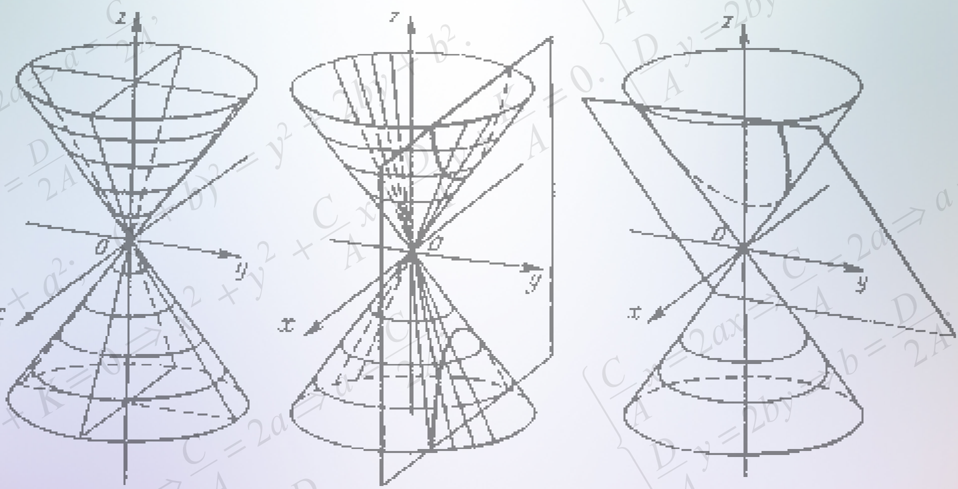
Министерство образования и науки Российской Федерации
Тольяттинский государственный университет
Институт математики, физики и информационных технологий
Кафедра «Высшая математика и математическое моделирование»

О.А. Кузнецова
С.Ш. Палфёрова

ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА С ЭЛЕМЕНТАМИ АНАЛИТИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ

Электронное учебно-методическое пособие



© ФГБОУ ВПО «Тольяттинский государственный университет», 2014

УДК 512.64:514.74(075.8)
ББК 22.143:22.151.5я73

Рецензенты:
д-р пед. наук, профессор Волжского университета
им. В.Н. Татищева *А.В. Козлов;*
д-р техн. наук, профессор Тольяттинского государственного
университета *П.Ф. Зибров*.

Кузнецова, О.А. Линейная алгебра с элементами аналитической геометрии : электронное учеб.-метод. пособие / О.А. Кузнецова, С.Ш. Палфёрова. – Тольятти : Изд-во ТГУ, 2014. – 162 с. : 1 оптический диск.

Электронное учебно-методическое пособие содержит руководство по изучению дисциплины, сведения основных разделов линейной алгебры и аналитической геометрии. Рассмотрены примеры решения различных задач по темам разделов, приведены материалы для диагностики знаний, включены контрольные вопросы.

Предназначено для студентов, обучающихся по направлению подготовки 080100.62 «Экономика», изучающих дисциплину «Линейная алгебра», очной или заочной форм обучения.

Текстовое электронное издание

Минимальные системные требования: IBM PC-совместимый компьютер: Windows XP/Vista/7/8; 500 МГц или эквивалент; 128 Мб ОЗУ; SVGA; Adobe Reader.

Номер государственной регистрации электронного издания

© ФГБОУ ВПО «Тольяттинский государственный университет», 2014

Редактор *Е.Ю. Жданова*
Технический редактор *З.М. Малявина*
Компьютерная верстка: *Л.В. Сызганцева*
Художественное оформление,
компьютерное проектирование: *Г.В. Карасева*

Дата подписания к использованию 04.06.2014.
Объем издания 103 Мб.
Комплектация издания: CD-диск, первичная упаковка.
Заказ № 1-14-13.

Издательство Тольяттинского государственного университета
445667, г. Тольятти, ул. Белорусская, 14
тел. 8(8482) 53-91-47, www.tltsu.ru

Содержание

Введение

Математика является инструментом получения количественных характеристик и языком математического моделирования природных, физических и информационных объектов. Наряду с экспериментом и анализом получения результатов математика является мощнейшим орудием познания и позволяет проникнуть во многие свойства изучаемых объектов. В настоящее время многие области науки и практики используют математические средства моделирования, так как чисто качественное исследование явлений природы, экономики, техники, организации производства и управления оказывается недостаточным. Во всех направлениях организации производства разработаны математические методы моделирования, в которых используются привычные методы арифметики и элементы геометрии. Кроме того, в физике, электричестве, газовой динамике потребовалось применение и развитие методов теории функции комплексного переменного. Вариантов управления процессом или системой можно предложить бесчисленное множество, однако требуется из этого множества выбрать наиболее оптимальные, обеспечивающие получение максимальной эффективности при минимальных затратах.

Разработанные экономико-математические методы и модели требуют достаточно глубоких знаний линейной алгебры, аналитической геометрии, математического анализа и математической статистики.

Математизация знаний состоит не только в использовании готовых математических методов и моделей, но и в поисках того специфического математического аппарата, который позволяет наиболее точно и полно описывать интересующий круг явлений, а также дает возможность выводить новые следствия, пригодные к использованию в практической деятельности.

Данное учебно-методическое пособие включает следующие разделы математики: «Матрицы, определители, системы линейных уравнений», «Элементы векторной алгебры. Линейные пространства», «Элементы аналитической геометрии», «Комплексные числа», знание которых необходимо для изучения дисциплин «Математический анализ», «Теория вероятностей и математическая статистика», «Эконометрика», «Финансовые вычисления», «Методы оптимизации», «Экономико-математические методы и модели» и др.

Цели и задачи дисциплины

Цели:

- ознакомиться с важнейшими математическими понятиями и утверждениями;
- научиться постановке математической модели стандартной задачи и анализу полученных знаний;
- развить грамотность, достаточную для самостоятельной работы с экономико-математической литературой.

Задачи:

- развитие логического и алгоритмического мышления студента;
- изучение математических основ, используемых при построении моделей экономического поведения, а также изучение конкретных моделей экономических явлений;
- выработка необходимых умений и навыков в построении, анализе и применении экономико-математических моделей;
- выработка умения моделировать реальные финансово-экономические процессы;
- освоение приемов решения и исследования математически формализованных задач.

В результате изучения дисциплины (учебного курса) должны быть сформированы следующие ***компетенции:***

• способность осуществлять сбор, анализ и обработку данных, необходимых для решения поставленных экономических задач (ПК-4):

– знание основных методик сбора, анализа и обработки экспериментальных данных;
– умение обрабатывать результаты наблюдений и строить математико-статистические модели закономерностей изучаемых явлений;

– владение методами и приемами обработки результатов наблюдений, необходимыми для моделирования экономических явлений;

• способность выбрать инструментальные средства для обработки экономических данных в соответствии с поставленной задачей, проанализировать результаты расчетов и обосновать полученные выводы (ПК-5):

– знание основных инструментальных средств обработки экономических данных;
– умение применять инструментальные средства для обработки экономических данных;
– владение методикой построения, анализа и применения математических моделей для оценки состояния и прогноза развития экономических явлений и процессов;

• способность на основе описания экономических процессов и явлений строить стандартные теоретические и математические модели, анализировать и содержательно интерпретировать полученные результаты (ПК-6):

– знание основных теоретических и эконометрических моделей и методов их построения;
– умение строить основные эконометрические модели на основе экспериментальных данных;
– владение методами анализа и прогнозирования экономических показателей, характеризующих состояние и развитие анализируемой системы.

В результате изучения дисциплины необходимо:

иметь представление

- о математике как особом способе познания мира, общности и универсальности ее понятий и представлений;
- математическом моделировании финансово-экономических процессов с учетом их стохастического характера;

знать

- основные понятия и теоретические положения курса;
- математические методы и приемы обработки количественной информации;

уметь

- применять изучаемые теоретические материалы для количественного анализа конкретного экономического объекта;
- использовать математическую символику для выражения количественных и качественных отношений объектов;
- решать экономические задачи с использованием математических методов;

иметь навыки

- работы с математической и связанной с математикой научной и учебной литературой;
- применения классических методов решения основных математических задач, к которым могут приводить те или иные экономические проблемы;
- исследования моделей и оценки пределов применимости полученных результатов.

Изучение дисциплины базируется на основах математических знаний, полученных при изучении курса математики общеобразовательной средней школы.

Учебные элементы:

– понятие матрицы, операции над матрицами;
– определители второго, третьего, n-го порядков и их свойства;
– ранг матрицы, след матрицы, обратная матрица;
– системы линейных уравнений, совместная (несовместная) система, определенная (неопределенная) система;
– метод Гаусса, метод Крамера, матричный метод решения систем линейных уравнений;
– теорема Кронекера – Капели;
– понятие вектора на плоскости и в трехмерном пространстве;
– линейные операции над векторами;
– скалярное произведение векторов, косинус угла между векторами, проекция вектора на ось, длина (норма) вектора;
– векторное произведение векторов и его геометрический смысл;
– смешанное произведение векторов, компланарность трех векторов, геометрический смысл смешанного произведения;
– декартовы прямоугольная и полярная системы координат на плоскости;

– расстояние между двумя точками, деление отрезка в данном отношении;
– основные виды уравнений прямой линии на плоскости;
– угол между прямыми линиями на плоскости, условия параллельности и перпендикулярности двух прямых;
– расстояние от точки до прямой линии;
– кривые второго порядка: окружность, эллипс, парабола, гипербола;
– параметрическое и полярное представления линий на плоскости;
– простейшие задачи аналитической геометрии в пространстве;
– основные виды уравнений плоскости и прямой в пространстве;
– угол между плоскостями, угол между двумя прямыми, угол между прямой и плоскостью;
– условие параллельности и перпендикулярности двух плоскостей, двух прямых в пространстве, плоскости и прямой в пространстве;
– расстояние от точки до плоскости;
– понятие о поверхностях второго порядка и их классификация;
– определение линейного пространства;
– векторы в n-мерном пространстве, линейная зависимость векторов;
– базис системы векторов, разложение вектора по базису;
– базис и размерность линейного пространства;
– линейные отображения, линейные операторы;
– собственные числа и собственные векторы матрицы;
– понятие о квадратичных формах и их преобразовании к каноническому виду;
– комплексные числа и их представление;
– операции над комплексными числами, заданными в алгебраической форме, операции над комплексными числами, заданными в тригонометрической форме;
– области на комплексной плоскости.

Изучив данную тему, необходимо:

иметь представление о матрицах и видах матриц, определителях, системах линейных уравнений, векторах на плоскости и в пространстве, методе координат, об уравнениях линий на плоскости и в пространстве, уравнениях поверхностей в пространстве, линейных операторах, квадратичных формах, комплексных числах;

знать понятия: матрица, единичная матрица, определитель, минор, алгебраическое дополнение, ранг матрицы, след матрицы, обратная матрица, система линейных уравнений, векторы, координаты вектора, скалярное, векторное и смешанное произведение векторов, уравнения линий на плоскости, геометрический смысл коэффициентов уравнений линий на плоскости и поверхностей в пространстве, линейная зависимость и независимость векторов, квадратичная форма, комплексное число, комплексная плоскость;

уметь выполнять операции над матрицами: сложение, вычитание, умножение на число, произведение матриц; вычислять определители различными способами, находить обратную матрицу, решать системы линейных уравнений, вычислять скалярное, векторное и смешанное произведение векторов, изображать на плоскости и в пространстве в декартовой системе координат прямые, кривые и поверхности второго порядка; составлять уравнения линий и поверхностей по их различным положениям на плоскости и в пространстве; определять линейную зависимость системы векторов, находить собственные значения и собственные векторы матрицы, приводить квадратичные формы к каноническом виду, выполнять операции над комплексными числами, изображать области на комплексной плоскости;

владеть навыками применения основных понятий линейной алгебры, векторной алгебры и аналитической геометрии в постановке и решении экономико-математических задач.

При освоении дисциплины необходимо:

1) изучить материал по курсу «Линейная алгебра с элементами аналитической геометрии»;
2) акцентировать внимание на основных понятиях и терминах данного раздела;
3) выполнить упражнения для самостоятельной работы и контрольные задания по дисциплине;
4) выполнить тест по курсу «Линейная алгебра с элементами аналитической геометрии»;
5) ответить на контрольные вопросы.

1. МАТРИЦЫ. ОПРЕДЕЛИТЕЛИ. СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

1.1. Матрицы и действия над ними

Понятие матрицы имеет важное значение при решении многих задач в экономике, социологии, инженерной сфере и др. Объясняется это тем, что значительная часть математических моделей объектов и процессов записывается в достаточно простой и компактной матричной форме.

Матрицей размера $m \times n$ называется прямоугольная таблица чисел, содержащая m строк и n столбцов. Числа, составляющие матрицу, называются элементами матрицы.

Матрицы обозначаются прописными буквами латинского алфавита: A, B, C, ..., а для обозначения элементов используются соответственно строчные буквы с двойной индексацией: a_{ij}, b_{ij}, c_{ij}, ..., где i – номер строки, j – номер столбца.

Например, матрица

$$A_{m\times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

или в сокращенной форме $A = (a_{ij})_{m\times n}$.

Две матрицы A и B одного размера называются равными, если они совпадают поэлементно, т. е. $a_{ij} = b_{ij}$ для любых i и j.

С помощью матриц удобно записывать некоторые экономические зависимости. Например, табл. 1.1 распределения ресурсов (усл. ед.) по отдельным отраслям экономики может быть записана в компактной форме в виде матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 5{,}3 & 4{,}1 \\ 2{,}8 & 2{,}1 \\ 4{,}8 & 5{,}1 \end{pmatrix}.$$

В этой записи матричный элемент $a_{11} = 5{,}3$ показывает, сколько электроэнергии потребляет промышленность, а элемент $a_{22} = 2{,}1$ – сколько трудовых ресурсов требуется для сельского хозяйства.

Таблица 1.1

Ресурсы	Отрасль экономики	
	промышленность	сельское хозяйство
Электроэнергетические	5,3	4,1
Трудовые	2,8	2,1
Водные	4,8	5,1

Виды матриц. Матрица, состоящая из одной строки, называется матрицей-строкой (вектором-строкой), а из одного столбца – матрицей-столбцом (вектором-столбцом):

– матрица-строка

$$A_{1\times n} = (a_{11} \quad a_{12} \quad \ldots \quad a_{1n}),$$

– матрица-столбец

$$B_{m\times 1} = \begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ \ldots \\ b_{m1} \end{pmatrix}.$$

Матрица называется квадратной n-го порядка, если число ее строк равно числу столбцов и равно n.

Например,

$$C = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

– квадратная матрица третьего порядка.

Элементы матрицы c_{ij}, у которых номер столбца равен номеру строки ($i = j$), называются диагональными и образуют *главную диагональ* матрицы. Например, $c_{11} = 5$, $c_{22} = -1$, $c_{33} = 2$.

Если все недиагональные элементы матрицы равны нулю, то матрица называется *диагональной*. Матрица C – диагональная.

Если у диагональной матрицы n-го порядка все диагональные элементы равны единице, то матрица называется *единичной матрицей* n-го порядка и обозначается E или E_n. Например:

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

– единичная матрица третьего порядка.

У квадратной матрицы n-го порядка можно выделить так называемую *побочную диагональ*. Например, у матрицы

$$K = \begin{pmatrix} 0 & -3 & 1 \\ 7 & 4 & -5 \\ 10 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

элементы $k_{13} = 1$, $k_{22} = 4$, $k_{31} = 10$ образуют побочную диагональ.

Матрица любого размера называется *нулевой*, или нуль-матрицей, если все ее элементы равны нулю:

$$O_{m\times n} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

Операции над матрицами

1. Умножение матрицы на число. *Произведением* матрицы A на число α называется матрица $B = \alpha A$, элементы которой $b_{ij} = \alpha a_{ij}$.

Например, $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$, матрица $B = 5A = \begin{pmatrix} 10 & 15 \\ 20 & -5 \end{pmatrix}$.

Следствие. Общий множитель всех элементов матрицы можно выносить за знак матрицы. Например,

$$\begin{pmatrix} 20 & 12 & 6 \\ 26 & 2 & 0 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 10 & 6 & 3 \\ 13 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

В частности, произведение матрицы на ноль есть нулевая матрица.

Матрица $A = (-1)A$ называется *противоположной* матрице A.

2. Сложение матриц. *Суммой* двух матриц A и B одинакового размера называется матрица $C = A + B$, элементы которой $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ (т. е. матрицы складываются поэлементно). Например:

$$A=\begin{pmatrix}2&3&0\\1&5&6\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}0&1&4\\2&5&3\end{pmatrix}, C=A+B=\begin{pmatrix}2&4&4\\3&10&9\end{pmatrix}.$$

3. Вычитание матриц. Разность двух матриц одинакового размера определяется как $A - B = A + (-1)B$.

4. Умножение матриц. Операция умножения матрицы A на матрицу B определена, когда число столбцов первой матрицы равно числу строк второй матрицы.

Произведением матриц $A_{m\times k} \cdot B_{k\times n}$ называется такая матрица $C_{m\times n}$, каждый элемент c_{ij} которой равен сумме произведений элементов i-й строки матрицы A на соответствующие элементы j-го столбца матрицы B.

$$c_{ij}=\begin{pmatrix}a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ik}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}b_{1j}\\b_{2j}\\\dots\\b_{kj}\end{pmatrix}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\dots+a_{ik}b_{kj}.$$

Свойства операций 1 и 2

1) $A + B = B + A$;
2) $(A + B) + C = A + (B + C)$;
3) $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$;
4) $A(B + C) = AB + AC$;
5) $(A + B)C = AC + BC$;
6) $\alpha(AB) = (\alpha A)B = A(\alpha B)$;
7) $A(BC) = (AB)C$.

Операция умножения матриц определена не для всех матриц, поэтому для нее существуют некоторые специфичные свойства:

а) если AB существует, то BA может и не существовать. Так, произведение $M_{2\times 3} \cdot P_{3\times 3}$ существует, а произведение $P_{3\times 3} \cdot M_{2\times 3}$ нет, так как число столбцов первой матрицы P не равно числу строк второй матрицы M;

б) если произведения AB и BA существуют, то они могут быть матрицами разных размеров. Например:

$$A=\begin{pmatrix}2&1&1\\0&3&2\end{pmatrix}, \qquad B=\begin{pmatrix}0&3\\1&5\\-1&1\end{pmatrix}.$$

Произведение

$$A_{2\times 3}\cdot B_{3\times 2}=C_{2\times 2}=\begin{pmatrix}0&12\\1&17\end{pmatrix},$$

а произведение

$$B_{3\times2}\cdot A_{2\times3}=D_{3\times3}=\begin{pmatrix}0&9&6\\2&16&11\\-2&2&1\end{pmatrix},$$

т. е. $AB\neq BA$;

в) если произведения AB и BA существуют и оба – матрицы одинакового размера, то переместительный (коммутативный) закон умножения, вообще говоря, не выполняется, т. е. $AB\neq BA$.

Матрицы, для которых выполняется коммутативный закон умножения, называются *перестановочными* (данное свойство имеет место только для квадратных матриц одного порядка).

Данным свойством обладает произведение любой квадратной матрицы A n-го порядка на единичную матрицу E того же порядка, т. е. $AE = EA = A$.

5. Возведение в степень. *Целой положительной степенью* A^m ($m > 1$) квадратной матрицы A называется произведение m матриц, равных A, т. е.

$$A^m=\underbrace{A\cdot A\cdot\ldots\cdot A}_{m\ раз}.$$

По определению полагают $A^0 = E$, $A^1 = A$.

Выражение вида

$$P(A)=\alpha_0E+\alpha_1A+\alpha_2A_2+\ldots+\alpha_mA^m,$$

где A и E – соответственно квадратная и единичная матрицы одинакового порядка, α_0, α_1, ..., α_m – числа, называется многочленом (полиномом) от матрицы A. Он представляет собой матрицу, которую рассматривают как результат подстановки матрицы A вместо переменной x в обычный многочлен натуральной степени m.

6. Транспонирование матрицы. Под этой операцией понимают переход от матрицы A к матрице A^T, в которой строки и столбцы поменялись с сохранением порядка. Матрица A^T называется *транспонированной* относительно матрицы A.

Например,

$$A_{2\times3}=\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\end{pmatrix},$$

тогда транспонированная к ней

$$A^T = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$$

размера 3×2.

Свойства операции транспонирования:

1) $(A^T)^T = A$; 3) $(A + B)^T = A^T + B^T$;

2) $(\alpha A)^T = \alpha A^T$; 4) $(AB)^T = B^T A^T$.

7. След матрицы. Следом квадратной матрицы A называется сумма ее диагональных элементов.

След матрицы обозначается tr$A$ (от англ. trace – след).

Свойства следа матрицы:

1) при транспонировании матрицы ее след не меняется, т. е. $trA = trA^T$;
2) если матрица D диагональная с элементами $d_{ii} = (1, 2, ..., n)$, то для любого натурального m $trD^m = d_{11}^m + d_{22}^m + \ldots + d_{nn}^m$;
3) если A и B – квадратные матрицы n-го порядка, то $tr(AB) = tr(BA)$.

Например, если матрица $D = \begin{pmatrix} 0 & 9 & 6 \\ 2 & 16 & 11 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, то $trD = 0 + 16 + 1 = 17$.

1.2. Определители. Обратная матрица

Необходимость введения определителя – числа, характеризующего квадратную матрицу A, тесно связана с решением систем линейных уравнений. Определитель матрицы A обозначается $|A|$, или Δ, или det$A$.

Определителем матрицы первого порядка, или определителем первого порядка, называется элемент a_{11}:

$$|A| = (a_{11}).$$

Определителем матрицы второго порядка, или определителем второго порядка, называется число, которое вычисляется по формуле

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}. \quad (1.1)$$

Например, пусть $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$, тогда $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = 1 \cdot 3 - 2 \cdot 5 = -7$.

Пусть дана квадратная матрица третьего порядка:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

Определителем третьего порядка называется число, которое вычисляется по формуле

$$|A| = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{32}a_{13} - \\ - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{32}a_{23}a_{11}. \quad (1.2)$$

Это число представляет собой сумму из шести слагаемых – членов определителя. В каждое слагаемое входит ровно по одному элементу из каждой строки и каждого столбца матрицы. Знаки, с которыми члены определителя входят в формулу (1.2), легко запомнить, пользуясь правилом треугольника (метод Саррюса)

$+$ $-$

Замечание. Геометрический смысл определителей второго и третьего порядков заключается в том, что их модули соответственно равны площади параллелограмма и объему параллелепипеда, построенных на двух и трех векторах, координатами которых являются элементы определителей.

Для нахождения определителя n-го порядка введем ряд дополнительных понятий.

Минором M_{ij} элемента a_{ij} матрицы n-го порядка называется определитель матрицы $(n-1)$-го порядка, полученной из матрицы A вычеркиванием i-й строки и j-го столбца. Например, минором элемента a_{12} матрицы третьего порядка будет число

$$M_{12} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}.$$

Каждая матрица n-го порядка имеет n^2 миноров $(n-1)$-го порядка.

Алгебраическим дополнением A_{ij} элемента a_{ij} матрицы n-го порядка называется его минор, взятый со знаком $(-1)^{i+j}$:

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}, \quad (1.3)$$

т. е. алгебраическое дополнение совпадает с минором, когда сумма номеров строки и столбца $(i+j)$ – четное число, и противоположно минору, когда $(i+j)$ – нечетное число.

Теорема (теорема Лапласа). *Определитель квадратной матрицы равен сумме произведений элементов любой строки или столбца на их алгебраические дополнения:*

– разложение по i-й строке

$$|A| = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \ldots + a_{in}A_{in};$$

– разложение по j-му столбцу

$$|A| = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \ldots + a_{nj}A_{nj}.$$

Следствие: определитель треугольной (и диагональной) матрицы равен произведению элементов главной диагонали.

Свойства определителей

1. Если какая-либо строка (столбец) матрицы состоит из одних нулей, то ее определитель равен нулю.

2. Если все элементы какой-либо строки (столбца) матрицы умножить на число α, то ее определитель умножится на это число α.

Замечание. За знак определителя можно выносить общий множитель любой строки или столбца.

3. При транспонировании матрицы ее определитель не изменится: $|A| = |A^T|$.

4. При перестановке двух строк (столбцов) матрицы ее определитель меняет знак на противоположный.

5. Если элементы двух строк (столбцов) матрицы пропорциональны, то ее определитель равен нулю.

6. Сумма произведений элементов какой-либо строки (столбца) матрицы на алгебраические дополнения элементов другой строки (столбца) этой матрицы равна нулю, т. е. $\sum_{s=1}^{n} a_{is}A_{js} = 0$, при $i \neq j$.

7. Определитель матрицы не изменится, если к элементам какой-либо строки (столбца) матрицы прибавить элементы другой строки (столбца), умноженные на одно и то же число.

8. Определитель произведения двух квадратных матриц n-го порядка равен произведению их определителей: $|A \cdot B| = |A| \cdot |B|$.

Пример 1.1. Вычислить определитель:

$$|A| = \begin{vmatrix} 4 & 6 & -2 & 4 \\ 1 & 2 & -3 & 1 \\ 4 & -2 & 1 & 0 \\ 6 & 4 & 4 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 12 & 2 & -2 & 4 \\ 13 & -4 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -10 & 12 & 4 & 6 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 12 & 2 & 4 \\ 13 & -4 & 1 \\ -10 & 12 & 6 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} -40 & 18 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \\ -88 & 36 & 6 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} -40 & 18 \\ -88 & 36 \end{vmatrix} = -(-40 \cdot 36 + 18 \cdot 88) = -144.$$

Обратная матрица

Матрица A^{-1} называется *обратной* по отношению к квадратной матрице A, если при умножении этой матрицы на данную как справа, так и слева получается единичная матрица:

$$A^{-1} \cdot A = A \cdot A^{-1} = E. \tag{1.4}$$

Однако не каждая матрица имеет обратную. Условием существования A^{-1} является требование $|A| \neq 0$. Такая матрица называется *невырожденной*. В противном случае, когда $|A| = 0$, матрица называется *вырожденной*.

Теорема (необходимое и достаточное условие существования обратной матрицы). *Обратная матрица A^{-1} существует и единственна, когда исходная матрица невырожденная.*

Алгоритм вычисления обратной матрицы

1. Находим определитель исходной матрицы ($|A| \neq 0$).

2. Находим матрицу A^T, транспонированную к A.

3. Находим алгебраические дополнения элементов матрицы A^T и составляем из них матрицу $\tilde{A}$, которая называется союзной (присоединенной).

4. Вычисляем обратную матрицу по формуле

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \widetilde{A} = \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}.$$

5. Проверяем правильность вычисления обратной матрицы, исходя из определения (формула (1.4)).

Пример 1.2. Найти обратную матрицу A^{-1} для $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 0\\ 0 & 3 & 1\\ 0 & 1 & 2\end{pmatrix}$.

Решение. Вычислим определитель матрицы A:

$$\Delta=\det A=\begin{vmatrix}1 & 2 & 0\\ 0 & 3 & 1\\ 0 & 1 & 2\end{vmatrix}=1\cdot\begin{vmatrix}3 & 1\\ 1 & 2\end{vmatrix}=5\neq 0.$$

Вычислим алгебраические дополнения каждого элемента:

$$A_{11}=(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}3 & 1\\ 1 & 2\end{vmatrix}=5;\quad A_{12}=(-1)^{1+2}\begin{vmatrix}0 & 1\\ 0 & 2\end{vmatrix}=0;\quad A_{13}=(-1)^{1+3}\begin{vmatrix}0 & 1\\ 0 & 2\end{vmatrix}=0;$$

$$A_{21}=(-1)^{2+1}\begin{vmatrix}2 & 0\\ 1 & 2\end{vmatrix}=-4;\quad A_{22}=(-1)^{2+2}\begin{vmatrix}1 & 0\\ 0 & 2\end{vmatrix}=2;\quad A_{23}=(-1)^{2+3}\begin{vmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{vmatrix}=-1;$$

$$A_{31}=(-1)^{3+1}\begin{vmatrix}2 & 0\\ 3 & 1\end{vmatrix}=2;\quad A_{32}=(-1)^{3+2}\begin{vmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{vmatrix}=-1;\quad A_{33}=(-1)^{3+3}\begin{vmatrix}1 & 2\\ 0 & 3\end{vmatrix}=3.$$

Составляем матрицу алгебраических дополнений:

$$A^{V}=\begin{pmatrix}5 & 0 & 0\\ -4 & 2 & -1\\ 2 & -1 & 3\end{pmatrix}.$$

Транспонируем матрицу алгебраических дополнений:

$$\widetilde{A}=\begin{pmatrix}5 & -4 & 2\\ 0 & 2 & -1\\ 0 & -1 & 3\end{pmatrix}.$$

Вычисляем обратную матрицу:

$$A^{-1}=\frac{1}{5}\cdot\begin{pmatrix}5 & -4 & 2\\ 0 & 2 & -1\\ 0 & -1 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & -\frac{4}{5} & \frac{2}{5}\\ 0 & \frac{2}{5} & -\frac{1}{5}\\ 0 & -\frac{1}{5} & \frac{3}{5}\end{pmatrix}.$$

Проверка

$$A \cdot A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -\frac{4}{5} & \frac{2}{5} \\ 0 & \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \\ 0 & -\frac{1}{5} & \frac{3}{5} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = E \cdot$$

Для невырожденных матиц справедливы следующие свойства:

1) $\left|A^{-1}\right| = \frac{1}{|A|}$; 2) $(A^{-1})^{-1} = A$; 3) $(A^m)^{-1} = (A^{-1})^m$;

4) $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$; 5) $(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$; 6) $(\alpha A)^{-1} = \frac{1}{\alpha} A^{-1}$.

1.3. Ранг матрицы. Системы линейных уравнений

Для решения и исследования ряда математических и прикладных задач важное значение имеет понятие ранга матрицы.

В матрице A размера $m \times n$ вычеркиванием каких-либо строк или столбцов можно вычленить квадратные подматрицы k-го порядка, где $k \leq \min(m, n)$. Определители таких подматриц называются *минорами* k-го порядка матрицы A. Например, из матрицы $A_{3\times4}$ можно получить подматрицы первого, второго и третьего порядков.

Рангом матрицы A называется наивысший порядок отличных от нуля миноров этой матрицы.

Ранг матрицы обозначается $rangA$ или RgA.

Из определения следует:

а) ранг матрицы не превосходит меньшего из ее размеров, т. е. $\mathrm{RgA} \leq \min(m, n)$;

б) $RgA = 0$ тогда и только тогда, когда A – нулевая матрица;

в) для квадратной матрицы n-го порядка $RgA = n$, когда A – невырожденная матрица.

В общем случае определение ранга матрицы перебором всех миноров достаточно трудоемко. Для облегчения этой задачи используются преобразования, сохраняющие ранги матриц.

Элементарными преобразованиями матрицы назовем следующие:

1) отбрасывание нулевой строки;
2) умножение всех элементов строки (столбца) на число, не равное нулю;

3) перестановка строк (столбцов);
4) прибавление к каждому элементу одной строки (столбца) соответствующих элементов другой строки (столбца), умноженных на любое число;
5) транспонирование.

Теорема. *Ранг матрицы не изменится при ее элементарных преобразованиях.*

Две матрицы называются *эквивалентными*, если одна получается из другой с помощью конечного числа элементарных преобразований, т. е. они имеют одинаковые ранги.

С помощью элементарных преобразований можно привести матрицу к ступенчатому виду, тогда ранг исходной матрицы будет равен числу ненулевых строк ступенчатой матрицы.

Для рангов матриц справедливы следующие соотношения:

1) $Rg(A+B)=RgA+RgB$; 2) $Rg(A+B)\geq|RgA-RgB|$;
3) $Rg(AB)\leq\min\{RgA;\ RgB\}$; 4) $Rg(A^TA)=RgA$;
5) $Rg(A^T)=RgA$; 6) $Rg(AB)\geq RgA+RgB$.

Понятие ранга тесно связано с понятием линейной зависимости (независимости) ее строк или столбцов.

В матрице A ее строки обозначим следующим образом:

$$e_1=(a_{11}\ \ a_{12}\ldots a_{1n}),\ \ e_2=(a_{21}\ \ a_{22}\ldots a_{2n}),\ \ e_m=(a_{m1}\ \ a_{m2}\ldots a_{mn}).$$

Строка e_m называется *линейной комбинацией* строк e_1, e_2, ..., e_{m-1} матрицы, если она равна сумме произведений этих строк на произвольные действительные числа:

$$e_m=\alpha_1e_1+\alpha_2e_2+\ldots+\alpha_{m-1}e_{m-1}. \tag{1.5}$$

Строки матрицы называются линейно зависимыми, если существуют такие числа α_1, α_2, ..., α_m, не равные одновременно нулю, что линейная комбинация строк матрицы равна нулевой строке:

$$\alpha_1e_1+\alpha_2e_2+\ldots+\alpha_me_m=o, \tag{1.6}$$

где $o=(0\ 0\ \ldots\ 0)$.

Линейная зависимость строк матрицы означает, что хотя бы одна строка является линейной комбинацией остальных.

Действительно, пусть для определенности в формуле (1.6) $\alpha_m\neq 0$, тогда можно выразить строку e_m через остальные, т. е.

$$e_m = -\frac{\alpha_1}{\alpha_m} e_1 - \frac{\alpha_2}{\alpha_m} e_2 - \ldots - \frac{\alpha_{m-1}}{\alpha_m} e_{m-1} = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \ldots + \lambda_{m-1} e_{m-1}.$$

Если линейная комбинация (1.6) равна нулевой строке тогда и только тогда, когда все коэффициенты α_i равны нулю, то строки $e_1, e_2, \ldots, e_m$ называются *линейно независимыми*.

Теорема о ранге матрицы. *Ранг матрицы равен максимальному числу ее линейно независимых строк (столбцов), через которые линейно выражаются все остальные строки (столбцы).*

Согласно теореме о ранге, используя элементарные преобразования над строками (столбцами) матрицы и приведя ее к ступенчатому виду, определяют количество линейно независимых строк (столбцов) этой матрицы. Таким образом, ранг матрицы равен числу линейно независимых строк этой матрицы.

Системы линейных уравнений

Система m линейных уравнений с n переменными имеет вид:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m11}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases} \tag{1.7}$$

где a_{ij}, b_i ($i = 1, \ldots, m$; $j = 1, \ldots, n$) – произвольные действительные числа, называемые коэффициентами при переменных и свободными членами.

Решением системы (1.7) называется совокупность n таких чисел $x_1 = k_1$, $x_2 = k_2$, ..., $x_n = k_n$, при подстановке которых каждое уравнение системы обращается в верное равенство.

Система уравнений называется *совместной*, если она имеет хотя бы одно решение, в противном случае система называется *несовместной*.

Совместная система уравнений называется *определенной*, если она имеет единственное решение, и *неопределенной*, если она имеет более одного решения.

Две системы уравнений называются *равносильными* (*эквивалентными*), если они имеют одно и то же множество решений.

Запишем систему (1.7) в матричной форме. Обозначим:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}; \quad X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}; \quad B=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix},$$

где A – матрица коэффициентов при переменных (основная матрица системы), X – вектор-столбец переменных, B – вектор-столбец свободных членов.

Произведение матриц

$$A_{m\times n}\cdot X_{n\times 1}=\begin{pmatrix} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\dots+a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\dots+a_{2n}x_n \\ \dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\dots+a_{mn}x_n \end{pmatrix}$$

есть выражения в левых частях уравнений системы (1.7).

На основании определения равных матриц систему можно записать в *матричном виде*

$$AX=B. \tag{1.8}$$

Запишем систему (1.7) в векторной форме. Обозначим

$$A_1=\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \dots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, A_2=\begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \dots \\ a_{m2} \end{pmatrix}, \dots, A_n=\begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \dots \\ a_{mn} \end{pmatrix}, \quad B=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix},$$

где A_1, A_2, ..., A_n – векторы-столбцы при переменных x_1, x_2, ..., x_n; B – вектор-столбец свободных членов.

Тогда в векторной форме система (1.7) примет вид

$$A_1x_1+A_2x_2+\dots+A_nx_n=B\,, \text{ или } \sum_{j=1}^{n}A_jx_j=B\,.$$

Система *n* линейных уравнений с *n* переменными. Метод обратной матрицы и формулы Крамера

Пусть число уравнений системы (1.7) равно числу переменных, т. е. $m=n$. Тогда матрица A системы является квадратной, а ее определитель $\Delta=|A|$ называется определителем системы.

Для получения решения системы (1.7) в общем виде при $m = n$ предположим, что квадратная матрица $A_{n\times n}$ – невырожденная, т. е. $\Delta = |A| \neq 0$. В этом случае существует обратная к A матрица A^{-1}.

Запишем систему в матричном виде $AX = B$. Умножая слева обе части матричного равенства на матрицу A^{-1}, получим $A^{-1}(AX) = A^{-1}B$, или $(A^{-1}A)X = A^{-1}B$, или $EX = A^{-1}B$, или $X = A^{-1}B$. То есть решением системы будет матрица-столбец

$$X = A^{-1}B. \tag{1.9}$$

Теорема (теорема Крамера). *Пусть Δ – определитель матрицы A системы, а Δ_j – определитель матрицы, получаемой из матрицы A заменой j-го столбца столбцом B свободных членов. Тогда, если $\Delta \neq 0$, то система имеет единственное решение, определяемое по формулам:*

$$x_j = \frac{\Delta_j}{\Delta} \quad (j = 1,\ 2, \ldots, n). \tag{1.10}$$

Формулы (1.10) получили название *формул Крамера*.

1.4. Исследование систем линейных уравнений

Рассмотрим решение системы (1.7) m линейных уравнений с n переменными в общем виде.

Метод Гаусса – метод последовательного исключения переменных – заключается в том, что с помощью элементарных преобразований система уравнений приводится к равносильной системе ступенчатого вида, из которой последовательно, начиная с последних по номеру переменных, находятся все остальные переменные.

Предположим, что в системе (1.7) коэффициент $a_{11} \neq 0$.

Шаг 1. Умножая первое уравнение на подходящие числа $(-a_{21}/a_{11}, -a_{31}/a_{11}, \ldots, -a_{m1}/a_{11})$ и прибавляя ко второму, третьему, ..., последнему уравнению, исключаем переменную x_1 из всех уравнений, начиная со второго. В результате получим систему:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ \qquad\qquad a_{22}^1 x_2 + \ldots + a_{2n}^1 x_n = b_2^1, \\ \ldots \\ \qquad\qquad a_{m2}^1 x_2 + \ldots + a_{mn}^1 x_n = b_m^1. \end{cases} \tag{1.11}$$

Шаг 2. Предположим, что в полученной системе $a_{22}^1 \neq 0$. Умножая второе уравнение системы (1.11) на подходящие числа $(-a_{32}^1/a_{22}^1,\ -a_{42}^1/a_{22}^1,\ \ldots,\ -a_{m2}^1/a_{22}^1)$ и прибавляя к третьему, четвертому, ..., последнему уравнению, исключим переменную x_2 из всех последующих уравнений, начиная с третьего.

Продолжая процесс последовательного исключения переменных, после $(r-1)$-го шага получим систему

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1r}x_r + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ \qquad a_{22}^1 x_2 + \ldots + a_{2r}^1 x_r + \ldots + a_{2n}^1 x_n = b_2^1, \\ \ldots \\ \qquad\qquad a_{rr}^{r-1} x_r + \ldots + a_{rn}^{r-1} x_n = b_r^{r-1}, \\ \qquad\qquad\qquad 0 = b_{r+1}^{r-1}, \\ \ldots \\ \qquad\qquad\qquad 0 = b_m^{r-1}. \end{cases} \tag{1.12}$$

Число ноль в последних $(m - r)$ уравнениях означает, что их левые части имеют вид: $0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + \ldots + 0 \cdot x_n$. Если хотя бы одно из чисел b_{r+1}^{r-1}, ..., b_m^{r-1} не равно нулю, то соответствующее равенство противоречиво и система (1.12) несовместна.

Таким образом, для любой совместной системы числа b_{r+1}^{r-1}, ..., b_m^{r-1} равны нулю. В этом случае последние $(m - r)$ уравнений являются тождествами $(0 = 0)$ и их можно отбросить. После отбрасывания возможны два случая:

а) число уравнений системы (1.12) равно числу переменных, т. е. $r = n$ (в этом случае система имеет треугольный вид);

б) число уравнений меньше числа переменных, т. е. $r < n$ (в этом случае система имеет ступенчатый вид).

Переход от системы (1.7) к системе (1.12) называется *прямым ходом* метода Гаусса, а нахождение переменных из системы (1.12) – *обратным ходом*.

Преобразования Гаусса удобно проводить не с самими уравнениями, а с матрицей их коэффициентов. Рассмотрим матрицу

$$
(A\,|\,B)=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}, \qquad (1.13)
$$

называемую *расширенной матрицей* системы (1.7).

Пример 1.3. Решить систему уравнений

$$
\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 6, \\ 2x_1 + 4x_2 - 2x_3 - 3x_4 = 18, \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 = 4, \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 + x_4 = -8. \end{cases}
$$

Решение. Выпишем расширенную матрицу системы и приведем ее к ступенчатому виду:

$$
\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -2 & 6 \\ 2 & 4 & -2 & -3 & 18 \\ 3 & 2 & -1 & 2 & 4 \\ 2 & -3 & 2 & 1 & -8 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -2 & 6 \\ 0 & 0 & -8 & 1 & 6 \\ 0 & -4 & -10 & 8 & -14 \\ 0 & -7 & -4 & 5 & 20 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -2 & 6 \\ 0 & -4 & -10 & 8 & -14 \\ 0 & 0 & -8 & 1 & 6 \\ 0 & -7 & -4 & 5 & -20 \end{pmatrix}
$$

$$
\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -2 & 6 \\ 0 & -4 & -10 & 8 & -14 \\ 0 & 0 & -8 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 27/2 & -9 & 9/2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -2 & 6 \\ 0 & -4 & -10 & 8 & -14 \\ 0 & 0 & -8 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & -117/16 & 117/8 \end{pmatrix}.
$$

Теперь для полученной ступенчатой матрицы запишем соответствующую систему уравнений:

$$
\begin{cases} x_1 + 2x_2 + \ 3x_3 - 2x_4 = 6, \\ \quad -4x_2 - 10x_3 + 8x_4 = -14, \\ \qquad\qquad -8x_3 + x_4 = 6, \\ \qquad\qquad\quad -\dfrac{117}{16}x_4 = \dfrac{117}{8}. \end{cases}
$$

Используя обратный ход метода Гаусса, найдем из четвертого уравнения

$$
x_4 = -2,
$$

из третьего

$$
x_3 = \frac{6 - x_4}{-8} = \frac{6+2}{-8} = -1,
$$

из второго

$$x_2 = \frac{-14 - 8x_4 + 10x_3}{-4} = \frac{-14 + 16 - 10}{-4} = 2,$$

из первого

$$x_1 = 6 + 2x_4 - 3x_3 - 2x_2 = 6 - 4 + 3 - 4 = 1 \cdot$$

То есть решение системы –

$$X = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Исследование систем линейных уравнений

Ранее было показано, что ранг матрицы равен максимальному числу ее линейно независимых строк, поэтому если строки расширенной матрицы $(A|B)$, т. е. уравнения системы (1.7), линейно независимы, то ранг матрицы $(A|B)$ равен числу уравнений, т. е. $r = m$. Если уравнения линейно зависимы, то $r < m$.

Теорема (Кронекера – Капели). *Система линейных уравнений совместна тогда и только тогда, когда ранг матрицы А системы равен рангу расширенной матрицы $(A|B)$ этой системы.*

Следствия

1. Если ранг матрицы совместной системы равен числу переменных, т. е. $r = n$, то система (1.7) имеет единственное решение.

2. Если ранг матрицы совместной системы меньше числа переменных, т. е. $r < n$, то система (1.7) неопределенная и имеет бесконечное множество решений.

Пусть $r < n$, r переменных x_1, x_2, ..., x_r называются *основными* (базисными), если определитель матрицы из коэффициентов при них отличен от нуля. Остальные $(n - r)$ переменных называются *неосновными* (свободными).

Решение системы (1.7), в котором все $(n - r)$ неосновных переменных равны нулю, называется *базисным*.

Метод Гаусса по сравнению с другими методами имеет следующие достоинства:

- значительно менее трудоемкий;
- позволяет однозначно установить, совместна система или нет, а в случае совместности – найти ее решение;

- дает возможность найти максимальное число линейно независимых уравнений – ранг матрицы системы.

Пример 1.4. С помощью метода Гаусса решить систему

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 5, \\ x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 3x_4 = -6, \\ 3x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = -1. \end{cases}$$

Решение. Приведем расширенную матрицу системы к ступенчатому виду:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & -1 & 5 \\ 1 & 2 & -2 & 3 & -6 \\ 3 & 1 & -1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 3 & -6 \\ 0 & -5 & 5 & -7 & 17 \\ 0 & -5 & 5 & -7 & 17 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 3 & -6 \\ 0 & -5 & 5 & -7 & 17 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ранг матрицы системы равен 2.

Записываем для ступенчатой матрицы соответствующую систему и найдем решение. Переменные x_1, x_2 – базисные, так как минор из коэффициентов при них $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -5 \end{vmatrix} \neq 0$. Переносим неосновные переменные в правые части уравнений и выражаем основные переменные:

$$x_2 = \frac{17}{5} + x_3 - \frac{7}{5}x_4;$$

$$x_1 = -6 + 2x_3 - 3x_4 - 2\left(-\frac{17}{5} + x_3 - \frac{7}{5}x_4\right) = \frac{4}{5} - \frac{1}{5}x_4.$$

Задавая неосновным переменным произвольные значения $x_3 = c_1$, $x_4 = c_2$, находим общее решение системы:

$$\begin{pmatrix} 4/5 - 1/5c_2 \\ -17/5 + c_1 - 7/5c_2 \\ c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}.$$

1.5. Системы линейных однородных уравнений. Фундаментальная система решений

Система m линейных уравнений с n переменными называется системой линейных однородных уравнений, если все их свободные члены равны нулю. Такая система имеет вид

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = 0. \end{cases} \tag{1.14}$$

Система (1.14) всегда совместна, так как она всегда имеет, по крайней мере, нулевое (тривиальное) решение (0, 0, ..., 0).

Если в системе (1.14) $m = n$, а ее определитель отличен от нуля, то такая система имеет только нулевое решение (это следует из формул Крамера). Ненулевые решения возможны лишь для таких систем, в которых число уравнений меньше числа переменных или при их равенстве определитель системы равен нулю.

Таким образом, система линейных однородных уравнений имеет ненулевое решение, когда ранг матрицы A системы меньше числа переменных.

Обозначим решение системы (1.14) $x_1 = k_1$, $x_2 = k_2$, ..., $x_n = k_n$ в виде строки $e_1 = (k_1, k_2, \ldots, k_n)$.

Решения системы (1.14) обладают следующими свойствами:

1) если строка $e_1 = (k_1, k_2, \ldots, k_n)$ – решение системы, то и строка $\lambda e_1 = (\lambda k_1, \lambda k_2, \ldots, \lambda k_n)$ – также решение этой системы;
2) если строки $e_1 = (k_1, k_2, \ldots, k_n)$ и $e_2 = (l_1, l_2, \ldots, l_n)$ – решения системы, то для любых λ и μ их линейная комбинация $\lambda e_1 + \mu e_2 = (\lambda k_1 + \mu l_1, \lambda k_2 + \mu l_2, \ldots, \lambda k_n + \mu l_n)$ – также решение этой системы.

Определение. Система линейно независимых решений $e_1, e_2, \ldots, e_k$ называется *фундаментальной*, если каждое решение системы (1.14) является линейной комбинацией решений $e_1, e_2, \ldots, e_k$.

Если ранг r матрицы коэффициентов системы (1.14) меньше числа переменных n, то всякая фундаментальная система решений системы (1.14) состоит из $(n - r)$ решений.

Пример 1.5. Найти фундаментальную систему решений для системы

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0, \\ x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 0, \\ 3x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = 0. \end{cases}$$

Решение. Аналогично примеру 1.4 выражаем основные переменные x_1, x_2 через неосновные x_3, x_4:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 0 + 2x_3 - 3x_4 \\ \quad -5x_2 = 0 - 5x_3 + 7x_4 \end{cases} \Rightarrow \left| \begin{array}{l} x_2 = x_3 - 7/5x_4 \\ x_1 = -1/5x_4 \end{array} \right. .$$

Для нахождения фундаментальной системы решений заменяем поочередно неосновные переменные x_3, x_4 элементами строк единичной матрицы $E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

При $x_3 = 1$, $x_4 = 0$ получим $x_2 = 1$, $x_1 = 0$, т. е. $e_1 = (0;1;1;0)$. При $x_3 = 0$, $x_4 = 1$ получаем $x_2 = 7/5$, $x_1 = -1/5$, т. е. $e_2 = (-1/5;-7/5;0;1)$.

Итак, фундаментальную систему решений образуют строки

$$e_1 = (0;1;1;0), \quad e_2 = (-1/5;-7/5;0;1).$$

Теорема. *Общее решение системы (1.7) m линейных уравнений с n переменными равно сумме общего решения соответствующей ей системы однородных уравнений (1.14) и произвольного частного решения системы (1.7):*

$$X = X^0 + c_1 e_1 + c_2 e_2 + ... + c_n e_n,$$

где X и X^0 – соответственно общее и частное решения системы (1.7), e_1, e_2, .., e_n – фундаментальная система решений (1.14).

Пример 1.6. По данным примеров 1.4 и 1.5 убедиться в справедливости теоремы.

Решение. В примере 1.4 было получено общее решение

$$X = \begin{pmatrix} 4/5 - 1/5c_2 \\ -17/5 + c_1 - 7/5c_2 \\ c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}.$$

Найдем произвольное частное решение, например, при $c_1 = 0$, $c_2 = 0$, т. е.

$$X^0 = \begin{pmatrix} 4/5 \\ -17/5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

В примере 1.5 была получена фундаментальная система решений соответствующей однородной системы $e_1 = (0;1;1;0)$, $e_2 = (-1/5;-7/5;0;1)$.

Таким образом,

$$\begin{pmatrix} 4/5 - 1/5c_2 \\ -17/5 + c_1 - 7/5c_2 \\ c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4/5 \\ -17/5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_1\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix} -1/5 \\ -7/5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

2. ЭЛЕМЕНТЫ ВЕКТОРНОЙ АЛГЕБРЫ. ЛИНЕЙНЫЕ ПРОСТРАНСТВА

2.1. Понятие вектора. Линейные операции над векторами

Понятие вектора. При изучении разделов физики, механики и технических наук встречаются величины, которые полностью определяются заданием их числовых значений. Такие величины называются скалярными. Скалярными величинами, например, являются длина, площадь, объем, масса, температура тела и др. Помимо скалярных величин, в различных задачах встречаются величины, для определения которых, кроме числового значения, необходимо знать также их направление. Такие величины называются векторными. Физическими примерами векторных величин могут служить смещение материальной точки, двигающейся в пространстве, скорость и ускорение этой точки, а также действующая на нее сила.

Векторные величины изображаются с помощью векторов.

Вектором называется направленный отрезок (рис. 1).

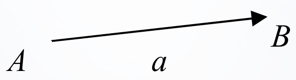


Рис. 1

На рис. 1 A – начало вектора, B – конец вектора, обозначается $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$. Начало вектора называют *точкой его приложения*.

Длина вектора $\overrightarrow{AB}$ называется его *модулем* и обозначается $|\overrightarrow{AB}| = |\vec{a}|$.

Вектор $\vec{a}$, для которого $|\vec{a}| = 1$, называется *единичным*.

Вектор называется *нулевым* (обозначается $\vec{0}$), если начало и конец его совпадают. Нулевой вектор не имеет определенного направления и имеет длину, равную нулю.

Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$, расположенные на одной прямой или на параллельных прямых, называются *коллинеарными*.

Два вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называются *равными*, если они коллинеарны, имеют одинаковые модели и одинаковое направление. В этом случае пишут $\vec{a}=\vec{b}$.

Из определения равенства векторов следует, что вектор можно переносить параллельно самому себе, помещая его начало в любую точку пространства. Такой вектор называется *свободным*.

Пример 2.1. Рассмотрим квадрат $ABCD$ (рис. 2). На основании определения равенства векторов можем написать $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$, но $\overrightarrow{AD}\neq\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{BC}\neq\overrightarrow{DC}$, хотя $|\overrightarrow{AB}|=|\overrightarrow{AD}|=|\overrightarrow{BC}|=|\overrightarrow{DC}|$.

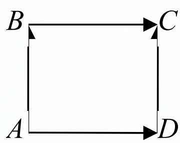


Рис. 2

Два коллинеарных вектора, имеющие равные модули, но противоположно направленные, называются *противоположными*.

Вектор, противоположный вектору $\vec{a}$, обозначается $-\vec{a}$. Для вектора $\overrightarrow{AB}$ противоположным будет вектор $\overrightarrow{BA}$.

Линейные операции над векторами. Линейными операциями являются операции сложения, вычитания векторов и умножения вектора на число.

Определение. Пусть $\vec{a}$ и $\vec{b}$ – два свободных вектора. Возьмем точку O и построим вектор $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$, затем от точки A отложим вектор $\overrightarrow{AB}=\vec{b}$. Вектор $\overrightarrow{OB}$, соединяющий начало первого с концом второго вектора, называется *суммой* этих векторов и обозначается $\vec{a}+\vec{b}$ (правило треугольника).

Ту же самую сумму можно получить иным способом (правило параллелограмма) (рис. 3).

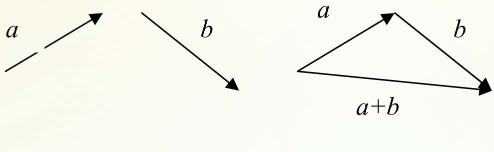


Рис. 3

Сумма двух векторов обладает переместительным свойством: $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$.

Понятие суммы векторов можно обобщить на случай любого конечного числа слагаемых векторов.

Например, даны три вектора $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$. Построив сначала сумму векторов $\vec{a}+\vec{b}$, а затем, прибавив к этой сумме вектор $\vec{c}$, получим вектор $(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}$.

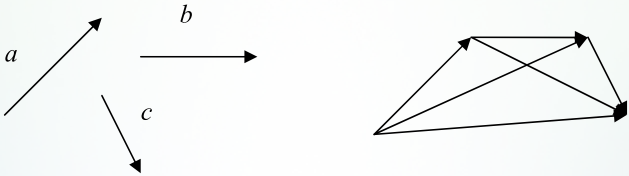


Рис. 4

Итак, сумму трех (и более) векторов можно получить следующим образом. Из произвольной точки *O* откладывается вектор, равный первому слагаемому, к концу первого вектора присоединяется начало второго, к концу второго – начало третьего вектора. Вектор, соединяющий начало первого вектора с концом последнего, является суммой данных векторов.

Сумма векторов обладает сочетательным свойством:

$$(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c}).$$

Определение. *Разностью* двух векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется третий вектор $\vec{c}=\vec{a}-\vec{b}$, сумма которого с вектором $\vec{b}$ дает вектор $\vec{a}$. Таким образом, если $\vec{c}=\vec{a}-\vec{b}$, то $\vec{c}+\vec{b}=\vec{a}$.

Из определения суммы двух векторов вытекает правило построения вектора разности.

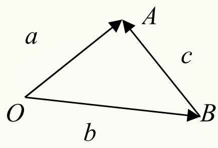


Рис. 5

Определение. *Произведением* $\lambda\vec{a}$ вектора $\vec{a}$ на действительное число λ называется вектор $\vec{b}$, коллинеарный вектору $\vec{a}$, имеющий длину $|\lambda||\vec{a}|$ и то же направление, что и вектор $\vec{a}$, если $\lambda > 0$, и направление, противоположное направлению вектора $\vec{a}$, если $\lambda < 0$. Так, например, вектор $2\vec{a}$ есть вектор, имеющий то же направление, что и вектор $\vec{a}$, а длину вдвое больше, чем вектор $\vec{a}$. В случае когда $\lambda = 0$ или $\vec{a} = \vec{0}$, произведение $\lambda\vec{a}$ есть нулевой вектор. Противоположный вектор можно рассматривать как произведение $(-1)\vec{a}$. Очевидно, что $\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}$.

Рассмотрим единичный вектор $\vec{a}_0$, коллинеарный вектору $\vec{a}$ и одинаково с ним направленный. Из определения умножения вектора на число следует, что

$$\vec{a} = |\vec{a}|\vec{a}_0, \text{ или } \vec{a}_0 = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}.$$

Из определения операции умножения вектора на число следует, что если $\vec{b} = \lambda\vec{a}$, то векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарные, очевидно и обратное, из коллинеарности векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ следует, что $\vec{b} = \lambda\vec{a}$.

Данная линейная операция обладает следующими свойствами:

$$\lambda\left(\vec{a} + \vec{b}\right) = \lambda\vec{a} + \lambda\vec{b},$$
$$(\lambda_1 + \lambda_2)\vec{a} = \lambda_1\vec{a} + \lambda_2\vec{a},$$
$$\lambda_1(\lambda_2\vec{a}) = (\lambda_1\lambda_2)\vec{a}.$$

Понятие линейной зависимости векторов. Векторы $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$, ..., $\vec{a}_n$ называются линейно зависимыми, если существуют числа λ_1, λ_2, ..., λ_n, одновременно не равные нулю, для которых имеет место равенство

$$\lambda_1\vec{a}_1 + \lambda_2\vec{a}_2 + \ldots + \lambda_n\vec{a}_n = \vec{0}. \qquad (2.1)$$

Векторы $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$, ..., $\vec{a}_n$ называются линейно независимыми, если равенство (2.1) имеет место только при $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_n = 0$.

Из линейной зависимости векторов вытекает, что хотя бы один из них можно представить в виде линейной комбинации остальных. Например, пусть в равенстве (2.1) $\lambda_1 \neq 0$, тогда получим

$$\vec{a}_1 = -\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\vec{a}_2 - \frac{\lambda_3}{\lambda_1}\vec{a}_3 - \ldots - \frac{\lambda_n}{\lambda_1}\vec{a}_n .$$

Полагая $-\frac{\lambda_2}{\lambda_1} = \mu_2, -\frac{\lambda_3}{\lambda_1} = \mu_3, \ldots, -\frac{\lambda_n}{\lambda_1} = \mu_n$, имеем

$$\vec{a}_1 = \mu_2\vec{a}_2 + \mu_3\vec{a}_3 + \ldots + \mu_n\vec{a}_n .$$

Линейная зависимость векторов на плоскости

Теорема. *Всякие три вектора на плоскости линейно зависимы.*

Следствие. Если число данных векторов на плоскости больше трех, то они также линейно зависимы.

Что касается двух векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, то они коллинеарные тогда и только тогда, когда имеет место равенство $\vec{b} = \lambda\vec{a}$, т. е. когда они линейно зависимы.

Отсюда вытекает следующая теорема.

Теорема. *Для того чтобы два вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ на плоскости были линейно независимы, необходимо и достаточно, чтобы они были неколлинеарными.*

Из теорем следует, что максимальное число линейно независимых векторов на плоскости равно двум.

Линейная зависимость векторов в пространстве

Определение. Векторы называются *компланарными*, если они лежат в одной плоскости или параллельных плоскостях.

Если компланарные векторы имеют общее начало, то они, очевидно, лежат в одной плоскости.

Теорема. *Всякие четыре вектора $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ и $\vec{d}$ в пространстве линейно зависимы.*

Следствия

1. Если число данных векторов в пространстве больше четырех, то они также линейно зависимы.

2. Для того чтобы три вектора в пространстве были компланарны, необходимо и достаточно, чтобы они были линейно зависимы.

Теорема. *Для того чтобы три вектора* $\vec{a}, \vec{b}$ *и* $\vec{c}$ *в пространстве были линейно независимы, необходимо и достаточно, чтобы они были некомпланарны.*

Из теорем следует, что максимальное число линейно независимых векторов в пространстве равно трем.

Базис на плоскости и в пространстве

Определение. *Базисом на плоскости* называются два любых линейно независимых вектора.

Два любых неколлинеарных вектора образуют базис. Пусть $\vec{a}$ – любой вектор на плоскости, а векторы $\vec{b}$ и $\vec{c}$ образуют базис. Так как на плоскости всякие три вектора линейно зависимы, то вектор $\vec{a}$ линейно выражается через векторы базиса, т. е. выполняется соотношение $\vec{a} = \lambda_1\vec{b} + \lambda_2\vec{c}$.

Говорят, что вектор $\vec{a}$ разложен по базису, образованному векторами $\vec{b}$ и $\vec{c}$. Числа λ_1 и λ_2 называются *координатами* вектора $\vec{a}$ на плоскости относительно базиса $\vec{b}$ и $\vec{c}$.

Теорема. *Разложение вектора* $\vec{a}$ *по базису* $\vec{b}$ *и* $\vec{c}$ *является единственным.*

Определение. *Базисом в пространстве* называются три любых линейно независимых вектора.

Из теоремы следует, что три любых некомпланарных вектора образуют базис. Как и в случае плоскости, устанавливается, что любой вектор $\vec{a}$ разлагается по векторам $\vec{b}$, $\vec{c}$ и $\vec{d}$ базиса, т. е.

$$\vec{a} = \lambda_1\vec{b} + \lambda_2\vec{c} + \lambda_3\vec{d},$$

причем это разложение единственное.

Числа λ_1, λ_2 и λ_3 называются *координатами* вектора $\vec{a}$ в пространстве относительно базиса $\vec{b}$, $\vec{c}$ и $\vec{d}$.

Основное значение базиса состоит в том, что линейные операции над векторами при задании базиса становятся обычными линейными операциями над числами – координатами этих векторов.

Теорема. *При сложении двух векторов $\vec{a}_1$ и $\vec{a}_2$ их координаты относительно любого базиса складываются. При умножении вектора $\vec{a}_1$ на любое число α все его координаты умножаются на это число.*

Проекция вектора на ось. Координаты вектора

Определение. *Углом* между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется наименьший угол $\varphi (0 \le \varphi \le \pi)$, на который надо повернуть один из векторов до его совпадения со вторым после приведения этих векторов к общему началу.

Осью называется направленная прямая. Заданное направление оси считается положительным, противоположное – отрицательным.

Рассмотрим ось l, положительное направление которой совпадает с направлением единичного вектора $\vec{l}_0$, расположенного на оси l. Такой вектор называется *ортом* оси l.

Определение. *Углом* между вектором $\vec{a}$ и осью l называется угол φ между векторами $\vec{a}$ и $\vec{l}_0$.

Определение. *Компонентой* (составляющей) вектора $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ на ось l называется вектор $\vec{a}' = \overrightarrow{A_1B_1}$, где A_1 и B_1 – соответственно проекции точек A, B на l (рис. 6).

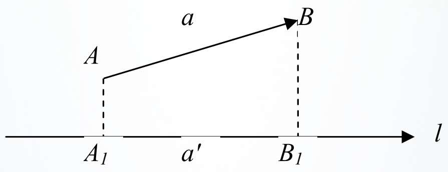


Рис. 6

Определение. Проекцией вектора $\vec{a}$ на ось l ($пр_l\vec{a}$) называется длина его компоненты $\vec{a}'$ на оси l, взятая со знаком «+», если направление компоненты совпадает с направлением оси l, и со знаком «–», если направление компоненты противоположно направлению оси l.

Если $\vec{a} = \vec{0}$, то полагают $пр_l\vec{a} = 0$.

Теорема. *Проекция вектора $\vec{a}$ на ось l равна произведению его модуля на косинус угла φ между этим вектором и осью l.*

$$np_l\vec{a} = |\vec{a}|\cos\varphi.$$

Следствия

1. Проекция вектора на ось положительна, если вектор образует с осью острый угол, отрицательна, если этот угол тупой, равна нулю, если этот угол прямой.

2. Проекции равных векторов на одну и ту же ось равны между собой.

Проекции векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ на данную ось обладают следующими свойствами:

$$np_l\left(\vec{a}+\vec{b}\right) = np_l\vec{a} + np_l\vec{b}; \qquad np_l\left(\lambda\vec{a}\right) = \lambda np_l\vec{a}.$$

Декартова прямоугольная система координат в пространстве

Три взаимно перпендикулярные оси в пространстве (координатные оси) с общим началом O и одинаковой масштабной единицей образуют декартову прямоугольную систему координат в пространстве. Оси упорядочены, т. е. указано, какая ось считается первой (ось абсцисс – OX), какая – второй (ось ординат – OY), какая третьей (ось аппликат – OZ).

Различают *правую* и *левую* системы прямоугольных координат (рис. 7). Основной является правая система.

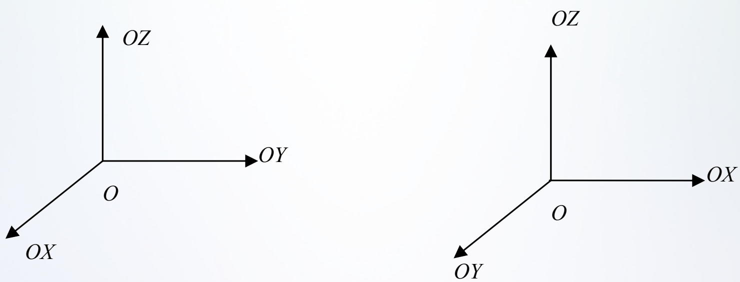


Рис. 7

Орты осей OX, OY, OZ обозначаются соответственно через $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$. Так как $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ некомпланарны, то они образуют базис, который называется *декартовым прямоугольным базисом*.

Согласно определению базиса каждый вектор $\vec{a}$ может быть единственным способом разложен по декартову прямоугольному базису $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$, т. е. для каждого вектора найдется единственная тройка чисел a_x, a_y, a_z, такая, что справедливо равенство

$$\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k} . \qquad (2.2)$$

Числа a_x, a_y, a_z называются *прямоугольными координатами* вектора $\vec{a}$.

Запись $\vec{a} = \{a_x, a_y, a_z\}$ означает, что вектор $\vec{a}$ имеет декартовы прямоугольные координаты a_x, a_y, a_z.

Выясним геометрический смысл чисел a_x, a_y, a_z. Используя теорему о проекциях и их свойствах, имеем:

$$np_{OX}\vec{a} = a_x np_{OX}\vec{i} + a_y np_{OX}\vec{j} + a_z np_{OX}\vec{k} = a_x .$$

Аналогично устанавливаем $np_{OY}\vec{a} = a_y$, $np_{OZ}\vec{a} = a_z$. Следовательно, числа a_x, a_y, a_z являются проекциями вектора $\vec{a}$ на координатные оси *OX*, *OY, OZ* соответственно.

Если *M* – произвольная точка в пространстве, то радиус-вектором точки *M* называется вектор $\overrightarrow{OM}$ с началом в точке *O* – начале заданной системы координат – и концом в точке *M*.

Определение. *Декартовыми прямоугольными координатами* точки *M* называются проекции ее радиус-вектора $\overrightarrow{OM}$ на соответствующие координатные оси; проекция на ось *OX* называется *абсциссой* точки *M*, на ось *OY* – *ординатой* точки *M*, на ось *OZ* – *аппликатой* точки *M*. То есть $M(x, y, z)$ означает, что точка *M* имеет координаты *x, y, z*:

$$x = np_{OX}\overrightarrow{OM}, \quad y = np_{OY}\overrightarrow{OM}, \quad z = np_{OZ}\overrightarrow{OM} .$$

Пусть задана точка $M(x, y, z)$. Поскольку координаты радиус-вектора $\overrightarrow{OM}$ совпадают с проекциями этого вектора на оси координат, т. е. с координатами точки *M*, то согласно равенству (2.2) имеем:

$$\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} .$$

Пусть теперь заданы две точки $M(x_1, y_1, z_1)$ и $M(x_2, y_2, z_2)$. Рассмотрим вектор $\overrightarrow{M_1M_2}$.

Имеем $\overrightarrow{M_1M_2} = \overrightarrow{OM_2} - \overrightarrow{OM_1}$ (рис. 8). Отсюда получаем:

$$\overrightarrow{M_1M_2} = \{x_2 - x_1;\ y_2 - y_1;\ z_2 - z_1\}.$$

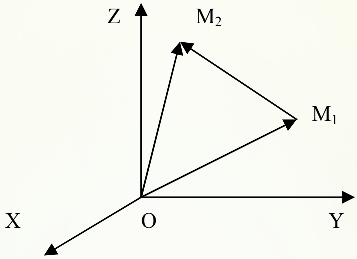


Рис. 8

Итак, чтобы найти координаты вектора, достаточно из координат конца вычесть соответствующие координаты его начала.

Пусть даны два ненулевых коллинеарных вектора

$$\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k} \quad \text{и} \quad \vec{b} = b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k}\ .$$

В силу их коллинеарности имеем: $\vec{b} = \lambda\vec{a}$, т. е.

$$b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k} = \lambda\left(a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}\right).$$

Согласно свойствам операций сложения векторов и умножения вектора на число получим:

$$b_x = \lambda a_x,\ b_y = \lambda a_y,\ b_z = \lambda a_z;$$

$$\frac{a_x}{b_x} = \frac{a_y}{b_y} = \frac{a_z}{b_z}. \tag{2.3}$$

Примечание. В равенстве (2.3) некоторые из знаменателей могут оказаться равными нулю. Так как всякая пропорция $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ преобразуется в равенство $ad = bc$, то равенства $\frac{a_x}{0} = \frac{a_y}{0} = \frac{a_z}{2}$ означают, что $2a_x = 0 \cdot a_z,\ 2a_x = 0 \cdot a_y,\ 0 \cdot a_x = 0 \cdot a_y$, то есть $a_x = 0,\ a_y = 0$.

Задача. Пусть даны точки $M(x_1, y_1, z_1)$ и $M(x_2, y_2, z_2)$. Требуется найти точку $M(x, y, z)$, лежащую на отрезке M_1M_2 и делящую его в данном отношении:

$$\frac{M_1M}{MM_2} = \lambda.$$

Зададим векторы

$$\overrightarrow{M_1M} = (x - x_1)\vec{i} + (y - y_1)\vec{j} + (z - z_1)\vec{k} \ \text{ и}$$

$$\overrightarrow{MM_2} = (x_2 - x)\vec{i} + (y_2 - y)\vec{j} + (z_2 - z)\vec{k}\ .$$

Тогда из заданного соотношения получим: $\overrightarrow{M_1M} = \lambda\overrightarrow{MM_2}$ или

$$(x - x_1)\vec{i} + (y - y_1)\vec{j} + (z - z_1)\vec{k} = \lambda(x_2 - x)\vec{i} + \lambda(y_2 - y)\vec{j} + \lambda(z_2 - z)\vec{k}.$$

Отсюда $x - x_1 = \lambda(x_2 - x)$, $y - y_1 = \lambda(y_2 - y)$, $x - z_1 = \lambda(z_2 - z)$, выражая x, y, z, получим

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda},\ y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1+\lambda},\ z = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1+\lambda}.$$

2.2. Скалярное, векторное и смешанное произведения векторов

Скалярное произведение двух векторов и его свойства

Определение. *Скалярным произведением* двух векторов называется число, равное произведению модулей этих векторов на косинус угла между ними.

Обозначается $\vec{a} \cdot \vec{b}$ или $(\vec{a}, \vec{b})$. Если угол между векторами равен φ, то

$$(\vec{a},\vec{b}) = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\varphi. \tag{2.4}$$

Обозначим проекцию вектора $\vec{b}$ на ось с направлением вектора $\vec{a}$ через $np_{\vec{a}}\vec{b}$.

Так как $|\vec{b}|\cos\varphi = np_{\vec{a}}\vec{b}$ и $|\vec{a}|\cos\varphi = np_{\vec{b}}\vec{a}$, формулу (2.4) можно записать в виде

$$(\vec{a},\vec{b}) = |\vec{a}|np_{\vec{a}}\vec{b} = |\vec{b}|np_{\vec{b}}\vec{a}. \tag{2.5}$$

Физический смысл скалярного произведения. Пусть постоянная сила $\vec{F}$ обеспечивает прямолинейное перемещение $\vec{s} = \overline{MN}$ материальной точки M. Если сила $\vec{F}$ образует угол φ с перемещением $\vec{s}$, то, как известно из курса физики, работа A силы $\vec{F}$ при перемещении $\vec{s}$ равна $A = |\vec{F}||\vec{s}|\cos\varphi$ или согласно формуле (2.4) $A = \vec{F} \cdot \vec{s}$.

Таким образом, *работа постоянной силы при прямолинейном перемещении ее точки приложения равна скалярному произведению вектора силы на вектор перемещения*.

Скалярное произведение обладает следующими свойствами:

1) $(\vec{a},\vec{b}) = (\vec{b},\vec{a})$;

2) $\vec{a}^2 = (\vec{a},\vec{a}) = |\vec{a}|^2$ ($\vec{a}^2$ называется скалярным квадратом вектора);

3) $(\vec{a}+\vec{b})\vec{c} = \vec{a}\vec{c} + \vec{b}\vec{c}$;

4) $(\lambda\vec{a})\vec{b} = \lambda(\vec{a}\vec{b})$.

Из равенства (2.4) следует, что косинус угла между двумя ненулевыми векторами равен

$$\cos\varphi = \frac{(\vec{a},\vec{b})}{|\vec{a}||\vec{b}|}. \qquad (2.6)$$

Из формулы (2.6) получаем, что два вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ перпендикулярны (ортогональны), т. е. $\varphi = \frac{\pi}{2}$ тогда и только тогда, когда

$$(\vec{a},\vec{b}) = 0. \qquad (2.7)$$

Скалярное произведение векторов в координатной форме

Пусть даны векторы $\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$, $\vec{b} = b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k}$. Перемножим эти векторы как многочлены. Учитывая свойство 2 и равенство (2.7) получим:

$$\vec{i}\vec{j} = \vec{j}\vec{k} = \vec{i}\vec{k} = 0, \quad \vec{i}\vec{i} = \vec{j}\vec{j} = \vec{k}\vec{k} = 1.$$

Тогда для $\vec{a}$ и $\vec{b}$ скалярное произведение равно:

$$(\vec{a},\vec{b}) = a_xb_x + a_yb_y + a_zb_z. \qquad (2.8)$$

Таким образом, скалярное произведение векторов равно сумме произведений их соответствующих координат.

Пример 2.2. Если $\vec{a} = \vec{i} + 3\vec{j} - \vec{k}$, $\vec{b} = \vec{i} + 4\vec{k}$,

то $$(\vec{a},\vec{b}) = 1\cdot 1 + 3\cdot 0 + (-1)\cdot 4 = -3.$$

Из равенства (2.8) с учетом свойства 2 скалярного произведения имеем:

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_xa_x + a_ya_y + a_za_z} = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \qquad (2.9)$$

Тогда с учетом формул (2.6) и (2.9) получим:

$$\cos\varphi = \frac{a_xb_x + a_yb_y + a_zb_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}\sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}}. \qquad (2.10)$$

Задача. Найти раЕстояние между точками $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и $M_2(x_2, y_2, z_2)$.

Так как $\overrightarrow{M_1M_2} = (x_2 - x_1)\vec{i} + (y_2 - y_1)\vec{j} + (z_2 - z_1)\vec{k}$, то согласно формуле (2.9) получим:

$$M_1M_2 = \left|\overrightarrow{M_1M_2}\right| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

Рассматривая векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ в координатной форме и учитывая равенство (2.7), условие ортогональности двух векторов можно записать в виде

$$a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = 0. \tag{2.11}$$

Направляющие косинусы вектора

Пусть дан вектор $\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$. Обозначим углы наклона этого вектора к осям *OX, OY, OZ* соответственно α, β, и γ. Три числа $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ принято называть направляющими косинусами вектора $\vec{a}$. Так как $\vec{i} = \{1;0;0\}$, $\vec{j} = \{0;1;0\}$, $\vec{k} = \{0;0;1\}$, то из формулы (2.10) получим

$$\cos\alpha = \frac{a_x}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}}, \quad \cos\beta = \frac{a_y}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}},$$

$$\cos\gamma = \frac{a_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}}.$$

Из формул следует:

1) $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$;

2) $\dfrac{\cos\alpha}{a_x} = \dfrac{\cos\beta}{a_y} = \dfrac{\cos\gamma}{a_z}$.

Векторное произведение двух векторов и его свойства

Определение. *Векторным произведением* двух векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется третий вектор $\vec{c}$, модуль которого равен площади параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$, приведенных к общему началу, и который перпендикулярен векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$ и направлен в такую сторону, что кратчайший поворот от $\vec{a}$ к $\vec{b}$ вокруг вектора $\vec{c}$ происходит против часовой стрелки (векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ образуют правую тройку) (рис. 9).

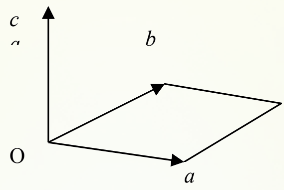


Рис. 9

Если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарные, то их векторное произведение считается равным нулю.

Из определения следует, что

$$|\vec{c}| = |\vec{a}||\vec{b}|\sin\varphi, \tag{2.12}$$

где φ – угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$.Векторное произведение обозначается $\vec{a}\times\vec{b}$ или $[\vec{a},\vec{b}]$..

Физический смысл векторного произведения. Из курса физики известно, что момент силы $\vec{F}$ относительно точки O изображают вектором $\overrightarrow{OM}$, перпендикулярным плоскости, в которой лежит точка O и вектор $\vec{F}$ (рис. 10).

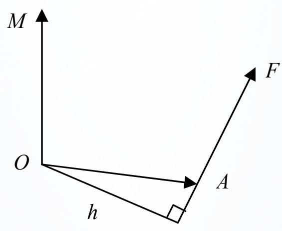


Рис. 10

Длину вектора $\overrightarrow{OM}$ определяют как произведение вектора $\vec{F}$ на плечо h, где h – расстояние от точки O до прямой вектора $\vec{F}$, т. е. $|\overrightarrow{OM}| = |\vec{F}|h = |\vec{F}||\vec{r}|\sin(\vec{F}\,\hat{,}\,\vec{r})$, где $\vec{r} = \overrightarrow{OA}$ – радиус-вектор точки приложения силы $\vec{F}$. Таким образом, момент силы $\vec{F}$ относительно некоторой точки O есть $\vec{F}\times\vec{r}$, т. е. векторное произведение силы $\vec{F}$ на радиус-вектор точки приложения силы.

Свойства векторного произведения

1. При перестановке сомножителей векторное произведение меняет знак, т. е. $\vec{a}\times\vec{b}=-\vec{b}\times\vec{a}$.
2. $(\lambda\vec{a})\times\vec{b}=\vec{a}\times(\lambda\vec{b})=\lambda(\vec{a}\times\vec{b})$, где λ – скаляр.
3. $(\vec{a}+\vec{b})\times\vec{c}=\vec{a}\times\vec{c}+\vec{b}\times\vec{c}$.
4. Если векторное произведение двух векторов равно нулевому вектору, то либо равен нулевому вектору один из сомножителей, либо равен нулю синус угла между ними, т. е. векторы коллинеарны.

В частности, $\vec{a}\times\vec{a}=\vec{0}$.

Исходя из свойств векторного произведения, получим:

$$\vec{i}\times\vec{i}=\vec{j}\times\vec{j}=\vec{k}\times\vec{k}=\vec{0},$$

$$\vec{i}\times\vec{j}=-\vec{j}\times\vec{i}=\vec{k},\ \vec{j}\times\vec{k}=-\vec{k}\times\vec{j}=\vec{i},\ \vec{k}\times\vec{i}=-\vec{i}\times\vec{k}=\vec{j}.$$

Векторное произведение векторов

$$\vec{a}=a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k},\quad \vec{b}=b_x\vec{i}+b_y\vec{j}+b_z\vec{k}$$

находится по формуле

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\end{vmatrix}.$$

Смешанное произведение трех векторов и его свойства

Пусть даны три вектора $\vec{a},\vec{b}$ и $\vec{c}$. Если векторное произведение $\vec{a}\times\vec{b}$ векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ скалярно умножить на вектор $\vec{c}$, то получится число $(\vec{a}\times\vec{b})\vec{c}$, которое называется смешанным произведением трех векторов $\vec{a},\vec{b}$ и $\vec{c}$. Обозначается $(\vec{a}\vec{b}\vec{c})$ или $\vec{a}\vec{b}\vec{c}$.

Геометрический смысл смешанного произведения. Пусть векторы $\vec{a},\vec{b}$ и $\vec{c}$ некомпланарные. Построим параллелепипед на векторах $\vec{a},\vec{b}$ и $\vec{c}$ как на ребрах (рис. 11).

Векторное произведение $\vec{a}\times\vec{b}$ есть вектор $\vec{d}=\overrightarrow{OE}$, численно равный площади параллелограмма *OABD*. Скалярное произведение $(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=\vec{d}\vec{c}$ есть произведение модуля вектора $\vec{d}$ и проекции вектора $\vec{c}$ на $\vec{d}$. Следовательно, произведение $|\vec{d}|np_{\vec{d}}\vec{c}$ по абсолютной величине равно произведению площади основания параллелепипеда на его высоту, т. е. объему параллелепипеда, построенного на векторах $\vec{a},\vec{b}$ и $\vec{c}$.

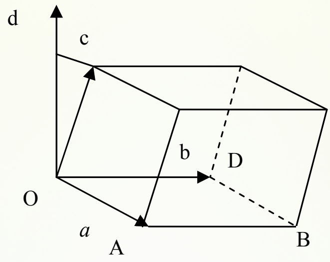


Рис. 11

Таким образом, получаем

$$V_{пар} = \left|\vec{a}\vec{b}\vec{c}\right|.$$

Объем треугольной призмы, построенной на векторах $\vec{a}, \vec{b}$ и $\vec{c}$:

$$V_{приз} = \frac{1}{2}V_{пар} = \frac{1}{2}\left|\vec{a}\vec{b}\vec{c}\right|.$$

Объем треугольной пирамиды, построенной на векторах $\vec{a}, \vec{b}$ и $\vec{c}$:

$$V_{пир} = \frac{1}{3}V_{приз} = \frac{1}{6}\left|\vec{a}\vec{b}\vec{c}\right|.$$

Свойства смешанного произведения

1. Смешанное произведение не меняет знак при круговой перестановке его сомножителей: $\vec{a}\vec{b}\vec{c} = \vec{c}\vec{a}\vec{b} = \vec{b}\vec{c}\vec{a}$.

2. Смешанное произведение меняет знак при перестановке двух соседних сомножителей: $\vec{a}\vec{b}\vec{c} = -\vec{b}\vec{a}\vec{c} = -\vec{a}\vec{c}\vec{b} = -\vec{c}\vec{b}\vec{a}$.

3. Если векторы $\vec{a}, \vec{b}$ и $\vec{c}$ компланарные, то смешанное произведение $\vec{a}\vec{b}\vec{c}$ равно нулю.

Пусть векторы $\vec{a}, \vec{b}$ и $\vec{c}$ заданы их разложением по ортам:

$$\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}, \vec{b} = b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k}, \vec{c} = c_x\vec{i} + c_y\vec{j} + c_z\vec{k}.$$

Тогда смешанное произведение $\vec{a}\vec{b}\vec{c}$ вычисляется по формуле

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}.$$

2.3. Линейные пространства

В данном разделе будут рассмотрены объекты произвольной природы: точки, матрицы, многочлены, векторы, функции и т. д.

Определение. Множество L элементов произвольной природы, в котором определены операции сложения ($x + y$; $x, y \in L$) и умножения на число ($\alpha \cdot x$; $\alpha \in R, x \in L$), подчиняющиеся определенным аксиомам, называется *линейным пространством.*

Элементы произвольного линейного пространства L часто называют векторами.

Указанные операции над векторами подчиняются следующим аксиомам:

1) $x + y = y + x$;

2) $(x + y) + z = x + (y + z)$;

3) $\lambda(x + y) + z = \lambda \cdot x + \lambda \cdot y, \lambda \in R$;

4) $\lambda(\mu \cdot x) = (\lambda \cdot \mu) \cdot x, \lambda, \mu \in R$;

5) $0 \cdot x = \vec{0}, \quad \lambda \cdot \vec{0} = \vec{0}$;

6) $\exists - x : x + (-x) = \vec{0}$.

Примеры линейных пространств

1. Множество R^3 свободных векторов в трехмерном пространстве.

2. Множество всех вещественных матриц размерности $m \times n$.

3. Множество решений системы m линейных однородных уравнений с n неизвестными, если ее ранг меньше числа неизвестных.

4. Множество всех многочленов степени, не превышающей натурального числа n, с операциями сложения многочленов и умножения на число.

5. Множество всех функций $y = f(x)$, определенных и непрерывных на отрезке $[a; b]$, для которых обычными правилами математического анализа определены операции сложения таких функций и умножения их на число.

Понятие n-мерного вектора и векторного пространства. Размерность и базис векторного пространства

Множества всех плоских или пространственных векторов, в которых определены операции сложения и умножения вектора на число, являются простейшими примерами векторных пространств.

Определение. *N*-мерным вектором называется упорядоченная совокупность *n* действительных чисел, записываемых в виде $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$, где x_i – i-я компонента вектора x.

Понятие *n*-мерного вектора широко используется в экономике, например, некоторый набор товаров можно охарактеризовать вектором $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$, а соответствующие цены – вектором $y = (y_1, y_2, ..., y_n)$.

Два *n*-мерных вектора равны тогда и только тогда, когда равны их соответствующие компоненты.

Суммой двух *n*-мерных векторов x и y называется вектор $x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, ..., x_n + y_n)$, а произведение вектора на число есть вектор $z = \lambda \cdot x = (\lambda x_1, \lambda x_2, ..., \lambda x_n)$.

Определение. Линейное пространство всех *n*-мерных векторов с действительными компонентами называется *векторным пространством*.

Размерность и базис векторного пространства

Определение. Вектор a_m называется линейной комбинацией векторов $a_1, a_2, ..., a_{m-1}$ векторного пространства $\boldsymbol{R}$, если он равен сумме произведений этих векторов на произвольные действительные числа:

$$a_m = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + ... + \lambda_{m-1} a_{m-1},$$

где $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_{m-1}$ – любые действительные числа.

Векторы $a_1, a_2, ..., a_m$ векторного пространства $\boldsymbol{R}$ называются линейно зависимыми, если существуют такие числа $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_m$, не равные одновременно нулю, что

$$\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + ... + \lambda_m a_m = 0.$$

В противном случае векторы $a_1, a_2, ..., a_m$ называются линейно независимыми.

Пример 2.3. Выяснить, являются ли векторы a_1 = (1;3;1;3), a_2 = (2;1;1;2), a_3 = (3;-1;1;1) линейно зависимыми.

Решение. Составим векторное равенство $\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \lambda_3 a_3 = 0$. Записывая компоненты векторов в виде столбцов, получаем

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{или} \quad \begin{cases} \lambda_1 + 2\lambda_2 + 3\lambda_3 = 0, \\ 3\lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3 = 0, \\ \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0, \\ 3\lambda_1 + 2\lambda_2 + \lambda_3 = 0. \end{cases}$$

Решая систему методом Гаусса, получим ступенчатую систему:

$$\begin{cases} \lambda_1 + 2\lambda_2 - 3\lambda_3 = 0, \\ \qquad \lambda_2 + 2\lambda_3 = 0, \end{cases}$$

откуда находим бесконечное множество ее решений: $\lambda_1 = c_1$, $\lambda_2 = -2c$, $\lambda_3 = c$, где c – const. То есть существуют такие числа $\lambda_i \neq 0$, для которых $\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \lambda_3 a_3 = 0$. Следовательно, векторы линейно зависимы.

Определение. Линейное пространство ***R*** называется n-мерным, если в нем существует n линейно независимых векторов, а любые (n+1) векторов уже являются зависимыми. То есть размерность линейного векторного пространства – это максимальное число содержащихся в нем линейно независимых векторов.

Число n называется *размерностью* пространства и обозначается $\dim(R)$.

Определение. Совокупность n линейно независимых векторов n-мерного пространства ***R*** называется *базисом*.

Теорема. *Каждый вектор x линейного пространства **R** можно представить (и притом единственным образом) в виде линейной комбинации векторов базиса.*

Согласно определению базиса и линейной комбинации вектор x можно представить в виде $x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \ldots + x_n e_n$, где векторы $e_1, e_2, \ldots, e_n$ образуют произвольный базис линейного пространства ***R***. Числа $x_1, x_2, \ldots, x_n$ – координаты вектора x относительно этого базиса.

Переход к новому базису

Пусть в пространстве R имеются два базиса: старый $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ и новый $(e_1^*, e_2^*, \ldots, e_n^*)$. Каждый из векторов нового базиса можно выразить в виде линейной комбинации векторов старого базиса:

$$\begin{cases} e_1^* = a_{11}e_1 + a_{12}e_2 + \ldots + a_{1n}e_n, \\ e_2^* = a_{21}e_1 + a_{22}e_2 + \ldots + a_{2n}e_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ e_n^* = a_{n1}e_1 + a_{n2}e_2 + \ldots + a_{nn}e_n. \end{cases}$$

Полученная система означает, что переход от старого базиса к новому задается матрицей перехода:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \ldots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \ldots & a_{n2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{1n} & a_{21} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Коэффициенты разложения новых базисных векторов по старому базису образуют столбцы этой матрицы.

Обратный переход от нового базиса к старому осуществляется с помощью обратной матрицы A^{-1}.

Пусть вектор x имеет координаты $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ относительно старого базиса и координаты $(x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*)$ относительно нового базиса, тогда справедливо равенство

$$\begin{pmatrix} x_1^* \\ x_2^* \\ \ldots \\ x_n^* \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Евклидово пространство

Выше было дано определение линейного пространства, в котором можно складывать векторы и умножать их на числа, рассмотрены понятия размерности и базиса, а теперь в данном пространстве введем метрику, т. е. способ измерения длин и углов. Это можно сделать, введя понятие скалярного произведения.

Определение. *Скалярным произведением* двух векторов $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ и $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ называется число

$$(x, y) = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \ldots + x_n y_n = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i .$$

Скалярное произведение имеет экономический смысл: если $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ – вектор объемов различных товаров, а $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ – вектор их цен, то скалярное произведение (x, y) выражает суммарную стоимость этих товаров.

Скалярное произведение имеет следующие свойства:

1) $(x, y) = (y, x)$;
2) $(x, y + z) = (x, y) + (x, z)$;
3) $(\alpha x, y) = \alpha(x, y)$;
4) $(x, x) > 0$, если x – ненулевой вектор, $(x, x) = 0$, если x – нулевой вектор.

Определение. Линейное пространство, в котором задано скалярное произведение векторов, называется *евклидовым пространством*.

Длиной (нормой) вектора x в евклидовом пространстве называется корень квадратный из его скалярного квадрата:

$$|x| = \sqrt{(x, x)} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2} .$$

Угол φ между векторами x и y определяется равенством

$$\cos\varphi = \frac{(x, y)}{|x||y|}.$$

Два вектора называются ортогональными, если их скалярное произведение равно 0 (т. е. $\varphi = 90°$).

Определение. Векторы $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ n-мерного евклидова пространства образуют *ортогональный базис,* если эти векторы попарно ортогональны, и *ортонормированный базис,* если эти векторы попарно ортогональны и норма каждого равна единице, т. е. $(e_i, e_j) = 0$, при $i \neq j$ и $|e_i| = 1$, при $i = 1, 2, \ldots, n$.

2.4. Собственные значения и собственные векторы матрицы. Квадратичные формы

Пусть L – заданное n-мерное линейное пространство. Ненулевой вектор $\overline{x} \in L$ называется *собственным вектором* линейного преобразования A, если существует такое число λ, что выполняется равенство $A\overline{x} = \lambda\overline{x}$.

При этом число λ называется *собственным значением (характеристическим числом)* линейного преобразования A, соответствующего вектору $\overline{x}$.

Если линейное преобразование A в некотором базисе $\overline{e_1}$, $\overline{e_2}$, ..., $\overline{e_n}$ имеет матрицу

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

то собственные значения линейного преобразования A можно найти как корни $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ уравнения

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix} = 0\cdot$$

Это уравнение называется *характеристическим уравнением,* а его левая часть – *характеристическим многочленом* линейного преобразования A.

Следует отметить, что характеристический многочлен линейного преобразования не зависит от выбора базиса.

Рассмотрим частный случай. Пусть A – некоторое линейное преобразование плоскости, матрица которого равна $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$. Тогда преобразование A в некотором базисе $\overline{e_1}, \overline{e_2}$ может быть задано формулами:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix}, \qquad \begin{cases} x_1' = a_{11}x_1 + a_{12}x_2, \\ x_2' = a_{21}x_1 + a_{22}x_2. \end{cases}$$

Если преобразование A имеет собственный вектор с собственным значением λ, то $A\overline{x} = \lambda\overline{x}$.

$$\begin{cases} x_1' = \lambda x_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2, \\ x_2' = \lambda x_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2, \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} (a_{11} - \lambda)x_1 + a_{12}x_2 = 0, \\ a_{21}x_1 + (a_{22} - \lambda)x_2 = 0. \end{cases}$$

Так как собственный вектор $\bar{x}$ ненулевой, то x_1 и x_2 не равны нулю одновременно. Так как данная система однородна, то, для того чтобы она имела нетривиальное решение, определитель системы должен быть равен нулю. В противном случае система имеет единственное решение – нулевое, что невозможно.

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = (a_{11} - \lambda)(a_{22} - \lambda) - a_{12}a_{21} =$$

$$= \lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\lambda + (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}).$$

Полученное уравнение является характеристическим уравнением линейного преобразования A.

Таким образом, можно найти собственный вектор $\bar{x}(x_1, x_2)$ линейного преобразования A с собственным значением λ, где λ – корень характеристического уравнения, а x_1 и x_2 – корни системы уравнений при подстановке в нее значения λ.

Понятно, что если характеристическое уравнение не имеет действительных корней, то линейное преобразование A не имеет собственных векторов.

Следует отметить, что если $\bar{x}$ – собственный вектор преобразования A, то и любой вектор, ему коллинеарный, – тоже собственный, с тем же самым собственным значением λ.

Действительно, $A(k\bar{x}) = kA\bar{x} = k\lambda\bar{x} = \lambda(k\bar{x})$. Если учесть, что векторы имеют одно начало, то эти векторы образуют так называемое *собственное направление* или *собственную прямую*.

Так как характеристическое уравнение может иметь два различных действительных корня λ_1 и λ_2, то в этом случае при подстановке их в систему уравнений получим бесконечное количество решений. Это множество решений определяет две *собственные прямые*.

Если характеристическое уравнение имеет два равных корня $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$, то либо имеется лишь одна собственная прямая, либо, если при подстановке в систему она превращается в систему вида

$$\begin{cases} 0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 = 0, \\ 0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 = 0, \end{cases}$$

эта система удовлетворяет любым значениям x_1 и x_2. Тогда все векторы будут собственными, и такое преобразование называется *преобразованием подобия*.

Пример 2.4. Найти характеристические числа и собственные векторы линейного преобразования с матрицей $A=\begin{pmatrix}5 & 4\\ 2 & 3\end{pmatrix}$.

Решение. Запишем линейное преобразование в виде:

$$x_1' = \lambda x_1 = 5x_1 + 4x_2,$$
$$x_2' = \lambda x_2 = 2x_1 + 3x_2.$$

Составим характеристическое уравнение:

$$\begin{vmatrix}5-\lambda & 4\\ 2 & 3-\lambda\end{vmatrix} = (5-\lambda)(3-\lambda) - 8 = 15 - 3\lambda - 5\lambda + \lambda^2 - 8 = 0,$$

$$\lambda^2 - 8\lambda + 7 = 0.$$

Корни характеристического уравнения: $\lambda_1 = 7$; $\lambda_2 = 1$.

Для корня $\lambda_1 = 7$:

$$\begin{cases}(5-7)x_1 + 4x_2 = 0,\\ 2x_1 + (3-7)x_2 = 0,\end{cases} \quad \begin{cases}-2x_1 + 4x_2 = 0,\\ 2x_1 - 4x_2 = 0.\end{cases}$$

Из системы получается зависимость: $x_1 - 2x_2 = 0$. Собственные векторы для первого корня характеристического уравнения имеют координаты (t, 0,5t), где t – параметр.

Для корня $\lambda_2 = 1$:

$$\begin{cases}(5-1)x_1 + 4x_2 = 0,\\ 2x_1 + (3-1)x_2 = 0,\end{cases} \quad \begin{cases}4x_1 + 4x_2 = 0,\\ 2x_1 + 2x_2 = 0.\end{cases}$$

Из системы получается зависимость: $x_1 + x_2 = 0$. Собственные векторы для второго корня характеристического уравнения имеют координаты (t, -t), где t – параметр.

Полученные собственные векторы можно записать в виде

$$\overrightarrow{u_1} = t(\overrightarrow{e_1} + 0{,}5\overrightarrow{e_2}); \quad \overrightarrow{u_2} = t(\overrightarrow{e_1} - \overrightarrow{e_2}).$$

Квадратичные формы

Однородный многочлен второй степени относительно переменных x_1 и x_2

$$\Phi(x_1, x_2) = a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2,$$

не содержащий свободного члена и неизвестных в первой степени, называется *квадратичной формой* переменных x_1 и x_2.

Однородный многочлен второй степени относительно переменных x_1, x_2 и x_3

$$\Phi(x_1, x_2, x_3) = a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{23}x_2x_3 + 2a_{13}x_1x_3,$$

не содержащий свободного члена и неизвестных в первой степени, называется *квадратичной формой* переменных x_1, x_2 и x_3.

Рассмотрим квадратичную форму двух переменных. Квадратичная форма имеет симметрическую матрицу $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$. Определитель этой матрицы называется *определителем квадратичной формы*.

Пусть на плоскости задан ортогональный базис $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$. Каждая точка плоскости имеет в этом базисе координаты x_1, x_2.

Если задана квадратичная форма

$$\Phi(x_1, x_2) = a_1x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2,$$

то её можно рассматривать как функцию от переменных x_1 и x_2.

Приведение квадратичных форм к каноническому виду

Рассмотрим некоторое линейное преобразование A с матрицей $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$.

Это симметрическое преобразование можно записать в виде:

$$y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2; \quad y_2 = a_{12}x_1 + a_{22}x_2,$$

где y_1 *и* y_2 – координаты вектора $A\bar{x}$ в базисе $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$.

Очевидно, что квадратичная форма может быть записана в виде

$$F(x_1, x_2) = x_1y_1 + x_2y_2.$$

Как видно, геометрический смысл числового значения квадратичной формы Φ в точке с координатами x_1 и x_2 – скалярное произведение $\bar{x} \cdot A\bar{x} = F$.

Если взять другой ортонормированный базис на плоскости, то в нём квадратичная форма F будет выглядеть иначе, хотя ее числовое значение в каждой геометрической точке не изменится. Если найти такой базис, в котором квадратичная форма не будет содержать координат в первой степени, а только координаты в квадрате, то квадратичную форму можно будет привести к каноническому виду.

Если в качестве базиса взять совокупность собственных векторов линейного преобразования, то в этом базисе матрица линейного преобразования имеет вид:

$$A' = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}.$$

При переходе к новому базису от переменных x_1 и x_2 мы переходим к переменным x_1' и x_2'. Тогда

$$\begin{aligned} &F = x_1' y_1' + x_2' y_2', \\ &y_1' = a_{11}' x_1' + a_{12}' x_2', \quad \text{или} \quad y_1' = \lambda_1 x_1', \qquad y_2' = \lambda_2 x_2'. \\ &y_2' = a_{12}' x_1' + a_{22}' x_2' \end{aligned}$$

Выражение $F(x_1', x_2') = \lambda_1 (x_1')^2 + \lambda_2 (x_2')^2$ называется *каноническим видом* квадратичной формы. Аналогично можно привести к каноническому виду квадратичную форму с большим числом переменных.

Теория квадратичных форм используется для приведения к каноническому виду уравнений кривых и поверхностей второго порядка.

Пример 2.5. Привести к каноническому виду квадратичную форму

$$F(x_1, x_2) = 27x_1^2 - 10x_1x_2 + 3x_2^2.$$

Решение. Коэффициенты: $a_{11} = 27$, $a_{12} = 5$, $a_{22} = 3$.

Составим и решим характеристическое уравнение:

$$\begin{vmatrix} 27-\lambda & 5 \\ 5 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0;$$

$$(27 - \lambda)(3 - \lambda) - 25 = 0;$$

$$\lambda^2 - 30\lambda + 56 = 0 \;\; \lambda_1 = 2; \;\; \lambda_2 = 28;$$

$$F(x_1', x_2') = 2x_1'^2 + 28x_2'^2.$$

3. ЭЛЕМЕНТЫ АНАЛИТИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ

3.1. Декартова прямоугольная и полярная системы координат на плоскости

Прямоугольная и полярная системы координат

Прямоугольная система координат

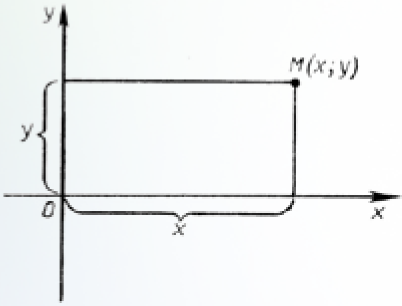


Рис. 12

Ox – ось абсцисс; *Oy* – ось ординат; *O* – начало координат; (*x*, *y*) – прямоугольные координаты точки *M*; *x* –проекция точки *M* на ось *Ox*; *y* –проекция точки *M* на ось *Oy*

$$-\infty < x < +\infty$$
$$-\infty < y < +\infty$$

Полярная система координат

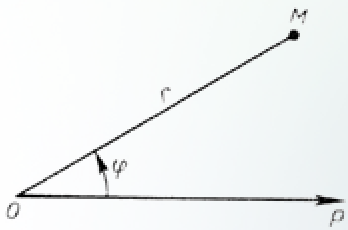


Рис. 13

O – полюс; *Op* – полярная ось; (*r*, φ) – полярные координаты точки *M*; *r* – полярный радиус – расстояние от точки *M* до полюса *O*; φ – полярный угол – угол между полярной осью и полупрямой *OM*

$$0 \le r < +\infty$$
$$-\pi < \varphi \le \pi$$

Связь координат

Из рис. 14 видно, что для точки *M* справедливы соотношения

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases}; \qquad (3.1)$$

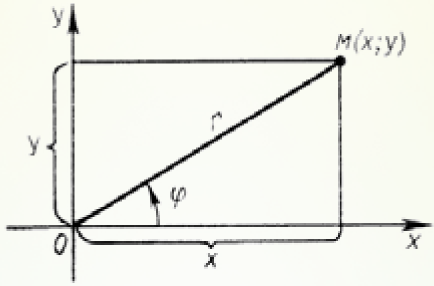


Рис. 14

$$\begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2} \\ tg\varphi = \dfrac{y}{x}. \end{cases} \quad (3.2)$$

Для $tg\varphi = \dfrac{y}{x}$ соответствуют два значения φ, поэтому при вычислении полярного угла φ точки M по ее прямоугольным координатам предварительно выясняют, в какой четверти лежит точка M.

Замечание. Полярные координаты (полярный угол) неопределенны только для точки O (0, 0).

Пример 3.1. Найти полярные координаты точки $M(\sqrt{3};\ -1)$ (рис. 15).

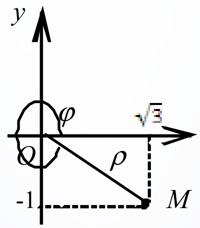


Рис. 15

Решение. Используя формулы (3.2), находим полярный радиус и полярный угол точки M:

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + (-1)^2} = 2; \quad \text{tg}\varphi = y/x = -\sqrt{3}/3;$$

$$\varphi = 2\pi - \text{arctg}(\sqrt{3}/3) = 2\pi - \pi/6 = 11\pi/6,$$

так как точка M лежит в IV четверти.

Простейшие задачи на плоскости. Расстояние между двумя точками

Найдем расстояние d между двумя заданными точками M_1 (x_1, y_1) и M_2 (x_2, y_2).

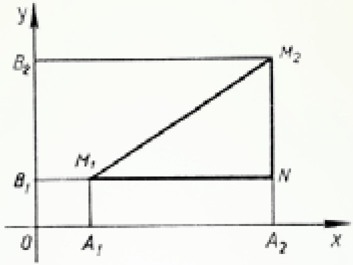


Рис. 16

Из прямоугольного треугольника M_1NM_2 по теореме Пифагора имеем

$$d = M_1M_2 = \sqrt{M_1N^2 + M_2N^2}\ .$$

Но $M_1N = A_1A_2 = |x_2 - x_1|$, $NM_2 = B_1B_2 = |y_2 - y_1|$.

Поэтому

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}\ . \tag{3.3}$$

Деление отрезка в данном отношении

Пусть даны точки M_1 (x_1, y_1) и M_2 (x_2, y_2). Требуется найти точку M (x, y), лежащую на отрезке M_1M_2 и делящую его в данном отношении:

$$\frac{M_1M}{MM_2} = \lambda.$$

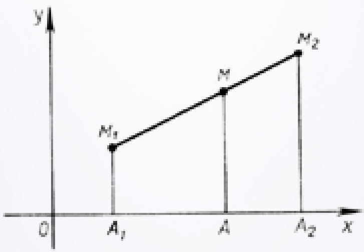


Рис. 17

Опустим из точек M_1, M, M_2 перпендикуляры на ось Ox, получим

$$\frac{M_1M}{MM_2}=\frac{A_1A}{AA_2}.$$

Так как $A_1A = x - x_1$, $AA_2 = x_2 - x$, то заданное отношение принимает вид

$$\frac{x-x_1}{x_2-x}=\lambda \quad \Rightarrow \quad x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}.$$

Аналогично

$$y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}. \tag{3.4}$$

В частности, при $\lambda = 1$, т. е. при делении отрезка M_1M_2 пополам, получаем

$$x=\frac{x_1+x_2}{2}, \quad y=\frac{y_1+y_2}{2}.$$

3.2. Прямая линия на плоскости

Прямоугольная и полярная системы координат на плоскости позволяют задавать различные линии на плоскости их уравнениями.

Определение. *Уравнением линии* на плоскости в прямоугольной системе координат Oxy называется уравнение $f = (x, y) = 0$, которому удовлетворяют координаты каждой точки данной линии и не удовлетворяют координаты любой точки плоскости, не лежащей на этой линии.

Переменные x и y уравнения линии называются текущими координатами.

Например, покажем, что уравнение $x - y = 0$, или $x = y$, является уравнением биссектрисы I и III координатных углов.

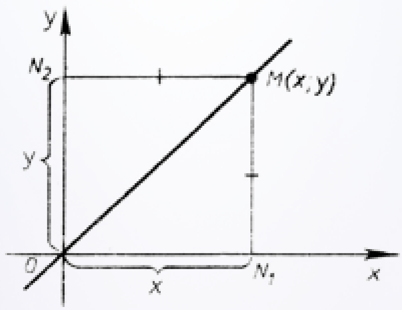


Рис. 18

По определению биссектрисы угла для произвольной точки $M(x, y)$, лежащей на биссектрисе, имеем $N_2M = N_1M$ или $ON_1 = ON_2$ и поэтому $x = y$, т. е. координаты всех точек биссектрисы удовлетворяют этому уравнению.

Отметим, что геометрическим образом данного заранее уравнения не всегда будет линия. Может получиться, что уравнению соответствует лишь несколько точек. Например, уравнению $x^2 + y^2 = 0$ соответствует одна точка $O(0;0)$, а уравнению $x^2 + y^2 + 1 = 0$ не соответствует ни одна точка плоскости.

Уравнение прямой с угловым коэффициентом

Пусть прямая l не параллельна оси Oy. Обозначим точку пересечения l с осью Oy буквой $B(0, b)$, а угол между положительным направлением оси Ox и l обозначим φ. Угол φ отсчитывается от оси Ox против часовой стрелки и называется углом наклона прямой l к оси Ox, при этом $0 \le \varphi < \pi$.

Выведем уравнение прямой l. Пусть $M(x, y)$ – произвольная точка прямой l с текущими координатами x и y.

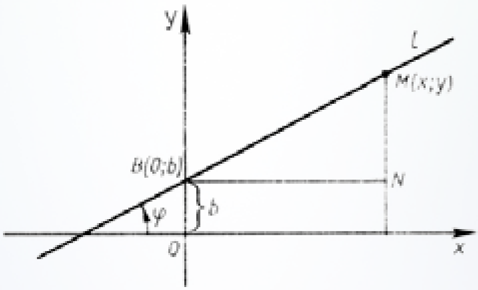


Рис. 19

Из прямоугольного треугольника BMN имеем $\operatorname{tg}\varphi = \dfrac{y-b}{x}$.

Эту величину называют угловым коэффициентом прямой и обозначают k: $k = \operatorname{tg}\varphi$. Тогда из равенства получим:

$$k = \frac{y-b}{x}, \quad \Rightarrow \quad y = kx + b. \tag{3.5}$$

Уравнение (3.5) называют *уравнением прямой с угловым коэффициентом*, число b называется начальной ординатой.

Если в уравнении (3.5) $k = 0$, то имеем уравнение прямой, параллельной оси Ox и проходящей через точку $B\ (0,\ b)$: $y = b$.

При $b = 0$ получаем уравнение координатной оси Ox: $y = 0$.

Аналогично, $x = a$ есть уравнение прямой, параллельной оси Oy и проходящей через точку $A\ (a,\ 0)$. При $a = 0$ получаем уравнение координатной оси Oy: $x = 0$.

Общее уравнение прямой

Уравнением с угловым коэффициентом может быть задана любая прямая на плоскости, не параллельная оси Oy.

Любую прямую без ограничений можно задать уравнением

$$Ax + By + C = 0, \tag{3.6}$$

где A, B и C – коэффициенты, причем A и B одновременно не равны нулю.

Теорема. *Каждая прямая на плоскости с прямоугольной системой координат определяется уравнением первой степени, и наоборот, каждое уравнение первой степени определяет некоторую прямую на плоскости.*

Уравнение прямой в отрезках

Предположим, что в общем уравнении прямой $A \neq 0$, $B \neq 0$, $C \neq 0$. Перенесем C в правую часть и разделим обе части на $-C$, получим $\frac{A}{-C}x + \frac{B}{-C}y = 1$ или $\frac{x}{\frac{-C}{A}} + \frac{y}{\frac{-C}{B}} = 1$. Обозначим $-\frac{C}{A} = a, -\frac{C}{B} = b$, получим

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1. \tag{3.7}$$

Уравнение (3.7) называется *уравнением прямой в отрезках.* Числа a и b определяются отрезками OA и OB, которые прямая отсекает на осях координат.

Замечание. Прямые, параллельные координатным осям, и прямые, проходящие через начало координат, не могут быть записаны уравнениями в отрезках.

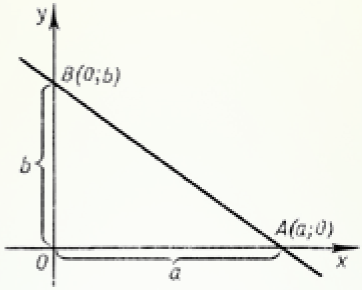


Рис. 20

Уравнение прямой, проходящей через данную точку в данном направлении

Выведем уравнение прямой, проходящей через точку M_1 (x_1, y_1) и имеющей данный угловой коэффициент k. Уравнение этой прямой будет иметь вид: $y = kx + b$.

Так как прямая проходит через точку M_1, то $y_1 = kx_1 + b$. Вычитая из первого уравнения второе, получим

$$y - y_1 = k(x - x_1). \qquad (3.8)$$

Замечание. В уравнении (3.8) постоянная k может быть любым числом. Поэтому в форме (3.8) может быть записано уравнение всякой прямой, проходящей через точку M_1, не параллельной оси ординат. Совокупность всех прямых, проходящих через некоторую точку плоскости, называется *пучком прямых*, а общая их точка – *центром пучка*.

Уравнение прямой, проходящей через две данные точки

Пусть прямая проходит через две данные точки: M_1 $(x_1; y_1)$ и M_2 (x_2, y_2). Тогда из уравнения (3.8) имеем: $y - y_1 = k(x - x_1)$ и $y_2 - y_1 = k(x_2 - x_1)$.

Разделим первое уравнение на второе, имеем

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}. \qquad (3.9)$$

Нормальное уравнение прямой

Пусть в полярной системе координат дана прямая, не проходящая через полюс O.

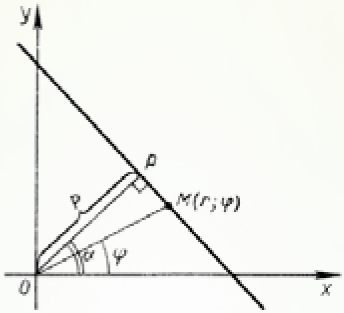


Рис. 21

Пусть α – угол между полярной осью и отрезком OP, перпендикулярным прямой; p – длина отрезка OP. Выведем уравнение прямой, считая известными α и p.

Пусть $M\ (r;\ \varphi)$ – произвольная точка данной прямой. Из прямоугольного треугольника OPM имеем:

$$r\cos(\alpha - \varphi) = p. \qquad (3.10)$$

Это уравнение называется *уравнение прямой в полярных координатах*.

Применяя тригонометрические формулы, перепишем уравнение (3.10) в виде $r\cos\varphi\cos\alpha + r\sin\varphi\sin\alpha - p = 0$.

Учитывая, что $r\cos\varphi = x$, $r\sin\varphi = y$, получим

$$x\cos\alpha + y\sin\alpha - p = 0. \qquad (3.11)$$

Это уравнение называется *нормальным уравнением* прямой.

Если дано общее уравнение прямой $Ax + By + C = 0$, то его можно привести к уравнению (3.11).

Умножим обе части общего уравнения на некоторое число μ, получим $\mu Ax + \mu By + \mu C = 0$. Подберем μ так, чтобы выполнялись равенства $\mu A = \cos\alpha$, $\mu B = \sin\alpha$, $\mu C = -p$.

Для первых двух равенств справедливо:

$$\mu^2(A^2 + B^2) = \cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1.$$

Тогда отсюда

$$\mu = \pm \frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

Число μ называется нормирующим множителем. При этом знак μ выбирается противоположным знаку коэффициента C в общем уравнении прямой (так как $p > 0$). Если $C = 0$, то знак μ можно брать любой.

Таким образом, общее уравнение прямой приводится к нормальному виду путем умножения его на нормирующий множитель μ.

Взаимное расположение двух прямых на плоскости. Угол между двумя прямыми

Рассмотрим на плоскости две прямые:

$$l_1 : y = k_1 x + b_1$$

$$l_2 : y = k_2 x + b_2$$

с углами наклона к оси Ox соответственно φ_1 и φ_2 (рис. 22).

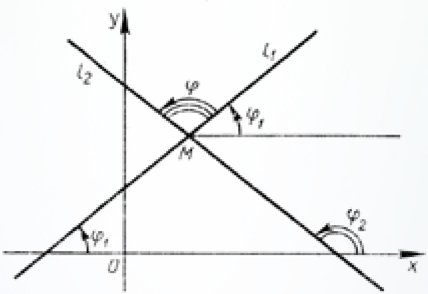


Рис. 22

Углом между прямыми l_1 и l_2 будем называть угол φ — наименьший угол, на который надо повернуть первую прямую l_1 вокруг точки пересечения M против часовой стрелки до совпадения ее со второй прямой l_2 ($0 \le \varphi \le \pi$). Из рис. 22 видно, что $\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$. Поэтому

$$\operatorname{tg}\varphi = \operatorname{tg}(\varphi_2 - \varphi_1) = \frac{\operatorname{tg}\varphi_2 - \operatorname{tg}\varphi_1}{1 + \operatorname{tg}\varphi_1 \operatorname{tg}\varphi_2}.$$

Таким образом, тангенс угла между прямыми вычисляется по формуле

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}. \qquad (3.12)$$

Если прямые l_1 и l_2 параллельны, то $\varphi_1 = \varphi_2$ и, следовательно, $k_1 = k_2$. И обратно, если $k_1 = k_2$, то $\varphi_1 = \varphi_2$. Следовательно, $\mathrm{tg}\varphi_1 = \mathrm{tg}\varphi_2$, а значит прямые l_1 и l_2 параллельны.

Пусть $\varphi = \frac{\pi}{2}$, т. е. l_1 и l_2 перпендикулярны. В этом случае $\varphi_2 = \varphi_1 + \frac{\pi}{2}$, тогда $\mathrm{tg}\varphi_2 = \mathrm{tg}(\varphi_1 + \frac{\pi}{2}) = -\mathrm{ctg}\varphi_1 = -\frac{1}{\mathrm{tg}\varphi_1}$ или

$$k_2 = -\frac{1}{k_1}. \qquad (3.13)$$

Если две прямые l_1 и l_2 лежат на плоскости, то возможны три различных случая их взаимного расположения: 1) пересекаются, т. е. имеют одну общую точку; 2) параллельны и не совпадают; 3) совпадают.

Пусть прямые l_1 и l_2 заданы общими уравнениями:

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2 = 0 \end{cases}.$$

Если прямые пересекаются в некоторой точке $M\,(x; y)$, то координаты этой точки должны удовлетворять общим уравнениям этой системы. Следовательно, чтобы найти координаты точки пересечения прямых l_1 и l_2, надо решить систему уравнений. Решая систему по формулам Крамера, получим координаты точки пересечения:

$$x = \frac{B_1C_2 - B_2C_1}{A_1B_2 - A_2B_1},\ y = \frac{C_1A_2 - C_2A_1}{A_1B_2 - A_2B_1}. \qquad (3.14)$$

Таким образом, прямые l_1 и l_2 пересекаются, когда $A_1B_2 - A_2B_1 \neq 0$. Если $A_1B_2 - A_2B_1 = 0$, то выражения для x и y не имеют смысла. В этом случае прямые l_1 и l_2 параллельны. Покажем это. Из равенства $A_1B_2 - A_2B_1 = 0$ получим: $-\frac{A_1}{B_1} = -\frac{A_2}{B_2}$, т. е. $k_1 = k_2$ (если же $B_1 = B_2 = 0$, то прямые l_1 и l_2 параллельны оси Oy, а значит, параллельны между собой). Это условие можно записать в виде:

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2}. \qquad (3.15)$$

В частности, параллельные прямые могут совпадать, тогда

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}.$$

Пусть ни одна из прямых l_1 и l_2 не параллельна оси Oy. Тогда их уравнения можно записать в виде:

$$y = k_1 x + b_1 \text{ и } y = k_2 x + b_2,$$

где $k_1 = -\dfrac{A_1}{B_1}$, $\quad k_2 = -\dfrac{A_2}{B_2}$.

Из условия перпендикулярности прямых $k_2 = -\dfrac{1}{k_1}$ следует соотношение

$$A_1 A_2 + B_1 B_2 = 0. \tag{3.16}$$

Расстояние от точки до прямой

Найдем расстояние d от данной точки $M_0(x_0, y_0)$ до прямой l, заданной нормальным уравнением $x \cos \alpha + y \sin \alpha - p = 0$.

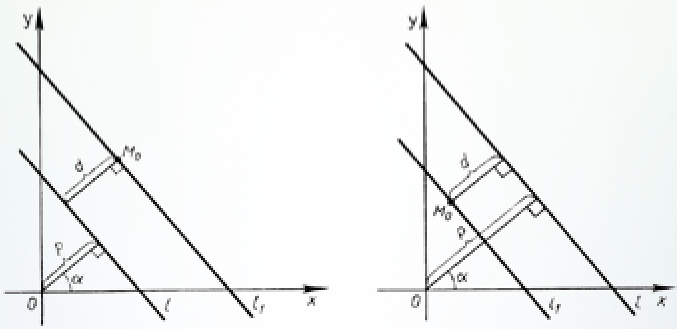


Рис. 23

Проведем через точку M_0 прямую l_1, параллельную l (рис. 23). Тогда нормальное уравнение прямой l_1 имеет вид:

$$x \cos \alpha + y \sin \alpha - (p + d) = 0.$$

Так как прямая l_1 проходит через точку $M_0(x_0, y_0)$, то ее координаты удовлетворяют уравнению прямой, т. е.

$$x_0 \cos \alpha + y_0 \sin \alpha - (p + d) = 0.$$

Отсюда

$$d = x_0 \cos \alpha + y_0 \sin \alpha - p. \tag{3.17}$$

Если точка $M_0(x_0, y_0)$ и начало координат лежат по одну сторону от прямой l, то

$$d = -(x_0 \cos\alpha + y_0 \sin\alpha - p). \tag{3.18}$$

Из равенств (3.17) и (3.18) следует, что

$$d = |x_0 \cos\alpha + y_0 \sin\alpha - p|. \tag{3.19}$$

Если прямая l задана общим уравнением $Ax + By + C = 0$, то формула (3.19) принимает вид

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}. \tag{3.20}$$

3.3. Кривые второго порядка

Кривая второго порядка может быть задана уравнением

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0.$$

Окружность – это множество точек (x, y), равноудалённых от одной, называемой центром.

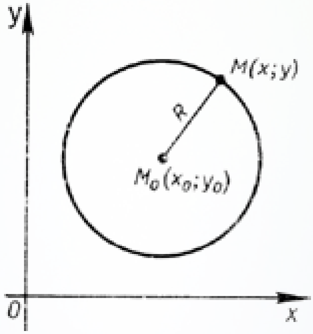


Рис. 24

Пусть $C\,(x_0, y_0)$ – центр окружности, R – радиус окружности, $M\,(x, y)$ – текущая (любая) точка окружности. По определению

$$R = \left|\overline{CM}\right| \Rightarrow R^2 = \left|\overline{CM}\right|^2,$$

$R^2 = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2$ – каноническое уравнение окружности радиуса R с центром в точке $C\,(x_0, y_0)$ (рис. 24). В частности, если центром является начало координат, уравнение упрощается: $x^2 + y^2 = R^2$.

Общее уравнение окружности не содержит произведения координат:

$$Ax^2 + By^2 + Cx + Dy + K = 0,$$

где $A = B$.

Из него легко можно получить канонический вид методом выделения полного квадрата, воспользовавшись алгебраическими формулами

$$(x + a)^2 = x^2 + 2xa + a^2; \quad (y + b)^2 = y^2 + 2by + b^2.$$

$$Ax^2 + Ay^2 + Cx + Dx + K = 0 \Rightarrow x^2 + y^2 + \frac{C}{A}x + \frac{D}{A}y + \frac{K}{A} = 0.$$

Здесь

$$\begin{cases} \frac{C}{A}x = 2ax \Rightarrow \frac{C}{A} = 2a \Rightarrow a = \frac{C}{2A}, \\ \frac{D}{A}y = 2by \Rightarrow b = \frac{D}{2A}. \end{cases}$$

Добавляем недостающие a^2, b^2 (столько же вычитаем, чтобы уравнение не изменилось):

$$x^2 + \frac{C}{A}x + \left(\frac{C}{2A}\right)^2 + y^2 + \frac{D}{2A}y + \left(\frac{D}{2A}\right)^2 - \left(\frac{C}{2A}\right)^2 - \left(\frac{D}{2A}\right)^2 + \frac{K}{A} = 0,$$

$$\left(x + \frac{C}{A}\right)^2 + \left(y + \frac{D}{2A}\right)^2 = R^2.$$

Здесь $R^2 = \left(\frac{C}{2A}\right)^2 + \left(\frac{D}{2A}\right)^2 - \frac{K}{A}$.

Если в правой части получили число отрицательное, то окружность *мнимая;* если это число равно нулю, окружность *вырожденная,* т. е. $\left(x + \frac{C}{A}\right)^2 + \left(y + \frac{D}{2A}\right)^2 = 0$ – это точка с координатами $x = -\frac{C}{2A}$, $y = -\frac{D}{2A}$.

Эллипс – это множество точек (x, y), сумма расстояний каждой из которых до двух данных точек, называемых фокусами, есть величина постоянная, равная $2a$.

Чтобы получить уравнение эллипса, воспользуемся чертежом (рис. 25), расположив фокусы эллипса $F_2(-c, 0)$, $F_1(c, 0)$ на оси Ox симметрично относительно начала координат. Введём произвольную точку искомой линии $M(x, y)$ и составим векторы

$$\bar{r}_1 = \overline{F_1M} = \{x - c,\ y\}; \quad \bar{r}_2 = \overline{F_2M} = \{x + c,\ y\}.$$

Вычислим их длины:

$$r_1 = \left|\overline{F_1M}\right| = \sqrt{(x - c)^2 + y^2}; \quad r_2 = \left|\overline{F_2M}\right| = \sqrt{(x + c)^2 + y^2}.$$

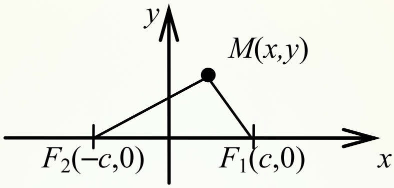


Рис. 25

По определению эллипса выполняется равенство

$$r_1 + r_2 = 2a,$$

где $a > c$.

Подставив длины радиусов, получим эквивалентное равенство

$$\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a.$$

Это и есть уравнение эллипса в выбранной системе координат. Преобразуем его:

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(x-c)^2 + y^2}.$$

Возводим обе части равенства в квадрат:

$$x^2 + 2xc + c^2 + y^2 = 4a^2 + x^2 - 2xc + c^2 + y^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2},$$

или $a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = a^2 - xc$.

Ещё раз возводим в квадрат, предварительно разделив на a обе части равенства:

$$\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = a - x\frac{c}{a},$$

откуда следует

$$x^2\left(1 - \frac{c^2}{a^2}\right) + y^2 = a^2 - c^2, \qquad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - c^2} = 1.$$

Поскольку $a > c$, обозначим $a^2 - c^2 = b^2$ и запишем *каноническое уравнение* эллипса $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

Теперь можно построить эллипс по его уравнению (рис. 26). Найдём точки, называемые вершинами эллипса, пересечения линии с осями координат: если $y = 0$, то $x = \pm a$, если $x = 0$, то $y = \pm b$.

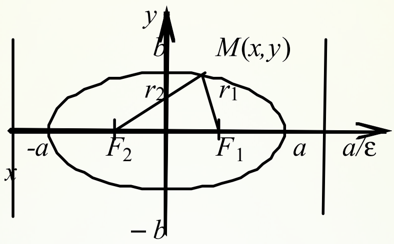


Рис. 26

Приняты названия:

$2a$ – большая ось эллипса, на ней расположены фокусы;

$2b$ – малая ось эллипса, $b < a$;

$F_1(c, 0)$, $F_2(-c, 0)$, – фокусы эллипса;

$2c$ – расстояние между фокусами, $c < a$, $c^2 = a^2 - b^2$;

$\bar{r}_2 = \overline{F_2M}$, $\bar{r}_1 = \overline{F_1M}$ – фокальные радиус-векторы (по определению $r_1 + r_2 = 2a$);

$\frac{c}{a} = \varepsilon$ называется *эксцентриситетом*, $\frac{c}{a} < 1$.

Фокусы эллипса всегда расположены на большой оси, поэтому если $b > a$, то $c = \sqrt{b^2 - a^2}$.

Для фокальных радиусов справедливы равенства: $r_1 = a - \varepsilon x$, $r_2 = a + \varepsilon x$.

Прямые $x = \pm\frac{a}{\varepsilon}$, указанные на рис. 26, называются *директрисами* эллипса и находятся на расстоянии $\frac{a}{\varepsilon}$ от центра эллипса. Они обладают следующим свойством: отношение расстояний любой точки эллипса до фокуса и соответствующей директрисы есть величина постоянная, равная ε.

Подставляя в уравнение директрисы значение $\frac{c}{a} = \varepsilon$, получаем

$$x = \pm\frac{a^2}{c}.$$

Если центр эллипса смещён в точку (x_0, y_0), его уравнение примет вид:

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1.$$

Гипербола – это множество точек, разность расстояний каждой из которых от двух данных точек (фокусов) есть величина постоянная, равная $2a$, т. е.

$$2a = |r_2 - r_1|,$$

где $r_1 = F_1M$, $r_2 = F_2M$ – фокальные радиус-векторы.

Каноническое уравнение гиперболы

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

где a – действительная полуось; b – мнимая полуось; $F_1(c,\ 0)$, $F_2(-c,\ 0)$ – фокусы; $c^2 = a^2 + b^2$; $\frac{c}{a} = \varepsilon > 1$ – эксцентриситет, $x = \pm\frac{a}{\varepsilon}$ – уравнения директрис (на рис. 27 одна из них обозначена символом d); $y = \pm\frac{b}{a}x$ – асимптоты гиперболы.

Если центр гиперболы смещён в точку (x_0, y_0), то уравнение принимает вид

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} - \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1.$$

Для построения гиперболы используем прямоугольник со сторонами $2a$, $2b$, продолжая его диагонали «до бесконечности». Строим гиперболу с вершинами в точках $(a, 0)$, $(-a, 0)$, приближая её ветви к асимптотам по мере удаления точки от начала координат (рис. 27).

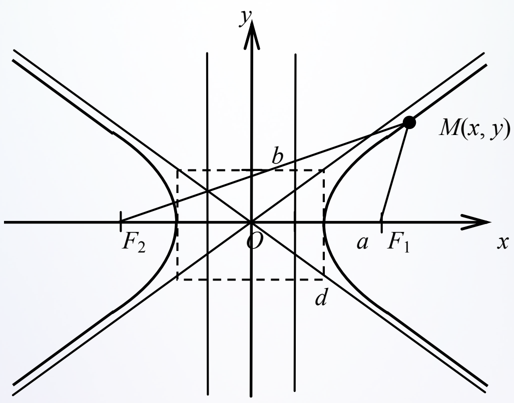


Рис. 27

Гипербола

$$-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,$$

где a – мнимая полуось; b – действительная полуось, называется *сопряжённой* по отношению к предыдущей. Её фокусы расположены на оси Oy (рис. 28).

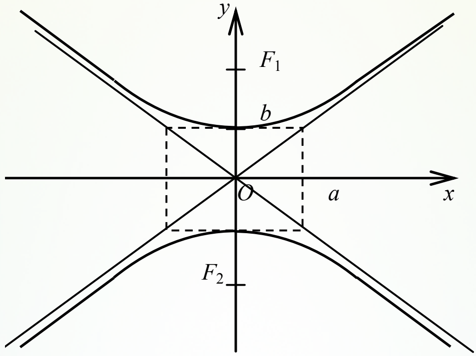


Рис. 28

Парабола – это множество точек, равноудалённых от данной точки (фокуса) и от прямой, называемой директрисой.

Сделаем схематический чертёж (рис. 29), выбрав прямоугольную систему координат, расположив на оси Ox фокус F и директрису симметрично относительно начала координат на расстоянии p друг от друга. Тогда любая точка M (x, y) параболы подчиняется условию $KM = MF$.

По формуле расстояния между двумя точками запишем:

$$\sqrt{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+(y-y)^2}=\sqrt{\left(\frac{p}{2}-x\right)^2+(0-y)^2}.$$

Возводя в квадрат обе части равенства, имеем

$$x^2+px+\frac{p^2}{4}=x^2-px+\frac{p^2}{4}+y^2 \text{ или } y^2=2px.$$

Это *каноническое уравнение* параболы с фокусом $F\left(\frac{p}{2}, 0\right)$ и директрисой $x=-\frac{p}{2}$, O (0, 0) – вершина параболы; $2p$ – длина главного диаметра TL, проведённого через фокус перпендикулярно оси.

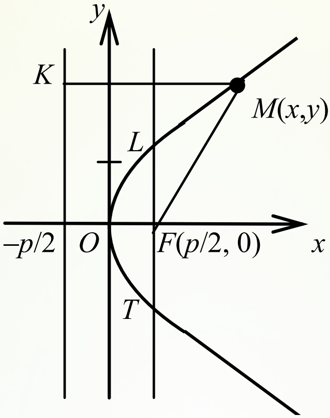


Рис. 29

Если вершина параболы смещена относительно начала координат в точку (x_0, y_0), уравнение примет вид

$$(y - y_0)^2 = 2p(x - x_0) \quad \text{или} \quad (x - x_0)^2 = 2p(y - y_0).$$

Раскрывая скобки, получим *общее уравнение* параболы:

$$a_{22}y^2 + a_{01}x + a_{02}y + a_{00} = 0 \text{ или } a_{11}x^2 + a_{01}x + a_{02}y + a_{00} = 0,$$

т. е. общее уравнение параболы содержит квадрат только одной из переменных.

Парабола $x^2 = 2py$ (рис. 30) называется *сопряжённой* по отношению к предыдущей, изображённой на рис. 29. Её ось симметрии – ось Oy, $F\left(0, \dfrac{p}{2}\right)$ – фокус параболы, $y = -\dfrac{p}{2}$ – директриса параболы.

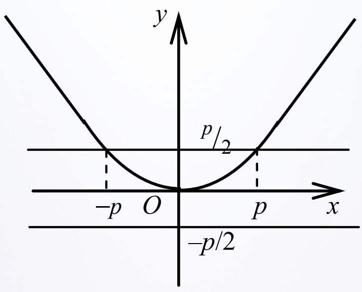


Рис. 30

3.4. Плоскость и прямая в пространстве

Аналогично уравнению линии на плоскости $f(x, y) = 0$ уравнение относительно трех переменных x, y и z, т. е. уравнение $f(x, y, z) = 0$ определяет в пространстве $Oxyz$ некоторую поверхность, т. е. множество всех точек пространства $Oxyz$, координаты которых x, y и z удовлетворяют этому уравнению.

Поверхность называется *цилиндрической*, если она может быть образована перемещением прямой параллельно самой себе вдоль некоторой линии L. Эта линия называется *направляющей* цилиндра, а всевозможные положения движущейся прямой – ее *образующей*.

Уравнение плоскости, проходящей через данную точку перпендикулярно данному вектору

Пусть дана точка $M_0(x_0, y_0, z_0)$ и ненулевой вектор $\vec{n} = \{A, B, C\}$. Составим уравнение плоскости, проходящей через точку M_0 перпендикулярно вектору $\vec{n}$, который называют нормальным вектором этой плоскости.

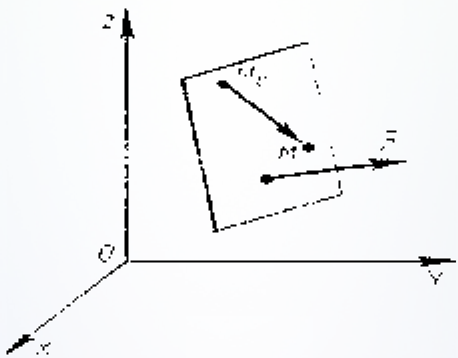


Рис. 31

Рассмотрим произвольную точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ с текущими координатами этой плоскости. Так как вектор $\overrightarrow{M_0M} = \{x - x_0; y - y_0; z - z_0\}$ лежит на плоскости, то он ортогонален вектору $\vec{n}$, следовательно, их скалярное произведение равно нулю:

$$\vec{n}\overrightarrow{M_0M} = 0,$$

или в координатной форме

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0. \qquad (3.21)$$

Уравнение (3.21) искомое.

Общее уравнение плоскости

Раскрыв скобки в уравнении (3.21) и обозначив

$$D=-(Ax_0+By_0+Cz_0),$$

уравнение (3.21) можно записать в виде

$$Ax+By+Cz+D=0. \qquad (3.22)$$

Это есть общее уравнение плоскости.

Следовательно, каждая плоскость в пространстве может быть задана уравнением первой степени относительно переменных x, y и z, и обратно – всякое уравнение первой степени относительно переменных x, y и z задает плоскость.

В уравнении (3.22) коэффициенты A, B и C одновременно не равны нулю.

Неполные уравнения плоскости

Определение. Общее уравнение (3.22) называется полным, если все его коэффициенты – A, B, C, D – отличны от нуля. Если хотя бы один из указанных коэффициентов равен нулю, то уравнение (3.22) называется неполным.

1. $D=0$; уравнение $Ax+By+Cz=0$ определяет плоскость, проходящую через начало координат (поскольку координаты начала удовлетворяют этому уравнению).

2. $A=0$; уравнение $By+Cz+D=0$ определяет плоскость, параллельную оси Ox (поскольку нормальный вектор этой плоскости $\vec{n}=\{0, B, C\}$ перпендикулярен оси Ox).

Аналогично уравнение $Ax+Cz+D=0$ $(B=0)$ определяет плоскость, параллельную оси Oy, а уравнение $Ax+By+D=0$ $(C=0)$ – плоскость, параллельную оси Oz.

3. $A=0$, $B=0$; уравнение $Cz+D=0$ определяет плоскость, параллельную координатной плоскости xOy (так как эта плоскость параллельна одновременно Ox и Oy).

Аналогично уравнение $By + D = 0$ $(A = 0,\ C = 0)$ определяет плоскость, параллельную координатной плоскости xOz, а уравнение $Ax + D = 0$ $(B = 0, C = 0)$ – плоскость, параллельную координатной плоскости yOz.

4. $A = 0,\ B = 0,\ D = 0$; уравнение $Cz = 0$ определяет координатную плоскость xOy. Аналогично уравнение $By = 0$ $(A = 0,\ C = 0,\ D = 0)$ определяет координатную плоскость xOz, а уравнение $Ax = 0$ $(B = 0, C = 0, D = 0)$ – координатную плоскость yOz.

Уравнение плоскости в отрезках

Рассмотрим полное уравнение (3.22). Преобразуем уравнение к виду

$$\frac{x}{-\frac{D}{A}} + \frac{y}{-\frac{D}{B}} + \frac{z}{-\frac{D}{C}} = 1.$$

Обозначим $-\frac{D}{A} = a, -\frac{D}{B} = b, -\frac{D}{C} = c$, получим уравнение

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1. \qquad (3.23)$$

Уравнение (3.23) называется уравнением плоскости в отрезках, а коэффициенты a, b, c есть величины отрезков, отсекаемых плоскостью от осей координат. В самом деле, точка пересечения плоскости с осью Ox определяется из уравнения (3.23) при $y = 0$ и $z = 0$, отсюда $x = a$, таким образом, величина отрезка, отсекаемая плоскостью на оси Ox, равна a. Аналогично устанавливается, что отрезки, отсекаемые плоскостью на осях Oy и Oz, равны b и c.

Нормальное уравнение плоскости

Если в уравнении (3.22) в качестве нормального вектора взять единичный вектор

$$\vec{n}_0 = \frac{\vec{n}}{|\vec{n}|} = \{\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma\},$$

то получим так называемое *нормальное уравнение* плоскости $\vec{n}_0 \overrightarrow{M_0 M} = 0$ или в координатах $\frac{Ax + By + Cz + D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = 0$, или

$$x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - p = 0. \qquad (3.24)$$

Это уравнение можно получить, умножив общее уравнение (3.22) на нормирующий множитель $\mu = \pm\dfrac{1}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$. При этом знак μ берется противоположно знаку свободного члена *D*.

Задача. Найти расстояние *d* от точки до плоскости *Q*, заданной уравнением $\dfrac{Ax + By + Cz + D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = 0$.

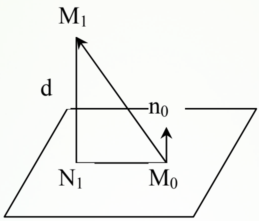


Рис. 32

Из треугольника находим:

$$d = \left| np_{\vec{n}_0} \overline{M_0 M_1} \right| = \frac{\left| \vec{n}_0 \overline{M_0 M_1} \right|}{\left| \vec{n}_0 \right|} = \left| \vec{n}_0 \overline{M_0 M_1} \right| = \frac{\left| Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D \right|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Таким образом, расстояние от точки до плоскости вычисляется по формуле

$$d = \frac{\left| Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D \right|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}. \qquad (3.25)$$

Угол между двумя плоскостями, имеющими нормальные векторы $\vec{n}_1 = \{A_1, B_1, C_1\}$ и $\vec{n}_2 = \{A_2, B_2, C_2\}$, определяется как угол между $\vec{n}_1$ и $\vec{n}_2$; косинус этого угла находится по формуле

$$\cos\varphi = \frac{\vec{n}_1 \vec{n}_2}{\left| \vec{n}_1 \right| \left| \vec{n}_2 \right|} = \frac{A_1 A_2 + B_1 B_2 + C_1 C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}.$$

Прямая линия в пространстве

Прямая в пространстве *l* определяется как линия пересечения плоскостей P_1 и P_2:

$$l: \begin{cases} A_1 x + B_1 y + C_1 z + D_1 = 0; \\ A_2 x + B_2 y + C_2 z + D_2 = 0. \end{cases} \qquad (3.26)$$

Уравнения (3.26) называются общими уравнениями прямой в пространстве.

Канонические уравнения прямой в пространстве имеют вид:

$$\frac{x-x_1}{m}=\frac{y-y_1}{n}=\frac{z-z_1}{p}. \tag{3.27}$$

Здесь $M_1(x_1,\ y_1,\ z_1)$ – точка, через которую проходит прямая, а вектор $\vec{S}=\{m, n, p\}$ называется направляющим вектором прямой.

Чтобы привести общие уравнения прямой к каноническому виду, надо координаты точки M_1 найти из системы (3.26), полагая, например, $z_1=0$, а направляющий вектор

$$\vec{S}=\vec{n}_1\times\vec{n}_2, \tag{3.28}$$

где $\vec{n}_1=\{A_1, B_1, C_1\}$ и $\vec{n}_2=\{A_2, B_2, C_2\}$ – нормальные векторы плоскостей P_1 и P_2.

Уравнения прямой в пространстве, проходящей через две заданные точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и $M_2(x_2, y_2, z_2)$, имеют вид:

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}. \tag{3.29}$$

Угол между двумя прямыми, имеющими направляющие векторы $\vec{S}_1=\{m_1, n_1, p_1\}$ и $\vec{S}_2=\{m_2, n_2, p_2\}$, определяется как угол между $\vec{S}_1$ и $\vec{S}_2$, косинус которого находится по формуле

$$\cos\varphi=\frac{\vec{S}_1\vec{S}_2}{\left|\vec{S}_1\right|\left|\vec{S}_2\right|}=\frac{m_1m_2+n_1n_2+p_1p_2}{\sqrt{m_1^2+n_1^2+p_1^2}\sqrt{m_2^2+n_2^2+p_2^2}}. \tag{3.30}$$

3.5. Поверхности второго порядка. Исследование их геометрических свойств по каноническим уравнениям

1. Эллипсоид (рис. 33)

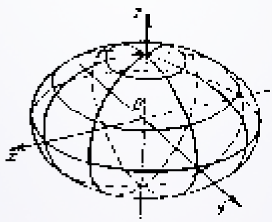


Рис. 33

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ – каноническое уравнение.

Числа *a, b, c* в каноническом уравнении называются полуосями эллипсоида. Как следует из уравнения, координатные плоскости являются плоскостями симметрии, а начало координат – центром симметрии эллипсоида. Эллипсоид – ограниченная поверхность, заключенная в параллелепипеде $|x|\le a, |y|\le b, |z|\le c$. Линии пересечения эллипсоида с любой плоскостью являются эллипсами. Например, при сечении эллипсоида плоскостью $z = h$ $(|h|\le c)$, параллельной координатной плоскости *Oxy*, образуется эллипс:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1-\frac{h^2}{c^2} \quad \text{или} \quad \frac{x^2}{(ak)^2}+\frac{y^2}{(bk)^2}=1,$$

где $k=\sqrt{1-\frac{h^2}{c^2}}$, с полуосями ak и bk, уменьшающимися при увеличении $|h|$. При $|h| = c$ этот эллипс стягивается в точку – вершину эллипсоида. Аналогично получается при рассмотрении сечений эллипсоида плоскостями, параллельными *Oxz*, *Oyz*. Сама плоскость *Oxz* пересекает эллипсоид по эллипсу

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1, \quad y=0,$$

плоскость *Oyz* – по эллипсу

$$\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1, \quad x=0.$$

Если две полуоси эллипсоида равны, например $a = b$, то получаем уравнение

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1.$$

Пересекая этот эллипсоид плоскостью $z = h$ $(|h|\le c)$, получим окружность

$$x^2+y^2=\left(1-\frac{h^2}{c^2}\right)a^2$$

с центром на оси *Oz*, поэтому такой эллипсоид может быть получен вращением эллипса

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1,$$

расположенного в плоскости Oxz, вокруг оси Oz. Такой эллипсоид называется *эллипсоидом вращения*.

Замечание

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=-1$ – уравнение мнимого эллипсоида, так как нет ни одной точки пространства, удовлетворяющей этому уравнению.

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=0$ – уравнение вырожденного эллипсоида. Этому уравнению удовлетворяет только начало координат – центр эллипсоида.

2. Однополостный гиперболоид (рис. 34)

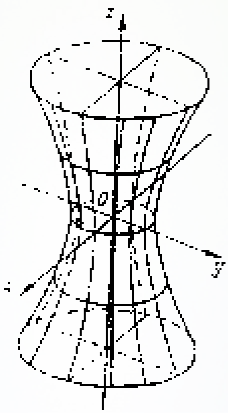


Рис. 34

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$ – каноническое уравнение.

Числа a, b, c называются полуосями гиперболоида, при этом a и b – действительные полуоси, c – мнимая полуось.

Координатные плоскости – плоскости симметрии, начало координат – центр симметрии.

Сечение гиперболоида плоскостями $z=h$ представляют собой эллипсы $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1+\frac{h^2}{c^2}$ с полуосями ak и bk, где $k=\sqrt{1+\frac{h^2}{c^2}}$, которые неограниченно возрастают при $h\to\infty$. Эллипс, получающийся при $h=0$, называется горловым эллипсом гиперболоида.

Плоскость $y = h$ пересекает гиперболоид:

а) при $|h| < b$ по гиперболе $\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 - \frac{h^2}{b^2}$ с полуосями ak и ck, где $k = \sqrt{1 - \frac{h^2}{c^2}}$, которые убывают от a и c до нуля при $|h| \to b$;

б) при $|h| = b$ по паре пересекающихся прямых $\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$;

в) при $|h| > b$ по гиперболе $\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 - \frac{h^2}{b^2}$ с полуосями $k = \sqrt{1 - \frac{h^2}{c^2}}$, которые неограниченно возрастают при $|h| \to \infty$.

Аналогично получается при сечении гиперболоида плоскостями $x = h$.

Важной особенностью однополостного гиперболоида является наличие прямых, целиком лежащих на этой поверхности. Поэтому такую поверхность называют *линейчатой*.

По аналогии с эллипсоидом, если полуоси a и b равны, то он называется гиперболоидом вращения и получается при вращении вокруг оси Oz гиперболы $\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$.

3. Двуполостный гиперболоид (рис. 35)

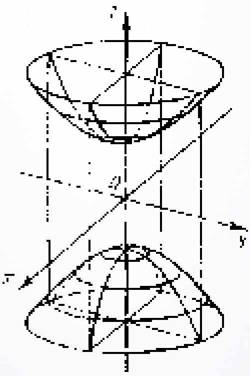


Рис. 35

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1$ – каноническое уравнение.

Числа a, b, c называются полуосями гиперболоида, при этом a и b – мнимые полуоси, c – действительная полуось.

Координатные плоскости – плоскости симметрии, начало координат – центр симметрии.

При сечении плоскостями $z = h$ ($|h| \geq c$) образуются эллипсы $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{h^2}{c^2}-1$ с полуосями ak и bk, где $k=\sqrt{\frac{h^2}{c^2}-1}$, которые неограниченно возрастают при $h \to \infty$. При $|h| = c$ эллипс вырождается в точку – вершину гиперболоида, лежащую на оси Oz.

Плоскости $x = h$ и $y = h$ пересекают гиперболоид по гиперболам.

Если полуоси a и b равны, то он называется гиперболоидом вращения и получается при вращении вокруг оси Oz гиперболы $\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$.

4. Конус (рис. 36)

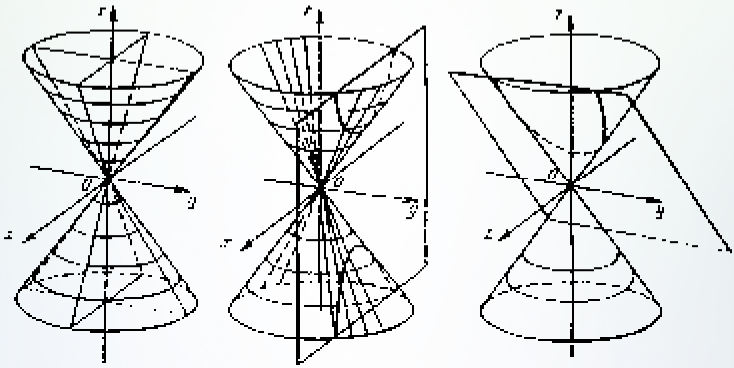


Рис. 36

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$ – каноническое уравнение, где a, b, c – полуоси конуса. Координатные плоскости – плоскости симметрии, начало координат – центр симметрии.

Плоскости $z = h$ ($|h| \neq c$) пересекают конус по эллипсам $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{h^2}{c^2}$, размеры которых неограниченно возрастают при $h \to \infty$. Прямая, проходящая через начало координат и любую точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ конуса, является прямолинейной образующей конуса, т. е. конус – линейчатая поверхность.

Плоскости $x = h$ и $y = h$ пересекают конус по гиперболам, а плоскости $x = 0$ и $y = 0$ – по парам пересекающихся прямых.

Если полуоси a и b равны, то конус называется конусом вращения и получается при вращении вокруг оси Oz прямых $\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$.

5. Эллиптический параболоид (рис. 37)

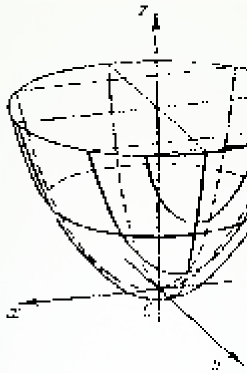


Рис. 37

$2z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$ – каноническое уравнение, где a и b – полуоси параболоида. Плоскости Oxz и Oyz – плоскости симметрии, начало координат – вершина параболоида. Плоскости $z = h$ ($h > 0$) пересекают параболоид по эллипсам, размеры которых увеличиваются при $h \to \infty$. Плоскости $x = h$ и $y = h$ пересекают его по параболам, ветви которых направлены вверх. При $a = b$ получаем параболоид вращения $2a^2z = x^2 + y^2$.

6. Гиперболический параболоид (рис. 38)

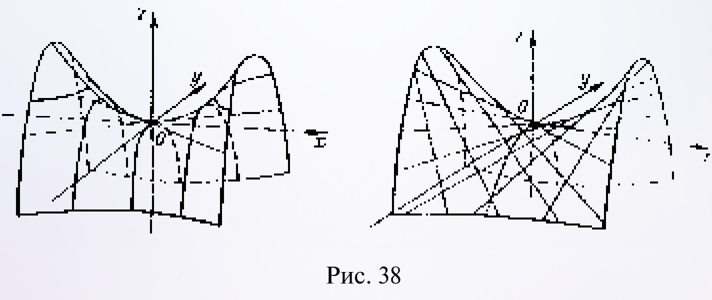


Рис. 38

$2z = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}$ – каноническое уравнение, где a и b – полуоси параболоида. Плоскости Oxz и Oyz – плоскости симметрии, начало координат – вершина параболоида.

Плоскости $x = h$ и $y = h$ пересекают его по параболам, ветви первой параболы направлены вниз, а второй – вверх.

Плоскости $z = h$ пересекают параболоид:

а) при $h < 0$ по гиперболам $-\frac{x^2}{a_1^2} + \frac{y^2}{b_1^2} = 1$, где $a_1^2 = -2a^2h$, $b_1^2 = -2b^2h$;

б) при $h > 0$ по гиперболам $\frac{x^2}{a_1^2} - \frac{y^2}{b_1^2} = 1$, где $a_1^2 = 2a^2h$, $b_1^2 = 2b^2h$;

в) при $h = 0$ по паре пересекающихся прямых.

Как и однополостный гиперболоид, гиперболический параболоид – линейчатая поверхность.

*7. **Цилиндрические поверхности*** (рис. 39)

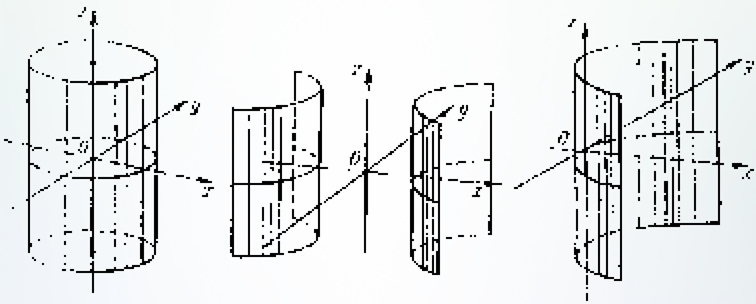


Рис. 39

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ – эллиптический цилиндр;

$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ – гиперболический цилиндр;

$y^2 = 2px$ $(p > 0)$ – параболический цилиндр.

Уравнения этих поверхностей не зависят от z, поэтому все сечения плоскостями $z = h$ совпадают. Прямые, параллельные оси Oz, – образующие цилиндра; линия, получаемая при сечении цилиндра плоскостью $z = 0$ (Oxy), – направляющая цилиндра.

8. Вырожденные поверхности

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=-1$ – мнимый эллиптический цилиндр;

$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=0$ – пара пересекающихся плоскостей;

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=0$ – пара мнимых пересекающихся плоскостей;

$y^2 = a^2$ – пара параллельных плоскостей;

$y^2 = -a^2$ – пара мнимых параллельных плоскостей;

$y^2 = 0$ – пара совпадающих плоскостей.

4. КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА

4.1. Определение комплексных чисел и основные операции над ними

К комплексным числам приходят, рассматривая уравнение $x^2 + 1 = 0$. Не существует действительных чисел, удовлетворяющих этому уравнению. Его корнями являются числа $x = \pm\sqrt{-1}$, которые являются комплексными, при этом число $i = \sqrt{-1}$ называется *мнимой единицей*.

Под *комплексным числом* понимается выражение

$$z = x + i \cdot y, \tag{4.1}$$

где x и y – действительные числа; i – мнимая единица.

Числа $x + i \cdot 0 = x$ отождествляются с действительными числами, в частности, $0 + i \cdot 0 = 0$. Числа $0 + i \cdot y = i \cdot y$ называются *чисто мнимыми*.

Действительные числа x и y называются соответственно действительной и мнимой частями числа z и обозначаются:

$$x = \operatorname{Re} z, \quad y = \operatorname{Im} z.$$

Модулем комплексного числа z называется неотрицательное число $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Пример 4.1. Решением уравнения $k^2 = 2k + 5 = 0$ являются числа $k_1 = -1 + 2i$ и $k = -1 - 2i$. При этом

$$|k_1| = \sqrt{(-1)^2 + 2^2} = \sqrt{5}, \quad |k_2| = \sqrt{(-1)^2 + (-2)^2} = \sqrt{5}.$$

Число $\bar{z} = x - i \cdot y$ называется *сопряженным комплексным числом* к числу $z = x + i \cdot y$, при этом $|z| = |\bar{z}|$. В примере k_1 и k_2 – сопряженные комплексные числа.

Два комплексных числа $z_1 = x_1 + i \cdot y_1$ и $z_2 = x_2 + i \cdot y_2$ равны тогда и только тогда, когда $x_1 = x_2$ и $y_1 = y_2$.

Операции сложения, вычитания, умножения и деления комплексных чисел определяются следующим образом:

1) $z_1 \pm z_2 = (x_1 \pm x_2) + i(y_1 \pm y_2)$;

2) $z_1 z_2 = (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) = x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_1 + x_2 y_2)$, в частности, $z\bar{z} = x^2 + y^2 = |z|^2$;

3) $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{z_1 \bar{z}_2}{z_2 \bar{z}_2} = \dfrac{(x_1 x_2 + y_1 y_2) + i(x_2 y_1 - x_1 y_2)}{x_2^2 + y_2^2}$, $(z_2 \neq 0)$.

4.2. Геометрическое изображение комплексных чисел

Рассмотрим плоскость с прямоугольной системой координат xOy.

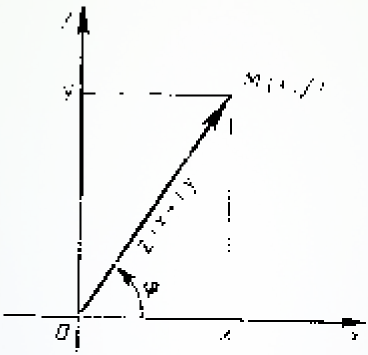


Рис. 40

Так как комплексное число $z = x + i \cdot y$ определяется однозначно парой (x, y) действительных чисел, а каждой паре (x, y) соответствует одна точка плоскости, и наоборот, то каждую точку плоскости можно принять за изображение комплексного числа. В этом случае плоскость называется комплексной, а z — точкой этой плоскости.

На оси Ox расположены действительные числа $z = x + i \cdot 0 = x$, поэтому она называется *действительной осью*, на оси Oy расположены чисто мнимые числа $z = 0 + i \cdot y = i \cdot y$, и она называется *мнимой осью*.

Число $r = |z|$ представляет собой расстояние от точки z до начала координат. Поэтому более удобной является интерпретация комплексного числа $z = x + i \cdot y$ как радиус-вектора $\overline{OM}$. Очевидно, что каждому радиус-вектору $\overline{OM}$ с концом в точке $M(x, y)$ соответствует комплексное число $z = x + i \cdot y$, и наоборот.

Положение точки z на плоскости, кроме ее прямоугольных координат x и y, может быть определено и полярными координатами r, φ, при этом

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi. \tag{4.2}$$

Число φ называется аргументом комплексного числа z. Аргумент считается положительным или отрицательным в зависимости от того, ведется ли отсчет от положительного направления действительной оси против или по часовой стрелке.

По заданной точке z ее модуль определяется единственным образом, а аргумент – с точностью до слагаемого $2\pi k$. Значение аргумента φ, удовлетворяющее условию $-\pi < \varphi \le \pi$, называется *главным* и обозначается $\arg z$, при этом $z = 0$ является единственной точкой комплексной плоскости, для которой аргумент не определен.

4.3. Тригонометрическая форма комплексного числа. Операции над комплексными числами в тригонометрической форме

Рассмотрим число $z = x + i \cdot y$. Согласно формулам (4.2) получим тригонометрическую форму комплексного числа:

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi). \tag{4.3}$$

Используя эту формулу для чисел $z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$ и $z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$, имеем:

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= r_1 r_2\left[(\cos\varphi_1\cos\varphi_2 - \sin\varphi_1\sin\varphi_2) + i(\sin\varphi_1\cos\varphi_2 + \cos\varphi_1\sin\varphi_2)\right] = \\ &= r_1 r_2(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{z_1}{z_2} &= \frac{r_1}{r_2}\cdot\frac{\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1}{\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2} = \frac{r_1}{r_2}\cdot\frac{(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)(\cos\varphi_2 - i\sin\varphi_2)}{(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)(\cos\varphi_2 - i\sin\varphi_2)} = \\ &= \frac{r_1}{r_2}\cdot\frac{(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)(\cos(-\varphi_2) + i\sin(-\varphi_2))}{(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)(\cos\varphi_2 - i\sin\varphi_2)} = \\ &= \frac{r_1}{r_2}(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2)). \end{aligned} \tag{4.4}$$

Следовательно, при умножении комплексных чисел их модули перемножаются, а аргументы складываются. При делении комплексных чисел их модули делятся, а аргументы вычитаются.

Возведение в степень и извлечение корня

Следствием формулы (4.3) является формула

$$z^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi), \tag{4.5}$$

где n – натуральное число. Эта формула называется формулой Муавра. Она показывает, что при возведении комплексного числа в натуральную степень модуль этого числа возводится в степень, а аргумент умножается на показатель степени.

Пусть $\sqrt[n]{z} = \rho(\cos\psi + i\sin\psi)$, где $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$. Тогда на основании формулы (4.5) имеем:

$$z = (\rho(\cos\psi + i\sin\psi))^n = \rho^n(\cos n\psi + i\sin n\psi).$$

Отсюда $\rho^n = r$, $n\psi = \varphi + 2\pi k$, $(k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$.

Тогда $\rho = \sqrt[n]{r}, \quad \psi = \dfrac{\varphi + 2\pi k}{n}$.

Здесь в качестве k достаточно брать лишь значения $k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$, так как при прочих значениях k получаются повторения уже найденных значений корня. Таким образом, окончательно получим

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r(\cos\varphi + i\sin\varphi)} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi + 2\text{p}k}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2\text{p}k}{n}\right), \tag{4.6}$$

$k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$.

4.4. Показательная функция с комплексным показателем. Формула Эйлера

Пусть $z = x + i \cdot y$. Если x и y – действительные переменные, то z называется комплексным переменным. Каждому значению комплексного переменного z на плоскости xOy соответствует определенная точка.

Определение. Если каждому значению комплексного переменного z из некоторой области комплексных значений соответствует определенное значение другой комплексной величины ω, то ω есть *функция комплексного переменного* z и обозначается $\omega = f(z)$.

Рассмотрим показательную функцию комплексного переменного

$$\omega = e^{z} \text{ или } \omega = e^{x+iy}.$$

Комплексные значения функции ω определяются следующим образом:

$$\omega = e^{x+iy} = e^{x}(\cos y + i \sin y). \tag{4.7}$$

Например,

$$z = 1 + \frac{\pi}{4} i, \quad e^{1+\frac{\pi}{4} i} = e\left(\cos\frac{\pi}{4} + i \sin\frac{\pi}{4}\right) = e\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right),$$

$$z = \frac{\pi}{2} i, \quad e^{\frac{\pi}{2} i} = e^{0}\left(\cos\frac{\pi}{2} + i \sin\frac{\pi}{2}\right) = i.$$

Если в формуле (4.7) положим, что $x = 0$, то получим

$$e^{iy} = \cos y + i \sin y. \tag{4.8}$$

Формула (4.8) есть *формула Эйлера*, выражающая показательную функцию с мнимым показателем через тригонометрические функции.

Заменяя в формуле (4.8) y на $-y$, получим:

$$e^{iy} = \cos y - i \sin y. \tag{4.9}$$

Из равенств (4.8) и (4.9) выразим:

$$\begin{cases} \cos y = \dfrac{e^{iy} + e^{-iy}}{2}, \\ \sin y = \dfrac{e^{iy} - e^{-iy}}{2}. \end{cases} \tag{4.10}$$

Этими формулами пользуются для нахождения степеней $\cos y$, $\sin y$ и их произведений через синус и косинус.

Пример 4.2

$$\cos^{2} y = \left(\frac{e^{iy} + e^{-iy}}{2}\right)^{2} = \frac{1}{4}\left(e^{i2y} + 2 + e^{-i2y}\right) =$$

$$= \frac{1}{4}\left[(\cos 2y + i \sin 2y) + 2 + (\cos 2y - i \sin 2y)\right] =$$

$$= \frac{1}{4}(2\cos 2y + 2) = \frac{1}{2}(1 + \cos 2y).$$

Представим комплексное число в тригонометрической форме:

$$z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi).$$

По формуле Эйлера $e^{iy} = \cos y + i \sin y$ получим, что всякое комплексное число можно представить в показательной форме:

$$z = re^{i\varphi}. \tag{4.11}$$

Пример 4.3. Представить числа 1, i, -2, $-i$ в показательной форме.

$$1 = \cos 2\pi k + i \sin 2\pi k = e^{2\pi k i},$$

$$i = \cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} = e^{\frac{\pi}{2} i},$$

$$-2 = 2(\cos \pi + i \sin \pi) = 2e^{\pi i},$$

$$-i = \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = e^{-\frac{\pi}{2} i},$$

5. ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ТИПОВЫХ ЗАДАЧ

5.1. Матрицы. Определители. Системы линейных алгебраических уравнений

Пример 5.1. Найти матрицу $Q = 2A - 3B + 5$, если

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 2 & 4 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ и } B = \begin{pmatrix} 7 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 4 & 5 & -1 \end{pmatrix}.$$

Решение. На множестве матриц роль единицы играет единичная матрица, следовательно, $Q = 2A - 3B + 5 = 2A - 3B + 5E$:

$$Q = 2\begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 2 & 4 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} + (-3)\begin{pmatrix} 7 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 4 & 5 & -1 \end{pmatrix} + 5\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 6 & -2 & 0 \\ 4 & 8 & 2 \\ 6 & 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -21 & 0 & 3 \\ -6 & -3 & -9 \\ -12 & -15 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix},$$

$$Q = \begin{pmatrix} 6-21+5 & -2+0+0 & 0+3+0 \\ 4-6+0 & 8-3+5 & 2-9+0 \\ 6-12+0 & 0-15+0 & 2+3+5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 & -2 & 3 \\ -2 & 10 & -7 \\ -6 & -15 & 10 \end{pmatrix}.$$

Пример 5.2. Найти произведение $A \times B$, если

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & -3 \\ 1 & 3 & -2 & 4 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}..$$

Решение. Проверяем размерность матриц: $A_{2\times3}$, $B_{3\times4} \Rightarrow$ можно перемножать. Умножаем элементы первой строки матрицы A на элементы первого столбца матрицы B, сложив результаты, получаем элемент $c_{11} = 2 \cdot 2 + 3 \cdot 1 + 1 \cdot 0 = 7$.

Затем снова первую строку матрицы A умножаем на следующий (второй) столбец матрицы B поэлементно, вычисляем

$$c_{12} = 2 \cdot 1 + 3 \cdot 3 + 1 \cdot 2 = 13.$$

Снова первую строку матрицы A умножаем на третий столбец матрицы B: $c_{13} = 2 \cdot (-1) + 3 \cdot (-2) + 1 \cdot 1 = -7$.

Наконец, чтобы получить c_{14}, находим сумму произведений элементов той же, первой, строки матрицы A на элементы четвёртого столбца матрицы B: $c_{14} = 2 \cdot (-3) + 3 \cdot 4 + 1 \cdot 0 = 6$.

Таким же образом вычисляем элементы второй строки матрицы C, а именно, перемножая элементы второй строки матрицы A поочерёдно на элементы столбцов матрицы B, пока не переберём все столбцы матрицы B:

$$C_{21} = -1 \cdot 2 + 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0 = -2;$$

$$C_{22} = -1 \cdot 1 + 0 \cdot 3 + 1 \cdot 2 = 1;$$

$$C_{23} = -1 \cdot (-1) + 0 \cdot (-2) + 1 \cdot 1 = 2;$$

$$C_{24} = -1 \cdot (-3) + 0 \cdot 4 + 1 \cdot 0 = 3.$$

Итак, $C = A \cdot B = \begin{pmatrix} 7 & 13 & -7 & 6 \\ -2 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

Размерность матрицы C – (2×4).

Пример 5.3. Найти куб матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$.

Решение. Последовательно находим

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 + 2 \cdot 3 & 1 \cdot 2 + 2 \cdot (-1) \\ 3 \cdot 1 - 1 \cdot 3 & 3 \cdot 2 - 1 \cdot (-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 7 \end{pmatrix},$$

$$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \cdot 1 + 0 \cdot 3 & 7 \cdot 2 + 0 \cdot (-1) \\ 0 \cdot 1 + 7 \cdot 3 & 0 \cdot 2 + 7 \cdot (-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 14 \\ 21 & -7 \end{pmatrix}.$$

Пример 5.4. Найти преобразование, выражающее x_1'', x_2'', x_3'' через x_1, x_2, x_3.

$$\begin{cases} x_1' = x_1 - 3x_2 + 4x_3, \\ x_2' = 2x_1 + x_2 - 5x_3, \\ x_3' = -3x_1 + 5x_2 + x_3; \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1'' = 4x_1' + 5x_2' - 3x_3', \\ x_2'' = x_1' - x_2' - x_3', \\ x_3'' = 7x_1' + 4x_3'. \end{cases}$$

Решение. Перейдём к матричной записи данных систем:

$$X' = AX, \qquad X'' = BX'.$$

Подставив первое равенство во второе, получаем искомое решение

$$X'' = B \cdot A \cdot X,$$

где $B = \begin{pmatrix} 4 & 5 & -3 \\ 1 & -1 & -1 \\ 7 & 0 & 4 \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 2 & 1 & -5 \\ -3 & 5 & 1 \end{pmatrix}$.

Вычисляем:

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} 4 \cdot 1 + 5 \cdot 2 + 3 \cdot 3 & 4 \cdot (-3) + 5 \cdot 1 - 3 \cdot 5 & 4 \cdot 4 - 5 \cdot 5 - 3 \cdot 1 \\ 1 \cdot 1 - 1 \cdot 2 + 1 \cdot 3 & 1(-3) - 1 \cdot 1 - 1 \cdot 5 & 1 \cdot 4 + 1 \cdot 5 - 1 \cdot 1 \\ 7 \cdot 1 + 0 \cdot 2 - 4 \cdot 3 & 7(-3) + 0 \cdot 1 + 4 \cdot 5 & 7 \cdot 4 - 0 \cdot 5 + 4 \cdot 1 \end{pmatrix},$$

$$X'' = B \cdot A \cdot X = \begin{pmatrix} 23 & -22 & -12 \\ 2 & -9 & 8 \\ -5 & -1 & 32 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \begin{cases} x_1'' = 23x_1 - 22x_2 - 12x_3, \\ x_2'' = 2x_1 - 9x_2 + 8x_3, \\ x_3'' = -5x_1 - x_2 + 32x_3. \end{cases}$$

Искомое преобразование найдено.

Пример 5.5. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 3 & 7 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \end{vmatrix}$.

Решение. Применим метод треугольника:

$$\begin{vmatrix} 3 & 7 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 3 \cdot 2 \cdot (-1) + 1 \cdot (-1) \cdot 1 + 7 \cdot 1 \cdot 2 - (2 \cdot 2 \cdot 1 - 1 \cdot 1 \cdot 3 + 1 \cdot 7 \cdot (-1)) = 13.$$

Пример 5.6. Вычислить определитель $\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 5 & 7 & 2 \\ -1 & -2 & -3 & -4 \\ -2 & -3 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 5 & 4 \end{vmatrix}$.

Решение. Вынесем из четвёртого столбца общий множитель 2 и разложим определитель по элементам первой строки:

$$\Delta = 2 \begin{vmatrix} 3 & 5 & 7 & 1 \\ -1 & -2 & -3 & -2 \\ -2 & -3 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 5 & 2 \end{vmatrix} = 2 \sum_{j=1}^{4} a_{1j} A_{1j} =$$

$$= 2 \left[3 \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} -2 & -3 & -2 \\ -3 & 3 & 1 \\ 3 & 5 & 2 \end{vmatrix} + 5 \cdot (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} -1 & -3 & -2 \\ -2 & 3 & 1 \\ 1 & 5 & 2 \end{vmatrix} + \right.$$

$$+7\cdot(-1)^{1+3}\begin{vmatrix}-1 & -2 & -2\\ -2 & -3 & 1\\ 1 & 3 & 2\end{vmatrix}+(-1)^{1+4}\begin{vmatrix}-1 & -2 & -3\\ -2 & -3 & 3\\ 1 & 3 & 5\end{vmatrix}\Bigg].$$

Каждый из определителей найдем методом треугольника:

$$\Delta = 2[3(-12+30-9+18+10-18)-5(-6+20-3+6+5-12)+$$
$$+7(6+12-2-6+3-8)-(15+18-6-9+9-20)]=$$
$$=2(57-50+35-7)=70.$$

Пример 5.7. Найти обратную матрицу для матрицы A:

$$A=\begin{pmatrix}2 & -1\\ 3 & 1\end{pmatrix}.$$

Решение. Вычисляем определитель

$$\det A=\begin{vmatrix}2 & -1\\ 3 & 1\end{vmatrix}=2+3=5\neq 0.$$

Убеждаемся, что данная матрица – невырожденная. Вычисляем алгебраические дополнения:

$$A_{11}=(-1)^{1+1}\cdot 1=1,\quad A_{12}=(-1)^{1+2}\cdot 3=-3,$$
$$A_{21}=(-1)^{2+1}\cdot(-1)=1,\qquad A_{22}=(-1)^{2+2}\cdot 2=2.$$

Вспомогательная матрица $A_s=\begin{pmatrix}1 & -3\\ 1 & 2\end{pmatrix}$.

Составляем обратную матрицу

$$A^{-1}=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}1 & 1\\ -3 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{5} & \frac{1}{5}\\ -\frac{3}{5} & \frac{2}{5}\end{pmatrix}.$$

Пример 5.8. Найти обратную матрицу для матрицы A:

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 0\\ 3 & 2 & 1\\ 0 & 1 & 2\end{pmatrix}.$$

Решение. Вычисляем определитель (методом треугольника):

$$\det A=\begin{vmatrix}1 & 2 & 0\\ 3 & 2 & 1\\ 0 & 1 & 2\end{vmatrix}=1\cdot 2\cdot 2+3\cdot 1\cdot 0+2\cdot 1\cdot 0-0\cdot 2\cdot 0-1\cdot 1\cdot 1-3\cdot 2\cdot 2=$$
$$=-9\neq 0.$$

Вычисляем алгебраические дополнения:

$$A_{11}=\begin{vmatrix}2&1\\1&2\end{vmatrix}=3;\qquad A_{21}=-\begin{vmatrix}2&0\\1&2\end{vmatrix}=-4;\quad A_{31}=\begin{vmatrix}2&0\\2&1\end{vmatrix}=2;$$

$$A_{12}=-\begin{vmatrix}3&1\\0&2\end{vmatrix}=-6;\qquad A_{22}=\begin{vmatrix}1&0\\0&2\end{vmatrix}=2;\qquad A_{32}=-\begin{vmatrix}1&0\\3&1\end{vmatrix}=-1;$$

$$A_{13}=\begin{vmatrix}3&2\\0&1\end{vmatrix}=3;\qquad A_{23}=-\begin{vmatrix}1&2\\0&1\end{vmatrix}=-1;\quad A_{33}=\begin{vmatrix}1&2\\3&2\end{vmatrix}=-4.$$

Составляем обратную матрицу:

$$A^{-1}=-\frac{1}{9}\begin{pmatrix}3&-4&2\\-6&2&-1\\3&-1&-4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{3}&\frac{4}{9}&-\frac{2}{9}\\\frac{2}{3}&-\frac{2}{9}&\frac{1}{9}\\-\frac{1}{3}&\frac{1}{9}&\frac{4}{9}\end{pmatrix}.$$

Проверим результат, используя определение:

$$A\cdot A^{-1}=\begin{pmatrix}1&2&0\\3&2&1\\0&1&2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-\frac{1}{3}&\frac{4}{9}&-\frac{2}{9}\\\frac{2}{3}&-\frac{2}{9}&\frac{1}{9}\\-\frac{1}{3}&\frac{1}{9}&\frac{4}{9}\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}-\frac{1}{3}+\frac{4}{3}+0&\frac{4}{9}-\frac{4}{9}+0&-\frac{2}{9}+\frac{2}{9}+0\\-1+\frac{4}{3}-\frac{1}{3}&\frac{12}{9}-\frac{4}{9}+\frac{1}{9}&-\frac{6}{9}+\frac{2}{9}+\frac{4}{9}\\0+\frac{2}{3}-\frac{2}{3}&0-\frac{2}{9}+\frac{2}{9}&0+\frac{1}{9}+\frac{8}{9}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=E.$$

Обратная матрица найдена верно.

Пример 5.9. Найти ранг матрицы

$$A=\begin{pmatrix}0&2&-4\\-1&-4&5\\3&1&7\\0&5&-10\\2&3&0\end{pmatrix}.$$

Решение. С помощью элементарных преобразований приведём матрицу к ступенчатому виду.

• Запишем матрицу, эквивалентную данной, поменяв местами ее строки, чтобы элемент $a_{11}\neq 0$ (лучше на это место выбрать 1 или (-1)):

$$A \sim \begin{pmatrix} -1 & -4 & 5 \\ 2 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & 7 \\ 0 & 5 & -10 \\ 0 & 2 & -4 \end{pmatrix}.$$

• Получим нули в первом столбце под элементом $a_{11} = -1$, первую строку умножим на 2 и сложим со второй, первую строку умножим на 3 и сложим с третьей, из последних двух строк вынесем общие множители 5 и 2 соответственно:

$$A \sim \begin{pmatrix} -1 & -4 & 5 \\ 0 & -5 & 10 \\ 0 & -11 & 22 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

• Сократим вторую строку на 5, а третью сократим на –11. Затем

вторую строку прибавим к трём последним. Получив нулевые строки, вычеркнем их:

$$A \sim \begin{pmatrix} -1 & -4 & 5 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Ранг последней матрицы, а значит и исходной, равен двум: $\operatorname{rang} A = 2$.

Кратко вышеизложенные действия над матрицей можно символически записать следующим образом:

$$\begin{pmatrix} -1 & -4 & 5 \\ 2 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & 7 \\ 0 & 5 & -10 \\ 0 & 2 & -4 \end{pmatrix} \overset{2,\,3}{\sim} \begin{pmatrix} -1 & -4 & 5 \\ 0 & -5 & 10 \\ 0 & -11 & 22 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & -4 & 5 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \overset{1,\,1,\,1}{\sim}$$

$$\sim \begin{pmatrix} -1 & -4 & 5 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Пример 5.10. Найти ранг матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & -2 & 4 \\ 4 & -2 & 5 & 1 & 7 \\ 2 & -1 & 1 & 8 & 2 \end{pmatrix}$$

Решение

$$A=\begin{pmatrix}2 & -1 & 3 & -2 & 4\\ 4 & -2 & 5 & 1 & 7\\ 2 & -1 & 1 & 8 & 2\end{pmatrix}\overset{a}{\sim}\begin{pmatrix}2 & -1 & 3 & -2 & 4\\ 0 & 0 & -1 & 5 & -1\\ 2 & -1 & 1 & 8 & 2\end{pmatrix}\sim$$

$$\overset{б}{\sim}\begin{pmatrix}2 & -1 & 3 & -2 & 4\\ 0 & 0 & -1 & 5 & -1\\ 0 & 0 & -2 & 10 & -2\end{pmatrix}\overset{в}{\sim}\begin{pmatrix}2 & -1 & 3 & -2 & 4\\ 0 & 0 & -1 & 5 & -1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\sim$$

$$\overset{г}{\sim}\begin{pmatrix}2 & -1 & 3 & -2 & 4\\ 0 & 0 & -1 & 5 & -1\end{pmatrix},\ \operatorname{rang} A = 2.$$

Над матрицей A были проведены следующие преобразования:

а) первая строка матрицы A умножается на (–2) и прибавляется ко второй;

б) первая строка матрицы A умножается на (–1) и прибавляется к последней;

в) вторая строка матрицы A умножается на (–2) и прибавляется к третьей;

г) нулевая строка вычёркивается.

Пример 5.11. Решить систему уравнений

$$\begin{cases}2x+y=5,\\ x+3z=16,\\ 5y-z=10.\end{cases}$$

Решение. Выпишем для данной системы уравнений матрицы A, A_x, A_y, A_z.

$$A=\begin{pmatrix}2 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 3\\ 0 & 5 & -1\end{pmatrix},\qquad A_x=\begin{pmatrix}5 & 1 & 0\\ 16 & 0 & 3\\ 10 & 5 & -1\end{pmatrix},$$

$$A_y=\begin{pmatrix}2 & 5 & 0\\ 1 & 16 & 3\\ 0 & 10 & -1\end{pmatrix},\qquad A_z=\begin{pmatrix}2 & 1 & 5\\ 1 & 0 & 16\\ 0 & 5 & 10\end{pmatrix}.$$

Вычислим их определители, например, методом треугольника:

$$\Delta A=\begin{vmatrix}2 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 3\\ 0 & 5 & -1\end{vmatrix}=2\cdot 0\cdot(-1)+1\cdot 3\cdot 0+1\cdot 5\cdot 0-0\cdot 0\cdot 0-5\cdot 3\cdot 2-$$

$$-1\cdot 1\cdot(-1)=1-30=-29,$$

$$\Delta A_x = \begin{vmatrix} 5 & 1 & 0 \\ 16 & 0 & 3 \\ 10 & 5 & -1 \end{vmatrix} = 5\cdot 0\cdot(-1) + 1\cdot 3\cdot 10 + 16\cdot 5\cdot 0 - 10\cdot 0\cdot 0 - 5\cdot 3\cdot 5 -$$

$$-16 \cdot (-1) \cdot 1 = 30 - 75 + 16 = 46 - 75 = -29,$$

$$\Delta A_y = \begin{vmatrix} 2 & 5 & 0 \\ 1 & 16 & 3 \\ 0 & 10 & -1 \end{vmatrix} = 2\cdot 16\cdot(-1) + 5\cdot 3\cdot 0 + 10\cdot 1\cdot 0 - 0\cdot 16\cdot 0 - 10\cdot 3\cdot 2 -$$

$$-1\cdot 5\cdot(-1) = -32 - 60 + 5 = -87,$$

$$\Delta A_z = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 1 & 0 & 16 \\ 0 & 5 & 10 \end{vmatrix} = 2\cdot 0\cdot 10 + 1\cdot 16\cdot 0 + 1\cdot 5\cdot 5 - 0\cdot 0\cdot 5 - 5\cdot 2\cdot 16 -$$

$$-1 \cdot 1 \cdot 10 = 25 - 10 - 160 = -145.$$

Тогда имеем

$$x = \frac{-29}{-29} = 1,\ y = \frac{-87}{-29} = 3,\ z = \frac{-145}{-29} = 5.$$

Делаем проверку, подставив найденное решение в каждое уравнение системы:

$$2 \cdot 1 + 3 = 5, \quad 1 + 3 \cdot 5 = 16, \quad 5 \cdot 3 - 5 = 10.$$

Пример 5.12. Доказать совместность системы и решить её тремя способами: по формулам Крамера, методом Гаусса и средствами матричного исчисления

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 3x_3 = -5, \\ x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 17, \\ x_1 + x_2 + 3x_3 = 4. \end{cases}$$

Решение. Вычислим определитель системы:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 1 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = (-1)^{1+1} \cdot 2 \cdot \begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} + (-1)^{1+2} \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} +$$

$$+(-1)^{1+3} \cdot (-3) \cdot \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2\cdot(-8) - (1) - 3\cdot(3) = -26.$$

Так как $\Delta \neq 0$, то система имеет единственное решение, которое найдем по формулам Крамера. Для этого найдем Δ_1, Δ_2, Δ_3:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} -5 & 1 & -3 \\ 17 & -2 & 2 \\ 4 & 1 & 3 \end{vmatrix} = -78, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & -5 & -3 \\ 1 & 17 & 2 \\ 1 & 4 & 3 \end{vmatrix} = 130, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -5 \\ 1 & -2 & 17 \\ 1 & 1 & 4 \end{vmatrix} = -52.$$

Подставляя найденные значения определителей в формулы Крамера, получим искомое решение системы:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = 3; \qquad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = -5; \qquad x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = 2.$$

Решим систему методом Гаусса. Выпишем расширенную матрицу системы:

$$A_{\text{р}} = \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -3 & -5 \\ 1 & -2 & 2 & 17 \\ 1 & 1 & 3 & 4 \end{array}\right].$$

Поменяем местами 1-ю и 3-ю строки:

$$A_{\text{р}} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & 2 & 17 \\ 2 & 1 & -3 & -5 \end{array}\right].$$

Умножим 1-ю строку на (-1) и (-2) и сложим соответственно со 2-й и 3-й строкой:

$$A_{\text{р}} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & -3 & -1 & 13 \\ 0 & -1 & -9 & -13 \end{array}\right].$$

Умножим 3-ю строку на (-1) и поменяем местами со 2-й строкой:

$$A_{\text{р}} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 9 & 13 \\ 0 & -3 & -1 & 13 \end{array}\right].$$

Умножим элементы 2-й строки на 3 и сложим с соответствующими элементами 3-й строки:

$$A_p \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 9 & 13 \\ 0 & 0 & 26 & 52 \end{array}\right].$$

Разделим элементы 3-й строки на 26:

$$A_p \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 9 & 13 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right].$$

Система примет вид:

$$\begin{cases} x_1 + \ \ x_2 + 3x_3 = \ \ 4, \\ \qquad\ \ x_2 + 9x_3 = 13, \\ \qquad\qquad\quad x_3 = \ \ 2. \end{cases}$$

Отсюда все неизвестные определяются последовательно без труда: $x_3 = 2$; $x_2 = –5$; $x_1 = 3$.

Решим систему матричным методом. Здесь:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 1 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -5 \\ 17 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

Так как определитель матрицы отличен от нуля ($\Delta = -26$), то матрица A имеет обратную матрицу. Для нахождения обратной матрицы A^{-1} вычислим алгебраические дополнения элементов матрицы A:

$$A_{11} = \begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -8; \quad A_{21} = -\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -6; \quad A_{31} = \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} = -4;$$

$$A_{12} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -1; \quad A_{22} = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 9; \quad A_{32} = -\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -7;$$

$$A_{13} = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 3; \quad A_{23} = -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1; \quad A_{33} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -5.$$

Согласно формуле матрица A^{-1}, обратная к A, имеет вид

$$A^{-1} = -\frac{1}{26}\begin{bmatrix} -8 & -6 & -4 \\ -1 & 9 & -7 \\ 3 & -1 & -5 \end{bmatrix}.$$

Проверим правильность вычисления A^{-1}:

$$A^{-1}\cdot A=-\frac{1}{26}\begin{bmatrix}-8 & -6 & -4\\ -1 & 9 & -7\\ 3 & -1 & -5\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}2 & 1 & -3\\ 1 & -2 & 2\\ 1 & 1 & 3\end{bmatrix}=-\frac{1}{26}\times$$

$$\times\begin{bmatrix}-8\cdot 2+(-6)\cdot 1+(-4)\cdot 1 & -8\cdot 1+(-6)\cdot(-2)+(-4)\cdot 1 & -8\cdot(-3)+(-6)\cdot 2+(-4)\cdot 3\\ -1\cdot 2+9\cdot 1+(-7)\cdot 1 & -1\cdot 1+9\cdot(-2)+(-7)\cdot 1 & -1\cdot(-3)+9\cdot 2+(-7)\cdot 3\\ 3\cdot 2+(-1)\cdot 1+(-5)\cdot 1 & 3\cdot 1+(-1)\cdot(-2)+(-5)\cdot 1 & 3\cdot(-3)+(-1)\cdot 2+(-5)\cdot 3\end{bmatrix}=$$

$$=-\frac{1}{26}\begin{bmatrix}-26 & 0 & 0\\ 0 & -26 & 0\\ 0 & 0 & -26\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}=E.$$

Матричное решение системы имеет вид:

$$\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}=-\frac{1}{26}\begin{bmatrix}-8 & -6 & -4\\ -1 & 9 & -7\\ 3 & -1 & -5\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}-5\\ 17\\ 4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3\\ -5\\ 2\end{bmatrix},$$

откуда следует, что $x_3 = 3$; $x_2 = -5$; $x_1 = 2$.

Пример 5.13. Исследовать систему уравнений и найти её общее решение:

$$\begin{cases}x_1 - x_2 - x_3 = 0,\\ 4x_1 + x_2 = 0,\\ 8x_1 - 3x_2 - 4x_3 = 0.\end{cases}$$

Решение. Однородная система имеет нетривиальное решение, если ранг матрицы системы

$$A=\begin{bmatrix}1 & -1 & -1\\ 4 & 1 & 0\\ 8 & -3 & -4\end{bmatrix}$$

меньше числа неизвестных. Приведем матрицу A к трапецеидальному виду путем элементарных преобразований. Умножим 1-ю строку на 4 и на 8, вычтем соответственно из 2-й и 3-й строки, получим:

$$A\sim\begin{bmatrix}1 & -1 & -1\\ 0 & 5 & 4\\ 0 & 5 & 4\end{bmatrix}.$$

Вычтем из 3-й строки 2-ю, а затем разделим 2-ю строку на 5:

$$A \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 4/5 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Таким образом, ранг матрицы A равен 2 и меньше числа неизвестных $n = 3$, $\mathrm{Rg}\, A < n$. Примем за основные переменные x_1 и x_2; свободная переменная – x_3. Тогда данная система сводится к системе уравнений:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = x_3, \\ 4x_1 + x_2 = 0, \end{cases}$$

решение которой имеет вид:

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{1}{5} x_3 , \\ x_2 = -\dfrac{4}{5} x_3. \end{cases}$$

Придавая свободной переменной x_3 произвольные значения $x_3 = 5t$, где $t \in R$, получим общее решение системы в виде

$$\begin{cases} x_1 = t, \\ x_2 = -4t, \\ x_3 = 5t. \end{cases}$$

Пример 5.14. Найти общее и одно базисное решения системы

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 - 3x_4 - 2x_5 - 2x_6 = 6, \\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 - 3x_5 + x_6 = 2, \\ x_1 + x_2 - x_3 - x_4 + x_5 - 3x_6 = 0, \\ 3x_1 + x_2 + x_3 - 5x_4 - 4x_5 - 4x_6 = 8. \end{cases}$$

Решение. Поскольку число уравнений меньше числа неизвестных, система может быть либо совместной и неопределённой, либо несовместной. Составим расширенную матрицу системы:

$$\widetilde{A} = \left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 1 & 1 & -3 & -2 & -2 & 6 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & -3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -3 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & -5 & -4 & -4 & 8 \end{array}\right).$$

Приведём матрицу к ступенчатому виду. Сначала получим нули в первом столбце, для чего умножим первую строку на (–1) и сложим со второй и третьей, умножим на (–3) и сложим с четвёртой. Получим

$$\widetilde{A} \sim \left(\begin{array}{cccccc:c} 1 & 1 & 1 & -3 & -2 & -2 & 6 \\ 0 & -2 & 0 & 2 & -1 & 3 & -4 \\ 0 & 0 & -2 & 2 & 3 & -1 & -6 \\ 0 & -2 & -2 & 4 & 2 & 2 & -10 \end{array}\right).$$

Умножим вторую строку на (–1) и сложим с последней, при этом первые три переписываем без изменения:

$$\widetilde{A} \sim \left(\begin{array}{cccccc:c} 1 & 1 & 1 & -3 & -2 & -2 & 6 \\ 0 & -2 & 0 & 2 & -1 & 3 & -4 \\ 0 & 0 & -2 & 2 & 3 & -1 & -6 \\ 0 & 0 & -2 & 2 & 3 & -1 & -6 \end{array}\right).$$

Последняя строка одинакова с предыдущей, её отбрасываем, так как, если третью строку умножить на (–1) и прибавить к четвёртой, на месте четвёртой строки получим нулевую. Остаётся три линейно независимых строки. Ранг матрицы, а значит и системы, равен 3, при этом $\operatorname{rang} A = \operatorname{rang} \widetilde{A} = 3$. Следовательно, система совместна и имеет множество решений.

В качестве базисного выбираем минор в первых трёх столбцах и тогда x_1, x_2, x_3 – базисные неизвестные, x_4, x_5, x_6 – свободные неизвестные.

Так как элементы матрицы являются коэффициентами при неизвестных, выписываем систему, эквивалентную исходной, оставляя базисные неизвестные слева, а свободные неизвестные перенося в правую часть (меняя знаки коэффициентов при них на противоположные):

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 6 + 3x_4 + 2x_5 + 2x_6, \\ -2x_2 = -4 - 2x_4 + x_5 - 3x_6, \\ -2x_3 = -6 - 2x_4 - 3x_5 + x_6. \end{cases}$$

Ищем решение системы, начиная с нижнего уравнения, подставляя найденные неизвестные в вышестоящие уравнения:

$$\begin{cases} x_3 = 3 + x_4 + \frac{3}{2}x_5 - \frac{1}{2}x_6, \\ x_2 = 2 + x_4 - \frac{1}{2}x_5 + \frac{3}{2}x_6, \\ x_1 = 1 + x_4 + x_5 + x_6. \end{cases}$$

Мы нашли общее решение системы (выразили базисные неизвестные через свободные).

Найдём базисное решение, придавая свободным неизвестным числовые значения, равные 0. Пусть $x_4 = 0$, $x_5 = 0$, $x_6 = 0$, тогда базисное решение будет

$$X_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Сделаем проверку, подставив найденное базисное решение в каждое уравнение исходной системы:

1) $1 + 2 + 3 + 0 - 0 - 0 \equiv 6$;

2) $1 - 2 + 3 + 0 - 0 + 0 \equiv 2$;

3) $1 + 2 - 3 + 0 + 0 - 0 \equiv 0$;

4) $3 + 2 + 3 + 0 - 0 - 0 \equiv 8$.

Следовательно, система решена верно.

Пример 5.15. Решить матричное уравнение:

$$X \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}.$$

Решение. Введём обозначение $X \cdot A = B$,

где $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$.

Умножим обе части равенства ***справа*** на A^{-1}:

$$X \cdot A \cdot A^{-1} = B \cdot A^{-1},$$

так как $A^{-1} \cdot A = E$ и $E \cdot X = X$, то $X = B \cdot A^{-1}$.

Вычислим определитель, чтобы убедиться в невырожденности матрицы A:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 2 \neq 0.$$

Найдём обратную матрицу, для чего вычислим алгебраические дополнения:

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 1; \quad A_{21} = -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 0; \quad A_{31} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 1;$$

$$A_{12} = -\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -2; \quad A_{22} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2; \quad A_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -2;$$

$$A_{13} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -3; \quad A_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 2; \quad A_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -1.$$

Составляем обратную матрицу, затем находим решение:

$$A^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & 2 & -2 \\ -3 & 2 & -1 \end{pmatrix}; \quad X = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ -1 & 1 & -1 \\ -\frac{3}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1\cdot\frac{1}{2}+1\cdot1-3\cdot\frac{3}{2} & 1\cdot0-1\cdot1+3\cdot1 & 1\cdot\frac{1}{2}+1\cdot1-3\cdot\frac{1}{2} \\ 4\cdot\frac{1}{2}-3-2\cdot\frac{3}{2} & 4\cdot0+3\cdot1+2\cdot1 & 4\cdot\frac{1}{2}-3\cdot1-2\cdot\frac{1}{2} \\ 1\cdot\frac{1}{2}+2\cdot1-5\cdot\frac{3}{2} & 1\cdot0-2\cdot1+5\cdot1 & 1\cdot\frac{1}{2}+2\cdot1-5\cdot\frac{1}{2} \end{pmatrix};$$

$$X = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 0 \\ -4 & 5 & -2 \\ -5 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Пример 5.16. Найти общее решение, какое-либо частное решение и любую фундаментальную систему решений системы линейных уравнений:

$$\begin{cases} 2x_1 - 4x_2 + 5x_3 + 3x_4 = 0, \\ 3x_1 - 6x_2 + 4x_3 + 2x_4 = 0, \\ 4x_1 - 8x_2 + 17x_3 + 11x_4 = 0. \end{cases}$$

Решение. Число уравнений меньше числа неизвестных, следовательно, система имеет множество решений. Найдём сначала общее решение системы. Основную матрицу

$$A=\begin{pmatrix}2&-4&5&3\\3&-6&4&2\\4&-8&17&11\end{pmatrix}$$

приводим к ступенчатому виду методом элементарных преобразований. Предварительно получим в первой строке элемент $a_{11}=-1$.

$$A=\begin{pmatrix}2&-4&5&3\\3&-6&4&2\\4&-8&17&11\end{pmatrix}\begin{matrix}\\-1\\ \\\end{matrix}\sim\begin{pmatrix}-1&2&1&1\\3&-6&4&2\\4&-8&17&11\end{pmatrix}\begin{matrix}3\ \ 4\\ \\ \\\end{matrix}\sim$$

$$\sim\begin{pmatrix}-1&2&1&1\\0&0&7&5\\0&0&21&15\end{pmatrix}\begin{matrix}\\-3\\ \\\end{matrix}\sim\begin{pmatrix}-1&2&1&1\\0&0&7&5\end{pmatrix},$$

$$\mathrm{rang}A=2.$$

За базисный минор можно взять минор $M_2=\begin{vmatrix}2&1\\0&7\end{vmatrix}$, который состоит из элементов, стоящих на пересечении первых двух линейно независимых строк второго и третьего столбцов. Тогда x_2, x_3 – базисные неизвестные, x_1, x_4 – свободные неизвестные. Последней матрице соответствует система, эквивалентная данной. Коэффициенты системы – это элементы последней матрицы:

$$\begin{cases}-x_1+2x_2+x_3+x_4=0,\\ \\ \qquad\qquad 7x_3+5x_4=0,\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_3=-\frac{5}{7}x_4,\\ \\ x_2=\frac{1}{2}x_1-\frac{1}{7}x_4.\end{cases}$$

Общее решение:

$$X=\begin{pmatrix}x_1\\ \frac{1}{2}x_1-\frac{1}{7}x_4\\ -\frac{5}{7}x_4\\ x_4\end{pmatrix},$$

где x_1, x_4 – любые действительные числа.

Пусть, например, $x_1=2$, $x_4=7$.

Тогда $x_2=0$, $x_3=-5$ и $C=\begin{pmatrix}2\\0\\-5\\7\end{pmatrix}$ – частное решение.

Найдём фундаментальную систему решений, придавая свободным неизвестным поочерёдно значения 1 и 0. Результат оформим в виде таблицы:

x_1	x_2	x_3	x_4
1	$\frac{1}{2}$	0	0
0	$-\frac{1}{7}$	$-\frac{5}{7}$	1

$C_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $C_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{7} \\ -\frac{5}{7} \\ 1 \end{pmatrix}$ – фундаментальная система решений.

5.2. Элементы векторной алгебры. Линейные пространства

Пример 5.17. Даны точки *A, B, C*. Показать, что вектор $\overline{m} = \overline{AB} + \overline{CB} + 2\overline{BA}$ коллинеарен вектору $\overline{p} = 2\overline{AC}$.

Решение. Преобразуем сумму:

$$\overline{AB} + \overline{CB} + 2\overline{BA} = (\overline{AB} + \overline{BA}) + (\overline{BA} + \overline{CB}).$$

Пусть $\overline{AB} + \overline{BA} = \overline{O}$, $\overline{BA} + \overline{CB} = \overline{CB} + \overline{BA} = \overline{CA}$, получим

$$\overline{O} + \overline{CA} = \overline{CA}, \quad \overline{CA} = \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot 2\overline{AC}, \quad \overline{m} = -\frac{1}{2}\overline{p},$$

следовательно, векторы $\overline{m}$, $\overline{p}$ коллинеарны.

Пример 5.18. В параллелограмме *ABCD* (рис. 41) $\overline{AB} = \overline{a}$, $\overline{AD} = \overline{b}$, точка ***O*** – точка пересечения диагоналей. Разложить векторы $\overline{AO}$, $\overline{CD}$, $\overline{BD}$, $\overline{OB}$ по векторам $\overline{a}$ и $\overline{b}$.

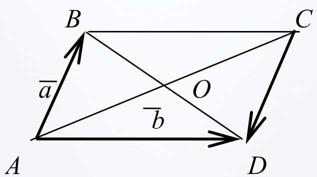


Рис. 41

Решение. По определению операции сложения двух векторов

$$\overline{AC} = \overline{AB} + \overline{AD} = \overline{a} + \overline{b}.$$

Как известно, диагонали параллелограмма, пересекаясь, делятся пополам, значит,

$$\overline{AO} = \frac{1}{2}\overline{AC} = \frac{1}{2}\overline{a} + \frac{1}{2}\overline{b}.$$

Векторы $\overline{AB}$ и $\overline{CD}$ коллинеарны, они расположены на параллельных прямых AB и CD, противоположно направлены, модули их равны, следовательно, $\overline{AB} = -\overline{CD}$, $\overline{CD} = -\overline{a}$.

По определению операции вычитания векторов $\overline{BD} = \overline{b} - \overline{a}$.

Вектор $\overline{OB}$ противоположно направлен вектору $\overline{BD}$, $\left|\overline{OB}\right| = \frac{1}{2}\left|\overline{BD}\right|$, следовательно, $\overline{OB} = -\frac{1}{2}\overline{BD}$; $\overline{OB} = \frac{1}{2}\overline{a} - \frac{1}{2}\overline{b}$.

Пример 5.19. Даны точки A (5, 0) и B (2, 4) на плоскости. Найти длину вектора $\overline{AB}$.

Решение. Найдём координаты вектора $\overline{AB}$:

$$\overline{AB} = \{2 - 5, 4 - 0\} = \{-3, 4\},$$

тогда $\left|\overline{AB}\right| = \sqrt{(-3)^2 + 4^2} = 5.$

Пример 5.20. Даны три последовательные вершины параллелограмма A (1, –2, 3), B (3, 2, 1), C (6, 4, 4). Найти его четвёртую вершину D.

Решение. Сделаем схематический чертёж (рис. 42).

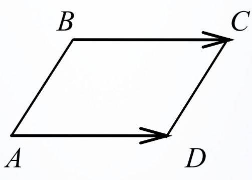


Рис. 42

Рассмотрим векторы $\overline{BC}$ и $\overline{AD}$, которые одинаково направлены, параллельны и одинаковой длины как противоположные стороны параллелограмма. Такие векторы равны: $\overline{BC} = \overline{AD}$. У равных векторов соответствующие координаты равны. Найдём их, обозначив координаты точки D (x_D, y_D, z_D):

$$\overline{BC} = \{6 - 3, 4 - 2, 4 - 1\}, \quad \overline{AD} = \{x_D - 1, y_D + 2, z_D - 3\}.$$

Приравняем соответствующие координаты:

$$\begin{cases} x_D - 1 = 3, \\ y_D + 2 = 2, \\ z_D - 3 = 3, \end{cases}$$

откуда $x_D = 4$, $y_D = 0$, $z_D = 6$.

Таким образом, $D\,(4, 0, 6)$.

Пример 5.21. Найти единичный вектор по направлению вектора $\overline{AB}$, если известны точки $A\,(2, -2, 3)$, $B\,(0, 2, 5)$.

Решение. Найдём сначала вектор и его длину. Тогда единичный вектор по данному направлению будет играть роль масштабной единицы:

$$\overline{a}_0 = \frac{1}{\left|\overline{AB}\right|} \cdot \overline{AB} = \{\cos\alpha,\ \cos\beta,\ \cos\gamma\};$$

$$\overline{AB} = \{0-2,\ 2+2,\ 5-3\} = \{-2,\ 4,\ 2\};$$

$$\left|\overline{AB}\right| = \sqrt{2^2+4^2+2^2} = \sqrt{24} = 2\sqrt{6}.$$

Вычислим направляющие косинусы:

$$\cos\alpha = -\frac{2}{2\sqrt{6}} = -\frac{1}{\sqrt{6}};\ \cos\beta = \frac{4}{2\sqrt{6}} = \frac{2}{\sqrt{6}};\ \cos\gamma = \frac{2}{2\sqrt{6}} = \frac{1}{\sqrt{6}}.$$

Единичный вектор данного направления найден верно, так как

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = \left(-\frac{1}{\sqrt{6}}\right)^2 + \left(\frac{2}{\sqrt{6}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{6}}\right)^2 = 1.$$

Пример 5.22. По координатам вершин пирамиды $A\,(3; -2; 2)$, $B\,(1; -3; 1)$, $C\,(2; 0; 4)$, $D\,(6; -4; 6)$ средствами векторной алгебры найти:

1) длины ребер AB и AC;
2) угол между ребрами AB и AC;
3) площадь грани ABC;
4) проекцию вектора $\overrightarrow{AB}$ на $\overrightarrow{AC}$;
5) объем пирамиды $ABCD$;
6) уравнения прямых AB и AC;
7) уравнения плоскостей ABC и ABD;
8) угол между плоскостями ABC и ABD.

Решение

1. Найдем векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$:

$$\overrightarrow{AB} = (1-3)\vec{i} + (-3-(-2))\vec{j} + (1-2)\vec{k} = -2\vec{i} - \vec{j} - \vec{k} = \{-2;-1;-1\};$$
$$\overrightarrow{AC} = \{-1;\ 2;\ 2\}.$$

Длины этих векторов, т. е. ребер *AB* и *AC*, таковы:

$$\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{(-2)^2 + (-1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{6} \approx 2{,}45;$$

$$\left|\overrightarrow{AC}\right| = \sqrt{(-1)^2 + 2^2 + 2^2} = 3.$$

2. Скалярное произведение векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$:

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = (-2)\cdot(-1) + (-1)\cdot 2 + (-1)\cdot 2 = -2,$$

а косинус угла между ними:

$$cos\varphi = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{\left|\overrightarrow{AB}\right| \cdot \left|\overrightarrow{AC}\right|} = \frac{-2}{3 \cdot \sqrt{6}} = -0{,}27\cdot$$

Отсюда следует, что φ – тупой угол, равный

$$\pi - \arccos 0{,}27 = 1{,}85 \text{ рад}$$

с точностью до 0,01. Это и есть искомый угол между ребрами *AB* и *AC*.

3. Площадь грани *ABC* равна половине площади параллелограмма, построенного на векторах $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$, т. е. половине модуля векторного произведения этих векторов:

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 5\vec{j} - 5\vec{k}\,.$$

Здесь определитель вычисляется с помощью разложения по первой строке. Следовательно,

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right| = \frac{1}{2}\sqrt{5^2 + (-5)^2} = \frac{5\sqrt{2}}{2} \approx 3{,}54 \text{ (кв. ед.)}.$$

4. Найдём проекцию вектора $\overrightarrow{AB}$ на $\overrightarrow{AC}$

$$Пр_{\overrightarrow{AC}}\overrightarrow{AB} = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{\left|\overrightarrow{AC}\right|} = \frac{-2}{3} \approx -0{,}67\,.$$

5. Объем пирамиды равен 1/6 объема параллелепипеда, построенного на векторах $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$. Вектор $\overrightarrow{AD} = \{3;\ -2;\ 4\}$. Получим:

$$V=\frac{1}{6}\left|\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD}\right|=\frac{1}{6}\mathrm{mod}\begin{vmatrix}-2 & -1 & -1\\ -1 & 2 & 2\\ 3 & -2 & 4\end{vmatrix}=\frac{1}{6}\mathrm{mod}(-30)=5 \text{ (куб. ед.)}.$$

6. Уравнения прямых *AB* и *AC* найдем как уравнения прямых, проходящих через две данные точки:

$$(AB)\,\frac{x-3}{1-3}=\frac{y+2}{-3+2}=\frac{z-2}{1-2}; \qquad \frac{x-3}{-2}=\frac{y+2}{-1}=\frac{z-2}{-1};$$

$$(AC)\,\frac{x-3}{2-3}=\frac{y+2}{0+2}=\frac{z-2}{4-2}; \qquad \frac{x-3}{-1}=\frac{y+2}{2}=\frac{z-2}{2}.$$

7. Уравнения плоскостей *ABC* и *ABD*:

$$\begin{vmatrix}x-3 & y+2 & z-2\\ 1-3 & -3+2 & 1-2\\ 2-3 & 0+2 & 4-2\end{vmatrix}=0, \qquad \begin{vmatrix}x-2 & y+2 & z-2\\ -2 & -1 & -1\\ -1 & 2 & 2\end{vmatrix}=0,$$

т. е. $5(y+2)-5(z-2)=0, \quad 5y-5z+20=0.$

$$\begin{vmatrix}x-3 & y+2 & z-2\\ 1-3 & -3+2 & 1-2\\ 6-3 & -4+2 & 6-2\end{vmatrix}=0, \qquad \begin{vmatrix}x-2 & y+2 & z-2\\ -2 & -1 & -1\\ 3 & -2 & 4\end{vmatrix}=0,$$

т. е. $-6(x-2)+(y+2)+7(z-2)=0, \quad -6x+y+7z=0.$

По уравнениям плоскостей определим их нормальные векторы:

$$\vec{n}_1=\{0;\,5;\,-5\} \text{ и } n_2=\{-6;\,1;\,7\}.$$

8. Найдём угол φ между плоскостями *ABC* и *ABD*:

$$\cos\varphi=\frac{\vec{n}_1\,\vec{n}_2}{|\vec{n}_1|\,|\vec{n}_2|}=\frac{0+5-35}{\sqrt{25+25}+\sqrt{36+1+49}}=-\frac{30}{5\sqrt{2}\sqrt{86}}\approx-0{,}46,$$

откуда, считая угол между плоскостями острым,

$$\varphi=\pi-\arccos(-0{,}46)=\pi-2{,}04=1{,}1 \text{ рад}.$$

Пример 5.23. Определить собственные значения и собственные векторы матрицы

$$A=\begin{bmatrix}1 & 6\\ 1 & 2\end{bmatrix}.$$

Решение. Характеристическое уравнение для данной матрицы имеет вид

$$\begin{vmatrix}1-\lambda & 6\\ 1 & 2-\lambda\end{vmatrix}=0, \ \lambda^2-3\lambda-4=0,$$

откуда следует, что матрица A имеет два собственных значения $\lambda_1 = 4$ и $\lambda_2 = -1$. Собственный вектор X_1, соответствующий $\lambda_1 = 4$, определяется из системы уравнений вида

$$\begin{cases}(1-4)x_1 \qquad + 6x_2 = 0, \\ \qquad x_1 + (2-4)x_2 = 0,\end{cases} \text{или} \begin{cases}-3x_1 + 6x_2 = 0, \\ \quad x_1 - 2x_2 = 0,\end{cases}$$

которая сводится к одному уравнению $x_1 = 2x_2$. Полагая $x_2 = t$, получаем решение в виде $x_1 = 2t$, $x_2 = t$. Пронормируем это решение, т. е. найдем такое значение t, при котором длина собственного вектора равна единице:

$$X_1 = 1 = \sqrt{(2\mathrm{t})^2 + (\mathrm{t})^2}, \; t = \frac{1}{\sqrt{5}}.$$

Следовательно, первый собственный вектор есть

$$X_1 = \begin{bmatrix} 2/\sqrt{5} \\ 1/\sqrt{5} \end{bmatrix}.$$

Аналогично найдем второй собственный вектор X_2:

$$\begin{cases}(1+1)x_1 \qquad + 6x_2 = 0, \\ \qquad x_1 + (2+1)x_2 = 0,\end{cases} \text{или} \begin{cases}x_1 = -3t, \\ x_2 = \quad t.\end{cases}$$

$$\sqrt{(-3t)^2 + (\mathrm{t})^2} = 1, \quad t = \frac{1}{\sqrt{10}}, \quad X_2 = \begin{bmatrix} -3/\sqrt{10} \\ 1/\sqrt{10} \end{bmatrix}.$$

Таким образом, матрица имеет два различных собственных значения $\lambda_1 = 4$ и $\lambda_2 = -1$ и два собственных вектора.

Пример 5.24. Найти характеристические числа и собственные векторы линейного преобразования с матрицей $A = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$.

Решение. Запишем линейное преобразование в виде

$$x_1' = \lambda x_1 = 5x_1 + 4x_2,$$
$$x_2' = \lambda x_2 = 2x_1 + 3x_2.$$

Составим характеристическое уравнение:

$$\begin{vmatrix} 5-\lambda & 4 \\ 2 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (5-\lambda)(3-\lambda) - 8 = 15 - 3\lambda - 5\lambda + \lambda^2 - 8 = 0,$$

$$\lambda^2 - 8\lambda + 7 = 0.$$

Корни характеристического уравнения: $\lambda_1 = 7$; $\lambda_2 = 1$.

Для корня $\lambda_1 = 7$:

$$\begin{cases}(5-7)x_1 + 4x_2 = 0, \\ 2x_1 + (3-7)x_2 = 0,\end{cases} \quad \begin{cases}-2x_1 + 4x_2 = 0, \\ 2x_1 - 4x_2 = 0.\end{cases}$$

Из системы получается зависимость: $x_1 - 2x_2 = 0$. Собственные векторы для первого корня характеристического уравнения имеют координаты $(t;\ 0{,}5t)$, где t – параметр.

Для корня $\lambda_2 = 1$:

$$\begin{cases}(5-1)x_1 + 4x_2 = 0, \\ 2x_1 + (3-1)x_2 = 0,\end{cases} \quad \begin{cases}4x_1 + 4x_2 = 0, \\ 2x_1 + 2x_2 = 0.\end{cases}$$

Из системы получается зависимость: $x_1 + x_2 = 0$. Собственные векторы для второго корня характеристического уравнения имеют координаты $(t;\ -t)$, где t – параметр.

Полученные собственные векторы можно записать в виде

$$\overrightarrow{u_1} = t(\overrightarrow{e_1} + 0{,}5\overrightarrow{e_2}); \quad \overrightarrow{u_2} = t(\overrightarrow{e_1} - \overrightarrow{e_2}).$$

5.3. Элементы аналитической геометрии

Пример 5.25. Построить кривую $\rho = 2\sin 2\varphi$. Записать уравнение в декартовых координатах.

Решение. Подсчитываем таблицу значений, выбрав постоянный шаг $h = \frac{\pi}{4}$, из расчёта $\sin 2\varphi = 1 \Rightarrow 2\varphi = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{4}$.

φ	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{6\pi}{4}$	$\frac{7\pi}{4}$	2π
ρ	0	2	0	–2	0	2	0	–2	0

Строим лучи согласно верхней строчке таблицы и на каждом откладываем соответствующее значение радиуса. Отрицательные значения ρ откладываются по указанному лучу, но в противоположную сторону от начала координат (рис. 43).

Кривая называется четырёхлепестковой розой.

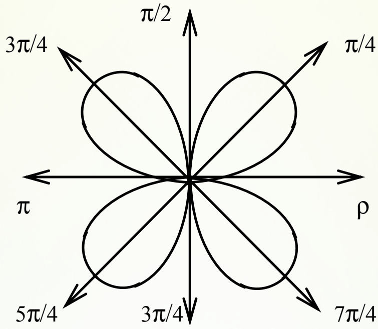


Рис. 43

Получим уравнение этой кривой в декартовых координатах, используя зависимости

$$x^2 + y^2 = \rho^2, \ \cos\varphi = \frac{x}{\rho} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \ \sin\varphi = \frac{y}{\rho} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

Чтобы воспользоваться этими формулами, необходимо предварительно преобразовать уравнение

$$\rho = 2 \sin 2\varphi = 2 \cdot 2 \sin \varphi \cos \varphi.$$

Теперь можно подставлять формулы перехода

$$\sqrt{x^2 + y^2} = \frac{4x \cdot y}{\sqrt{x^2 + y^2}\sqrt{x^2 + y^2}} \Rightarrow (x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}} = 4xy.$$

Как видим, в декартовой системе эту кривую построить очень сложно.

Пример 5.26. Построить кривую $\rho = 2\sin\varphi$. Записать уравнение в декартовых координатах.

Решение. Построить по точкам график функции $\rho = 2\sin\varphi$ в полярной системе координат. Найти уравнение полученной кривой в прямоугольной системе координат, начало которой совмещено с полюсом, а положительная полуось Ox – с полярной осью. Определить вид кривой.

Так как полярный радиус не отрицателен, т. е. $\rho \geq 0$, то $\varphi \geq 0$, откуда $0 \leq \varphi \leq \pi$; значит, вся кривая расположена в верхней полуплоскости. Составим вспомогательную таблицу, взяв максимальный шаг $h = \frac{\pi}{8}$:

Номера точек, k	1	2	3	4	5	6	7	8	9
φ_k	0	$\pi/8$	$\pi/4$	$3\pi/8$	$\pi/2$	$5\pi/8$	$3\pi/4$	$7\pi/8$	π
$\sin\varphi$	0	0,38	0,71	0,92	1	0,92	0,71	0,38	0
$\rho = 2\sin\varphi$	0	0,76	1,42	1,84	2	1,84	1,42	0,76	0

Для построения кривой на луче, проведенном из полюса под углом φ_k, откладываем соответствующее значение полярного радиуса $\rho_k = \rho(\varphi_k)$ и соединяем полученные точки (рис. 44).

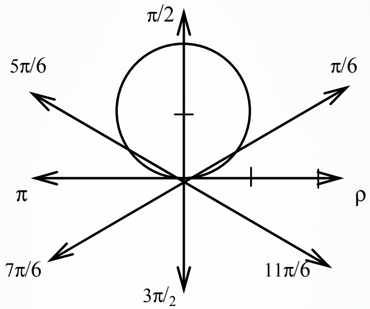


Рис. 44

Найдем уравнение кривой $\rho = 2\sin\varphi$ в прямоугольной системе координат. Для этого заменим ρ и φ их выражениями через x и y:

$$\sqrt{x^2+y^2} = 2y\Big/\sqrt{x^2+y^2}, \quad x^2 + y^2 = 2y.$$

Окончательно имеем $x^2 + (y-1)^2 = 1$, т. е. уравнение выражает окружность с центром в точке (0, 1) и единичным радиусом.

Получим уравнение этой кривой в декартовых координатах, подставив формулы перехода:

$$x^2 + y^2 = \rho^2; \quad \sin\varphi = \frac{y}{\rho} = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}};$$

$$\rho = 2\sin\varphi \Rightarrow \sqrt{x^2+y^2} = 2\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

или $x^2 + y^2 = 2y$ – это уравнение окружности, смещённой по оси Oy, с центром в точке (0, 1) и радиусом $R = 1$ (рис. 44);

$x^2 + (y-1)^2 = 1$ – её каноническое уравнение.

Пример 5.27. Построить кривую $\rho = 2\cos 3\varphi$. Записать уравнение в декартовых координатах.

Решение. Подсчитываем таблицу значений, выбрав постоянный шаг $\frac{\pi}{6}$ из расчёта $\cos 3\varphi = 0 \Rightarrow 3\varphi = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{6}$.

φ	0	$\pi/6$	$\pi/3$	$\pi/2$	$2\pi/3$	$5\pi/6$	π	$7\pi/6$	$4\pi/3$	$3\pi/2$	$5\pi/3$	$11\pi/6$	2π
ρ	2	0	–2	0	2	0	–2	0	2	0	–2	0	2

Строим лучи согласно верхней строчке таблицы и на каждом откладываем соответствующее значение радиуса. Отрицательные значения ρ откладываются по указанному лучу, но в противоположную сторону от начала координат (рис. 45).

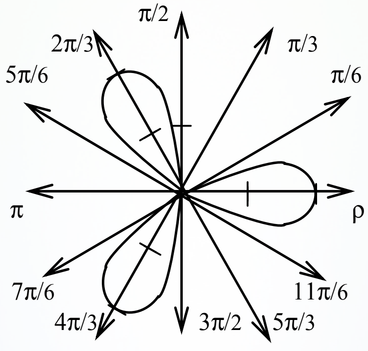


Рис. 45

Преобразуем уравнение $\rho = 2\cos 3\varphi = 2(4\cos^3\varphi - 3\cos\varphi)$.

Теперь можно подставлять формулы перехода

$$\sqrt{x^2+y^2} = \frac{2x}{\sqrt{x^2+y^2}}\left(\frac{4x^2}{x^2+y^2} - 3\right), \text{ или } \left(x^2+y^2\right)^2 = 2x\left(x^2-3y^2\right).$$

Пример 5.28. Найти уравнение прямой, проходящей через точку $A\,(2, 7)$: а) параллельно прямой α; б) перпендикулярно прямой α, если прямая α задана уравнением $3x - 5y + 6 = 0$.

Решение

1. Поскольку искомая прямая параллельна данной, то к этим двум прямым можно построить один вектор нормали (рис. 46). Найдём его из уравнения прямой α.

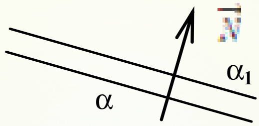


Рис. 5.6

Координатами этого вектора являются коэффициенты при неизвестных в уравнении прямой, значит, $\overline{N}$ {3, –5}. Записываем ответ:

$$3(x-2)-5(y-7)=0 \Rightarrow 3x-5y+29=0.$$

2. Прямые перпендикулярны и, следовательно, их угловые коэффициенты подчиняются условию $k_1 \cdot k = -1$. Приведём уравнение α к виду $y = kx = b \Rightarrow\ y=\frac{3}{5}x+\frac{6}{5}$. Значит, угловой коэффициент искомой прямой $k_1=-\frac{5}{3}$. Записываем ответ:

$$y-y_0=k(x-x_0) \Rightarrow y-7=-\frac{5}{3}(x-2) \Rightarrow 5x+3y-31=0.$$

Пример 5.29. Составить уравнение прямой, проходящей через точки M (1, 2) и B (3, –1).

Решение. Согласно $y-y_1=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1)$, или $\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{x-x_1}{x_2-x_1}$ уравнение искомой прямой имеет вид:

$$\frac{y-2}{-1-2}=\frac{x-3}{1-3},$$

откуда

$$\frac{y-2}{-3}=\frac{x-3}{-2} \quad \text{или} \quad 2(y-2)=3(x-3),$$

окончательно получаем искомое уравнение $3x-2y-5=0$.

Пример 5.30. Составить уравнение прямой, проходящей через точку M (2, 1) и точку пересечения прямых $x+y-1=0, x-y+2=0$.

Решение. Координаты точки пересечения прямых найдём, решив совместно данные уравнения:

$$\begin{cases} x+y-1=0 \\ x-y+2=0. \end{cases}$$

Если сложить почленно эти уравнения, получим $2x+1=0$, откуда $x=-\frac{1}{2}$. Подставим найденное значение в любое уравнение, найдём значение ординаты y:

$$-\frac{1}{2}-y+2=0\text{, или } \quad y=\frac{3}{2}.$$

Теперь напишем уравнение прямой, проходящей через точки (2, 1) и $\left(-\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right)$:

$$\frac{y-1}{\frac{3}{2}-1}=\frac{x-2}{-\frac{1}{2}-2}, \quad \text{или} \quad \frac{y-1}{1}=\frac{x-2}{-5}.$$

Отсюда

$$\frac{y-1}{1}=\frac{x-2}{-5}, \quad \text{или} \quad -5(y-1)=x-2.$$

Окончательно получаем уравнение искомой прямой:

$$x+5y-7=0.$$

Пример 5.31. Найти уравнение прямой, проходящей через точки $M\,(2, 1)$ и $N\,(2, 3)$.

Решение. Используя формулу $y-y_1=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1)$ или $\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{x-x_1}{x_2-x_1}$, получим уравнение $\frac{y-1}{3-1}=\frac{x-2}{2-2}$.

Оно не имеет смысла, так как второй знаменатель равен нулю. Из условия задачи видно, что абсциссы обеих точек имеют одно и то же значение. Значит, искомая прямая параллельная оси Oy и её уравнение имеет вид: $x = 2$.

Замечание. Если при записи уравнения прямой по формуле $y-y_1=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1)$ или $\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{x-x_1}{x_2-x_1}$ один из знаменателей окажется равным нулю, то искомое уравнение можно получить, приравняв к нулю соответствующий числитель.

Пример 5.32. Задачу вычисления расстояния от данной точки до данной прямой можно легко решить, используя уже полученные знания. Пусть дана точка $M\,(-1, 1)$ и прямая $3x - 4y + 12 = 0$. Необходимо найти расстояние от этой точки до прямой EF. Расстояние D от точки M до прямой EF равно длине перпендикуляра MN, опущенного из M на EF.

Решение. Найдём угловой коэффициент K_1 прямой EF, для этого разрешим уравнение прямой EF относительно y:

$$y = \frac{3}{4}x + 3;\ K_1 = \frac{3}{4}\ . \qquad (5.1)$$

Используя условие перпендикулярности двух прямых, найдём угловой коэффициент K_2 перпендикуляра MN:

$$K_1 \cdot K_2 = -1 \quad \text{или} \quad \frac{3}{4}K_2 = -1,$$

отсюда $K_2 = -\frac{4}{3}$.

Теперь напишем уравнение прямой MN, проходящей через точку M (–1, 1) с угловым коэффициентом $K_2 = -\frac{4}{3}$:

$$y - 1 = -\frac{4}{3}(x + 1)\text{, или } y = -\frac{4}{3}x - \frac{1}{3}. \qquad (5.2)$$

Вычислим координаты точки N – точки пересечения прямой EF с перпендикуляром MN. Координаты этой точки удовлетворяют уравнениям (5.1) и (5.2), мы их получим, решив совместно эти уравнения. Приравняем правые части этих уравнений:

$$\frac{3}{4}x + 3 = -\frac{4}{3}x - \frac{1}{3}$$

и вычислим отсюда абсциссу x точки N:

$$\frac{3}{4}x + \frac{4}{3}x = -\frac{1}{3} - 3 \quad \text{или} \quad \frac{25}{12}x = -\frac{10}{3},$$

откуда $x = -\frac{8}{5}$.

Подставив найденное значение, например, в уравнение (5.1), вычислим ординату точки N:

$$y = \frac{3}{4} \cdot \left(-\frac{8}{5}\right) + 3 \text{ или } y = -\frac{6}{5} + 3,$$

откуда $y = \frac{9}{5}$. Итак, точка N имеет координаты $N\left(-\frac{8}{5}; \frac{9}{5}\right)$.

Найдём теперь расстояние между точками M и N:

$$|MN| = d = \sqrt{\left(-1 + \frac{8}{5}\right)^2 + \left(1 - \frac{9}{5}\right)^2} = 1\ .$$

Эту задачу можно легко решить, используя общую формулу вычисления расстояния d от точки $M(x_0, y_0)$ до прямой $Ax + By + C = 0$, которая имеет вид

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

Для нашей задачи мы получим:

$$d = \frac{|3 \cdot (-1) - 4 \cdot 1 + 12|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{5}{\sqrt{25}} = 1.$$

Пример 5.33. Привести уравнение $4xy + 3y^2 = 36$ к каноническому виду и классифицировать.

Решение. Имеем квадратичную форму с матрицей

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Составим характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} 0-\lambda & 2 \\ 2 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0 \text{ или } (3 - \lambda)(-\lambda) - 4 = 0.$$

Находим корни уравнения, называемые характеристическими числами:

$$\lambda^2 - 3\lambda - 4 = 0, \quad \lambda = \frac{3 \pm \sqrt{9+16}}{2}, \quad \lambda_1 = 4, \lambda_2 = -1.$$

Квадратичная форма примет вид $4x^2 - y^2$.

Соответственно, кривая примет вид $4X^2 - Y^2 = 36$.

Уравнение линии найдено. Это гипербола $\frac{X^2}{9} - \frac{Y^2}{36} = 1$.

Пример 5.34. Найти фокусы и построить

$$3x^2 + 2y^2 + 6x - 8y - 1 = 0.$$

Решение. Методом выделения полного квадрата приводим уравнение к каноническому виду

$$3(x^2 + 2x + 1 - 1) + 2(y^2 - 4y + 4 - 4) - 1 = 0,$$

$$3(x+1)^2 + 2(y-2)^2 = 12 \Rightarrow \frac{(x+1)^2}{4} + \frac{(y-2)^2}{6} = 1.$$

Выполняем параллельный перенос системы xOy в точку O_1 $(-1, 2)$ (рис. 47) и строим в системе XO_1Y эллипс $\frac{X^2}{4} + \frac{Y^2}{6} = 1$, где $a = 2$, $b = \sqrt{6}$, $c = \sqrt{b^2 - a^2} = \sqrt{6-4} = \sqrt{2}$. Фокусы F_1, F_2 расположены на оси O_1Y в точках $(0, \pm\sqrt{2})$. В системе xOy фокусы имеют координаты F1$(-1, 2 + \sqrt{2})$, F2$(-1, 2 - \sqrt{2})$.

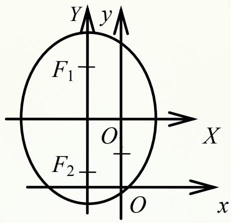


Рис. 47

Пример 5.35. Записать в каноническом виде уравнение

$$5x^2 + 8xy + 5y^2 + 36x + 36y + 63 = 0.$$

Решение. Уравнение содержит произведение координат. Необходимо прежде всего избавиться от этого слагаемого с помощью поворота системы координат. Подставим формулы в уравнение кривой

$$5(X\cos\varphi - Y\sin\varphi)^2 + 8(X\cos\varphi - Y\sin\varphi)(X\sin\varphi + \cos\varphi) +$$
$$+ 5(X\sin\varphi + Y\cos\varphi)^2 + 36(X\cos\varphi - Y\sin\varphi + X\sin\varphi + Y\cos\varphi) = -63.$$

$$X^2(5\cos^2\varphi + 8\cos\varphi\sin\varphi + 5\sin^2\varphi) +$$
$$Y^2(5\sin^2\varphi - 8\cos\varphi\sin\varphi + 5\cos^2\varphi) +$$
$$XY(-10\cos\varphi\sin\varphi + 8\cos^2\varphi - 8\sin^2\varphi + 10\cos\varphi\sin\varphi) +$$
$$+36X(\cos\varphi + \sin\varphi) + 36Y(\cos\varphi - \sin\varphi) = -63.$$

Выбираем угол поворота из условия, что коэффициент при XY равняется нулю:

$$8(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi) = 0,\ \cos 2\varphi = 0,\quad \varphi = \pm\frac{\pi}{4}.$$

Возьмём $\varphi = \dfrac{\pi}{4}$. Тогда $\cos\varphi = \sin\varphi = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$. Подставим выбранное значение в уравнение, одновременно преобразуя его с учётом известных тригонометрических формул

$$\cos^2\varphi + \sin^2\varphi = 1,\ \sin 2\varphi = 2\sin\varphi\cos\varphi.$$

Итак,

$$X^2\left(5 + 8\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + Y^2\left(5 - 8\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + 36X\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -63,$$

$$9X^2 + Y^2 + 36\sqrt{2}X = -63.$$

Получили уравнение эллипса в системе XOY, повёрнутой на 45° относительно старой системы xOy. Остаётся выполнить параллельный перенос. Воспользуемся методом выделения полного квадрата:

$$9(X^2 + 4\sqrt{2}X + 8) - 72 + Y^2 = -63 \quad \text{или} \quad 9(X + 2\sqrt{2})^2 + Y^2 = 9.$$

Выполняем параллельный перенос системы координат XOY в точку $O_1(-2\sqrt{2}, 0)$ (рис. 48) и строим эллипс $\frac{X_1^2}{1} + \frac{Y_1^2}{9} = 1$ в системе $X_1O_1Y_1$.

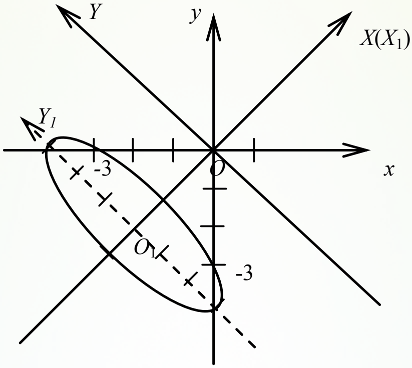


Рис. 48

Заметим, что если выбрать

$$\varphi = -\frac{\pi}{4}, \quad \cos\varphi = \frac{\sqrt{2}}{2}, \; \sin\varphi = -\frac{\sqrt{2}}{2},$$

то получим уравнение эллипса, оси которого перпендикулярны осям предыдущего эллипса:

$$X^2(5 - 4) + Y^2(5 + 4) + 36Y\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -63,$$

$$X^2 + 9Y^2 + 36\sqrt{2}Y = -63 \quad \text{или} \quad X^2 + 9(Y^2 + 4\sqrt{2}Y + 8) - 72 = -63,$$

$$X^2 + 9(Y + 2\sqrt{2})^2 = 9, \quad O_1(-2\sqrt{2}, 0), \quad \frac{X_2^2}{9} + \frac{Y_2^2}{1} = 1.$$

Пример 5.36. Построить $x^2 - y^2 + 5x + 6y - 5 = 0$.

Решение. Чтобы найти параметры кривой, выделим полный квадрат для каждой переменной:

$$x^2 + 5x + \left(\frac{5}{2}\right)^2 - \left(\frac{5}{2}\right)^2 - (y^2 - 6y + 9 - 9) - 5 = 0,$$

$$\left(x + \frac{5}{2}\right)^2 - (y - 3)^2 = \frac{9}{4},$$

запишем уравнение в каноническом виде:

$$\frac{\left(x+\frac{5}{2}\right)^2}{\frac{9}{4}}-\frac{(y-3)^2}{\frac{9}{4}}=1;$$

$\left(-\frac{5}{2},3\right)$ – центр гиперболы,

$a=b=\frac{3}{2}$ – полуоси гиперболы.

Такая гипербола называется равнобочной (рис. 49).

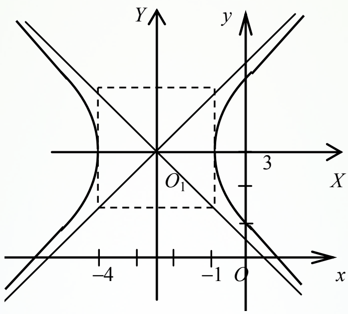


Рис. 49

Выполняем параллельный перенос системы координат в точку $O_1\left(-\frac{5}{2},\ 3\right)$ и строим квадрат со стороной 3 ед., диагонали квадрата продолжаем за его пределы. Теперь можно строить гиперболу в системе XO_1Y.

Пример 5.37. Выполнить поворот системы координат. Классифицировать кривую $xy+2x-2y-4=0$.

Решение. Уравнение линии

$$(X\cos\varphi-Y\sin\varphi)(X\sin\varphi+Y\cos\varphi)+2(X\cos\varphi-Y\sin\varphi)-$$
$$-2(X\sin\varphi+Y\cos\varphi)-4=0.$$

$$(X^2-Y^2)\cos\varphi\sin\varphi+XY(\cos^2\varphi-\sin^2\varphi)+2X(\cos\varphi-\sin\varphi)-$$
$$-2Y(\cos\varphi+\sin\varphi)=4.$$

Приравниваем к нулю коэффициент при произведении

$$\cos^2\varphi-\sin^2\varphi=0,\ \operatorname{tg}\varphi=\pm 1.$$

Возьмём $\varphi=45°$, $\cos\varphi=\sin\varphi=\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\quad\left(X^2-Y^2\right)\frac{1}{2}-2\sqrt{2}Y=4.$

Выделим полный квадрат для переменной Y:

$$X^2 - (Y^2 + 4\sqrt{2}\,Y + 8) = 0, \quad X^2 - (Y + 2\sqrt{2})^2 = 0.$$

Выполнив параллельный перенос системы в точку $O_1(0, -2\sqrt{2})$, получим уравнение

$$X_1^2 - Y_1^2 = 0, \quad (X_1 - Y_1)(X_1 + Y_1) = 0,$$

которое определяет пару пересекающихся прямых.

Пример 5.38. Построить $y^2 + 3x - 4y - 5 = 0$.

Решение. В уравнении отсутствует произведение координат, поэтому достаточно выполнить параллельный перенос осей.

Выделим полный квадрат для переменной y:

$$y^2 - 4y + 4 - 4 + 3x - 5 = 0.$$

Запишем уравнение в каноническом виде

$$(y - 2)^2 = -3(x - 3).$$

Тогда $O_1(3, 2)$ – вершина параболы, $2p = -3$, $p = \frac{-3}{2}$, $c = \frac{-3}{4}$ – фокусное расстояние.

Перенесём начало системы в точку $O_1(3, 2)$, построим параболу в новой системе координат XY (TL – главный диаметр) (рис. 50).

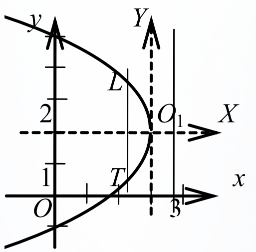


Рис. 50

Проверим правильность наших преобразований:

$$x = X + x_0, \quad y = Y + y_0,$$

$$(Y + y_0)^2 + 3(X + x_0) - 4(Y + y_0) - 5 = 0,$$

$$3X + Y(2y_0 - 4) + y_0^2 + 3x_0 - 4y_0 - 5 = -Y^2.$$

Положим $\begin{cases} 2y_0 - 4 = 0, \\ y_0^2 - 4y_0 + 3x_0 - 5 = 0. \end{cases}$ Найдём $y_0 = 2$, $x_0 = 3$.

Следовательно, в новой системе координат XO_1Y уравнение параболы имеет вид $Y^2 = -3X$.

В старой системе xOy ему соответствует уравнение

$$(y-2)^2 = -3(x-3).$$

Пример 5.39. Прямая l задана в пространстве общими уравнениями

$$\begin{cases} x+2y-z+4 = 0 \\ x-2y+z-4 = 0. \end{cases}$$

Найти её канонические и параметрические уравнения. Составить уравнения прямой l_1, проходящей через точку M_1 (1, 1, 1) параллельно прямой l, и вычислить расстояние между ними. Найти проекцию точки M_1 на прямую l.

Решение. По уравнениям плоскостей, задающих прямую l, определяем их нормальные векторы: $\vec{n}_1 = \{1; 2; -1\}$ и $n_2 = \{1; -2; 1\}$. Направляющий вектор $\vec{S}$ прямой l:

$$\vec{S} = \vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = -2\vec{j} - 4\vec{k} = \{0; -2; 4\}.$$

Координаты точки M_1, через которую проходит прямая l, найдем, полагая $z = 0$, из системы:

$$\begin{cases} x+2y+4=0, \\ x-2y-4=0. \end{cases} \quad \begin{cases} x = 0, \\ y=-2. \end{cases}$$

т. е. координаты точки M_1 (0; –2; 0). Запишем уравнения прямой l:

$$\frac{x}{0} = \frac{y+2}{-2} = \frac{z}{-4}.$$

Вводя параметр t, перейдем к параметрическим уравнениям прямой l:

$$\begin{cases} x = 0, \\ y = -2t-2, \\ z = -4t. \end{cases}$$

За направляющий вектор $\vec{S}_1$ прямой l_1, параллельной прямой l, примем вектор $\vec{S}$. Тогда канонические уравнения прямой l_1, проходящей через точку M_1, запишутся в виде:

$$\frac{x-1}{0} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z-1}{-4}.$$

Для нахождения проекции M_2 точки M_1 на прямую l составим уравнение плоскости, проходящей через точку M_1 и перпендикулярной l. За нормальный вектор плоскости $\vec{n}$ примем направляющий вектор $\vec{S}$, получим:

$$-2(y-1)-4(z-1)=0, \quad 2y+4z-6=0.$$

Найдем координаты точки M_2 из системы:

$$\begin{cases} x=0, \\ y=-2t-2, \\ z=-4t, \\ 2y+4z-6=0. \end{cases}$$

Подставляя первые три уравнения в четвертое, найдем $t = \dfrac{1}{2}$, откуда $x = 0$, $y = -1$, $z = 2$, т. е. M_2 (0; –1; 2).

Расстояние d между прямыми l_1 и l_2 равно длине вектора $\overrightarrow{M_1M_2}$,

$$d=\left|\overrightarrow{M_1M_2}\right|=\sqrt{(0-1)^2+(-1-1)^2+(2-1)^2}=\sqrt{6}=2{,}45.$$

Пример 5.40. Представить в каноническом виде уравнение прямой α:

$$\begin{cases} x+3y-z+1 = 0, \\ 2x-y+z-3 = 0. \end{cases}$$

Решение. Из уравнения каждой плоскости найдём векторы нормалей $\overline{N}_1[1,\ 3,-1]$, $\overline{N}_2\{2,\ -1,\ 1\}$ и подсчитаем координаты направляющего вектора прямой α:

$$\bar{l}=\lambda\left[\overline{N}_1,\overline{N}_2\right],$$

где $\overline{N}_1\times\overline{N}_2=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix}=2\bar{i}-3\bar{j}-7\bar{k}$, $\lambda = \text{const} \neq 0$.

Теперь найдём какую-либо точку на данной прямой, зафиксировав любую из координат. Положив $x = 0$, получаем систему

$$\begin{cases} 3y-z+1=0, \\ -y+z-3=0. \end{cases}$$

Решая эту систему, вычисляем координаты $y = 1$, $z = 4$, в результате получаем точку M_0 (0, 1, 4). Зная фиксированную точку и направляющий вектор, записываем канонические уравнения данной прямой α, выбрав $\lambda = 1$:

$$\frac{x}{2}=\frac{y-1}{-3}=\frac{z-4}{-7}.$$

Пример 5.41. Составить уравнение плоскости, проходящей через точки M_1 (1, 2, –3), M_2 (3, 1, –5), перпендикулярно плоскости p_1:

$$x - y - z + 2 = 0.$$

Решение. Сделаем схематический чертёж, построив две перпендикулярные плоскости (рис. 51). Пусть p – искомая плоскость, на ней – две данные точки M_1, M_2.

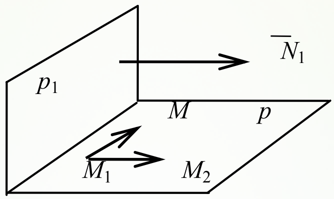


Рис. 51

Введём текущую точку M и составим три вектора: $\overline{M_1M}$, $\overline{M_1M_2}$, $\overline{N}_1$, которые компланарны. Первые два вектора лежат в плоскости, а $\overline{N}_1$ коллинеарен плоскости p, поскольку является нормальным вектором плоскости p_1. Значит, смешанное произведение этих векторов равно нулю. Находим координаты векторов и вычисляем их смешанное произведение:

$$\overline{M_1M} = \{x - x_1, y - y_1, z - z_1\},$$

$$\overline{M_1M_2} = \{x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1\},$$

$$\overline{N}_1\{A, B, C\} = \{1, -1, -1\},$$

$$(\overline{M_1M}, \overline{M_1M_2}, \overline{N}_1) = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z+3 \\ 3-1 & 1-2 & -5+3 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 0.$$

Определитель можно вычислить, разложив его по элементам первой строки

$$(x-1)\begin{vmatrix} -1 & -2 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} - (y-2)\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} + (z+3)\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 0,$$

$x + z + 2 = 0$ – искомая плоскость (p).

Пример 5.42. Найти точку пересечения прямой $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-2}{7}=\dfrac{z+2}{4}$ и плоскости $3x + y - 5z - 1 = 0$.

Решение. Записываем уравнения прямой в параметрическом виде и решаем систему уравнений:

$$\begin{cases} 3x + y - 5z - 1 = 0, \\ x = 2t + 1, \\ y = 7t + 2, \\ z = 4t - 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} 3(2t+1) + 7t + 2 - 5(4t-2) - 1 = 0, \\ t = 2. \end{array}$$

Подставляя $t = 2$ в последние три уравнения системы, вычисляем координаты точки пересечения Q (5, 16, 6).

Пример 5.43. Дано: точка A (–1, 2, –8) и прямая α:

$$\frac{x-3}{2}=\frac{y}{3}=\frac{z-4}{1}.$$

Найти: а) точку, симметричную A относительно прямой α; б) расстояние от точки A до прямой α.

Решение. Сделаем схематический чертёж (рис. 52); направим вектор $\bar{l}=\{2, 3, 1\}$ вдоль прямой α так, чтобы плоскость и прямая были перпендикулярны, т. е. $p\perp\alpha$, $p\perp\bar{l}$. Плоскость содержит данную точку A. Запишем уравнение плоскости p, для которой вектор является нормальным:

$$2(x + 1) + 3(y - 2) + z + 8 = 0 \Rightarrow$$
$$2x + 3y + z + 4 = 0.$$

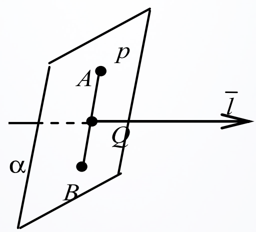


Рис. 52

Чтобы ответить на первый вопрос задачи, надо найти сначала точку пересечения Q прямой α и плоскости p. По условию симметрии точка Q является серединой отрезка $AB\perp\alpha$. Используя формулы деления отрезка пополам, найдём точку B. Ответом на второй вопрос будет длина отрезка $AQ = |\overline{AQ}|$, так как мы строили плоскость p, перпендикулярную прямой, а значит, $AQ \perp \alpha$.

1. Решаем систему уравнений:

$$\begin{cases} 2x + 3y + z + 4 = 0 \\ \dfrac{x-3}{2} = \dfrac{y}{3} = \dfrac{z-4}{1} \end{cases} \Rightarrow Q(1, -3, 3).$$

2. Используем формулы деления отрезка пополам:

$$\bar{r}_Q = \frac{\bar{r}_A + \bar{r}_B}{2} \Rightarrow \bar{r}_B = 2\bar{r}_Q - \bar{r}_A \Rightarrow \begin{cases} x_B = 2x_Q - x_A, \\ y_B = 2y_Q - y_A, \\ z_B = 2z_Q - z_A \end{cases} \Rightarrow B(3, -8, 14),$$

где B – точка, симметричная A относительно α.

3. Ищем расстояние от точки A до прямой α как длину вектора $\overline{AQ} = \{2, –5, 11\}$:

$$|\overline{AQ}| = \rho(A, \alpha) = \sqrt{4 + 25 + 121} = \sqrt{150} = 5\sqrt{6}.$$

Пример 5.44. Найти точку пересечения прямой и плоскости.

$$\frac{x+1}{-3} = \frac{y+2}{2} = \frac{z-3}{-2}, \quad x + 3y - 5z + 9 = 0.$$

Запишем параметрические уравнения прямой:

$$\frac{x+1}{-3} = \frac{y+2}{2} = \frac{z-3}{-2} = t \Rightarrow \begin{cases} x = -1 - 3t, \\ y = -2 + 2t, \\ z = 3 - 2t. \end{cases}$$

Подставляем в уравнение плоскости:

$$(-1 - 3t) + 3(-2 + 2t) - 5(3 - 2t) + 9 = 0,$$

$$-1 - 3t - 6 + 6t - 15 + 10t + 9 = 0,$$

$$13t - 13 = 0,$$

$$t = 1$$

Откуда координаты точки пересечения прямой и плоскости будут (–4; 0; 1).

5.4. Комплексные числа

Пример 5.45. Отметьте на плоскости комплексные числа:

$z = 2 + 3i$, $z = -2 + 3i$, $z = 2 - i$, $z = -2$.

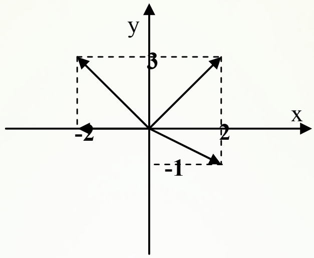


Рис. 5.13

Пример 5.46. Представьте в тригонометрической форме комплексное число $z = -1 + i$.

Решение

1. Найдем модуль комплексного числа: $a = -1$, $b = 1$, тогда

$$r = |a + ib| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}.$$

2. Найдем аргумент комплексного числа:

$$\varphi = \arg z = \operatorname{arctg}\frac{b}{a} = \operatorname{arctg}\frac{1}{-1} = \operatorname{arctg}(-1)\frac{3\pi}{4},$$

так как число лежит во второй четверти.

3. Запишем тригонометрическую форму:

$$z = -1 + i = \sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right).$$

Пример 5.47. Дано комплексное число $z = 5 - 5i$.

Найти $\operatorname{Re} z$, $\operatorname{Im} z$, $|z|$, $\arg z$.

Решение

$$\operatorname{Re} z = a = 5;$$

$$\operatorname{Im} z = b = -5;$$

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{225 + 25} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2};$$

$$\arg z = \operatorname{arctg}\frac{b}{a} = \operatorname{arctg}\frac{-5}{5} = \operatorname{arctg}(-1) = \left(-\frac{\pi}{4}\right),$$

так как число лежит в четвертой четверти.

Пример 5.48. Вычислите $z_1 + z_2$, если $z_1 = 2 + 4i$, $z_2 = -2 - i$.

Решение

$$z_1 + z_2 = (2 + 4i) + (-2 - i) = (2 - 2) + (4 - 1)i = 0 - 3i = -3i.$$

Пример 5.49. Вычислите $z_1 \cdot z_2$, если $z_1 = 2 - 4i$, $z_2 = -2 - i$.

Решение

$$z_1 \cdot z_2 = (2 - 4i) \cdot (-2 - i) = -4 - 2i + 8i + 4i^2 = -4 + 6i - 4 = -8 + 6i.$$

Пример 5.50. Вычислите $\dfrac{z_1}{z_2}$, если $z_1 = 2 - 4i$, $z_2 = -2 - i$.

Решение

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{2-4i}{-2-i} = \frac{(2-4i)(-2+i)}{(-2-i)(-2+i)} = \frac{-4+2i+8i-4i^2}{4-i^2} = \frac{-4+6i+4}{4+1} = \frac{6i}{5} = \frac{6}{5}i.$$

Пример 5.51. Вычислить z^{12}, если $z = 1 - i\sqrt{3}$.

Решение

1. Переведем число в тригонометрическую форму:

а) найдем модуль комплексного числа:

$$a = 1,\ b = -\sqrt{3},\ r = |a + ib| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{1^2 + \left(-\sqrt{3}\right)^2} = 2;$$

б) найдем аргумент комплексного числа:

$$\varphi = \arg z = \mathrm{arctg}\frac{b}{a} = \mathrm{arctg}\frac{-\sqrt{3}}{1} = \mathrm{arctg}\left(-\sqrt{3}\right) = \frac{5\pi}{3},$$

так как число лежит в четвертой четверти;

в) запишем тригонометрическую форму:

$$z = 1 - i\sqrt{3} = 2\left(\cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3}\right).$$

2. Воспользуемся формулой Муавра:

$$z^{12} = (1 - i\sqrt{3})^{12} = \left(2\left(\cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3}\right)\right)^{12} =$$

$$= 2^{12}\left(\cos\frac{12 \cdot 5\pi}{3} + i\sin\frac{12 \cdot 5\pi}{3}\right) =$$

$$= 2^{12}\left(\cos 20\pi + i\sin 20\pi\right) = 2^{12} = 4096.$$

Пример 5.52. Вычислить $\sqrt[3]{-1}$.

Решение

1. Переведем число в тригонометрическую форму:

а) найдем модуль комплексного числа: $a = -1$, $b = 0$,

$$r = |a+ib| = \sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{(-1)^2+0^2} = 1;$$

б) найдем аргумент комплексного числа:

$$\varphi = arg\, z = \operatorname{arctg}\frac{b}{a} = \operatorname{arctg}\frac{0}{-1} = \operatorname{arctg}(0) = \pi,$$

так как число лежит во второй четверти;

в) запишем тригонометрическую форму: $z = -1 = 1(\cos\pi + i\sin\pi)$.

2. По формуле получаем

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r(\cos\varphi + i\sin\varphi)} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi+2\pi k}{n} + i\sin\frac{\varphi+2\pi k}{n}\right).$$

При $k = 0$:

$$z_1 = \sqrt[3]{1}\left(\cos\frac{\pi+2\pi\cdot 0}{3} + i\sin\frac{\pi+2\pi\cdot 0}{3}\right) = 1\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2};$$

при $k = 1$:

$$z_2 = \sqrt[3]{1}\left(\cos\frac{\pi+2\pi\cdot 1}{3} + i\sin\frac{\pi+2\pi\cdot 1}{3}\right) = 1(\cos\pi + i\sin\pi) = -1;$$

при $k = 2$:

$$z_1 = \sqrt[3]{1}\left(\cos\frac{\pi+2\pi\cdot 2}{3} + i\sin\frac{\pi+2\pi\cdot 2}{3}\right) = 1\left(\cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Пример 5.53. Вычислить $\frac{1+2i}{3-i} + (1-i)^2$.

Решение

$$\frac{1+2i}{3-i} + (1-i)^2 = \frac{(1+2i)(3+i)}{(3-i)(3+i)} + \left(1-2i+i^2\right) = \frac{3+i+6i+2i^2}{3-i^2} + (1-2i-1) =$$

$$= \frac{3+7i-2}{4} - 2i = \frac{1+7i}{4} - 2i = \frac{1+7i-8i}{4} = \frac{1-i}{4} = \frac{1}{4} - i\frac{1}{4}.$$

Пример 5.54. Решить уравнение $k^2 + 2k + 5 = 0$.

Решение. Решением уравнения $k^2 + 2k + 5 = 0$ являются числа $k_1 = -1 + 2i$ и $k_2 = -1 - 2i$. При этом

$$|k_1| = \sqrt{(-1)^2+2^2} = \sqrt{5}, \quad |k_2| = \sqrt{(-1)^2+(-2)^2} = \sqrt{5}.$$

Тесты

1. Определитель $\begin{vmatrix} 4 & 1 & 5 \\ 1 & 7 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \end{vmatrix}$ равен...

a) 91
b) 97
c) 83
d) 89

2. Даны матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$, тогда матрица $C = A \times B$ имеет вид...

a) $\begin{pmatrix} 8 & -2 \\ -4 & -2 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} -8 & 4 \\ -6 & 6 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 8 & -4 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} -8 & -6 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$

3. Ранг матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$ равен...

a) 2
b) 1
c) 3
d) 4

4. Для матрицы A существует обратная, если она равна...

a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 7 & 5 & 3 \\ 2 & 4 & 2 \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} 1 & 7 & 3 \\ 3 & 8 & 9 \\ 2 & 3 & 6 \end{pmatrix}$

5. Методом Крамера **не может быть решена** система линейных уравнений...

a) $\begin{cases} x + 2y - 1 = 0, \\ 2x + 4y - 1 = 0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 7x + 3y - 4 = 0, \\ 2x - 5y - 7 = 0 \end{cases}$

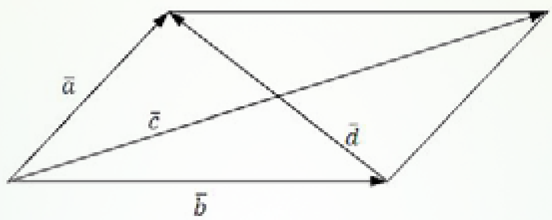
c) $\begin{cases} 3x + y - 1 = 0, \\ 7x - y + 1 = 0 \end{cases}$ d) $\begin{cases} 3x + 4y - 1 = 0, \\ -5x + y - 6 = 0 \end{cases}$

6. Матрица квадратичной формы $f(x_1;\ x_2) = x_1^2 + 4x_1x_2 + 6x_2^2$ имеет вид...

a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & \sqrt{6} \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} 0{,}5 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$

7. Векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ и $\vec{d}$ изображены на рисунке.



Вектор $\vec{a} - \vec{b} - \vec{d}$ будет равен...

a) $\vec{0}$

b) $\vec{c}$

c) $-\vec{c}$

d) $2\vec{a}$

8. Даны два вектора: $\vec{a} = 2\vec{p} - 3\vec{q}$ и $\vec{b} = \vec{p} + 2\vec{q}$, где $|\vec{p}| = 3$, $|\vec{q}| = 2$, угол между векторами $\vec{p}$ и $\vec{q}$ равен $\dfrac{\pi}{3}$. Тогда скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ будет равно...

a) –3

b) 5

c) 3

d) –4

9. Векторное произведение векторов $\vec{a} = 2 \cdot \vec{i} + \vec{j} - 3 \cdot \vec{k}$ и $\vec{b} = \vec{i} - 2 \cdot \vec{j} + \vec{k}$ равно...

a) $-5\vec{i} - 5\vec{j} - 5\vec{k}$

b) $-5\vec{i} + 5\vec{j} - 5\vec{k}$

c) $3\vec{i} - \vec{j} - 2\vec{k}$

d) $2\vec{i} - 2\vec{j} - 3\vec{k}$

10. Объем параллелепипеда, построенного на векторах $\vec{a} = (0; 2; 5)$, $\vec{b} = (1; -1; 1)$ и $\vec{c} = (-1; 5; 1)$ равен...

a) 16

b) $\frac{16}{3}$

c) 8

d) 4

11. Точка $M(x; y)$ лежит на оси абсцисс и равноудалена от точки $B(-1; -2)$ и начала координат. Тогда точка M имеет координаты...

a) (–2,5; 0)

b) (0; –2,5)

c) (2,5; 0)

d) (–0,5; –1)

12. Точка $M\left(1; \frac{3\pi}{4}\right)$ задана в полярной системе координат, тогда ее прямоугольные координаты равны...

a) $x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, $y = \frac{\sqrt{2}}{2}$

b) $x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, $y = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

c) $x = 1$, $y = \frac{\sqrt{2}}{2}$

d) $x = 1$, $y = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

13. Острый угол между прямыми $5x - y + 7 = 0$ и $3x + 2y = 0$ равен...

a) $\frac{\pi}{4}$

b) $\frac{3\pi}{4}$

c) $\frac{2\pi}{3}$

d) $\frac{\pi}{3}$

14. Вершина параболы $x^2 - 2x - 2y - 13 = 0$ имеет координаты...

a) (1; –7)

b) (1; 7)

c) (–1; 7)

d) (–1; –7)

15. Точки $A(x_1; y_1; z_1)$ и $B(x_2; y_2; z_2)$ лежат симметрично относительно плоскости XOY. Расстояние между ними равно 6. Тогда точки A и B могут иметь координаты...

a) $A(2; -3; -3)$, $B(2; -3; 3)$

b) $A(-5; 1; 3)$, $B(5; -1; 3)$

c) $A(1; 1; 0)$, $B(3; -3; 4)$

d) $A(-1; -4; 8)$, $B(1; 4; -8)$

16. Общее уравнение плоскости, проходящей через точку A (1; –2; 7) параллельно плоскости $5x - 3y - 2z + 9 = 0$, имеет вид...

a) $5x - 3y - 2z + 3 = 0$

b) $5x - 3y - 2z + 9 = 0$

c) $5x - 3y - 2z + 6 = 0$

d) $5x - 3y - 2z + 15 = 0$

17. Направляющий вектор прямой $\begin{cases} -y + 2z - 10 = 0 \\ 3x + 2y - z + 6 = 0 \end{cases}$ имеет вид...

a) (–3; 7; 5)

b) (3; –2; –2)

c) (1; –1; 2)

d) (3; –7; –1)

18. Уравнение поверхности второго порядка

$$3x^2 + 2y^2 + 6z^2 + 6x - 24z + 21 = 0$$

определяет...

a) эллипсоид

b) параболоид

c) конус

d) однополостный гиперболоид

19. Среди представленных множеств линейное пространство образует...

a) множество всех векторов, принадлежащих пространству R^3

b) множество всех векторов пространства R^2, образующих острый угол с положительным направлением оси ординат

c) множество натуральных чисел

d) множество всех отрицательных вещественных чисел

20. Совокупность векторов $\vec{a}=(2;1;2)$, $\vec{b}=(\lambda;1;\lambda)$, $\vec{c}=(3;5;4)$ **не может являться** базисом трехмерного линейного пространства, если λ равно...

a) 2

b) 4

c) 1

d) 3

21. Образом вектора $\overline{X}=\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}$ при линейном преобразовании, заданном матрицей $A=\begin{pmatrix}1&0&2\\0&2&3\\4&-1&1\end{pmatrix}$, является вектор...

a) $\begin{pmatrix}1\\4\\2\end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix}1\\0\\4\end{pmatrix}$

22. Пусть $E=(\vec{e}_1;\vec{e}_2)$ — базис пространства R^2. Операторы f и g этого пространства заданы матрицами $M_E(f)=\begin{pmatrix}1&0\\-2&3\end{pmatrix}$, $M_E(g)=\begin{pmatrix}2&1\\2&0\end{pmatrix}$. Тогда матрица оператора $2f+f\times g$ равна...

a) $\begin{pmatrix}4&1\\-2&4\end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix}4&0\\-8&6\end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix}2&3\\-2&6\end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix}2&0\\0&4\end{pmatrix}$

23. Комплексное число задано в алгебраической форме $z = 2\sqrt{3} + 2i$. Тогда тригонометрическая форма записи сопряженного к нему числа $\bar{z}$ имеет вид...

a) $4 \cdot \left(\cos\left(-\frac{\pi}{6} \right) + i \cdot \sin\left(-\frac{\pi}{6} \right) \right)$

b) $4 \cdot \left(\cos\left(-\frac{\pi}{3} \right) + i \cdot \sin\left(-\frac{\pi}{3} \right) \right)$

c) $4 \cdot \left(\cos\left(-\frac{\pi}{6} \right) - i \cdot \sin\left(-\frac{\pi}{6} \right) \right)$

d) $\cos\left(-\frac{\pi}{6} \right) + i \cdot \sin\left(-\frac{\pi}{6} \right)$

24. Частное $\frac{z_1}{z_2}$ комплексных чисел $z_1 = 1 - i$ и $z_2 = 1 + i$ равно...

a) $-i$

b) i

c) $1 - i$

d) $2 + i$

25. Частное $\frac{z_1}{z_2}$ от деления двух комплексных чисел $z_1 = 4 \cdot \left(\cos\frac{\pi}{3} + i \cdot \sin\frac{\pi}{3} \right)$ и $z_2 = 2 \cdot \left(\cos\frac{\pi}{6} + i \cdot \sin\frac{\pi}{6} \right)$ равно...

a) $\sqrt{3} + i$

b) 2

c) $1 + \sqrt{3} \cdot i$

d) $2 \cdot i$

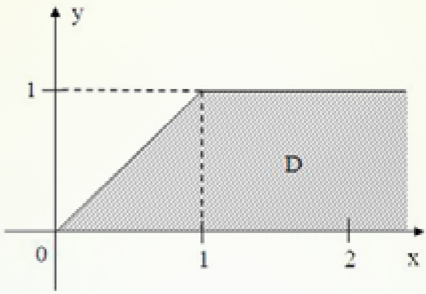
26. Все точки $z = x + ij$ комплексной плоскости, принадлежащие множеству D, изображенному на рисунке, удовлетворяют условию...

a) $0 \le \operatorname{Im} z \le 1, 0 \le \arg z \le \frac{\pi}{4}$

b) $0 \le | z | \le 1, 0 \le \arg z \le \frac{\pi}{4}$

c) $0 \le | z | \le 1$, $\operatorname{Re} z \le \operatorname{Im} z$

d) $0 \le \operatorname{Im} z \le 1$, $\operatorname{Re} z \le \operatorname{Im} z$



27. Фирма планирует организовать выпуск новой продукции, для чего берет в банке кредит в размере 200 тыс. руб. под 20 % годовых. На организацию производства фирме понадобится 30 дней, после чего она ежедневно будет получать прибыль в размере 3 тыс. руб. Если временная база по начислению процентов равна 365 дням, то размер долга S (тыс. руб.) фирмы банку через t дней можно определить как...

a) $S = 200\left(1 + \dfrac{t}{1825}\right)$

b) $S = 200\left(1 + \dfrac{4t}{73}\right)$

c) $S = 200(1 + 0{,}2t)$

d) $S = \dfrac{200}{1 - \dfrac{t}{1825}}$

28. Фирма планирует организовать выпуск новой продукции, для чего берет в банке кредит в размере 200 тыс. руб. под 20 % годовых. На организацию производства фирме понадобится 30 дней, после чего она ежедневно будет получать прибыль в размере 3 тыс. руб. Установите соответствие между количеством дней t, прошедших с момента получения кредита, и прибылью (тыс. руб.) фирмы (выберите три соответствующих варианта ответа).

1) $t = 15$	a) 0
2) $t = 35$	b) 15
3) $t = 45$	c) 45
	d) 105
	e) 135

29. Фирма планирует организовать выпуск новой продукции, для чего берет в банке кредит в размере 200 тыс. руб. под 20 % годовых. На организацию производства фирме понадобится 30 дней, после чего она ежедневно будет получать прибыль в размере 3 тыс. руб. Фирма может погасить кредит разовым платежом за счет полученной прибыли как минимум через ______ день (дней) после получения кредита.

a) 101

b) 115

c) 145

d) 105

30. Инвестор вложил одну четверть своего капитала, равного 60 тыс. руб., в акции *A*, а оставшуюся часть – в акции *B*. Через один год сумма его капитала увеличилась на 9,75 тыс. руб. Если бы инвестор распределил свой капитал наоборот, то увеличение капитала составляло бы 11,25 тыс. руб. Процентный доход по акциям *A* за год составил _____ %.

a) 20

b) 15

c) 45

d) 35

31. Инвестор вложил одну четверть своего капитала, равного 60 тыс. руб., в акции *A*, а оставшуюся часть – в акции *B*. Через один год сумма его капитала увеличилась на 9,75 тыс. руб. Если бы инвестор распределил свой капитал наоборот, то увеличение капитала составляло бы 11,25 тыс. руб. Отношение доходности акций *A* к доходности акций *B* равно...

a) $\frac{4}{3}$ b) $\frac{3}{4}$ c) $\frac{29}{27}$ d) $\frac{27}{29}$

32. Инвестор вложил одну четверть своего капитала, равного 60 тыс. руб., в акции *A*, а оставшуюся часть – в акции *B*. Через один год сумма его капитала увеличилась на 9,75 тыс. руб. Если бы инвестор распределил свой капитал наоборот, то увеличение капитала составляло бы 11,25 тыс. руб. Пусть процентный доход по акциям *B* не изменяется. Установите соответствие между годовым процентным доходом по акциям A и размером капитала инвестора (выберите три соответствущих варианта ответа).

1) 10 % 2) 15 % 3) 25 %

a) 68 250 руб.

b) 69 000 руб.

c) 70 500 руб.

d) 69 750 руб.

e) 71 250 руб.

33. Предприятие производит продукцию трех видов, используя для этого два вида сырья. Нормы затрат сырья (в у. е.) на производство одной единицы изделия каждого вида указаны в таблице:

Вид сырья	Виды продукции		
	A_1	A_2	A_3
S_1	2	3	5
S_2	4	2	1

Если обозначить x_1 – объем используемого ресурса S_1, а x_2 – объем S_2, то объемы y_1, y_2 и y_3 произведенной продукции видов A_1, A_2 и A_3 соответственно можно определить из системы линейных уравнений вида...

a) $\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 = y_1, \\ 3x_1 + 2x_2 = y_2, \\ 5x_1 + x_2 = y_3 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 5x_1 + x_2 = y_1, \\ 3x_1 + 2x_2 = y_2, \\ 2x_1 + 4_2 = y_3 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 = y_1, \\ 3x_1 + 2x_2 = y_2, \\ 5x_1 + x_2 = y_3 \end{cases}$ d) $\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 = y_1, \\ 2x_1 + 3x_2 = y_2, \\ x_1 + 5x_2 = y_3 \end{cases}$

34. Предприятие производит продукцию трех видов, используя для этого два вида сырья. Нормы затрат сырья (в у. е.) на производство одной единицы изделия каждого вида указаны в таблице:

Вид сырья	Виды продукции		
	A_1	A_2	A_3
S_1	2	3	5
S_2	4	2	1

Установите соответствие между объемами используемых ресурсов $X(x_1; x_2)$ и объемами произведенной продукции $Y(y_1; y_2; y_3)$ (выберите три соответствующих варианта ответа).

1) $X(2; 1)$ 2) $X(1; 3)$ 3) $X(3; 1)$

a) $Y(8; 8; 11)$
b) $Y(14; 9; 8)$
c) $Y(10; 11; 16)$
d) $Y(11; 8; 8)$
e) $Y(10; 11; 13)$

35. Предприятие производит продукцию трех видов, используя для этого два вида сырья. Нормы затрат сырья (в у. е.) на производство одной единицы изделия каждого вида указаны в таблице.

Вид сырья	Виды продукции		
	A_1	A_2	A_3
S_1	2	3	5
S_2	4	2	1

Пусть прибыль от реализации одной единицы продукции A_1 равна 5 тыс. у. е., продукции A_2 – 4 тыс. у. е., продукции A_3 – 3 тыс. у. е. Если в процессе производства было использовано 2 единицы ресурса S_1 и 3 единицы ресурса S_2, то совокупная прибыль предприятия равна _____ тыс. у. е.

a) 167
b) 151
c) 145
d) 105
e) 137

Контрольные вопросы

1. Матрицы, основные понятия. Сложение, вычитание матриц, умножение матрицы на число. Транспонирование матрицы.
2. Операция произведения двух матриц. Свойства. Пример вычисления.
3. Вычисление определителя второго и третьего порядка.
4. Определение минора и алгебраического дополнения элемента матрицы. Вычисление определителя n-го порядка по строке или столбцу. Примеры.
5. Определение обратной матрицы. Алгоритм вычисления обратной матрицы. Пример.
6. Определение ранга матрицы. Свойства ранга.
7. Системы линейных алгебраических уравнений, основные понятия. Матричная и векторная форма систем линейных уравнений.
8. Матричный метод решения систем линейных уравнений. Пример.
9. Метод Крамера решения систем линейных уравнений. Пример.
10. Метод Гаусса решения систем линейных уравнений. Пример.
11. Теорема Кронекера – Капелли. Следствия теоремы.
12. Векторы, основные понятия и определения. Координаты вектора на плоскости и в пространстве. Линейные операции над векторами.
13. Скалярное произведение векторов. Свойства скалярного произведения. Угол между векторами, формула вычисления угла между векторами. Скалярное произведение векторов в координатной форме.
14. Векторное произведение векторов. Свойства векторного произведения. Вычисление векторного произведения в координатной форме.
15. Смешанное произведение векторов. Свойства смешанного произведения. Вычисление смешанного произведения в координатной форме.
16. Определение и условия ортогональности, коллинеарности и компланарности векторов.
17. Линейная зависимость и линейная независимость векторов. Определение базиса и размерности векторного пространства. Матрица перехода к новому базису.
18. Понятие линейного оператора. Определение собственного вектора и собственных значений линейного оператора. Характе-

ристическое уравнение матрицы линейного оператора. Пример вычисления собственных значений и собственных векторов линейного оператора.

19. Определение квадратичной формы. Матрица квадратичной формы. Критерий Сильвестра положительной определенности квадратичной формы.
20. Прямая линия на плоскости. Общее уравнение прямой, уравнение с угловым коэффициентом и в отрезках, уравнение прямой, проходящей через две данные точки. Геометрический смысл коэффициентов.
21. Условие параллельности и перпендикулярности двух прямых на плоскости. Угол между двумя прямыми на плоскости. Пример вычисления.
22. Канонические уравнения эллипса, гиперболы, параболы. Основные характеристики. Геометрический смысл коэффициентов.
23. Плоскость в пространстве. Общее уравнение плоскости и в отрезках. Геометрический смысл коэффициентов. Уравнение плоскости, проходящей через три данные точки.
24. Условие параллельности и перпендикулярности двух плоскостей. Угол между двумя плоскостями. Пример вычисления.
25. Прямая линия в пространстве. Канонические и параметрические уравнения прямой в пространстве. Геометрический смысл коэффициентов.
26. Условие параллельности и перпендикулярности двух прямых в пространстве. Вычисление угла между ними. Пример.
27. Условие параллельности и перпендикулярности прямой и плоскости. Вычисление угла и точки пересечения прямой и плоскости.
28. Поверхности второго порядка. Канонические уравнения. Построение поверхностей методом сечений.
29. Алгебраическая форма комплексного числа. Операции над комплексными числами в алгебраической форме.
30. Тригонометрическая форма комплексного числа. Операции над комплексными числами в тригонометрической форме. Возведение в степень и извлечение корня из комплексного числа.
31. Геометрическое изображение комплексных чисел.

ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

Задача 1. Доказать совместность системы и решить ее методом Гаусса. Выделить базисное решение системы.

Номер варианта	Система линейных уравнений
1	$\begin{cases} x_1+2x_2-3x_3-4x_4+x_5=6, \\ 2x_1+3x_2-4x_3-5x_4-x_5=2, \\ x_1+x_2-2x_3-2x_4+3x_5=8, \\ 3x_1+8x_2-12x_3-17x_4+4x_5=26 \end{cases}$
2	$\begin{cases} 2x_1+3x_2-x_3+x_4+x_5=-4, \\ 3x_1-x_2+2x_3+4x_4+x_5=9, \\ x_1+x_2+3x_3-2x_4+2x_5=8, \\ 6x_1+3x_2+4x_3+3x_4+2x_5=13 \end{cases}$
3	$\begin{cases} 2x_1+3x_2-x_3+x_4+2x_5=1, \\ 3x_1-x_2+2x_3+x_4+x_5=2, \\ x_1+2x_2+3x_3+4x_4-x_5=3, \\ -2x_1+2x_2-6x_3-4x_4+2x_5=-4 \end{cases}$
4	$\begin{cases} x_1+2x_2-3x_3+x_4-x_5=3, \\ 2x_1-x_2+x_3+2x_4+3x_5=1, \\ 4x_1+3x_2-5x_3+2x_4+x_5=5, \\ 7x_1+4x_2-7x_3+5x_4+3x_5=9 \end{cases}$
5	$\begin{cases} x_1-3x_2+2x_3+2x_4+3x_5=2, \\ 3x_1-8x_2+8x_3+7x_4-2x_5=-2, \\ 2x_1-4x_2+8x_3+8x_4-x_5=3, \\ 2x_1-7x_2+2x_3+x_4+2x_5=-3 \end{cases}$
6	$\begin{cases} x_1-3x_2+2x_3+2x_4+3x_5=2, \\ -3x_1+x_2-5x_3+2x_4+x_5=-4, \\ 2x_1-2x_2+x_3+3x_4-4x_5=8, \\ -3x_1-3x_2-7x_3+9x_4+x_5=2 \end{cases}$

Номер варианта	Система линейных уравнений
7	$\begin{cases} -x_1 - x_2 + 3x_3 + 2x_4 - x_5 = -1, \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 - 3x_5 = 0, \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 - 4x_4 + 2x_5 = 6, \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 - x_4 - 2x_5 = 5 \end{cases}$
8	$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 + x_4 + 2x_5 = 2, \\ 3x_1 - 3x_2 - 2x_3 + x_4 - x_5 = -7, \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 - 6x_5 = 1, \\ 6x_1 - 2x_2 - 3x_3 - 2x_4 - 5x_5 = -4 \end{cases}$
9	$\begin{cases} -2x_1 + 3x_2 - 2x_3 + x_4 - 2x_5 = -1, \\ 4x_1 - x_2 + 2x_3 + 5x_4 + x_5 = 0, \\ x_1 + x_2 + 3x_3 - 2x_4 - 3x_5 = 12, \\ 3x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 4x_4 - 4x_5 = 11 \end{cases}$
10	$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 - 4x_4 + x_5 = 6, \\ 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 - 5x_4 - x_5 = 2, \\ -x_1 - x_2 + 2x_3 + 2x_4 - 3x_5 = -3, \\ 4x_1 + 6x_2 - 9x_3 - 11x_4 + 3x_5 = 11 \end{cases}$

Задача 2. Найти общее решение системы линейных однородных уравнений и выделить фундаментальную систему решений.

Номер варианта	Система линейных уравнений
1	$\begin{cases} 3x_1 + 3x_2 + 5x_3 - 2x_4 = 0, \\ 2x_1 + 2x_2 + 8x_3 - 3x_4 = 0, \\ 2x_1 + 2x_2 + 4x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$
2	$\begin{cases} 7x_1 - 3x_2 + 7x_3 + 17x_4 = 0, \\ 8x_1 - 6x_2 - x_3 - 5x_4 = 0, \\ 4x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 7x_4 = 0 \end{cases}$
3	$\begin{cases} x_1 + 4x_2 - 3x_3 + 6x_4 = 0, \\ 2x_1 + 5x_2 + x_3 - 2x_4 = 0, \\ x_1 + 7x_2 - 10x_3 + 20x_4 = 0 \end{cases}$

Номер варианта	Система линейных уравнений
4	$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 - 7x_4 = 0, \\ 6x_1 - 3x_2 + x_3 - 4x_4 = 0, \\ 4x_1 - 2x_2 + 14x_3 - 31x_4 = 0 \end{cases}$
5	$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 + x_3 + 3x_4 = 0, \\ 4x_1 + 6x_2 + 3x_3 + 5x_4 = 0, \\ 4x_1 + 14x_2 + x_3 + 7x_4 = 0 \end{cases}$
6	$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 0, \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 5x_4 = 0, \\ 9x_1 + x_2 + 4x_3 - 5x_4 = 0 \end{cases}$
7	$\begin{cases} 9x_1 - 3x_2 + 5x_3 + 6x_4 = 0, \\ 6x_1 - 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 0, \\ 9x_1 + x_2 + 4x_3 - 5x_4 = 0 \end{cases}$
8	$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 7x_3 + 3x_4 = 0, \\ 4x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 0, \\ 4x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 = 0 \end{cases}$
9	$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 5x_3 + 4x_4 = 0, \\ 2x_1 + 3x_2 + 6x_3 + 8x_4 = 0, \\ x_1 - 6x_2 - 9x_3 - 20x_4 = 0 \end{cases}$
10	$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + x_3 - 4x_4 = 0, \\ 2x_1 - 3x_2 - 2x_3 + x_4 = 0, \\ 4x_1 - x_2 + 4x_3 - 9x_4 = 0 \end{cases}$

Задача 3. По координатам вершин пирамиды $ABCD$ средствами векторной алгебры найти:

1) длины ребер AB и AC;
2) угол между ребрами AB и AC;
3) площадь грани ABC;
4) проекцию вектора $\overrightarrow{AB}$ на $\overrightarrow{AC}$;
5) объем пирамиды.

Номер варианта	Координаты точки A	Координаты точки B	Координаты точки C	Координаты точки D
1	(1;2;3)	(–1;3;6)	(–2;4;2)	(0;5;4)
2	(–1;2;0)	(–2;2;4)	(–3;3;0)	(–1;4;2)
3	(2;2;3)	(–1;2;0)	(0;3;3)	(2; 4; –5)
4	(0;–1;2)	(–1; –1;6)	(–2;0;2)	(0;1;4)
5	(3;0;2)	(2;0;6)	(1;1;2)	(3;2;4)
6	(0; 2; –1)	(–1;2;3)	(–2; 3; –1)	(0;4;1)
7	(2;3;2)	(1;3;6)	(0;4;2)	(2;5;4)
8	(1;0;2)	(–2;0;6)	(–3;1;2)	(–1;2;4)
9	(2;0;3)	(1;0;7)	(0;1;3)	(2;2;4)
10	(–2;1;3)	(–1;1;3)	(2;0;2)	(2;0;4)

Задача 4. В базисе $e = (e_1, e_2, e_3)$ заданы векторы a_1, a_2, a_3. Доказать, что векторы a_1, a_2, a_3 образуют базис в трехмерном линейном пространстве. Найти координаты вектора x в базисе векторов a_1, a_2, a_3.

Номер варианта	Векторы a_1, a_2, a_3	Вектор x
1	$a_1 = 2e_1 + e_2 + e_3,$ $a_2 = -e_1 - 2e_2 - e_3,$ $a_3 = -6e_1 - 4e_2 + 2e_3$	$x = -e_1 + 5e_2 - 8e_3$
2	$a_1 = 2e_1 + e_2 + 2e_3,$ $a_2 = -2e_1 + 6e_2 + 3e_3,$ $a_3 = e_1 + 3e_2 + e_3$	$x = 6e_1 + 3e_3$
3	$a_1 = 2e_1 + 6e_2 + 10e_3,$ $a_2 = -3e_1 + 9e_2 + 3e_3,$ $a_3 = 3e_1 - 2e_2 - 3e_3$	$x = 3e_1 - 4e_2 + 3e_3$
4	$a_1 = e_1 + 3e_2 + 2e_3,$ $a_2 = e_1 - e_2 + 3e_3,$ $a_3 = -6e_1 - 6e_2 + 9e_3$	$x = 6e_1 + 2e_2 + 6e_3$
5	$a_1 = 4e_1 + e_2 + 3e_3,$ $a_2 = -3e_1 - 2e_2 - e_3,$ $a_3 = e_1 - 2e_2 + 2e_3$	$x = 7e_1 + 3e_2 - e_3$

Номер варианта	Векторы a_1, a_2, a_3	Вектор x
6	$a_1 = 6e_1 + 3e_2 + 3e_3$, $a_2 = 5e_1 + 4e_2 - 9e_3$, $a_3 = -2e_1 + 2e_2$	$x = -4e_1 + e_2 + 11e_3$
7	$a_1 = 2e_1 + e_2 + 3e_3$, $a_2 = e_1 + 3e_2 - 2e_3$, $a_3 = 4e_1 - 6e_2 + 2e_3$	$x = -e_1 + 3e_2 + 8e_3$
8	$a_1 = 6e_1 + 3e_2 + 3e_3$, $a_2 = 8e_1 + 4e_2 + 5e_3$, $a_3 = e_1 + e_2 + 3e_3$	$x = -8e_1 - 3e_2 - 6e_3$
9	$a_1 = 2e_1 + e_2 + 2e_3$, $a_2 = 5e_1 + 3e_2 + 10e_3$, $a_3 = 4e_1 + 2e_2 + 9e_3$	$x = 20e_1 + 11e_2 + 40e_3$
10	$a_1 = 2e_1 + e_2 + 2e_3$, $a_2 = 3e_1 + e_2 + e_3$, $a_3 = 11e_1 + 5e_2 + 3e_3$	$x = 2e_1 + e_2 - 3e_3$

Задача 5. Найти собственные значения и собственные векторы линейного оператора, заданного матрицей.

Номер варианта	Матрица линейного оператора
1	$\begin{pmatrix} 4 & -2 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$
2	$\begin{pmatrix} 6 & 1 & -1 \\ 2 & 5 & -2 \\ 1 & -1 & 4 \end{pmatrix}$
3	$\begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 3 \end{pmatrix}$
4	$\begin{pmatrix} 7 & -6 & 6 \\ 4 & -1 & 4 \\ 4 & -2 & 5 \end{pmatrix}$

Номер варианта	Матрица линейного оператора
5	$\begin{pmatrix} 6 & -2 & -1 \\ -1 & 5 & -1 \\ 1 & -2 & 4 \end{pmatrix}$
6	$\begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$
7	$\begin{pmatrix} 4 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & -2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$
8	$\begin{pmatrix} 7 & -6 & 6 \\ 2 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$
9	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 2 & -2 & -2 \\ -4 & -2 & 1 \end{pmatrix}$
10	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 \\ 2 & -2 & 2 \\ -5 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

Задача 6. Привести квадратичную форму $F(x_1; x_2)$ к каноническому виду ортогональным преобразованием. Определить, какой тип кривой второго порядка задает уравнение $F(x_1; x_2) = C$.

Номер варианта	Вид квадратичной формы	Значение константы C
1	$F(x_1; x_2) = -2x_1^2 - 2x_2^2 + 2x_1x_2$	C = 2
2	$F(x_1; x_2) = 7x_1^2 + 7x_2^2 + 2x_1x_2$	C = –3
3	$F(x_1; x_2) = 3x_1^2 + 3x_2^2 + 4x_1x_2$	C = 5
4	$F(x_1; x_2) = x_1^2 + x_2^2 + 2x_1x_2$	C = –1
5	$F(x_1; x_2) = -x_1^2 + 4x_2^2 - 12x_1x_2$	C = 6
6	$F(x_1; x_2) = 5x_1^2 + 5x_2^2 - 2x_1x_2$	C = –4
7	$F(x_1; x_2) = 6x_1^2 + 6x_2^2 + 4x_1x_2$	C = –2

Номер варианта	Вид квадратичной формы	Значение константы С
8	$F(x_1; x_2) = -4x_1^2 - 4x_2^2 + 2x_1x_2$	С = 3
9	$F(x_1; x_2) = -x_1^2 - x_2^2 - 4x_1x_2$	С = 4
10	$F(x_1; x_2) = 4x_1^2 + 4x_2^2 + 2x_1x_2$	С = –5

Задача 7. Даны координаты вершин треугольника АВС. Составить уравнения сторон треугольника, медианы, высоты и биссектрисы угла *A*, а также прямых, проходящих через вершины треугольника и параллельных его сторонам. Найти длину высоты, медианы и биссектрисы.

Номер варианта	Координаты точки А	Координаты точки В	Координаты точки С
1	(1;2)	(3;4)	(–1;2)
2	(4;2)	(–3;6)	(2;3)
3	(–3;1)	(–2;4)	(1;3)
4	(2;3)	(–5;3)	(–1;0)
5	(0;4)	(–5;–1)	(2;2)
6	(–1;2)	(3;–2)	(1;4)
7	(3;4)	(2;1)	(–2;–3)
8	(–4;1)	(0;5)	(4;2)
9	(5;0)	(2;2)	(–2;3)
10	(–3;2)	(–1;5)	(3;2)

Задача 8. Записать уравнения кривых в полярных координатах и построить их.

Номер варианта	$F(x, y) = 0$
1	$y = -5x,\ x^2 + y^2 = \sqrt{3},\ x^2 + y^2 = -20x,\ x^2 + y^2 = 15y$
2	$x = -4y,\ x^2 + y^2 = 200,\ x^2 + y^2 = \frac{16}{9}x,\ x^2 + y^2 = -14y$
3	$x = 2x,\ x^2 + y^2 = 169,\ x^2 + y^2 = -12x,\ x^2 + y^2 = 0{,}8y$

Номер варианта	$F(x, y) = 0$
4	$x - y = 8$, $x^2 + y^2 = 121$, $x^2 + y^2 = -14x$, $x^2 + y^2 = 0{,}6y$
5	$x + y = 1$, $x^2 + y^2 = 125$, $x^2 + y^2 = \frac{x}{4}$, $x^2 + y^2 = 12y$
6	$x = 3{,}5$, $x^2 + y^2 = 100$, $x^2 + y^2 = -9x$, $x^2 + y^2 = 10y$
7	$x = \pi$, $x^2 + y^2 = 16$, $x^2 + y^2 = -3x$, $x^2 + y^2 = 3y$
8	$x = \frac{\pi}{4}$, $x^2 + y^2 = 81$, $x^2 + y^2 = 12x$, $x^2 + y^2 = -10y$
9	$x = \frac{\pi}{2}$, $x^2 + y^2 = 64$, $x^2 + y^2 = -8x$, $x^2 + y^2 = 0{,}4y$
10	$y = -3$, $x^2 + y^2 = 49$, $x^2 + y^2 = -5x$, $x^2 + y^2 = 6y$

Задача 9. Составить уравнение плоскости *P*, проходящей через точку *A* перпендикулярно вектору $\overrightarrow{BC}$. Написать ее общее уравнение, а также нормальное уравнение плоскости и в отрезках. Составить уравнение плоскости P_1, проходящей через точки *A, B, C*. Найти угол между плоскостями *P* и P_1. Найти расстояние от точки *D* до плоскости *P*.

Номер варианта	Координаты точки *A*	Координаты точки *B*	Координаты точки *C*	Координаты точки *D*
1	(2; 5; 3)	(1; 3; 5)	(0; –3; 7)	(3; 2; 3)
2	(–2; 3; 5)	(1; –3; 4)	(7; 8; –1)	(–1; 2; –1)
3	(1; 1; 2)	(2; 3; –1)	(2; –2; 4)	(–1; 2; 2)
4	(1; 3; 5)	(0; 2; 0)	(5; 7; 9)	(0; 4; 8)
5	(3; –5; 2)	(4; 5; 1)	(–3; 0; –4)	(–4; 5; –6)
6	(4; 5; 2)	(3; 0; 1)	(–1; 4; 2)	(5; 7; 8)
7	(5; 1; 0)	(7; 0; 1)	(2; 1; 4)	(5; 5; 3)
8	(4; 2; –1)	(3; 0; 4)	(0; 0; 4)	(5; –1; –3)
9	(4; –3; –2)	(2; 2; 3)	(–1; –2; 3)	(2; –2; –3)
10	(3; 1; 1)	(1; 4; 1)	(1; 1; 7)	(3; 4; –1)

Задача 10. Прямая *l* задана в пространстве общими уравнениями. Написать ее канонические и параметрические уравнения. Со-

ставить уравнение прямой l_1, проходящей через точку M параллельно прямой l, и вычислить расстояние между ними. Найти проекцию точки M на прямую l и точку пересечения прямой l и плоскости P.

Номер варианта	Общие уравнения прямой l	Координаты точки M	Общее уравнение плоскости P
1	$\begin{cases} x-3y+2z-5=0, \\ 2x+5y-3z+2=0. \end{cases}$	(1; 2; 3)	$2x-3y+4z-6=0$
2	$\begin{cases} 2x+y+z-2=0, \\ 2x-y-3z+6=0. \end{cases}$	(2; 1; –1)	$x-7y+4z-1=0$
3	$\begin{cases} 2x-3y-2z+6=0, \\ x-3y+z+3=0. \end{cases}$	(0; 2; –1)	$x-2y+3z-4=0$
4	$\begin{cases} 3x+3y-2z-1=0, \\ 2x-3y+z+6=0. \end{cases}$	(2; 0; –1)	$x+y+z+4=0$
5	$\begin{cases} x+5y+2z-5=0, \\ 2x-5y-z+5=0. \end{cases}$	(2; 0; –3)	$7x+y-4z-5=0$
6	$\begin{cases} 5x-y-2z-3=0, \\ 3x-2y-5z+2=0. \end{cases}$	(0; –1; 1)	$2x-7y+3z+5=0$
7	$\begin{cases} x+y+z-2=0, \\ x-y-2z+2=0. \end{cases}$	(0; 3; 1)	$x+6y-3z+8=0$
8	$\begin{cases} 2x+y-3z-2=0, \\ 2x-y+z+6=0. \end{cases}$	(–1; 0; 3)	$x-2y+5z-6=0$
9	$\begin{cases} 2x+3y+z+6=0, \\ x-3y-2z+3=0. \end{cases}$	(–1; 1; 0)	$x+2y-z+5=0$
10	$\begin{cases} x+3y+z-8=0, \\ 2x+y-2z+3=0. \end{cases}$	(2; 1; 1)	$5x-y-z+1=0$

Задача 11. Даны комплексные числа. Необходимо: а) выполнить действия в алгебраической форме; б) найти тригонометрическую форму числа z и вычислить z^{20}; найти корни уравнения $w^3+z=0$ и отметить их на комплексной плоскости.

Номер варианта	Задание для части *а*	Задание для части *б*
1	$\left(\dfrac{-\frac{1}{2}-\frac{3}{2}i}{3-i}\right)^{3}$	$z=-1+\sqrt{3}i$
2	$\left(\dfrac{-\frac{5}{2}+\frac{3}{4}i}{\frac{3}{2}+5i}\right)^{-2}$	$z=\sqrt{3}-i$
3	$\left(\dfrac{-2-8i}{4-i}\right)^{5}$	$z=\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$
4	$\left(\dfrac{3-i}{-2-6i}\right)^{3}$	$z=1+\sqrt{3}i$
5	$\left(\dfrac{2-8i}{-4-i}\right)^{7}$	$z=-1-i$
6	$\left(\dfrac{-1+4i}{2+\frac{1}{2}i}\right)^{2}$	$z=\sqrt{2}+\sqrt{2}i$
7	$\left(\dfrac{-1+\frac{1}{4}i}{\frac{1}{2}+2i}\right)^{-3}$	$z=-2+2\sqrt{3}i$
8	$\left(\dfrac{1-\frac{7}{2}i}{-7-2i}\right)^{-4}$	$z=2-2\sqrt{3}i$
9	$\left(\dfrac{-6+2i}{1+3i}\right)^{3}$	$z=-\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$
10	$\left(\dfrac{-2+7i}{\frac{7}{2}+i}\right)^{5}$	$z=\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{1}{2}i$

Требования к выполнению и оформлению самостоятельных работ

Номера вариантов контрольных задач определяются с помощью приведенной ниже таблицы, причем номера контрольных задач 1, 4, 7, 10 находятся по первой букве фамилии студента; номера контрольных задач 2, 5, 8, 11 находятся по первой букве имени студента; номера контрольных задач 3, 6, 9, 12 находятся по первой букве отчества студента.

Буква	А, М	Б, Н, Ю	В, О, Я	Г, П	Д, Р, Ч	Е, С, Ш	Ж, З, Т, Щ	И, У	К, Ф, Э	Л, Х, Ц
№ варианта	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

При выполнении контрольных работ необходимо строго придерживаться указанных ниже правил. Работы, выполненные без соблюдения этих правил, не зачитываются и возвращаются студенту для переработки.

1. Каждая контрольная работа должна быть выполнена в отдельной тетради в клетку синими или черными чернилами. Необходимо оставлять поля шириной 4–5 см для замечаний рецензента.

2. В заголовке работы на обложке тетради должны быть разборчиво написаны фамилия, имя и отчество студента, название дисциплины, номер контрольной работы; здесь же следует указать название учебного заведения, дату отсылки работы в институт и адрес студента. В конце работы следует поставить дату её выполнения и подпись студента.

3. В работу должны быть включены все задачи, указанные в задании, строго по положенному варианту. Решения задач надо располагать в порядке возрастания их номеров.

4. Перед решением каждой задачи надо полностью выписать её условие. Если условие задачи имеет общую формулировку, то, переписывая его, следует общие данные заменить конкретными, взятыми из своего варианта. Не следует приступать к выполнению контрольного задания, не решив достаточного количества задач по материалу, соответствующему этому заданию. Опыт показывает,

что чаще всего неумение решить ту или иную задачу контрольного задания вызывается тем, что студент не выполнил это требование.

5. В прорецензированной работе студент должен исправить отмеченные рецензентом ошибки и учесть его рекомендации и советы. Рецензии позволяют студенту судить о степени усвоения соответствующего раздела курса; указывают на имеющиеся у него пробелы, на желательное направление работы; помогают сформулировать вопросы для постановки их перед преподавателем. Зачтенные контрольные работы предъявляются студентом при сдаче зачета или экзамена.

Контрольные работы должны выполняться самостоятельно. Несамостоятельно выполненная работа не дает возможности преподавателю-рецензенту указать студенту на недостатки в его работе, в усвоении им учебного материала. В результате студент не приобретает необходимых знаний и может оказаться не подготовленным к устному зачету или экзамену.

Библиографический список

1. Ахметжанова, Г.В. Высшая математика : учеб.-метод. пособие для студ. очно-заоч. и заоч. обучения / Г.В. Ахметжанова, Н.Г. Бабенко, О.И. Иванов. – Тольятти : ТГУ, 2005. – Ч. 1. – 111 с.
2. Баврин, И.И. Высшая математика : учеб. для вузов / И.И. Баврин, В.Л. Матросов. – М. : Владос, 2002. – 398 с.
3. Бараненков, А.И. Сборник задач и типовых расчетов по высшей математике : учеб. пособие / А.И. Бараненков, Е.П. Богомолова, И.М. Петрушко. – СПб. : Лань, 2009. – 234 с.
4. Белько, И.В. Высшая математика для инженеров: 1 семестр: экспресс-курс / И.В. Белько, К.К. Кузьмич, Р.М. Жевняк. – М. : Новое знание, 2005. – 166 с.
5. Воронов, М.В. Высшая математика для экономистов и менеджеров : для студентов вузов / М.В. Воронов, Г.П. Мещеряков. – Ростов н/Д : Феникс, 2004. – 284 с.
6. Высшая математика в упражнениях и задачах : в 2 ч. / П.Е. Данко [и др.]. – 7-е изд., испр. – М. : ОНИКС: Мир и Образование, 2008. – Ч. 2. – 448 с.
7. Высшая математика для экономических специальностей : учеб. и практикум для вузов / Н.Ш. Кремер [и др.] ; под ред. Н.Ш. Кремера. – 3-е изд., перераб. и доп. – М. : Юрайт, 2010. – 909 с.
8. Иванов, О.И. Высшая математика для заочников : учеб.-метод. пособие / О.И. Иванов, С.Ш. Палферова, Н.Г. Бабенко. – 2-е изд., испр. – Тольятти : ТГУ, 2008. – Ч. 2. – 94 с.
9. Ильин, В.А. Высшая математика : учеб. для вузов / В.А. Ильин, А.В. Куркина. – 3-е изд., перераб. и доп. – М. : Проспект, 2009. – 592 с.
10. Красс, М.С. Математика для экономистов : учеб. пособие для вузов / М.С. Красс, Б.П. Чупрынов. – СПб. : Питер, 2009. – 464 с.
11. Мышкис, А.Д. Лекции по высшей математике : учеб. пособие / А.Д. Мышкис. – 5-е изд., перераб. и доп. – СПб. : Лань, 2007. – 688 с.
12. Письменный, Д.Т. Конспект лекций по высшей математике : полный курс / Д.Т. Письменный. – 5-е изд. – М. : Айрис-Пресс, 2007. – 603 с.
13. Шипачев, В.С. Основы высшей математики : учеб. пособие для вузов / В.С. Шипачев ; под ред. А.Н. Тихонова. – 4-е изд., стер. – М. : Высш. шк., 2001. – 479 с.