (9):

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = 0, \quad (9)$$

Тогда данное уравнение будет именовано как линейное однородное, иначе если:

$Q(x) \neq 0$ , такое уравнение будет называться, соответственно, линейным неоднородным.

Уравнение с разделяющимися переменными (10):

$$\begin{aligned} \frac{dy}{y} &= -P(x)dx \ln|y| = - \int P(x)dx + \ln|c|; \\ y' &= Ce^{-\int P(x)dx}, \end{aligned} \quad (10)$$

Уравнение (10) является общим решением предыдущего уравнение, т.е. уравнения (9). Для того, чтобы отыскать решение уравнения (8), которое схоже с уравнением (10), по функции  $P(X)$ , можно применить, для метода вариации с произвольной постоянно. Его суть состоит в следующем: подберем  $C=C(X)$ , таким способом, что решение линейного уравнения (9) будет являться решением для неоднородного линейного уравнения (8). Можно сделать следующий вывод: для (10) получим следующее (11):

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dC}{dx} e^{-\int P(x)dx} - CP(x)e^{-\int P(x)dx}. \quad (11)$$

Подставляя найденную производную в уравнение (6), будем иметь (12):

$$\frac{dC}{dx} e^{-\int P(x)dx} - CP(x)e^{-\int P(x)dx} + CP(x)e^{-\int P(x)dx} = Q(x) \quad (12)$$

или (13):

$$\frac{dC}{dx} = Q(x)e^{\int P(x)dx}, \quad (13)$$

откуда  $C(x) = \int Q(x)e^{\int P(x)dx} + C_1$ . Результатом послужит общее решение (14) неоднородного линейного уравнения (8):

$$y = e^{\int P(x)dx} (C_1 + \int Q(x) e^{-\int P(x)dx} dx) \quad (14)$$

Начало формулы представляет собой общее решение (14) линейного однородного дифференциального уравнения (9), другая часть формулы (14) является частным решением линейного неоднородного уравнения (8).

## 1.2 Метод Эйлера

Ранее были рассмотрены аналитическо-приближенные методы для решения задачи Коши. Табличное решение приближенных значений искомой функции  $y(x)$  численных методов относится к методу Эйлера.

Решим и проанализируем дифференциальное уравнение (15):

$$y' = f(x, y) \quad (15)$$

с начальными данными:

$$y(x_0) = y_0.$$

И при этом, допустим, будет малый шаг  $h$ , затем построим систему равностоящих точек (16):

$$x_i = x_0 + ih \quad (i = 0, 1, 2 \dots). \quad (16)$$

Приближенные значения по методу Эйлера  $y(x_i) \approx y_i$  исчисляются в определенном порядке, по формуле (17):

$$y_{i+1} = y_i + hf(x_i, y_i), \quad (i = 0, 1, 2 \dots) \quad (17)$$

«Сама функция (интегральная кривая)  $y=y(x)$ , которая проходит через  $M_0(x_0, y_0)$ , меняется на ломанную с  $M_0, M_1, M_2, \dots$  вершинами  $M_i(x_i, y_i)$  ( $i = 0, 1, 2 \dots$ ); где каждый элемент  $M_i, M_{i+1}$  функции, именуется ломаной Эйлера. Функция, имеющая идентичное направление с той интегральной кривой уравнения, которая проходит через данную точку  $M_i$ » [14].

Если в некотором прямоугольнике правая часть (18):

$$R\{|x - x_0| \leq a, |y - y_0| \leq b\} \quad (18)$$

согласуется с условиями (19, 20):

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq |y_1 - y_2| \quad (N = \text{const}), \quad (19)$$

$$\left| \frac{df}{dx} \right| = \left| \frac{df}{dx} + f \frac{df}{dy} \right| \leq M \quad (M = \text{const}). \quad (20)$$

Тогда, можно записать следующую формулу оценочной погрешности (21):

$$|y(x_n) - y_n| \leq \frac{hM}{2N} [(1 + hN)^n - 1], \quad (21)$$

где  $y(x_n)$ - это значение точного решения уравнения при  $x = x_n$ , а  $y_n$ - приближенное значение, полученное на  $n$ - м шаге.

«Формула (20) не имеет практического решения и на практике, как правило, является более лучшим способом- это двойной просчет: вычисляют с шагом  $\frac{h}{2}$  и с погрешностью  $y_n^*$ , которую оценивается такой формулой (22):

$$|y_n^* - y(x_n)| \approx |y_n^* - y_n|. \quad (22)$$

На ДУ высших порядков и систем ДУ, очень распространен и применяется метод Эйлера. Предварительно приведены к системе дифференциальных уравнений первого порядка, должны быть, ДУ высших порядков.

Например, система из двух уравнений первого порядка (23):

$$\left. \begin{aligned} y' &= f_1(x, y, z), \\ z' &= f_2(x, y, z) \end{aligned} \right\} , \quad (23)$$

с начальными данными  $y(x_0) = y_0, z(x_0) = z_0$

Приблизительные, неточные значения  $y(x_i) \approx y_i, z(x_i) \approx z_i$ , по формулам, вычисляются в определенном порядке (24)» [14]:

$$\left. \begin{aligned} y_{i+1} &= y_i + hf_1(x_i, y_i, z_i), \\ z_{i+1} &= z_i + hf_2(x_i, y_i, z_i) \quad (i = 0, 1, 2, \dots) \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

Рассмотрим другие методы решения задачи Коши.

### 1.3 Метод Рунге-Кутты 4-го порядка

Задача Коши для дифференциального уравнения (25):

$$y' = f(x, y), \text{ где начальные данные } y(x_0) = y_0. \quad (25)$$

«Пусть  $y_i$  это значение решения в точке  $x_i$ . Метод Рунге- Кутты, позволяет вычислить приближенные значения  $y_{i+1}$  в точке  $x_{i+1} = x_i + h$ , расчеты производятся по следующим системам уравнений (26, 27) » [14]:

$$\begin{cases} y_{i+1} = y_i + \Delta y_i, \\ \Delta y_i = \frac{1}{6}(K_1^{(i)} + 2K_2^{(i)} + 2K_3^{(i)} + K_4^{(i)}), \end{cases} \quad (26)$$

$$\begin{cases} K_1^{(i)} = hf(x_i, y_i), \\ K_2^{(i)} = hf\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{K_1^{(i)}}{2}\right), \\ K_3^{(i)} = hf\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{K_2^{(i)}}{2}\right), \\ K_4^{(i)} = hf\left(x_i + h, y_i + K_3^{(i)}\right). \end{cases} \quad (27)$$

Воспользуемся таблицей 1 для удобства вычисления.

Таблица 1 - Интегрирование дифференциального уравнения методом Рунге-Кутта

i	x	y	K=hf(x,y)	$\Delta y$
0	$x_0$	$y_0$	$K_1^{(0)}$	$K_1^{(0)}$
	$x_0 + \frac{h}{2}$	$y_0 + \frac{K_1^{(0)}}{2}$	$K_2^{(0)}$	$2K_2^{(0)}$
	$x_0 + \frac{h}{2}$	$y_0 + \frac{K_2^{(0)}}{2}$	$K_3^{(0)}$	$2K_3^{(0)}$
	$x_0 + h$	$y_0 + K_3^{(0)}$	$K_4^{(0)}$	$K_4^{(0)}$
1	$x_1$	$y_1$		$\Delta y_0$

Правила, по которым заполняется таблица [14]:

- в первой строке, записываем значения для  $x_0, y_0$ ;



- рассчитываем по формуле  $f(x_0, y_0)$ , домножим на шаг  $h$  и записываем в таблицу как  $K_1^{(0)}$ ;
- в таблице, на второй строчке, записываем:  $x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{k_1^{(0)}}{2}$ ;
- по формуле, вычисляется  $f(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{k_1^{(0)}}{2})$ , и домножим на  $h$  и заносится в таблицу как  $K_2^{(0)}$ ;
- в таблице, в третьей строчке, записываем:  $x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{k_1^{(0)}}{2}$ ;
- по формуле, вычисляется  $f(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{k_1^{(0)}}{2})$ , домножим на  $h$  заносится в таблицу как  $K_3^{(0)}$ ;
- в таблице, в четвертой строчке, записываем:  $x_0 + h, y_0 + K_3^{(0)}$ ;
- по формуле, вычисляется  $f(x_0 + h, y_0 + K_3^{(0)})$ , домножим на  $h$  заносится в таблицу как  $K_4^{(0)}$ ;
- в крайний столбец  $\Delta u$  переносим следующие числа:  $K_1^{(0)}, 2K_2^{(0)}, 2K_3^{(0)}, K_4^{(0)}$ ;
- проводим следующие математические действия: складываем все числа, которые находятся в столбце  $\Delta u$ , делим их на 6 и заносим в таблицу как  $\Delta u_0$ ;
- и в последнем действии вычисляем  $y_1 = y_0 + \Delta u_0$ .

После выполненных действий, проводят идентичные вычисления, но уже для данных  $(x_1, y_1)$ .

Кроме того, результат правой части  $f(x, y)$  включается в таблицу 1, однако если результат вычислений оказывается слишком огромным, рекомендуется их записывать в таблицу, отличной от данной.

При переходе от одной точки к другой, можно вычислять и менять шаг расчета. Следует вычислять дробь, чтобы выбрать правильность выбора шага  $h$  (28):

$$\theta = \left| \frac{K_2^{(i)} - K_3^{(i)}}{K_1^{(i)} - K_2^{(i)}} \right| \quad (28)$$

Результат данного вычисления  $\theta$  должен не превосходить некоторого значения, в данном случае нескольких сотых. Иначе, рекомендовано, уменьшить шаг  $h$ . Вычислять и оценивать метод погрешности довольно непросто.

Формула двойного просчета, по которой можно вычислить грубую оценку погрешности (29):

$$|y_n^* - y(x_n)| \approx \left| \frac{y_n^* - y_n}{15} \right|, \quad (29)$$

где  $y(x_n)$ - значение точного решения в точке  $x_n$ ,

$y_n^*, y_n$ - приближенные значения, полученные с шагом  $\frac{h}{2}$  и  $h$ .

Чтобы реализовать метод Рунге-Кутты на некоторой ЭВМ, где происходит автоматический выбор шага, как правило, в точках  $x_i$ , первым делом исчисляются по формуле двойной просчет, в первую очередь с шагом  $h$ , затем вычисляется с шагом  $\frac{h}{2}$ . Однако в случае, если в результате значения  $y_i$  различаются в промежутке разрешимой точности, тогда сам шаг  $h$  для каждой следующей точки ( $x_{i+1}$ ) умножают на два, а иначе, пользуются половинным шагом [13].

#### 1.4 Метод Адамса

По условию:

$y' = f(x, y)$ , с первоначальными данными  $y(x_0) = y_0$ , которые были вычислены одним из методов, которые рассматриваются в данном разделе, а именно: метод Эйлера, метод Рунге- Кутта, и три значения искомой функции (30):

$$y_1 = y(x_1) = y(x_0 + h), \quad y_2 = y(x_2) = y(x_0 + 2h), \quad (30)$$

$$y_3 = y(x_3) = y(x_0 + 3h).$$

С помощью этих значений вычисляем величины

$$q_0 = hy'_0 = hf(x_0, y_0), \quad q_1 = hy'_1 = hf(x_1, y_1),$$

$$q_2 = hy'_2 = hf(x_2, y_2), \quad q_3 = hy'_3 = hf(x_3, y_3).$$

Далее, записываются числа  $x_k, y_k, y'_k, q_k$  ( $k = 0, 1, 2, 3$ ) в таблицу 1.2 и исчисляются конечные разности величины  $q$ .

Экстраполяционная формула Адамса (31):

$$\Delta y_k = q_k + \frac{1}{2} \Delta q_{k-1} + \frac{5}{12} \Delta^2 q_{k-2} + \frac{3}{8} \Delta^3 q_{k-3} \quad (k = 3, 4, \dots), \quad (31)$$

Ее применение необходимо для следующей формулы:  $y_{k+1} = y_k + \Delta y_k$ .

Результат формулы (31), будет представляться как  $y_{k+1}^{\text{пред}}$  [2].

Таблица 2 - Интегрирование дифференциального уравнения методом Адамса

$x_k$	$y_k$	$\Delta y_k = y_{k+1} - y_k$	$y'_k = f(x_k, y_k)$	$q_k = hy'_k$	$\Delta q_k = q_{k+1} - q_k$	$\Delta^2 q_k$	$\Delta^3 q_k$
$x_0$	$y_0$	$\Delta y_0$	$f(x_0, y_0)$	$q_0$	$\Delta q_0$	$\Delta^2 q_0$	$\Delta^3 q_0$
$x_1$	$y_1$	$\Delta y_1$	$f(x_1, y_1)$	$q_1$	$\Delta q_1$	$\Delta^2 q_1$	$\Delta^3 q_1$
$x_2$	$y_2$	$\Delta y_2$	$f(x_2, y_2)$	$q_2$	$\Delta q_2$	$\Delta^2 q_2$	$\Delta^3 q_2$
$x_3$	$y_3$	$\Delta y_3$	$f(x_3, y_3)$	$q_3$	$\Delta q_3$	$\Delta^2 q_3$	
$x_4$	$y_4$	$\Delta y_4$	$f(x_4, y_4)$	$q_4$	$\Delta q_4$		
$x_5$	$y_5$	$\Delta y_5$	$f(x_5, y_5)$	$q_5$			
$x_6$	$y_6$						

В результате формулы (31), необходимо удостовериться. Далее записываем в таблицу значения  $x_{k+1}, y_{k+1}, y'_{k+1}, q_{k+1}$ , дополним недостающие числа, запишем их в таблицу разностей.

Интерполяционная формула Адамса (32):

$$\Delta y_k = q_k + \frac{1}{2} \Delta q_k - \frac{1}{12} \Delta^2 q_{k-1} - \frac{1}{24} \Delta^3 q_{k-1}, \quad (32)$$

Значение по формуле (21) обозначим как  $y_{k+1}^{\text{кор}}$ .

Формулы (31) и (32) преимущественно, имеют большую точность исчисления. В результате, формулы выдают погрешность  $O(h^4)$ , но явным недостатком формул является их сложность вычисления.

«На практике, пользуются сложившимся соображениями. Примерная погрешность формулы, которая более точна по вычислениям коррекции (32) составляет около 0,25% части разности между значениями  $\Delta y_k$ , которые были вычислены по формулам (31) и (32). Значит при условии, если данная разность немного может превысить ошибку расчета, тогда шаг  $h$  будет считаться выбран верно и указанный расчет возобновляют с шагом по условию. Однако в случае, если же на каком-либо этапе расчета, данная разность по результатам, становится большой (если учесть, что не было допущено ошибки в вычислениях) тогда следует уменьшить  $h$ . Рекомендовано, в два ряда уменьшать шаг, применяя точки по условию и формулы интерполяции на середину» [4].

Последовательность, по которой заполняется таблица 2:

- записывается в таблицу 2 некоторые числа  $x_k, y_k, y'_k, q_k$ , при  $k=0,1,2,3$  и вычисляются разности  $\Delta q_k$  ( $k=0,1,2$ ),  $\Delta^2 q_k$  ( $k=0,1$ ),  $\Delta^3 q_0$ ;
- при  $k=3$ , определяются по формуле (31) следующие числа  $\Delta q_2, q_3, \Delta^2 q_1, \Delta^3 q_0$ , в таблице, которые располагаются по диагонали

$$\Delta y_3 = q_3 + \frac{1}{2} \Delta q_2 + \frac{5}{12} \Delta^2 q_1 + \frac{3}{8} \Delta^3 q_0;$$

- далее вычисляются значения  $x_4 = x_3 + h$ ,  $x_4 = x_3 + \Delta h_3$ .
- по результатам записываются  $x_4, y_4$  в таблицу 2, находятся  $y'_4 = f(x_4, y_4)$ ,  $q_4 = hy'_4$  и дополняется таблица значениями  $\Delta q_3$ ,  $\Delta^2 q_2$ ,  $\Delta^3 q_1$ ;
- после этого используются результаты значения  $q$ , проверяется  $\Delta q_3$  по формуле (32) при  $k=3$ :

$$\Delta y_3 = q_3 + \frac{1}{2} \Delta q_3 - \frac{1}{12} \Delta^2 q_2 - \frac{1}{24} \Delta^3 q_1;$$

- если измененное значение  $\Delta y_3$  имеет отличие от значения, которое было предположительно, тогда применяются определенные изменения в значения  $\Delta y_3$  и  $y_4$ . Далее идет проверка, что данные поправки не существенно повлияют на значения  $q_4$ , и после этого, продолжается расчет с шагом по условию. Иначе, выбирается меньший шаг.

Последующие вычисления для  $k=4, 5, \dots$  происходят по схожему принципу [14].

Формулы Адамса, при работе на ЭВМ, удобнее применять в ином виде. Используя значение  $y_{k+1}$  непосредственно через сами величины  $q$ .

Экстраполяционная формула Адамса (33):

$$y_{k+1} = y_k + \frac{h}{24} (55y'_k - 59y'_{k-1} + 37y'_{k-2} - 9y'_{k-3}), \quad (33)$$

Интерполяционная формула Адамса (34):

$$y_{k+1} = y_k + \frac{h}{24} (9y'_{k+1} - 19y'_k - 5y'_{k-1} + y'_{k-2}). \quad (34)$$

«Огромное влияние метод Адамса имеет на системы дифференциальных уравнений, а тем более на дифференциальные уравнения n-го порядка» [12].

Допустим система двух уравнений (35):

$$\left. \begin{aligned} y' &= f_1(x, y, z), \\ z' &= f_2(x, y, z). \end{aligned} \right\} \quad (35)$$

Тогда, экстраполяционные формулы Адамса имеют следующий вид для системы (36):

$$\left. \begin{aligned} \Delta y_k &= p_k + 3\frac{1}{2}\Delta p_{k-1} + \frac{7}{12}\Delta^2 p_{k-2} + \frac{5}{8}\Delta^3 p_{k-3}, \\ \Delta z_k &= q_k + 4\frac{1}{2}\Delta q_{k-1} + \frac{5}{12}\Delta^2 q_{k-2} + \frac{5}{8}\Delta^3 q_{k-3}, \end{aligned} \right\} \quad (36)$$

где  $p_k = hy'_k = hf_1(x_k, y_k, z_k)$ ,  $q_k = hz'_k = hf_2(x_k, y_k, z_k)$ .

Подобную систему решений имеют интерполяционные формулы Адамса.

Приведем пример (рисунок 1).

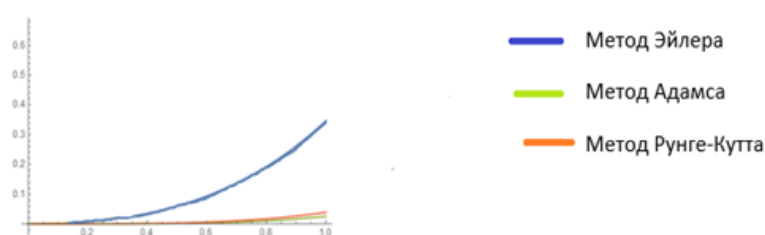


Рисунок 1 - Графики погрешностей приближенных решений, построенных по методу Эйлера, методу Адамса и методу Рунге-Кутты четвертого порядка, при n=3

Рассматривается модельное дифференциальное уравнение  $y' = y$  для решения задачи Коши, на следующем промежутке  $[0; m]$ , где  $m \in [0.25, 1]$ , и на

основе упомянутых численных методов вычисляется, с пределом на отрезке  $[0; x]$ . В итоге, показаны результаты вычислительных экспериментов для  $y(0) = 1$ ,  $h_k = x/n$  интервал разбивается на равные части.

В таблице 3 приведен пример работы методов для дифференциального уравнения с погрешностью. «Анализ погрешности рассматривается и оценивается по значению, которое находится на конце правого конца промежутка. Сделаем анализ погрешности для приближённых результатов, которые были получены для  $n=10$  и  $n=100$ . В таблице 3, за  $err1$  – обозначим модуль разности, которое высчитывается как разность между точным решением, которое считается результатом в точке на правом конце промежутка и результатом приближённого решения в точке, также, которое находится на правом конце промежутка при  $n=10$ , за  $err2$  соответственно обозначим модуль той же разности при  $n=100$ » [9].

Таблица 3 - Погрешность работы методов для дифференциального уравнения  $y' = y$

Методы	m = 0.25		m = 0.5		m = 1	
	err1	err2	err1	err2	err1	err2
Метод Эйлера	0.0039	0.0004	0.01	0.002	0.1	0.01
Метод Адамса	0.00001	$1 \times 10^{-7}$	0.0001	$1 \times 10^{-6}$	0.002	$1 \times 10^{-5}$
Метод Рунге-Кутта	0.00003	$3 \times 10^{-7}$	0.0003	$3 \times 10^{-6}$	0.004	$3 \times 10^{-5}$

Из таблицы можно сделать вывод, который и подтверждает общие известные положения, что наибольшая точность может быть достигнута методом Адамса.

Метод Рунге-Кутта имеет чуть большее отклонение, но не сильно уступает методу Адамса [25].

У метода Эйлера наблюдается самая низкая точность, по сравнению с методом Рунге-Кутты и методом Адамса обоим методом, итогом имея самую низкую по точность.

Стоит заметить, что данный итог, не теряет актуальности, если увеличивать саму длину промежутка и увеличить число  $n$ .

### Выводы к главе 1

Первая глава посвящена анализу численных методов решения дифференциальных уравнений.

По результатам первой главы можно сделать некоторые итоги:

Метод Адамса, по сравнению с другими методами, позволяет выдать более точное решение с минимальной погрешностью.

Метод Рунге-Кутты позволяет получить результат, не во многом уступающем методу Адамса.

С точки зрения простоты реализации, наиболее предпочтителен метод Эйлера.



## **Глава 2 Анализ алгоритмов решения задачи Коши для некоторых типов обыкновенных дифференциальных уравнений**

Анализ алгоритмов будет проведен с помощью тех-же численных методов, которые были описаны в первой главе.

К главному и существенному плюсу решения задачи Коши можно отнести легкую программную реализацию алгоритмов [18].

К данной категории можно отнести:

- алгоритм решения задачи Коши методом Эйлера;
- алгоритм решения задачи Коши методом Рунге-Кутты;
- алгоритм решения задачи Коши методом Адамса.

Рассмотрим характеристики и свойства указанных алгоритмов, добавив графики, блок-схемы.

### **2.1 Анализ численного метода Эйлера для решения обыкновенного дифференциального уравнения**

Метод Эйлера- это самый простой из численных методов для решения систем ОДУ. Явный представитель одношаговых методов [19].

Его основа, это аппроксимация интегральной кривой кусочно-линейной функцией, также именуемой как ломанная Эйлера [24].

«Геометрический смысл метода Эйлера заключается в аппроксимации искомого решения (интегральной кривой  $y(x)$ ) на отрезке  $[x_k, x_{k+1}]$  отрезком касательной, проведённой к графику решения в точке  $x_k$ » [15].

На рисунке 2 показано графическое представление метода Эйлера. Сплошными линиями на рисунке 2 изображено поле интегральных кривых. Начиная из начальной точки, например,  $x_k$ , чертим касательную к интегральной кривой, которая проходит через точку  $x_k$ .

Из предыдущего утверждения, можно сделать вывод, что после точки  $x_k$ , станет точкой численного решения  $x_{k+1}$ .

Можно сделать вывод, что решением данного уравнения станет ломанная линия, проведённая по касательным.

«Метод Эйлера является самым первым методом, который позволяет решить задачу Коши численно. О. Коши использовал этот метод для доказательства существования решения задачи Коши. Ввиду невысокой точности и вычислительной неустойчивости для практического нахождения решений задачи Коши метод Эйлера применяется редко. Однако в виду своей простоты метод Эйлера находит своё применение в теоретических исследованиях дифференциальных уравнений, задач вариационного исчисления и ряда других математических проблем.

В основе метода ломаных Эйлера лежит идея графического построения решения дифференциального уравнения. Этот метод дает одновременно и способ нахождения искомой функции в численной (табличной) форме (рисунки 2,3)» [15].

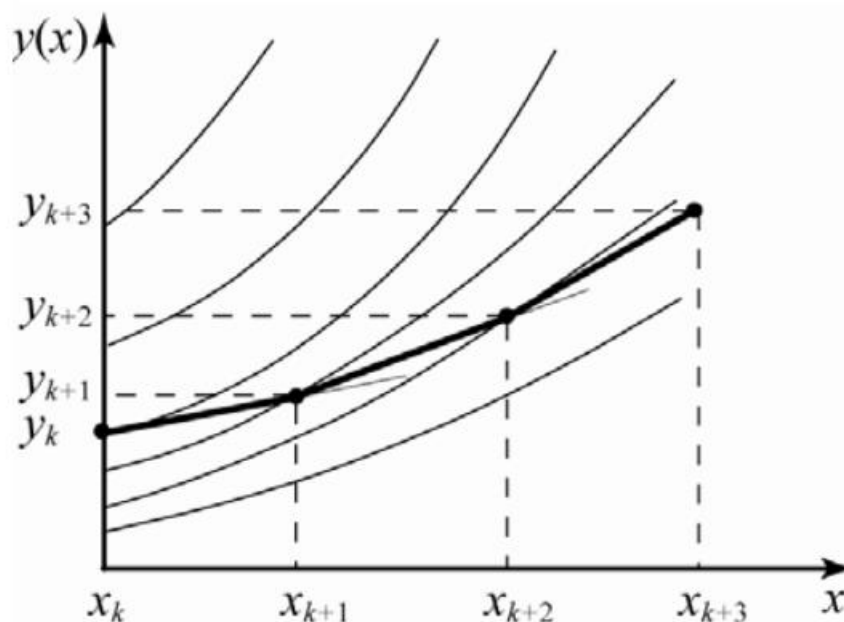


Рисунок 2 – Геометрическая интерпретация метода Эйлера. Результатом численного решения является ломаная линия, представляющая собой набор касательных к интегральным кривым.

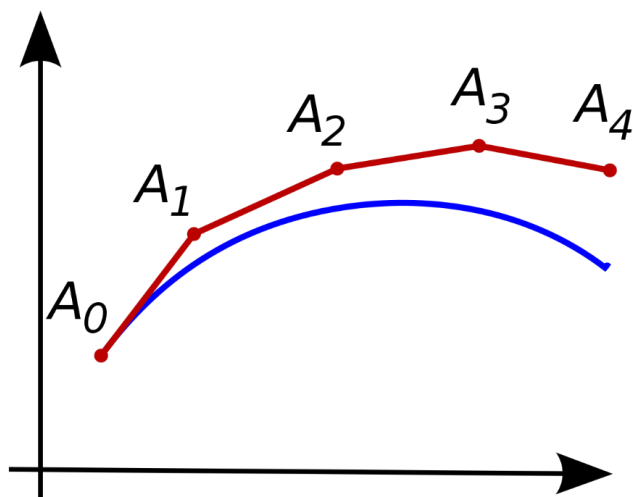


Рисунок 3 – Ломанная Эйлера

«Суть метода ломаных Эйлера заключается, в построении графика для решения дифференциального уравнения. Также данный метод в результате, выдает одновременно и метод нахождения функции в табличной форме.

Рассмотрим следующую задачу:

Решить с помощью метода Эйлера обыкновенное дифференциальное уравнение  $y' = 2x^2 - y$  на интервале  $[0, 5]$  при начальных условиях  $y(0) = 1$ » [15].

Блок-схема для уравнения  $y' = 2x^2 - y$  показана на рисунке 4:

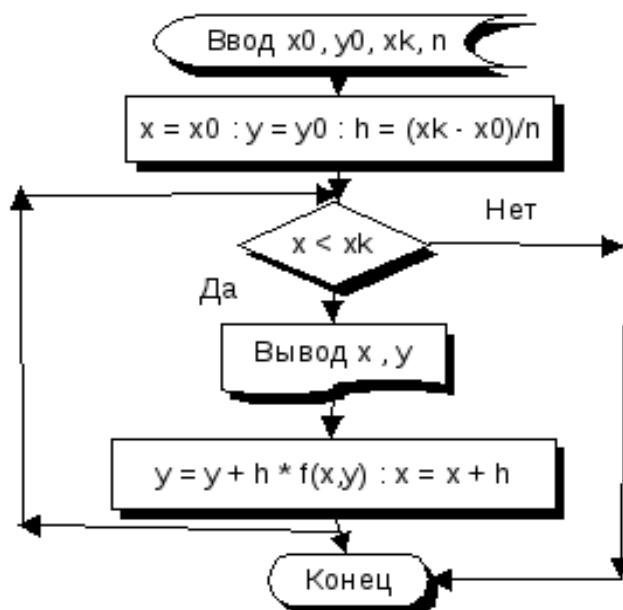


Рисунок 4 – Блок-схема метода Эйлера для  $y' = 2x^2 - y$  уравнения

Возьмем число разбиений  $n = 5$ .

Соответственно вычисляем  $h = (5 - 0)/5 = 1$ .

Построим таблицу 4, на основе указанных данных для дифференциального уравнения с числом разбиений  $n=5$  и с шагом интегрирования  $h=1$ .

Таблица 4 – Решение дифференциального уравнения  $y'=2x^2 - y$  с числом разбиений  $n=5$ .

n	x	y	f(x,y)
0	0.000	1.000	-1.000
1	1.000	0.000	2.000
2	2.000	2.000	6.000
3	3.000	8.000	10.000
4	4.000	18.000	14.000
5	5.000	32.000	

К примеру, возьмем число разбиений  $n = 10$ .

Тогда шаг интегрирования будет равен  $h = (5 - 0)/10 = 0.5$ .

Построим таблицу 5, на основе указанных данных для дифференциального уравнения с числом разбиений  $n=10$ .

Таблица 5 – Решение дифференциального уравнения  $y'=2x^2- y$  с числом разбиений  $n=10$ .

n	x	y	f(x,y)	h * f(x,y)
0	0.000	1.000	-1.000	-0.500
1	0.500	0.500	0.000	0.000
2	1.000	0.500	1.500	0.750
3	1.500	1.250	3.250	1.625
4	2.000	2.875	5.125	2.562
5	2.500	5.437	7.062	3.531
6	3.000	8.968	9.032	4.516
7	3.500	13.484	11.016	5.508
8	4.000	18.992	13.008	6.504
9	4.500	25.496	15.004	7.502
10	5.000	32.998		

«В результате вычислений результатом считается некоторая ломанная линия. Причем, чем большее количество шагов наблюдается в вычислениях, тем дальше ломанная линия соответствует истинному решению, что и определенно является главным недостатком данного метода. Чем больше имеется кривизна у интегральной кривой и сам шаг интегрирования, тем сильнее происходит это отклонение. Следующим недостатком метода Эйлера можно сказать что ошибка интегрирования растет с каждым шагом» [13].

## **2.2 Анализ численного метода Рунге-Кутты для решения обыкновенного дифференциального уравнения**

«Метод Рунге-Кутты – большой класс для решения численных методов решения задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений и их систем. Является одношаговым методом (рисунок 5)» [7].

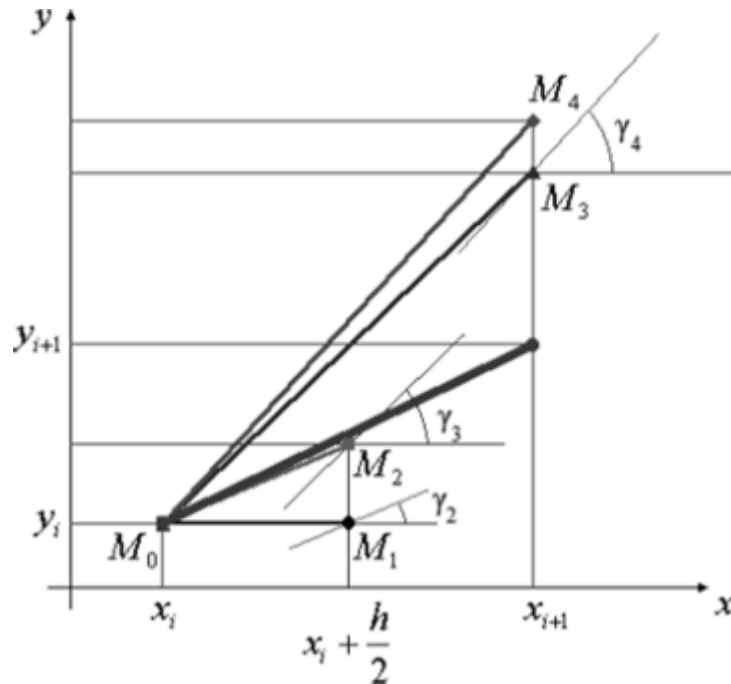


Рисунок 5 – Геометрическая интерпретация метода Рунге-Кутты

Порядок построения геометрической интерпретации метода Рунге-Кутты:

- «с шагом интегрирования  $h/2$  из точки  $M_0(x, y)$  под углом  $y = \text{tg}(k_1/h)$  необходимо провести прямую в точку  $M_1(x_i+h/2, y_i+h/2)$ ;
- в точке  $M_1$  вычисляется направление  $\text{tg}(y_2) = (k_2/h)$  и делая шаг в этом направлении, из точки  $M_0$  попадаем в точку  $M_2(x_i+h/2, y_i+h/2)$ ;
- в точке  $M_2$  вычисляется направление  $\text{tg}(y_3) = (k_3/h)$  и делая шаг в этом направлении, из точки  $M_0$  попадаем в точку  $M_3(x_i+h/2, y_i+h/2)$ ;
- в точке  $M_3$  вычисляется направление  $\text{tg}(y_4) = (k_4/h)$ ;
- полученные величины  $k_1, k_2, k_3, k_4$  усредняются по формуле (26)» [17]:

$$\begin{cases} y_{i+1} = y_i + \Delta y_i, \\ \Delta y_i = \frac{1}{6} (K_1^{(i)} + 2K_2^{(i)} + 2K_3^{(i)} + K_4^{(i)}), \end{cases}$$

Блок-схема метода Рунге-Кутты четвертого порядка приведена на рисунке 6:

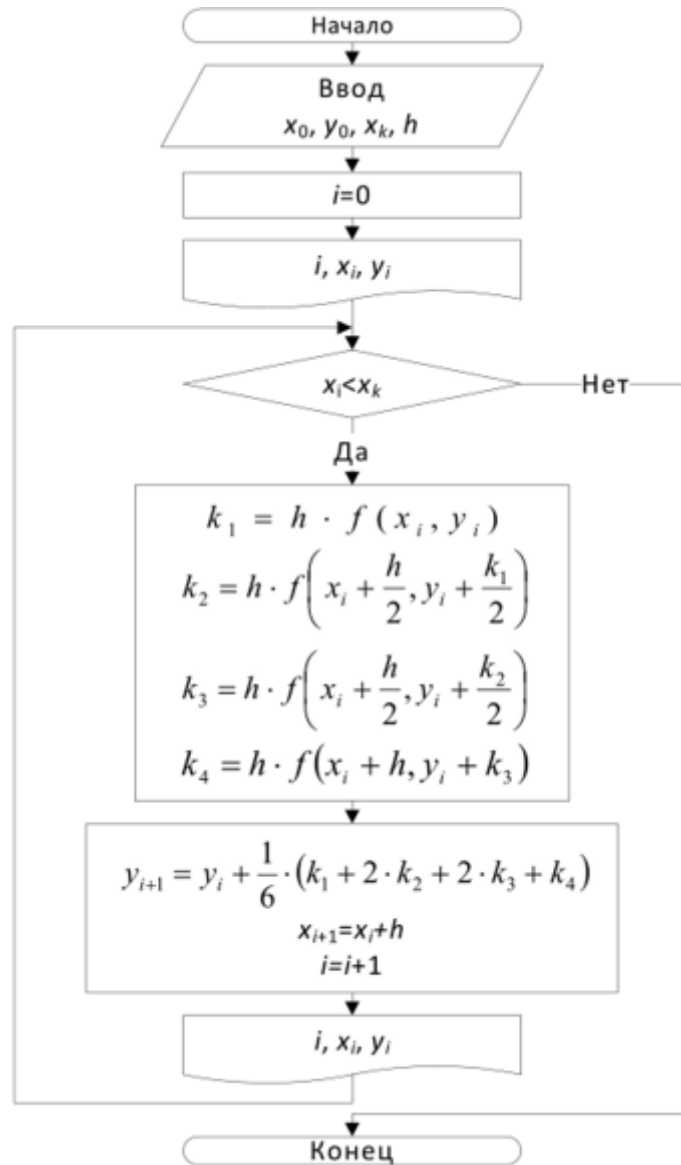


Рисунок 6 – Блок-схема для метода Рунге-Кутты

У метода Рунге-Кутты есть определенный ряд достоинств. Этот метод очень легок при программной реализации и просто программируется. Указанный метод обладает свойством высокой точности для разного вида, разнообразных задач. Этот метод (в принципе, как и все подобные одношаговые методы)

является “самостартующим” и на любом этапе текущих вычислений, менять шаг интегрирования.

Все системы легко обобщаются на системы дифференциальных уравнений 1-го порядка.

### 2.3 Анализ численного метода Адамса для решения обыкновенного дифференциального уравнения

Метод Адамса - многошаговый метод численного интегрирования ОДУ для первого порядка. Главное его отличие, например, от того же метода Рунге-Кутты, для того чтобы очередное значение было вычислено искомое решение используется не одно, а большее количество значений, которые вдобавок, были посчитаны до этого момента в предыдущих точках.

Блок схема для метода Адамса показана на рисунке 7:

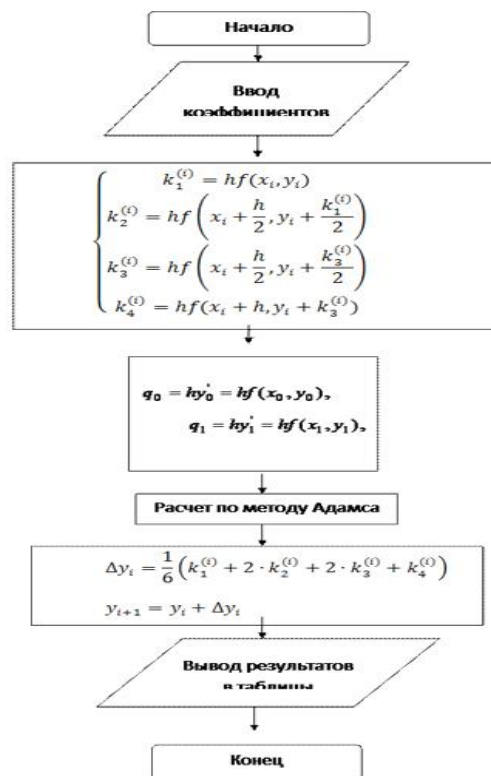


Рисунок 7 – Блок схема метода Адамса



«Погрешность метода Адамса, в том же состоянии, просто ограничена или становится больше довольно медленно, если асимптотически устойчивые решения уравнений. Для отыскания устойчивых периодических решений, это и позволяет использовать этот метод, а также, данный метод позволяет производить расчёты движения небесных тел» [9].

## Выводы к главе 2

Вторая глава посвящена анализу алгоритмов решения задачи Коши для некоторых типов обыкновенных дифференциальных уравнений.

Был проведен анализ трех численных методов решения обыкновенных дифференциальных уравнений.

Были показаны различные таблицы, блок-схемы данных трех численных методов.

Для методов Эйлера и Рунге-Кутты были приведены геометрические интерпретации.

У метода Рунге-Кутты есть определенное преимущество перед другими численными методами. Этот метод довольно прост при программной реализации и достаточно просто программируется.

Метод Эйлера очень прост в вычислениях.

Метод Адамса позволяет получить самое точное решение, с минимальной погрешностью и является самым эффективным.

## **Глава 3. Реализация и тестирование алгоритмов решения задачи Коши**

Для реализации алгоритмов решения задачи Коши проведен вычислительный эксперимент для решения дифференциального уравнения на компилируемом, статически типизированном языке программирования общего назначения C++.

Затем проведен сравнительный анализ полученных результатов и выявлен наиболее эффективный из методов, опираясь на аналитическое решение данного уравнения.

### **3.1 Разработка программы**

Для реализации алгоритмов на языке C++ разработана программа.

Среда разработки Code:blocks.

Code:blocks это- свободная кроссплатформерная среда разработки.

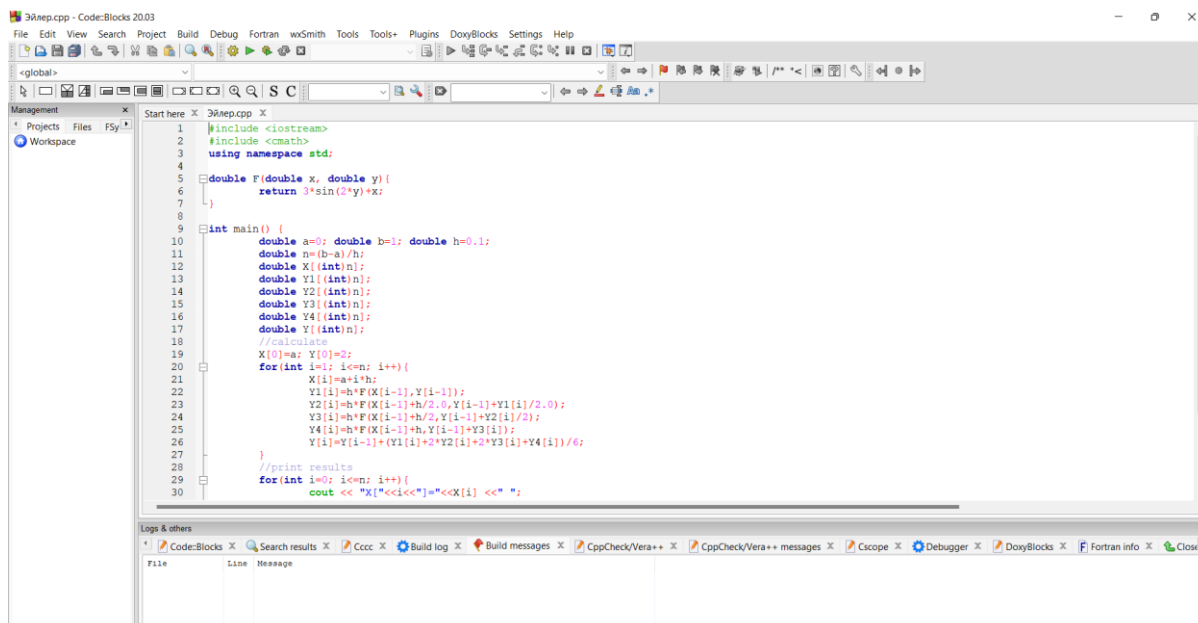
Сама программа написана на языке C++.

Логотип Code:blocks представлен на рисунке 8:



Рисунок 8 – Логотип Code:Blocks

Пример среды разработки на C++ в IDE Code:Blocks представлен на рисунке 9:



```
1 #include <iostream>
2 #include <cmath>
3 using namespace std;
4
5 double F(double x, double y){
6     return 3*sin(2*y)+x;
7 }
8
9 int main() {
10     double a=0; double b=1; double h=0.1;
11     double n=(b-a)/h;
12     double X[(int)n];
13     double Y1[(int)n];
14     double Y2[(int)n];
15     double Y3[(int)n];
16     double Y4[(int)n];
17     double Y[(int)n];
18     //calculate
19     X[0]=a; Y[0]=2;
20     for(int i=1; i<=n; i++){
21         X[i]=a+i*h;
22         Y1[i]=h*F(X[i-1],Y[i-1]);
23         Y2[i]=h*F(X[i-1]+h/2.0,Y[i-1]+Y1[i]/2.0);
24         Y3[i]=h*F(X[i-1]+h/2.0,Y[i-1]+Y2[i]/2);
25         Y4[i]=h*F(X[i-1]+h,Y[i-1]+Y3[i]);
26         Y[i]=Y[i-1]+(Y1[i]+2*Y2[i]+2*Y3[i]+Y4[i])/6;
27     }
28     //print results
29     for(int i=0; i<=n; i++){
30         cout << "X["<i<<"]="<<X[i] <<" << " ";
```

Рисунок 9 – Скриншот среды разработки на C++ в IDE Code:blocks при решении дифференциального уравнения методом Рунге-Кутты

Проведен сравнительный анализ численных расчетов для дифференциального уравнения численными методами: Эйлера, Рунге- Кутта и Адамса [22].

Задача: Применяя метод Эйлера, решить дифференциальное уравнение  $y'=3\sin 2y+xy'$  с начальными данными  $y(0)=2$  на отрезке  $[0,1]$  с шагом  $h=0,1$ .

Задача №2.

Применяя метод Рунге-Кутты 4-го порядка дифференциальное уравнение  $y'=3\sin 2y+x=3\sin 2y+x$  с начальными данными  $y(0)=2$  на отрезке  $[0,1]$  с шагом  $h=0,1$ .

Задача №3.

Применяя метод Адамса дифференциальное уравнение  $y'=3\sin 2y+x=3\sin 2y+x$  с начальными данными  $y(0)=2$  на отрезке  $[0,1]$  с шагом  $h=0,1$ .

Пример кода для реализация задачи №1 приведен в приложении А.

### 3.2 Сравнительный анализ полученных результатов

По результатам, которые были получены в ходе реализации, был совершен сравнительный анализ полученных результатов [23]. В таблице (6) приведены результаты численных расчетов для дифференциального уравнения методами Эйлера, Рунге- Кутта и Адамса.

Таблица 6 – Результаты численных расчетов для дифференциального уравнения

i	X	Y			
		Точное решение	Метод Эйлера	Метод Рунге-Кутта	Метод Адамса
0	0	2	2	2	2
1	0,1	1,912	1,77	1,82	1,914
2	0,2	1,84	1,66	1,72	1,86
3	0,3	1,773	1,628	1,67	1,782
4	0,4	1,629	1,624	1,654	1,629
5	0,5	1,624	1,632	1,651	1,623
6	0,6	1,639	1,645	1,656	1,637
7	0,7	1,651	1,660	1,66	1,65
8	0,8	1,659	1,67	1,68	1,57
9	0,9	1,663	1,69	1,69	1,665
10	1	1,668	1,710	1,712	1,667

Исходя из численных расчетов для дифференциального уравнения  $y' = 3\sin 2y + x = 3\sin 2y + x$ , и на основе сравнительного анализа численных расчетов, вычисления методом Адамса максимально близки к точному решению, которое было вычислено аналитическим способом [8].

На рисунке 10 приведен пример выполнения программы методов Эйлера:

```
X[0]=0 X[1]=0.1 X[2]=0.2 X[3]=0.3 X[4]=0.4 X[5]=0.5 X[6]=0.6 X[7]=0.7 X[8]=0.8 X[9]=0.9 X[10]=1
Y[0]=2 Y[1]=1.77296 Y[2]=1.66494 Y[3]=1.62879 Y[4]=1.62407 Y[5]=1.63217 Y[6]=1.64544 Y[7]=1.66082 Y[8]=1.6771 Y[9]=1.693
8 Y[10]=1.71074
Process returned 0 (0x0)   execution time : 0.037 s
Press any key to continue.
```

Рисунок 10 – Пример выполнения программы Code:blocks методом Эйлера

После расчетов, вычисляем расчёты численных методов в конечной точке интервала, результат аналитического метода, послужит точным значением [5].

«Погрешности метода Эйлера:

$$\Delta = |1,668 - 1,710| = 0,042 \text{ – абсолютная погрешность.}$$

$$\delta = \frac{\Delta}{1,668} = 0,025 \text{ – относительная погрешность.}$$

Погрешности метода Рунге-Кутта:

$$\Delta = |1,668 - 1,712| = 0,044 \text{ – абсолютная погрешность}$$

$$\delta = \frac{\Delta}{1,668} = 0,0263 - \text{относительная погрешность}$$

Погрешности метода Адамса:

$$\Delta = |1,668 - 1,667| = 0,1 - \text{абсолютная погрешность} \gg [20].$$

$$\delta = \frac{\Delta}{1,668} = 0,0599 - \text{относительная погрешность.}$$

Исходя из результатов, самым точным решением является метод Адамса.

### Выводы по главе 3

Третья глава посвящена реализации и тестированию алгоритмов решения задачи Коши методами Эйлера, Рунге - Кутта, Адамса.

В качестве реализации применялся язык программирования C++

Сравнительный анализ численных расчетов для решения дифференциального уравнения, численными методами Эйлера, Рунге- Кутта и Адамса показал, что наилучшими характеристиками и точностью обладает метод Адамса.

## Заключение

Выпускная квалификационная работа посвящена актуальной проблеме исследования численных методов решения задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений.

Неизвестная связь между производными и функцией, является дифференциальным уравнением. Такие связи присутствуют в самых разных областях науки: в физике, химии, экономики, биологии, механики и др.

Дифференциальные уравнения применяются для математического описания природных явлений.

Для достижения всех поставленных целей в процессе работы над бакалаврской работой решены следующие задачи:

- выполнен анализ численных методов решения обыкновенных дифференциальных уравнений, сформулированы общие термины и теория задачи Коши, проанализированы методы Эйлера, метод Рунге-Кутты и метод Адамса для решения обыкновенных дифференциальных уравнений. Сравнительный анализ показал, самым точным на графике является метод Адамса, однако с точки зрения простоты реализации, предпочтительнее использовать метод Эйлера;
- проанализированы численные методы решения задачи Коши для некоторых типов обыкновенных дифференциальных уравнений методами Эйлера, метод Рунге-Кутты и метод Адамса. Приведены блок-схемы и описание алгоритмов;
- реализованы и протестированы алгоритмы решения задачи Коши методами Эйлера, Рунге - Кутта, Адамса для трех задач на языке программирования C++.

Практическая значимость бакалаврской работы заключается в разработке программ, использующих метод Эйлера, Рунге- Кутта, Адамса для обыкновенных дифференциальных уравнений.

Результаты бакалаврской работы представляют научно-практический интерес и могут быть рекомендованы для численного решения обыкновенных дифференциальных уравнений.

Изначально, перед нами, были поставлены следующие задачи: изучить научно- методическую литературу, проанализировать алгоритмы решения задачи Коши для некоторых типов дифференциальных уравнений, реализовать и протестировать алгоритмы решения задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений тремя методами: Эйлера, Рунге- Кутта и Адамса.

Все задачи были решены.

Можно сделать главный вывод, исходя из проведенных вычислений методами Эйлера, Рунге- Кутта и Адамса: для обыкновенного дифференциального уравнения, чаще всего, наиболее точное решение позволяет получить метод Адамса.



## Список используемой литературы

1. Вержбицкий В. М. Численные методы. Математический анализ и обыкновенные дифференциальные уравнения : учебное пособие. М.: ОНИКС 21 век, 2005. 400 с.
2. Григорьев М.П. Обыкновенные дифференциальные уравнения в примерах и задачах. М.: Вузовская книга, 2008. - 248 с.
3. Гулин А.В. Введение в численные методы в задачах и упражнениях: Учебное пособие / А.В. Гулин, В.А. Морозова, О.С. Мажорова. М.: Инфра-М, 2017. 432 с.
4. Демидович Б. П. Основы вычислительной математики: учебное пособие для вузов / Б. П. Демидович, И. А. Марон. М.: Лань, 2006. 672 с.
5. Ерохин Б.Т. Численные методы: Учебное пособие. СПб.: Лань КПП, 2016. 256 с.
6. Зализняк В.Е. Численные методы. Основы научных вычислений: Учебное пособие для бакалавров. М.: Юрайт, 2012. - 356 с.
7. Ким И. Г. Численные методы: учебно-методическое пособие. Ч. 2. / И. Г. Ким, Н. В. Латыпова, О. Л. Моторина. Ижевск: Изд-во «Удмуртский университет», 2013. -64 с.
8. Козловский В. Численные методы. Курс лекций: Учебное пособие / В. Козловский, Э. Козловская, Н. Савруков. СПб.: Лань П, 2016. 208 с.
9. Копченова Н. В. Вычислительная математика в примерах и задачах : учебное пособие для вузов / Н. В. Копченова, И. А. Марон. М.: Лань, 2009. 368 с.
10. Лапчик М. П. Численные методы : учебное пособие для вузов / М. П. Лапчик, М. И. Рагулина, Е. К. Хеннер. М.: Академия, 2005. 384 с.
11. Маничев В.Б. Численные методы. Достоверное и точное численное решение дифференциальных и алгебраических уравнений в САЕ-системах САПР: Учебное пособие / В.Б. Маничев, В.В. Глазкова, И.А. Кузьмина. - М.: Инфра-М, 2019. 158 с.

12. Михеев С. Е. Численные методы : учебное пособие. СПб.: СПбГУ, 2013. 93 с.
13. Молчанова Л. А. Разностные методы решения дифференциальных уравнений : учебное пособие. Владивосток: Изд- во Дальневост. ун-та, 2008. 68 с.
14. Мышенков В.И. Численные методы. Ч. 2. Численное решение обыкновенных дифференциальных уравнений : учебное пособие / В. И. Мышенков, Е. В. Мышенков. М.: МГУЛ, 2005. 109 с.
15. Павловская, Т.А. C/ C++. Программирование на языке высокого уровня. СПб.: Питер, 2011. 461 с.
16. Панюкова Т.А. Численные методы. М.: КД Либроком, 2018. 224 с.
17. Рыжиков Ю.И. Численные методы теории очередей: Учебное пособие. СПб.: Лань, 2019. 512 с.
18. Тарасов В.Н. Численные методы. Теория, алгоритмы, программы: учебное пособие для вузов / В. Н. Тарасов, Н. Ф. Бахарева . Оренбург: ИПК ОГУ, 2008. 264 с.
19. Ширяев В.И. Исследование операций и численные методы оптимизации. М.: Ленанд, 2017. 224 с.
20. Ширяев В.И. Исследование операций и численные методы оптимизации: Учебное пособие М.: Ленанд, 2015. 216 с.
21. Booth E. D. Numerical methods, 1959. 237 p.
22. Dr. Louise Olsen-Kettle. Numerical solution of partial differential equations [Text]: The University of Queensland School of Earth Sciences Centre for Geoscience Computing.
23. Hamming R.W. Numerical Methods for Scientists and Engineers.
24. Isaacson E. and Keller H.B. Analysis of numerical methods. 1994.
25. Karan S. Numerical methods and methods of approximation in Science and Engeneering. Published October 31, 2018 by ORC Press, 498 pages 121.

## Приложение А

### Листинг программы, реализующей метод Эйлера

$y'=3\sin 2y+x=3\sin 2y+x$  с начальным условием  $y(0)=2$  на отрезке  $[0,1]$  с шагом  $h=0,1$ .

```
#include <iostream>
#include <memory>
#include <math.h>

double F(double x, double y) {
return 3 * sin(2 * y) + x;
}

int main(int argc, char** argv)
{
double a = 0; double b = 1; double h = 0.1;
double n = ((b - a) / h) + 1;
std::unique_ptr<double[]> X(new double[(int)n]);
std::unique_ptr<double[]> Y(new double[(int)n]);
X[0] = a; Y[0] = 2;
for (int i = 1; i <= n - 1; i++) {
X[i] = a + i * h;
Y[i] = Y[i - 1] + h * F(X[i - 1], Y[i - 1]);
}
for (int i = 0; i <= n - 1; i++) {
std::cout << "X[" << i << "]=" << X[i] << " ";
}
std::cout << std::endl;
for (int i = 0; i <= n - 1; i++) {
std::cout << "Y[" << i << "]=" << Y[i] << " ";
} return 0;}
```