МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Тольяттинский государственный университет»

Институт математики, физики и информационных технологий
(наименование института полностью)

Прикладная математика и информация
(наименование кафедры полностью)

02.03.03 Математическое обеспечение и администрирование информационных систем
(код и наименование направления подготовки, специальности)

WEB-дизайн и мультимедиа
(направленность (профиль)/специализация)

ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА (БАКАЛАВРСКАЯ РАБОТА)

на тему «Разработка программного обеспечения иммунизированного портфеля облигаций»

Студент К.А. Сярдова
(И.О. Фамилия) (личная подпись)

Руководитель канд. техн. наук, доцент Н.А. Сосина
(ученая степень, звание, И.О. Фамилия)

Консультант канд. филос. наук, доцент М.М. Бажутина
(ученая степень, звание, И.О. Фамилия)

Тольятти 2022

Аннотация

Тема работы: «Разработка программного обеспечения иммунизированного портфеля облигаций»

Бакалаврскую работу выполнил: Сярдова Ксения Алексеевна.

Научный руководитель: канд. тех. наук, доцент Сосина Наталья Алексеевна.

Актуальность работы заключается в том, что применение математических методов позволяет сформировать в какой-то мере защищенный портфель облигаций.

Целью бакалаврской работы является разработка программного обеспечения иммунизированного портфеля облигаций.

Задачи бакалаврской работы состоят в следующем:

− изучить математические методы анализа инвестиций, формирования портфеля, уменьшения портфельных рисков;

- решить аналитически задачу построения модели иммунизированного портфеля облигаций;

− разработать алгоритм иммунизации портфеля облигаций;

− разработать программный модуль иммунизации портфеля облигаций.

Объектом исследования являются показатели дюрации и выпуклости, которые напрямую влияют на портфельный риск.

Предмет исследования − линейная модель иммунизированного портфеля облигаций.

В первом разделе изложены математические методы анализа инвестирования и оценки риска, а так же были изложены методы уменьшения рисков. Построена математическая модель задачи иммунизации портфеля облигаций.

Во втором разделе бакалаврской работы представлен алгоритм построения иммунизированного портфеля облигаций с заданным значением дюрации и минимально возможным показателем выпуклости.

В третьем разделе бакалаврской работы разработан программный модуль, который позволяет сформировать портфель облигаций, иммунизированный от изменения процентных ставок. Полученный программный модуль позволит иммунизировать портфель облигаций от изменения процентных ставок на рынке

Бакалаврская работа состоит из пояснительной записки на 62 стр., включая 21 рисунок, 2 таблицы, 1 приложение и список используемой литературы, состоящий из 25 источников (в том числе 5 на иностранном языке).

Annotation

The title of the bachelor’s thesis "Software development of an immunized bond portfolio"

The bachelor's work was performed by Ksenia Alekseevna Syardova.

Scientific supervisor of the Candidate of Technical Sciences, associate Professor Natalia Sosina.

The relevance of the work lies in the fact that the use of mathematical methods makes it possible to form a somewhat protected bond portfolio.

The purpose of the bachelor's work is to develop software for an immunized bond portfolio.

The objectives of the bachelor's work are as follows:

- to study mathematical methods of investment analysis, portfolio formation, portfolio risk reduction;
- to solve analytically the problem of constructing a model of an immunized bond portfolio;
- to develop an algorithm for immunizing a bond portfolio;
- to develop a software module for immunization of the bond portfolio.

The object of the study is the duration and convexity indicators, which directly affect portfolio risk.

The subject of the study is a linear model of an immunized bond portfolio.

In the first part, mathematical methods of investment analysis and risk assessment are outlined, as well as methods of risk reduction, as well as methods of risk reduction. A mathematical model of the bond portfolio immunization problem is constructed.

The second part of the bachelor's thesis presents an algorithm for constructing an immunized bond portfolio with a given duration value and the minimum possible convexity index.

In the next part of the bachelor's thesis, a software module has been developed that allows you to form a bond portfolio immunized against changes in interest rates.

The resulting software module will allow immunizing the bond portfolio from changes in interest rates on the market

The work consists of an explanatory note on 64 pages, including 21 figures, 2 tables and a list of used literature consisting of 25 sources (including 5 in a foreign language).

Содержание

Введение

В современном мире рыночные курсы облигаций постоянно меняются. Применение иммунизации позволяет придать стоимостную структуру портфелю облигаций. Это, в свою очередь, обеспечивает стабильный и в назначенное время платеж, что позволяет защититься от ценовых колебаний. Применяя математическое моделирование при заданных ограничениях можно спрогнозировать колебания стоимости облигаций [19].

Большинство облигаций, продающихся на фондовом рынке, имеют не только разную стоимость, но и прибыль, которую они приносят своему владельцу. Для того чтобы получить максимальную прибыль, необходимо выбрать те облигации, которые являются наиболее доходными с наименьшим риском [11]. Поэтому основной задачей инвестора, когда он принимает инвестиционные решения, является оптимизация структуры портфеля облигаций.

На практике задача создания иммунизированного портфеля сводится к задаче линейного программирования.

Актуальность работы заключается в том, что применение математических методов позволяет сформировать в какой-то мере защищенный портфель облигаций.

Целью бакалаврской работы является разработка программного обеспечения иммунизированного портфеля облигаций.

Объектом исследования являются показатели дюрации и выпуклости, которые напрямую влияют на портфельный риск.

Предмет исследования – линейная модель иммунизированного портфеля облигаций.

Задачи бакалаврской работы состоят в следующем:

– изучить математические методы анализа инвестиций, формирования портфеля, уменьшения портфельных рисков;

- решить аналитически задачу построения модели иммунизированного портфеля облигаций;

– разработать алгоритм иммунизации портфеля облигаций;

– разработать программный модуль иммунизации портфеля облигаций.

В первом разделе бакалаврской работы рассматриваются особенности иммунизированного портфеля облигаций, проводится оценка возможного риска инвестиций. Рассматриваются понятия выпуклости и дюрации, их значения при оценке риска.

Во втором разделе бакалаврской работы построена математическая модель иммунизированного портфеля облигаций, которая путем преобразований сведена к задаче линейного программирования с заданным значением дюрации и минимальным значением выпуклости. Представлен алгоритм построения иммунизированного портфеля облигаций.

В третьем разделе бакалаврской работы представлен разработанный модуль линейного программирования, с помощью которого будет возможно сформировать иммунизированный портфель облигаций.

1 Математические методы формирования портфеля облигаций

1.1 Математические методы анализа инвестиций

В последние годы популярным методом сохранения и приумножения финансов среди физических и юридических лиц стало инвестирование. При этом финансовый рынок является быстроразвивающимся, а постоянное появление все новых и новых финансовых инструментов ставит необходимость применения математических методов анализа инвестиций [24]. На сегодняшний день инвесторы, которые вкладываются в ценные бумаги, имеют большие риски, которые связаны с нестабильной внешней и внутренней ситуацией на фондовом рынке. Применение математических методов позволит снизить риски и повысить доходность от инвестиций в ценные бумаги [20].

Предположим, что мы каждый месяц зарабатываем 50000 рублей и хотим накопить деньги, чтобы приобрести определенный товар стоимостью 200000 рублей. Рассчитываем, что мы можем откладывать по 15% от заработной платы, что составляет 7500, и откладывать эти деньги на свои цели. Так мы будем откладывать 27 месяцев, то есть 2 года и 3 месяца. И вот, мы накопили эту сумму и вроде бы можем приобрести этот товар, но нет. Из-за инфляции он стал дороже, и нам необходимо еще откладывать денежные средства.

Так, например, в 2021 году, согласно оценке Росстата, инфляция составила 8,9%. Это максимум за последние шесть лет. В 2015 году наблюдался максимальный рост, который составил 12,91%. По подсчетам аналитиков, деньги, которые просто копились в течении десяти лет без вложений, стали дешевле более чем на 70%.

Итак, мы понимаем, что просто откладывать деньги «в дальний ящик» не является целесообразным. Для того, чтобы обезопасить себя от обесценивания и накопить финансовые средства необходимо воспользоваться инвестированием. «В широком смысле термин «инвестирование» означает любое вложение денег с целью получения доходов в будущем. Инвестиции бывают двух типов:

- реальные инвестиции (real investments) означают инвестиции в какой-либо тип материальных активов, таких, как земля, оборудование, заводы;
- финансовые инвестиции (financial investments) –это контракты, зафиксированные на бумаге, такие, как обыкновенные акции и облигации» [4].

Обычно инвесторы предпочитают вкладывать деньги в финансовые инвестиции, ведь на сегодняшний день это сделать очень просто, достаточно скачать приложение и приобрести выгодную акцию или облигацию.

Если рассматривать с финансовой точки зрения, то инвестиции предполагают два противоположных процесса. С одной стороны – это вложение денег в строительство производственного объекта или накопление капитала. С другой стороны – это постоянное и последовательное получение дохода [23].

При проведении анализа инвестиций чаще всего оценивается эффективность разных альтернативных инвестиционных проектов. Для того чтобы определить эффективность этих проектов, необходимо воспользоваться системой различных показателей.

Одним из самых распространенных методов, который используется для расчета эффективности инвестиционных проектов, является метод дисконтирования. Он основан на финансовом анализе дисконтированных потоков к определенному периоду времени. Отправной точкой для проведения анализа является дата начала реализации инвестиционного проекта [21].

В том случае если планируется более точно определить эффективность инвестиционного проекта, необходимо выбрать уровень ставки процентов или ставки сравнения, по которой производится дисконтирование.

Одним из важных видов инвестирования являются вложения в ценные бумаги. Они относятся к финансовым инвестициям. Одними из самых распространенных видов ценных бумаг, которые имеют при этом фиксированный доход, являются облигации [17].

Облигация – это ценная бумага, которая позволяет инвестору получить доход в виде процентов от номинальной стоимости в конце запланированного срока. Цена облигации обычно равна номиналу и является выкупной ценой [22].

Иначе говоря, инвестор дает в долг эмитенту, а тот, в свою очередь, обязуется выплачивать проценты в определенный срок. Это позволяет инвестору получать пассивный фиксированный доход до погашения облигации. «Последний купонный платеж происходит в день погашения облигации.

Выделяют следующие основные параметры облигации:

− установленный срок выплаты процентов и дата погашения;

− номинал или номинальная цена;

− норма доходности или купонная ставка.

Под этими понятиями подразумевают процентную ставку, по которой регулярно выплачивается доход владельцу облигации» [9].

Так же стоит обращать внимание на оговорку о запрете или разрешения эмитенту досрочно выкупить облигацию. Наличие у эмитента права выкупить ценную бумагу раньше срока снижает качество облигации. Это связано с тем, что происходит повышение степени неопределенности для инвестора.

«Облигации можно классифицировать по методам выплаты доходов и способов погашения займов:

- облигации, по которым производится только выплата процентов, а капитал не возвращается. Эмитент указывает лишь на возможность их выкупа, не связывая себя конкретным сроком;
- облигации, по которым не выплачиваются проценты. Это так называемые облигации с нулевым купоном;

- облигации, по которым держателям проценты начисляются и выплачиваются вместе с номиналом в момент погашения;
- облигации, дающие право их владельцам на получение периодически выплачиваемого дохода в виде процентов и выкупной суммы в будущем при погашении. Этот вид облигаций наиболее распространен» [15].

Одним из основных понятий в инвестировании является понятие курса облигаций. Курс облигаций − это стоимость одной единицы из расчета ста денежных единиц номинала.

Курс облигации рассчитывается по формуле 1:

$$K = \frac{P}{N} \cdot 100\%, \tag{1}$$

где K − курс одной облигации;

P − цена одной облигации на рынке;

N – номинал.

Для того чтобы провести анализ имеющихся облигаций необходимо пройти следующие этапы:

- определить какой процентный доход может быть получен от одной облигации;
- произвести расчет внутренней стоимости облигации;
- оценить риски, связанные с вложением в облигации, а выявить факторы, которые влияют на их появление.

Как показывает практика, для минимизации риска необходимо выбирать облигации таких эмитентов, которые имеют высокую эффективность, а также уже давно и стабильно работают на рынке.

При определении полной доходности облигаций необходимо учесть следующие составляющие:

− купонный доход;

– на сколько изменится рыночная цена ценной бумаги;

– возможный доход от реинвестирования.

Изменения рыночной цены облигации могут быть трех типов:

- элемент доходности будет положительной величиной в том случае, когда покупная цена выше номинальной;
- элемент доходности равен нулю (отсутствует) в том случае, когда покупная цена равна номинальной;
- элемент доходности будет отрицательной величиной в том случае, когда покупная цена ниже номинальной.

Далее, при определении полной доходности от облигации будем рассматривать методы в которых учитываются только купонные выплаты и изменения рыночной цены. Учитывать доход от реинвестирования не является целесообразным. Это связано с тем, что данный показатель учесть не всегда возможно из-за того, что каждый инвестор имеет свои особенности и возможности.

Внутренняя доходность облигации или доходность к погашению – это та доходность, которую получит владелец облигации, если будет удерживать ее до срока ее погашения.

Обычно она определяется по формуле 2.

$$P = \frac{C_1}{(1+r)^1} + \frac{C_2}{(1+r)^2} + \frac{C_3}{(1+r)^3} + \cdots + \frac{C_n}{(1+r)^t} = \sum_{t=1}^{n} \frac{C_n}{(1+r)^t}\,, \quad (2)$$

где P – годовая внутренняя доходность облигации;

Cn – платеж, который будет произведен через n лет после покупки облигации;

r – ставка доходности к погашению на определенный период времен.

Исходя из представленной формулы, можно определить доходность каждой облигации за определенный период времени. Кроме того, можно определить не только доходность облигации, но и любой ценной бумаги у которой актив фиксирован. При этом учитывается последняя цена актива на рынке.

По формуле 3 можно найти примерную доходность облигации YTM, с учетом того, что значения купонов равны:

$$YTM = \frac{C + \frac{N - P}{t}}{\frac{N + P}{2}} \tag{3}$$

где N – номинал облигации.

Однако, следует учесть, что для того чтобы более точно определить YTM, аналитику или инвестору необходимо на основе полученных ошибок ввести корректировки в итоговый результат. Для этого подбираются различные ставки, которые в дальнейшем подставляют в слот формулы 3. Конечный результат расчета внутренней доходности облигации YTM будет получен тогда, когда цена совпадает с фактической текущей рыночной ценой ценной бумаги.

Основная задача инвестора в ценные бумаги – поиск недооцененных облигаций. Чаще всего такие бумаги приобретаются в момент, когда цены готовятся расти. Из-за этого акционер может получить в разы больше прибыли, чем обычная, даже может большее успешная, компания.

Стоит отметить, что рыночная и истинная стоимость облигации часто не совпадают. Облигация считается недооцененной, если рыночная цена облигации ниже истинной стоимости. В тоже время, возможна и обратная ситуация.

Доходность к погашению недооценкой облигации определяется по формуле 4:

$$P = \frac{С_1}{(1+y)^1} + \frac{С_2}{(1+y)^2} + \frac{С_3}{(1+y)^3} + \dots + \frac{С_n}{(1+y)^n} = \sum_{t=1}^{n} \frac{С_t}{(1+y)^t}, \quad (4)$$

где С1 – купон первого периода;

Cn – n-ый купон и номинал самой облигации.

«Внутренняя стоимость облигации определяется по формуле 5:

$$V = \frac{С_1}{(1+y^*)^1} + \frac{С_2}{(1+y^*)^2} + \frac{С_3}{(1+y^*)^3} + \dots + \frac{С_n}{(1+y^*)^n} = \\ = \sum_{t=1}^{n} \frac{С_t}{(1+y^*)^t} \quad (5)$$

Далее найдем y^* и сравним полученные показатели.

Если $y > y^*$, то данная облигация недооценена.

Если $y < y^*$ то облигация переоценена на рынке.

Если $y = y^*$, то облигация оценена рынком справедливо.

Данную модель называют базовой моделью оценивания облигации.

Сравниваем стоимость с доходностью (NPV) по формуле 6:

$$NPV = V - P = \sum_{t=1}^{n} \frac{C_t}{\left(1+y^*\right)^t} - P \quad (6)$$

Если NVP > 0, то облигация недооценена рынком; если NVP < 0, то переоценена. Если $y > y^*$, то любая облигация будет иметь NVP > 0 и наоборот» [1].

1.2 Оценка риска инвестиций математическими методами

Инвестиции и риск всегда связаны между собой. Чем более доходная ценная бумага на данный момент времени, тем более велика вероятность того, что инвестор не ней потеряет. Как правило, такие ценные бумаги несут лишь кратковременную высокую прибыль.

Если возник кредитный риск, то в этом случае велика вероятность того, что эмитент не сможет вовремя выплатить платежи в полном объеме. «Рыночный риск зависит от кредитной ставки, которая сейчас есть на рынке и которая постоянно меняется. Эти процентные ставки оказывают значительное влияние на внутреннюю цену облигации. При этом внутренняя цена облигации напрямую влияет на рыночную цену.

Как показывает анализ, обычно все риски, независимо от их вида, зависят от установленного срока действия облигации. При этом краткосрочные облигации являются менее рискованными.

Профиль доходов, который представляет собой особенность распределения дохода у различных видов облигаций в зависимости от времени, не учитывает период от момента приобретения до момента погашения облигации» [10].

«Известно, что используя статистические оценки риска активов, входящих в состав портфеля, можно управлять рисками самого портфеля. Достичь более высокого уровня доходности своих вложений при данном уровне риска, либо снизить степень их риска при заданном уровне доходности, инвестор может, если грамотно распределит свои вложения по различным направлениям» [12].

Для того чтобы снизить возможные несоответствия, в расчеты вводят показатели дюрации и среднего срока.

Для учета среднего срока необходимо учесть все сроки выплат облигаций и определить средневзвешенное значение. Средневзвешенное значение при этом зависит от размера внесенных платежей.

При этом средний срок выплаты облигаций определяется по формуле 7.

$$T = \frac{C\sum_{t=1}^{n} t + nN}{nC + 1} \quad (7)$$

Средний срок T < n , если купонная ставка g > 0 .

Показатель дюрации позволяет установить отношение зависимости стоимости облигации от изменения процентных ставок. Если показатель дюрации высокий, то это говорит о том, что цена облигации сильно реагирует на изменение процентных ставок, и наоборот [3].

Риск изменения процентных ставок – это один из очень существенных рисков которые отражаются на цене облигации, и с этой точки зрения дюрация – это тот показатель который может осуществлять существенное влияние на цену облигации. Дюрацию можно спутать со сроком погашения облигации, потому что некоторые типы измерения дюрации рассчитываются во временной шкале. Однако в этих понятиях есть принципиальные отличия. Срок погашения облигации – это линейная мера. Она остается постоянной. «Дюрация же наоборот, не линейная мера. Она ускоряется по мере уменьшения времени до окончания срока облигации.

В общем виде расчет дюрации осуществляется по формуле 8.

$$\sum_{i=1}^{n} D = t_i \frac{C_i}{P(y)} \quad (8)$$

где C_i - платежи по облигации, в период времени t_i.

$P(y)$ – цена облигации » [16].

Факторы, которые могут повлиять на дюрацию:

- срок обращения облигации;
- частота купонных выплат – чем чаще выплачиваются купоны, тем меньше дюрация (эффективных срок погашения);

–величина купона – чем больше купонная ставка, тем меньше дюрация.

Есть второй вид – модифицирования дюрация (MD). «Модифицированная дюрация – это показатель, характеризующий реакцию цены облигации на изменение доходности к погашению» [14]. С учетом того, что модифицированная дюрация является производной, то она будет иметь вид прямой линии. Это является положительным моментом.

$$MD = \frac{D}{(1+y)} \quad . \tag{9}$$

Рассмотрим процесс получения формулы 9, которая показывает зависимость изменения цены облигации от изменения ставки доходности.

Формула цены определяется по формуле 10.

$$P(y) = \sum_{i=1}^{n} \frac{C_i}{(1+y)^{t_i}} \tag{10}$$

Показатель, который рассчитывается по формуле 11, учитывает изменение ставки доходности на величину k:

$$P(y+k) = \sum_{i=1}^{n} \frac{C_i}{(1+y+k)^{t_i}} \quad . \tag{11}$$

По формуле 12 определяется относительное приращение стоимости облигации:

$$\frac{P(y+k) - P(y)}{P(y)} = \frac{\sum_{t=1}^{n} \frac{C_t}{(1+y+k)^t} - \sum_{t=1}^{n} \frac{C_t}{(1+y)^t}}{\sum_{t=1}^{n} \frac{C_t}{(1+y+k)^t}}. \tag{12}$$

По формуле 13 (формула Тейлора) определяется показатель $P(y+K)$, учитывая, что величина k достаточно малая в абсолютном значении.

$$P(y+k) - P(y) \approx P'(y) \cdot k \tag{13}$$

Раскрывая до второго порядка, получим:

$$P(y+k) - P(y) \approx P'(y) \cdot k + \frac{1}{2} P''(y) \cdot k^2 \tag{14}$$

«Стоит учитывать, что члены второго порядка изменение цены будет не существенными при работе с небольшими суммами денег» [6].

Раскроем производные и получим:

$$P'(y) = -\frac{1}{(1+y)} \sum_{i=1}^{n} t_i \frac{C_i}{(1+y)^{t_i}} = D \tag{15}$$

Таким образом, получим:

$$P''(y) = -\frac{1}{(1+y)^2} \sum_{i=1}^{n} t_i^2 \frac{C_i}{(1+y)^{t_i}} \tag{16}$$

В результате:

$$\frac{P'(y)}{P(y)} = -\frac{D}{1+y} \tag{17}$$

Дюрация – мера риска первого порядка. Но бывают случаи, когда у двух облигаций одинаковая дюрация.

Выпуклость – это мера кривизны, или степени кривой, во взаимосвязи между ценами облигаций и доходностью облигаций. Выпуклость показывает, как дюрация облигации изменяется при изменении процентной ставки.

Управляющие портфелем будут использовать выпуклость в качестве инструмента управления рисками для измерения и управления подверженностью портфеля процентному риску [8].

Следует учесть, что выпуклость тем больше, чем больше колебания цен на рынке. Именно по этой причине необходимо выбирать именно ту ценную бумагу, у которой выпуклость является наименьшей, так как она является наименее рискованной.

Выпуклость, также как и дюрация, является производной второго порядка.

«Раскрыв вторую производную, по формуле 18 определим формулу выпуклости:

$$P''(y) = -\frac{1}{(1+y)^2}\sum_{i=1}^{n} t_i^2 + t_i \frac{C_i}{(1+y)^{t_i}} = \sum_{i=1}^{n} t_i(\frac{Conv}{(1+y)^2} \quad . \qquad (18)$$

В этом случае, выпуклость определяется по формуле 19:

$$Conv = \sum_{i=1}^{n} t_i^2 + t_i \frac{C_i}{P(y)} = \sum_{i=1}^{n} t_i(t_i+1)\frac{C_i}{P(y)} \quad . \qquad (19)$$

Подставим формулу выпуклости (19) и дюрации в формулу (14)» [2]:

$$P'(y)\cdot k + \frac{1}{2}P''(y)\cdot k^2 \approx -D\frac{k}{1+y} + \frac{1}{2}Conv\left(\frac{k}{1+y}\right)^2 \quad . \qquad (20)$$

«Так как чувствительность цены облигации к изменению процентных ставок характеризуется величиной $\frac{P(y+k)-P(y)}{P(y)}$ то можно сделать вывод, что дюрация показывает, как цена облигации измениться с изменением процентых ставок. А значит, если увеличивается дюрация, то увеличивается риск. Следовательно, дюрация является показателем риска облигации.

А так как выпуклость в этой формуле делает показания более точными, то ей не следует пренебрегать» [7].

Таким образом, «определение выпуклости позволяет определить насколько изменение процентных ставок повлияет на изменение относительного приращения стоимости облигаций. При этом, чем меньше влияние дюрации, тем больше выпуклость» [8]. Она напрямую влияет на получившееся изменение стоимости облигации.

1.3. Иммунизация. Использование математических методов для уменьшения рисков

Как мы выяснили, стоимости облигаций с различными купонными платежами, но с одинаковыми сроками погашения, по-разному меняются при одном и том же изменении процентной ставки. Но облигации, с одинаковыми показателями дюрации одинаково реагируют на изменение процентных ставок. На основе этого, можно сделать вывод о том, что для того обезопасить себя инвесторы формируют портфель с одинаковой дюрацией. Для того чтобы портфель был защищен от влияния будущих колебаний рыночной процентной ставки на ожидаемые доходы его иммунизируют.

Рассмотрим на конкретном примере. Инвестор обладает портфелем стоимостью 1 000 долларов, а также дюрацией в 5 лет. Период инвестирования, в соответствии с этим, равен 5 годам. Текущая процентная ставка – 7% годовых. Инвестор определяет пред собой цель – иммунизировать свой портфель от колебаний процентной ставки.

Цель будет достигнута если активы будут вложены в портфель облигаций с дюрацией равной 5 лет. Однако необходимо будет через определенный период перестроить портфель так, чтобы дюрация составляла уже 4 года и так далее. Изменения следует производить через каждый год. Нужная ставка дохода фиксируется инвестором на весь инвестиционный период времени. По нашим исходным данным накопленная стоимость инвестиций к концу пятого года составит 1000(1,07)5=1402,55 долларов.

Используя формулу 21 можно определить будущий денежный поток:

$$FV_n = PV * (1 + r), \quad (21)$$

где FV – будущая стоимость облигации через n периодов от текущей (от англ. «future value»).

PV – текущая или приведенная стоимость инвестиции (от англ. «present value»).

R – процентная ставка за год [25].

Доход инвестора составит:

$$FV_0 = 950 \times (1 + 0{,}929)^{4{,}29} = 1391{,}29$$

Затем цена на эту облигацию падает, из-за чего мы потеряем 950-828=122$

После чего мы реинвестируем купоны под ставку 12,89%, то есть доходность вырастет на 3,6%. Посчитаем заработок после покупки данной облигации:

$$FV_1 = 950 \times (1 + 0{,}1289)^{4{,}29} = 1392{,}54$$

С одной стороны, инвестор потерял из-за падения ключевой ставки, с другой стороны, он все равно получит планируемый доход через 4,29 года за счет реинвестирования.

Диверсификация инвестиций, то есть вложение их в различные отрасли, страны и т.д. позволяет снизить риски вложений в портфель. Например, в портфель инвестиций могут входить ценные бумаги, сырьевые материалы, недвижимость и т.д.

Рассмотрим портфель (П), который состоит из нескольких облигаций m видов ($V_1, V_2, \ldots, V_m$). При этом в момент t=0 цены на них будут равны $P_1, P_2, \ldots, P_m$ соответственно.

Пусть V_j – сумма, затраченная инвестором на приобретений облигаций j-го вида (j=1,2,…,m.), то есть стоимость портфеля равна $V = \sum_{j=1}^{m} V_j$.

Пусть спустя t_n лет от момента времени t=0 производится платеж хотя бы по одному виду облигаций, входящих в портфель. Составим формулу ожидаемого потока платежей в моменты времени $t_1, t_2, \ldots, t_n$.

$$R_i = \sum_{j=1}^{m} \frac{V_j}{P_j} C_j^i \quad , i = 1,2, \ldots , n, \tag{22}$$

где R_i – ожидаемый поток платежей в момент времени t_i

$\frac{V_j}{P_j}$ – отношение суммы затраченной инвестором на цену в момент времени t=0

C_j^i- платеж по облигации в момент времени t_i

«Для вычисления доходности портфеля используют две характеристики: средневзвешенная доходность портфеля и внутренняя ставка доходности.

По формуле 23 определим средневзвешенную доходность портфеля $r_{ср}$:

$$r_{ср} = \sum_{j=1}^{m} x_j \, r_j \quad , \tag{23}$$

где:

$$x_j = \frac{V_j}{V} \tag{24}$$

x_j является долей облигации вида j в портфеле;

r_j– их внутренняя доходность.

По формуле 25 определим внутреннюю ставку доходности r_p, которая представляет собой приведенную стоимость потока проходимых платежей в моменты времени $t_1, t_2, \ldots, t_3$. Внутренняя ставка доходности определяется по рыночной цене V в момент времени t_0.»[18].

$$V = \frac{R_1}{(1+r_\text{р})^{t_1}} + \ldots + \frac{R_n}{\left(1+r_\text{р}\right)^{t_n}} . \tag{25}$$

У рассмотренных характеристик есть недостатки. Первая характеристика имеет недостаточно информации о доходности, которую можно получить. Вторая характеристика предполагает, что все облигации, которые есть в портфеле, должны реинвестироваться по ставке $y_\text{р}$ за определенный период времени. Однако редко бывает, чтобы весь портфель подлежал реинвестированию.

1.4 Формирование портфеля облигаций с заданным значением дюрации и наименьшим показателем выпуклости

По формуле 26 определяется «дюрация:

$$D_p = \frac{1}{V}\sum_{i=1}^{n} t_i \frac{R_i}{(1+r)^{t_i}} , \tag{26}$$

где

$$R_i = \sum_{j=1}^{m} \frac{V_j}{P_j} C_j^i , \tag{27}$$

Отсюда мы имеем:

$$D_p = \frac{1}{V}\sum_{i=1}^{n} t_i \frac{R_i}{(1+r)^{t_i}} =$$

$$= \frac{1}{V}\sum_{i=1}^{n} t_i \frac{\sum_{j=1}^{m}\frac{V_j}{P_j}C_j^i}{(1+r)^{t_i}} =$$

$$= \sum_{j=1}^{n}\frac{V_j}{V}\left(\frac{1}{P_j}\sum_{i=1}^{n} t_i \frac{C_j^i}{(1+r)^{t_i}}\right) =$$

$$= \sum_{j=1}^{m} D_j x_j \qquad (28)$$

где

$$x_j = \frac{V_j}{V} \qquad (29)$$

x_j– показывает долю облигаций j-го вида в портфеле» [6].

Дюрация и выпуклость связаны между собой. По аналогии с дюрацией определяется выпуклость:

$$C_p = \frac{1}{V}\sum_{i=1}^{n} t_i(t_i+1) \frac{R_i}{(1+r)^{t_i}} =$$

$$= \frac{1}{V}\sum_{i=1}^{n} t_i(t_i+1) \frac{\sum_{j=1}^{m}\frac{V_j}{P_j}C_j^i}{(1+r)^{t_i}} =$$

$$= \sum_{j=1}^{n}\frac{V_j}{V}\left(\frac{1}{P_j}\sum_{i=1}^{n} t_i\,(t_i+1) \frac{C_j^i}{(1+r)^{t_i}}\right) = \sum_{j=1}^{m} \mathrm{C}_j x_j \qquad (30)$$

В результату получаются формулы 31 и 32:

$$D_p = \sum_{j=1}^{m} D_j x_j \quad (31)$$

$$C_p = \sum_{j=1}^{m} C_j x_j \quad (32)$$

«Рассмотренные формулы доказывают, что дюрация, как и выпуклость являются средневзвешенными дюрацией и выпуклостью отдельных облигаций.

При этом

$$minD_j < D_p < maxD_j \quad (33)$$

$$minC_j < C_p < maxC_j \quad (34)$$

В целом это означает, что дюрация и выпуклость портфеля являются средневзвешенными всех облигаций в портфеле» [7].

1.5 Сведение задачи формирования портфеля облигаций к задаче линейного программирования

Результаты проведенного анализа позволили сделать вывод о том, что показатели дюрации и выпуклости являются средневзвешенной облигаций, из которых состоит портфель. Далее составим систему (формула 35), в которой «сопоставлены портфель облигаций и заданные значения дюрации.

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{m} D_j x_j = D \\ \sum_{j=1}^{m} x_j = 1 \end{cases} \tag{35}$$

Если $D = D_k$, где $k \in \{1,2,3,\dots,m\}$, то следующие значения будут являться набором решений

$$x_1 = 0, x_2 = 0, \dots, x_k = 1, x_{k+1} = 0, \dots, x_m = 0$$

Согласно условию решения системы, портфель облигаций должен включать облигации одного и того же вида с заданным значением дюрации. Что удовлетворяет условию решения системы.

Рассмотрим другой вариант, при котором $D_k < D < D_{k+1}$:

$$x_1 = 0, x_2 = 0, \dots, x_k = \frac{D_{k+1} - D}{D_{k+1} - D_k}, x_{k+1} = \frac{D - D_k}{D_{k+1} - D_k}, \dots, x_m = 0$$

Таким образом, будет получено два разных типа облигаций. Их доля в портфеле будет отличаться» [13].

Для того чтобы определить, какая доля каждого вида облигаций будет в портфеле и определяется дюрация каждого типа. Доля в портфеле зависит от разности между дюрацией облигации и заданной дюрацией.

Ранее уже отмечалось, что выпуклость показывает, какое влияние дюрация оказывает на расчет риска. Так как дюрация позволяет напрямую оценить чувствительность портфеля к изменениям цены, то чем меньше выпуклость, тем более точно происходит оценка.

В результате мы получим новую задачу линейного программирования, условиями которой является определение заданного числа дюрации портфеля с минимальной выпуклостью.

$$f = \sum_{j=1}^{m} Conv_j x_j \rightarrow min$$

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{m} D_j x_j = D \\ \sum_{j=1}^{m} x_j = 1 \end{cases} \quad (36)$$

«Действительно, для разрешимости задачи линейного программирования необходимо и достаточно, чтобы множество допустимых решений задачи было не пусто, а целевая функция ограничена снизу на множестве допустимых решений задачи. Если число D удовлетворяет двойному неравенству (формула 39), то множество допустимых решений задачи не пусто.

$$minD_j < D_p < maxD_j \quad (37)$$

Это поможет составить задачу по иммунизации всего портфеля облигаций. Для этого необходимо, чтобы дюрация портфеля была равна временному горизонту портфеля. Если временной горизонт портфеля равен Q, тогда для решения задачи необходимо решить задачу линейного программирования (при этом $x_j \geq 0, j = 1,2,3 \dots, m$):

$$f = \sum_{j=1}^{m} Conv_j x_j \rightarrow min$$

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{m} D_j x_j = T \\ \sum_{j=1}^{m} x_j = 1 \end{cases} \quad (38)$$

Решив данную задачу, удастся получить стоимость иммунизированного портфеля» [8].

«При этом увеличение стоимости портфеля V произойдет минимум на $V(1+y)^T$. В данном иммунизированном портфеле будет защита от возможного изменения процентных ставок на рынке» [13].

Допустим, инвестор планирует обладать суммой V через T лет. В этом случае, он должен начать вкладывать финансовые средства в таких облигациях, которые будут стоить X рублей через T лет, независимо от процентной ставки. При этом дюрация портфеля из облигаций должна быть равна T. Однако с учетом того, что дюрация потоков может измениться за период t = [0;T] , необходимо будет проводить корректировку портфеля с течением времени.

Для того чтобы поставленная цель была решена, необходимо купить облигации на сумму V из m видов. При этом необходимо, чтобы дюрация портфеля совпала инвестиционным периодом T. Также, следует отметить, что необходимо «выбрать облигации с наименьшим показателем выпуклости, что увеличивает влияние дюрации.

По одному из свойств портфеля если

$$minD_j < T < maxD_j \quad , \tag{39}$$

то система имеет решение.

Собранный портфель Π_0 в момент времени $t = t_0$ будет равен:

$$V_0 = V(1+y)^T \tag{40}$$

Даже если после формирования портфеля процентные ставки изменились, но согласно свойству иммунизации собранный портфель будет иммунизирован до следующего года, т.е до момента времени t_1.» [13]

$$V(y_1) \geq V(y) \tag{41}$$

Через год портфель необходимо будет собрать заново. При этом дюрация составит Т-1, а портфель останется иммунизированным.

Когда поступает первый платеж, у инвестора есть сумма равная R_1^0, также он располагает портфелем, стоимость которого определяется по формуле 43:

$$\mathrm{V} = \sum_{i=2}^{n} \frac{R_i^0}{(1+r)^{t_i - t_1}} \ . \tag{42}$$

После чего формируется новый портфель, с новыми условиями.

По формуле 44 определяем показатель дюрации, который будет равен периоду $T - t_1$, при наименьшем значении выпуклости.

$$f = \sum_{j=1}^{m} Conv_j x_j \ \to min$$

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{m} D_j x_j \ = T - t_1 \\ \sum_{j=1}^{m} x_j \ = 1 \end{cases} \tag{43}$$

«В результате придется продать часть облигаций из портфеля, а часть докупить

Кроме того, необходимо будет первый поступивший платеж R_1^0 реинвестировать, учитывая, что планируемая стоимость инвестиции не поменяется. В этом случае портфель останется иммунизированным до момента времени t_2 даже при изменении ставок. Через два года дюрация должна составлять Т-2 и т.д.

Если в какой-то момент времени нельзя сформировать портфель с требуемой дюрацией, то имеющийся портфель продается, а все вырученные средства инвестируются под действующую на данный момент процентную ставку до окончания срока Т. К концу периода накопленная стоимость будет составлять $V(1+y)^T$ и цель инвестора будет достигнута» [13].

Заключение к первому разделу

В первом разделе были рассмотрены некоторые понятия, связанные с инвестированием.

Данный раздел состоит из 5 пунктов. В первом пункте рассмотрены математические методы анализа инвестиций. Во втором представлены методы оценивания рисков математическими методами. В третьем рассматривается понятие иммунизации, как метода уменьшения рисков. Далее рассматриваются методы формирования портфеля с заданным значением дюрации и наименьшим показателем выпуклости. В последнем пункте приводится информация о том, как сводить данные к задаче линейного программирования.

2 Разработка алгоритма для построения иммунизированного портфеля облигаций

2.1 Моделирование задачи линейного программирования

«Для формирования портфеля облигаций с наименьшим показателем выпуклости для заданного значения дюрации решим задачу методом линейного программирования.

Под линейным программированием следует понимать метод оптимизации, который позволяет минимизировать или максимизировать целевую функцию (формула 45):

$$f = c_1x_1 + \cdots + c_nx_n, \quad (44)$$

При условии выполнения ограничений, выраженных в виде следующих неравенств:

$$a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n \leq b_1$$
$$a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n \leq b_m$$

$$При\ x_i \geq 0,$$

где $-$ a_i, b_i и c_i являются константами. Они определяют возможности, потребности и затраты» [4].

«Основное предположение при применении этого метода состоит в том, что различные отношения между спросом и доступностью линейны; то есть ни один из x_i не возведен в степень, отличную от 1. Для того чтобы получить решение этой задачи, необходимо найти решение системы линейных неравенств (то есть множества n значений переменных x_i что одновременно удовлетворяет всем неравенствам). Затем целевая функция вычисляется путем подстановки значений x_i в равенство, определяющее f» [16].

2.2 Решение задачи и разработка алгоритма иммунизации портфеля облигаций

«Сведем задачу формирования портфеля облигаций с заданным значением дюрации и наименьшим показателем выпуклости к задаче линейного программирования. Далее сформируем портфель на основании рассмотренных ранее формул.

По условию нам даны два вида облигации: A1 и A2.» [9] Их характеристики, в момент времени t=0, представлены в таблице 1.

Таблица 1 – Характеристики облигаций

Вид облигации A_j	Номинал облигации N, д.е	Купонная ставка g	Кол-во купонных выплат в год P	Срок до погашения T
A_1	100	11%	1	2
A_2	100	13%	1	4

«Инвестор запланировал сформировать портфель облигаций стоимостью 1000 денежных единиц. При этом инвестиционный горизонт составляет 3 года. Процентная ставка составляет 8% год. Она начинает действовать сразу же после формирования портфеля. После момента t = 1 произойдет рост процентной ставки на 1%, т.е. процентная ставка составит 9%.» [3]

В таблице 2 представлены характеристики собранного портфеля.

Таблица 2 – Характеристики портфеля

Сумма инвестиции (д.е.)	V	1000 д.е.
Срок инвестиции (годы)	T	3 года
Рыночная ставка в момент формирования портфеля (t=0)	r	8%
Рыночная ставка в момент времени t=1	r_1	9%
Рыночная ставка в момент времени t=2	r_2	8%

Решение задачи состоит из следующих шагов;

Шаг 1. Рассчитаем цену, дюрацию и кривизну облигаций А1 и А2 по формулам 4, 8 и 19.

$$P_1^0 = \frac{C_1}{(1+y)^1} + \frac{C_2}{(1+y)^2} + \cdots + \frac{C_n}{(1+y)^n} = \frac{11}{1{,}08^1} + \frac{111}{1{,}08^2} = 105{,}35$$

$$D_1^0 = \sum t_i \frac{C_i}{P(y)} = \frac{1 \cdot 11}{105{,}35} + 2 \cdot \frac{111}{105{,}35} = 2{,}21$$

$$Conv_1^0 = \sum t_i(t_i+1)\frac{C_i}{P(y)} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 11}{105{,}35} + \frac{2 \cdot 3 \cdot 111}{105{,}35} = 6.53$$

А2:

$$P_2^0 = \frac{C_1}{(1+y)^1} + \frac{C_2}{(1+y)^2} + \frac{C_3}{(1+y)^3} + \cdots + \frac{C_n}{(1+y)^n} =$$

$$= \frac{13}{1{,}08^1} + \frac{13}{1{,}08^2} + \frac{13}{1{,}08^3} + \frac{113}{1{,}08^4} = 116{,}56$$

$$D_2^0 = \sum t_i \frac{C_i}{P(y)} = \frac{1 \cdot 13}{116{,}5606} + \frac{2 \cdot 13}{116{,}5606} + \frac{3 \cdot 13}{116{,}5606} + \frac{4 \cdot 113}{116{,}5606} = 4{,}55$$

$$Conv_2^0 = \sum t_i(t_i+1)\frac{C_i}{P(y)} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 13}{116{,}5606} + \frac{2 \cdot 3 \cdot 13}{116{,}5606} + \frac{3 \cdot 4 \cdot 13}{116{,}5606} + \frac{4 \cdot 5 \cdot 113}{116{,}5606}$$
$$= 21{,}62$$

Шаг 2: При дюрации равной 3 года сформируем портфель облигаций. Для этого составим и решим задачу линейного программирования:

$$f = 6.53x_1 + 21{,}62x_2 \to min$$

$$\begin{cases} 2{,}21x_1 + 4{,}55x_2 = 3, \\ x_1 + x_2 = 1 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Проверим, выполняется ли следующее условие, которое представлено в формуле 40. Если оно выполняется, то решение будет найдено.

В нашем случае, условие выполняется:

$$2.21 < \ 3 < 4{,}55$$

Решение будет иметь следующий вид:

$$x_1 = 0, x_2 = 0, \dots, x_k = \frac{D_{k+1} - D}{D_{k+1} - \ D_k}, x_{k+1} = \frac{D - D_k}{D_{k+1} - \ D_k}, \dots, x_m = 0$$

Тогда:

$$x_1^0 = \frac{4{,}55 - 3}{4{,}55 - 2{,}21} = 0.663 - \text{доля в портфеле первого вида облигаций}$$

$$x_2^0 = \frac{3 - 2{,}21}{4{,}55 - 2{,}21} = 0.337 - \ \text{доля в портфеле второго вида облигаций}$$

Таким образом, сформированный портфель будет выглядеть так:

$$\varPi_0 = \varPi(V_1^0, V_2^0)$$

Его стоимость будет равно 1000 д.е, а сумма инвестиций (по формуле 32) будет равна:

$$V_1^0 = x_1^0 V = 663 \text{ д. е}$$

$$V_2^0 = x_2^0 V = 337 \text{ д. е}$$

Дюрация портфеля совпадает с его инвестиционным горизонтом и равна 3 годам, так как мы решили задачу линейного программирования с таким условием.

Шаг 3. Вычислим поток платежей по формуле 32.

$$R_1 = \frac{663}{105,35} \cdot 11 + \frac{337}{116,56} \cdot 13 = 106,81$$

$$R_2 = \frac{663}{105,35} \cdot 111 + \frac{337}{116,56} \cdot 13 = 736,14$$

$$R_3 = \frac{337}{116,56} \cdot 13 = 37,59$$

$$R_4 = \frac{337}{116,56} \cdot 113 = 326,7$$

Шаг 4: Проведем проверку иммунизации портфеля.

В момент времени t=1, по условиям задачи, произошло увеличение процентных ставок на 2%. После повышения они стали равны 7%.

В этом случае, стоимость инвестиций по плану составит (по формуле 21):

$$V^0 = 1000 * 1,08^3 = 1259,712$$

Стоимость инвестиций фактическую рассчитаем по формуле 25:

$$V^{*0} = 106,81 * (1,09)^2 + 736,14 * (1,09)^1 + 37,59 + \frac{326,7}{(1,09)^1} = 1266,608 \text{ д.е.}$$

Так как $V^{*0} > V^0$, то в этом случае портфель Π_0 иммунизирован от изменения процентных ставок сразу после момента времени t=0.

Шаг 5. Проведем проверку, после поступления первого платежа, совпадения дюрации с горизонтом инвестирования.

Первый платеж поступает после окончания первого срока. В этот момент стоимость инвестиции в портфель составит:

$$V^0 = 106{,}81 + \frac{736{,}14}{1{,}09} + \frac{37{,}59}{(1{,}09)^2} + \frac{326{,}7}{(1{,}09)^3} = 1066{,}079 \text{ д.е.}$$

Эта стоимость складывается из первого платежа $R_1 = 106{,}81$ и портфеля стоимостью:

$$V^0 = \frac{736{,}14}{1{,}09} + \frac{37{,}59}{(1{,}09)^2} + \frac{326{,}7}{(1{,}09)^3} = 959{,}27 \text{ д.е.}$$

Далее определим дюрацию нашего портфеля облигаций после первой выплаты.

Дюрация этого портфеля в момент t = 1 равна 2,183767 года. Инвестиционный горизонт 2 года. По решению задачи видно, что дюрация портфеля не совпадает с его инвестиционным горизонтом. В этом случае необходимо переформировать портфель.

Рассчитаем цену и дюрацию каждой облигации после первой выплаты, в момент действия ставки r=0.07 (по формуле 15):

$$P_1^1 = \frac{111}{1{,}09} = 101{,}8348$$

$$D_1^1 = \frac{103{,}74}{103{,}74} = 1{,}09$$

$$P_2^1 = \frac{13}{1{,}09} + \frac{13}{1{,}09^2} + \frac{113}{1{,}09^3} = 110{,}125$$

$$D_2^1 = \sum t_i \frac{C_i}{P(y)} = \frac{1 \cdot 13}{110,125} + \frac{2 \cdot 13}{110,125} + \frac{3 \cdot 13}{110,125} = 3,43$$

Дюрация портфеля будет равна:

$$D_p = \ 0,663 * 1 + 0,337 * 3,43 = 1,81$$

Инвестиционный горизонт в данный момент равен 2. Для иммунизации портфеля его придется сформировать заново, так как инвестиционный горизонт не совпал с дюрацией портфеля.

Шаг 6. В том случае, если дюрация и инвестиционный горизонт не равны, то в этом случае необходимо сформировать новый портфель.

Заново пересчитаем выпуклость

$$Conv_1^1 = \frac{1 \cdot 2 \cdot 111}{101,83} = 2,18$$

$$Conv_2^1 = \frac{1 \cdot 2 \cdot 13}{110,236} + \frac{2 \cdot 3 \cdot 13}{110,236} + \frac{3 \cdot 4 \cdot 113}{110,236} = 13,244$$

Составим и решим задачу линейного программирования

$$f = 2,18x_1 + 13,244x_2 \to min$$

$$\begin{cases} 1,09x_1 + 3,43x_2 = 2, \\ x_1 + x_2 = 1 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Так как

$$minD_j < \ 2 < maxD_j$$

Тогда:

$$x_1^1 = 0{,}611 - \text{доля в портфеле первого вида облигаций}$$

$$x_2^1 = 0{,}389 - \text{ доля в портфеле второго вида облигаций}$$

Таким образом сформированный портфель будет выглядеть так:

$$\Pi_1 = \Pi(V_1^1, V_2^1)$$

Его стоимость будет равна $1066{,}079$ д.е, а сумма инвестиций будет равна:

$$V_1^1 = x_1^1 V = 651{,}374 \, д.е$$

$$V_2^1 = x_2^1 V = 414{,}705 \, д.е$$

Дюрация портфеля совпадает с его инвестиционным горизонтом и равна 2 годам.

Шаг 7. Посчитаем поток платежей в данный момент времени.

$$R_2 = \frac{651{,}374}{101{,}835} \cdot 111 + \frac{414{,}705}{110{,}125} \cdot 13 = 758{,}952$$

$$R_3 = \frac{414{,}705}{110{,}125} \cdot 13 = 48{,}955$$

$$R_4 = \frac{414{,}705}{110{,}125} \cdot 113 = 425{,}532$$

Шаг 8. Проверка иммунизации нового портфеля.

Через t = 1 процентные ставки снизились 0,01. При этом предполагается, что дальнейших изменений не предполагается. Далее проверим иммунизацию портфеля.

Определим планируемую стоимость инвестиции в портфель П1. Момент определим как T = 3 года.

Плановая стоимость инвестиции составит:

$$V^1 = 1066{,}079 * (1 + 0{,}09)^2 = 1266{,}607$$

Далее определим реальную стоимость инвестиций в портфель П1. Момент определим так же как и ранее, T = 3 года.

$$V^{*1} = 758{,}952 * 1{,}08 + 48{,}955 + 425 * 1{,}08^{-1} = 1266{,}609$$

При этом

$$V^{*1} > V^1$$

В этом случае портфель $\Pi_1 -$ иммунизирован от изменения процентных ставок сразу после момента времени t=1

Шаг 9.

Когда наступает момент времени t=2 в это время совершается платеж равный 758,952 д.е. Сразу после этого, облигация первого вида считается погашенной.

Допустим, ставка, действующая на рынке, составляет 8%. При этом дюрация портфеля П1 в моменте t=2 равна $D_2^1 = 3.43$. Это дюрации от облигаций вида A_2, которые остались в портфеле. В тоже время, инвестиционный горизонт на данный момент равен 1 году.

Так как дюрация не равна инвестиционному горизонту, то портфель необходимо переформировать. Но из облигаций A_2 нельзя сформировать портфель с дюрацией равной 1 году, значит портфель продается.

Стоимость инвестиции в портфель П1 в момент времени t=2:

$$V^2 = 758.952 + \frac{48.955}{1.08} + \frac{425.532}{1.08^2} = 1169.106$$

Полученные данные говорят о том, что инвестор, продав портфель получит 1169.106 д.е. При этом вся вырученная сумма инвестируется на 1 год (например, на банковский счет). Действующая годовая ставка также составит 8%. Определим, какую сумму получит инвестор через один год:

$$V = 1169.106 * (1 + 0.08) = 1262.635$$

Таким образом, в результате осуществления стратегии иммунизации инвестор через 3 года получит сумму 1262.635.

Заключение ко второму разделу

Во втором разделе было представлено аналитическое решение задачи иммунизации портфеля облигации от изменения процентных ставок. По условию задачи было инвестировано 1000 денежных единиц на 3 года. При предварительных подсчетах, инвестор должен был вывести сумму в размере 1259,712 д.е., но благодаря тому, что портфель облигаций был иммунизирован, инвестор получил 1262,365 д.е., что превышает запланированную сумму на 2.653 д.е. . Несмотря на изменение процентных ставок, инвестор не только сохранил свои средства, несмотря на изменение процентных ставок, но и заработал их. Исходя из решения представленной задачи, можно прийти к выводу, что иммунизация портфеля облигаций позволяет сохранить или увеличить инвестиционный капитал.

3 Программная реализация разработанного алгоритма иммунизации портфеля облигаций

Во втором разделе бакалаврской работы была решена задача по заданным параметрам. Для построения иммунизированного портфеля облигаций на основе этой задачи необходимо разработать алгоритм и выполнить его в программе Matlab r2019.

Перед тем, как начать разработку программного кода, необходимо описать алгоритм работы будущей программы.

Для удобства следует разделить всю блок-схему на несколько частей. Первая часть блок-схемы представлена на рисунке 3.

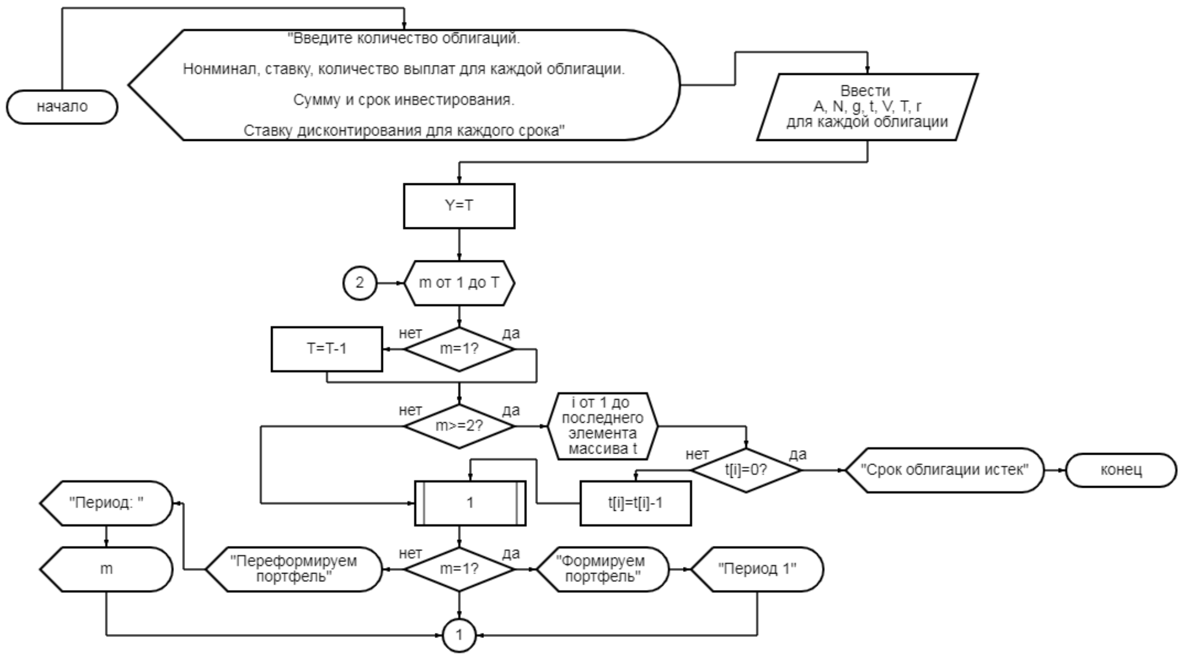

Рисунок 3 – Первая часть блок-схемы

На рисунке 3 мы задаем вводные данные задачи, такие как:

A – Количество облигации;

N – Номинал облигации;

g – Купонная ставка облигации;

t – Срок выплаты облигации;

V – Сумма инвестиций;

T – Срок инвестирования;

r – Ставка дискретизации на каждый год инвестирования.

А затем вычисляются еще две переменные:

Y – Константа равная сроку инвестирования;

m – переменная которая равна периоду инвестирования.

«За первый проход программа формирует новый портфель облигаций, который основывается на введенных пользователем данных. При необходимости, программа будет исполняться заново для переформирования.

Проверяется условие, если срок погашения облигаций не равен нулю, то программа продолжает работу, иначе выводит соответствующую ошибку.» [1]

В конце данной блок-схемы есть программа 1, которая является продолжением данной выше схемы. Она расположена на рисунке 4:

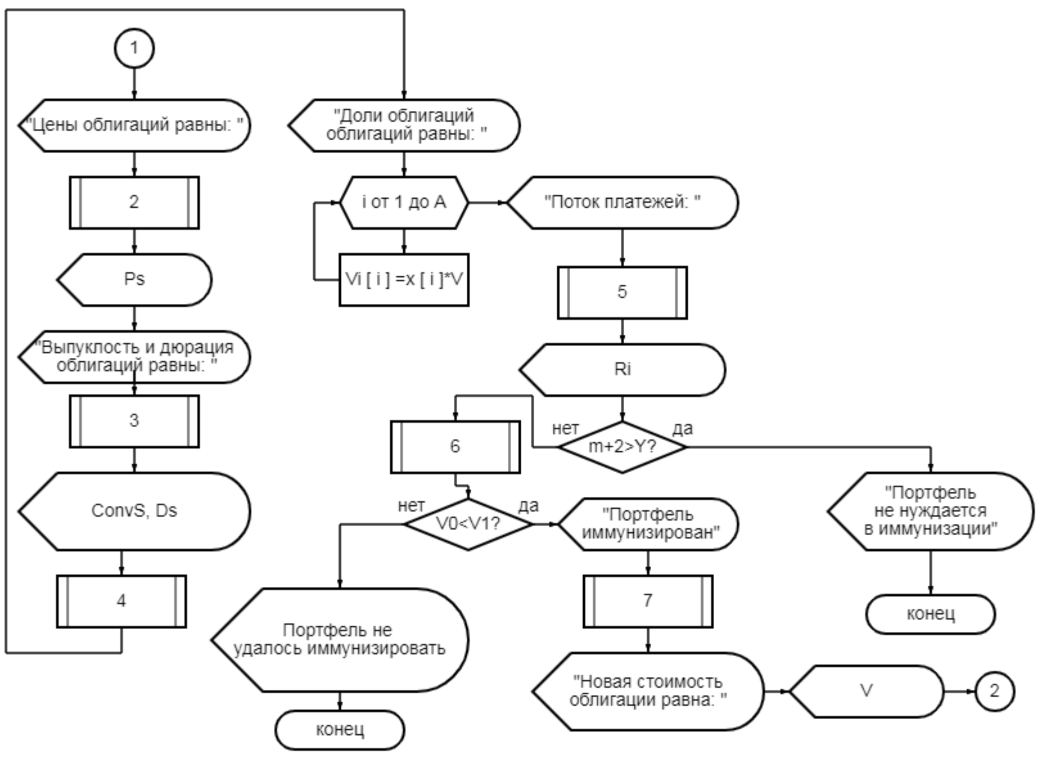

Рисунок 4 – Вторая часть блок-схемы

На рисунке 4:

Ps – Массив с ценой всех облигации в данный момент времени.

ConvS – Массив с выпуклостью всех облигаций в данный момент времени.

Ds - Массив с дюрацией всех облигаций в данный момент времени.

Vi - Массив с долей всех облигаций в данный момент времени.

Ri – Сумма платежей в данный момент времени.

V0 – Стоимость облигации в данный момент времени без изменения ставки дискретизации.

V1 – Стоимость облигации в данный момент времени с изменением ставки дискретизации.

V – Стоимость облигации в следующий момент времени.

«Во второй части добавляются подпрограммы для:

2 – Расчета цены каждой облигации.

3 – Расчеты дюрации и выпуклости каждой облигации. Подробнее на рисунке 7.

4 – Решения задачи линейного программирования. Подробнее на рисунке 8.

5 – Расчета потока платежей.

6 – Расчета переменных V0 и V1.

7 – Расчета переменной V.» [1]

А также рассчитываются доли облигаций в портфеле по формуле 41.

В подпрограммах 2-7 добавляется переменная, меняющаяся z, которая равна периоду выплаты. Эта переменная необходима для накопления степени с каждым шагом цикла.

На рисунке 5 представлена подпрограмма 1.

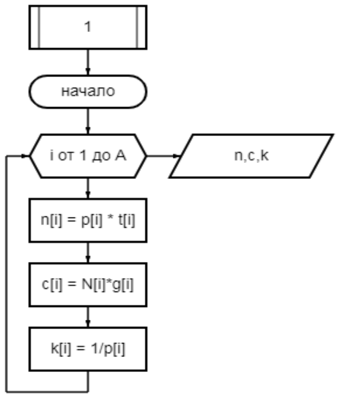

Рисунок 5 – Подпрограмма 1

На рисунке 6 представлена подпрограмма 2.

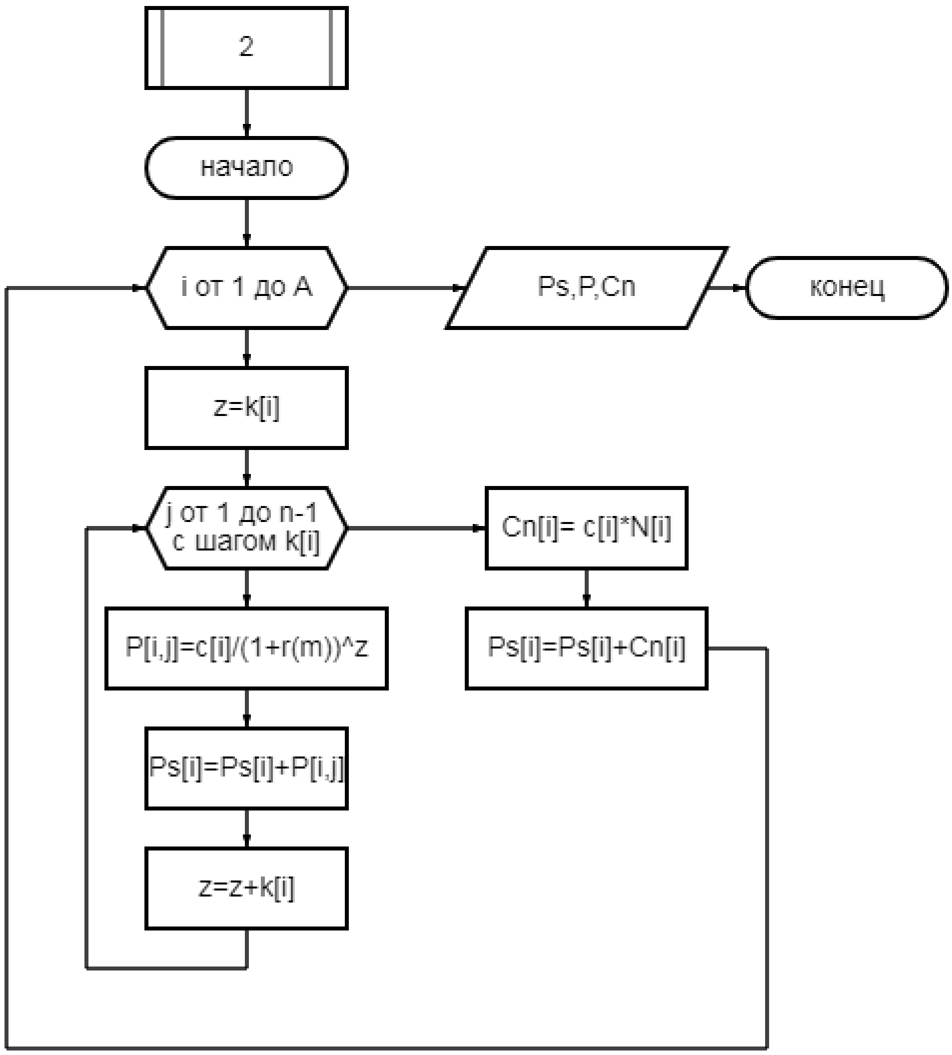

Рисунок 6 – Подпрограмма 2

«После прохождения цикла, отдельно считается последний член суммы, так как для его расчета требуется к выплате прибавить номинал.

Перед завершением подпрограммы выводятся каждый член суммы цены и цена» [13].

На рисунке 7 представлена подпрограмма 3.

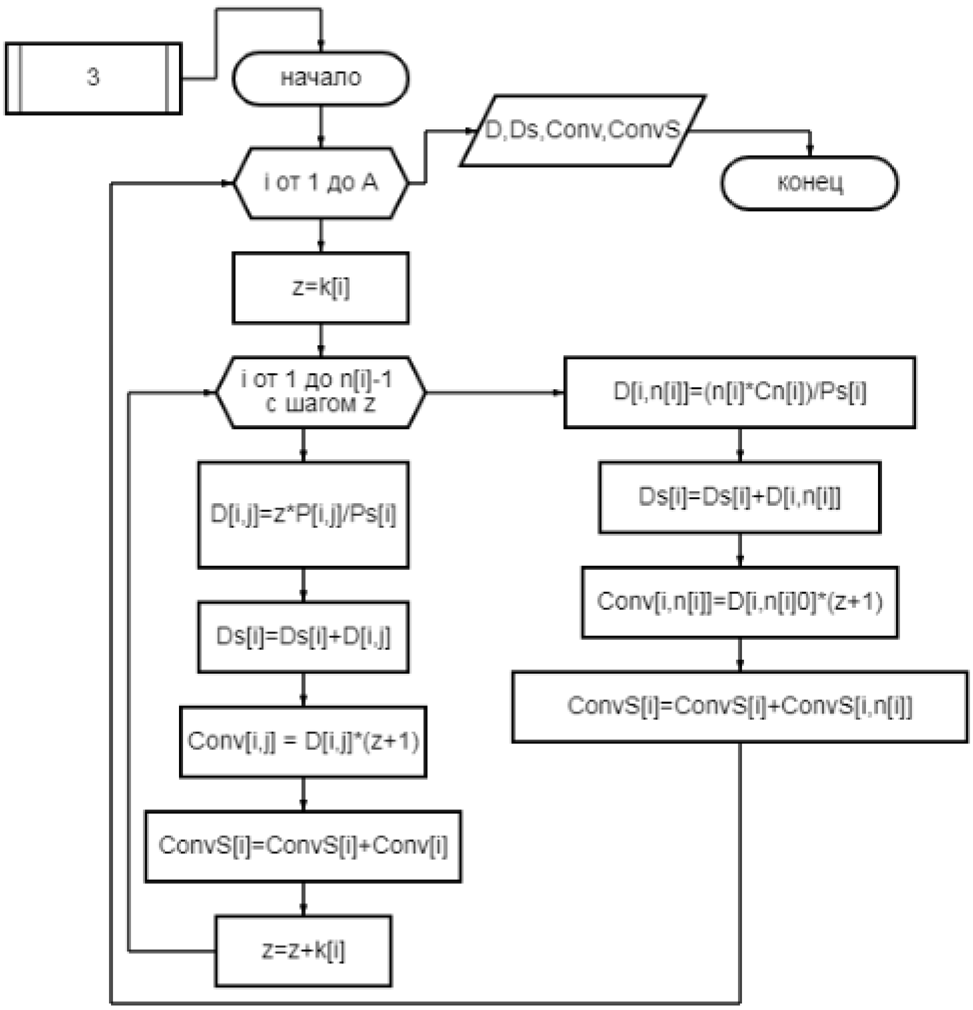

Рисунок 7– Подпрограмма 3

Представленная подпрограмма позволяет определить значения дюрации и выпуклости имеющихся облигаций.

Перед тем как произойдет завершение данной подпрограммы, происходит вывод каждого члена суммы дюрации и выпуклости.

На рисунке 8 представлена подпрограмма 4.

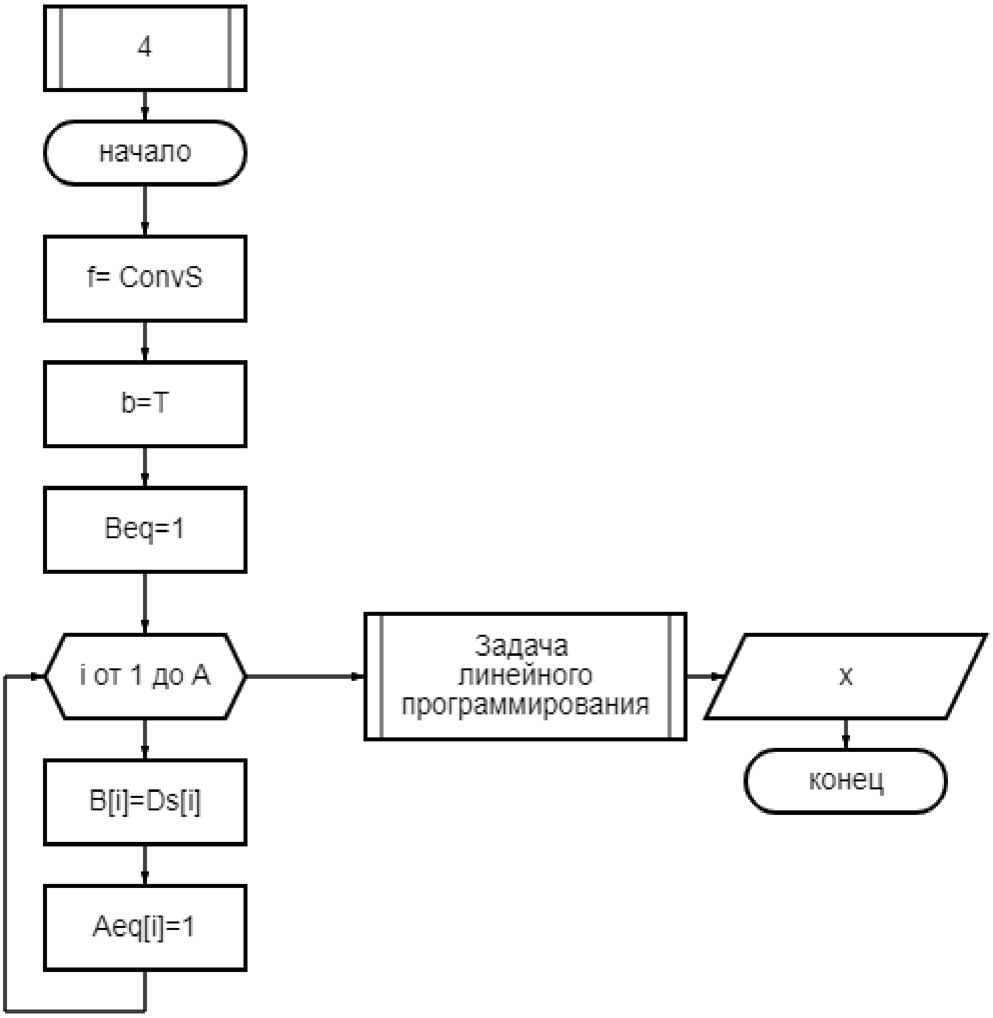

Рисунок 8 – Подпрограмма 4

В подпрограмме 4 для решения задачи линейного программирования задаются переменные:

f – представляет собой матрицу размерностью [A;1] каждый i-ой элемент которой, равняется выпуклости i-ый облигации;

B – вектор, каждый i-ый элемент которого, равняется дюрации i-ой облигации;

b – сумма уравнения;

Aeq – вектор для условия:

$$x_1 + x_2 = 1$$

Затем решается задача линейного программирования и выводятся значения x для каждой облигации.

На рисунке 9 представлена подпрограмма 5.

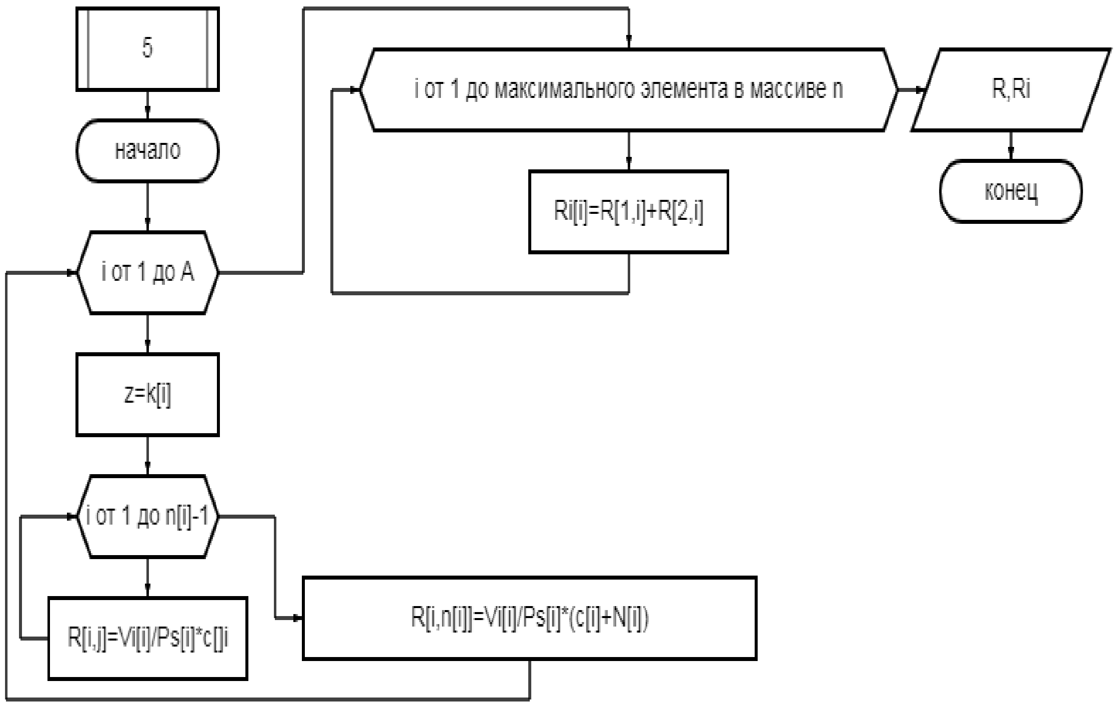

Рисунок 9 – Подпрограмма 5

Данная подпрограмма позволяет рассчитать поток платежей, в которой вначале определяется по отдельности каждая выплата, а потом уже общая сумма.

Подпрограмма, позволяет вывести вектор со всеми выплатами, а так же вектор с суммой выплат за каждый отдельный период.

На рисунке 10 представлена подпрограмма 6.

Подпрограмма 6 рассчитывает переменные V_0 и V_1, после чего выводит их.

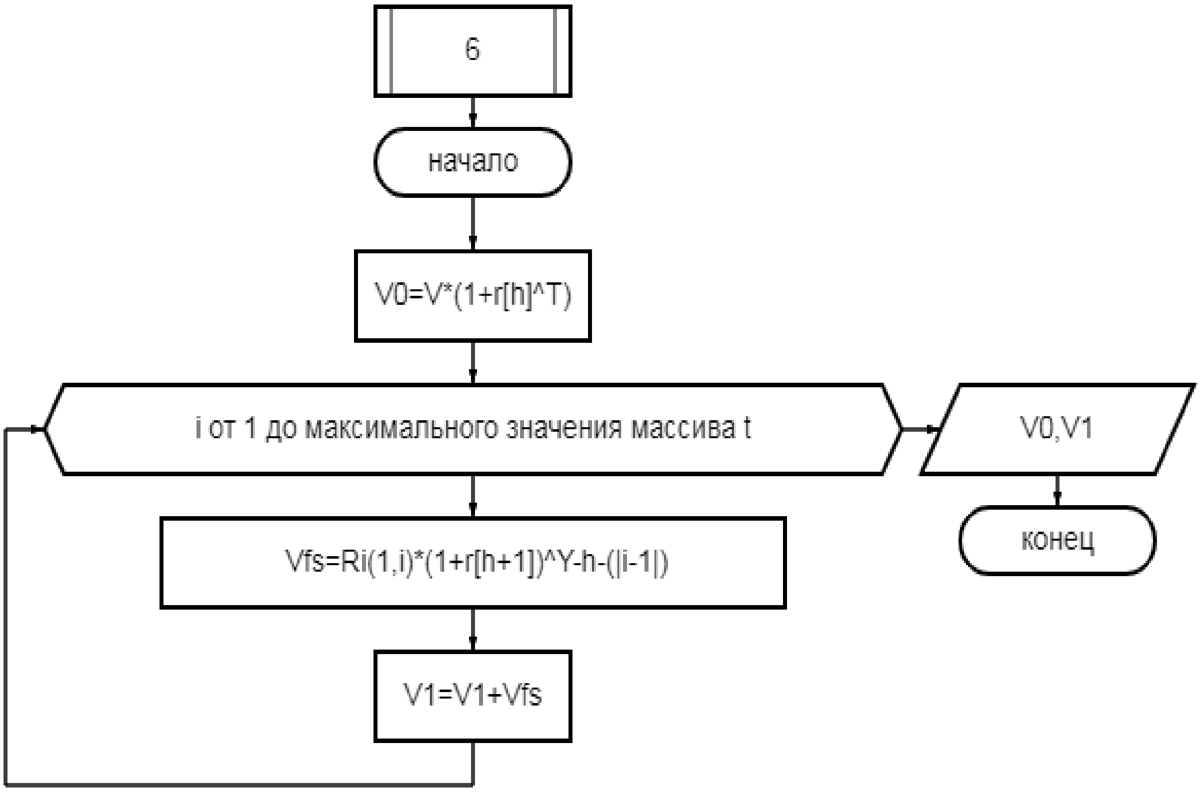

Рисунок 10 – Подпрограмма 6

На рисунке 11 представлена подпрограмма 7.

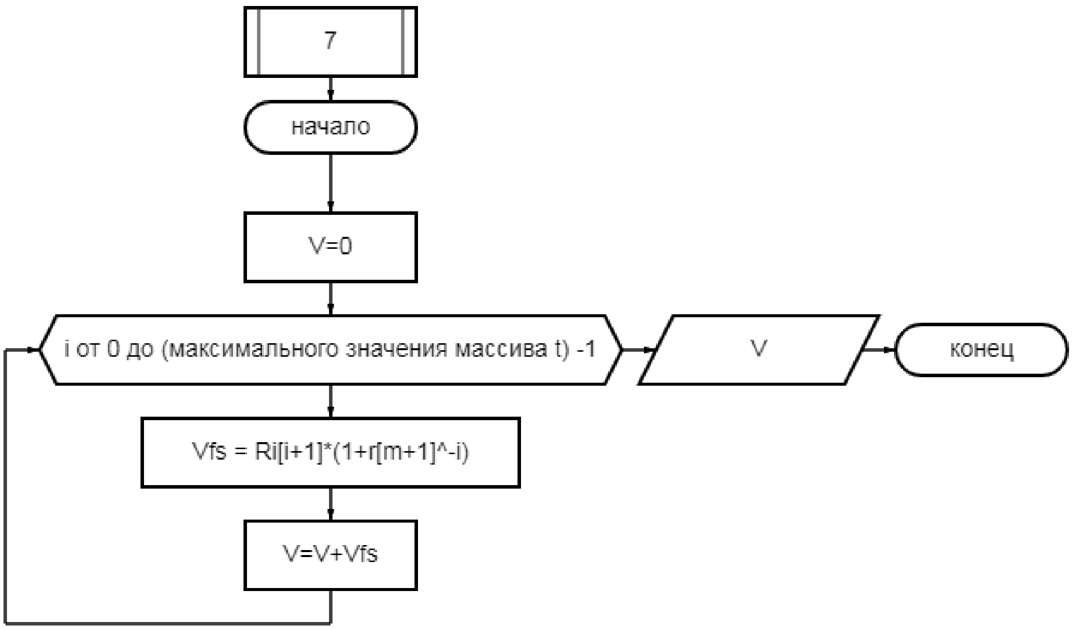

Рисунок 11 – Подпрограмма 7

Следующим шагом необходимо вычислить новую стоимость облигации. При этом необходимо учесть какова была первая полученная выплата и на сколько произошло изменение с следующем периоде ставки дисконтирования.

Полученный и реализованный код программы в среде программирования Matlab2019R представлен в приложении А.

Реализованный код содержит в себе функции вычисления цены, дюрации и выпуклости, решение задачи линейного программирования, расчета потока платежей, расчета переменных V_1 и V_0 и расчет переменной V. Рассмотрим их программную реализацию рассмотренных блок-схем.

На рисунке 12 представлена функция Dop, которой соответствует блок-схема на рисунке 5.

```
function [P,D,Conv,R,n,c,k]=Dop(A,p,t,N,g)
n=zeros(1,A);
c=zeros(1,A);
k=zeros(1,A);
for i=1:A
    n(i)=p(i)*t(i);
    c(i)=N(i)*g(i);
    k(i)=1/p(i);
end
P=zeros(A,n(i)-1);
D=zeros(A,n(i)-1);
Conv=zeros(A,n(i)-1);
R=zeros(A,n(i)-1);
```

Рисунок 12 – Функция Dop

В функции Price, представленной на рисунке 13, рассчитываются цены каждой облигации. Данной функции соответствует блок-схема на рисунке 6.

```
function [P,Ps,Cn]=Price(N,A,k,r,c,n,m)
Ps=zeros(1,A);
Cn=zeros(1,A);
for i=1:A
    z=k(i);
 for j=1:z:n(i)-1
    q=(1+r(m))^z;
    P(i,j) = c(i)/q;
    Ps(i)=Ps(i)+P(i,j);
    z=z+k(i);
end
Cn(i)= (c(i)+N(i))/(1+r(m)).^n(i);
Ps(i)=Ps(i)+Cn(i);
end
```

Рисунок 13 – Функция Price

В функции DaC, представленной на рисунке 14, рассчитываются дюрация и выпуклость облигаций. Данной функции соответствует блок-схема на рисунке 7.

```
function [D,Ds,Conv,ConvS]=DaC(Ps,P,A,k,Cn,n)
Ds=zeros(1,A);
ConvS=zeros(1,A);
for i=1:A
    z=k(i);
     for j=1:z:n(i)-1
        D(i,j) = z*P(i,j)/Ps(i);
        Ds(i)=Ds(i)+D(i,j);
        Conv(i,j)=D(i,j)*(z+1);
        ConvS(i)= ConvS(i)+Conv(i);
        z=z+k(i);
    end
    D(i,n(i))= n(i)*Cn(i)/Ps(i);
    Ds(i)=Ds(i)+D(i,n(i));
    Conv(i,n(i))= D(i,n(i))*(n(i)+1);
    ConvS(i)=ConvS(i)+Conv(i,n(i));
end
```

Рисунок 14 – Функция DaC

В функции LP, представленной на рисунке 15, решается задача линейного программирования. Данной функции соответствует блок-схема на рисунке 8.

```
function[x]=LP(A,ConvS,T,Ds)
%Задачем параметры для задачи ЛП
f=zeros(A);
B=zeros(1,A);
b=zeros(1,A);
lb=zeros(A,1);
for i=1:A
    f= ConvS';
    B(i)=-1*Ds(i);
    b =-1*T;
    Aeq(i)=1;
    Beq =1;
end

[x]=linprog(f,B,b,Aeq,Beq,lb,[]);
```

Рисунок 15 – Функция LP

В функции NewRi, представленной на рисунке 16, вычисляется поток платежей. Данной функции соответствует блок-схема на рисунке 9.

```
function [R,Ri]= NewRi(Vi,Ps,N,A,k,c,n,m)
Ri=zeros(1,max(n));
for i=1:A
    z=k(i);
     for j=1:n(i)-1
         R(i,j)=Vi(i)/Ps(i)*c(i);
     end
     R(i,n(i))= Vi(i)/Ps(i)*(c(i)+N(i));
end
for i=1:max(n)
       Ri(i)= R(1,i)+R(2,i);
end
```

Рисунок 16 – Функция NewRi

В функции Proverka, представленной на рисунке 17, проходит проверка иммунизации портфеля облигаций. Данной функции соответствует блок-схема на рисунке 10.

```
function [V0,V1]=Proverka(r,Ri,V,h,T,t,Y)
V0=V*(1+r(h))^T;
Vfs=zeros(1,max(t));
V1=0;
for i=1:max(t)
    q=Y-h-abs(i-1);
    Vfs=Ri(1,i)*(1+r(h+1))^q;
    V1=V1+Vfs;
end
```

Рисунок 17 – функция Proverka

В функции NewV, представленной на рисунке 18, рассчитываются новые стоимости облигаций. Данной функции соответствует блок-схема на рисунке 11.

```
function [V]=NewV(Ri,r,m,t)
Vfs=zeros(1,max(t));
V=0;
for i=0:max(t)-1
    q=-i;
    Vfs=Ri(i+1)*(1+r(m+1))^q;
    V=V+Vfs;
end
```

Рисунок 18 – функция NewV

Далее проведем проверку работоспособности данного кода, для чего были взяты значения из рассмотренного ранее примера в разделе 2. Ввод значений в Matlab 2019R представлен на рисунке 19.

```
Command Window
main
Введите сумму инвестиций 1000
Введите срок инвестиций 3
Введите количество облигаций 2

Облигация №      1

Введите номинал облигации 100
Введите купоную ставку облигации 0.11
Введите срок до погашения облигации 2
Введите количество выплат в год по облигации 1

Облигация №      2

Введите номинал облигации 100
Введите купоную ставку облигации 0.13
Введите срок до погашения облигации 4
Введите количество выплат в год по облигации 1
Введите рыночную ставку 0.08
Введите рыночную ставку 0.09
Введите рыночную ставку 0.08
```

Рисунок 19 – Ввод значений в Matlab 2019R

На рисунках 20 и 21 изображены два цикла иммунизации портфеля облигаций.

```
Формируем портфель:
Период:       1

Цена облигаций равны
  105.3498  116.5606

Дюрация облигаций равны:
    2.2103    4.5504

Выпуклость облигаций равны:
    6.5303   21.6211


Optimal solution found.

Доли облигаций равны:
  662.3247  337.6753

Поток платежей:
  106.8121  736.1378   37.5876  328.7066

Портфель иммунизирован
```

Рисунок 20 – Первый цикл (период)

```
Новая стоимость облигаций равна:
   1.0603e+03

Переформируем портфель:
Период:       2

Цена облигаций равны
  101.834   110.1252

Дюрация облигаций равны:
    1.0911    3.4301

Выпуклость облигаций равны:
    2.1801   13.2443


Optimal solution found.

Доли облигаций равны:
  651.374   414.7052

Поток платежей:
  758.9522   48.9548  425.5315

Портфель не нуждается в иммнуизации
```

Рисунок 21 – Второй и последний цикл (период)

В результате программа выдает такие же значения, как и в решенной во втором разделе бакалаврской работы задаче. Это говорит о том, что данная программа работает верно.

Таким образом, разработанный программный модуль иммунизации облигаций по заданным пользователем параметрам позволит сформировать портфель облигаций с наименьшим риском и спрогнозировать возможные колебания их стоимости.

Заключение к третьему разделу

В третьем разделе представлена блок-схема решения задачи иммунизации портфеля облигаций, а так же ее программная реализация. Тестирование программы проводилось с помощью аналитического решения задачи, решенной во втором разделе.

Заключение

Основной задачей инвестора, когда он принимает инвестиционные решения, является оптимизация структуры портфеля облигаций. Применение математического моделирования при заданных ограничениях можно спрогнозировать колебания стоимости облигаций.

В работе показано, что задачу создания иммунизированного портфеля можно свести к задаче линейного программирования.

В ходе выполнения данной бакалаврской работы была поставлена цель: разработать программу, которая позволит иммунизировать портфель облигаций от изменения процентных ставок на рынке.

Так же был поставлен ряд задач, таких как:

– Изучить математические методы анализа инвестиций, формирования портфеля, уменьшения портфельных рисков.

- Решить аналитически задачу построения модели иммунизированного портфеля облигаций.

– Разработать алгоритм иммунизации портфеля облигаций.

–Разработать программный модуль иммунизации портфеля облигаций.

Все поставленные задачи были выполнены, а результатом работы является программный модуль иммунизации портфеля, который представлен в приложении А.

Список используемой литературы

1. Александровская Ю. П. Математические методы финансового анализа: учебное пособие / Ю. П. Александровская. — Казань : Казанский национальный исследовательский технологический университет, 2017. — 128 с. — ISBN 978-5-7882-2145-8.

2. Ахмадиев Ф. Г. Математическое моделирование и методы оптимизации : учебное пособие / Ф. Г. Ахмадиев, Р. М. Гильфанов. — Москва : Ай Пи Ар Медиа, 2022. — 178 с. — ISBN 978-5-4497-1383-4.

3. Вдовин В. М. Теория систем и системный анализ : учебник для бакалавров / В. М. Вдовин, Л. Е. Суркова, В. А. Валентинов. — 5-е изд., стер. — Москва : Издательско-торговая корпорация «Дашков и К°», 2020. - 642 с. - ISBN 978-5-394-03716-0.

4. Иванюк В. А. Инвестиции. Количественные модели : учебное пособие / В. А. Иванюк. — Москва : Прометей, 2019. — 124 с. — ISBN 978-5-907166-16-5.

5. Карминский А. М. Применение информационных систем в экономике : учебное пособие / А. М. Карминский, Б. В. Черников. - 2-е изд., перераб. и доп. - Москва : ФОРУМ : ИНФРА-М, 2019. - 320 с. - (Высшее образование). - ISBN 978-5-8199-0495-4.

6. Кузнецов Б. Т. Математические методы финансового анализа : учебное пособие для студентов вузов, обучающихся по специальностям 061800 «Математические методы в экономике», 060400 «Финансы и кредит» / Б. Т. Кузнецов. — Москва : ЮНИТИ-ДАНА, 2017. — 159 с. — ISBN 5-238-00977-1.

7. Люу Ю-Д. Методы и алгоритмы финансовой математики / Ю-Д. Люу ; под редакцией Е. В. Чепурина ; перевод С. В. Жуленев. — 4-е изд. — Москва : Лаборатория знаний, 2021. — 750 с. — ISBN 978-5-93208-544-8.

8. Мицель А.А. Математические методы финансового анализа: учебное пособие / А.А. Мицель - Томск: Томский государственный университет систем управления и радиоэлектроники. – 2019. – 93 с.

9. Николаева И. П. Инвестиции : учебник / И. П. Николаева. — 2-е изд. — Москва : Дашков и К, 2020. — 254 с. — ISBN 978-5-394-03487-9.

10. Олькова А. Е. Финансовое моделирование инвестиционных проектов : учебно-методическое пособие / А. Е. Олькова. — Москва : Дело, 2020. — 80 с. — ISBN 978-5-85006-237-8.

11. Сосина Н.А. Оценка эффективности инвестиций на основе функции риска// Научное обозрение. - 2015. - №5. - С. 207-210. ISSN 1815-4972.

12. Сосина Н.А. Пример диверсификации портфеля ценных бумаг на основе корреляционного анализа // В сборнике: Информационные технологии в моделировании и управлении: подходы, методы, решения. Сборник научных статей II Всероссийской научной конференции с международным участием. В 2 частях. 2019. С. 359-365.

13. Тимофеева Н.Ю. Алгоритм формирования облигационного портфеля, сочетающийся с прогнозными последствиями нестабильности в стратегии иммунизации//Электронный научный журнал «Век качества», 2016, №3

14. Токтошов Г. Ы. Финансовая математика : учебное пособие / Г. Ы. Токтошов. — Саратов : Профобразование, 2021. — 130 с. — ISBN 978-5-4488-1207-1.

15. Трегуб И. В. Имитационные модели принятия решений : учебное пособие / И.В. Трегуб, Т.А. Горошникова. — Москва : ИНФРА-М, 2022. — 193 с. + Доп. материалы [Электронный ресурс]. — (Высшее образование: Магистратура). — DOI 10.12737/1030572. - ISBN 978-5-16-015393-3.

16. Турецкий В. Я. Математика и информатика : учебник / В. Я. Турецкий. - 3-е изд., испр. и доп. - Москва : ИНФРА-М, 2020. - 558 с. - (Высшее образование). - ISBN 978-5-16-005296-0.

17. Чараева М. В. Стратегия управления корпоративными финансами: инвестиции и риски : монография / М.В. Чараева. — Москва : ИНФРА-М, 2021. — 218 с. + Доп. материалы [Электронный ресурс]. — (Научная мысль). — DOI 10.12737/1064905. - ISBN 978-5-16-015877-8.

18. Чжун К. Л. Элементарный курс теории вероятностей. Стохастические процессы и финансовая математика / К. Л. Чжун, Ф. АитСахлиа ; перевод М. Б. Лагутин. — 4-е изд. — Москва : Лаборатория знаний, 2021. — 456 с. — ISBN 978-5-93208-572-1.

19. Шапкин А. С. Экономические и финансовые риски. Оценка, управление, портфель инвестиций / А. С. Шапкин, В. А. Шапкин. — 10-е изд. — Москва : Дашков и К, 2020. — 544 с. — ISBN 978-5-394-03553-1.

20. Яковлев В. П. Эконометрика : учебник для бакалавров / В. П. Яковлев. — Москва : Издательско-торговая корпорация «Дашков и К°», 2019. - 384 с. - ISBN 978-5-394-02532-7.

21. Winston W.L. Introduction to Mathematical Programming: Applications and Algorithms. Boston (Mass.): PWS-KENT Publ., 1991.

22. Winston W.L. Operations Research: Applications and Algorithms Boston (Mass.): PWS-KENT Publ., 1990

23. Tupper Jeff. «Reliable Two-Dimensional Graphing Methods for Mathematical Formulae with Two Free Variables», [Электронный ресурс]: Режим доступа: http://www.dgp.toronto.edu/people/mooncake/papers.ru

24. Bailey D. H.; Borwein, J. M.; Calkin, N. J.; Girgensohn, R.; Luke, D. R.; and Moll, V. H. «Experimental Mathematics in Action». Natick, MA: A. K. Peters, p. 289, 2006.

25. Comba J.; Stolfi, J. «Affine Arithmetic and its Applications to Computer Graphics. In anais do VI Simp’osio Brasileiro de Compta, c’ao Gr’afica Processamento de Imagens». (SIBGRAPI ’93), p. 9-18, 2017.

Приложение А

Программный модуль

```
A=2;
N=[100;100];
g=[0.11;0.13];
t=[2;4] ;
p=[1;1];
r=[0.08;0.09;0.08];
V=1000;
T=3;
Y=T;
for m=1:T
    if m==1
        T=T;
    else
     T=T-1;
    end
    if m>=2
    for i=1:length(t)
        if t(i)==0
            fprintf('Срок облигации истек')
            return
        else
            t(i)=t(i)-1;
        end
    end
    end
[P,D,Conv,R,n,c,k]=Dop(A,p,t,N,g);
if m==1
disp('Формируем портфель:')
 fprintf('Период: ');
    disp(m);
else
    disp('Переформируем портфель:')
    fprintf('Период: ');
    disp(m);
end
%Считаем цену
disp('Цена облигаций равны')
[P,Ps,Cn] = Price(N,A,k,r,c,n,m);
disp(Ps)

%Считаем дюрацию и выпуклость
disp('Дюрация облигаций равны: ')
[D,Ds,Conv,ConvS]=DaC(Ps,P,A,k,Cn,n);
disp(Ds)
disp('Выпуклость облигаций равны: ')
```

```
disp(ConvS)

%Решаем задачу ЛП
[x]=LP(A,ConvS,T,Ds);

%Расчитаем доли в портфеле
disp('Доли облигаций равны: ')
Vi=zeros(1,A);
for i=1:A
    Vi(i)=V*x(i);
end
disp(Vi)

%Поток платежей
disp('Поток платежей: ')
[R,Ri]= NewRi(Vi,Ps,N,A,k,c,n,m);
disp(Ri)

%Проверка иммунизации
if m+2>Y
     disp('Портфель не нуждается в иммнуизации')
     return
end
[V0,V1]=Proverka(r,Ri,V,m,T,t,Y);
if V0<V1
    disp('Портфель иммунизирован')
    [V]=NewV(Ri,r,m,t);
    disp('Новая стоимость облигаций равна: ')
else
     disp('Портфель не иммунизирован')
     return
end
end
```