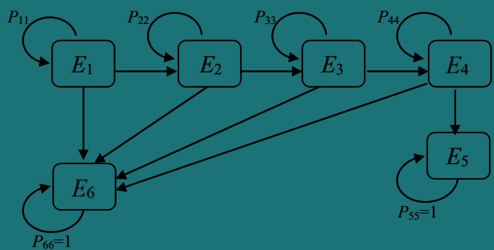
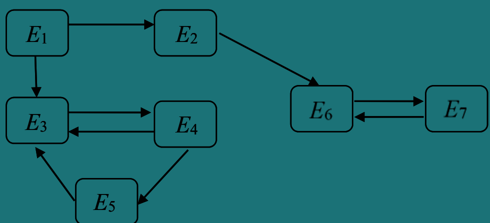
Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Тольяттинский государственный университет
Институт математики, физики и информационных технологий

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА

Электронное учебно-методическое пособие





ISBN 978-5-8259-1067-3

УДК 519.2(075.8)
ББК 22.17я73

Рецензенты:
канд. пед. наук, доцент, заведующий кафедрой «Математика и информатика» Поволжского православного института имени Святителя Алексия, митрополита Московского *Е.В. Бахусова*;
канд. пед. наук, доцент, доцент кафедры «Высшая математика и математическое образование» Тольяттинского государственного университета *В.В. Липилина*.

Авторы:
Н.Н. Кошелева, С.А. Крылова, О.А. Кузнецова,
Е.С. Павлова, С.Ш. Палфёрова

Теория вероятностей и математическая статистика : электронное учебно-методическое пособие / Н.Н. Кошелева, С.А. Крылова, О.А. Кузнецова [и др.]. – Тольятти : Изд-во ТГУ, 2022. – 1 оптический диск. – ISBN 978-5-8259-1067-3.

Учебно-методическое пособие содержит необходимый теоретический материал и большое количество примеров и задач, иллюстрирующих основные понятия по учебной дисциплине «Высшая математика» раздела «Теория вероятностей и математическая статистика». Приведены по 10 вариантов задач каждого типа для самостоятельного решения.

Предназначено для студентов инженерных специальностей очной и заочной форм обучения, но будет полезно и для студентов дистанционной формы обучения.

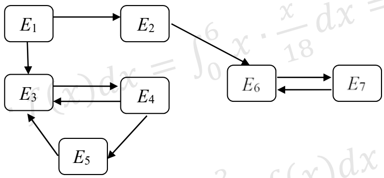
Пособие рассчитано как на студентов, только начинающих изучать данную дисциплину, так и на студентов старших курсов, осваивающих ее специальные разделы.

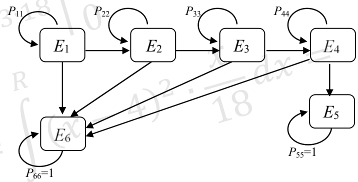
Представляет интерес для преподавателей, желающих активизировать самостоятельную работу студентов.

Текстовое электронное издание.

Рекомендовано к изданию научно-методическим советом Тольяттинского государственного университета.

Минимальные системные требования: IBM PC-совместимый компьютер: Windows XP/Vista/7/8; PIII 500 МГц или эквивалент; 128 Мб ОЗУ; SVGA; CD-ROM; Adobe Acrobat Reader.





Редактор *Т.М. Воропанова*
Технический редактор *Н.П. Крюкова*
Компьютерная верстка: *Л.В. Сызганцева*
Художественное оформление,
компьютерное проектирование: *Г.В. Карасева*

Дата подписания к использованию 11.04.2022.
Объем издания 5,2 Мб.
Комплектация издания: компакт-диск, первичная упаковка.
Заказ № 1-42-21.

Издательство Тольяттинского государственного университета
445020, г. Тольятти, ул. Белорусская, 14,
тел. 8 (8482) 44-91-47, www.tltsu.ru

Содержание

ВВЕДЕНИЕ

Учебно-методическое пособие предназначено для изучения дисциплины «Высшая математика-3» и охватывает все основные разделы теории вероятностей и математической статистики.

Пособие предназначено для обучения студентов следующих специальностей: 04.03.01 «Химия»; 08.03.01 «Строительство»; 11.03.04 «Электроника и наноэлектроника»; 13.03.02 «Электроэнергетика и электротехника»; 13.03.03 «Энергетическое машиностроение»; 15.03.01 «Машиностроение»; 15.03.05 «Конструкторско-технологическое обеспечение машиностроительных производств»; 18.03.01 «Химическая технология»; 18.03.02 «Энерго- и ресурсосберегающие процессы в химической технологии, нефтехимии и биотехнологии»; 19.03.04 «Технология продукции и организация общественного питания»; 20.03.01 «Техносферная безопасность»; 22.03.01 «Материаловедение и технологии материалов»; 23.03.03 «Эксплуатация транспортно-технологических машин и комплексов».

Предлагаемое пособие написано на основе лекций, читаемых авторами в Тольяттинском государственном университете.

Цель пособия – ознакомить студентов с элементами теории вероятностей и математической статистики.

Задача – помочь обучающимся приобрести навыки применения полученных знаний для решения различных прикладных вопросов.

Предмет теории вероятностей – изучение случайных массовых явлений, обладающих свойством статистической устойчивости, что позволяет решать прикладные задачи практически во всех отраслях естествознания и техники.

Математическая статистика разрабатывает математический аппарат прикладной статистики, то есть находит различные методы обработки и анализа результатов наблюдений и с помощью теории вероятностей обосновывает их применение.

На самостоятельную работу студентов приходится не менее 50 % всего объёма часов, то есть практически столько же, сколько и часов аудиторных занятий. Поэтому издание данного пособия важно для организации самостоятельной работы и успешного освоения дисциплины.

В результате изучения дисциплины «Высшая математика» раздела «Теория вероятностей и математическая статистика» у студентов должны быть сформированы следующие компетенции:

- способность к абстрактному мышлению, анализу, синтезу;
- готовность действовать в нестандартных ситуациях, нести социальную и этическую ответственность за принятые решения;
- готовность к саморазвитию, самореализации, использованию творческого потенциала;
- готовность к коммуникации в устной и письменной форме на русском и иностранном языках для решения задач профессиональной деятельности;
- способность применять математический аппарат теории вероятностей и математической статистики.

В процессе изучения дисциплины обучающиеся должны

• *знать:*

- основные понятия и положения теории вероятностей и математической статистики, методы решения задач, а также их приложения в профессиональных дисциплинах, методы сбора анализа и обработки информации;
- методы решения вероятностных и статистических задач до числового или другого требуемого результата (графика, формулы и т. п.);

• *уметь:*

- решать типовые вероятностные и статистические задачи;
- самостоятельно математически корректно ставить естественно-научные задачи, проводить строгие математические рассуждения;
- оперировать абстрактными объектами и корректно использовать математические, вероятностные и статистические понятия и символику для выражения количественных и качественных отношений объектов;

• *владеть:*

- методами математического описания типовых задач и интерпретации полученного результата;
- способами наглядного графического представления результатов исследования;
- навыками применения современного математического инструментария для решения математических задач;

– математической логикой, необходимой для формирования суждений по соответствующим профессиональным проблемам.

Учебно-методическое пособие содержит 3 модуля:

1. Теория вероятностей случайных событий.
2. Теория вероятностей случайных величин.
3. Математическая статистика.

Модуль 1 включает задачи комбинаторики, классическое, статистическое, геометрическое определения вероятностей, теоремы сложения и умножения вероятностей, формулы полной вероятности Байеса, Бернулли, асимптотические формулы.

Модуль 2 включает дискретные и непрерывные случайные величины, их числовые характеристики, виды распределений (биномиальное, равномерное, показательное, распределение Пуассона, нормальное).

Модуль 3 включает статистические характеристики вариационных рядов, доверительные интервалы, проверку статистических гипотез, первоначальные сведения о цепях Маркова.

В каждом разделе рассмотрены необходимые теоретические сведения и формулы; подробно разобраны задачи, входящие в стандартный курс теории вероятностей и математической статистики; приведены по 10 вариантов задач каждого типа для самостоятельного решения; рекомендации по выполнению заданий; список рекомендуемой литературы и контрольные вопросы для проверки качества усвоения лекционного материала. В конце пособия приведён глоссарий основных терминов и определений, а также добавлены приложения статистических таблиц и распределений, необходимых при выполнении заданий.

Каждый студент должен освоить учебный материал разделов, акцентируя внимание на основных понятиях и терминах, ответить на вопросы для самоконтроля. Необходимо выполнить контрольные задания по каждой теме в соответствии с вариантом, согласованным с преподавателем, после чего ответить на вопросы теста.

Структура пособия позволяет использовать его для выполнения индивидуальных домашних заданий, проведения контрольных мероприятий, а также для самостоятельной работы и подготовки к промежуточной аттестации.

Нумерация примеров, задач и рисунков — внутри каждой темы.

По завершении изучения раздела «Теория вероятностей и математическая статистика» дисциплины «Высшая математика-3» преподаватель проводит промежуточный контроль в виде итоговой контрольной работы с целью проверки и оценки знаний и умений студентов. Задания контрольной работы должны быть выполнены аккуратно, последовательно, обоснование решения и ответ обязательны в каждом задании. При выполнении контрольных работ не допускается использование мобильных устройств и гаджетов.

К данной контрольной работе допускаются студенты, получившие по всем практическим работам «зачтено».

«Зачтено» за каждое практическое занятие студент получает при правильном выполнении 75 % заданий, предложенных для самостоятельного решения.

Контрольная работа оценивается в 25 баллов, содержит 10 заданий, каждое задание оценивается в 2,5 балла.

- 2,5 балла студент получит, если задание выполнено в полном объеме;
- 2 балла — если задание выполнено в объеме от 80 % и выше;
- 1,5 балла — если задание выполнено в объеме от 60 до 79 %;
- 1 балл — если задание выполнено в объеме от 40 до 59 %;
- 0,5 балла — если задание выполнено в объеме от 20 до 39 %;
- 0 баллов — если задание выполнено в объеме менее 19 %.

Выражаем благодарность нашим коллегам: Черновой Юлии Константиновне, Калуковой Ольге Макаровне, Москалёвой Надежде Ивановне, Шаповаловой Нэлле Александровне за тот бесценный опыт преподавания математики инженерам, которым они делились с нами и которым мы пользуемся до сих пор, работая с их учебными пособиями.

Модуль 1. ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ СЛУЧАЙНЫХ СОБЫТИЙ

Тема 1.1. Основные понятия теории вероятности. Задачи комбинаторики

Форма проведения: практическое занятие.

Вопросы для обсуждения

1. Предмет теории вероятности.
2. Виды случайных событий.
3. Формулы комбинаторики.

Методические указания по проведению занятия

Занятие проводится в виде практической работы, в процессе которой студентам необходимо уточнить базовые понятия и основные теоретические сведения по теме занятия, выполнить практическое задание по вариантам под руководством преподавателя, ответить на контрольные вопросы по теме.

Методические материалы к занятию

Теория вероятностей – это математическая наука, изучающая закономерности в массовых случайных явлениях и позволяющая по вероятностям одних случайных событий находить вероятности других случайных событий, связанных каким-либо образом между собой.

Предметом теории вероятностей является изучение вероятностных закономерностей массовых однородных случайных событий.

Основные понятия теории вероятности – «испытание» и «случайное событие».

Осуществление каждого отдельного наблюдения, опыта или измерения при изучении эксперимента называют ***испытанием***.

Результат испытания называется ***событием***.

Пример 1.1.1

Студент пишет контрольную работу. Описать все возможные события этого испытания.

Здесь испытание – это написание контрольной, а событие – студент написал контрольную на «отлично», «хорошо», «удовлетворительно» или «неудовлетворительно».

Различают случайные, достоверные и невозможные события.

Достоверное событие – это такое событие, которое обязательно произойдет в результате данного опыта. Вероятность достоверного события равна 1.

Пример 1.1.2

1. Ученик, закончивший школу, получает аттестат.
2. Мы работаем и получаем вознаграждение в виде заработной платы.
3. Школьники сдали хорошо экзамены, прошли конкурс, за это получили вознаграждение в виде поступления в учебное заведение.

Такие события являются достоверными, так как если выполняются все необходимые условия, то обязательно будет получен ожидаемый результат.

Невозможное событие – событие, которое никогда не наступает в результате данного эксперимента. Вероятность невозможного события равна 0.

Пример 1.1.3

1. Вода замерзла при температуре плюс десять градусов.
2. Зимой на улице зацвели пионы.
3. Наступило 35 июля.

Событие, которое при воспроизведении опыта может наступить, а может и не наступить, называют ***случайным событием***.

Пример 1.1.4

1. Получение отметки от 2 до 5 при сдаче экзамена.
2. Выпадение числа от 1 до 6 при бросании игральной кости.

Бросок монеты – это опыт, или испытание, выпадение орла – это событие. Вытягивание шара из мешка вслепую – испытание; попался красный шар – это событие и так далее.

Различают события зависимые и независимые. Два события называются независимыми, если появление одного из них не изменяет вероятность появления другого. Например, если в цехе работают две автоматические линии, по условиям производства не взаимосвязанные, то остановки этих линий являются независимыми событиями.

Несколько событий называются независимыми в совокупности, если любое из них не зависит от любого другого события и от любой комбинации остальных.

События называются зависимыми, если одно из них влияет на вероятность появления другого. Например, две производственные установки связаны единым технологическим циклом. Тогда вероятность выхода из строя одной из них зависит от того, в каком состоянии находится другая.

События обозначаются большими латинскими буквами A, B, C, ..., невозможное событие – $\varnothing$, достоверное событие – Ω.

Событие, состоящее в наступлении хотя бы одного из событий A или B, называется суммой (объединением) событий A и B и обозначается $A + B$ или $A \cup B$.

Пример 1.1.5

Два студента сдают экзамен. Событие A – первый студент сдал экзамен, событие B – второй студент сдал экзамен. Событие $A + B$ – первый или второй студент сдал экзамен.

Событие, состоящее в наступлении обоих событий и A и B, называется ***произведением*** (пересечением) событий A и B и обозначается $A \cdot B$ или $A \cap B$.

Пример 1.1.6

Два студента сдают экзамен. Событие A – первый студент сдал экзамен, событие B – второй студент сдал экзамен. Событие $A \cdot B$ – оба студента сдали экзамен.

Событие, состоящее в том, что A происходит, а B не происходит, называется ***разностью*** событий A и B и обозначается A/B или $A - B$.

Пример 1.1.7

Два студента сдают экзамен. Событие A – первый студент сдал экзамен, событие B – второй студент сдал экзамен. Событие A/B – первый студент сдал экзамен, а второй не сдал.

Событие, обозначаемое через $\bar{A}$, называется ***противоположным*** событию A, если оно происходит тогда и только тогда, когда событие A не происходит.

Пример 1.1.8

Студент сдает экзамен. Событие A – студент сдал экзамен, событие $\bar{A}$ – студент не сдал экзамен.

Если наступление события A делает невозможным наступление события B (и наоборот), то событие A и B называются ***несовместными*** или непересекающимися, в этом случае $A \cap B = \varnothing$. Для ***совместных*** событий $A \cap B \neq \varnothing$.

Пример 1.1.9

Ученик пишет контрольную работу. Событие A – ученик получил оценку 2; событие B – ученик получил оценку 4. A и B несовместные события, так как при написании одной контрольной работы ученик не может получить одновременно 2 и 4.

События $A_1, A_2, \ldots, A_k$ образуют ***полную группу*** событий, если они являются всеми возможными итогами одного испытания и выполняется условие:

$A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_k = \Omega = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$. Попарно несовместные события ($A_i \cdot A_j = \varnothing, \forall\ i \neq j$), образующие полную группу событий, называют ***гипотезами***.

Пример 1.1.10

1. Школьник подает заявку в МДЦ «Артек». События «заявка будет одобрена» и «заявка будет отклонена» составляют полную группу.

2. Бросается игральная кость. События «выпадет 1», «выпадет 2», «выпадет 3», «выпадет 4», «выпадет 5», «выпадет 6» – попарно несовместны, образуют полную группу и являются гипотезами.

Формулы комбинаторики

При решении задач по теории вероятностей необходимо знать некоторые правила и формулы комбинаторики.

Правило суммы. Если два действия A и B взаимно исключают друг друга, причем действие A можно выполнить m способами, а B – n способами, то выполнить одно любое из этих действий (либо A, либо B) можно $n + m$ способами.

Правило произведения. Пусть требуется выполнить последовательно k действий. Если первое действие можно выполнить n_1 способами, второе действие n_2 способами, третье – n_3 способами и так до k-го действия, которое можно выполнить n_k способами, то все k действий вместе могут быть выполнены

$$N = n_1 \cdot n_2 \cdot \ldots \cdot n_k$$

способами.

Формула для числа перестановок применяется в задачах о перестановках в различных комбинациях нескольких разных объектов, причем в каждой комбинации должны присутствовать все объекты строго по одному разу.

Число таких различных комбинаций (***перестановок без повторения элементов***) определяется формулой $\boldsymbol{P_n = n!}$

Если происходит перестановка и элементы в ней повторяются, то

$$P(k_1, \ldots, k_n) = \frac{(k_1 + \ldots + k_n)!}{k_1! \cdot \ldots \cdot k_n!}.$$

Пример 1.1.11

Сколько существует способов составления расписания на понедельник из 6 разных предметов?

Решение. $P_n = 6! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 = 720.$

Формула для числа сочетаний из n элементов по k: если в выборках из n объектов выбирается по k объектов, порядок их следования по условию задачи не имеет значения, то количество таких выборок $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ – число сочетаний без повторений; число сочетаний с повторениями $\bar{C}_n^k = C_{n+k-1}^k$.

Пример 1.1.12

Сколькими способами можно сформировать профсоюз студентов из трех человек, имея пять разных кандидатур?

Решение.

$$C_5^3 = \frac{5!}{3!\,2!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 2} = 10.$$

Формула размещения: если из n разных объектов выбирается по k разных объектов, то с учетом порядка следования полное число разных выборок будет определять формула $A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!} =$ – ***число размещений без повторений.***

Если из n разных объектов выбирается по k объектов, то полное число таких различных выборок может быть определено по формуле $\widetilde{A}_n^k = n^k$, если выборки отличаются порядком следования объектов и допускается повторение одного и того же объекта.

Пример 1.1.13. Сколько трехзначных чисел можно составить из цифр 1, 2, 3, 4, 5?

Решение.

$$A_5^3 = \frac{5!}{2!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}{1 \cdot 2} = 3 \cdot 4 \cdot 5 = 60.$$

Методические указания по выполнению самостоятельной работы студентов

Для выполнения предложенных заданий самостоятельной работы следует изучить представленный выше теоретический материал, разобрать предложенные решения типовых примеров и изучить рекомендуемую литературу.

Если студент испытывает затруднения в освоении теоретического или практического материала, то он может получить устную или письменную консультацию у ведущего преподавателя.

Задания выполнять в соответствии с предлагаемыми вариантами.

Номер варианта находится в таблице по первой букве имени студента.

Буква	А, О, Х	В, Ш, У	Д, Р, Щ	Е, П	Г, Ж, И	К, Ф, Э	Л, Ч, Ю	Б, М, Я	Н, Т	С, Ц, З
№ вар.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

Вариант 1

1. Найти количество всех четырехзначных чисел, которые можно составить из цифр 1, 5, 6, 7.

2. Найти число способов, которыми семь книг разных авторов можно расставить на полке в один ряд.

3. Сколько существует всех семизначных телефонных номеров, в каждом из которых ни одна цифра не повторяется?

4. Сколькими способами можно выбрать 3 книжки из 5?

Вариант 2

1. Сколько трехзначных чисел можно составить из цифр 0, 1, 2, 3, 4, 5, если ни одна цифра не повторяется дважды?

2. Сколько трехзначных чисел можно составить из цифр 1, 2, 3, если каждая цифра входит в изображение числа только один раз?

3. Найти число способов провести выборы старосты и профорга в группе из 30 человек.

4. Сколькими способами можно выбрать трех человек из 30?

Вариант 3

1. Найти количество трехзначных четных чисел, которые можно составить из цифр 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, если цифры могут повторяться.

2. Сколькими способами можно распределить четыре должности среди четырех сотрудников?

3. Найти число способов составить трехцветный флаг, если есть материя 5 различных цветов.

4. Найти число различных билетов по 3 вопроса, которые можно составить из 60 вопросов.

Вариант 4

1. Найти количество двузначных чисел, имеющих обе четные цифры.

2. Домашнее задание по литературе состоит в том, чтобы выучить одно из трех стихотворений: «Анчар», «Буря» или «Вьюга». Миша, Никита и Олег решили распределить все три стихотворения между собой по одному. Сколько существует способов это сделать?

3. Найти число способов составить трехцветный флаг, если имеется материя 5 различных цветов и одна из полос должна быть красной.

4. Найти число вариантов распределения трех одинаковых путевок среди пяти сотрудников.

Вариант 5

1. Сколькими способами могут быть распределены золотая, серебряная и бронзовая медали розыгрыша первенства по футболу среди 16 команд, если любая команда может получить только одну медаль?

2. Сколькими способами можно разложить восемь различных писем по восьми различным конвертам, если в каждый конверт кладется только одно письмо?

3. Сколькими способами можно распределить три различных путевки среди пяти студентов?

4. Найти число экзаменационных комиссий, состоящих из 5 человек, которые можно образовать из 10 преподавателей.

Вариант 6

1. Имеется 5 видов конвертов без марок и 4 вида марок одного достоинства. Найти число различных способов выбрать конверт с маркой.

2. На сортировочной станции стоит группа из 5 вагонов 5 назначений. Найти число способов размещения вагонов по этим назначениям.

3. Сколько существует двузначных чисел, в которых цифра десятков и цифра единиц различные и нечетные?

4. Сколькими способами можно из двенадцати человек, играющих в городки, набрать на соревнования команду из четырех человек?

Вариант 7

1. На вершину горы ведут пять дорог. Сколькими способами можно подняться на гору и спуститься с нее? Сколько будет способов, если подъем и спуск проходят по разным дорогам?

2. В автосервис одновременно приехали 4 машины для ремонта. Сколько существует способов выстроить их в очередь для обслуживания?

3. Сколькими способами студент может сдать 3 экзамена на протяжении 7 дней?

4. Сколькими способами можно составить команду на игру из 6 человек из сборной университета по волейболу в 15 человек?

Вариант 8

1. Найти число способов выбрать на шахматной доске белый и черный квадраты, не лежащие на одной вертикали и горизонтали.

2. Сколько есть способов раздать спортивные номера с 1 по 5 пяти хоккеистам?

3. Сколькими способами студент может сдать 3 экзамена на протяжении 7 дней, если известно, что последний экзамен будет сдаваться на седьмой день?

4. Сколько календарных игр в розыгрыше первенства по футболу могут сыграть 16 команд, если любые две команды играют между собой только один матч?

Вариант 9

1. Из города А в город В ведут 5 дорог, а из В в С – 3 дороги. Сколько существует путей из А в С, проходящих через В?

2. Несколько человек садятся за круглый стол. Считается, что два способа рассадки совпадают, если каждый человек имеет одних и тех же соседей в обоих случаях. Сколькими способами можно рассадить 5 человек?

3. В урне 10 шаров, помеченных номерами от 1 до 10. Из урны вынимают три раза по шару, записывают номер вынутого шара и возвращают шар в урну. Найти число способов вынуть при этом шары с различными номерами.

4. В урне 10 шаров: 5 белых, 3 синих и 2 красных. Сколькими способами можно вытащить из урны два шара одного цвета?

Вариант 10

1. Из 3 экземпляров учебника алгебры, 7 экземпляров учебника геометрии и 7 экземпляров учебника тригонометрии нужно выбрать по одному экземпляру каждого учебника. Найти число различных способов такого выбора.

2. Участники лыжных соревнований стартуют с интервалом в 30 секунд. Чтобы определить порядок старта, спортсмены тянут жребий, определяющий номер старта. Сколько существует различных последовательностей выхода лыжников на старт, если в соревнованиях принимают участие: а) 6 лыжников; б) 8 лыжников?

3. Найти число разных способов, которыми можно пять студентов разместить в аудитории на 20 мест.

4. Из ящика, содержащего 25 деталей, среди которых 5 дефектных, вынимают 6 деталей. Найти число возможностей вытащить при этом 3 дефектных детали.

Контрольные вопросы

1. Что является предметом теории вероятности?
2. В чем состоит разница между испытанием и событием?
3. Какие виды событий вы знаете?
4. В каких задачах применяется формула для числа перестановок?
5. В каких задачах применяется формула для числа сочетаний?
6. В каких задачах применяется формула размещения?

Рекомендуемая литература

1. Боровков, А. А. Теория вероятностей : [учеб. пособие для вузов] / А. А. Боровков. – Москва : Наука, 1976. – 352 с.
2. Бочаров, П. П. Теория вероятностей. Математическая статистика : учеб. пособие / П. П. Бочаров, А. В. Печинкин. – Москва : Гардарики, 1998. – 326 с. – ISBN 5-7762-0035-0.
3. Вентцель, Е. С. Теория вероятностей и её инженерные приложения : учеб. пособие для втузов / Е. С. Вентцель, Л. А. Овчаров. – Изд. 2-е, стер. – Москва : Высшая школа, 2000. – 480 с. – ISBN 5-06-003830-0.
4. Геворкян, П. С. Теория вероятностей и математическая статистика : учеб. пособие для вузов / П. С. Геворкян, А. В. Потемкин, И. М. Эйсымонт. – 2-е изд., перераб. и доп. – Москва : Физматлит, 2016. – 176 с. – ISBN 978-5-9221-1682-4.

Тема 1.2. Понятие вероятности события. Классическое, геометрическое, статистическое определение вероятностей

Форма проведения: практическое занятие.

Вопросы для обсуждения

1. Классическое определение вероятности.
2. Статистическое определение вероятности.
3. Геометрическое определение вероятности.

Методические указания по проведению занятия

Занятие проводится в виде практической работы, в процессе которой студентам необходимо уточнить базовые понятия и основные теоретические сведения по теме занятия, выполнить практическое задание по вариантам под руководством преподавателя, ответить на контрольные вопросы по теме.

Методические материалы к занятию

Сравнивать случайные события (то есть события, которые могут наступить или не наступить) можно по степени возможности их наступления. С этой целью вводится числовая характеристика этой степени возможности (случайности), называемая вероятностью события. Для события A вероятность принято обозначать $P(A)$.

Большинство определений математической вероятности может быть разделено на следующие: классическое, статистическое и геометрическое.

Классическое определение вероятности

Вероятность события – это выраженная в числовой форме мера возможности появления некоторого события (A или B) в результате опыта.

Вероятность события определяется равенством $P(A) = m/n$, где m – число элементарных исходов испытания, благоприятствующих появлению события A; n – общее число возможных элементарных исходов испытания. Предполагается, что элементарные исходы образуют полную группу и равновозможны.

Пример 1.2.1

Бросается игральная кость. Найти вероятность того, что выпадет не более четырех очков.

Решение. Общее число элементарных исходов $n = 6$ (могут выпасть 1, 2, 3, 4, 5, 6). Среди этих исходов благоприятствуют событию A (выпадет не более четырех очков) только четыре исхода $m = 4$. Следовательно, искомая вероятность $P(A) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$.

Статистическое определение вероятности

Относительной частотой $P^*(A)$ события A в данной серии испытаний называется отношение m^* (числа испытаний, в которых появилось событие A) к n^* (общему числу проведенных испытаний), то есть

$$P^*(A) = \frac{m^*}{n^*}.$$

Из данного определения следует, что относительная частота случайного события всегда заключена между нулем и единицей: $0 \le P^*(A) \le 1$.

Статистической вероятностью P(A) события A называется предел, к которому стремится относительная частота $P^*(A)$ при неограниченном увеличении числа испытаний, то есть

$$P(A) = \lim_{n\to\infty} P^*(A) = \lim_{n\to\infty} \frac{m^*}{n^*}.$$

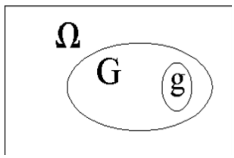
Пример 1.2.2

Обучаясь в школе, ученик писал контрольную работу 100 раз. Из них на положительную оценку 89 раз. Чему равна относительная частота написания контрольных работ на положительную оценку?

Решение. $P^* = \dfrac{89}{100}$.

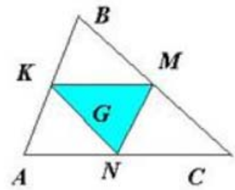
Геометрическое определение вероятности

Пусть пространство элементарных событий состоит из бесконечного числа событий (точек), заполняющих некоторую область (G), а событию A соответствует область (g), содержащаяся в G и состоящая из событий (точек), благоприятствующих A. Тогда вероятностью $P(A)$ события A называется число, вычисляемое по формуле $P(A) = \dfrac{\text{mes}\,g}{\text{mes}\,G}$.



В этой формуле под символом **mes *G*** (**mes *g***) понимают длину отрезка, площадь фигуры или объем тела в зависимости от того, где расположена область G (g) – на прямой, в плоскости или в пространстве. Тогда вероятность $P(A)$ есть отношение геометрических размеров (мер – **mes**) областей, то есть длин отрезков, площадей, объемов.

Пример 1.2.3



Из треугольника ABC случайным образом выбирается точка X. Найти вероятность того, что она принадлежит треугольнику, вершинами которого являются середины сторон треугольника.

Решение. Средние линии треугольника разбивают его на 4 равных треугольника. Значит, $S_{ABC} = 4S_{KMN}$.

Вероятность того, что точка X принадлежит треугольнику KMN, равна:

$$P(A) = \frac{S_{KMN}}{S_{ABC}} = \frac{S_{KMN}}{4S_{KMN}} = \frac{1}{4}.$$

Методические указания по выполнению самостоятельной работы студентов

Для выполнения предложенных заданий самостоятельной работы следует изучить представленный выше теоретический материал, разобрать предложенные решения типовых примеров и изучить рекомендуемую литературу.

Если студент испытывает затруднения в освоении теоретического или практического материала, то он может получить устную или письменную консультацию у ведущего преподавателя.

Задания выполнять в соответствии с предлагаемыми вариантами.

Номер варианта находится в таблице по первой букве фамилии студента.

Буква	А, О, Х	В, Ш, У	Д, Р, Щ	Е, П	Г, Ж, И	К, Ф, Э	Л, Ч, Ю	Б, М, Я	Н, Т	С, Ц, З
№ вар.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

Задача 1

Вариант 1. В группе 25 студентов, из которых 5 учатся отлично, 12 – хорошо, 6 – удовлетворительно и 2 – слабо. Найти вероятность того, что наугад выбранный студент отличник или хорошист.

Вариант 2. Студент выучил 20 вопросов из 25. Найти вероятность того, что ему достанется вопрос, который он не выучил.

Вариант 3. Бросаются две монеты. Найти вероятность того, что на одной выпадет герб, а на другой цифра.

Вариант 4. Куб, все грани которого окрашены, распилен на 27 кубиков одинакового размера, которые затем тщательно перемешаны. Найти вероятность того, что наудачу извлечённый кубик имеет: а) одну окрашенную грань, б) две окрашенные грани, в) три окрашенные грани.

Вариант 5. Монета брошена два раза. Какова вероятность того, что хотя бы один раз появится герб?

Вариант 6. Бросается игральная кость. Найти вероятность выпадения на верхней грани двух или шести очков.

Вариант 7. Бросаются две игральные кости. Найти вероятность того, что сумма выпавших на верхних гранях очков равна 5.

Вариант 8. Брошены две игральные кости. Найти вероятность того, что сумма выпавших на верхних гранях очков равна 5, а их разность равна 3.

Вариант 9. В урне 25 шаров: 5 белых, 15 красных, 5 синих. Вынимается 1 шар. Какова вероятность вынуть цветной (красный или синий) шар?

Вариант 10. В ящике имеется 50 одинаковых деталей, из них 5 окрашенных. Наудачу вынимают одну деталь. Найти вероятность того, что извлечённая деталь окажется неокрашенной.

Задача 2

Внутри прямоугольника $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ см^2 расположен круг радиуса 1,5 см. Какова вероятность того, что точка, случайным образом поставленная в прямоугольник, окажется внутри круга?

№ вар.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
a	1	2	3	1	2	2	1	2	1	3
b	5	8	6	7	6	7	8	5	10	5

Задача 3

Для пошива школьных форм было заказано 2200 пуговиц. При проверке партии из 500 пуговиц было обнаружено *M* бракованных. Какое наименьшее количество запасных пуговиц необходимо еще заказать, чтобы исключить брак? Округлите результат до наибольшего ближайшего целого числа. N – номер варианта.

Задача 4

В классе N учащихся, среди них два друга – Михаил и Андрей. Учащихся случайным образом разбивают на 3 равные группы.

Найдите вероятность того, что Михаил и Андрей окажутся в одной группе.

№ вар.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
N	9	10	13	11	21	23	18	26	19	20

Задача 5

В сборнике билетов по физике всего ***a*** билетов, в ***b*** из них встречается вопрос по теме «Радиоактивность».

Найдите вероятность того, что в случайно выбранном на экзамене билете школьнику достанется вопрос по теме «Радиоактивность». Результат округлите до сотых.

№ вар.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
a	10	20	36	19	29	27	31	28	41	33
b	5	8	6	7	6	7	8	5	10	5

Контрольные вопросы

1. Что характеризует вероятность события?
2. Сформулируйте классическое определение вероятности.
3. В каком случае применяется классическое определение вероятности?
4. В каком случае применяется статистическая вероятность?
5. Что такое относительная частота события A?
6. В каком случае применяется геометрическая вероятность?
7. Дайте определение геометрической вероятности.

Рекомендуемая литература

1. Боровков, А. А. Теория вероятностей : [учеб. пособие для вузов] / А. А. Боровков. – Москва : Наука, 1976. – 352 с.

2. Бочаров, П. П. Теория вероятностей. Математическая статистика : учеб. пособие / П. П. Бочаров, А. В. Печинкин. – Москва : Гардарики, 1998. – 326 с. – ISBN 5-7762-0035-0.
3. Коваленко, И. Н. Теория вероятностей : [учебник для университетов и втузов] / И. Н. Коваленко, Б. В. Гнеденко. – Киев : Выща школа, 1990. – 327, [1] с. – ISBN 5-11-001842-1.

Тема 1.3. Теоремы сложения и умножения вероятностей

Форма проведения: практическое занятие.

Вопросы для обсуждения

1. Теорема сложения вероятностей.
2. Теорема умножения вероятностей.

Методические указания по проведению занятия

Занятие проводится в виде практической работы, в процессе которой студентам необходимо уточнить базовые понятия и основные теоретические сведения по теме занятия, выполнить практическое задание по вариантам под руководством преподавателя, ответить на контрольные вопросы по теме.

Методические материалы к занятию

Теорема. Вероятность появления хотя бы одного из двух совместных событий равна сумме вероятностей этих событий без вероятности их совместного появления:

$$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB).$$

В частном случае для несовместных событий A и B (т. е. когда $A \cdot B = \varnothing$ и $P(A \cdot B) = P(\varnothing) = 0$) теорема сложения имеет вид:

$$P(A + B) = P(A) + P(B).$$

Пример 1.3.1

В группе СОЦб-1901 обучаются 10 человек, в СОЦб-1902 – 15 человек, в СОЦб-1903 – 20 и в СОЦб-1904 – 25 человек. Случайным образом выбрали одного студента. Найти вероятность того, что выбранный студент: ученик группы СОЦб-1901; ученик группы СОЦб-1902; ученик группы СОЦб-1901 или СОЦб-1902.

Решение.

$$P(\text{СОЦб-1901}) = \frac{10}{70} = \frac{1}{7};$$

$$P(\text{СОЦб-1902}) = \frac{15}{70};$$

$$P(\text{СОЦб-1901 или СОЦб-1902}) = \frac{10+15}{70} = \frac{25}{70}.$$

Теорема. Вероятность совместного появления двух событий равна произведению вероятности одного из них на вероятность другого, вычисленную в предположении, что первое событие уже наступило:

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B/A) = P(B) \cdot P(A/B).$$

В частности, для независимых событий

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B) = P(B) \cdot P(A),$$

т. е. вероятность совместного появления двух независимых событий равна произведению вероятностей этих событий.

Пример 1.3.2

Три выпускника школ независимо друг от друга поступают в один и тот же вуз. Вероятность поступления для первого абитуриента равна 0,75, для второго – 0,8, для третьего – 0,9. Определить вероятность того, что все три выпускника одновременно поступят в вуз.

Решение. Так как события независимы, то

$$P = 0{,}75 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}9 = 0{,}54.$$

Методические указания по выполнению самостоятельной работы студентов

Для выполнения предложенных заданий самостоятельной работы следует изучить представленный выше теоретический материал, разобрать предложенные решения типовых примеров и изучить рекомендуемую литературу.

Если студент испытывает затруднения в освоении теоретического или практического материала, то он может получить устную или письменную консультацию у ведущего преподавателя.

Задания выполнять в соответствии с предлагаемыми вариантами.

Номер варианта находится в таблице по первой букве имени студента.

Буква	А, О, Х	В, Ш, У	Д, Р, Щ	Е, П	Г, Ж, И	К, Ф, Э	Л, Ч, Ю	Б, М, Я	Н, Т	С, Ц, З
№ вар.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

Задача 1

В группе ***a*** студентов, из которых ***b*** учатся отлично, ***c*** – хорошо, ***d*** – удовлетворительно и ***e*** – слабо. Найти вероятность того, что наугад выбранный студент отличник или хорошист.

№ вар.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
a	25	20	36	19	29	27	31	28	26	30
b	55	8	6	6	7	4	7	13	9	10
c	12	3	10	3	11	6	13	5	4	7
d	6	4	13	6	7	12	5	3	7	6
e	2	5	7	4	4	5	6	7	6	7

Задача 2

Биатлонист 5 раз стреляет по мишеням. Вероятность попадания в мишень при одном выстреле равна ***a***. Найдите вероятность того, что биатлонист первые три раза попал в мишени, а последние два промахнулся. Результат округлите до сотых.

№ вар.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
a	0,8	0,6	0,35	0,9	0,7	0,4	0,5	0,3	0,1	0,2

Задача 3

В ящике имеется ***a*** одинаковых деталей, из них ***b*** окрашенные. Наудачу вынимают одну деталь. Найти вероятность того, что извлечённая деталь окажется неокрашенной.

№ вар.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
a	25	20	36	19	29	27	31	28	26	30
b	5	8	6	6	7	4	7	13	9	10

Контрольные вопросы

1. Сформулируйте теорему сложения вероятностей для совместных и несовместных событий.
2. Дайте определение зависимых событий, понятия условной вероятности.
3. Сформулируйте теорему умножения вероятностей для зависимых и независимых событий.

Рекомендуемая литература

1. Боровков, А. А. Теория вероятностей : [учеб. пособие для вузов] / А. А. Боровков. – Москва : Наука, 1976. – 352 с.
2. Бочаров, П. П. Теория вероятностей. Математическая статистика : учеб. пособие / П. П. Бочаров, А. В. Печинкин. – Москва : Гардарики, 1998. – 326 с. – ISBN 5-7762-0035-0.
3. Коваленко, И. Н. Теория вероятностей : [учебник для университетов и втузов] / И. Н. Коваленко, Б. В. Гнеденко. – Киев : Выща школа, 1990. – 327, [1] с. – ISBN 5-11-001842-1.

Тема 1.4. Условная вероятность. Формула полной вероятности. Формула Байеса

Форма проведения: практическое занятие.

Вопросы для обсуждения

1. Условная вероятность.
2. Формула полной вероятности.
3. Формула Байеса.

Методические указания по проведению занятия

Занятие проводится в виде практической работы, в процессе которой студентам необходимо уточнить базовые понятия и основные теоретические сведения по теме занятия, выполнить практическое задание по вариантам под руководством преподавателя, ответить на контрольные вопросы по теме.

Методические материалы к занятию

Определение. Вероятность события A, вычисленная при условии того, что имело место другое событие B, называется ***условной вероятностью*** события A и обозначается $P(A/B)$ или $P_B(A)$.

События A и B ***независимы***, если справедливо равенство

$$P(A/B) = P(A).$$

Теорема. Вероятность события A, которое может наступить лишь при проявлении одного из несовместных событий (гипотез) $B_1, B_2, \ldots, B_n$, образующих полную группу, равна сумме произведений вероятностей каждой из гипотез на соответствующую условную вероятность события A:

$$P(A) = P(B_1) \cdot P_{B_1}(A) + P(B_2) \cdot P_{B_2}(A) + \ldots + P(B_n) \cdot P_{B_n}(A),$$

где $P(B_1) + P(B_2) + \ldots + P(B_n) = 1$.

Пример 1.4.1

Два автомата производят одинаковые детали, которые поступают на общий конвейер. Производительность первого автомата вдвое больше производительности второго. Первый автомат производит в среднем 60 % деталей отличного качества, а второй – 84 %. Найти вероятность того, что наудачу взятая с конвейера деталь оказалась отличного качества.

Решение. Событие A – деталь отличного качества.

B_1 – деталь произведена первым автоматом, причем (поскольку первый автомат производит вдвое больше деталей, чем второй) $P(B_1) = 2/3$;

B_2 – деталь произведена вторым автоматом, причем $P(B_2) = 1/3$.

Условная вероятность того, что деталь будет отличного качества, если она произведена первым автоматом, $P_{B_1}(A) = 0{,}6$.

Условная вероятность того, что деталь будет отличного качества, если она произведена вторым автоматом, $P_{B_2}(A) = 0{,}84$.

Вероятность того, что наудачу взятая деталь окажется отличного качества, по формуле полной вероятности равна

$$P(A) = P(B_1) \cdot P_{B_1}(A) + P(B_2) \cdot P_{B_2}(A) =$$
$$= 2/3 \cdot 0{,}6 + 1/3 \cdot 0{,}84 = 0{,}68.$$

Теорема. Пусть событие A может наступить лишь при условии появления одного из несовместных событий (гипотез) B_1, B_2, ..., B_n, которые образуют полную группу событий. Если событие A уже произошло, то вероятности гипотез могут быть переоценены по формулам Бейеса

$$PA(B_i) = \frac{P(B_i) \cdot P_{B_I}(A)}{P(A)} (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Пример 1.4.2

Два автомата производят одинаковые детали, которые поступают на общий конвейер. Производительность первого автомата вдвое больше производительности второго. Первый автомат производит в среднем 60 % деталей отличного качества, а второй – 84 %. Наудачу взятая с конвейера деталь оказалась отличного качества. Найти вероятность того, что эта деталь произведена первым автоматом.

Решение. Вероятность того, что наудачу взятая деталь окажется отличного качества, по формуле полной вероятности равна

$$P(A) = P(B_1) \cdot P_{B_1}(A) + P(B_2) \cdot P_{B_2}(A) =$$
$$= 2/3 \cdot 0{,}6 + 1/3 \cdot 0{,}84 = 0{,}68.$$

Искомая вероятность того, что взятая отличная деталь произведена первым автоматом, по формуле Бейеса равна

$$P_A(B_1) = \frac{P(B_1) \cdot P_{B_1}(A)}{P(A)} = \frac{2/3 \cdot 0{,}6}{0{,}68} = \frac{10}{17}.$$

Методические указания по выполнению самостоятельной работы студентов

Для выполнения предложенных заданий самостоятельной работы следует изучить представленный выше теоретический материал, разобрать предложенные решения типовых примеров и изучить рекомендуемую литературу.

Если студент испытывает затруднения в освоении теоретического или практического материала, то он может получить устную или письменную консультацию у ведущего преподавателя.

Задания выполнять в соответствии с предлагаемыми вариантами.

Номер варианта находится в таблице по первой букве имени студента.

Буква	А, О, Х	В, Ш, У	Д, Р, Щ	Е, П	Г, Ж, И	К, Ф, Э	Л, Ч, Ю	Б, М, Я	Н, Т	С, Ц, З
№ вар.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

Задача

На предприятии изготавливаются изделия определенного вида на трех машинах. Первая машина изготавливает n %, вторая k %, третья z % всех изделий. В их продукции брак составляет соответственно M %, L %, R %. Какова вероятность того, что случайно выбранное изделие окажется бракованным?

Исходные данные к задаче

№	n	k	z	№	n	k	z	№	n	k	z	№	n	k	z	№	n	k	z
1	45	20	35	**3**	50	45	5	**5**	15	22	63	**7**	60	20	20	**9**	36	44	20
2	40	35	25	**4**	33	22	45	**6**	53	33	14	**8**	64	31	5	**10**	65	15	20

№	M	L	R	№	M	L	R	№	M	L	R	№	M	L	R	№	M	L	R
1	3	2	5	**3**	2	3	5	**5**	4	5	3	**7**	6	5	5	**9**	2	5	7
2	5	4	1	**4**	1	2	6	**6**	2	3	5	**8**	5	5	3	**10**	1	1	2

Контрольные вопросы

1. Что называется условной вероятностью?
2. Сформулируйте теорему о нахождении условной вероятности события.
3. Приведите пример гипотез при нахождении условной вероятности события.
4. Сформулируйте теорему об оценке вероятности гипотезы при свершившемся событии.
5. Запишите формулу полной вероятности.
6. Запишите формулу Байеса.

Рекомендуемая литература

1. Коваленко, И. Н. Теория вероятностей и математическая статистика : [учеб. пособие для втузов] / И. Н. Коваленко, А. А. Филиппова. – Москва : Высшая школа, 1973. – 368 с.

2. Кремер, Н. Ш. Теория вероятностей и математическая статистика : учебник / Н. Ш. Кремер. – 2-е изд., перераб. и доп. – Москва : ЮНИТИ-ДАНА, 2006. – 573 с. – ISBN 5-238-00573-3.
3. Соколов, Г. А. Теория вероятностей : учебник / Г. А. Соколов, Н. А. Чистякова. – Москва : Экзамен, 2005. – 414 с. – (Учебник для вузов). – ISBN 5-472-00848-4.

Тема 1.5. Формула Бернулли. Асимптотические формулы

Форма проведения: практическое занятие.

Вопросы для обсуждения

1. Формула Бернулли.
2. Формула Пуассона.
3. Схема Бернулли.
4. Асимптотические формулы.

Методические указания по проведению занятия

Занятие проводится в виде практической работы, в процессе которой студентам необходимо уточнить базовые понятия и основные теоретические сведения по теме занятия, выполнить практическое задание по вариантам под руководством преподавателя, ответить на контрольные вопросы по теме.

Методические материалы к занятию

Часто встречаются задачи, в которых один и тот же опыт повторяется неоднократно. В результате каждого опыта может появиться или не появиться некоторое событие A с вероятностью $P(A) = p$. Нас будет интересовать не результат отдельного опыта, а общее число наступлений события A в серии n опытов (испытаний).

Определение. Вероятность того, что событие А появится ровно m раз в n испытаниях, выражается формулой Бернулли:

$$P_n(m) = C_n^m p^m q^{n-m},$$

где $q = 1 - p$, $C_n^m = \dfrac{n!}{m!(n-m)!}$.

Пример 1.5.1

Что вероятнее выиграть у равносильного противника (ничейный исход партии исключен): три партии из четырех или пять из восьми?

Решение. Так как противники равносильные, то вероятности выигрыша и проигрыша каждой партии одинаковы и равны

$$p = q = 1/2.$$

$$P_4(3) = C_4^3 p^3 q^1 = C_4^1 \cdot \frac{1}{2^4} = \frac{1}{4}.$$

$$P_8(5) = C_8^5 p^5 q^3 = C_8^3 \cdot \frac{1}{2^8} = \frac{7}{32}.$$

Так как $\frac{1}{4} > \frac{7}{32}$, то вероятнее выиграть три партии из четырех.

В случае, когда n велико, а p мало (обычно $p < 0{,}1$; $npq \le 9$), вместо сложной формулы Бернулли применяют приближенную формулу Пуассона:

$$P_n(m) \approx \frac{\lambda^m e^{-\lambda}}{m!},\ \lambda = np.$$

Формула Пуассона используется в задачах, относящихся к редким событиям.

Пример 1.5.2

На факультете насчитывается 1000 студентов. Вероятность того, что 1 сентября является днем рождения любого студента, равна 0,004. Какова вероятность того, что 1 сентября является днем рождения одновременно пяти студентов факультета?

Решение. $n = 1000$, р = 0,004, $k = 5$. По формуле Пуассона имеем: $\lambda = np = 1000 \cdot 0{,}004 = 4 < 10$. По таблице функции Пуассона (см. прил. Е) при $k = 5$ получаем: $P_{1000}(5) \approx 0{,}1563$.

Теорема. Вероятность того, что в независимых испытаниях, в каждом из которых вероятность появления события равна $p(0 < p < 1)$, событие наступит ровно k раз (безразлично, в какой последовательности), приближенно равна (тем точнее, чем больше n)

$$P_n(m) \cong \frac{1}{\sqrt{npq}} \varphi(x),$$

где $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$; $x = \frac{m - np}{\sqrt{npq}}$.

Таблица функции Лапласа $\varphi(x)$ для положительных значений x приведена в прил. А; для отрицательных значений x пользуются этой же таблицей (функция $\varphi(x)$ четная, следовательно, $\varphi(-x) = \varphi(x)$).

Пример 1.5.3

Вероятность сдачи философии на отлично у юношей равна 0,51. Найти вероятность того, что среди 100 человек, сдавших философию на отлично, окажется 50 юношей.

Решение. Имеем схему Бернулли с параметрами $n = 100$ (количество новорожденных), $p = 0{,}51$ (вероятность рождения мальчика), $q = 1 - p = 0{,}49$, $k = 50$. Так как $n = 100$ достаточно велико, используем локальную теорему Лапласа (см. прил. А):

$$P_{100}(50) = \frac{1}{\sqrt{100 \cdot 0{,}51 \cdot 0{,}49}} \varphi\left(\frac{50 - 100 \cdot 0{,}51}{\sqrt{100 \cdot 0{,}51 \cdot 0{,}49}}\right) = 0{,}0782 .$$

Теорема. Вероятность того, что в n независимых испытаниях, в каждом из которых вероятность появления события равна p $(0 \le p \le 1)$, событие наступит не менее m_1 раз и не более m_2 раз, приблизительно равна

$$P_n(m_1 \le m \le m_2) \cong \Phi(x'') - \Phi(x'),$$

где $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-t^2/2} dt$ — функция Лапласа; $x' = \frac{m_1 - np}{\sqrt{npq}}$; $x'' = \frac{m_2 - np}{\sqrt{npq}}$.

Для функции Лапласа имеются таблицы (прил. Б). Для отрицательных значений x используют эту же таблицу, учитывая, что функция Лапласа нечетная: $\Phi(-x) = -\Phi(x)$. (см прил. Б).

Пример 1.5.4

Для преподавателя вероятность найти все ошибки в работе студента равна 0,75. За неделю он проверил 400 работ. Найти вероятность того, что в 280 работах выявлены все ошибки.

Решение. По условию $n = 400$, $p = 0{,}75$, $q = 0{,}25$, $k = 280$. $t = \frac{280 - 300}{\sqrt{75}} = -2{,}31$. По таблицам функции Лапласа (см. прил. А) найдем $\varphi(-2{,}31) = \varphi(2{,}31) = 0{,}0277$. Искомая вероятность равна

$$P_{400}(280) = \frac{0{,}0277}{\sqrt{75}} = 0{,}0032 .$$

Методические указания по выполнению самостоятельной работы студентов

Для выполнения предложенных заданий самостоятельной работы следует изучить представленный выше теоретический материал, разобрать предложенные решения типовых примеров и изучить рекомендуемую литературу.

Если студент испытывает затруднения в освоении теоретического или практического материала, то он может получить устную или письменную консультацию у ведущего преподавателя.

Задания выполнять в соответствии с предлагаемыми вариантами.

Номер варианта находится в таблице по первой букве имени студента.

Буква	А, О, Х	В, Ш, У	Д, Р, Щ	Е, П	Г, Ж, И	К, Ф, Э	Л, Ч, Ю	Б, М, Я	Н, Т	С, Ц, З
№ вар.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

Задача 1

В семье n детей. Найти вероятность того, что среди этих детей: а) два мальчика; б) не более двух мальчиков; вероятность рождения мальчика равна k.

Исходные данные:

№	n	k	№	n	k	№	n	k	№	n	k	№	n	k
1	4	0,51	3	5	0,5	5	4	0,52	7	6	0,4	9	6	0,54
2	5	0,53	4	3	0,48	6	5	0,55	8	3	0,49	10	5	0,45

Задача 2

Станок штампует детали. Вероятность того, что изготовленная деталь бракованная, равна n. Какова вероятность того, что среди k деталей окажется 5 бракованных?

Исходные данные:

№	n	k	№	n	k	№	n	k	№	n	k	№	n	k
1	0,02	200	**3**	0,09	250	**5**	0,06	300	**7**	0,04	230	**9**	0,03	170
2	0,01	150	**4**	0,07	210	**6**	0,08	400	**8**	0,05	330	**10**	0,07	350

Задача 3

Найти вероятность того, что событие А наступит ровно *n* раз в *k* испытаниях, если вероятность появления этого события в каждом испытании равна 0,25.

Исходные данные:

№	*n*	*k*	№	*n*	*k*	№	*n*	*k*	№	*n*	*k*	№	*n*	*k*
1	70	243	**3**	55	253	**5**	60	310	**7**	13	322	**9**	68	487
2	50	155	**4**	60	271	**6**	48	362	**8**	15	258	**10**	25	512

Задача 4

Вероятность появления события в каждом из 100 независимых испытаний постоянна и равна *p*. Найти вероятность того, что событие появится не менее *n* раз и не более *k* раз.

Исходные данные:

№	p	*n*	*k*	№	p	*n*	*k*	№	p	*n*	*k*	№	p	*n*	*k*	№	p	*n*	*k*
1	0,8	70	92	**3**	0,7	85	90	**5**	0,6	50	80	**7**	0,8	45	55	**9**	0,6	70	80
2	0,7	72	88	**4**	0,6	90	95	**6**	0,7	90	99	**8**	0,7	67	87	**10**	0,9	80	95

Контрольные вопросы

1. Запишите формулу Бернулли.
2. При каких условиях следует использовать формулу Бернулли?
3. Запишите формулу Пуассона.
4. При каких условиях следует использовать формулу Пуассона?
5. Сформулируйте теорему о нахождении вероятности наступления события ровно *k* раз в *n* испытаниях, если вероятность появления события равна $p(0 < p < 1)$.
6. В каких случаях используют при нахождении вероятности событий функцию Лапласа?
7. Запишите функцию Лапласа. Она является четной или нечетной?

Рекомендуемая литература

1. Солодовников, А. С. Теория вероятностей : учеб. пособие / А. С. Солодовников. – Москва : Просвещение, 1978. – 192 с.
2. Теория вероятностей : учебник для студентов втузов / В. А. Печинкин, О. И. Тескин, Г. М. Цветкова [и др.] ; под ред. В. С. Зарубина и А. П. Крищенко. – Москва : Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 1999. – 455 с. – (Математика в техническом университете ; вып. 16). – ISBN 5-7038-1307-7.
3. Тутубалин, В. Н. Теория вероятностей и случайных процессов. Основы математического аппарата и прикладные аспекты : [учеб. пособие] / В. Н. Тутубалин. – Москва : Изд-во МГУ, 1992. – 394, [1] с. – ISBN 5-211-02264-5.

Модуль 2. ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

Тема 2.1. Дискретные случайные величины. Ряд распределения. Характеристики дискретной случайной величины

Форма проведения: практическое занятие.

Вопросы для обсуждения

1. Понятие случайной величины.
2. Дискретная случайная величина.
3. Числовые характеристики дискретной случайной величины.

Методические указания по проведению занятия

Занятие проводится в виде практической работы, в процессе которой студентам необходимо уточнить базовые понятия и основные теоретические сведения по теме занятия, выполнить практическое задание по вариантам под руководством преподавателя, ответить на контрольные вопросы по теме.

Методические материалы к занятию

1. Понятие случайной величины

Одним из основных понятий теории вероятностей (наряду со случайным событием и вероятностью) является понятие случайной величины.

Под **случайной величиной** понимают величину, которая в результате опыта принимает какое-либо значение, заранее не известное.

Случайные величины будем обозначать прописными латинскими буквами X, Y, Z, ..., а принимаемые ими значения соответствующими малыми буквами x_1, x_2, ..., y_1, y_2, ...

Случайные величины делятся на два вида: дискретные и непрерывные. Рассмотрим сначала дискретную случайную величину.

2. Дискретная случайная величина

Случайная величина, принимающая конечное или счётное множество значений, называется ***дискретной***.

Дискретную случайную величину X можно задать ***рядом распределения*** в виде таблицы, где первая строка содержит все возможные значения случайной величины, а вторая – их вероятности, причём $\Sigma_i p_i = 1$.

X	x_1	x_2	…	x_n	…
P	p_1	p_2	…	p_n	…

Случайную величину X также можно задать графически в виде ломаной, соединяющей последовательно точки (x_1, p_1), (x_2, p_2), ..., которую называют ***многоугольником*** (или ***полигоном***) ***распределения***.

На основе ряда распределения можно получить ***функцию распределения*** дискретной случайной величины X, которая выражается формулой $F(x) = \sum\limits_{x_i<x} p_i$. Эту формулу можно записать в виде:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le x_1 \\ p_1, & x_1 \le x_2 \\ p_1 + p_2, & x_2 \le x_3 \\ p_1 + p_2 + p_3, & x_3 \le x_4 \\ \quad\quad\quad\quad \dots & \\ 1, & x > x_n \end{cases}$$

Как видим, функция распределения дискретной случайной величины разрывная, со скачками p_i в точках x_i, непрерывная слева (то есть при подходе к точкам разрыва слева функция $F(x)$ сохраняет значение), ее график имеет ступенчатый вид.

Свойства функции распределения

1. $F(x)$ ограничена, то есть $0 \le F(x) \le 1$.
2. $F(x)$ неубывающая функция на R, то есть если $x_2 > x_1$, то $F(x_2) \ge F(x_1)$.
3. $F(-\infty) = 0$, $F(+\infty) = 1$.
4. Вероятность попадания случайной величины X в промежуток $[a, b)$ равна приращению ее функции распределения на этом промежутке, то есть $P\{a \le X < b\} = F(b) - F(a)$.
5. $F(x)$ непрерывна слева, то есть $\lim\limits_{x \to x_0} F(x) = F(x_0)$.

3. Числовые характеристики дискретной случайной величины

Математическим ожиданием дискретной случайной величины X называется сумма произведений всех ее возможных значений на их вероятности, то есть

$$M(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot p_i = x_1p_1 + x_2p_2 + \cdots + x_np_n.$$

Математическое ожидание является аналогом понятия центра масс в механике. Таким образом, с физической точки зрения математическое ожидание – это центр масс системы точек $x_1, ..., x_n$, массы которых совпадают с вероятностями $p_1, ..., p_n$.

Свойства математического ожидания

1. $M(C) = C$, где $C = \text{const}$.
2. $M(CX) = C \cdot M(X)$, где $C = \text{const}$.
3. $M(X \pm Y) = M(X) \pm M(Y)$.
4. $M(X_1 \cdot X_2 \cdot ... \cdot X_n) = M(X_1) \cdot M(X_2) \cdot ... \cdot M(X_n)$.

Во многих случаях важно знать не только математическое ожидание, но и необходимо иметь еще количественную характеристику разброса возможных значений величины относительно математического ожидания. Например, в артиллерии важно знать, насколько кучно лягут снаряды вблизи цели, которая должна быть поражена.

Пусть X – случайная величина и $M(X)$ – ее математическое ожидание.

Отклонением называют разность между случайной величиной и её математическим ожиданием, то есть $X - M(X)$. Математическое ожидание отклонения равно нулю, то есть $M(X - M(X)) = 0$.

Дисперсией (рассеянием) случайной величины называют математическое ожидание квадрата отклонения случайной величины от ее математического ожидания: $D(X) = M(X - M(X))^2$.

Для вычисления дисперсии часто бывает полезна формула

$$D(X) = M(X)^2 - (M(X))^2.$$

Свойства дисперсии

1. $D(C) = 0$, где $C = \text{const}$.
2. $D(CX) = C^2 \cdot D(X)$, где $C = \text{const}$.
3. $D(X_1 \pm X_2 \pm ... \pm X_n) = D(X_1) + D(X_2) + ... + D(X_n)$.
4. $D(X) = M(X)^2 - (M(X))^2$

Средним квадратическим отклонением случайной величины X называют величину $\sigma(X) = \sqrt{D(X)}$.

Эта оценка рассеяния нужна тогда, когда желательно, чтобы оценка рассеяния имела ту же размерность, что и случайная величина.

Свойства среднеквадратического отклонения

1. $\sigma(C) = 0$, где $C = \text{const}$.
2. $\sigma(CX) = |C| \cdot \sigma(X)$, где $C = \text{const}$.
3. $\sigma(X_1 + X_2 + \cdots + X_n) = \sqrt{\sigma^2(X_1) + \sigma^2(X_2) + \cdots + \sigma^2(X_n)}$.

Математическое ожидание и дисперсия являются частными случаями более общих понятий – моментов случайной величины.

Мода $M_0(X)$ дискретной случайной величины – это значение случайной величины X, которое имеет наибольшую вероятность.

Начальным моментом порядка k случайной величины X называют математическое ожидание величины X^k и обозначают $v_k = M(X^k)$, в частности, $v_1 = M(X), v_2 = M(X^2)$.

Центральным моментом порядка k случайной величины X называют математическое ожидание величины $(x - M(X))^k$ и обозначают

$$\mu_k = M\left(\left(x - M(X)\right)^k\right) = \sum_i \left(x_i - M(X)\right)^k \cdot p_i.$$

В частности, $\mu_1 = M\left(x - M(X)\right) = 0, \mu_2 = M\left(\left(x - M(X)\right)^2\right) = D(X)$.

Пример 2.1.1

Некто носит на связке пять ключей. При отмыкании замка он последовательно испытывает ключи, пока не подберет нужный. Полагая выбор ключей бесповторным, написать закон распределения числа испытанных ключей. Вычислите математическое ожидание этой случайной величины.

Решение. Обозначим через X число испытанных ключей. Так как выбор ключей бесповторный, то X может принимать значения 1, 2, 3, 4, 5. Случайная величина X примет значение $x_1 = 1$, если с первой попытки будет выбран нужный ключ, вероятность чего равна 1/5 в силу равновозможности выбора любого из ключей. Значение $x_2 = 2$ случайная величина примет, если при первой попытке ключ будет выбран ошибочно, вероятность чего равна 4/5, и при второй попытке будет выбран нужный ключ из оставшихся четырех (вероятность этого равна 1/4). Поэтому:

$$P(X=2)=\frac{4}{5}\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{5};$$

$$P(X=3)=\frac{4}{5}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{5};$$

$$P(X=4)=\frac{4}{5}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{5};$$

$$P(X=5)=\frac{4}{5}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot 1=\frac{1}{5}.$$

Случайная величина *X* имеет закон распределения

/5 /5 /5 /5 /5

Среднее число попыток равно

$$M(X)=1\cdot\frac{1}{5}+2\cdot\frac{1}{5}+3\cdot\frac{1}{5}+4\cdot\frac{1}{5}+5\cdot\frac{1}{5}=3.$$

Пример 2.1.2

В ящике в полном беспорядке лежат пять пар туфель. Туфли по одной (без возвращения) вынимают из ящика, пока среди выбранных не образуется какая-либо пара. Сколько в среднем туфель придётся извлечь из ящика?

Решение. Обозначим через *X* число извлеченных туфель. Случайная величина *X* принимает только значения 2, 3, 4, 5, 6. (Чтобы сформировать пару, нужно извлечь минимум две туфли, а среди шести туфель найдется хотя бы одна пара.) Найдем вероятности этих значений.

$P(X=2)=\frac{1}{9}$, так как после выбора первой туфли в пару к ней годится только одна из девяти оставшихся;

$P(X=3)=\frac{8}{9}\cdot\frac{2}{8}=\frac{2}{9}$, так как вторая должна быть не парной к первой, вероятность чего равна 8/9, а третья должна быть парной либо к первой, либо ко второй, вероятность чего равна 2/8;

$P(X=4)=\frac{8}{9}\cdot\frac{6}{8}\cdot\frac{3}{7}=\frac{18}{63}$, так как вторая должна быть не парной к первой, вероятность чего 8/9, третья – не парной к первым двум, вероятность чего 6/8, а четвертая должна быть парной к одной из трех извлеченных, вероятность чего 3/7;

$P(X=5)=\frac{8}{9}\cdot\frac{6}{8}\cdot\frac{4}{7}\cdot\frac{4}{6}=\frac{16}{63}$, так как вторая должна быть не парной к первой, вероятность чего 8/9, третья – не парной к первым двум, вероятность чего 6/8, четвертая – не парной к первым трем, вероятность чего 4/7, а пятая должна быть парной одной из четырех извлеченных, вероятность чего 4/6;

$P(X=6)=\frac{8}{9}\cdot\frac{6}{8}\cdot\frac{4}{7}\cdot\frac{2}{6}\cdot 1=\frac{8}{63}$, так как все первые пять извлеченных туфель должны быть не парные, а шестая извлеченная обязательно окажется парной.

Таким образом, случайная величина имеет закон распределения:

X	2	3	4	5	6
P	7/63	14/63	18/63	16/63	8/63

и в среднем из ящика придется извлечь:

$$M(X)=2\cdot\frac{7}{63}+3\cdot\frac{14}{63}+4\cdot\frac{18}{63}+5\cdot\frac{16}{63}+6\cdot\frac{8}{63}=\frac{256}{63}\approx 4.$$

Пример 2.1.3

Цена лотерейного билета равна 50 рублей. В данной лотерее каждый пятый билет выигрывает. Величина выигрыша X на один билет имеет распределение:

X	без выигрыша	100 руб.	500 руб.	1000 руб.
P	0,8	0,12	0,07	0,01

Некто приобрел пять билетов. Необходимо вычислить его средний выигрыш от участия в этом тираже лотереи.

Решение. Обозначим через X_i выигрыш, приходящийся на i-й билет. Тогда общий выигрыш $Y=X_1+X_2+X_3+X_4+X_5$. По свойствам математического ожидания

$$M(Y)=M(X_1)+M(X_2)+M(X_3)+M(X_4)+M(X_5),$$

где $M(X_i)=0\cdot 0{,}8+100\cdot 0{,}12+200\cdot 0{,}07+1000\cdot 0{,}01=36.$

Поэтому средний выигрыш на пять билетов составит $5\cdot 36=180$ рублей, но за билеты заплатили 250 рублей. Следовательно, средний «выигрыш» равен $180-250=-70$ рублей.

Пример 2.1.4

Монету подбрасывают до тех пор, пока не выпадет герб или пока пять раз подряд не выпадет решка. Пусть X – число бросков монеты. Напишите закон распределения случайной величины X и найдите ее математическое ожидание.

Решение. Если при первом же броске выпадет герб, то $X = 1$, вероятность чего равна 1/2.

Если при первом броске выпадет решка, а герб выпадет при втором броске, то $X = 2$, и вероятность такого исхода

$$P(X = 2) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}.$$

Если первые два раза выпадут решки и при третьем броске монеты герб, то $X = 3$, а вероятность

$$P(X = 3) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}.$$

Аналогично

$$P(X = 4) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{16}.$$

Если же при первых четырех бросках монеты выпадут решки, то результат пятого броска уже не важен, так как пятый бросок в любом случае будет последним, поэтому

$$P(X = 5) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{16}.$$

Закон распределения числа бросков имеет вид:

X	1	2	3	4	5
P	1/2	1/4	1/8	1/16	1/16

Среднее число бросков равно

$$M(X) = 1 \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1}{4} + 3 \cdot \frac{1}{8} + 4 \cdot \frac{1}{16} + 5 \cdot \frac{1}{16} = \frac{31}{16} \approx 2.$$

Пример 2.1.5

Вероятность попадания в цель при каждом выстреле равна 1/3. Имеется семь патронов. Стрельба производится до тех пор, пока не будет трех попаданий или пока не закончатся патроны. Пусть X – число выстрелов. Найти математическое ожидание случайной величины X.

Решение. Найдем закон распределения случайной величины X. Так как стрельба производится до трех попаданий в цель либо пока не закончатся семь патронов, то случайная величина X может принимать значения 3, 4, 5, 6, 7.

Вероятность поражения цели равна 1/3, значит, вероятность промаха равна 2/3.

Если произведено три выстрела и три попадания, то $X = 3$ и вероятность $P(X = 3) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{27}$.

Если три раза цель поражена при четырех выстрелах, то $X = 4$ и вероятность этого равна $P(X = 4) = C_3^2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^1 \cdot \frac{1}{3} =$ $= \frac{3!}{2! \cdot (3-2)!} \cdot \frac{1}{9} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{27}$ (т. е. произвели три выстрела, было два попадания в цель и один промах, понадобился четвертый выстрел, который поразил цель).

Если произвели четыре выстрела и цель поразили два раза (вероятность этого $C_4^2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4!}{2! \cdot (4-2)!} \cdot \frac{1}{9} \cdot \frac{4}{9} = \frac{3 \cdot 4}{1 \cdot 2} \cdot \frac{4}{81} = \frac{8}{27}$), после произвели пятый выстрел и цель поразили (вероятность этого 1/3), то $X = 5$ и вероятность этого равна $P(X = 5) = \frac{8}{27} \cdot \frac{1}{3} = \frac{8}{81}$.

Если произвели пять выстрелов и цель поразили два раза (вероятность этого $C_5^2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{5!}{2! \cdot (5-2)!} \cdot \frac{1}{9} \cdot \frac{8}{27} = \frac{4 \cdot 5}{1 \cdot 2} \cdot \frac{8}{243} = \frac{80}{243}$), после произвели шестой выстрел и цель поразили (вероятность этого 1/3), то $X = 6$ и вероятность этого равна $P(X = 6) = \frac{80}{243} \cdot \frac{1}{3} = \frac{80}{729}$.

Выстрелов будет семь, если к моменту седьмого выстрела попаданий будет два или меньше, поэтому

$$P(X = 7) = C_6^0 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^0 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^6 + C_6^1 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^1 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^5 + C_6^2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^4 =$$

$$= \frac{6!}{0! \cdot (6-0)!} \cdot 1 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^6 + \frac{6!}{1! \cdot (6-1)!} \cdot \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^5 + \frac{6!}{2! \cdot (6-2)!} \cdot \frac{1}{9} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^4 =$$

$$= [0! = 1] = \frac{64}{729} + 6 \cdot \frac{32}{729} + 15 \cdot \frac{16}{729} = \frac{496}{729}.$$

Итак, случайная величина X имеет закон распределения:

X	3	4	5	6	7
P	1/27	2/27	8/81	80/729	496/729

Математическое ожидание случайной величины X равно

$$M(X) = 3 \cdot \frac{1}{27} + 4 \cdot \frac{2}{27} + 5 \cdot \frac{8}{81} + 6 \cdot \frac{80}{729} + 7 \cdot \frac{496}{729} = \frac{4609}{729} \approx 6{,}3.$$

Пример 2.1.6

Из 12 изделий три имеют скрытые дефекты. Наугад выбраны четыре изделия. Напишите закон распределения числа изделий со скрытыми дефектами среди выбранных.

Решение. Пусть X – число деталей со скрытыми дефектами среди выбранных четырех. Это дискретная случайная величина с возможными значениями 0, 1, 2, 3. Четыре детали из 12 можно выбрать $n = C_{12}^4 = \frac{12!}{4!(12-4)!} = \frac{9\cdot10\cdot11\cdot12}{1\cdot2\cdot3\cdot4} = 495$ способами.

Значению $X = 0$ благоприятствуют $m_0 = C_9^4 = \frac{9!}{4!(9-4)!} = \frac{6\cdot7\cdot8\cdot9}{1\cdot2\cdot3\cdot4} = 126$ способов (так как мы выбрали любые четыре детали из девяти качественных). Поэтому вероятность того, что случайная величина X примет значение 0, равна $P(X = 0) = \frac{m_0}{n} = \frac{126}{495} = \frac{14}{55}$.

Значению $X = 1$ благоприятствуют $m_1 = C_3^1 \cdot C_9^3 = \frac{3!}{1!(3-1)!} \cdot \frac{9!}{3!(9-3)!} = \frac{3}{1} \cdot \frac{7\cdot8\cdot9}{1\cdot2\cdot3} = 252$ способа (так как мы выбрали любую одну деталь из трех дефектных и любые три из девяти качественных). Поэтому вероятность того, что случайная величина X примет значение 1, равна $P(X = 1) = \frac{m_1}{n} = \frac{252}{495} = \frac{28}{55}$.

Значению $X = 2$ благоприятствуют $m_2 = C_3^2 \cdot C_9^2 = \frac{3!}{2!(3-2)!} \cdot \frac{9!}{2!(9-2)!} = \frac{3}{1} \cdot \frac{8\cdot9}{1\cdot2} = 108$ способов (так как мы выбрали две любые детали из трех дефектных и любые две из девяти качественных). Поэтому вероятность того, что случайная величина X примет значение 2, равна $P(X = 2) = \frac{m_2}{n} = \frac{108}{495} = \frac{12}{55}$.

Значению $X = 3$ благоприятствуют $m_3 = C_3^3 \cdot C_9^1 = \frac{3!}{3!(3-3)!} \cdot \frac{9!}{1!(9-1)!} = [0! = 1] = \frac{1}{1} \cdot \frac{9}{1} = 9$ способов (так как мы случайным образом выбрали все три дефектные детали из имеющихся и любую одну деталь из девяти качественных). Поэтому вероятность того, что случайная величина X примет значение 3, равна $P(X = 3) = \frac{m_3}{n} = \frac{9}{495} = \frac{1}{55}$.

Таким образом, случайная величина имеет закон распределения:

X	0	1	2	3
P	14/55	28/55	12/55	1/55

Среднее число деталей со скрытыми дефектами в выборе равно

$$M(X) = 0 \cdot \frac{14}{55} + 1 \cdot \frac{28}{55} + 2 \cdot \frac{12}{55} + 3 \cdot \frac{1}{55} = \frac{28 + 24 + 3}{55} = 1.$$

Методические указания по выполнению самостоятельной работы студентов

Для выполнения предложенных заданий самостоятельной работы следует изучить представленный выше теоретический материал, разобрать предложенные решения типовых примеров и изучить рекомендуемую литературу по источникам.

Если студент испытывает затруднения в освоении теоретического или практического материала, то он может получить устную или письменную консультацию у ведущего преподавателя.

Задания выполнять в соответствии с предлагаемыми вариантами.

Номер варианта находится в таблице по первой букве фамилии студента.

Буква	А, О, Х	В, Ш, У	Д, Р, Щ	Е, П	Г, Ж, И	К, Ф, Э	Л, Ч, Ю	Б, М, Я	Н, Т	С, Ц, З
№ вар.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

Задача 1 (см. пример 2.1.1 и исходные данные к задаче 1)

В урне n белых и k черных шаров. Шары вынимают из урны по одному без возвращения, пока не выберут черный шар. Пусть X – число вынутых шаров. Напишите закон распределения для случайной величины X и найдите ее математическое ожидание.

Исходные данные

№	n	k	№	n	k	№	n	k	№	n	k	№	n	k
1	4	2	**3**	5	4	**5**	5	2	**7**	6	2	**9**	6	4
2	4	3	**4**	3	2	**6**	5	3	**8**	6	3	**10**	6	5

Задача 2 (см. пример 2.1.2 и исходные данные к задаче 2)

В урне содержатся шары n различных цветов, причем шаров каждого цвета содержится k штук. Шары выбирают из урны по одному, пока среди выбранных не окажется двух шаров одного цвета. Пусть X – число извлеченных при этом шаров. Найдите закон распределения X и $M(X)$.

Исходные данные

№	n	k	№	n	k	№	n	k	№	n	k	№	n	k
1	4	2	**3**	3	5	**5**	4	5	**7**	5	3	**9**	3	3
2	4	3	**4**	3	6	**6**	3	4	**8**	6	3	**10**	4	2

Задача 3 (см. пример 2.1.3 и исходные данные к задаче 3)

Цена лотерейного билета равна 50 руб. Величина выигрыша на один билет X имеет распределение

X	Без выигрыша	100 руб.	500 руб.	1000 руб.
P	$1-p_1-p_2-p_3$	p_1	p_2	p_3

Вы приобрели n билетов. Вычислите ваш средний выигрыш от участия в этом тираже лотереи.

Исходные данные

№	n	p_1	p_2	p_3	№	n	p_1	p_2	p_3
1	3	0,1	0,05	0,01	**6**	8	0,1	0,05	0,01
2	4	0,12	0,04	0,01	**7**	3	0,12	0,04	0,01
3	5	0,12	0,04	0,01	**8**	5	0,1	0,05	0,01
4	8	0,1	0,04	0,01	**9**	6	0,12	0,04	0,01
5	4	0,1	0,04	0,01	**10**	6	0,1	0,05	0,01

Задача 4 (см. пример 2.1.4 и исходные данные к задаче 4)

Стрелок стреляет в цель, пока не попадет либо пока не сделает m промахов. Вероятность попасть в цель при одном выстреле равна p. Пусть X – число произведенных выстрелов. Напишите закон распределения для случайной величины X и найдите ее математическое ожидание $M(X)$.

Исходные данные

№	*p*	*m*	№	*p*	*m*	№	*p*	*m*	№	*p*	*m*	№	*p*	*m*
1	0,6	5	**3**	0,4	6	**5**	0,3	4	**7**	0,5	4	**9**	0,7	6
2	0,6	4	**4**	0,7	4	**6**	0,3	6	**8**	0,6	6	**10**	0,3	5

Задача 5 (см. пример 2.1.5 и исходные данные к задаче 5)

Вероятность того, что каждая из имеющихся в наличии n лампочек исправна, равна p. Лампочки проверяют по одной, пока не будет отобрано k годных или не будут проверены все лампочки. Пусть X – число проверенных лампочек. Найдите закон распределения случайной величины X и ее математическое ожидание.

Исходные данные

№	*p*	*k*	*n*	№	*p*	*k*	*n*
1	0,2	2	5	**6**	0,2	2	6
2	0,3	3	6	**7**	0,4	2	5
3	0,4	3	7	**8**	0,3	3	7
4	0,5	2	6	**9**	0,5	3	6
5	0,2	3	7	**10**	0,4	4	7

Задача 6 (см. пример 2.1.6 и исходные данные к задаче 6)

В партии из n изделий m имеют скрытые дефекты. Наугад выбрали r изделий. Пусть X – число бракованных изделий среди выбранных. Напишите закон распределения для случайной величины X и вычислите ее математическое ожидание.

Исходные данные

№	*n*	*m*	*r*	№	*n*	*m*	*r*
1	10	4	3	**6**	8	2	3
2	10	5	3	**7**	12	5	3
3	9	3	3	**8**	12	4	3
4	9	4	4	**9**	11	4	4
5	8	4	3	**10**	11	3	4

Контрольные вопросы

1. Что называется случайной величиной, дискретной случайной величиной?
2. Какие числовые характеристики имеет дискретная случайная величина?
3. Математическое ожидание и его свойства.
4. Дисперсия и его свойства.
5. Среднее квадратическое отклонение и его свойства.
6. Что называют модой, начальным и центральным моментами?

Рекомендуемая литература

1. Гмурман, В. Е. Теория вероятностей и математическая статистика : учеб. пособие для вузов / В. Е. Гмурман. – 7-е изд., стер. – Москва : Высшая школа, 2001. – 479 с.
2. Гусак, А. А. Теория вероятностей : справочное пособие к решению задач / А. А. Гусак, Е. А. Бричикова. – 2-е изд., стер. – Минск : ТетраСистемс, 2000. – 286 с. – ISBN 985-6577-24-1.
3. Коваленко, И. Н. Теория вероятностей и математическая статистика : [учеб. пособие для втузов] / И. Н. Коваленко, А. А. Филиппова. – Москва : Высшая школа, 1973. – 368 с.

Тема 2.2. Непрерывные случайные величины. Ряд распределения. Характеристики непрерывной случайной величины

Форма проведения: практическое занятие.

Вопросы для обсуждения

1. Непрерывная случайная величина.
2. Числовые характеристики непрерывной случайной величины.

Методические указания по проведению занятия

Занятие проводится в виде практической работы, в процессе которой студентам необходимо уточнить базовые понятия и основные теоретические сведения по теме занятия, выполнить практическое задание по вариантам под руководством преподавателя, ответить на контрольные вопросы по теме.

Методические материалы к занятию

1. Непрерывная случайная величина

Случайная величина X называется ***непрерывной***, если ее возможные значения образуют конечный или бесконечный интервал.

Функцией распределения непрерывной случайной величины X называется функция $F(x)$, которая для любого числа $x \in R$ равна вероятности события $\{X < x\}$. Таким образом, $F(x) = P\{X < x\}$.

Функцию $F(x)$ называют также ***интегральной функцией распределения***.

Свойства функции распределения

1. $F(x)$ ограничена, то есть $0 \leq F(x) \leq 1$.
2. $F(x)$ неубывающая функция на R, то есть если $x_2 < x_1$, то $F(x_2) \geq F(x_1)$.
3. Вероятность попадания случайной величины X в промежуток $[a, b]$ равна приращению ее функции распределения на этом промежутке, то есть $P\{a \leq X < b\} = F(b) - F(a)$. Причем если a и b точки непрерывности функции $F(x)$, то

$$P(a < X < b) = P(a \leq X < b) = P(a < X \leq b) =$$
$$= P(a \leq X \leq b) = F(b) - F(a).$$

4. $F(-\infty) = 0, F(+\infty) = 1, \lim\limits_{x \to x_0} F(x) = F(x_0).$

Плотностью распределения вероятностей (плотностью распределения, плотностью вероятностей или просто ***плотностью***) непрерывной случайной величины X называется производная ее функции распределения $f(x) = F'(x)$. Функцию $f(x)$ называют также дифференциальной функцией распределения.

В точках, где производная не определена, считают, что $f(x) = 0$. В силу монотонности функции $F(x)$ плотность $f(x) \geq 0$ всюду.

Таким образом, зная функцию распределения $F(x)$, можно найти плотность вероятности по формуле $f(x) = F'(x)$, а зная плотность вероятности $f(x)$ непрерывной случайной величины X, можно задать функцию распределения как $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$.

Свойства плотности распределения

1. $f(x) \geq 0$.
2. Вероятность попадания непрерывной случайной величины в промежуток $[a, b]$ равна определенному интегралу от ее плотности в пределах от a до b, то есть $P\{a \leq X \leq b\} = \int_a^b f(x)dx$.
3. Функция распределения непрерывной случайной величины может быть выражена через ее плотность вероятности по формуле как $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$.
4. Условие нормировки: несобственный интеграл от плотности вероятности непрерывной случайной величины в бесконечных пределах равен единице, то есть $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$.

Геометрически свойство 2 означает, что вероятность попадания непрерывной случайной величины в промежуток $[a, b]$ равна площади фигуры, ограниченной сверху кривой распределения $f(x)$ и опирающейся на отрезок $[a, b]$ оси абсцисс, а условие нормировки означает, что площадь фигуры, ограниченной кривой распределения $f(x)$ и осью абсцисс, равна единице.

2. Числовые характеристики непрерывной случайной величины

Математическим ожиданием непрерывной случайной величины X, возможные значения которой принадлежат отрезку $[a, b]$, называют определенный интеграл $M(X) = \int_a^b xf(x)dx$, где $f(x)$ – плотность распределения вероятности. Если возможные значения принадлежат всей числовой оси, то $M(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx$.

Дисперсией непрерывной случайной величины X называют математическое ожидание квадрата ее отклонения. Если возможные значения непрерывной случайной величины принадлежат отрезку $[a, b]$, то $D(X) = \int_a^b \big(x - M(X)\big)^2 f(x)dx$, а если всей числовой оси, то

$$D(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} \big(x - M(X)\big)^2 f(x)dx.$$

Среднее квадратическое отклонение непрерывной случайной величины X есть $\sigma(X) = \sqrt{D(X)}$.

Модой $M_0(X)$ непрерывной случайной величины X называется ее наиболее вероятное значение, для которого плотность вероятности $f(x)$ достигает максимума.

Медианой $M_e(X)$ непрерывной случайной величины X называют такое ее значение: $P\big(X < M_e(X)\big) = P\big(X > M_e(X)\big) = \frac{1}{2}$.

Вертикальная прямая $x = M_e(X)$, проходящая через точку с абсциссой, равной $M_e(X)$, геометрически делит площадь фигуры под кривой распределения на две равные части $F\big(M_e(X)\big) = \frac{1}{2}$.

Начальный теоретический момент порядка k непрерывной случайной величины X определяется равенством $v_k = \int_{-\infty}^{+\infty} x^k f(x)dx$.

Центральный теоретический момент порядка k непрерывной случайной величины X определяется равенством

$$\mu_k = \int_{-\infty}^{+\infty} \big(x - M(X)\big)^k f(x)dx.$$

Если все возможные значения непрерывной случайной величины принадлежат отрезку $[a, b]$, то

$$v_k = \int_a^b x^k f(x)dx \quad \text{и} \quad \mu_k = \int_a^b \big(x - M(X)\big)^k f(x)dx.$$

В частности, $\mu_0 = 1$, $v_0 = 1$, $\mu_1 = 0$.

Величина $v_1 = M(X)$ характеризует среднее значение распределения случайной величины X.

Величина $\mu_2 = D(X)$ характеризует степень рассеяния случайной величины X относительно математического ожидания $M(X)$.

Среди моментов высших порядков особое значение имеют центральные моменты третьего и четвертого порядков, называемые коэффициентами асимметрии и эксцесса.

Коэффициент асимметрии $A(X) = \frac{\mu_3}{\big(\sigma(X)\big)^3}$ характеризует скошенность кривой распределения.

Эксцесс $E(X) = \frac{\mu_4}{\big(\sigma(X)\big)^4} - 3$ характеризует островершинность или плосковершинность кривой распределения.

Пример 2.2.1

На круговом экране локатора равновозможно появление пятна в каждой точке экрана. Радиус экрана равен R. Найти закон распределения расстояния от центра экрана до пятна. Найти математическое ожидание и дисперсию этого расстояния.

Решение. Обозначим через X расстояние от центра экрана до пятна. Это расстояние будет меньше x, если пятно попадет внутрь круга радиуса x. Вероятность этого по геометрическому определению вероятности равна отношению площади круга радиуса x к площади всего экрана локатора. Поэтому функция распределения случайной величины X имеет вид $F(x) = 0$ при $x \le 0$, $F(x) = P(X < x) = \frac{\pi x^2}{\pi R^2} = \frac{x^2}{R^2}$ при $0 < x \le R$ и $F(x) = 1$ при $x > R$.

То есть

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \le 0; \\ \frac{x^2}{R^2} & \text{при } 0 < x \le R; \\ 1 & \text{при } x > R. \end{cases}$$

Тогда функция плотности вероятности

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \le 0; \\ \dfrac{2x}{R^2} & \text{при } 0 < x \le R; \\ 0 & \text{при } x > R, \end{cases}$$

а математическое ожидание расстояния:

$$M(X) = \int_0^R x \cdot f(x)dx = \int_0^R x \cdot \frac{2x}{R^2} dx = \frac{2x^3}{3R^2}\Bigg|_0^R = \frac{2R^3}{3R^2} - 0 = \frac{2R}{3},$$

и дисперсия расстояния:

$$D(X) = \int_0^R \left(x - M(X)\right)^2 \cdot f(x)dx = \int_0^R \left(x - \frac{2R}{3}\right)^2 \cdot \frac{2x}{R^2} dx =$$

$$= \int_0^R \left(x^2 - \frac{4xR}{3} + \frac{4R^2}{9}\right) \cdot \frac{2x}{R^2} dx = \int_0^R \left(\frac{2x^3}{R^2} - \frac{8x^2}{3R} + \frac{8x}{9}\right) dx =$$

$$= \left(\frac{2x^4}{4R^2} - \frac{8x^3}{9R} + \frac{8x^2}{18}\right)\Bigg|_0^R = \frac{R^4}{2R^2} - \frac{8R^3}{9R} + \frac{4R^2}{9} - 0 = \frac{R^2}{18}.$$

Пример 2.2.2

Случайная величина X имеет функцию распределения

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < 0; \\ \dfrac{x^2}{36} & \text{при } 0 \le x \le 6; \\ 1 & \text{при } x > 6. \end{cases}$$

Найдите $M(X)$, $D(X)$, $P(X < 4)$, $P(2 < X < 5)$, $P(X > 3)$.

Решение. Найдем функцию плотности вероятности

$$f(x) = F'(x) = \begin{cases} 0 \quad \text{при} \;\; x < 0; \\ \dfrac{x}{18} \;\; \text{при} \;\; 0 \le x \le 6; \\ 0 \quad \text{при} \;\; x > 6. \end{cases}$$

Тогда

$$M(X) = \int_0^6 x \cdot f(x)dx = \int_0^6 x \cdot \tfrac{x}{18} dx = \tfrac{x^3}{3\cdot 18} \Big|_0^6 = \tfrac{216}{54} - 0 = 4,$$

$$D(X) = \int_0^6 \big(x - M(X)\big)^2 \cdot f(x)dx = \int_0^R (x-4)^2 \cdot \frac{x}{18} dx =$$

$$= \int_0^6 (x^2 - 8x + 16) \cdot \frac{x}{18} dx = \frac{1}{18} \int_0^6 (x^3 - 8x^2 + 16x) dx =$$

$$= \frac{1}{18}\left(\frac{x^4}{4} - \frac{8x^3}{3} + \frac{16x^2}{2}\right)\Bigg|_0^6 = \frac{1}{18}\left(\frac{1296}{4} - \frac{1728}{3} + \frac{576}{2} - 0\right) = \frac{36}{18} = 2.$$

Учитывая определение и свойства функции распределения $F(x)$, имеем

$$P(X < 4) = P(0 < X < 4) = P(4) - P(0) = \frac{4^2}{36} - 0 = \frac{4}{9};$$

$$P(2 < x < 5) = F(5) - F(2) = \frac{5^2}{36} - \frac{2^2}{36} = \frac{21}{36} = \frac{7}{12};$$

$$P(X > 3) = 1 - P(X < 3) = 1 - F(3) = 1 - \frac{3^2}{36} = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}.$$

Методические указания по выполнению самостоятельной работы студентов

Для выполнения предложенных заданий самостоятельной работы следует изучить представленный теоретический материал, разобрать предложенные решения типовых примеров и изучить рекомендуемую литературу.

Если студент испытывает затруднения в освоении теоретического или практического материала, то он может получить устную или письменную консультацию у ведущего преподавателя.

Задания выполнять в соответствии с предлагаемыми вариантами.

Номер варианта находится в таблице по первой букве фамилии студента.

Буква	А, О, Х	В, Ш, У	Д, Р, Щ	Е, П	Г, Ж, И	К, Ф, Э	Л, Ч, Ю	Б, М, Я	Н, Т	С, Ц, З
№ вар.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

Задача 1 (см. пример 2.2.1 и исходные данные к задаче 1)

Зона ответственности локатора определяется в полярных координатах неравенствами $\varphi_1 \le \varphi \le \varphi_2$ и $\rho_1 \le \rho \le 100$. В случайной точке зоны ответственности может появиться цель. Расстояние ее до локатора – случайная величина X. Считая равновозможными все положения цели в зоне ответственности, найдите функцию распределения случайной величины X и ее функцию плотности вероятности. Найдите математическое ожидание и дисперсию этой случайной величины.

Исходные данные

№	φ_1	φ_2	ρ_1	№	φ_1	φ_2	ρ_1
1	0	$\pi/4$	10	**6**	$\pi/4$	$3\pi/4$	20
2	0	$\pi/2$	10	**7**	$\pi/4$	π	20
3	0	π	10	**8**	0	$\pi/4$	20
4	0	$3\pi/4$	10	**9**	0	$\pi/2$	20
5	$\pi/4$	$\pi/2$	10	**10**	0	π	20

Задача 2 (см. пример 2.2.2; a – номер варианта)

Случайная величина X имеет функцию распределения

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < a; \\ \sqrt{x-a} & \text{при } a \le x \le a+1; \\ 1 & \text{при } x > a+1. \end{cases}$$

Найдите $M(X)$, $D(X)$, $P\left(X < a + \frac{1}{9}\right)$, $P\left(a + \frac{1}{16} < X < a + \frac{1}{4}\right)$, $P\left(X > \frac{1}{4}\right)$.

Задача 3 (см. пример 2.2.2; a — номер варианта)

Случайная величина X имеет функцию распределения

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < 0; \\ \dfrac{4(ax - x^2)}{a^2} & \text{при } 0 \le x \le \dfrac{a}{2}; \\ 1 & \text{при } x > \dfrac{a}{2}. \end{cases}$$

Найдите $M(X)$, $P\left(X < \frac{a}{4}\right)$, $P\left(\frac{a}{8} < X < \frac{a}{4}\right)$.

Контрольные вопросы

1. Что называется непрерывной случайной величиной?
2. Дайте определение дифференциальной функции распределения, назовите ее свойства.
3. Дайте определение интегральной функции распределения, назовите ее свойства.
4. Какие числовые характеристики имеет непрерывная случайная величина?
5. Как найти вероятность попадания случайной величины в заданный интервал?

Рекомендуемая литература

1. Гмурман, В. Е. Теория вероятностей и математическая статистика : учеб. пособие для вузов / В. Е. Гмурман. – 7-е изд., стер. – Москва : Высшая школа, 2001. – 479 с.
2. Гусак, А. А. Теория вероятностей : справочное пособие к решению задач / А. А. Гусак, Е. А. Бричикова. – 2-е изд., стер. – Минск : ТетраСистемс, 2000. – 286 с. – ISBN 985-6577-24-1.

Тема 2.3. Виды распределений

Форма проведения: практическое занятие.

Вопросы для обсуждения

1. Биномиальное распределение и его характеристики.
2. Распределение Пуассона и его характеристики.
3. Геометрическое распределение и его характеристики.
4. Гипергеометрическое распределение и его характеристики.
5. Равномерное распределение и его характеристики.
6. Экспоненциальное (показательное) распределение и его характеристики.

Методические указания по проведению занятия

Занятие проводится в виде практической работы, в процессе которой студентам необходимо уточнить базовые понятия и основные теоретические сведения по теме занятия, выполнить практическое задание по вариантам под руководством преподавателя, ответить на контрольные вопросы по теме.

Методические материалы к занятию

1. Биномиальное распределение

Дискретная случайная величина X, которая принимает значение m с вероятностью $P_n(X = m) = P_n(m) = C_n^m p^m q^{n-m},\ m = 0,1,\dots,n,$ $0 \le p \le 1,$ $q = 1 - p,$ называется распределенной по биномиальному закону.

На практике биномиальное распределение возникает при следующих условиях. Пусть проводятся n независимых испытаний (опытов), в каждом из которых событие A («успех» опыта) может наступить с одной и той же вероятностью p, тогда число наступлений события A в n испытаниях и есть случайная величина X.

Ряд биномиального распределения случайной величины X будет иметь вид:

X	0	1	2	…	n
$P_n(m)$	q^n	npq^{n-1}	$C_n^2 p^2 q^{n-2}$	…	p^n

Основные характеристики биномиального распределения

– математическое ожидание $M(x) = np$;

– дисперсия $D(x) = npq$;

– коэффициент асимметрии $A = \frac{q-p}{\sqrt{npq}}$;

– коэффициент эксцесса $E = \frac{1-6pq}{\sqrt{npq}}$.

Пример 2.3.1

Передается $n = 5$ сообщений по каналу связи. Каждое сообщение с вероятностью $p = 0,3$ независимо от других искажается. Случайная величина X – число искаженных сообщений. Построить ее ряд распределения, многоугольник распределения, найти ее числовые характеристики. Найти вероятность того, что будет искажено не менее двух сообщений.

Решение. Случайная величина X – число искаженных сообщений – распределена по биномиальному закону (под «опытом» разумеется передача сообщения, а под «успехом» – его искажение).

$$P_n(m) = C_n^m p^m q^{n-m} = P_5(0) = C_5^0 \cdot (0{,}3)^0 \cdot (0{,}7)^5 = 1 \cdot 1 \cdot 0{,}7^5 = 0{,}16807;$$

$$P_5(1) = C_5^1 \cdot (0{,}3)^1 \cdot (0{,}7)^4 = 5 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}2401 = 0{,}36015;$$

$$P_5(2) = C_5^2 \cdot (0{,}3)^2 \cdot (0{,}7)^3 = 10 \cdot 0{,}09 \cdot 0{,}343 = 0{,}30870;$$

$$P_5(3) = C_5^3 \cdot (0{,}3)^3 \cdot (0{,}7)^2 = 0{,}13230;$$

$$P_5(4) = C_5^4 \cdot (0{,}3)^4 \cdot (0{,}7)^1 = 0{,}02835;$$

$$P_5(5) = C_5^5 \cdot (0{,}3)^5 \cdot (0{,}7)^0 = 0{,}00243.$$

Приближенно ряд распределения будет иметь вид:

$X = m$	0	1	2	3	4	5
$P_5(m)$	0,168	0,360	0,309	0,133	0,028	0,002

Найдем сумму всех вероятностей

$$0{,}168 + 0{,}360 + 0{,}309 + 0{,}133 + 0{,}028 + 0{,}002 = 1.$$

Ряд распределения построен верно.

Изобразим многоугольник распределения

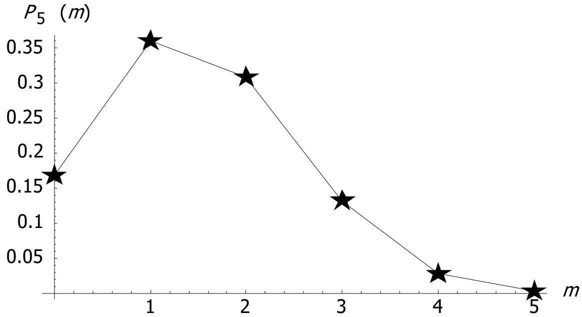


Рис. 1

Вычислим основные характеристики биномиального распределения:

$$M(X) = np = 5 \cdot 0{,}3 = 1{,}5;$$
$$D(X) = npq = 5 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}7 = 1{,}05;$$
$$A = \frac{q-p}{\sqrt{npq}} = \frac{0{,}7-0{,}3}{\sqrt{1{,}05}} = 0{,}388;$$
$$E = -0{,}248.$$

В частности, коэффициент асимметрии $A = 0{,}388 > 0$ указывает на скошенность многоугольника распределения влево, а коэффициент эксцесса $E = -0{,}248 < 0$ подчеркивает туповершинность многоугольника распределения.

Наконец найдем вероятность того, что будет искажено не менее двух сообщений:

$$P\{X \geq 2\} = 1 - P\{X < 2\} = 1 - \left(P_5(0) + P_5(1)\right) = 0{,}472.$$

2. Распределение Пуассона

Случайная величина X называется распределенной по закону Пуассона с параметром $a > 0$, если ее возможные значения равны 0, 1, ..., а соответствующие вероятности определяются формулой

$$P_m \approx \frac{a^m \cdot e^{-a}}{m!},$$

где $np = a = \text{const}$.

Для распределения Пуассона характерно совпадение математического ожидания и дисперсии

$$M(X) = D(X) = a.$$

Распределение Пуассона получается из биномиального распределения предельным переходом $n \to \infty$, $p \to 0$ при условии $np = a = \text{const}$ и в этом случае интерпретируется как *закон редких событий*. Этим распределением можно пользоваться приближенно, если производится большое число независимых опытов, в каждом из которых событие происходит с малой вероятностью. Пуассоновскому распределению подчиняется так называемый «поток событий», то есть последовательность однородных событий, наступающих одно за другим в случайные моменты времени.

Закон распределения Пуассона может быть записан в виде таблицы:

$X = m$	0	1	2	…	m	…
P_m	e^{-a}	ae^{-a}	$\frac{ae^{-a}}{2!}$	…	$\frac{a^m e^{-a}}{m!}$	…

Пример 2.3.2

Среднее число вызовов, поступающих на АТС в одну минуту, равно 2. Случайная величина X – число поступивших вызовов за 5 минут. Построить ее ряд распределения, найти ее числовые характеристики. Найти вероятность того, что за 5 минут поступит менее двух вызовов.

Решение. По условию $\lambda = 2$ (число вызовов в одну минуту), $\tau = 5$ (количество минут). Таким образом, $a = 10$. Находим:

$$P_0 = \frac{a^m \cdot e^{-a}}{m!} = \frac{10^0 e^{-10}}{0!} = 0{,}00004$$

$$P_1 = \frac{a^m \cdot e^{-a}}{m!} = \frac{10^1 e^{-10}}{1!} = 0{,}000455$$

$$P_2 = \frac{a^m \cdot e^{-a}}{m!} = \frac{10^2 e^{-10}}{2!} = 0{,}00226$$

$X = m$	0	1	2	…	m	…
P_m	0,00004	0,000455	0,00226	…		…

Числовые характеристики $M(X) = D(X) = a = 10$.

$$P(m < 2) = P_0 + P_1 = \frac{10^0 e^{-10}}{0!} + \frac{10^1 e^{-10}}{1!} \approx 0{,}000495.$$

3. Геометрическое распределение

Дискретная случайная величина X, которая принимает значение m с вероятностью

$$P(X = m) = P_m = p \cdot q^m,$$

где $m = 0, 1, \ldots, n$, $0 \leq p \leq 1$, $q = 1 - p$, называется распределенной по *геометрическому закону*.

Вероятности P_m для последовательных значений m образуют геометрическую прогрессию с первым членом p и знаменателем q.

На практике геометрическое распределение возникает при следующих условиях. Пусть проводится ряд независимых испытаний (опытов) с целью получения какого-то результата («успеха») A; при каждой попытке «успех» достигается с одной и той же вероятностью p, тогда число «безуспешных» попыток (до первой попытки, в которой наступает результат A) и есть случайная величина X.

Ряд геометрического распределения случайной величины X будет иметь вид:

$X = m$	0	1	2	...	m	...
P_m	p	$p \cdot q$	$p \cdot q^2$	...	$p \cdot q^m$	...

Основные числовые характеристики геометрического распределения

– математическое ожидание

$$M(x) = \frac{1 - p}{p};$$

– дисперсия

$$D(x) = \frac{1 - p}{p^2}.$$

На практике приходится рассматривать случайную величину $Y = X + 1$ – число попыток до первого «успеха», включая удавшуюся.

Ряд распределения случайной величины Y будет иметь вид:

$Y = m$	1	2	3	...	m	...
P_m	p	$p \cdot q$	$p \cdot q^2$	...	$p \cdot q^{m-1}$	...

Основные числовые характеристики распределения случайной величины Y

– математическое ожидание

$$M(x) = \frac{1}{p};$$

– дисперсия

$$D(x) = \frac{1-p}{p^2}.$$

Пример 2.3.3

Из орудия производится стрельба по цели до первого попадания. Вероятность попадания в цель $p = 0{,}6$. Случайная величина Y – число выстрелов до первого попадания. Построить ее ряд распределения, найти ее числовые характеристики.

Решение. В данном случае Y – число выстрелов до первого попадания.

$$P(Y = 1) = p \cdot q^{m-1} = 0{,}6 \cdot 0{,}4^0 = 0{,}6$$

$$P(Y = 2) = p \cdot q^{m-1} = 0{,}6 \cdot 0{,}4^1 = 0{,}24$$

$$P(Y = 3) = p \cdot q^{m-1} = 0{,}6 \cdot 0{,}4^2 = 0{,}096$$

$$P(Y = m) = p \cdot q^{m-1} = 0{,}6 \cdot 0{,}4^{m-1}$$

Составим ее ряд распределения

$Y = m$	1	2	3	…	m	…
P_m	0,6	0,24	0,96	…	$0{,}6 \cdot 0{,}4^{m-1}$	…

Получаем, что значения вероятностей представляют собой бесконечно убывающую геометрическую прогрессию с первым членом, равным 0,6 и знаменателем 0,4. Найдем ее сумму

$$S_n = \frac{b_1}{1-q} = \frac{0{,}6}{1-0{,}4} = 1.$$

Ряд распределения построен верно.

Основные числовые характеристики распределения равны:

– математическое ожидание

$$M(x) = \frac{1}{p} = \frac{1}{0{,}6} = \frac{5}{3};$$

– дисперсия

$$D(x) = \frac{1-p}{p^2} = \frac{1-0{,}6}{0{,}6^2} = 1{,}11.$$

4. Гипергеометрическое распределение

Случайная величина X имеет гипергеометрическое распределение с параметрами $N = 2, 3, \ldots$; $M = 1, 2, \ldots < N$; $n = 1, 2, \ldots < N$, если она принимает конечное множество натуральных значений $X = m$, соответственно с вероятностями $P = (X = m) = \dfrac{C_M^m \cdot C_{N-M}^{n-m}}{C_N^n}$, где $m = 0, 1, 2, \ldots, \min(M, n)$.

На языке «схемы урн» гипергеометрическое распределение возникает при следующих условиях. В урне находится N шаров, из которых ровно M белые. Пусть одновременно (или один за другим без возврата) извлечены n шаров. Тогда вероятность того, что среди этих извлеченных шаров будет m белых шаров. На практике гипергеометрическое распределение применяется при решении задач, связанных с контролем продукции.

Основные числовые характеристики случайной величины

– математическое ожидание

$$M(x) = \frac{n \cdot M}{N};$$

– дисперсия

$$D(x) = \frac{n \cdot M \cdot (N - M) \cdot (N - n)}{(N - 1) \cdot N^2}.$$

Пример 2.3.4

Имеется 7 лампочек, среди которых 3 неисправные, на вид неотличимые от новых. Наугад берутся 4 лампы и вставляются в 4 патрона. Найти ряд распределения и построить многоугольник распределения числа ламп X, которые будут работать. Найти его числовые характеристики.

Решение. Величина X имеет гипергеометрическое распределение с параметрами $N = 7$; $n = 4$; $M = 4$. Находим

$$P(X = 1) = \frac{C_M^m \cdot C_{N-M}^{n-m}}{C_N^n} = \frac{C_4^1 \cdot C_3^3}{C_7^4} = \frac{\frac{4!}{1! \cdot 3!} \cdot \frac{3!}{3!}}{\frac{7!}{4! \cdot 3!}} = \frac{4}{\frac{5 \cdot 6 \cdot 7}{6}} = \frac{4}{35}$$

$$P(X = 2) = \frac{C_4^2 \cdot C_3^2}{C_7^4} = \frac{\frac{4!}{2! \cdot 2!} \cdot \frac{3!}{2!}}{\frac{7!}{4! \cdot 3!}} = \frac{\frac{3 \cdot 4}{2} \cdot 3}{\frac{5 \cdot 6 \cdot 7}{6}} = \frac{18}{35}$$

$$P(X=3)=\frac{C_4^3\cdot C_3^1}{C_7^4}=\frac{\frac{4!}{1!\cdot 3!}\cdot\frac{3!}{2!\cdot 1!}}{\frac{7!}{4!\cdot 3!}}=\frac{4\cdot 3}{\frac{5\cdot 6\cdot 7}{6}}=\frac{12}{35}$$

$$P(X=4)=\frac{C_4^4\cdot C_3^0}{C_7^4}=\frac{\frac{4!}{4!}\cdot\frac{3!}{3!}}{\frac{7!}{4!\cdot 3!}}=\frac{1}{\frac{5\cdot 6\cdot 7}{6}}=\frac{1}{35}.$$

Ряд распределения случайной величины X будет иметь вид:

$X=m$	1	2	3	4
P_m	$\frac{4}{35}$	$\frac{18}{35}$	$\frac{12}{35}$	$\frac{1}{35}$

Найдем сумму всех вероятностей

$$\frac{4}{35}+\frac{18}{35}+\frac{12}{35}+\frac{1}{35}=1.$$

Основные числовые характеристики случайной величины X:

– математическое ожидание

$$M(x)=\frac{n\cdot M}{N}=\frac{4\cdot 4}{7}=2{,}286;$$

– дисперсия

$$D(x)=\frac{n\cdot M\cdot(N-M)\cdot(N-n)}{(N-1)\cdot N^2}=\frac{4\cdot 4\cdot 3\cdot 3}{6\cdot 49}=0{,}49.$$

5. Равномерное распределение

Непрерывная случайная величина X называется распределенной равномерно на отрезке $[a;b]$, если ее плотность распределения вероятностей постоянна на данном отрезке:

$$f(x)=\begin{cases}0, & x\notin[a;b]\\ \frac{1}{b-a}, & x\in[a;b]\end{cases}$$

Функция распределения примет вид:

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<a\\ \frac{x-a}{b-a}, & a\le x<b\\ 1, & x\ge b\end{cases}$$

Это распределение реализуется, например, в эксперименте, в котором наудачу ставится точка на отрезок $[a;b]$, при этом случайная величина X – абсцисса поставленной точки.

Примером равномерно распределенной непрерывной случайной величины X является ошибка при округлении отсчета до ближайшего целого деления шкалы измерительного прибора, проградуированной в некоторых единицах.

Основные характеристики равномерного распределения:

– математическое ожидание

$$M(x) = \frac{a+b}{2};$$

– дисперсия

$$D(x) = \frac{(b-a)^2}{12}.$$

Пример 2.3.5

Автобусы идут с интервалом 5 минут. Полагая, что случайная величина X – время ожидания автобуса на остановке – распределена равномерно на указанном интервале, найти среднее время ожидания и среднеквадратическое отклонение времени ожидания.

Решение. Так как случайная величина X распределена по равномерному закону с параметрами $a = 0$, $b = 5$, то ее плотность распределения имеет вид

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \notin [0;5] \\ \frac{1}{5}, & x \in [0;5] \end{cases}$$

Математическое ожидание $M(x) = \frac{a+b}{2} = \frac{5+0}{2} = 2{,}5$ – среднее время ожидания автобуса.

Дисперсия

$$D(x) = \frac{(b-a)^2}{12} = \frac{25}{12}.$$

Среднеквадратическое отклонение времени ожидания

$$\sigma(x) = \sqrt{D(x)} = \sqrt{\frac{25}{12}} = 1{,}44.$$

Пример 2.3.6

Случайная величина X равномерно распределена в интервале (1; 8). Найти: а) дифференциальную функцию; б) интегральную функцию; в) математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение; г) вероятность попадания в интервал (3; 5).

Решение.

а) так как случайная величина X распределена по равномерному закону с параметрами $a = 1$, $b = 8$, то ее плотность распределения (дифференциальная функция распределения) имеет вид:

$$f(x)=\begin{cases}0, & x\notin[1;8]\\ \frac{1}{7}, & x\in[1;8]\end{cases};$$

б) интегральная функция распределения имеет вид:

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<1\\ \frac{x-1}{7}, & 1\le x<8\\ 1, & x\ge 8\end{cases};$$

в) математическое ожидание

$$M(x)=\frac{a+b}{2}=\frac{1+8}{2}=4{,}5.$$

Дисперсия

$$D(x)=\frac{(b-a)^2}{12}=\frac{49}{12}.$$

Среднеквадратическое отклонение

$$\sigma(x)=\sqrt{D(x)}=\sqrt{\frac{49}{12}}=2{,}021;$$

г) вероятность попадания этой величины в промежуток (3; 5):

$$P(3<x<5)=F(5)-F(3)=\frac{5-1}{7}-\frac{3-1}{7}=\frac{4}{7}-\frac{2}{7}=\frac{2}{7}.$$

6. Экспоненциальное (показательное) распределение

Непрерывная случайная величина X распределена по *экспоненциальному закону с параметром* $\lambda > 0$, если ее плотность распределения вероятностей задается формулой

$$f(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ \lambda e^{-\lambda x}, & x\ge 0\end{cases}.$$

Функция распределения показательного закона:

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ 1-e^{-\lambda x}, & x\ge 0\end{cases}.$$

Типичные примеры, где реализуется экспоненциальное распределение – теория обслуживания, при этом X – например, время ожидания при техническом обслуживании, и теория надежности, здесь X – например, срок службы радиоэлектронной аппаратуры.

Показательное распределение тесно связано с простейшим потоком событий: интервал времени T между двумя соседними событиями в простейшем потоке имеет показательное распределение с параметром, равным интенсивности потока $f(t) = \lambda e^{-\lambda t}$ $(t > 0)$.

Основные характеристики показательного распределения:

– математическое ожидание

$$M(x) = \frac{1}{\lambda};$$

– дисперсия

$$D(x) = \frac{1}{\lambda^2}.$$

Пример 2.3.7

Время безотказной работы цепи – случайная величина T, имеющая показательное распределение с параметром $\lambda = 5$ (физический смысл величины λ – среднее число отказов в единицу времени, не считая простоев цепи для ремонта). Известно, что цепь уже проработала без отказов время τ. Найти при этих условиях плотность и функцию распределения времени, которое проработает цепь после момента τ до ближайшего отказа.

Решение. Так как простейший поток отказов не имеет последствия, вероятность появления хотя бы одного отказа на участке от τ до $\tau + t$ не зависит от того, появлялись ли отказы ранее момента τ. Следовательно, при $\lambda = 5$ получим плотность распределения вероятностей:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 5e^{-5x}, & x \geq 0 \end{cases}.$$

Функция распределения имеет вид

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1 - e^{-5x}, & x \geq 0 \end{cases}.$$

Графики плотности и функции полученного показательного распределения изображены ниже.

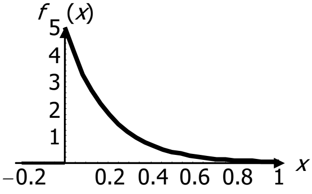


Рис. 2

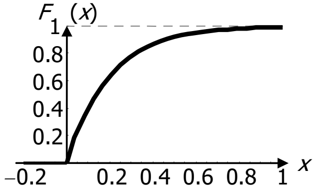


Рис. 3

Методические указания по выполнению самостоятельной работы студентов

Для выполнения предложенных заданий самостоятельной работы следует изучить представленный теоретический материал, разобрать предложенные решения типовых примеров и изучить рекомендуемую литературу.

Если студент испытывает затруднения в освоении теоретического или практического материала, то он может получить устную или письменную консультацию у ведущего преподавателя.

Задания выполнять в соответствии с предлагаемыми вариантами.

Номер варианта находится в таблице по первой букве фамилии студента.

Буква	А, О, Х	В, Ш, У	Д, Р, Щ	Е, П	Г, Ж, И	К, Ф, Э	Л, Ч, Ю	Б, М, Я	Н, Т	С, Ц, З
№ вар.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

Задача 1

Вероятность выхода изделия первого сорта равна $\boldsymbol{p}$. Составить ряд распределения для числа X – изделий первого сорта из общего числа $\boldsymbol{n}$ изготовленных изделий. Построить ее ряд распределения, многоугольник распределения, найти ее числовые характеристики. Найти вероятность того, что будет не менее $\boldsymbol{m}$ изделий первого сорта.

№ вар.	p	n	m
1	0,6	3	2
2	0,7	4	3
3	0,8	5	4
4	0,9	3	2
5	0,6	4	2
6	0,7	5	3
7	0,8	3	2
8	0,9	4	3
9	0,6	5	3
10	0,7	3	2

Задача 2

Вариант 1

Из 25 контрольных работ, среди которых 5 оценены на отлично, наугад извлекаются 3 работы. Найти закон распределения дискретной случайной величины X, равной числу оцененных на отлично работ среди извлеченных. Построить ее ряд распределения, многоугольник распределения, найти ее числовые характеристики.

Вариант 2

Из 20 контрольных работ, среди которых 6 оценены на отлично, наугад извлекаются 4 работы. Найти закон распределения дискретной случайной величины X, равной числу оцененных на отлично работ среди извлеченных. Построить ее ряд распределения, многоугольник распределения, найти ее числовые характеристики.

Вариант 3

Из 15 контрольных работ, среди которых 7 оценены на отлично, наугад извлекаются 3 работы. Найти закон распределения дискретной случайной величины X, равной числу оцененных на отлично работ среди извлеченных. Построить ее ряд распределения, многоугольник распределения, найти ее числовые характеристики.

Вариант 4

В партии из 11 изделий 5 имеют скрытые дефекты. Наугад выбраны 4 изделия. ДСВ X – число бракованных изделий среди выбранных. Построить ее ряд распределения, многоугольник распределения, найти ее числовые характеристики.

Вариант 5

В партии из 15 изделий 7 имеют скрытые дефекты. Наугад выбраны 3 изделия. ДСВ X – число бракованных изделий среди выбранных. Построить ее ряд распределения, многоугольник распределения, найти ее числовые характеристики.

Вариант 6

В партии из 10 изделий 6 имеют скрытые дефекты. Наугад выбраны 5 изделий. ДСВ X – число бракованных изделий среди выбранных. Построить ее ряд распределения, многоугольник распределения, найти ее числовые характеристики.

Вариант 7

ДСВ X – число карт трефовой масти среди четырех взятых наугад из колоды карт. Построить ее ряд распределения, многоугольник распределения, найти ее числовые характеристики.

Вариант 8

ДСВ X – число карт трефовой масти среди трех взятых наугад из колоды карт. Построить ее ряд распределения, многоугольник распределения, найти ее числовые характеристики.

Вариант 9

В коробке 20 одинаковых клубков ниток, из них 4 клубка с красными нитками. Наудачу вынимают 2 клубка. ДСВ X – число клубков с красными нитками. Построить ее ряд распределения, многоугольник распределения, найти ее числовые характеристики.

Вариант 10

В коробке 15 одинаковых клубков ниток, из них 5 клубков с красными нитками. Наудачу вынимают 3 клубка. ДСВ X – число клубков с красными нитками. Построить ее ряд распределения, многоугольник распределения, найти ее числовые характеристики.

Задача 3

Случайная величина X равномерно распределена в интервале $(a; b)$. Найти: а) дифференциальную и интегральные функции и построить их; б) математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение; в) вероятность попадания в интервал $(c; d)$.

№ вар.	a	b	c	d
1	1	5	2	4
2	2	8	3	5
3	3	6	4	5
4	1	6	2	5
5	2	7	3	6
6	2	6	3	5
7	1	7	3	5
8	2	7	4	6
9	1	9	3	6
10	0	10	3	7

Задача 4

Для поиска корабля, терпящего бедствие, совершает полеты самолет. Вероятность обнаружения корабля в одном полете равна $\boldsymbol{p}$. Определить закон распределения случайной величины Y – число поисковых полетов. Определить математическое ожидание, дисперсию, среднее квадратическое отклонение величины Y. Определить вероятность того, что корабль будет обнаружен в $\boldsymbol{m}$ полете.

№ вар.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\boldsymbol{p}$	0,9	0,8	0,85	0,75	0,95	0,6	0,65	0,7	0,9	0,8
$\boldsymbol{m}$	3	4	5	2	3	4	5	2	3	4

Задача 5

Предполагаем, что случайное время обслуживания абонента службой «112» распределено по показательному закону и средняя продолжительность обслуживания составляет a минуты. Запишите функцию плотности распределения вероятностей, функцию распределения и постройте их графики.

Найдите вероятность того, что абонент будет обслужен более чем $\boldsymbol{m}$ минут.

№ вар.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\boldsymbol{a}$	1,5	2	2,5	3	1	3,5	1,25	2	2,5	1,5
$\boldsymbol{m}$	3	4	5	2	3	4	5	2	3	4

Контрольные вопросы

1. Какие распределения может иметь ДСВ?
2. Какие распределения может иметь НСВ?
3. Каким законом задается биномиальное распределение?
4. Каким законом задается гипергеометрическое распределение?
5. По каким формулам находится математическое ожидание для каждого из рассмотренных распределений?
6. Как можно проверить, что мы верно составили закон распределения для геометрического распределения?

Рекомендуемая литература

1. Гмурман, В. Е. Теория вероятностей и математическая статистика : учеб. пособие для вузов / В. Е. Гмурман. – Изд. 11-е, стер. – Москва : Высшая школа, 2005. – 479 с. – ISBN 5-06-004214-6.
2. Гусак, А. А. Теория вероятностей : справочное пособие к решению задач / А. А. Гусак, Е. А. Бричикова. – 2-е изд., стер. – Минск : ТетраСистемс, 2000. – 286 с. – ISBN 985-6577-24-1.
3. Гриднева, И. В. Теория вероятностей и математическая статистика : учеб. пособие / И. В. Гриднева, Л. И. Федулова, В. П. Шацкий ; Воронежский государственный аграрный университет имени Императора Петра I. – Воронеж : Воронежский ГАУ, 2017. – 165 с. – URL: www.iprbookshop.ru/72762.html (дата обращения: 27.10.2021).

Тема 2.4. Нормальное распределение

Форма проведения: практическое занятие.

Вопросы для обсуждения

1. Нормальное распределение.
2. Параметры нормального распределения.
3. Характеристики нормального распределения.
4. Интервальные вероятности для нормального распределения.

Методические указания по проведению занятия

Занятие проводится в виде практической работы, в процессе которой студентам необходимо уточнить базовые понятия и основные теоретические сведения по теме занятия, выполнить практическое задание по вариантам, приведенным в таблице, под руководством преподавателя, ответить на контрольные вопросы по теме.

Методические материалы к занятию

Непрерывная случайная величина имеет *нормальное распределение с параметрами $a \in R$* и $\sigma > 0$, если плотность распределения вероятностей имеет вид:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}, \qquad -\infty < x < \infty,$$

где a — математическое ожидание; σ — среднее квадратическое отклонение X.

$$a = M(X), \qquad \sigma = \sqrt{D(X)}.$$

Если случайная величина распределена по закону $N(0, 1)$, то она называется ***стандартизированной нормальной величиной***. Функция распределения для нее имеет вид:

$$F_0(x) = \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} dt.$$

Графики плотности и функции нормального распределения изображены ниже.

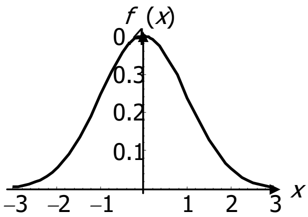


Рис. 4

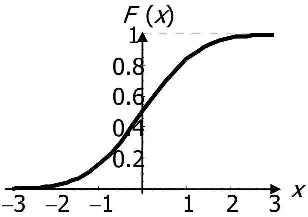


Рис. 5

Функция нормального распределения связана с функцией Лапласа, имеющей вид: $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$, соотношением $F_0(x) = \Phi(x) + 0{,}5$. Для функции Лапласа справедливо соотношение $\Phi(-x) = -\Phi(x)$.

С помощью функции Лапласа можно вычислять интервальные вероятности для нормального распределения $N(a, \sigma)$:

$$P(x_1 \le X \le x_2) = \Phi\left(\frac{x_2 - a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{x_1 - a}{\sigma}\right).$$

Значения функций $f(x)$ и Φ(x) можно вычислить с помощью таблиц функции Лапласа (см. прил. А, Б).

Через функцию Лапласа выражается и функция нормального распределения в общем случае, т. е.

$$F(x) = \Phi\left(\frac{x - a}{\sigma}\right) + 0{,}5.$$

Для нормального распределения коэффициенты асимметрии и эксцесса равны 0 ($A = 0$, $E = 0$), поэтому кривая плотности нормального распределения является эталонной, с которой сравнивают $f(x)$ других распределений при одинаковых M(X) и $D(X)$. Причем на фоне кривой плотности нормального распределения график плотности распределения $f(x)$ деформирован (асимметричен) влево, если $A > 0$, и вправо, если $A < 0$; остроконечен (вытянут вверх), если $E > 0$, и тупоконечен, если $E < 0$.

Пример 2.4.1

Плотность распределения задана законом

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{8\pi}} e^{-\frac{(x+1)^2}{8}}.$$

Найти:

– $M(X)$ – математическое ожидание X;

– $D(X)$ – дисперсию X;

– вероятность того, что X примет значение меньше 0,5;

– вероятность того, что X примет значение больше 1,5;

– вероятность того, что X примет значение в интервале (0,5; 1,5);

– вероятность того, что абсолютная величина отклонения X от математического ожидания не превысит 3.

Решение. Из формулы нормального распределения получаем, что $a = -1$, значит, $M(X) = -1$ – математическое ожидание, $\sigma^2 = D(X) = 4$ – искомая дисперсия.

Вероятность того, что X примет значение меньше 0,5, находим по формуле

$$P(x_1 \le X \le x_2) = \Phi\left(\frac{x_2 - a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{x_1 - a}{\sigma}\right)$$

$$P(-\infty \le X \le 0{,}5) = \Phi\left(\frac{0{,}5 + 1}{2}\right) - \Phi\left(\frac{-\infty + 1}{2}\right) = \Phi(0{,}75) + \Phi(\infty)$$
$$= 0{,}2734 + 0{,}5 = 0{,}7734.$$

Вероятность того, что X примет значение больше 1,5, находим по формуле

$$P(x_1 \le X \le x_2) = \Phi\left(\frac{x_2 - a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{x_1 - a}{\sigma}\right)$$

$$P(1{,}5 \le X \le \infty) = \Phi\left(\frac{\infty + 1}{2}\right) - \Phi\left(\frac{1{,}5 + 1}{2}\right) = \Phi(\infty) - \Phi(2{,}25) =$$

$$= 0{,}5 - 0{,}488 = 0{,}012.$$

Вероятность того, что X примет значение в интервале (0,5; 1,5), находим по формуле

$$P(x_1 \le X \le x_2) = \Phi\left(\frac{x_2 - a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{x_1 - a}{\sigma}\right)$$

$$P(0{,}5 \le X \le 1{,}5) = \Phi\left(\frac{1{,}5 + 1}{2}\right) - \Phi\left(\frac{0{,}5 + 1}{2}\right) = \Phi(2{,}25) - \Phi(0{,}75) =$$

$$= 0{,}488 - 0{,}2734 = 0{,}2146.$$

Вероятность того, что абсолютная величина отклонения X от математического ожидания не превысит 3, найдем по формуле

$$P(|X - a| < \delta) = 2\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right)$$

$$P(|X + 1| < 3) = 2\Phi\left(\frac{3}{2}\right) = 2\Phi(1{,}5) = 2 \cdot 0{,}4332 = 0{,}8664.$$

Методические указания по выполнению самостоятельной работы студентов

Для выполнения предложенных заданий самостоятельной работы следует изучить представленный теоретический материал, разобрать предложенные решения типовых примеров и изучить рекомендуемую литературу.

Если студент испытывает затруднения в освоении теоретического или практического материала, то он может получить устную или письменную консультацию у ведущего преподавателя.

Задания выполнять в соответствии с предлагаемыми вариантами.

Номер варианта находится в таблице по первой букве фамилии студента.

Буква	А, О, Х	В, Ш, У	Д, Р, Щ	Е, П	Г, Ж, И	К, Ф, Э	Л, Ч, Ю	Б, М, Я	Н, Т	С, Ц, З
№ вар.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

Задача 1

Случайная величина X имеет плотность распределения вероятностей $\boldsymbol{f(x)}$.

Найти:

а) $M(X)$ и $D(X)$;

б) вероятность того, что X примет значение меньше α;

в) вероятность того, что X примет значение больше β;

г) вероятность того, что X примет значение в интервале $(\alpha; \beta)$;

д) вероятность того, что абсолютная величина отклонения X от математического ожидания не превысит δ.

№ вар.	$f(x)$	α	β	δ
1	$f(x) = \frac{1}{\sqrt{8\pi}} e^{-\frac{(x-1)^2}{8}}$	0	2	1,5
2	$f(x) = \frac{1}{\sqrt{18\pi}} e^{-\frac{(x-1)^2}{18}}$	0,5	1,5	32
3	$f(x) = \frac{1}{\sqrt{32\pi}} e^{-\frac{(x-2)^2}{32}}$	1,5	2,5	3
4	$f(x) = \frac{1}{\sqrt{8\pi}} e^{-\frac{(x-2)^2}{8}}$	1,5	3,5	2,5
5	$f(x) = \frac{1}{\sqrt{8\pi}} e^{-\frac{(x-2,5)^2}{8}}$	2	2,5	2,5
6	$f(x) = \frac{1}{\sqrt{18\pi}} e^{-\frac{(x+1,5)^2}{18}}$	–1	1,5	2
7	$f(x) = \frac{1}{\sqrt{32\pi}} e^{-\frac{(x+2)^2}{32}}$	–2,5	3	3
8	$f(x) = \frac{1}{\sqrt{8\pi}} e^{-\frac{(x-3)^2}{8}}$	1,5	4	2
9	$f(x) = \frac{1}{\sqrt{8\pi}} e^{-\frac{(x-2,5)^2}{8}}$	1,5	3,5	1,5
10	$f(x) = \frac{1}{\sqrt{8\pi}} e^{-\frac{(x-3,5)^2}{8}}$	2,5	4,5	3

Задача 2

Рост мальчиков возрастной группы 15 лет есть нормально распределённая случайная величина X с параметрами $\boldsymbol{a}$ см и σ. Какую долю костюмов для мальчиков, имеющих рост от α до β см, нужно предусмотреть в объёме производства для данной возрастной группы.

№ вар.	a	σ	α	β
1	161	4	152	158
2	160	5	152	1160
3	162	3	160	163
4	159	2	158	162
5	161	3	150	155
6	160	4	155	160
7	160	3	159	165
8	161	5	160	165
9	158	4	155	159
10	159	3	154	158

Контрольные вопросы

1. Какими параметрами определяется нормальное распределение?
2. Какая величина является стандартизированной нормальной величиной?
3. По какой формуле находится вероятность попадания нормальной случайной величины в заданный интервал?
4. Как функция нормального распределения связана с функцией Лапласа?
5. Каким образом сравнивают $f(x)$ других распределений с кривой плотности нормального распределения при одинаковых $M(X)$ и $D(X)$.

Рекомендуемая литература

1. Гмурман, В. Е. Теория вероятностей и математическая статистика : учеб. пособие для вузов / В. Е. Гмурман. – Изд. 11-е, стер. – Москва : Высшая школа, 2005. – 479 с. – ISBN 5-06-004214-6.
2. Гусак, А. А. Теория вероятностей : справочное пособие к решению задач / А. А. Гусак, Е. А. Бричикова. – 2-е изд., стер. – Минск : ТетраСистемс, 2000. – 286 с. – ISBN 985-6577-24-1.
3. Гриднева, И. В. Теория вероятностей и математическая статистика : учеб. пособие / И. В. Гриднева, Л. И. Федулова, В. П. Шацкий ; Воронежский государственный аграрный университет имени Императора Петра I. – Воронеж : Воронежский ГАУ, 2017. – 165 с. – URL: www.iprbookshop.ru/72762.html (дата обращения: 27.10.2021).

Модуль 3. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА

Тема 3.1. Выборочный метод

Форма проведения: практическое занятие.

Вопросы для обсуждения

1. Выборка.
2. Статистическое распределение выборки.
3. Полигон и гистограмма.
4. Эмпирическая функция распределения.
5. Числовые характеристики распределений.

Методические указания по проведению занятия

Занятие проводится в виде практической работы, в процессе которой студентам необходимо уточнить базовые понятия и основные теоретические сведения по теме занятия, выполнить практическое задание по вариантам под руководством преподавателя, ответить на контрольные вопросы по теме.

Методические материалы к занятию

1. Выборка

Выборочной совокупностью или просто ***выборкой*** называют совокупность n случайно отобранных объектов.

Генеральной совокупностью называют совокупность N объектов, из которых производится выборка.

Объемом совокупности (выборочной или генеральной) называют число объектов этой совокупности. Например, если из 1000 деталей отобрано для обследования 100 деталей, то объем генеральной совокупности $N = 1000$, а объем выборки $n = 100$.

2. Статистическое распределение выборки

Пусть из генеральной совокупности извлечена выборка, причем x_1 наблюдалось n_1 раз, x_2 – n_2 раз, x_k – n_k раз и $\Sigma n_i = n$ – объем выборки. Наблюдаемые значения x_i называют ***вариантами***, а последовательность вариант, записанных в возрастающем порядке, –

вариационным рядом. Числа наблюдений называют ***частотами***, а их отношения к объему выборки

$$\omega_i = \frac{n_i}{n}$$

относительными частотами.

Размах выборки R определяется как разность между самым большим и самым маленьким значениями выборки.

Статистическим распределением выборки называют перечень вариант и соответствующих им частот или относительных частот.

Простой статистический ряд – таблица, состоящая из двух строк, в первой – варианта x_i, во второй – ее частота n_i.

x_i	x_1	x_2	…	x_k
n_i	n_1	n_2	…	n_k

Пример 3.1.1

Записать вариационный и статистический ряд выборки. Найти ее объем и размах. Выборка: 5, 3, 7, 10, 5, 5, 2, 10, 7, 2, 7, 7, 4, 2, 4.

Решение. Объем выборки равен 15 (всего задано 15 чисел).

Размах $R = 10 - 2 = 8$ ($x_{\max} = 10$, $x_{\min} = 2$).

Вариационный ряд: 2, 2, 2, 3, 4, 4, 5, 5, 5, 7, 7, 7, 7, 10, 10.

Статистический ряд

x_i	2	3	4	5	7	10
n_i	3	1	2	3	4	2

Статистическое распределение можно задать также в виде последовательности интервалов и соответствующих им частот (в качестве частоты, соответствующей интервалу, принимают сумму частот, попавших в этот интервал).

Сложный статистический ряд или ***группированная выборка*** – таблица, состоящая из двух строк, в первой – интервалы вариант $x_i - x_{i+1}$, – во второй – частота появления вариант в данном интервале n_i.

$x_i - x_{i+1}$	$x_1 - x_2$	$x_2 - x_3$	…	$x_k - x_{k+1}$
n_i	n_1	n_2	…	n_k

Если объем выборки больше 30 вариант, то вместо простого статистического ряда или вариационного нужно составить группированную выборку. Для этого вычисляют размах выборки R – разность между наибольшим и наименьшим выборочным значением ($R = X_n - X_1$). Затем находят длину интервала, на которые будет поделена вся выборка:

$$h = \frac{R}{1 + 3{,}2 \cdot \lg n}.$$

Записывают их в первую строчку, а затем считают количество вариант, которые попадают в полученные интервалы.

Пример 3.1.2

Сгруппируйте выборку элементов: 13, 19, 20, 21, 18, 19, 22, 23, 25, 26, 21, 22, 23, 24, 18, 19, 30, 18, 20, 21, 23, 24, 25, 30, 12, 24, 27, 28, 24, 30.

Решение. $X_{\min} = 12$, $X_{\max} = 30$, размах выборки $R = 30 - 12 = 18$.

Найдем длину интервала, на которые будет поделена вся выборка.

$$h = \frac{R}{1 + 3{,}2 \cdot lgn} = \frac{18}{1 + 3{,}2 \cdot lg30} = \frac{18}{5{,}73} = 3{,}14.$$

За длину интервала возьмем 3.

$x_i - x_{i+1}$	[11,5–15,5)	[15,5–18,5)	[18,5–21,5)	[21,5–24,5)	[24,5–27,5)	[27,5–30,5]
n_i	2	3	8	9	4	4

Заметим, что в теории вероятностей под распределением понимают соответствие между возможными значениями случайной величины и их вероятностями, а в математической статистике – соответствие между наблюдаемыми вариантами и их частотами, или относительными частотами.

3. Полигон и гистограмма

Для наглядности строят различные графики статистического распределения и, в частности, полигон и гистограмму.

Полигоном частот называют ломаную, отрезки которой соединяют точки с координатами (x_i; n_i) на координатной плоскости, где на оси абсцисс откладывают варианты х, а на оси ординат – соответствующие им частоты.

Полигоном относительных частот называют ломаную, отрезки которой соединяют точки (x_i; $\omega_i = \frac{n_i}{n}$) на координатной плоскости, где на оси абсцисс откладывают варианты x, а на оси ординат – соответствующие им относительные частоты.

Пример 3.1.3

Построить полигон частот для статистического распределения:

Варианты x_i	2	6	10
Частоты n_i	12	30	18

Решение. В случае группированного распределения целесообразно строить гистограмму.

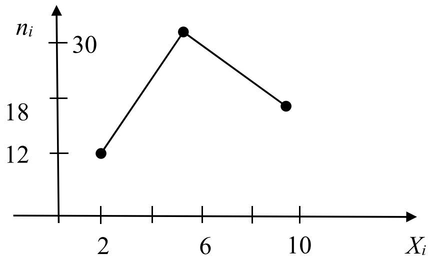


Рис. 6

Гистограммой частот называют ступенчатую фигуру на координатной плоскости, состоящую из прямоугольников, основаниями которых служат частичные интервалы длиною h_i, а высоты равны отношению $\frac{\omega_i}{h}$ (плотность частоты). Совокупность таких прямоугольников образует ступенчатую фигуру, площадь которой равна 1.

Пример 3.1.4

Постройте гистограмму статистического распределения:

Интервал	[5; 10)	[10; 15)	[15; 20)	[20; 25)	[25; 30)
Частота	4	6	16	10	4

Решение. Для построения гистограммы сделаем таблицу.

Частичный интервал длиною $h = 5$	Частоты n_i	Относительная частота $\omega_i = \frac{n_i}{n}$	Плотность частоты $\frac{\omega_i}{h}$,
5–10	4	0,1	0,02
10–15	6	0,15	0,03
15–20	16	0,4	0,08
20–25	10	0,25	0,05
25–30	4	0,1	0,02
$\Sigma n_i = n$	40	1	

Гистограмма имеет вид (рис. 7).

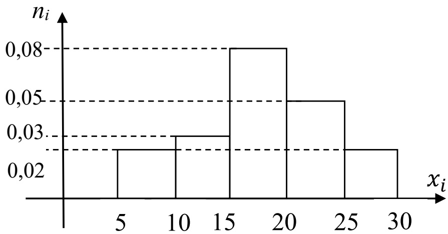


Рис. 7

4. Эмпирическая функция распределения

Пусть известно статистическое распределение частот количественного признака X.

Эмпирической функцией распределения (функцией распределения выборки) называют функцию $F(x)$, определяющую для каждого значения x относительную частоту события $X < x$.

Итак, по определению $F(x) = n_x/n$, где n_x – число вариант, меньших x; n – объем выборки.

Свойства:

1) значения эмпирической функции принадлежат отрезку [0, 1];
2) $F(x)$ – неубывающая функция;
3) если x_1 – наименьшая варианта, то $F(x) = 0$ при $x < x_1$, x_K – наибольшая варианта, то $F(x) = 1$ при $x > x_K$.

Пример 3.1.5

Построить эмпирическую функцию по данному распределению выборки:

Варианты X	2	6	10
Частоты	12	18	30

Решение. Найдем объем выборки: 12 + 18 + 30 = 60. Наименьшая варианта равна 2, следовательно, $F(x) = 0$, при $x \le 2$.

Значение $X < 6$, а именно $x_1 = 2$, наблюдалось 12 раз, следовательно, $F(x) = 12/60 = 0{,}2$ при $2 < x \le 6$.

Значение $X < 10$, именно $x_1 = 2$, $x_2 = 6$, наблюдалось 12 + 18 = 30, следовательно, $F(x) = 30/60 = 0{,}5$ при $6 < x \le 10$.

Наибольшая варианта равна 10, следовательно, $F(x) = 1$ при $x > 10$.

Искомая эмпирическая функция имеет вид:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 2 \\ 0{,}2, & 2 < x \le 6 \\ 0{,}5, & 6 < x \le 10 \\ 1, & x > 10 \end{cases}$$

Строим ее график.

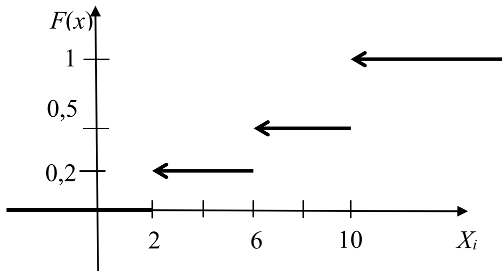


Рис. 8

5. Числовые характеристики распределений

Любой параметр $\overline{\theta}$, найденный по выборке, извлеченный из генеральной совокупности X, является оценкой характеристики θ этой совокупности, если:

1) $M(\overline{\theta}) = \theta$;

2) $P(|\overline{\theta} - \theta| < \varepsilon)) = 1$;

3) $D(\overline{\theta})$ является минимальной.

Параметр $\overline{\theta}$, удовлетворяющий вышеуказанным условиям, является *несмещенной, состоятельной* и *эффективной* оценкой характеристики θ генеральной совокупности *X*.

Характеристики случайной величины, построенные на основании выборочных данных, называются ***выборочными или точечными оценками***.

Выборочное среднее $\bar{x}$ называют среднее арифметическое значение признака выборочной совокупности.

Пусть задан статистический ряд , где $n = \sum_{i=1}^{k} n_i$ – объем выборки

x_i	x_1	x_2	…	x_k
n_i	n_1	n_2	…	n_k

$$x_{\text{в}} = \bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} n_i \cdot x_i.$$

Если же задана группированная выборка

$x_i - x_{i+1}$	$x_1 - x_2$	$x_2 - x_3$	…	$x_k - x_{k+1}$
n_i	n_1	n_2	…	n_k

в ней $x_i' = \frac{x_i + x_{i+1}}{2}$ – середина интервала, то формула имеет вид:

$$x_{\text{в}} = \bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} n_i \cdot x_i'.$$

Выборочное среднее является *несмещенной, состоятельной* и *эффективной* оценкой для математического ожидания генеральной совокупности.

Для того чтобы охарактеризовать рассеяние наблюдаемых значений количественного признака выборки вокруг своего среднего значения, вводят характеристику – исправленную дисперсию .

Выборочной статистической дисперсией случайной величины *X* называется число

$$D_{\text{в}}(X) = S^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} (x_i - \bar{x})^2 \cdot n_i$$

или для группированного распределения

$$D_в(X) = S^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k}(x_i' - \bar{x})^2 \cdot n_i.$$

Выборочная дисперсия является *смещенной оценкой* генеральной совокупности.

Величина $\sigma_в(x) = S = \sqrt{D_в(X)}$ называется средним квадратическим отклонением.

В качестве несмещенной оценки дисперсии генеральной совокупности принимается исправленная дисперсия S_0^2.

$$S_0^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{k}(x_i - \bar{x})^2 \cdot n_i$$

или для группированного распределения

$$S_0^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{k}(x_i' - \bar{x})^2 \cdot n_i.$$

Величина S_0 называется исправленным средним квадратическим отклонением.

Связь смещенных и несмещенных оценок дисперсии имеет вид

$$S_0^2 = \frac{n}{n-1}S^2, \qquad S^2 = \frac{n-1}{n}S_0^2.$$

Мода $M_о$ – варианта, которая имеет наибольшую частоту для простого статистического ряда, для группированного распределения – это середина интервала, который имеет наибольшую частоту.

Медианой $M_е$ вариационного ряда называют варианту, которая делит вариационный ряд на две части, равные по числу вариант. Если число вариант нечетно, то медиана – это середина ряда, если четно, то надо найти среднее арифметическое между двумя вариантами, стоящими в центре.

Если в каждом из наблюдений рассматривают одновременно два признака X и Y,

x_i	x_1	x_2	…	x_k
n_i	n_1	n_2	…	n_k

y_i	y_1	y_2	…	y_k
n_i	n_1	n_2	…	n_k

то для характеристики их связи вводится *момент корреляции*

$$s_{xy} = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{k}(x_i - \bar{x}) \cdot (y_i - \bar{y}) \cdot n_i.$$

Коэффициентом корреляции называют величину

$$r_{xy} = \frac{S_{xy}}{S_x S_y}.$$

Замечание. При больших объемах выборок для группированного распределения S_0 и S принимают равными.

При изучении распределений, отличных от нормального, возникает необходимость количественно оценить это различие. С этой целью вводят специальные характеристики, в частности асимметрию и эксцесс. Для нормального распределения эти характеристики равны нулю. Поэтому если для изучаемого распределения асимметрия и эксцесс имеют небольшие значения, то можно предположить близость этого распределения к нормальному. Наоборот, большие значения асимметрии и эксцесса указывают на значительное отклонение от нормального.

Центральный момент порядка *r* находится по формуле

$$\mu_r = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k}(x_i - \bar{x})^r \cdot n_i$$

или для группированного распределения

$$\mu_r = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k}(x_i' - \bar{x})^r \cdot n_i.$$

Коэффициент асимметрии характеризует скошенность распределения по отношению к математическому ожиданию и находится по формуле

$$A_3 = \frac{\mu_3}{S^3}.$$

Асимметрия положительна, если «длинная часть» кривой распределения расположена справа от математического ожидания; асимметрия отрицательна, если «длинная часть» кривой расположена слева от математического ожидания.

Для оценки «крутости», т. е. большего или меньшего подъема кривой теоретического распределения по сравнению с нормальной кривой, пользуются характеристикой – эксцессом, который находится по формуле

$$E_4 = \frac{\mu_4}{S^4} - 3.$$

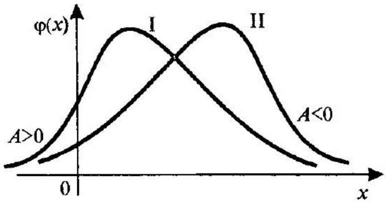


Рис. 9

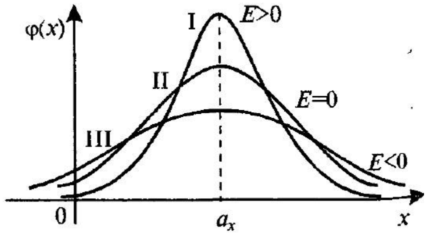


Рис. 10

Кривые, более островершинные, чем нормальная, обладают положительным эксцессом, более плосковершинные – отрицательным эксцессом.

Пример 3.1.6

По выборке признака *X*, заданной таблицей, найти выборочное среднее, дисперсию и среднее квадратическое отклонение.

x_i	45	50	55	60	65	70	75
n_i	4	6	10	40	20	12	8

Решение. Объем выборки $n = \sum_{i=1}^{7} n_i = 100$.

Находим выборочное среднее по формуле

$$x_\text{в} = \bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} n_i \cdot x_i.$$

$$\bar{x} = \frac{45\cdot 4 + 50\cdot 6 + 55\cdot 10 + 60\cdot 40 + 65\cdot 20 + 70\cdot 12 + 75\cdot 8}{100} = 61{,}7.$$

Для вычисления исправленной дисперсии применим формулу

$$S_0^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{k}(x_i - \bar{x})^2 \cdot n_i.$$

$$S_0^2 = \frac{1}{99}((45-61{,}7)^2\cdot 4 + (50-61{,}7)^2\cdot 6 + (55-61{,}7)^2\cdot 10 +$$

$$+ (60-61{,}7)^2\cdot 40 + (65-61{,}7)^2\cdot 20 + (70-61{,}7)^2\cdot 12 +$$

$$+ (75-61{,}7)^2\cdot 8) = \frac{1}{99}(1115{,}56 + 821{,}34 + 448{,}9 + 115{,}6 + 217{,}8 +$$

$$+ 826{,}68 + 1415{,}12) = 50{,}11.$$

Для вычисления исправленного среднего квадратического применим формулу $S_0 = \sqrt{S_0^2} = \sqrt{50{,}11} = 7{,}08$.

Получили несмещенные оценки. Соответственные смещенные оценки равны:

$$S^2 = \frac{n-1}{n} S_0^2 = \frac{99}{100} \cdot 50{,}11 = 49{,}61$$

$$S = \sqrt{S^2} = \sqrt{49{,}61} = 7{,}04.$$

Пример 3.1.7

В результате эксперимента получены данные, записанные в виде выборки и представленные в таблице.

44,8	46,2	45,6	44,0	46,4	45,2	46,7	45,4	45,3	46,1
44,3	45,3	45,6	46,7	44,5	46,0	45,7	45,0	46,4	45,9
44,4	45,4	46,1	43,4	46,5	45,9	43,9	45,7	47,1	44,9
43,8	45,6	45,2	46,4	44,2	46,5	45,7	44,7	46,0	45,8
44,3	45,5	46,7	44,9	46,2	46,7	44,6	46,0	45,4	45,0
45,4	45,3	44,1	46,6	44,8	45,6	43,7	46,8	46,1	45,2
44,5	45,4	45,1	46,2	44,2	46,4	45,7	43,9	47,2	45,0
43,9	45,6	44,9	44,5	46,2	46,7	44,3	46,1	47,7	45,8
45,6	45,2	44,2	46,0	44,7	46,5	43,5	45,4	47,1	44,0
46,2	44,2	45,5	46,0	45,7	46,4	44,6	47,0	45,2	46,9

Требуется:

1. Произвести группировку данных и найти выборочную среднюю, дисперсию, среднее квадратическое отклонение.

2. Найти коэффициент асимметрии и эксцесс и сделать вывод о виде распределения.

Решение.

1. $X_{\min} = 43{,}4$, $X_{\max} = 47{,}7$ размах выборки $R = 47{,}7 - 43{,}4 = 4{,}3$.

Найдем длину интервала, на которые будет поделена вся выборка.

$$h = \frac{R}{1 + 3{,}2 \cdot \lg n} = \frac{4{,}3}{1 + 3{,}2 \cdot \lg 100} = \frac{4{,}3}{7{,}4} = 0{,}58.$$

За длину интервала возьмем 0,6.

В качестве границы первого интервала выберем значение $X_{\min} = 43{,}4$.

№	$[x_i - x_{i+1})$	Середина интервала $x'_i = \frac{x_i + x_{i+1}}{2}$	n_i	$x'_i \cdot n_i$	$(x'_i - \bar{x})^2$	$(x'_i - \bar{x})^2 \cdot n_i$
1	43,4–44,0	43,7	7	305,9	3,3856	23,6992
2	44,0–44,6	44,3	13	575,9	1,5376	19,9888
3	44,6–45,2	44,9	13	583,7	0,4096	5,3248
4	45,2–45,8	45,5	27	1228,5	0,0016	0,0432
5	45,8–46,4	46,1	19	875,9	0,3136	5,9584
6	46,4–47,0	46,7	16	747,2	1,3456	21,5296
7	47,0–47,6	47,3	4	189,2	3,0976	12,3904
8	47,6–48,2	47,9	1	47,9	5,5696	5,5696
			100	4554,2		94,504

Выборочное среднее находим по формуле

$$x_{\text{в}} = \bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} n_i \cdot x'_i.$$

Получаем

$$\bar{x} = \frac{1}{100} \cdot 4554{,}2 = 45{,}54.$$

Выборочная дисперсия находится по формуле S_0^2.

$$S_0^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{k} (x'_i - \bar{x})^2 \cdot n_i.$$

Получаем

$$S_0^2 = \frac{1}{99} \cdot 94{,}504 = 0{,}95.$$

Среднее квадратическое отклонение равно

$$S_0 = \sqrt{S_0^2} = \sqrt{0{,}95} = 0{,}97.$$

2. Для нахождения асимметрии и эксцесса составим расчетную таблицу. Коэффициент асимметрии равен

$$\text{A} = \frac{\mu_3}{S^3} = \frac{\frac{1}{100}(-8{,}53)}{0{,}857} = \frac{1}{100} \cdot (-9{,}95) = -0{,}0995.$$

Коэффициент эксцесса равен

$$E = \frac{\mu_4}{S^4} - 3 = \frac{\frac{1}{100} \cdot 213{,}39}{0{,}814} - 3 = -0{,}378.$$

Полученные коэффициенты стремятся к нулю, поэтому представленная выборка близка к нормальному распределению.

№	$[x_i - x_{i+1})$	Середина интервала $x_i' = \frac{x_i + x_{i+1}}{2}$	n_i	$x_i' - \bar{x}$	$(x_i' - \bar{x})^3 \cdot n_i$	$(x_i' - \bar{x})^4 \cdot n_i$
1	43,4–44,0	43,7	7	–1,84	–43,6065	80,23601
2	44,0–44,6	44,3	13	–1,24	–24,7861	30,73478
3	44,6–45,2	44,9	13	–0,64	–3,40787	2,181038
4	45,2–45,8	45,5	27	–0,04	–0,00173	6,91E-05
5	45,8–46,4	46,1	19	0,56	3,336704	1,868554
6	46,4–47,0	46,7	16	1,16	24,97434	28,97023
7	47,0–47,6	47,3	4	1,76	21,8071	38,3805
8	47,6–48,2	47,9	1	2,36	13,14426	31,02044
			100		–8,53984	213,3916

Методические указания по выполнению самостоятельной работы студентов

Для выполнения предложенных заданий самостоятельной работы следует изучить представленный теоретический материал, разобрать предложенные решения типовых примеров и изучить рекомендуемую литературу.

Если студент испытывает затруднения в освоении теоретического или практического материала, то он может получить устную или письменную консультацию у ведущего преподавателя.

Задания выполнять в соответствии с предлагаемыми вариантами.

Номер варианта находится в таблице по первой букве фамилии студента.

Буква	А, О, Х	В, Ш, У	Д, Р, Щ	Е, П	Г, Ж, И	К, Ф, Э	Л, Ч, Ю	Б, М, Я	Н, Т	С, Ц, З
№ вар.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

Задача 1

В результате эксперимента получены данные, записанные в виде выборки. Требуется:

1. Построить простой статистический ряд распределения частот и полигон относительных частот.

2. Вариационный ряд.

3. Найти выборочную среднюю, исправленную дисперсию, среднее квадратическое отклонение.

4. Записать эмпирическую функцию распределения и построить ее график.

№ варианта	Выборка	№ варианта	Выборка
1	0, 1, 1, 3, 1, 2, 2, 0, 1, 0	6	–1, 1, 0, 1, 1, 2, –1, 1, 2, 1
2	1, 5, 1, 2, 1, 3, 2, 3, 1, 2	7	9, 5, 5, 7, 5, 7, 3, 5, 9, 7
3	10, 8, 10, 11, 9, 10, 8, 9, 10, 10	8	10, 20, 20, 5, 15, 20, 5, 10, 20, 5
4	50, 45, 45, 55, 45, 50, 40, 45, 50, 45	9	15, 12, 8, 15, 10, 15, 8, 12, 15, 12
5	20, 22, 20, 24, 20, 22, 20, 20, 25, 22	10	10, 10, 12, 13, 15, 16, 16, 17, 10, 12

Задача 2

В результате эксперимента получены данные, записанные в виде выборки. Требуется:

1. Произвести группировку данных и построить гистограмму относительных частот.

2. Найти выборочную среднюю, дисперсию, среднее квадратическое отклонение.

3. Найти коэффициент асимметрии и эксцесс и сделать вывод о виде распределения.

Вариант 1

17,1	21,4	15,9	19,1	22,4	20,7	17,9	18,6	21,8	16,1
19,1	20,5	14,2	16,9	17,8	18,1	19,1	15,8	18,8	17,2
16,2	17,3	22,5	19,9	21,1	15,1	17,7	19,8	14,9	20,5
17,5	18,5	15,7	14,0	18,6	21,2	16,8	19,3	17,8	19,2
18,8	14,3	17,1	19,5	16,3	20,3	17,9	23,0	17,2	15,2
15,6	17,4	21,3	22,1	20,1	14,5	19,3	18,4	16,7	18,2
16,4	18,7	14,3	18,2	19,1	15,3	21,5	17,2	22,6	20,4
22,8	17,5	20,2	15,5	21,6	18,1	20,5	14,0	18,9	16,5
20,8	16,6	18,3	21,7	17,4	23,0	21,1	19,8	15,4	18,1
18,9	14,7	19,5	20,9	15,8	20,2	21,8	18,2	21,2	20,1

Вариант 2

16	17	21	14	19	18	15	18	20	16
19	18	22	18	16	18	19	21	14	16
21	14	18	15	18	17	22	20	19	20
17	19	1	18	14	18	19	21	15	17
22	17	22	21	15	21	16	14	20	16
17	21	14	21	16	18	17	19	22	19
22	17	16	20	15	18	18	15	17	16
19	14	19	17	15	17	18	14	21	19
15	20	17	20	22	18	15	21	20	15
20	15	19	18	20	23	18	16	18	20

Вариант 3

189	207	213	208	186	210	198	219	231	227
202	211	202	236	227	220	210	183	213	190
197	227	187	226	213	191	209	196	202	235
211	214	220	195	182	228	202	207	192	226
193	203	232	202	215	1195	220	233	214	185
234	215	196	220	203	235	225	221	193	215
204	187	217	193	216	205	197	203	229	204
225	216	233	223	208	204	207	182	216	191
210	190	207	205	232	222	198	217	211	201
185	217	225	201	208	211	189	205	207	199

Вариант 4

9,4	7,9	0,3	6,8	4,2	11,9	7,8	1,7	5,1	8,8
8,7	11,1	7,7	1,8	5,5	10,5	4,3	3,8	1,4	11,2
1,1	7,3	3,7	4,4	11,8	8,6	1,9	5,6	10,1	8,4
10,0	11,36	5,2	2,1	5,7	4,8	7,4	0,8	4,7	3,6
8,3	7,6	0,7	7,3	3,4	11,4	5,7	9,9	2,2	7,2
2,3	4,7	9,7	11,3	5,8	4,9	3,3	0,5	7,5	4,6
5,0	0,4	8,9	7,1	9,6	11,5	5,9	9,0	5,3	2,4
9,5	5,9	1,0	9,1	2,5	6,0	8,2	3,2	10,9	6,1
10,2	2,6	4,5	3,1	6,2	11,7	6,3	0,2	7,0	9,2
1,2	6,4	11,9	6,9	8,1	6,5	2,9	6,2	4,4	10,3

Вариант 5

1,6	4,4	10,9	6,4	4,0	2,8	5,2	1,2	7,6	3,4
2,9	5,3	1,7	7,7	6,9	10,1	5,4	4,1	8,8	6,5
6,6	4,2	5,5	0,5	8,9	4,5	1,8	5,6	7,8	3,0
1,9	10,2	7,9	2,5	5,7	3,1	6,7	4,3	0,6	9,0
6,8	3,2	4,4	9,1	10,3	6,0	7,9	6,9	8,0	2,0
7,0	10,7	8,1	2,1	5,8	6,4	0,3	4,5	9,2	3,3
7,6	9,3	3,4	4,6	5,0	3,8	5,9	8,2	2,2	7,1
2,3	0,8	7,2	8,3	11,1	6,5	3,5	9,4	10,8	4,7
4,8	6,1	3,6	9,5	8,4	2,4	6,2	7,3	5,7	0,9
7,4	8,5	5,8	1,1	5,9	4,9	3,7	9,6	2,6	6,1

Вариант 6

20	26	32	34	26	28	22	30	17	24
30	28	18	28	24	26	34	28	22	20
34	24	28	22	32	17	22	24	26	30
30	22	26	20	28	24	30	32	28	18
20	30	17	35	32	28	22	32	24	30
34	26	24	24	22	30	35	26	20	17
28	22	36	28	20	26	28	32	24	32
20	26	30	30	32	17	22	23	35	26
28	35	32	24	26	24	26	28	30	24
18	24	26	22	35	30	26	24	26	28

Вариант 7

57	46	33	49	29	50	38	41	27	34
37	49	51	26	55	41	59	43	46	30
31	43	58	41	35	47	33	45	49	37
47	34	54	39	60	49	25	50	31	53
38	41	30	51	37	55	47	43	35	42
35	46	27	45	41	34	50	29	51	39
42	59	43	31	38	58	54	37	26	43
29	42	33	41	24	39	53	45	33	51
45	25	54	50	37	30	41	60	42	46
38	53	34	47	35	49	57	39	55	31

Вариант 8

37	32	43	31	44	38	40	31	28	43
49	44	47	29	51	25	43	38	41	32
38	24	49	40	32	34	31	28	37	46
41	35	43	25	37	46	38	24	41	50
38	29	41	32	34	49	44	37	31	47
50	34	25	37	40	32	35	28	44	43
46	37	41	35	29	43	38	31	26	34
49	32	46	26	38	35	40	51	37	46
37	25	40	34	24	44	32	28	34	38
44	34	29	47	37	49	43	35	47	50

Вариант 9

70	95	75	85	60	77	55	80	63	67
90	78	57	76	84	82	75	73	68	62
62	81	77	72	97	68	85	92	56	71
73	78	98	63	83	85	70	66	90	91
86	68	55	93	71	96	77	86	81	72
82	62	70	78	67	87	91	78	99	87
91	58	81	97	75	83	71	61	66	76
73	85	65	90	86	61	54	78	75	93
87	58	72	92	66	98	65	76	81	63
95	83	65	57	80	87	61	56	92	71

Вариант 10

88	56	100	60	116	74	36	143	114	70
72	75	30	76	89	53	117	90	135	103
35	128	71	86	43	76	1	113	34	99
62	84	50	69	120	91	102	47	119	83
33	76	91	37	85	17	85	63	121	74
46	85	63	104	77	92	54	78	42	105
85	79	49	80	93	32	106	91	64	79
73	19	80	65	107	123	51	94	82	108
52	83	124	81	96	82	109	20	95	68
66	41	82	98	111	67	125	98	112	58

Контрольные вопросы

1. При каком распределении строят полигон, а когда гистограмму?
2. Чем отличается вариационный ряд от статистического ряда?
3. Что такое генеральная совокупность и выборка?
4. Что является несмещённой, состоятельной и эффективной оценкой для математического ожидания генеральной совокупности и как её найти?
5. Что является смещенной и несмещенной оценкой генеральной совокупности?

Рекомендуемая литература

1. Алибеков, И. Ю. Теория вероятностей и математическая статистика в среде MATLAB : учеб. пособие / И. Ю. Алибеков. – Изд. 2-е, стер. – Санкт-Петербург [и др.] : Лань, 2021. – 181 с. – URL: e.lanbook.com/book/152661 (дата обращения: 27.10.2021). – ISBN 978-5-8114-6865-2.
2. Гмурман, В. Е. Теория вероятностей и математическая статистика : учеб. пособие для вузов / В. Е. Гмурман. – Изд. 11-е, стер. – Москва : Высшая школа, 2005. – 479 с. – ISBN 5-06-004214-6.
3. Гриднева, И. В. Теория вероятностей и математическая статистика : учеб. пособие / И. В. Гриднева, Л. И. Федулова, В. П. Шацкий ; Воронежский государственный аграрный университет имени Императора Петра I. – Воронеж : Воронежский ГАУ, 2017. – 165 с. – URL: www.iprbookshop.ru/72762.html (дата обращения: 27.10.2021).

Тема 3.2. Доверительные интервалы

Форма проведения: практическое занятие.

Вопросы для обсуждения

1. Интервальные оценки для параметров.
2. Доверительные интервалы для параметров нормального распределения.

Методические указания по проведению занятия

Занятие проводится в виде практической работы, в процессе которой студентам необходимо уточнить базовые понятия и основные теоретические сведения по теме занятия, выполнить практическое задание по вариантам под руководством преподавателя, ответить на контрольные вопросы по теме.

Методические материалы к занятию

1. Интервальные оценки для параметров

Пусть изучается случайная величина X с законом распределения, зависящим от одного или нескольких параметров. И пусть требуется по выборке X_1, X_2, ..., X_n, полученной в результате n наблюдений (опытов), оценить неизвестный параметр θ.

Напомним, что $X_1, X_2, ..., X_n$ – случайные величины: X_1 – результат первого наблюдения, X_2 – результат второго наблюдения и т. д., причем случайные величины X_i, где $i = 1, 2, ..., n$ имеют такое же распределение, что и случайная величина X; конкретная выборка x_1, x_2, ..., x_n – это значения (реализация) независимых величин $X_1, X_2, ..., X_n$.

Статистической оценкой $\widetilde{\theta_n}$ (далее – ***оценкой*** $\tilde{\theta}$) параметра θ теоретического распределения называют его приближенное значение, зависящее от данных выбора. Оценка $\tilde{\theta}$ есть значение некоторой функции результатов наблюдений над случайной величиной, то есть $\tilde{\theta} = \tilde{\theta}(X_1, X_2, ..., X_n)$.

Функцию результатов наблюдений (то есть функцию выборки) называют ***статистикой***. Можно сказать, что оценка $\tilde{\theta}$ параметра θ

есть статистика, которая в определённом смысле близка к истинному значению θ.

Оценка $\tilde{\theta}$ является случайной величиной, так как является функцией независимых случайных величин $X_1, X_2, \ldots, X_n$; если произвести другую выборку, то функция примет другое значение.

Если число опытов (наблюдений) невелико, то замена неизвестного параметра θ его оценкой $\tilde{\theta}$, например математического ожидания средним арифметическим, приводит к ошибке. Это ошибка в среднем тем больше, чем меньше число опытов.

К оценке любого параметра предъявляется ряд требований, которым она должна удовлетворять, чтобы быть «близкой» к истинному значению параметра, то есть быть в каком-то смысле «доброкачественной» оценкой.

Качество оценки определяют, проверяя, обладает ли она свойствами несмещенности, состоятельности, эффективности.

Оценка $\tilde{\theta}$ параметра θ называется ***несмещенной***, если $M\tilde{\theta} = \tilde{\theta}$.

Если $M\tilde{\theta} \approx \tilde{\theta}$, то оценка $\tilde{\theta}$ называется ***смещенной***.

Чтобы оценка $\tilde{\theta}$ не давала систематической ошибки (ошибки одного знака) в сторону завышения ($M\tilde{\theta} > \tilde{\theta}$) или занижения ($M\tilde{\theta} < \tilde{\theta}$), надо потребовать, чтобы «математическое ожидание оценки было равно оцениваемому параметру».

Если $M\tilde{\theta} \to \tilde{\theta}$, то оценка $\widetilde{\theta_n}$ называется ***асимптотически несмещенной***.

Требование несмещенности особенно важно при малом числе наблюдений (опытов).

Оценка $\widetilde{\theta_n}$ параметра θ называется состоятельной, если она сходится по вероятности к оцениваемому параметру: $M\tilde{\theta} \xrightarrow[n \to \infty]{p} \tilde{\theta}$. Это означает, что с увеличением объема выборки мы всё ближе приближаемся к истинному значению параметра θ, то есть практически достоверно $\tilde{\theta} \approx \theta$.

Свойство состоятельности обязательно для любого правила оценивания, несостоятельные оценки не используются.

Несмещенная оценка $\widetilde{\theta_n}$ параметра θ называется эффективной, если она имеет наименьшую дисперсию среди всех возможных несмещенных оценок параметра θ, то есть оценка $\widetilde{\theta_n}$ эффективна, если ее дисперсия минимальна.

Отметим, что на практике не всегда удается удовлетворить всем перечисленным требованиям (несмещенность, состоятельность, эффективность), и поэтому приходится довольствоваться оценками, не обладающими сразу всеми тремя свойствами. Все же эти свойства, как правило, выделяют оценку однозначно.

2. Доверительные интервалы для параметров нормального распределения

Для выборок небольшого объема вопрос о точности оценок очень существенен, так как между θ и $\tilde{\theta}$ может быть большое расхождение в этом случае. Поэтому возникает задача о приближении параметра θ интервалом $(\tilde{\theta}_1, \tilde{\theta}_2)$.

Оценка неизвестного параметра называется ***интервальной***, если она определяется двумя числами – концами интервала.

Задачу интервального оценивания можно сформулировать так: по данным выборки построить числовой интервал $(\tilde{\theta}_1, \tilde{\theta}_2)$, относительно которого с заранее выбранной вероятностью γ можно сказать, что внутри этого интервала находится точное значение оцениваемого параметра.

Интервал $(\tilde{\theta}_1, \tilde{\theta}_2)$, накрывающий с вероятностью γ истинное значение параметра θ, называется ***доверительным интервалом***, а вероятность γ – ***надежностью оценки*** или ***доверительной вероятностью***.

Очень часто (но не всегда) доверительный интервал выбирается симметричным относительно несмещенной точечной оценки $\tilde{\theta}$, то есть выбирается интервал вида $(\tilde{\theta} - \varepsilon, \tilde{\theta} + \varepsilon)$, где число $\varepsilon > 0$ характеризует точность оценки: чем меньше разность $|\theta - \tilde{\theta}|$, тем точнее оценка.

Величина γ выбирается заранее, ее выбор зависит от конкретно решаемой задачи. Так, степень доверия авиапассажира к надежности самолета, очевидно, должна быть выше степени доверия покупателя к надежности телевизора. Надежность γ принято выбирать равной 0,9; 0,99; 0,999. Тогда практически достоверно нахождение параметра θ в достоверном интервале $(\tilde{\theta} - \varepsilon, \tilde{\theta} + \varepsilon)$.

Построим доверительные интервалы для параметров нормального распределения, то есть когда выборка производится из генеральной совокупности, имеющей нормальное распределение с параметрами a и σ^2.

<u>Доверительный интервал для математического ожидания при известной дисперсии</u>

Пусть случайная величина $X \sim N(a, \sigma)$; σ – известна, доверительная вероятность (надежность) γ – задана.

Пусть $x_1, x_2, \ldots, x_n$ – выборка, полученная в результате проведения n независимых наблюдений за случайной величиной X. Чтобы подчеркнуть случайный характер величин, перепишем их в виде X_1, $X_2, \ldots, X_n$, то есть под X_i будем понимать значение случайной величины X в i-м опыте. Случайные величины $X_1, X_2, \ldots, X_n$ независимы, закон распределения любой из них совпадает с законом распределения случайной величины X (то есть $X_i \sim N(a, \sigma)$). А это значит, что $MX_1 = MX_2 = \ldots = MX_n = MX = a$, $DX_1 = DX_2 = \ldots = DX_n = DX$. Выборочное среднее $\bar{X}_B = \bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ также будет распределено по нормальному закону. Параметры распределения $\bar{X}$ таковы: $M(\bar{X}) = a, D(\bar{X}) = \frac{\sigma^2}{n}$. Таким образом, $\bar{X} \sim N\left(a, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$. Следовательно, пользуясь формулой, $p\{|\bar{X} - a| < l\} = 2\Phi_0\left(\frac{l}{\sigma}\right)$, можно записать:

$$\gamma = p\{|\bar{X} - a| < \varepsilon\} = 2\Phi_0\left(\frac{\varepsilon \cdot \sqrt{n}}{\sigma}\right) = 2\Phi_0(t),$$

где $t = \frac{\varepsilon \cdot \sqrt{n}}{\sigma}$.

Из последнего равенства находим $\varepsilon = \frac{t \cdot \sigma}{\sqrt{n}}$.

В соответствии с определением доверительного интервала получаем, что доверительный интервал для $a = MX$ есть $\left(\bar{X} - t \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{X} + t \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$, где t определяется из равенства $\Phi_0(t) = \frac{\gamma}{2}$ по таблице функции Лапласа.

Из равенства $\varepsilon = \frac{t \cdot \sigma}{\sqrt{n}}$ следует, что с возрастанием объема выборки n число ε убывает, и значит, точность оценки увеличивается, а увеличение надежности γ влечет уменьшение точности оценки.

Пример 3.2.1

По результатам 100 наблюдений случайной величины X найдены оценки математического ожидания и дисперсии, равные $\overline{X} = 20{,}4$, $s^2 = 3{,}62$. Требуется построить доверительный интервал для математического ожидания последовательно для уровней надежности $\gamma = 0{,}9$, $\gamma = 0{,}99$, $\gamma = 0{,}999$.

Решение. По таблице функции Лапласа находим, что:

– для уровня надежности $\gamma = 0{,}9$ функция $\Phi(1{,}65) = \frac{0{,}9}{2} = 0{,}45$, откуда $t_\gamma = 1{,}65$;

– для уровня надежности $\gamma = 0{,}99$ функция $\Phi(2{,}58) = \frac{0{,}99}{2} = 0{,}495$, откуда $t_\gamma = 2{,}58$;

– для уровня надежности $\gamma = 0{,}999$ функция $\Phi(3{,}28) = \frac{0{,}999}{2} = 0{,}4995$, откуда $t_\gamma = 3{,}28$.

Подставим полученные значения в формулу

$$\overline{X} - t_\gamma \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < MX < \overline{X} + t_\gamma \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}},$$

получим

– для уровня надежности $\gamma = 0{,}9$:

$$20{,}4 - 1{,}65 \cdot \frac{\sqrt{3{,}65}}{\sqrt{100}} < MX < 20{,}4 - 1{,}65 \cdot \frac{\sqrt{3{,}65}}{\sqrt{100}} \Rightarrow 20{,}09 < MX < 20{,}76;$$

– для уровня надежности $\gamma = 0{,}99$:

$$20{,}4 - 2{,}58 \cdot \frac{\sqrt{3{,}65}}{\sqrt{100}} < MX < 20{,}4 - 2{,}58 \cdot \frac{\sqrt{3{,}65}}{\sqrt{100}} \Rightarrow 19{,}91 < MX < 20{,}89;$$

– для уровня надежности $\gamma = 0{,}999$:

$$20{,}4 - 3{,}28 \cdot \frac{\sqrt{3{,}65}}{\sqrt{100}} < MX < 20{,}4 - 3{,}28 \cdot \frac{\sqrt{3{,}65}}{\sqrt{100}} \Rightarrow 19{,}78 < MX < 21{,}01.$$

<u>Доверительный интервал для математического ожидания при неизвестной дисперсии</u>

В случае большого объема выборки (хотя бы несколько десятков) при неизвестных MX и DX выборочное среднее

$$\overline{X} = \frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n} = \frac{X_1}{n} + \frac{X_2}{n} + \cdots + \frac{X_n}{n}$$

представляет собой сумму большого числа одинаково распределённых независимых слагаемых с ограниченной дисперсией. На основании центральной предельной теоремы можно утверждать, что $\overline{X}$

имеет близкий к нормальному закон распределения. Параметры распределения $\bar{X}$ таковы: $M(\bar{X}) = MX = a$, а для дисперсии можно получить несмещенную и состоятельную оценку

$$D(X) \approx s^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \overline{X}\right)^2}{n-1}.$$

Тогда получаем, что доверительный интервал для $a = MX$ имеет вид

$$\left(\overline{X} - t_\gamma \cdot \frac{s}{\sqrt{n}}; \overline{X} + t_\gamma \cdot \frac{s}{\sqrt{n}}\right),$$

где t определяется из равенства $\Phi_0(t) = \frac{\gamma}{2}$ по таблице функции Лапласа.

При небольшом числе наблюдений n оценка дисперсии на основе опытных данных получается грубой и полученная выше формула не решает задачи построения доверительного интервала.

Построим доверительный интервал для малого объема выборки.

Пусть случайная величина $X \sim N(a, \sigma)$; σ – неизвестна, доверительная вероятность (надежность) γ – задана. Найдем такое число ε, чтобы выполнялось соотношение $p\{\bar{X} - \varepsilon < a < \bar{X} - \varepsilon\} = \gamma$ или $p\{|\bar{X} - a| < \varepsilon\} = \gamma$.

Введем случайную величину $T = \frac{\bar{X} - a}{\frac{S}{\sqrt{n}}}$, где S – исправленное среднее квадратическое отклонение случайной величины X, вычисленное по выборке $S = \sqrt{\frac{1}{n-1} \cdot \sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2}$. Случайная величина T имеет распределение Стьюдента с $n - 1$ степенью свободы.

Перейдем в левой части равенства $p\{|\bar{X} - a| < \varepsilon\} = \gamma$ от случайной величины $\bar{X}$ к случайной величине T: $p\left\{\frac{|\bar{X} - a|}{\frac{S}{\sqrt{n}}} < \frac{\varepsilon}{\frac{S}{\sqrt{n}}}\right\} = \gamma$ или $p\left\{|T| < \frac{\varepsilon \cdot \sqrt{n}}{S}\right\} = \gamma$ или $p\{|T| < t_\gamma\} = \gamma$, где $t_\gamma = \frac{\varepsilon \cdot \sqrt{n}}{S}$. Значение t_γ находят в зависимости от доверительной вероятности γ и числа степеней свободы $n - 1$, пользуясь таблицей квантилей распределения Стьюдента (t_γ – квантиль уровня $1 - \gamma$).

Определив значение t_γ, находим значение ε: $\varepsilon = t_\gamma \cdot \frac{S}{\sqrt{n}}$.

Следовательно, равенство $p\{|\bar{X} - a| < \varepsilon\} = \gamma$ примет вид

$$p\left\{\bar{X} - t_\gamma \cdot \frac{S}{\sqrt{n}} < a < \bar{X} + t_\gamma \cdot \frac{S}{\sqrt{n}}\right\} = \gamma.$$

А это значит, что интервал

$$\left(\bar{X} - t_\gamma \cdot \frac{S}{\sqrt{n}}; \bar{X} + t_\gamma \cdot \frac{S}{\sqrt{n}}\right)$$

покрывает $a = MX$ с вероятностью γ, то есть является доверительным интервалом для неизвестного математического ожидания случайной величиной X.

Заметим, формулы построения доверительных интервалов для большого объема выборки и для малого объема выборки похожи по структуре, но параметр определяется по разным таблицам.

Пример 3.2.2

По сгруппированным данным наблюдений случайной величины построить доверительный интервал для ее математического ожидания, соответствующий уровню надежности $\gamma = 0,98$.

Интервалы	(0; 4)	(4; 8)	(8; 12)	(12; 16)	(16; 20)
Число наблюдений (v_i)	12	29	42	21	16

Решение. Представителем каждого интервала можно считать его середину u_i. В данной серии из 120 наблюдений

$$\overline{X} = \frac{\sum_{i=1}^{k} u_i \cdot v_i}{n} = \frac{2 \cdot 12 + 6 \cdot 29 + 10 \cdot 42 + 14 \cdot 21 + 18 \cdot 16}{120} = \frac{1200}{120} = 10.$$

Оценим дисперсию случайной величины:

$$\sigma^2 \approx s^2 = \frac{\sum_{i=1}^{k} \left(u_i - \overline{X}\right)^2 \cdot v_i}{n-1} =$$

$$= \frac{(2-10)^2 \cdot 12 + (6-10)^2 \cdot 29 + (10-10)^2 \cdot 42 + (14-10)^2 \cdot 21 + (18-10)^2 \cdot 16}{120-1}$$

$$= \frac{2592}{119} = 21,78 \;\Rightarrow\; s = \sqrt{21,78} \approx 4,67.$$

Из таблицы функции Лапласа находим, что $\Phi(2,33) = \frac{0,98}{2} = 0,49$, то есть $t_\gamma = 2,33$, поэтому

$$\left(\overline{X} - t_\gamma \cdot \frac{s}{\sqrt{n}}; \overline{X} + t_\gamma \cdot \frac{s}{\sqrt{n}}\right) = \left(10 - 2,33 \cdot \frac{4,67}{\sqrt{120}}; 10 + 2,33 \cdot \frac{4,67}{\sqrt{120}}\right) =$$

$$= (9,01; 10,99).$$

Таким образом, $9,01 < MX < 10,99$.

Пример 3.2.3

Измерения сопротивления резистора дали следующие результаты (в омах):

X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	X_7	X_8	X_9
592	595	594	592	593	597	595	589	590

Известно, что ошибки измерения имеют нормальный закон распределения. Систематическая ошибка отсутствует. Построить доверительный интервал для истинного сопротивления резистора с надёжностью 0,99 в предположении:

1. Дисперсия ошибки измерения известна и равна четырем.
2. Дисперсия ошибки измерения не известна.

Решение. В данной серии из девяти наблюдений

$$\overline{X}=\frac{592+595+594+592+593+597+595+589+590}{9}=\frac{5337}{9}=593.$$

1. $D(X) = 4$. Из таблицы функции Лапласа находим, что $\Phi(2{,}58)=\frac{0{,}99}{2}=0{,}495$, то есть уровню надежности $\gamma = 0{,}99$ соответствует значение $t = 2{,}58$. Тогда

$$\left(\overline{X}-t\cdot\sqrt{\frac{D(X)}{n}};\overline{X}+t\cdot\sqrt{\frac{D(X)}{n}}\right)=\left(593-2{,}58\cdot\sqrt{\frac{4}{9}};593+2{,}58\cdot\sqrt{\frac{4}{9}}\right)=$$

$$=(593-1{,}72;593+1{,}72)=(591{,}28;594{,}72).$$

Таким образом, $591{,}28 < MX < 594{,}72$.

2. Дисперсия не известна, оценим ее на основе опытных данных:

$$\sigma^2\approx s^2=\frac{\sum_{i=1}^{k}\left(u_i-\overline{X}\right)^2\cdot v_i}{n-1}=$$

$$=\frac{(592-593)^2+(595-593)^2+\cdots+(589-593)^2+(590-593)^2}{9-1}=\frac{52}{8}$$

$$=6{,}5\Rightarrow\ s=\sqrt{6{,}5}\approx 2{,}55.$$

Объем выборки мал, поэтому параметр t_γ определяем по таблице распределения Стьюдента для $n - 1 = 9 - 1 = 8$ степеней свободы и заданной вероятности $\gamma = 0{,}99$, $t_\gamma = 3{,}355$.

Тогда по формуле

$$\left(\overline{X} - t_\gamma \cdot \frac{s}{\sqrt{n}}; \overline{X} + t_\gamma \cdot \frac{s}{\sqrt{n}}\right) = \left(593 - 3{,}355 \cdot \frac{2{,}55}{\sqrt{9}}; 593 + 3{,}355 \cdot \frac{2{,}55}{\sqrt{9}}\right) =$$

$$= (593 - 2{,}85; 593 + 2{,}85) = (590{,}15; 595{,}85).$$

Таким образом, $590{,}15 < MX < 595{,}85$.

Доверительный интервал для среднего квадратического отклонения нормального распределения

Пусть случайная величина $X \sim N(a, \sigma)$; σ – неизвестна, доверительная вероятность (надежность) γ – задана.

Если $MX = a$ известно, то доверительный интервал для среднего квадратического отклонения σ имеет вид:

$$\left(\frac{\sqrt{n}\cdot S_0}{\chi_2}, \frac{\sqrt{n}\cdot S_0}{\chi_1}\right),$$

где n – объем выборки, $S_0^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - a)^2$, а $\chi_1^2 = \chi^2_{\frac{1+\gamma}{2},\, n}$ и $\chi_2^2 = \chi^2_{\frac{1-\gamma}{2},\, n}$ являются квантилями χ^2 – распределения с n степенями свободы, определяемые по таблице квантилей $\chi^2_{\alpha,n}$ распределения χ_n^2.

Если $MX = a$ неизвестно, то доверительный интервал для неизвестного σ имеет вид:

$$\left(\frac{\sqrt{n-1}\cdot S_0}{\chi_2}, \frac{\sqrt{n-1}\cdot S_0}{\chi_1}\right),$$

где n – объем выборки, $S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2$ – исправленное среднее квадратическое отклонение, квантили $\chi_1^2 = \chi^2_{\frac{1+\gamma}{2},\, n-1}$ и $\chi_2^2 = \chi^2_{\frac{1-\gamma}{2},\, n-1}$ определяются по таблице $\chi^2_{\alpha,k}$ при $k = n - 1$ и $\alpha = \frac{1+\gamma}{2}$ и $\alpha = \frac{1-\gamma}{2}$ соответственно.

Пример 3.2.4

Даны результаты наблюдений случайной величины, имеющей нормальный закон распределения с неизвестными параметрами:

X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	X_7	X_8	X_9	X_{10}
0,7	3,1	–0,9	1,8	2,2	–0,3	1,9	4,2	1,5	2,8

Требуется построить доверительный интервал для дисперсии при уровне надежности $\gamma = 0{,}9$.

Решение. Оценим сначала математическое ожидание:

$$MX \approx \overline{X} = \frac{\sum_{i=1}^{k} X_i}{n} =$$

$$= \frac{0{,}7 + 3{,}1 - 0{,}9 + 1{,}8 + 2{,}2 - 0{,}3 + 1{,}9 + 4{,}2 + 1{,}5 + 2{,}8}{10} = 1{,}7.$$

Оценим дисперсию:

$$DX \approx s^2 = \frac{\sum_{i=1}^{k}\left(X_i - \overline{X}\right)^2}{n-1} = \frac{(0{,}7 - 1{,}7)^2 + (3{,}1 - 1{,}7)^2 + \cdots + (2{,}8 - 1{,}7)^2}{9}$$

$$\approx 2{,}39.$$

Так как математическое ожидание и дисперсия не известны (в качестве неизвестных параметров мы берем их оценки), то доверительный интервал для дисперсии имеет вид

$$\left(\frac{(n-1)\cdot S^2}{\chi_2^2}; \frac{(n-1)\cdot S^2}{\chi_1^2}\right) \quad \text{или} \quad \frac{(n-1)\cdot S^2}{\chi_2^2} < DX < \frac{(n-1)\cdot S^2}{\chi_1^2}.$$

По таблице распределения «хи-квадрат» найдем квантили χ_1^2 и χ_2^2, но вначале определим значения α и k.

$$\chi_2{}^2 = \chi^2_{\alpha,\text{k}} = \chi^2{}_{\frac{1-\gamma}{2},n-1} \Rightarrow \alpha = \frac{1-\gamma}{2} = \frac{1-0{,}9}{2} = 0{,}05, k = 10 - 1 = 9$$

$$\chi_1{}^2 = \chi^2_{\alpha,\text{k}} = \chi^2{}_{\frac{1+\gamma}{2},n-1} \Rightarrow \alpha = \frac{1+\gamma}{2} = \frac{1+0{,}9}{2} = 0{,}95, k = 10 - 1 = 9.$$

Теперь из таблицы находим, что

$$\chi_2^2 = \chi^2_{0{,}95;9} = 16{,}92 \quad \text{и} \quad \chi_1^2 = \chi^2_{0{,}05;9} = 3{,}32.$$

Подставляем найденные значения в формулу и получаем доверительный интервал для дисперсии при уровне надежности $\gamma = 0{,}9$:

$$\frac{9\cdot 2{,}39}{16{,}92} < DX < \frac{9\cdot 2{,}39}{3{,}32} \Rightarrow 1{,}27 < DX < 6{,}48.$$

Для среднего квадратического отклонения имеем с той же вероятностью $\gamma = 0{,}9$ доверительный интервал $1{,}13 < \sigma < 2{,}55$.

<u>Доверительный интервал для вероятности успеха в схеме Бернулли</u>

Пусть проводятся независимые испытания, в которых событие A наступает с неизвестной вероятностью p. В качестве точечной оценки берем $\tilde{p} = \frac{m}{n}$, где m – число успехов.

Тогда интервальная оценка

$$\tilde{p} - t \cdot \sqrt{\frac{p\cdot(1-p)}{n}} \le p \le \tilde{p} + t \cdot \sqrt{\frac{p\cdot(1-p)}{n}},$$

где t определяется из уравнения $\Phi(t) = \frac{\gamma}{2}$ по таблицам нормального распределения. Для надежности $\gamma = 0{,}95$ параметр $t = 1{,}96$.

Границы интервала зависят от неизвестной величины p, но при больших n неизвестное p можно заменить его эмпирическим значением, то есть

$$\tilde{p} - t \cdot \sqrt{\frac{\tilde{p}\cdot(1-\tilde{p})}{n}} \le p \le \tilde{p} + t \cdot \sqrt{\frac{\tilde{p}\cdot(1-\tilde{p})}{n}}.$$

Так как $\tilde{p} = \frac{m}{n}$, то формулу можно переписать в виде

$$\frac{m}{n} - t \cdot \sqrt{\frac{\frac{m}{n}\cdot\left(1-\frac{m}{n}\right)}{n}} \le p \le \tilde{p} + t \cdot \sqrt{\frac{\frac{m}{n}\cdot\left(1-\frac{m}{n}\right)}{n}}.$$

Формула доверительного интервала даёт хороший результат при $npq > 9$. Также эта формула позволяет определить, каков должен быть объем выборки n, чтобы с надежностью γ точность оценки, полученной по ней для p, не превосходила заданного значения ε, то есть чтобы $|\tilde{p} - p| < \varepsilon$.

Так как $|\tilde{p} - p| < t \cdot \sqrt{\frac{\tilde{p}\cdot(1-\tilde{p})}{n}}$, то $\varepsilon = t \cdot \sqrt{\frac{\tilde{p}\cdot(1-\tilde{p})}{n}}$, откуда

$$n = \frac{\widetilde{t^2}}{\varepsilon^2} p(1-\tilde{p}).$$

Пример 3.2.5

Для обследования большой партии изделий (несколько тысяч штук) наугад выбрано 160 изделий. Среди них оказалось 56 изделий низкого сорта. Оценить долю изделий низкого сорта в этой партии с надежностью 0,95.

Решение. Так как партия изделий крупная, то для упрощения можно считать, что по мере выбора изделий состав партии заметно не изменяется и вероятность выбрать наугад изделие низкого сорта равна доле изделий в этой партии. Тогда задача сводится к построению доверительного интервала для вероятности выбрать в этой партии изделие низкого сорта. Частота изделий низкого сорта в выборке равна $\frac{m}{n} = \frac{56}{160} = 0{,}35$. Из таблицы функции Лапласа следует, что $2\Phi(1{,}96) = 0{,}95$. Поэтому

$$0{,}35 - 1{,}96\sqrt{\frac{0{,}35\cdot 0{,}65}{160}} < p < 0{,}35 + 1{,}96\sqrt{\frac{0{,}35\cdot 0{,}65}{160}} \text{ или } 0{,}27 < p < 0{,}42.$$

Таким образом, по данной выборке можно с вероятностью 0,95 утверждать, что во всей партии содержится от 27 до 42 % изделий низкого сорта.

Методические указания по выполнению самостоятельной работы

Для выполнения предложенных заданий самостоятельной работы следует изучить представленный теоретический материал, разобрать предложенные решения типовых примеров и изучить рекомендуемую литературу.

Если студент испытывает затруднения в освоении теоретического или практического материала, то он может получить устную или письменную консультацию у ведущего преподавателя.

Задания выполнять в соответствии с предлагаемыми вариантами.

Номер варианта находится в таблице по первой букве фамилии студента.

Буква	А, О, Х	В, Ш, У	Д, Р, Щ	Е, П	Г, Ж, И	К, Ф, Э	Л, Ч, Ю	Б, М, Я	Н, Т	С, Ц, З
№ вар.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

Задача* 1 *(см. пример 3.2.1 и исходные данные к задаче 1)

По результатам n независимых наблюдений получены оценки математического ожидания $\overline{X}$ и дисперсии s^2 случайной величины X. Постройте доверительные интервалы для математического ожидания этой случайной величины при уровнях надежности $\gamma = 0{,}95$ и $\gamma = 0{,}98$.

Исходные данные

№	n	$\overline{X}$	s^2	№	n	$\overline{X}$	s^2
1	64	1,2	4,5	6	55	4,2	3,6
2	91	–1	2,25	7	68	2,8	2,25
3	90	4,8	3,2	8	56	1,6	2,56
4	85	–2	4	9	100	2,5	1,4
5	60	3,5	1,96	10	70	1,4	1,96

Задача 2 (см. пример 3.2.2 и исходные данные к задаче 2)

Результаты наблюдений случайной величины X представлены в виде статистического ряда. Постройте доверительные интервалы для математического ожидания этой величины для уровней надежности $\gamma = 0{,}9$ и $\gamma = 0{,}95$.

Указание. Иногда результаты наблюдений случайной величины предварительно группируют и представляют в виде статистического ряда

X	$(x_1; x_2)$	$(x_2; x_3)$	...	$(x_k; x_{k+1})$
Число наблюдений	ν_1	ν_2	...	ν_k

В этом случае для оценки математического ожидания и дисперсии используют формулы

$$MX \approx \overline{X} = \frac{\sum_{i=1}^{k} u_i \nu_i}{n} \quad \text{и} \quad s^2 = \frac{\sum_{i=1}^{k} \left(u_i - \overline{X}\right)^2 \cdot \nu_i}{n-1},$$

где $u_i = \frac{x_i + x_{i+1}}{2}$ — середина i-го интервала. Считается, что величина u_i наблюдалась ν_i раз.

Исходные данные

Вар. 1	Интервалы	(−25; −15)	(−15; −5)	(−5; 5)	(5; 15)	(15; 25)
	Число набл.	13	17	36	25	9
Вар. 2	Интервалы	(−22; −12)	(−12; −2)	(−2; 8)	(8; 18)	(18; 28)
	Число набл.	15	39	90	43	13
Вар. 3	Интервалы	(−20; −10)	(−10; 0)	(0; 10)	(10; 20)	(20; 30)
	Число набл.	14	55	68	43	20
Вар. 4	Интервалы	(4; 6)	(6; 8)	(8; 10)	(10; 12)	(12; 14)
	Число набл.	12	25	29	19	15
Вар. 5	Интервалы	(−4; −2)	(−2; 0)	(0; 2)	(2; 4)	(4; 6)
	Число набл.	11	19	39	21	10
Вар. 6	Интервалы	(−8; −4)	(−4; 0)	(0; 4)	(4; 8)	(8; 12)
	Число набл.	10	22	37	20	11
Вар. 7	Интервалы	(−2; 2)	(2; 6)	(6; 10)	(10; 14)	(14; 18)
	Число набл.	10	20	39	22	9
Вар. 8	Интервалы	(−4; 0)	(0; 4)	(4; 8)	(8; 12)	(12; 16)
	Число набл.	11	19	39	21	10

Вар. 9	Интервалы	(−5; −3)	(−3; −1)	(−1; 1)	(1; 3)	(3; 5)
	Число набл.	14	20	30	24	12
Вар. 10	Интервалы	(−10; −6)	(−6; −2)	(−2; 2)	(2; 6)	(6; 10)
	Число набл.	12	20	35	22	11

Задача 3 *(см. пример 3.2.3 и исходные данные к задаче 3)*

Случайная величина X имеет нормальный закон распределения. Построить доверительный интервал для математического ожидания этой случайной величины при уровне надежности $\gamma = 0{,}9$ в предположении, что:

а) дисперсия случайной величины известна и равна 1,44;

б) дисперсия случайной величины не известна.

Исходные данные

№	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	X_7	X_8	X_9
1	1,9	0,4	3,3	1,5	0,9	2,6	2,4	1,4	2,7
2	3,5	2,1	2,4	2,8	0,5	2,5	2,8	0,5	2,5
3	3,7	2,9	3,6	6,3	4,4	3,2	5,1	4,8	2,1
4	2,6	1,5	3,3	2,5	0,9	4,9	2,2	3,1	4,2
5	1,7	0,2	3,1	1,3	2,4	0,7	1,2	2,5	2,2
6	2,8	1,5	1,7	2,7	1,1	5,1	2,2	4,5	3,3
7	3,6	6,2	5,1	4,4	3,2	4,8	2,1	3,7	2,9
8	1,6	0,1	3,0	1,2	0,6	2,3	2,1	1,1	2,4
9	3,2	2,4	0,8	4,8	2,1	3,0	4,1	2,5	1,4
10	1,5	2,9	0,1	1,1	0,4	2,2	2,0	1,0	2,3

Задача 4 *(см. пример 3.2.4 и исходные данные к задаче 4)*

По приведенным данным наблюдений случайной величины X, имеющей нормальный закон распределения, постройте доверительный интервал для дисперсии при уровне надежности γ.

Исходные данные

№	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	X_7	X_8	X_9	γ
1	2,3	0,7	4,7	2,0	2,9	4,0	2,4	1,3	3,1	0,96
2	5,0	3,4	2,6	1,0	2,3	3,2	1,6	4,3	2,7	0,8
3	2,2	3,6	0,6	1,1	2,7	1,7	2,6	1,5	2,9	0,9

4	3,6	2,3	1,2	0,7	2,9	1,8	2,7	3,0	1,6	0,95
5	2,0	3,4	0,4	2,7	0,9	2,5	1,5	1,3	2,4	0,98
6	6,1	3,1	4,3	5,0	4,7	2,0	3,6	2,8	3,5	0,96
7	2,6	0,3	3,2	1,4	0,8	1,3	1,8	2,5	2,3	0,8
8	0,9	2,6	2,4	1,4	2,7	1,9	0,4	3,3	1,5	0,9
9	2,8	0,5	2,5	2,8	0,5	2,5	3,5	2,1	2,4	0,95
10	6,3	4,4	3,2	3,7	2,9	3,6	5,1	4,8	2,1	0,98

Задача 5 (см. пример 3.2.5 и исходные данные к задаче 5)

В серии из n выстрелов по мишени было зафиксировано k попаданий. Постройте доверительный интервал для вероятности попадания в цель при одном выстреле. Уровень надежности возьмите равным γ.

Исходные данные

№	n	k	γ	№	n	k	γ
1	100	75	0,95	6	324	108	0,99
2	144	54	0,98	7	180	162	0,96
3	150	30	0,96	8	169	52	0,99
4	256	128	0,99	9	320	256	0,98
5	150	96	0,97	10	200	40	0,99

Контрольные вопросы

1. Дайте определение точечной и интервальной оценок неизвестных параметров распределения.
2. Какая оценка параметра называется состоятельной, несмещённой, эффективной? Почему желательно, чтобы оценка была состоятельной?
3. Что называется доверительным интервалом, доверительной вероятностью?
4. Как строится доверительный интервал для математического ожидания случайной величины, распределённой по нормальному закону?
5. Как строится доверительный интервал для среднего квадратического отклонения случайной величины, распределённой по нормальному закону?

6. Как строится доверительный интервал для вероятности успеха в схеме Бернулли?

Рекомендуемая литература

1. Геворкян, П. С. Теория вероятностей и математическая статистика : учеб. пособие для вузов / П. С. Геворкян, А. В. Потемкин, И. М. Эйсымонт. – 2-е изд., перераб. и доп. – Москва : Физматлит, 2016. – 176 с. – ISBN 978-5-9221-1682-4.
2. Гмурман, В. Е. Теория вероятностей и математическая статистика : учеб. пособие для вузов / В. Е. Гмурман. – 7-е изд., стер. – Москва : Высшая школа, 2001. – 479 с.
3. Гусак, А. А. Теория вероятностей : справочное пособие к решению задач / А. А. Гусак, Е. А. Бричикова. – 2-е изд., стер. – Минск : ТетраСистемс, 2000. – 286 с. – ISBN 985-6577-24-1.

Тема 3.3. Проверка статистических гипотез. Критерий согласия Пирсона

Форма проведения: практическое занятие.

Вопросы для обсуждения

1. Понятие статистической гипотезы. Основные этапы проверки гипотезы.
2. Проверка гипотез о числовых значениях параметров нормального распределения.
3. Критерий согласия Пирсона.

Методические указания по проведению занятия

Занятие проводится в виде практической работы, в процессе которой студентам необходимо уточнить базовые понятия и основные теоретические сведения по теме занятия, выполнить практическое задание по вариантам под руководством преподавателя, ответить на контрольные вопросы по теме.

Методические материалы к занятию

1. Понятие статистической гипотезы. Основные этапы проверки гипотезы

Под статистической гипотезой понимают всякое высказывание о генеральной совокупности (случайной величине), проверяемое по выборке (результатам наблюдений). Примерами статистических гипотез являются следующие высказывания: «генеральная совокупность, о которой располагают лишь выборочные сведения, имеет нормальный закон распределения»; «генеральная средняя случайной величины, распределенной по нормальному закону, равна 5».

Не располагая сведениями о всей генеральной совокупности, высказанную гипотезу сопоставляют по определенным правилам с выборочными сведениями и делают вывод о том, можно принимать гипотезу или нет. Процедура сопоставления высказанной гипотезы с выборочными данными называется проверкой гипотезы. Рассмотрим этапы проверки гипотезы.

Этап 1. Располагая выборочными данными и руководствуясь конкретными условиями задачи, формулируют гипотезу H_0, которая называется основной (нулевой), и гипотезу H_1, конкурирующую с гипотезой H_0, которую называют альтернативной. Например, если основная гипотеза H_0: $MX = 5$, то альтернативными гипотезами могут быть следующие:

1) H_1: $MX > 5$;
2) H_1: $MX < 5$;
3) H_1: $MX \neq 5$.

Этап 2. Задаются вероятностью α, которую называют *уровнем значимости*. Поясним ее смысл.

Решение о том, можно ли считать гипотезу H_0 справедливой, принимается по выборке, то есть по ограниченному ряду наблюдений, следовательно, это решение может быть ошибочным. При этом могут иметь место ошибки двух родов:

– отвергают основную гипотезу (принимают гипотезу H_1), хотя H_0 верна, это ошибка I-го рода;
– принимают основную гипотезу H_0, хотя она неверна, то есть верной является гипотеза H_1, это ошибка II-го рода.

Уровень значимости α – это вероятность ошибки I-го рода, задается заранее достаточно малым числом, при этом используют стандартные значения: 0,1; 0,05; 0,01; 0,005; 0,001.

Например, $\alpha = 0{,}05$ означает следующее: если гипотезу H_0 проверять по каждой из 100 выборок одного объема, то в среднем в пяти случаях из ста мы совершим ошибку I-го рода.

Вероятность ошибки II-го рода обозначается β.

Этап 3. Находят величину φ, которую называют критерием. Она зависит от выборочных данных, то есть является статисткой $\varphi = \varphi(X_1, X_2, \ldots, X_n)$. Ее значения позволяют судить о расхождении выборки с гипотезой H_0, кроме того, она, при выполнении гипотезы H_0, подчиняется известному закону распределения.

Этап 4. Определяют область ω, которая называется критической областью и которая позволяет судить о расхождении выборки с основной гипотезой. Если критерий φ попадает в критическую область, то гипотеза H_0 отвергается, принимается гипотеза H_1. Но при этом необходимо помнить, что решение может быть ошибочным (может иметь место ошибка I-го рода). Поэтому при нахождении критической области ω соблюдается следующее требование: **вероятность того, что критерий φ примет значение из критической области ω, должна быть равна заданному числу** α, то есть

$$P(\varphi \in \omega) = \alpha.$$

Область ω, определяемая данным равенством, является не единственной. Возможны три вида расположения критической области в зависимости от вида основной и альтернативной гипотез:

- правосторонняя критическая область (рис. 11) $\omega = \left(x_{\text{пр},\alpha}^{\text{кр}};\ +\infty\right)$, где $x_{\text{пр},\alpha}^{\text{кр}}$ определяется из условия: $P\left(\varphi > x_{\text{пр},\alpha}^{\text{кр}}\right) = \alpha$;

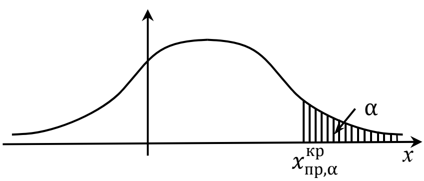


Рис. 11

• левосторонняя критическая область (рис. 12) $\omega = \left(-\infty;\ x^{\text{кр}}_{\text{лев},\alpha}\right)$, где $x^{\text{кр}}_{\text{лев},\alpha}$ определяется из условия: $P\left(\varphi < x^{\text{кр}}_{\text{лев},\alpha}\right) = \alpha$;

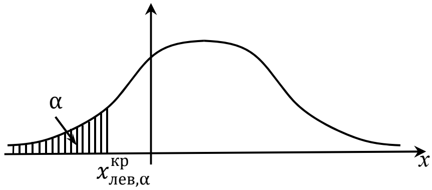


Рис. 12

• двусторонняя критическая область (рис. 13)

$$\omega = \left(-\infty;\ x^{\text{кр}}_{\text{лев},\frac{\alpha}{2}}\right) \cup \left(x^{\text{кр}}_{\text{пр},\frac{\alpha}{2}};\ +\infty\right),$$

где $x^{\text{кр}}_{\text{лев},\frac{\alpha}{2}}$ и $x^{\text{кр}}_{\text{пр},\frac{\alpha}{2}}$ определяются из условия:

$$P\left(\varphi < x^{\text{кр}}_{\text{лев},\frac{\alpha}{2}}\right) + P\left(\varphi > x^{\text{кр}}_{\text{пр},\frac{\alpha}{2}}\right) = \alpha.$$

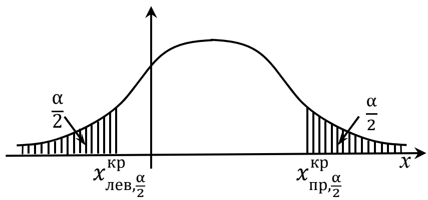


Рис. 13

Этап 5. В формулу критерия $\varphi = \varphi(X_1, X_2, ..., X_n)$ вместо $(X_1, X_2, ..., X_n)$ подставляют конкретные числа, полученные в результате n наблюдений, и подсчитывают числовое значение $\varphi_{\text{набл}}$ критерия φ. Если $\varphi_{\text{набл}} \in \omega$, то гипотеза H_0 отвергается, если $\varphi_{\text{набл}} \notin \omega$, то H_0 принимается с вероятностью $(1 - \alpha)$.

2. Проверка гипотез о числовых значениях параметров нормального распределения

Обозначим через X случайную величину, имеющую нормальный закон распределения с параметрами $MX = a$, $\sigma X = \sigma$, то есть $X = N(a; \sigma)$.

Дать точный ответ на вопрос, каково числовое значение неизвестного параметра, можно, обследовав всю генеральную совокупность, что сделать, как правило, нельзя. Тогда проводят независимые выборочные наблюдения, в которых возможные результаты X_1, X_2, ..., X_n, и по этим наблюдениям вычисляют эмпирические оценки

$$\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\,, S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2.$$

Полученные числа дают приближенное представление об a и σ соответственно. Затем формулируют гипотезы о том, каковы их числовые значения, и приступают к проверке гипотез.

1. Проверка гипотезы о числовом значении математического ожидания a при неизвестной дисперсии

При неизвестном числовом значении дисперсии σ^2 в основу проверки гипотезы H_0: $a = a_0$, где a_0 – заранее заданное число, положен критерий

$$\varphi = \frac{\bar{X} - a}{S/\sqrt{n}},$$

который при выполнении основной гипотезы имеет t-распределение с числом степеней свободы , то есть

$$\varphi = \frac{\bar{X} - a}{S/\sqrt{n}} = t(k = n - 1).$$

Зададимся уровнем значимости α и построим критическую область:

1) если альтернативная гипотеза H_1: $a > a_0$, то критическая область ω – правосторонняя и $x^{\text{кр}}_{\text{пр},\alpha}$ определяется из условия

$$P\big(t(k) > x^{\text{кр}}_{\text{пр},\alpha}\big) = \alpha.$$

Исходя из этого равенства, найдем точку $x^{\text{кр}}_{\text{пр},\alpha}$. Полагая $\gamma = 1 - 2\alpha$, найдем при $k = n - 1$ такое число $t_{\gamma,k}$, при котором

$$P\big(|t(k)| < t_{\gamma,k}\big) = \gamma \quad \text{или} \quad P\big(|t(k)| < t_{\gamma,k}\big) = 1 - 2\alpha.$$

Тогда $P\big(t(k) < -t_{\gamma,k}$ или $t(k) > t_{\gamma,k}\big) = 2\alpha.$ Так как кривая Стьюдента симметрична относительно OY, то

$$P\big(t(k) < -t_{\gamma,k}\big) = P\big(t(k) > t_{\gamma,k}\big) = \alpha.$$

Таким образом, получаем, что $x^{\text{кр}}_{\text{пр},\alpha} = t_{\gamma,k} = t_{1-2\alpha,k}$ (рис. 14);

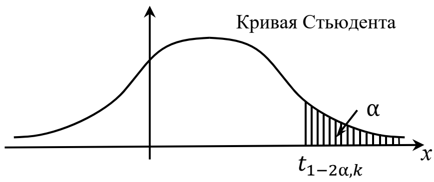


Рис. 14

2) если альтернативная гипотеза H_1: $a < a_0$, то критическая область ω – левосторонняя и $x^{\text{кр}}_{\text{лев},\alpha} = -t_{\gamma,k} = -t_{1-2\alpha,k}$ (рис. 15);

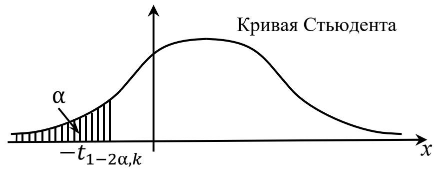


Рис. 15

3) если альтернативная гипотеза H_1: $a \neq a_0$, то критическая область ω – двусторонняя, при этом $x^{\text{кр}}_{\text{лев},\alpha} = -t_{\gamma,k} = -t_{1-\alpha,k}$ и $x^{\text{кр}}_{\text{пр},\alpha} = t_{\gamma,k} = t_{1-\alpha,k}$, $k = n - 1$ (рис. 16).

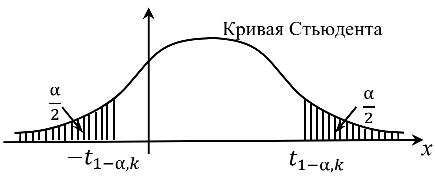


Рис. 16

Теперь находим значение $\varphi_{\text{набл}}$, подставляя в формулу критерия φ эмпирическое среднее $\bar{X}$, число a_0, S и n. Если $\varphi_{\text{набл}} \in \omega$, то основную гипотезу отвергаем.

<u>2. Проверка гипотезы о числовом значении дисперсии нормального распределения</u>

Проверим гипотезу H_0: $\sigma^2 = \sigma_0^2$, где σ_0^2 – заранее заданное число.

В основе этой гипотезы лежит сравнение σ_0^2 и S^2. Критерий φ имеет вид:

$$\varphi = \frac{S^2}{\sigma_0^2/(n-1)}.$$

При выполнении основной гипотезы H_0 величина φ имеет χ^2_{n-1} распределение.

Зададимся уровнем значимости α и построим критическую область в зависимости от альтернативной гипотезы H_1:

1) если альтернативная гипотеза $H_1\colon \sigma^2 > \sigma_0^2$, то критическая область ω – правосторонняя $\left(x^{\text{кр}}_{\text{пр},\alpha};\ +\infty\right)$ и $x^{\text{кр}}_{\text{пр},\alpha}$ определяется из условия $P\left(\chi^2_{n-1} > x^{\text{кр}}_{\text{пр},\alpha}\right) = \alpha$.

Полагая $\gamma = 1 - \alpha$, при $k = n - 1$, найдем число χ^2_γ такое, при котором $P\left(\chi^2_{n-1} < \chi^2_\gamma\right) = 1 - \alpha$.

Тогда $P\left(\chi^2_{n-1} > \chi^2_\gamma\right) = \alpha$, то есть $x^{\text{кр}}_{\text{пр},\alpha} = \chi^2_\gamma = \chi^2_{1-\alpha,k}$ (рис. 17);

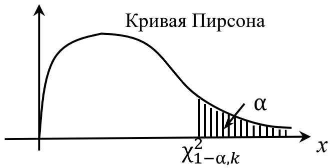


Рис. 17

2) если альтернативная гипотеза $H_1\colon \sigma^2 < \sigma_0^2$, то критическая область ω – левосторонняя $\left(0;\ x^{\text{кр}}_{\text{лев},\alpha}\right)$ и $x^{\text{кр}}_{\text{лев},\alpha}$ определяется из условия $P\left(\chi^2_{n-1} < x^{\text{кр}}_{\text{лев},\alpha}\right) = \alpha$.

Тогда $x^{\text{кр}}_{\text{лев},\alpha} = \chi^2_\gamma = \chi^2_{\alpha,k}$ при $k = n - 1$ (рис. 18);

Рис. 18

3) если альтернативная гипотеза $H_1\colon \sigma^2 \neq \sigma_0^2$, то критическая область ω – двусторонняя $\left(0;\ x^{\text{кр}}_{\text{лев},\frac{\alpha}{2}}\right) \cup \left(x^{\text{кр}}_{\text{пр},\frac{\alpha}{2}};\ +\infty\right)$, где $x^{\text{кр}}_{\text{лев},\frac{\alpha}{2}} = \chi^2_{\frac{\alpha}{2},k}$ и $x^{\text{кр}}_{\text{пр},\frac{\alpha}{2}} = \chi^2_{1-\frac{\alpha}{2},k}$ при $k = n - 1$.

3. Критерий согласия Пирсона

Во многих исследованиях модель закона распределения заранее не известна и возникает задача выбора модели, согласующейся с результатами наблюдений над случайной величиной.

Пусть высказывается предположение, что неизвестная функция распределения $F(x)$ исследуемой величины ξ имеет вполне определенную модель, то есть высказана основная гипотеза

$$H_0: F_\xi(x) = F_{\text{теор}}(x).$$

В качестве теоретической модели может быть рассмотрена нормальная, биномиальная, показательная и другие модели.

Критерий, с помощью которого проверяется гипотеза H_0, называется *критерием согласия*. Рассмотрим один из них – критерий согласия Пирсона. Опишем алгоритм проверки гипотезы.

• Пусть результаты наблюдений сгруппированы в вариационный ряд, с числом групп, равным v.

• По результатам наблюдений находят оценки неизвестных параметров закона распределения (пусть их число равно l).

• Вместо неизвестных параметров подставляют в модель закона распределения найденные оценки. В результате предполагаемая модель закона оказывается полностью определенной и, используя ее, рассчитывают вероятности

$$p_i^{\text{теор}} = P(\xi = x_i),$$

где $i = 1, 2, ..., v - 1$. Так как $\sum p_i^{\text{теор}} = 1$, то $p_v^{\text{теор}} = 1 - \sum p_i^{\text{теор}}$.

• Затем находят теоретические частоты $m_i^{\text{теор}} = n \cdot p_i^{\text{теор}}$. Здесь критерий согласия Пирсона можно использовать только тогда, когда $m_i^{\text{теор}} \geq 5, i = 1, 2, ..., v$. Поэтому ту группу вариационного ряда, для которой $m_i^{\text{теор}} < 5$, объединяют с соседней и число групп уменьшают.

• Если основная гипотеза верна, то критерий

$$\varphi = \sum_{i=1}^{v} \frac{\left(m_i - m_i^{\text{теор}}\right)^2}{m_i^{\text{теор}}}$$

будет иметь χ^2 – распределение с числом степеней свободы $k = v - l - 1$, где v – число (новое) групп вариационного ряда, l – число неизвестных параметров предполагаемой модели.

• Дальше задают уровень значимости и строят критическую область. Она является правосторонней $\omega = \left(x_{\text{пр},\alpha}^{\text{кр}}; +\infty\right)$. Если $\varphi_{\text{набл}} \in \omega$, то основная гипотеза отвергается. Здесь $x_{\text{пр},\alpha}^{\text{кр}} = \chi_{\gamma,k}^{2}$, где $\gamma = 1 - \alpha$, $k = v - l - 1$.

Пример 3.3.1

При измерении диаметра валиков после шлифовки были получены результаты (в см): 6,75; 6,73; 6,77; 6,77; 6,69; ...; 6,78. Всего 200 значений. Выяснить, можно ли на уровне значимости $\alpha = 0{,}1$ считать, что диаметр валика имеет нормальный закон распределения.

Решение. В результате ранжирования данных получили: $x_{\min} = 6{,}68$, $x_{\max} = 6{,}83$. Размах $R = x_{\max} - x_{\min} = 6{,}83 - 6{,}68 = 0{,}15$. Тогда длина каждого из интервалов группировки данных равна

$$h = \frac{R}{1 + 3{,}32 \ln n} = \frac{0{,}15}{1 + 3{,}32 \ln 200} \approx 0{,}02.$$

За начало первого интервала рекомендуется брать величину

$$x_{\text{нач}} = x_{\min} - \frac{1}{2} h,$$

тогда, подставляя, получим:

$$x_{\text{нач}} = 6{,}68 - \frac{1}{2} 0{,}02 = 6{,}67.$$

Конец последнего интервала должен удовлетворять условию:

$$x_{\text{кон}} - h \le x_{\max} < x_{\text{кон}}.$$

В результате было определено 9 интервалов и подсчитаны частоты и относительные частоты $\widetilde{p_i} = \frac{m_i}{n}$. После группировки данных в табл. 1 представлен вариационный ряд случайной величины ξ – диаметр валика.

Таблица1

Вариационный ряд

Интервал	(6,67; 6,69]	(6,69; 6,71]	(6,71; 6,73]	(6,73; 6,75]	(6,75; 6,77]	(6,77; 6,79]	(6,79; 6,81]	(6,81; 6,83]	(6,83; 6,85]
m_i	2	15	17	44	52	44	14	11	1
$\widetilde{p_i} = \frac{m_i}{n}$	0,010	0,075	0,085	0,220	0,026	0,220	0,070	0,055	0,005

Гистограмма и полигон представлены на рис. 19.

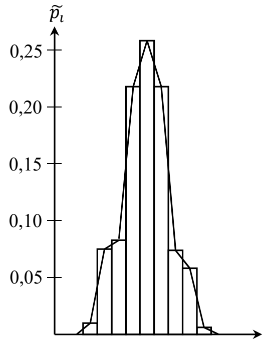


Рис. 19

По виду гистограммы и полигона можно выдвинуть гипотезу, что случайная величина ξ имеет нормальный закон распределения, то есть

$$H_0: F_\xi(x) = N(a;\ \sigma),$$

где a и σ – параметры нормального распределения, полностью определяющие этот закон.

Так как a и σ неизвестны, вычислим их точечные оценки $\bar{X}$ и S^2 по формулам:

$$\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^* m_i\,, \quad S^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i^* - \bar{X})^2 m_i,$$

здесь x_i^* – середина каждого частичного интервала.

$$\bar{X} = \frac{1}{200}(6{,}68 \cdot 2 + 6{,}70 \cdot 15 + 6{,}72 \cdot 17 + 6{,}74 \cdot 44 + 6{,}76 \cdot 52 + 6{,}78 \cdot 44 +$$

$$+6{,}80 \cdot 14 + 6{,}82 \cdot 11 + 6{,}84 \cdot 1) = 6{,}758.$$

$$S^2 = \frac{1}{200}[(6{,}68 - 6{,}758)^2 \cdot 2 + (6{,}70 - 6{,}758)^2 \cdot 15 + (6{,}72 - 6{,}758)^2 \cdot 17 +$$

$$+ \cdots + (6{,}84 - 6{,}758)^2 \cdot 1] = 0{,}001.$$

Вычислим несмещенную дисперсию:

$$\tilde{S}^2 = \frac{200}{200-1} \cdot 0{,}001 = 0{,}001005.$$

Тогда

$$\tilde{S} = \sqrt{\tilde{S}^2} = \sqrt{0{,}001005} \approx 0{,}0314.$$

Таким образом, $F_{\text{теор}}(x) = N(6{,}758;\ 0{,}0314)$. Проверим основную гипотезу на уровне значимости $\alpha = 0{,}1$. Для этого построим вспомогательную таблицу (табл. 2).

Таблица 2

Вспомогательная таблица для расчета $\varphi_{\text{набл}} = \chi^2_{\text{В}}$

<table>
<tr><td>i</td><td>$(\alpha_i; \alpha_{i+1}]$</td><td>m_i</td><td>$u_i = \dfrac{\alpha_i - \bar{X}}{\tilde{S}}$</td><td>$p_i^{\text{теор}} = \Phi(u_{i+1}) - \Phi(u_i)$</td><td>$m_i^{\text{теор}} = n \cdot p_i^{\text{теор}}$</td><td>$\dfrac{\left(m_i - m_i^{\text{теор}}\right)^2}{m_i^{\text{теор}}}$</td></tr>
<tr><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td><td>6</td><td>7</td></tr>
<tr><td>1</td><td>(6,67; 6,69]</td><td>2</td><td>$-\infty$</td><td>0,0154</td><td rowspan="2">$\left.\begin{matrix}3{,}08\\9{,}78\end{matrix}\right\}$ 12,86</td><td rowspan="2">1,333</td></tr>
<tr><td>2</td><td>(6,69; 6,71]</td><td>15</td><td>–2,17</td><td>0,0489</td></tr>
<tr><td>3</td><td>(6,71; 6,73]</td><td>17</td><td>–1,53</td><td>0,1251</td><td>25,02</td><td>2,571</td></tr>
<tr><td>4</td><td>(6,73; 6,75]</td><td>44</td><td>–0,89</td><td>0,2119</td><td>42,38</td><td>0,062</td></tr>
<tr><td>5</td><td>(6,75; 6,77]</td><td>52</td><td>–0,25</td><td>0,2504</td><td>50,08</td><td>0,074</td></tr>
<tr><td>6</td><td>(6,77; 6,79]</td><td>44</td><td>0,38</td><td>0,1968</td><td>39,36</td><td>0,055</td></tr>
<tr><td>7</td><td>(6,79; 6,81]</td><td>14</td><td>1,02</td><td>0,1038</td><td>20,60</td><td>2,115</td></tr>
<tr><td>8</td><td>(6,81; 6,83]</td><td>11</td><td>1,66</td><td>0,0377</td><td rowspan="2">$\left.\begin{matrix}7{,}54\\2{,}16\end{matrix}\right\}$ 9,70</td><td rowspan="2">0,545</td></tr>
<tr><td>9</td><td>(6,83; 6,85]</td><td>1</td><td>2,29</td><td>0,0108</td></tr>
<tr><td></td><td>Итого</td><td>200</td><td></td><td>1,0000</td><td></td><td>6,755</td></tr>
</table>

В табл. 2 значения $p_1^{\text{теор}}$ в пятом столбце рассчитываются следующим образом:

$$p_1^{\text{теор}} = P\{X < \alpha_2\} = F(\alpha_2) - F(-\infty) = \Phi(u_2) - \Phi(-\infty) =$$

$$= -0{,}4846 - (-0{,}5) = 0{,}0154;$$

$$p_2^{\text{теор}} = P\{\alpha_2 \le X < \alpha_3\} = F(\alpha_3) - F(\alpha_2) = \Phi(u_3) - \Phi(u_2) =$$

$$= -0{,}4370 - (-0{,}4846) = 0{,}0489;$$

$$p_3^{\text{теор}} = P\{\alpha_3 \le X < \alpha_4\} = F(\alpha_4) - F(\alpha_3) = \Phi(u_4) - \Phi(u_3) =$$

$$= -0{,}3133 - (-0{,}4370) = 0{,}1251;$$

$$\ldots$$

$$p_9^{\text{теор}} = P\{\alpha_9 \le X < \infty\} = F(\infty) - F(\alpha_9) = \Phi(\infty) - \Phi(u_9) =$$

$$= 0{,}5 - 0{,}4892 = 0{,}0108.$$

Здесь $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-t^2/2} dt$ – интегральная функция Лапласа (прил. Б).

После вычисления $m_i^{\text{теор}}$ в шестом столбце для первой и последней строки получили значения, меньшие 5. Поэтому объединяем 1-ю группу со 2-й, а 9-ю с восьмой, и число групп (интервалов) уменьшаем. Новое число групп $v = 7$.

Аналогичное объединение производим в третьем столбце табл. 2, а затем рассчитываем значения последнего седьмого столбца, при этом

$$1{,}333 = \frac{(17-12{,}86)^2}{12{,}86};\ 2{,}571 = \frac{(17-25{,}02)^2}{25{,}02};\ \ldots;\ 0{,}545 = \frac{(15-9{,}70)^2}{9{,}70}.$$

$\varphi_{\text{набл}} = \chi^2_{\text{В}} = 6{,}755$ (последнее значение в столбце 7 табл. 2).

Так как уровень значимости $\alpha = 0{,}1$, то $\gamma = 1 - \alpha = 0{,}9$, число степеней свободы $k = v - 1 - 1 = 7 - 2 - 1 = 4$.

По таблице прил. В находим $\chi^2_{\gamma,k} = 7{,}78$. Критическая область $\omega = (7{,}78;\ +\infty)$.

Так как $\chi^2_{\text{В}} = 6{,}755 \notin \omega$, то гипотезу о том, что размер диаметра валика имеет нормальный закон распределения, не отвергаем.

Пример 3.3.2

Даны выборочные значения нормально распределенной случайной величины: 75, 83, 89, 85, 79, 81, 85, 87, 82, 81, 86.

Проверить гипотезу относительно центра распределения $a = 87$ на уровне значимости $\alpha = 0{,}1$.

Решение. Число наблюдений (значений СВ) $n = 11$. Найдем $\bar{X}$ и $\tilde{S}$.

$$\bar{X} = \frac{75+83+89+85+79+81+85+87+82+81+86}{11} = 83,$$

$$\tilde{S}^2 = \frac{1}{10}[(75-83)^2 + (83-83)^2 + (89-83)^2 + \cdots + (86-83)^2] = 15{,}8.$$

$$\tilde{S} = \sqrt{\tilde{S}^2} = \sqrt{15{,}8} \approx 3{,}97.$$

1) основная гипотеза H_0: $a = 87$;
2) альтернативная гипотеза H_1: $a < 87$ (так как $\bar{X} = 83 < 87$);
3) уровень значимости $\alpha = 0{,}1$, тогда $\gamma = 1 - 2\alpha = 0{,}8$, при этом критическая область ω – левосторонняя;
4) $x^{\text{кр}}_{\text{лев},\alpha} = -t_{\gamma,k}$, где $t_{\gamma,k}$ определяем по таблице распределения Стьюдента (прил. Г): $t_{0{,}8{,}10} = 1{,}37$, $\omega = (-\infty;\ -1{,}37)$.
5) вычисляем $\varphi_{\text{набл}} = \frac{\bar{X}-a_0}{\tilde{S}/\sqrt{n}} = \frac{83-87}{3{,}97/\sqrt{11}} = \frac{-4}{1{,}2} = -3{,}33$, $\varphi_{\text{набл}} \in \omega$.

Таким образом, гипотезу относительно центра распределения $a = 87$ отвергаем, принимаем альтернативную гипотезу.

Пример 3.3.3

Точность станка автомата проверяется по дисперсии конкретного размера изделий, которая не должна превышать 0,15. По пробам из 25 случайно отобранных изделий вычислена оценка $S^2 = 0,25$. При уровне значимости $\alpha = 0,05$ дать ответ на вопрос, обеспечивает ли станок требуемую точность. Предполагается, что размер изделия – нормально распределенная случайная величина.

Решение. Число наблюдений $n = 25$, оценка дисперсии $\tilde{S}^2 = 0,25$.

1) основная гипотеза H_0: $\sigma^2 = 0,15$;
2) альтернативная гипотеза H_1: $\sigma^2 > 0,15$ (так как $\tilde{S}^2 = 0,25 > 0,15$);
3) уровень значимости $\alpha = 0,05$, тогда $\gamma = 1 - 2\alpha = 0,8$, при этом критическая область ω – правосторонняя;
4) $x_{\text{пр},\alpha}^{\text{кр}} = \chi_\gamma^2 = \chi_{1-\alpha,k}^2$, где $\chi_{1-\alpha,k}^2$ определяем по таблице распределения Пирсона (прил. В): $\chi_{0,95,24}^2 = 36,4$, $\omega = (36,4; +\infty)$;
5) вычисляем $\varphi_{\text{набл}} = \chi_{\text{В}}^2 = \frac{\tilde{S}^2}{\sigma_0^2/(n-1)} = \frac{0,25}{0,15/(25-1)} = 40$, $\chi_{\text{В}}^2 \in \omega$.

Таким образом, основную гипотезу отвергаем и делаем вывод, что станок не обеспечивает требуемой точности.

Пример 3.3.4

Монету подбросили 50 раз. Герб выпал 32 раза. С помощью критерия «хи-квадрат» проверить, согласуются ли эти результаты с предположением, что подбрасывали симметричную монету.

Решение. Выдвинем гипотезу, что монета была симметричной. Это означает, что вероятность выпадения герба при каждом броске равна 1/2. В описанном опыте герб выпал 32 раза и 18 раз выпала цифра. Вычисляем $\varphi_{\text{набл}} = \chi_{\text{В}}^2$ (табл. 3).

Таблица 3

Вспомогательная таблица для расчета $\varphi_{\text{набл}} = \chi_{\text{В}}^2$

m_i	$p_i^{\text{теор}}$	$m_i^{\text{теор}} = n \cdot p_i^{\text{теор}}$	$m_i - m_i^{\text{теор}}$	$\left(m_i - m_i^{\text{теор}}\right)^2$	$\frac{\left(m_i - m_i^{\text{теор}}\right)^2}{m_i^{\text{теор}}}$
32	0,5	25	7	49	1,96
18	0,5	25	−7	49	1,96

Число степеней свободы для χ^2 равно $k = 2 - 1 = 1$, так как слагаемых два, а связь на величины наложена одна: $m_1 + m_2 = 50$. Для числа степеней свободы $k = 1$ и уровня значимости $\alpha = 0{,}05$ находим из таблицы распределения «хи-квадрат» (прил. В), что $P(\chi^2 \geq 3{,}841) = 0{,}05$. Это означает, что при уровне значимости $\alpha = 0{,}05$ критическую область для величины χ^2 составляют значения $\omega = [3{,}841; +\infty)$. Вычисленное значение $\chi^2_{\text{В}} = 3{,}92$ попадает в критическую область ω, гипотеза отвергается. Вероятность того, что мы при таком выводе ошибаемся, равна 0,05.

Таким образом, предположение о симметричности монеты не согласуется с опытными данными.

Пример 3.3.5

В течение пяти рабочих дней недели на контактный телефон фирмы поступило соответственно 69, 50, 59, 75, 47 звонков. Можно ли считать при уровне значимости $\alpha = 0{,}025$, что интенсивность звонков не зависит от дня недели?

Решение. Сначала построим критическую область. Общее количество звонков равно 300. Число степеней свободы равно $k = 5 - 1 = 4$, так как разрядов пять, а связей одна $\left(\sum_{i=1}^{5} m_i = 300\right)$. По таблице распределения «хи-квадрат» (прил. В) находим для $k = 4$ и $\alpha = 0{,}025$, что критическое значение $\chi^2_{\text{кр}} = 11{,}14$. То есть критическую область для величины χ^2 составляют значения $\omega = [11{,}14; +\infty)$.

Выдвинем гипотезу, что интенсивность звонков не зависит от дня недели, то есть с вероятностью 1/5 каждый вызов может поступить в любой рабочий день недели.

В предположении, что гипотеза верна, вычислим значение χ^2. Вычисление оформим в виде табл. 4.

Таблица 4

Вспомогательная таблица для расчета $\varphi_{\text{набл}} = \chi^2_{\text{В}}$

m_i	$p_i^{\text{теор}}$	$m_i^{\text{теор}} = n \cdot p_i^{\text{теор}}$	$m_i - m_i^{\text{теор}}$	$\left(m_i - m_i^{\text{теор}}\right)^2$	$\dfrac{\left(m_i - m_i^{\text{теор}}\right)^2}{m_i^{\text{теор}}}$
69	1/5	60	9	81	1,35
50	1/5	60	−10	100	1,67
59	1/5	60	−1	1	0,017
75	1/5	60	15	225	3,75
47	1/5	60	−13	169	1,69

Сумма элементов последнего столбца дает $\chi^2_{В} = 8{,}48 < 11{,}14$, значит, гипотеза не противоречит опытным данным.

Методические указания по выполнению самостоятельной работы студентов

Для выполнения предложенных заданий самостоятельной работы следует изучить представленный теоретический материал, разобрать предложенные решения типовых примеров и изучить рекомендуемую литературу.

Если студент испытывает затруднения в освоении теоретического или практического материала, то он может получить устную или письменную консультацию у ведущего преподавателя.

Задания выполнять в соответствии с предлагаемыми вариантами.

Номер варианта находится в таблице по первой букве фамилии студента.

Буква	А, О, Х	В, Ш, У	Д, Р, Щ	Е, П	Г, Ж, И	К, Ф, Э	Л, Ч, Ю	Б, М, Я	Н, Т	С, Ц, З
№ вар.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

Задача 1 (см. пример 3.3.1)

Для данного статистического ряда:

1) постройте гистограмму;
2) по виду гистограммы подберите выравнивающую кривую (многоугольник распределения), т. е. выдвиньте гипотезу о типе закона распределения случайной величины. Подберите параметры закона распределения (равные их оценкам на основе опытных данных). Постройте сглаживающую кривую в той же системе координат;
3) с помощью критерия согласия «хи-квадрат» проверьте, согласуется ли данная гипотеза с опытными данными при уровне значимости $\beta = 0{,}05$.

Варианты заданий

Вариант 1

Интервал $(\alpha_i; a_{i+1}]$	–25; –15	–15; –5	–5; 5	5; 15	15; 25
Число набл. m_i	13	17	36	25	9

Вариант 2

Интервал $(\alpha_i; a_{i+1}]$	–22; –12	–12; –2	–2; 8	8; 18	18; 28
Число набл. m_i	15	39	90	43	13

Вариант 3

Интервал $(\alpha_i; a_{i+1}]$	–20; –10	–10; 0	0; 10	10; 20	20; 30
Число набл. m_i	14	55	68	43	20

Вариант 4

Интервал $(\alpha_i; a_{i+1}]$	4; 6	6; 8	8; 10	10; 12	12; 14
Число набл. m_i	12	25	29	19	15

Вариант 5

Интервал $(\alpha_i; a_{i+1}]$	–10; –6	–6; –2	–2; 2	2; 6	6; 10
Число набл. m_i	10	20	39	22	9

Вариант 6

Интервал $(\alpha_i; a_{i+1}]$	–8; –4	–4; 0	0; 4	4; 8	8; 12
Число набл. m_i	10	22	37	20	11

Вариант 7

Интервал $(\alpha_i; a_{i+1}]$	–6; –2	–2; 2	2; 6	6; 10	10; 14
Число набл. m_i	23	41	65	55	16

Вариант 8

Интервал $(\alpha_i; a_{i+1}]$	–5; –3	–3; –1	–1; 1	1; 3	3; 5
Число набл. m_i	20	46	64	54	16

Вариант 9

Интервал $(\alpha_i; a_{i+1}]$	–4; 0	0; 4	4; 8	8; 12	12; 16
Число набл. m_i	21	46	62	54	17

Вариант 10

Интервал $(\alpha_i; a_{i+1}]$	0; 2	2; 4	4; 6	6; 8	8; 10
Число набл. m_i	22	45	62	53	18

Задача 2 (см. примеры 3.3.2, 3.3.3)

Проверить нулевую гипотезу о том, что заданное значение a_0 является математическим ожиданием нормально распределенной случайной величины при H_1: $a \neq a_0$ на 5 % уровне значимости, если в результате обработки выборки объема n получено выборочное среднее $\bar{x}_\text{в}$, а несмещенное среднее квадратическое отклонение s.

№	a_0	n	$\bar{x}_\text{в}$	s	№	a_0	n	$\bar{x}_\text{в}$	s
1	10	10	12	1	**6**	60	36	64	6
2	20	18	22	4	**7**	70	41	66	8
3	20	25	18	4	**8**	20	27	18	1
4	40	12	44	3	**9**	50	19	48	2
5	58	29	56	4	**10**	30	11	34	4

Задача 3 (см. пример 3.3.4)

Результаты подбрасывания игрального кубика представлены в виде статистического ряда:

Грань кубика	1	2	3	4	5	6
Число выпадений грани	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6

Можно ли считать (при уровне значимости 0,05), что подбрасывали однородный и симметричный кубик?

№	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	№	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6
1	17	30	11	25	15	22	**6**	21	20	13	17	30	19
2	18	27	23	12	27	13	**7**	11	21	14	25	19	30
3	26	14	19	11	21	29	**8**	23	17	21	19	27	13
4	16	28	13	25	20	18	**9**	20	21	11	31	14	23
5	17	30	19	21	20	13	**10**	11	25	25	15	17	30

Задача 4 (см. пример 3.3.5)

На шоссе между двумя городами расположены три автозаправочные станции. В течение часа на этих станциях заправилось соответственно k_1, k_2 и k_3 автомобилей. При уровне значимости $\beta = 0{,}05$ согласуется ли с этими данными предположение, что автозаправки одинаково популярны у автовладельцев?

№	k_1	k_2	k_3	№	k_1	k_2	k_3
1	52	73	76	**6**	61	81	59
2	51	40	65	**7**	64	39	50
3	78	69	54	**8**	47	62	38
4	50	39	52	**9**	60	35	52
5	48	63	39	**10**	55	60	38

Контрольные вопросы

1. Определение статистической гипотезы. Примеры.
2. Основная и альтернативные гипотезы. Понятие уровня значимости.
3. Ошибки первого и второго родов при проверке гипотезы.
4. Понятие критерия при проверке гипотез.
5. Виды критических областей при проверке гипотез. Примеры.
6. Этапы проверки гипотезы о числовом значении математического ожидания *а* при неизвестной дисперсии.
7. Этапы проверки гипотезы о числовом значении дисперсии нормального распределения.
8. Принцип использования критерия согласия Пирсона.

Рекомендуемая литература

1. Гмурман, В. Е. Теория вероятностей и математическая статистика : учеб. пособие для вузов / В. Е. Гмурман. – Изд. 11-е, стер. – Москва : Высшая школа, 2005. – 479 с. – ISBN 5-06-004214-6.
2. Климов, Г. П. Теория вероятностей и математическая статистика: учебник / Г. П. Климов. – 2-е изд. – Москва : Изд-во Московского университета, 2011. – 365 с. – ISBN 978-5-211-05846-0.

Тема 3.4. Первоначальные сведения о цепях Маркова

Форма проведения занятия: практическое занятие.

Вопросы для обсуждения

1. Понятие о случайном процессе.
2. Цепь Маркова. Марковские процессы с дискретным множеством состояний.

Методические указания по проведению занятия

Занятие проводится в виде практической работы, в процессе которой студентам необходимо уточнить базовые понятия и основные теоретические сведения по теме занятия, выполнить практическое задание по вариантам под руководством преподавателя, ответить на контрольные вопросы по теме.

Методические материалы к занятию

1. Понятие о случайном процессе

Случайный процесс – это семейство случайных величин $X(t)$, где параметр $t \in T$ – множество значений параметра. Параметр t в определении случайного процесса обычно интерпретируют как время. Если зафиксировать значение времени t_0, то $X(t_0)$ – обычная случайная величина.

На случайный процесс можно смотреть либо как на совокупность случайных величин, зависящих от параметра t, либо как на совокупность реализаций процесса. Реализация представляет собой одно возможное осуществление процесса.

Если параметр t принимает дискретные значения (обычно $t = 0$; 1; 2; ...), то $X(t)$ – ***случайный процесс с дискретным временем***, если же t изменяется на некотором интервале (конечном или бесконечном), то $X(t)$ – ***случайный процесс с непрерывным временем***.

В свою очередь, если случайные величины семейства принимают дискретные значения, то имеет место ***случайный процесс с дискретными значениями***, если же непрерывные – то ***с непрерывными значениями***.

При решении практических задач обычно предполагают, что случайный процесс протекает в некоторой системе. Под системой может пониматься что угодно: техническое устройство, ремонтная мастерская, железнодорожный узел, биологическая популяция. ***Состояние системы*** или ***состояние случайного процесса*** – это возможное значение случайных величин, образующих случайный процесс.

Пусть некоторый физический объект в каждый момент времени может находиться в одном из своих возможных состояний, число которых конечно или счётное. Состояния могут быть качественными и описываться словами или количественными и характеризоваться некоторыми числами. Представление о множестве состояний и о структуре переходов из состояния в состояние дает схема, которая называется ***графом состояний***. Стрелками обозначим возможные переходы, а через E_i – возможные состояния.

Например, в графе состояний (рис. 20) E_0 означает, что устройство новое и не включено в работу, E_1 – устройство работает, E_2 – устройство неисправно, E_3 – происходит поиск причин неисправности, E_4 – производится ремонт, E_5 – устройство признано не подлежащим ремонту и утилизировано. Если ремонт удался, то происходит переход в состояние E_1.

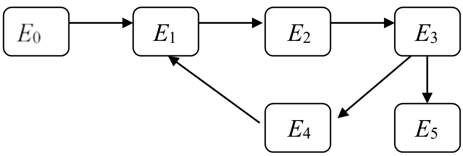


Рис. 20

Взаимное расположение состояний в графе позволяет их классифицировать следующим образом:

1. Состояние называется ***источником***, если объект может выйти из него, но попасть вновь в него не может (в примере – состояние E_0).

2. Состояние называется ***поглощающим*** (или ***концевым***), если в него можно войти, но из него выйти нельзя (в примере – состояние E_5).

3. Состояние E_i называется ***соседним*** к состоянию E_j, если возможен непосредственный переход из состояния E_i в состояние E_j (в примере – состояние E_3 соседнее по отношению к E_2, но E_2 не соседнее состояние по отношению к E_3).

4. Подмножество состояний называется ***эргодическим*** (или ***связным***), если из каждого состояния этого подмножества можно попасть в любое другое состояние этого подмножества. Например, на рис. 21 два эргодических подмножества состояний: $\{E_3, E_4, E_5\}$ и $\{E_6, E_7\}$.

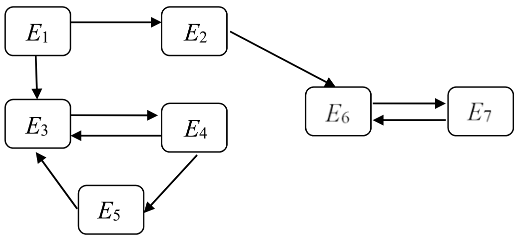


Рис. 21

Случайный процесс изменения состояний объекта можно понимать как процесс блуждания по множеству состояний графа.

С точки зрения описания объекта первостепенный интерес представляют вероятности состояний этого объекта. Обозначим через $P_i(t)$ вероятность того, что в момент времени t объект находится в состоянии E_i. Очевидно, что $\Sigma_i P_i(t)$.

Часто интерес представляет лишь установившийся режим работы (или стационарный режим), в который объект входит после достаточно долгого времени работы. При стационарном режиме процесс перехода из состояния в состояние продолжается, но вероятности состояний не изменяются. Обозначим эти вероятности через P_i. Так что $P_i = \lim\limits_{t\to\infty} P_i(t)$.

Величину P_i можно понимать как среднюю долю времени, в течение которой объект находится в состоянии E_i. В общем случае зависят от всей предыстории переходов из состояния в состояние до момента времени t. Это очень усложняет математическую модель такого процесса. В математическом плане наиболее просты марковские процессы, не обладающие «памятью» о прошлом.

2. Цепь Маркова. Марковские процессы с дискретным множеством состояний

Случайный процесс, протекающий в системе, называется марковским процессом, если он обладает свойством: для каждого момента времени t_0 вероятность любого состояния системы в будущем (при $t > t_0$) зависит только от ее состояния в настоящем (при $t = t_0$) и не зависит от того, когда и каким образом система пришла в это состояние (т. е. как развивался процесс в прошлом).

Если переходы из состояния в состояние могут происходить только в определенные моменты времени t_0, t_1, t_2, ..., то процесс называется ***цепью Маркова***. ***Цепью Маркова с дискретным временем*** называют цепь, изменение состояний которой происходит в определённые фиксированные моменты времени. Цепью Маркова с непрерывным временем называют цепь, изменение состояний которой происходит в любые случайные возможные моменты времени. Моменты переходов из состояния в состояние называют шагами процесса. Наглядным примером марковской цепи могут служить детские игры, в которых продвижение фишки по игровому полю зависит от выпавшей грани игрального кубика. На практике часто встречаются случайные процессы, которые с той или иной степенью приближения можно считать марковскими.

Любой марковский процесс описывают с помощью вероятностей состояний и переходных вероятностей.

Вероятности состояний $P_i(t)$ марковского случайного процесса – это вероятности того, что случайный процесс (система) в момент времени t находится в состоянии E_i: $P_i(t) = P\{X(t) = E_i\}$.

Переходные вероятности марковского процесса – это вероятности перехода процесса (системы) из одного состояния в любое другое. Обозначим через вероятности перехода на k-м шаге в состояние E_j, если на предыдущем $(k - 1)$-м шаге она была в состоянии E_i, а через P_{ii}(к) – вероятность сохранить свое состояние E_i на k-м шаге.

Переходные вероятности цепи Маркова за один шаг P_{ij} записывают в виде матрицы

$$P = \|P_{ij}\| = \begin{pmatrix} P_{11}(k) & P_{12}(k) & \cdots & P_{1n}(k) \\ P_{21}(k) & P_{22}(k) & \cdots & P_{2n}(k) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ P_{1n}(k) & P_{2n}(k) & \cdots & P_{nn}(k) \end{pmatrix},$$

которую называют ***матрицей вероятностей перехода*** или ***переходной матрицей***.

Переходные матрицы обладают свойством: все их элементы неотрицательны и их суммы по строкам равны единице. Матрицы, обладающие таким свойством, называются ***стохастическими***.

Пример 3.4.1

Множество состояний студентов некоторого вуза с четырехлетним сроком обучения следующее: E_1 – первокурсник, E_2 – второкурсник, E_3 – третьекурсник, E_4 – выпускник.

Студенты могут выбывать из вуза в результате его окончания или отчисления, поэтому состояния E_5 – бакалавр, E_6 – лица, обучавшиеся в вузе, но не окончившие его. Построим граф (рис. 22) и составим переходную матрицу, предположив, что студент может остаться на второй год, но отчисленный студент восстановиться не может.

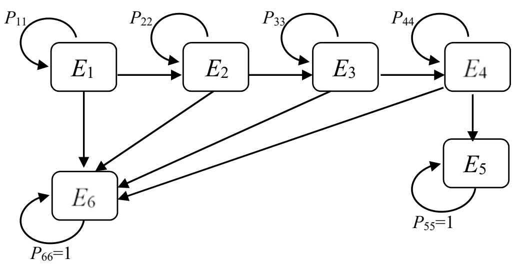


Рис. 22

Из состояния E_1 (первокурсник) за год возможны переходы в состояние E_2 (второкурсник), E_1 (остаться на 1 курсе), E_6 (выбыл из вуза). Остальные переходы считаем невозможными. Поэтому первая строка матрицы состоит из трех положительных чисел: P_{11} – вероятность остаться на 1 курсе, P_{12} – перейти на 2 курс,

P_{16} – выбыть из вуза. Остальные вероятности равны нулю. Аналогично для состояний E_2, E_3, E_4.

$$P = \begin{pmatrix} P_{11} & P_{12} & 0 & 0 & 0 & P_{16} \\ 0 & P_{22} & P_{23} & 0 & 0 & P_{26} \\ 0 & 0 & P_{33} & P_{34} & 0 & P_{36} \\ 0 & 0 & 0 & P_{44} & P_{45} & P_{46} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Причем $P_{11} = 1 - P_{12} - P_{16}$; $P_{22} = 1 - P_{23} - P_{26}$; $P_{33} = 1 - P_{34} - P_{36}$; $P_{44} = 1 - P_{45} - P_{46}$ (это вероятности сохранить свое состояние на очередном шаге).

Если переход из состояния i в состояние j невозможен, то вероятность перехода $P_{ij} = 0$.

Матрица перехода из одного состояния в другое за два шага выражается через матрицу перехода за один шаг по формуле

$$P_2 = P_1 \cdot P_1 = P_1{}^2,$$

за три шага:

$$P_3 = P_1 \cdot P_2 = P_1 \cdot P_1{}^2 = P_1{}^3.$$

В общем случае $P_n = P_1^{\,n}$, т. е. задача сводится к перемножению матриц.

Марковская цепь называется ***однородной***, если вероятности перехода не зависят от номера шага; если зависят, то ***неоднородной***.

Пример 3.4.2

Задана матрица перехода $P_1 = \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}2 \\ 0{,}6 & 0{,}4 \end{pmatrix}$. Найти матрицу перехода P_2 и P_3.

Решение. Воспользуемся формулой $P_2 = P_1^{\,2}$, получим

$$P_2 = \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}2 \\ 0{,}6 & 0{,}4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}2 \\ 0{,}6 & 0{,}4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}76 & 0{,}24 \\ 0{,}72 & 0{,}28 \end{pmatrix}.$$

Воспользуемся формулой $P_3 = P_1^{\,3}$, получим

$$P_3 = \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}2 \\ 0{,}6 & 0{,}4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0{,}76 & 0{,}24 \\ 0{,}72 & 0{,}28 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}752 & 0{,}248 \\ 0{,}744 & 0{,}256 \end{pmatrix}.$$

Заметим, что каждому графу состояний для однородной цепи соответствует определенная переходная матрица.

Пусть задано распределение состояний в начальный момент времени: $P_1(0)$, $P_2(0)$, $P_3(0)$, ..., $P_n(0)$. По формуле полной вероятности получаем распределение состояний после первого шага:

$$P_j(1) = P_1(0) \cdot P_{1j}(1) + P_2(0) \cdot P_{2j}(1) + \cdots$$

$$\cdots + P_n(0) \cdot P_{nj}(1) = \sum_{i=1}^{n} P_i(0) \cdot P_{ij}(1),$$

где $j = 1, 2, ..., n$.

Используя полученные вероятности, можно по формуле полной вероятности вычислить вероятности состояний на втором шаге:

$$P_j(2) = P_1(1) \cdot P_{1j}(2) + P_2(1) \cdot P_{2j}(2) + \cdots$$

$$\cdots + P_n(1) \cdot P_{nj}(2) = \sum_{i=1}^{n} P_i(1) \cdot P_{ij}(2),$$

где $j = 1, 2, ..., n$.

Продолжение этих рассуждений приводит к рекуррентному соотношению

$$P_i(k) = \sum_{i=1}^{n} P_i(k-1) P_{ij}(k),$$

где $j = 1, 2, ..., n$.

При определенных условиях цепи Маркова входят в стационарный режим, при котором переходы из состояния в состояние продолжаются, но вероятности переходов не изменяются и не зависят от номера шага. Эти вероятности называются ***финальными*** или ***предельными***.

Если для однородной цепи финальное распределение существует, то $P_{ij}(k) = P_{ij}(k-1)$ и рекуррентное соотношение имеет вид

$$P_i = \sum_{i=1}^{n} P_i \cdot P_{ij},$$

где $j = 1, 2, ..., n$.

Полученное соотношение можно переписать в виде системы

$$\begin{cases} p_1 = p_1 P_{11} + p_2 P_{21} + \cdots + p_n P_{n1} \\ p_2 = p_1 P_{12} + p_2 P_{22} + \cdots + p_n P_{n2} \\ \qquad\qquad\qquad \cdots \\ p_n = p_1 P_{1n} + p_2 P_{2n} + \cdots + p_n P_{nn} \end{cases}$$

Такая система всегда совместна (имеет тривиальное решение $P_i = 0$ при всех i). Если же есть нетривиальные решения, то их бесконечно много. Для выбора необходимого единственного решения необходимо добавить условие нормировки

$$p_1 + p_2 + p_3 = 1.$$

Это равенство можно добавить вместо одного из уравнений системы.

Пример 3.4.3

Граф состояний марковской цепи изображен на рис. 23 при начальном распределении $P_1(0) = 1$, $P_2(0) = P_3(0) = 0$. Найти наименее вероятное состояние на третьем шаге. Найти финальные вероятности состояния цепи.

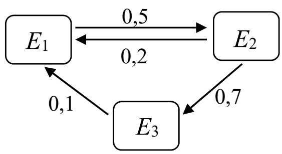


Рис. 23

Решение. Составим переходную матрицу этой цепи

$$P_{ij} = \begin{pmatrix} P_{11} & P_{12} & P_{13} \\ P_{21} & P_{22} & P_{23} \\ P_{31} & P_{32} & P_{33} \end{pmatrix}.$$

Элементы в первой строке:

$$P_{12} = 0{,}5;\, P_{13} = 0, \Rightarrow P_{11} = 1 - P_{12} - P_{13} = 1 - 0{,}5 - 0 = 0{,}5.$$

Элементы во второй строке:

$$P_{21} = 0{,}2;\, P_{23} = 0{,}7, \Rightarrow P_{22} = 1 - P_{21} - P_{23} = 1 - 0{,}2 - 0{,}7 = 0{,}2.$$

Элементы в третьей строке:

$$P_{31} = 0{,}1;\, P_{32} = 0, \Rightarrow P_{33} = 1 - P_{31} - P_{32} = 1 - 0{,}1 - 0 = 0{,}9.$$

Следовательно,

$$P_{ij} = \begin{pmatrix} 0{,}5 & 0{,}5 & 0 \\ 0{,}2 & 0{,}1 & 0{,}7 \\ 0{,}1 & 0 & 0{,}9 \end{pmatrix}.$$

Найдем вероятности состояния цепи на первом шаге. Воспользуемся формулой $P_i(k) = \sum_{i=1}^{n} P_i(k-1)P_{ij}(k)$, где $j = 1, 2, \ldots, n$, но учтем, что переходные вероятности на каждом шаге одинаковые (цепь однородная) и поэтому $P_{ij}(k)=P_{ij}$:

$$P_1(1)=P_1(0)P_{11}+P_2(0)P_{21}+P_3(0)P_{31}=1\cdot 0{,}5+0\cdot 0{,}2+0\cdot 0{,}1=0{,}5;$$

$$P_2(1)=P_1(0)P_{12}+P_2(0)P_{22}+P_3(0)P_{32}=1\cdot 0{,}5+0\cdot 0{,}1+0\cdot 0=0{,}5;$$

$$P_3(1)=P_1(0)P_{13}+P_2(0)P_{23}+P_3(0)P_{33}=1\cdot 0+0\cdot 0{,}7+0\cdot 0{,}9=0.$$

На втором шаге имеем вероятности состояний:

$$P_1(2)=P_1(1)P_{11}+P_2(1)P_{21}+P_3(1)P_{31}=0{,}5\cdot 0{,}5+0{,}5\cdot 0{,}2+0\cdot 0{,}1=0{,}35;$$

$$P_2(2)=P_1(1)P_{12}+P_2(1)P_{22}+P_3(1)P_{32}=0{,}5\cdot 0{,}5+0{,}5\cdot 0{,}1+0\cdot 0{,}1=0{,}3;$$

$$P_3(2)=P_1(1)P_{13}+P_2(1)P_{23}+P_3(1)P_{33}=0{,}5\cdot 0+0{,}5\cdot 0{,}7+0\cdot 0{,}9=0{,}35.$$

На третьем шаге имеем вероятности состояний:

$$P_1(3)=P_1(2)P_{11}+P_2(2)P_{21}+P_3(2)P_{31}=$$
$$=0{,}35\cdot 0{,}5+0{,}3\cdot 0{,}2+0{,}35\cdot 0{,}1=0{,}27;$$
$$P_2(3)=P_1(2)P_{12}+P_2(2)P_{22}+P_3(2)P_{32}=$$
$$=0{,}35\cdot 0{,}5+0{,}3\cdot 0{,}1+0{,}35\cdot 0{,}1=0{,}205;$$
$$P_3(3)=P_1(2)P_{13}+P_2(2)P_{23}+P_3(2)P_{33}=$$
$$=0{,}35\cdot 0+0{,}3\cdot 0{,}7+0{,}35\cdot 0{,}9=0{,}525.$$

То есть наименее вероятное состояние на третьем шаге – E_2.

Для нахождения финальных вероятностей состояния цепи составим систему $\begin{cases} p_1=p_1P_{11}+p_2P_{21}+p_3P_{31} \\ p_2=p_1P_{12}+p_2P_{22}+p_3P_{32} \\ p_1+p_2+p_3=1 \end{cases}$

$$\begin{cases} p_1=0{,}5p_1+0{,}2p_2+0{,}1p_3 \\ p_2=0{,}5p_1+0{,}1p_2+0\cdot p_3 \\ p_1+p_2+p_3=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -0{,}5p_1+0{,}2p_2+0{,}1p_3=0 \\ 0{,}5p_1-0{,}9p_2=0 \\ p_1+p_2+p_3=1 \end{cases}.$$

Решим систему методом Крамера.

$$\Delta=\begin{vmatrix} -0{,}5 & 0{,}2 & 0{,}1 \\ 0{,}5 & -0{,}9 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}=0{,}49;\ \Delta_1=\begin{vmatrix} 0 & 0{,}2 & 0{,}1 \\ 0 & -0{,}9 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}=0{,}09;$$

$$\Delta_2=\begin{vmatrix} -0{,}5 & 0 & 0{,}1 \\ 0{,}5 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}=0{,}05;\ \Delta_3=\begin{vmatrix} -0{,}5 & 0{,}2 & 0 \\ 0{,}5 & -0{,}9 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}=0{,}35.$$

Следовательно,

$$p_1=\frac{0{,}09}{0{,}49}\approx 0{,}18;\ p_2=\frac{0{,}05}{0{,}49}\approx 0{,}10;\ p_3=\frac{0{,}35}{0{,}49}\approx 0{,}72.$$

Эти результаты означают, что примерно 18 % времени цепь проведет в состоянии E_1, 10 % времени – в состоянии E_2, 72 % времени – в состоянии E_3.

Пример 3.4.4

В городе *N* каждый житель имел одну из профессий – *A*, *B*, или *C*. Дети в следующем поколении сохраняли профессию отцов с вероятностями соответственно 0,6, 0,2 и 0,4 и с равными вероятностями выбирали любую из двух других профессий. Если в данный момент профессию *A* имеет 20 % жителей города, профессию *B* – 30 %, а профессию *C* – 50 % жителей, то

1) каково распределение по профессиям будет в следующем поколении?
2) каким будет распределение по профессиям через много поколений (финальное распределение)?

Решение. Смену поколений будем считать шагом марковской цепи. Имеем начальное распределение (на нулевом шаге):

$$P_A(0) = 0{,}2;\ P_B(0) = 0{,}3, P_C(0) = 0{,}5.$$

Переходная матрица имеет вид:

	A	*B*	*C*
A	0,6	0,2	0,2
B	0,4	0,2	0,4
C	0,3	0,3	0,4

Найдем вероятности состояния цепи на первом шаге. Воспользуемся формулой $P_i(k) = \sum_{i=1}^{n} P_i(k-1)P_{ij}(k)$, где j = 1, 2, ..., n, но учтем, что переходные вероятности на каждом шаге одинаковые (цепь однородная) и поэтому $P_{ij}(k) = P_{ij}$:

$$P_A(1) = P_A(0)P_{11} + P_B(0)P_{21} + P_C(0)P_{31} =$$
$$= 0{,}2 \cdot 0{,}6 + 0{,}3 \cdot 0{,}4 + 0{,}5 \cdot 0{,}3 = 0{,}39;$$
$$P_B(1) = P_A(0)P_{12} + P_B(0)P_{22} + P_C(0)P_{32} =$$
$$= 0{,}2 \cdot 0{,}2 + 0{,}3 \cdot 0{,}2 + 0{,}5 \cdot 0{,}3 = 0{,}25;$$
$$P_C(1) = P_A(0)P_{13} + P_B(0)P_{23} + P_C(0)P_{33} =$$
$$= 0{,}2 \cdot 0{,}2 + 0{,}3 \cdot 0{,}4 + 0{,}5 \cdot 0{,}4 = 0{,}36.$$

То есть в следующем поколении профессию *A* будут иметь 39 % жителей города, профессию *B* – 25 %, а профессию *C* – 36 % жителей.

Для вычисления финальных вероятностей составим систему

$$\begin{cases} p_A = p_A P_{11} + p_B P_{21} + p_C P_{31} \\ p_B = p_A P_{12} + p_B P_{22} + p_C P_{32}. \\ p_C = p_A P_{13} + p_B P_{23} + p_C P_{33} \end{cases}$$

Для нахождения единственного решения заменим последнее уравнение на условие нормировки $p_A + p_B + p_C = 1$.

$$\begin{cases} p_A = 0{,}6p_A + 0{,}4p_B + 0{,}3p_C \\ p_B = 0{,}2p_A + 0{,}2p_B + 0{,}3p_C \\ p_A + p_2 + p_3 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -0{,}4p_A + 0{,}4p_B + 0{,}3p_C = 0 \\ 0{,}2p_A - 0{,}8p_B + 0{,}3p_C = 0 \\ p_A + p_2 + p_3 = 1 \end{cases}.$$

Решим систему методом Крамера.

$$\Delta = \begin{vmatrix} -0{,}4 & 0{,}4 & 0{,}3 \\ 0{,}2 & -0{,}8 & 0{,}3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0{,}78; \ \Delta_A = \begin{vmatrix} 0 & 0{,}4 & 0{,}3 \\ 0 & -0{,}8 & 0{,}3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0{,}36;$$

$$\Delta_B = \begin{vmatrix} -0{,}4 & 0 & 0{,}3 \\ 0{,}2 & 0 & 0{,}3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0{,}18; \ \Delta_C = \begin{vmatrix} -0{,}4 & 0{,}4 & 0 \\ 0{,}2 & -0{,}8 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0{,}24.$$

Следовательно,

$$p_A = \frac{0{,}36}{0{,}78} \approx 0{,}46; \ p_B = \frac{0{,}18}{0{,}78} \approx 0{,}23; \ p_C = \frac{0{,}24}{0{,}78} \approx 0{,}31.$$

То есть через много поколений (финальное распределение) профессию *A* будут иметь примерно 46 % жителей города, профессию *B* – 23 %, а профессию *C* – 31 % жителей.

Пример 3.4.5

В зоне обслуживания бригады ремонтников находится три прибора, работающих в автоматическом режиме. В конце каждого месяца ремонтники проводят профилактический осмотр приборов и в случае обнаружения неисправных забирают их для ремонта или замены на новые. Отремонтированный (или новый) прибор возвращают на место при очередном профилактическом осмотре, т. е. через месяц. Вероятность выхода из строя в течение месяца работающего прибора равна 1/3. Требуется найти стационарное распределение вероятностей числа исправных приборов в начале каждого месяца.

Решение. Рассмотрим марковскую цепь, состояния которой будем различать по числу работоспособных приборов. Пусть E_i означает, что работоспособны i приборы. Всего имеется четыре возможных состояния: E_0, E_1, E_2, E_3.

Составим переходную матрицу этой цепи. Если на данном шаге цепь находится в состоянии E_0, то на очередном шаге будут доставлены три работоспособных прибора и цепь с вероятностью 1 перейдет в состояние E_3. Поэтому $p_{00} = p_{01} = p_{02} = 0$, а $p_{03} = 1$.

Если на данном шаге цепи имеется только один работоспособный прибор (назовем его «старый» для определенности), то на следующем шаге будет поставлено два новых прибора и вероятность перехода $E_1 \to E_3$ равна вероятности того, что имеющийся в наличии «старый» прибор сохранит свою работоспособность, т. е. $p_{13} = 2/3$. Вероятность же перехода $E_1 \to E_2$ равна вероятности выхода из строя имеющегося «старого» прибора, т. е. $p_{12} = 1/3$, а $p_{10} = p_{11} = 0$.

При наличии на данном шаге двух годных («старых») приборов на следующем шаге будет поставлен один новый прибор, тогда переходные вероятности будут:

$p_{23} = P(E_2 \to E_3) = P_2(0) = \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{4}{9}$ (новый исправен, «старые» останутся исправными);

$p_{22} = P(E_2 \to E_2) = P_2(1) = \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{4}{9}$ (новый исправен, один из двух «старых» выйдет из строя);

$p_{21} = P(E_2 \to E_1) = P_2(2) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{9}$ (новый исправен, а оба «старых» выйдут из строя);

$p_{20} = P(E_2 \to E_0) = 0$ (переход невозможен, так как один прибор новый).

При наличии на данном шаге трех годных приборов в соответствии с формулой Бернулли имеем переходные вероятности:

$$p_{33} = P(E_3 \to E_3) = P_3(0) = C_3^0 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^0 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{3!}{0! \cdot (3-0)!} \cdot 1 \cdot \frac{8}{27} = \frac{8}{27}$$

(все три «старых» прибора остаются исправными);

$$p_{32} = P(E_3 \to E_2) = P_3(1) = C_3^1 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^1 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{3!}{1! \cdot (3-1)!} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{4}{9} = \frac{12}{27}$$

(один «старый» прибор выйдет из строя, два останутся рабочими);

$$p_{31} = P(E_3 \to E_1) = P_3(2) = C_3^2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^1 = \frac{3!}{2! \cdot (3-2)!} \cdot \frac{1}{9} \cdot \frac{2}{3} = \frac{6}{27}$$

(один «старый» прибор выйдет из строя, два останутся рабочими);

$$p_{30} = P(E_3 \to E_0) = P_3(3) = C_3^3 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^3 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^0 = \frac{3!}{3! \cdot (3-3)!} \cdot \frac{1}{27} \cdot 1 = \frac{1}{27}$$

(все три «старых» прибора выйдут из строя).

Запишем переходную матрицу

	E_0	E_1	E_2	E_3
E_0	0	0	0	1
E_1	0	0	1/3	2/3
E_2	0	1/9	4/9	4/9
E_3	1/27	6/27	12/27	8/27

или $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1/3 & 2/3 \\ 0 & 1/9 & 4/9 & 4/9 \\ 1/27 & 2/9 & 4/9 & 8/27 \end{pmatrix}$.

Для вычисления стационарных вероятностей (финальных вероятностей) составим систему уравнений

$$\begin{cases} p_0 = p_0 \cdot p_{00} + p_1 \cdot p_{10} + p_2 \cdot p_{20} + p_3 \cdot p_{30} \\ p_1 = p_0 \cdot p_{01} + p_1 \cdot p_{11} + p_2 \cdot p_{21} + p_3 \cdot p_{31} \\ p_2 = p_0 \cdot p_{02} + p_1 \cdot p_{12} + p_2 \cdot p_{22} + p_3 \cdot p_{32} \\ p_3 = p_0 \cdot p_{03} + p_1 \cdot p_{13} + p_2 \cdot p_{23} + p_3 \cdot p_{33} \end{cases}$$

$$\begin{cases} p_0 = p_0 \cdot 0 + p_1 \cdot 0 + p_2 \cdot 0 + p_3 \cdot \frac{1}{27} \\ p_1 = p_0 \cdot 0 + p_1 \cdot 0 + p_2 \cdot \frac{1}{9} + p_3 \cdot \frac{2}{9} \\ p_2 = p_0 \cdot 0 + p_1 \cdot \frac{1}{3} + p_2 \cdot \frac{4}{9} + p_3 \cdot \frac{4}{9} \\ p_3 = p_0 \cdot 1 + p_1 \cdot \frac{2}{3} + p_2 \cdot \frac{4}{9} + p_3 \cdot \frac{8}{27} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -p_0 + \frac{1}{27} p_3 = 0 \\ -p_1 + \frac{1}{9} p_2 + \frac{2}{9} p_3 = 0 \\ \frac{1}{3} p_1 - \frac{5}{9} p_2 + \frac{4}{9} p_3 = 0 \\ p_0 + \frac{2}{3} p_1 + \frac{4}{9} p_2 - \frac{19}{27} p_3 = 0 \end{cases}$$

Решим ее методом Гаусса

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 1/27 \\ 0 & -1 & 1/9 & 2/9 \\ 0 & 1/3 & -5/9 & 4/9 \\ 1 & 2/3 & 4/9 & -19/27 \end{pmatrix} (\mathrm{I}) + (\mathrm{IV}) \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 1/27 \\ 0 & -1 & 1/9 & 2/9 \\ 0 & 1/3 & -5/9 & 4/9 \\ 0 & 2/3 & 4/9 & -18/27 \end{pmatrix} \frac{1}{3} \cdot (\mathrm{II}) + (\mathrm{III}); \frac{2}{3} \cdot (\mathrm{II}) + (\mathrm{IV}) \sim$$

$$\sim\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 1/27 \\ 0 & -1 & 1/9 & 2/9 \\ 0 & 0 & -14/27 & 14/27 \\ 0 & 0 & 14/27 & -14/27 \end{pmatrix}(\text{III})+(\text{IV})\sim\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 1/27 \\ 0 & -1 & 1/9 & 2/9 \\ 0 & 0 & -14/27 & 14/27 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} -p_0+\frac{1}{27}p_3=0 \\ -p_1+\frac{1}{9}p_2+\frac{2}{9}p_3=0 \\ -\frac{14}{27}p_2+\frac{14}{27}p_3=0 \end{cases}$$

Получили систему трех уравнений с четырьмя неизвестными, имеющую бесчисленное множество решений. Для того чтобы получить единственное решение, добавим условие нормировки $p_0+p_1+p_2+p_3=1$.

$$\begin{cases} p_0+p_1+p_2+p_3=1 \\ -p_0+\frac{1}{27}p_3=0 \\ -p_1+\frac{1}{9}p_2+\frac{2}{9}p_3=0 \\ -\frac{14}{27}p_2+\frac{14}{27}p_3=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p_0+p_1+p_2+p_3=1 \\ p_0=\frac{1}{27}p_3 \\ p_1=\frac{1}{3}p_3 \\ p_2=p_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p_0=1/64 \\ p_1=9/64 \\ p_3=27/64 \\ p_3=27/64 \end{cases}.$$

Таким образом,

$$P(E_0)=\frac{1}{64};\ P(E_1)=\frac{9}{64};\ P(E_2)=\frac{27}{64}; P(E_3)=\frac{27}{64}.$$

Методические указания по выполнению самостоятельной работы студентов

Для выполнения предложенных заданий самостоятельной работы следует изучить представленный теоретический материал, разобрать предложенные решения типовых примеров и изучить рекомендуемую литературу.

Если студент испытывает затруднения в освоении теоретического или практического материала, то он может получить устную или письменную консультацию у ведущего преподавателя.

Задания выполнять в соответствии с предлагаемыми вариантами.

Номер варианта находится в таблице по первой букве фамилии студента.

Буква	А, О, Х	В, Ш, У	Д, Р, Щ	Е, П	Г, Ж, И	К, Ф, Э	Л, Ч, Ю	Б, М, Я	Н, Т	С, Ц, З
№ вар.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

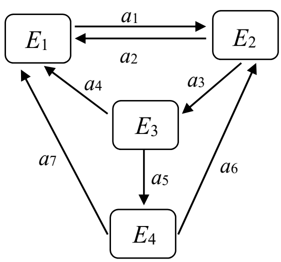
Задача 1 (см. пример 3.4.3 и исходные данные к задаче 1)

По заданному графу состояний марковской цепи написать переходную матрицу вероятностей. При начальном распределении $P_1(0) = 1$, $P_2(0) = P_3(0) = P_4(0) = 0$ найти наиболее вероятное состояние на третьем шаге. Найти предельные (финальные) вероятности состояний цепи. В вариантах 1, 6 использовать граф № 1, в вариантах 2, 7 – граф № 2, в вариантах 3, 8 – граф № 3, в вариантах 4, 9 – граф № 4, в вариантах 5, 10 – граф № 5.

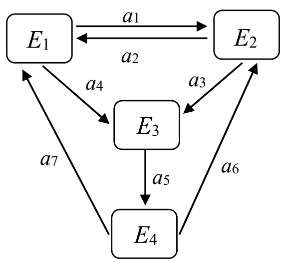
Исходные данные

№	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	№	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7
1	0,8	0,2	0,5	0,4	0,5	0,3	0,6	**6**	0,7	0,2	0,6	0,5	0,3	0,5	0,5
2	0,3	0,4	0,6	0,4	0,5	0,4	0,4	**7**	0,2	0,2	0,5	0,5	0,7	0,3	0,5
3	0,1	0,8	0,4	0,4	0,5	0,8	0,4	**8**	0,1	0,8	0,5	0,4	0,6	0,8	0,3
4	0,4	0,2	0,4	0,5	0,6	0,5	0,8	**9**	0,4	0,1	0,5	0,5	0,8	0,6	0,9
5	0,3	0,2	0,9	0,6	0,7	0,7	0,2	**10**	0,2	0,1	0,8	0,7	0,6	0,8	0,2

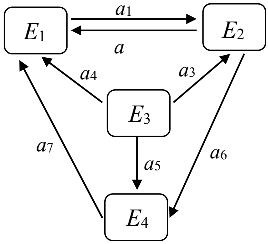
Граф № 1



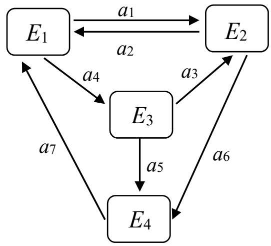
Граф № 2



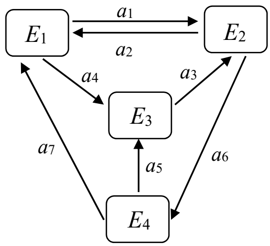
Граф № 3



Граф № 4



Граф № 5



Задача 2 (см. пример 3.4.4 и исходные данные к задаче 2)

Каждый житель некоторого города принадлежит к одной из социальных групп (богатые, средний класс, живущие за чертой бедности). По истечении года представитель i-й группы сохраняет свой социальный статус с вероятностью P_i или с равными вероятностями переходит в одну из двух других групп. Пусть в данный момент *a %* жителей богаты, *b %* относятся к среднему классу, *c %* живут в нищете.

В предположении, что описанная социальная динамика остается неизменной на протяжении многих лет, определите финальный социальный состав жителей города.

Исходные данные

№	a	b	c	P_1	P_2	P_3	№	a	b	c	P_1	P_2	P_3
1	5	65	35	0,9	0,5	0,9	**6**	15	65	20	0,8	0,6	0,9
2	10	65	30	0,8	0,6	0,9	**7**	5	65	35	0,9	0,6	0,9
3	10	60	30	0,7	0,8	0,9	**8**	10	60	30	0,9	0,5	0,9
4	15	55	30	0,9	0,6	0,9	**9**	10	70	20	0,7	0,8	0,9
5	5	70	25	0,9	0,5	0,9	**10**	8	70	22	0,9	0,5	0,9

Задача 3 (см. примеры 3.4.3, 3.4.4 и исходные данные к задаче 3)

Недостающие элементы переходной матрицы найдите из условия, что переходная матрица является стохастической.

Перед началом теледебатов зрители разделялись на три равные по численности группы: E_1 – сторонники кандидата A; E_2 – не определившиеся; E_3 – сторонники кандидата B.

Оказалось, что после обсуждения каждого вопроса зрители меняли свое предпочтение в соответствии с матрицей перехода

	E_1	E_2	E_3
E_1	P_{11}	P_{12}	P_{13}
E_2	P_{21}	P_{22}	P_{23}
E_3	P_{31}	P_{32}	P_{33}

Найдите распределение предпочтений зрителей после обсуждения трех вопросов. Найдите распределение предпочтений зрителей после обсуждения достаточно большой серии вопросов.

Исходные данные

№	P_{11}	P_{12}	P_{21}	P_{22}	P_{31}	P_{32}	№	P_{11}	P_{12}	P_{21}	P_{22}	P_{31}	P_{32}
1	0,9	0,1	0,1	0,8	0	0,2	**6**	0,8	0,2	0,05	0,9	0	0,1
2	0,8	0,2	0,1	0,8	0,1	0,1	**7**	0,8	0,15	0,1	0,8	0	0,2
3	0,8	0,15	0,1	0,8	0	0,1	**8**	0,9	0,05	0,1	0,8	0,1	0,1
4	0,9	0,05	0,1	0,8	0	0,2	**9**	0,9	0,1	0,05	0,8	0	0,2
5	0,9	0,1	0,1	0,8	0	0,05	**10**	0,9	0,1	0,1	0,8	0	0,1

Задача 4 (см. пример 3.4.5 и исходные данные к задаче 4)

В некоторой фирме имеется n однотипных устройств (например, ксероксов, принтеров и т. п.). Устройства эксплуатируются с перегрузкой и поэтому часто выходят из строя. В конце каждой недели фирма подаёт заявку на поставку новых устройств для замены вышедших из строя. Время исполнения заявки – одна неделя. Вероятность выхода из строя в течение недели для каждого работающего устройства равна p. Найдите стационарное распределение числа пригодных к работе устройств в начале недели.

Исходные данные

№	n	p	№	n	p	№	n	p	№	n	p	№	n	p
1	3	1/4	**3**	5	1/5	**5**	4	1/2	**7**	3	1/5	**9**	5	1/4
2	4	1/3	**4**	3	1/2	**6**	5	1/2	**8**	4	1/4	**10**	3	1/6

Контрольные вопросы

1. Дайте определение случайного процесса.
2. Дайте определение графа состояний. Какое состояние называют источником, поглощающим, соседним, эргодическим?
3. Какой процесс называют марковским?
4. Дайте определение цепи Маркова с дискретным временем, непрерывным временем.
5. Что называют матрицей вероятностей перехода?
6. С помощью чего описывают любой марковский процесс?
7. Что называют вероятностями состояний, переходными вероятностями, предельными вероятностями?
8. Какая цепь Маркова называется однородной, неоднородной?

Рекомендуемая литература

1. Гмурман, В. Е. Теория вероятностей и математическая статистика : учеб. пособие для вузов / В. Е. Гмурман. – Изд. 11-е, стер. – Москва : Высшая школа, 2005. – 479 с. – ISBN 5-06-004214-6.
2. Климов, Г. П. Теория вероятностей и математическая статистика: учебник / Г. П. Климов. – 2-е изд. – Москва : Изд-во Московского университета, 2011. – 365 с. – ISBN 978-5-211-05846-0.
3. Лисьев, В. П. Теория вероятностей и математическая статистика : учеб. пособие / В. П. Лисьев ; Московский государственный университет экономики, статистики и информатики, Евразийский открытый институт. – Москва : ЕАОИ, 2010. – 199 с. – URL: www.iprbookshop.ru/10857.html (дата обращения: 27.10.2021). – ISBN 5-374-00005-5.
4. Пугачев, В. С. Теория вероятностей и математическая статистика : учеб. пособие для втузов / В. С. Пугачев. – Москва : Наука, 1979. – 495 с.
5. Щербакова, Ю. В. Теория вероятностей и математическая статистика : учеб. пособие для СПО / Ю. В. Щербакова. – Саратов : Научная книга, 2019. – 158, [1] с. – URL: www.iprbookshop.ru/87081.html (дата обращения: 27.10.2021). – ISBN 978-5-9758-1898-0.

МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ ПО ВЫПОЛНЕНИЮ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

Для выполнения заданий следует изучить соответствующие разделы дисциплины по пособию и (или) по предложенным в списке рекомендуемой литературы источникам. В пособии даются некоторые начальные теоретические сведения и приводятся решения типовых примеров. Если студент испытывает затруднения в освоении теоретического или практического материала, то он может получить устную или письменную консультацию у ведущего преподавателя.

По завершении изучения раздела «Теория вероятностей и математическая статистика» дисциплины «Высшая математика-3» преподаватель проводит промежуточный контроль в виде итоговой контрольной работы с целью проверки и оценки знаний и умений студентов. Задания контрольной работы должны быть выполнены аккуратно, последовательно, обоснование решения и ответ обязательны в каждом задании. При выполнении контрольных работ не допускается использование мобильных устройств и гаджетов.

К данной контрольной работе допускаются студенты, получившие по всем практическим работам «зачтено».

«Зачтено» за каждое практическое занятие студент получает при правильном выполнении 75 % заданий, предложенных для самостоятельного решения.

Контрольная работа оценивается в 25 баллов, содержит 10 заданий, каждое задание оценивается в 2,5 балла.

- 2,5 балла получает студент, если задание выполнено в полном объеме;
- 2 балла – если задание выполнено в объеме от 80 % и выше;
- 1,5 балла – если задание выполнено в объеме от 60 % до 79 %;
- 1 балл – если задание выполнено в объеме от 40 % до 59 %;
- 0,5 балла – если задание выполнено в объеме от 20 % до 39 %;
- 0 баллов – если задание выполнено в объеме менее 19 %.

Пример варианта итоговой контрольной работы

1. Случайная величина распределена равномерно на отрезке [0, 4]. Найти вероятность попасть в интервал [1, 3].

2. Сколькими способами можно расставить на полке 6 различных книг?

3. Бросаются 2 кубика. Найдите вероятность, что сумма выпавших очков равна 3. Ответ округлите до тысячных.

4. Для сигнализации об аварии установлены два независимо работающих сигнализатора. Вероятность того, что при аварии сигнализатор сработает, равна 0,95 для первого сигнализатора и 0,9 – для второго. Вероятность того, что при аварии не сработает ни один сигнализатор, равна.

5. Стрелок попадает в цель в среднем в 8 случаях из 10. Найти вероятность, что, сделав три выстрела, он два раза попадет в цель, равна. Ответ округлите до тысячных.

6. Дан закон распределения ДСВ. Вычислите все числовые характеристики.

x	–1	0	1
p	0,2	0,5	0,3

7. Число грузовых машин, проезжающих мимо бензоколонки, относится к числу легковых машин как 3:2. Известно, что в среднем одна из 30 грузовых и одна из 25 легковых машин останавливается для заправки. Вероятность того, что проезжающая легковая машина будет заправляться, равна. Ответ округлите до тысячных.

8. Дана выборка объема $n = 7$: 3, 5, –2, 1, 0, 4, 3.

а) построить простой статистический ряд распределения частот и полигон относительных частот;

б) вариационный ряд;

в) найти выборочную среднюю, исправленную дисперсию, среднее квадратическое отклонение;

г) записать эмпирическую функцию распределения и построить ее график.

9. По результатам n независимых наблюдений получены оценки математического ожидания и дисперсии s^2 случайной величины X. Постройте доверительные интервалы для математического ожидания этой случайной величины при уровнях надёжности $\gamma = 0{,}95$ и $\gamma = 0{,}98$.

n	$\overline{X}$	s^2	№	n	$\overline{X}$	s^2
64	1,2	4,5	6	55	4,2	3,6

10. На шоссе между двумя городами располжены три автозаправочные станции. В течение часа на этих станциях заправилось соответственно k_1, k_2 и k_3 автомобилей. При уровне значимости $\beta = 0{,}05$ согласуется ли с этими данными предположение, что автозаправки одинаково популярны у автовладельцев?

k_1	k_2	k_3	**№**	k_1	k_2	k_3
52	73	76	**6**	61	81	59

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Изучив материал раздела «Теория вероятностей и математическая статистика», выполнив задания по практическим работам, студент будет иметь представление: о задачах комбинаторики, классическом, статистическом, геометрическом определении вероятностей, о теоремах сложения и умножения вероятностей, формулах полной вероятности, Байеса, Бернулли, асимптотических формулах, дискретных и непрерывных случайных величинах, их числовых характеристиках, видах распределений, статистических характеристиках вариационных рядов, доверительных интервалах, о проверке статистических гипотез, о цепях Маркова.

Для оценки своих результатов обучения по данному курсу предлагается ответить на вопросы самоконтроля, приведенные ниже.

ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЯ

1. Что понимается под испытанием (опытом, экспериментом)?

2. Дайте определение события.

3. Какие события называются несовместными?

4. Какие события называются единственно возможными?

5. Дайте определение полной группы событий.

6. Что понимают под элементарными исходами (случаями, шансами)?

7. Сформулируйте классическое определение вероятности события.

8. Перечислите свойства вероятности события.

9. Сформулируйте принцип практической невозможности появления маловероятного события.

10. Сформулируйте статистическое определение вероятности события.

11. Сформулируйте геометрическое определение вероятности события.

12. Дайте определение суммы событий.

13. Дайте определение произведения событий.

14. Дайте определение разности событий.

15. Запишите формулу числа размещений без повторений.

16. Запишите формулу числа перестановок без повторений.

17. Запишите формулу числа сочетаний без повторений.

18. Сформулируйте теорему сложения вероятностей для несовместных событий.

19. Сформулируйте теорему сложения вероятностей для произвольных событий.

20. Дайте определение условной вероятности события.

21. Какие события называются независимыми?

22. Сформулируйте теорему умножения вероятностей.

23. Запишите формулу полной вероятности.

24. Запишите формулу Байеса.

25. Дайте определение схемы Бернулли.

26. Запишите формулу Бернулли.

27. Запишите формулу определения наивероятнейшего числа наступления успеха в схеме Бернулли.

28. Запишите формулу Пуассона.

29. Сформулируйте локальную теорему Муавра-Лапласа.

30. Запишите функцию Гаусса.

31. Перечислите свойства функции Гаусса.

32. Сформулируйте интегральную теорему Муавра – Лапласа.

33. Запишите функцию Лапласа.

34. Перечислите свойства функции Лапласа.

35. Дайте определение дискретной случайной величины. Приведите пример.

36. Дайте определение непрерывной случайной величины. Приведите пример.

37. Дайте определение закона распределения случайной величины.

38. Дайте определение ряда распределения случайной величины.

39. Дайте определение независимых случайных величин.

40. Дайте определение произведения случайной величины на число.

41. Дайте определение степени случайной величины.

42. Дайте определение суммы случайных величин.

43. Дайте определение разности случайных величин.

44. Дайте определение произведения случайных величин.

45. Дайте определение математического ожидания дискретной случайной величины.

46. Перечислите свойства математического ожидания случайной величины.

47. Дайте определение дисперсии случайной величины.

48. Запишите формулы, по которым можно рассчитать дисперсию.

49. Перечислите свойства дисперсии случайной величины.

50. Дайте определение среднего квадратического отклонения случайной величины.

51. Дайте определение моды дискретной случайной величины.

52. Дайте определение медианы дискретной случайной величины.

53. Дайте определение интегральной функции распределения случайной величины.

54. Перечислите свойства интегральной функции распределения случайной величины.

55. Определите непрерывную случайную величину с помощью интегральной функции распределения.

56. Дайте определение дифференциальной функции распределения случайной величины.

57. Запишите формулу вычисления вероятности попадания непрерывной случайной величины в отрезок.

58. Запишите формулу связи интегральной и дифференциальной функций распределения непрерывной случайной величины.

59. Перечислите свойства дифференциальной функции распределения случайной величины.

60. Запишите формулу вычисления математического ожидания непрерывной случайной величины.

61. Запишите формулу вычисления дисперсии непрерывной случайной величины.

62. Дайте определение случайной величины, имеющей биномиальное распределение.

63. Дайте определение случайной величины, имеющей геометрическое распределение.

64. Дайте определение случайной величины, имеющей гипергеометрическое распределение.

65. Дайте определение случайной величины, имеющей распределение Пуассона.

66. Дайте определение случайной величины, имеющей равномерное распределение.

67. Запишите дифференциальную функцию равномерно распределенной случайной величины.

68. Запишите интегральную функцию равномерно распределенной случайной величины.

69. Запишите формулы вычисления математического ожидания и дисперсии равномерно распределенной случайной величины.

70. Дайте определение случайного числа от 0 до 1.

71. Дайте определение случайной величины, имеющей показательное (экспоненциальное) распределение.

72. Дайте определение случайной величины, имеющей нормальное распределение.

73. Запишите интегральную функцию нормально распределенной случайной величины.

74. Дайте определение стандартного нормального распределения.

75. Запишите формулу вычисления вероятности попадания в интервал нормально распределенной случайной величины.

76. Сформулируйте правило трех сигм.

77. Дайте определение многомерной случайной величины.

78. Дайте определение закона распределения дискретной двумерной случайной величины.

79. Дайте определение функции распределения двумерной случайной величины.

80. Перечислите свойства функции распределения двумерной случайной величины.

81. Дайте определение непрерывной двумерной случайной величины.

82. Дайте определение совместной плотности двух случайных величин.

83. Перечислите свойства совместной плотности двух случайных величин.

84. Дайте определение коэффициента корреляции двух случайных величин.

85. Запишите неравенство Маркова.

86. Какие значения может принимать случайная величина, для которой выполняется неравенство Маркова?

87. Запишите неравенство Чебышева.

88. Какими должны быть случайные величины, чтобы для них выполнялось неравенство Чебышева?

89. Запишите формулировку теоремы Чебышева.

90. Запишите формулировку закона больших чисел.

91. К чему стремится среднее значение величин согласно закону больших чисел?

92. Запишите формулировку теоремы Бернулли.

93. Запишите закон больших чисел в форме Бернулли.

94. К чему стремится частость событий при неограниченном увеличении числа испытаний в схеме Бернулли?

95. Сформулируйте следствие из теоремы Ляпунова о законе распределения суммы случайных величин.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Алибеков, И. Ю. Теория вероятностей и математическая статистика в среде MATLAB : учеб. пособие / И. Ю. Алибеков. – Изд. 2-е, стер. – Санкт-Петербург : Лань, 2021. – 181 с. – URL: e.lanbook.com/book/152661 (дата обращения: 27.10.2021). – ISBN 978-5-8114-6865-2.
2. Боровков, А. А. Теория вероятностей : [учеб. пособие для вузов] / А. А. Боровков. – Москва : Наука, 1976. – 352 с.
3. Бочаров, П. П. Теория вероятностей. Математическая статистика : учеб. пособие / П. П. Бочаров, А. В. Печинкин. – Москва : Гардарики, 1998. – 326 с. – ISBN 5-7762-0035-0.
4. Вентцель, Е. С. Теория вероятностей и ее инженерные приложения : учеб. пособие для втузов / Е. С. Вентцель, Л. А. Овчаров. – Изд. 2-е, стер. – Москва : Высшая школа, 2000. – 480 с. – ISBN 5-06-003830-0.
5. Геворкян, П. С. Теория вероятностей и математическая статистика : учеб. пособие для вузов / П. С. Геворкян, А. В. Потемкин, И. М. Эйсымонт. – 2-е изд., перераб. и доп. – Москва : Физматлит, 2016. – 176 с. – ISBN 978-5-9221-1682-4.
6. Гмурман, В. Е. Теория вероятностей и математическая статистика : учеб. пособие для вузов / В. Е. Гмурман. – 7-е изд., стер. – Москва : Высшая школа, 2001. – 479 с.
7. Горелова, Г. В. Теория вероятностей и математическая статистика в примерах и задачах с применением Excel : учеб. пособие для студентов вузов / Г. В. Горелова, И. А. Кацко. – Ростов-на-Дону : Феникс, 2002. – 395, [3] с. – ISBN 5-222-02009-6.
8. Гриднева, И. В. Теория вероятностей и математическая статистика : учеб. пособие / И. В. Гриднева, Л. И. Федулова, В. П. Шацкий ; Воронежский государственный аграрный университет имени Императора Петра I. – Воронеж : Воронежский ГАУ, 2017. – 165 с. – URL: www.iprbookshop.ru/72762.html (дата обращения: 27.10.2021).
9. Гусак, А. А. Теория вероятностей : справочное пособие к решению задач / А. А. Гусак, Е. А. Бричикова. – 2-е изд., стер. – Минск : ТетраСистемс, 2000. – 286 с. – ISBN 985-6577-24-1.

10. Коваленко, И. Н. Теория вероятностей : [учебник для университетов и втузов] / И. Н. Коваленко, Б. В. Гнеденко. – Киев : Выща школа, 1990. – 327, [1] с. – ISBN 5-11-001842-1.
11. Коваленко, И. Н. Теория вероятностей и математическая статистика : [учеб. пособие для втузов] / И. Н. Коваленко, А. А. Филиппова. – Москва : Высшая школа, 1973. – 368 с.
12. Колемаев, В. А. Теория вероятностей и математическая статистика : [учеб. пособие] / В. А. Колемаев, О. В. Староверов, В. Б. Турундаевский ; под ред. В. А. Колемаева. – Москва : Высшая школа, 1991. – 399, [1] с. – ISBN 5-06-001545-9.
13. Колемаев, В. А. Теория вероятностей и математическая статистика : учебник для студентов вузов / В. А. Колемаев, В. Н. Калинина. – 2-е изд., перераб. и доп. – Москва : ЮНИТИ, 2003. – 352 с. – ISBN 5-238-00560-1.
14. Кремер, Н. Ш. Теория вероятностей и математическая статистика : учебник / Н. Ш. Кремер. – 2-е изд., перераб. и доп. – Москва : ЮНИТИ-ДАНА, 2006. – 573 с. – ISBN 5-238-00573-3.
15. Лазарева, Л. И. Теория вероятностей. Математическая статистика : учеб. пособие / Л. И. Лазарева, А. А. Михальчук ; Томский политехнический университет, Институт дистанционного образования. – 2-е изд., доп. – Томск : Изд-во ТПУ, 2002. – 131 с.
16. Лисьев, В. П. Теория вероятностей и математическая статистика : учеб. пособие / В. П. Лисьев ; Московский государственный университет экономики, статистики и информатики, Евразийский открытый институт. – Москва : ЕАОИ, 2010. – 199 с. – URL: www.iprbookshop.ru/10857.html (дата обращения: 27.10.2021). – ISBN 5-374-00005-5.
17. Прохоров, Ю. В. Теория вероятностей : Основные понятия. Предельные теоремы. Случайные процессы / Ю. В. Прохоров, Ю. А. Розанов. – 2-е изд., перераб. – Москва : Наука, 1973. – 494 с. – (Справочная математическая библиотека).
18. Пугачев, В. С. Теория вероятностей и математическая статистика : учеб. пособие для втузов / В. С. Пугачев. – Москва : Наука, 1979. – 495 с.

19. Свешников, А. А. Теория вероятностей и случайных функций : Системы случайных величин : учеб. пособие / А. А. Свешников. – Ленинград : Изд-во Ленинградского политехнического института, 1982. – 70 с.
20. Соколов, Г. А. Теория вероятностей : учебник / Г. А. Соколов, Н. А. Чистякова. – Москва : Экзамен, 2005. – 414 с. – (Учебник для вузов). – ISBN 5-472-00848-4.
21. Солодовников, А. С. Теория вероятностей : учеб. пособие / А. С. Солодовников. – Москва : Просвещение, 1978. – 192 с.
22. Теория вероятностей : учебник для студентов втузов / В. А. Печинкин, О. И. Тескин, Г. М. Цветкова [и др.] ; под ред. В. С. Зарубина и А. П. Крищенко. – Москва : Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 1999. – 455 с. – (Математика в техническом университете ; вып. 16). – ISBN 5-7038-1307-7.
23. Теория вероятностей. – Ижевск : НИЦ РХД, 2003. – 1 CD.
24. Тутубалин, В. Н. Теория вероятностей и случайных процессов. Основы математического аппарата и прикладные аспекты : [учеб. пособие] / В. Н. Тутубалин. – Москва : Изд-во МГУ, 1992. – 394, [1] с. – ISBN 5-211-02264-5.
25. Щербакова, Ю. В. Теория вероятностей и математическая статистика : учеб. пособие для СПО / Ю. В. Щербакова. – Саратов : Научная книга, 2019. – 158, [1] с. – URL: www.iprbookshop.ru/87081.html (дата обращения: 27.10.2021). – ISBN 978-5-9758-1898-0.

ГЛОССАРИЙ

Асимметрия – отношение центрального момента третьего порядка к кубу среднеквадратического отклонения.

Бесповторная выборка – выборка, при которой отобранный объект после проведения обследований не возвращается в генеральную совокупность.

Вероятность – это отношение числа благоприятных исходов к общему числу исходов при равенстве событийной ценности (веса) исходов.

Вероятность состояний марковского случайного процесса – вероятности того, что система (случайный процесс) в момент времени t находится в одном из своих состояний.

Внутригрупповая дисперсия – средняя арифметическая групповых дисперсий, взвешенная по объемам групп.

Выборка – совокупность случайно отобранных из изучаемой совокупности объектов (генеральной выборки).

Выборочное среднее – частное от деления суммы значений всех элементов выборки на число элементов выборки.

Гистограмма – ступенчатая фигура, состоящая из прямоугольников, основаниями которых служат интервалы длиною h, а высотой n.

Граф состояний – схема, которая изображает возможные состояния системы и ее возможные переходы из состояния в состояние.

Групповая дисперсия – дисперсия значений признака, принадлежащих группе, относительно групповой средней.

Групповая средняя – среднее арифметическое значений признака, принадлежащих группе.

Двумерная случайная величина – величина, имеющая два аргумента.

Дискретная случайная величина – величина, принимающая отдельные значения с определенными вероятностями.

Дисперсия случайной величины – математическое ожидание квадрата отклонения случайной величины от ее математического ожидания.

Доверительный интервал – интервал, который покрывает неизвестный параметр x с заданной надежностью (вероятностью) *p*. Доверительный интервал обладает тем свойством, что, во-первых, его границы вычисляются исключительно по выборке (и, следовательно, не зависят от неизвестного параметра), и, во-вторых, он накрывает неизвестный параметр с вероятностью *p*.

Достоверное событие – событие, которое обязательно произойдет, если будет осуществлена определенная совокупность условий.

Закон распределения случайной величины – соответствие между возможными значениями случайной величины и их вероятностями.

Интервальная оценка – оценка, которая определяется концами интервала.

Конкурирующая гипотеза – гипотеза, противоречащая основной.

Корреляционная зависимость – зависимость, при которой при изменении одной из величин изменяется среднее значение другой.

Корреляционный момент – характеристика связи между двумя случайными величинами.

Коэффициент вариации – выраженное в процентах отношение выборочного среднеквадратического отклонения к выборочной средней.

Коэффициент корреляции – отношение ковариации к произведению среднеквадратических отклонений двух случайных величин.

Критерий Стьюдента – направлен на оценку различий величин средних и двух выборок X и Y, которые распределены по нормальному закону. Одним из главных достоинств критерия является широта его применения. Он может быть использован для сопоставления средних *у* связных и несвязных выборок, причем выборки могут быть не равны по величине.

Критическая область – совокупность значений критерия, при которых нулевую гипотезу отвергают.

Марковский случайный процесс – случайный процесс, протекающий в системе, для которого в каждый момент времени t_0 вероятность любого состояния системы в будущем (при $t > t_0$) зависит только от ее состояния в настоящем (при $t = t_0$) и не зависит от того, когда и каким образом система пришла в это состояние (т. е. как развивался процесс в прошлом).

Математическое ожидание – число, относительно которого стабилизируется среднее арифметическое возможных значений случайной величины при достаточно большом количестве испытаний.

Межгрупповая дисперсия – дисперсия групповых средних относительно общей средней.

Метод наименьших квадратов – задача заключается в нахождении коэффициентов функциональной зависимости исследуемых переменных величин, при которых обеспечивается минимальная дисперсия разницы выборочных значений и функции, которой аппроксимируют стохастическую зависимость исследуемых переменных. То есть при данных a и b сумма квадратов отклонений экспериментальных данных от найденной прямой будет наименьшей.

Мода – варианта ряда, которая имеет наибольшую частоту.

Моменты случайных величин – характеристики случайных величин, определяющие математическое ожидание k-й степени отклонения случайной величины.

Непрерывная случайная величина – величина, принимающая значения, сколь угодно мало отличающиеся друг от друга.

Несмещенная оценка – оценка x, математическое ожидание которой равно оцениваемому параметру x.

Нулевая гипотеза – основная выдвинутая гипотеза.

Общая дисперсия – дисперсия значений признака всей совокупности относительно общей средней.

Однородный марковский процесс – процесс, в котором вероятности перехода за единицу времени не зависят от того, где на оси времени происходит переход.

Переходные вероятности марковского процесса – вероятности перехода системы из одного состояния в любое другое.

Плотность распределения вероятностей – вероятность того, что непрерывная случайная величина примет значение на указанном интервале.

Повторная выборка – выборка, при которой отобранный объект возвращается после проведения обследования обратно в генеральную совокупность.

Полигон частот – ломаная линия, отрезки которой соединяют точки (x_i, p_i).

Производящая функция – функция, определяющая вероятность наступления события при различных вероятностях появления в каждом испытании.

Размах варьирования *R* – разность между наибольшей и наименьшей вариантой.

Регрессия – представление одной случайной величины как функции другой.

Случайная величина – величина, которая имеет неизвестное значение до испытания (множество альтернатив), а в результате информативного испытания может принять какое-либо определенное или более ограниченное в альтернативах значение.

Случайный процесс – семейство случайных величин $X(t)$, где параметр $t \in T$ – множеству значений параметра.

Случайный процесс с дискретным временем – процесс $X(t)$, параметр которого принимает дискретные значения (обычно $t = 0, 1, 2, \ldots$).

Случайный процесс с дискретными значениями – процесс $X(t)$, семейство случайных величин которого содержит только дискретные случайные величины.

Случайный процесс с непрерывным временем – процесс $X(t)$, параметр которого изменяется на некотором конечном или бесконечном интервале.

Случайный процесс с непрерывными значениями – процесс $X(t)$, семейство случайных величин которого содержит только непрерывные случайные величины.

Состояния случайного процесса (системы) – возможные значения случайных величин, образующих случайный процесс.

Состоятельная оценка – оценка, которая при $n > n_0$ стремится по вероятности к оцениваемому параметру.

Статистическая гипотеза – гипотеза (предположение) о виде неизвестного распределения или параметрах неизвестного распределения.

Статистический критерий – случайная величина, служащая для проверки нулевой гипотезы.

Статистическое распределение выборки – перечень вариант и соответствующих им частот или относительных частот.

Стохастическая зависимость – зависимость, при которой изменение одной из величин влечет изменение другой.

Теорема Лапласа – определение вероятности наступления события в k измерениях из n (при больших k и n).

Теория вероятностей – наука, изучающая общие закономерности случайных явлений массового характера.

Точечная оценка – оценка, которая определяется одним числом.

Условная вероятность – вероятность наступления интересующего нас события, связанная с дополнительными условиями.

Формула Байеса – определение апостериорной (послеопытной) вероятности на основе априорной (доопытной) на основе проведения эксперимента.

Формула Бернулли – определение вероятности наступления события в измерениях из n.

Функция распределения – функция, определяющая вероятность того, что X примет значение меньше x.

Характеристики положения – характеристики, определяющие наиболее возможные значения случайной величины.

Характеристики рассеивания – характеристики, определяющие разброс возможных значений случайной величины.

Центральная предельная теорема – теорема, доказывающая, что суммирование большого числа случайных величин с различными законами распределения приводит в итоге к нормальному распределению.

Цепь Маркова – марковский случайный процесс с дискретным временем и дискретным конечным множеством состояний.

Эксцесс распределения – мера островершинности распределения, величина, определяемая отношением центрального момента четвертого порядка к четвертой степени среднего квадратического отклонения за вычетом тройки. Эксцесс показывает, как быстро уменьшается плотность распределения вблизи её максимального значения. Для нормального распределения Гаусса эксцесс равен нулю.

Эффективная оценка – такая оценка, которая при заданном объеме выборки n имеет наименьшую возможную дисперсию.

Приложение А

Таблица значений функции $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,3989	3989	3989	3988	3986	3984	3982	3980	3977	3973
0,1	3970	3965	3961	3956	3951	3945	3939	3932	3925	3918
0,2	3910	3902	3894	3885	3876	3867	3857	3847	3836	3825
0,3	3814	3802	3790	3778	3765	3752	3739	3726	3712	3697
0,4	3683	3668	3652	3637	3621	3605	3589	3572	3555	3538
0,5	3521	3503	3485	3467	3448	3429	3410	3391	3372	3352
0,6	3332	3312	3292	3271	3251	3230	3209	3187	3166	3144
0,7	3123	3101	3079	3056	3034	3011	2989	2966	2943	2920
0,8	2897	2874	2850	2827	2803	2780	2756	2732	2709	2685
0,9	2661	2637	2613	2589	2565	2541	2516	2492	2468	2444
1,0	0,2420	2396	2371	2347	2323	2299	2275	2251	2227	2203
1,1	2179	2155	2131	2107	2083	2059	2036	2012	1989	1965
1,2	1942	1919	1895	1872	1849	1826	1804	1781	1758	1736
1,3	1714	1691	1669	1647	1626	1604	1582	1561	1539	1518
1,4	1497	1476	1456	1435	1415	1394	1374	1354	1334	1315
1,5	1295	1276	1257	1238	1219	1200	1182	1163	1145	1127
1,6	1109	1092	1074	1057	1040	1023	1006	0989	0973	0957
1,7	0940	0925	0909	0893	0878	0863	0848	0833	0818	0804
1,8	0790	0775	0761	0748	0734	0721	0707	0694	0681	0669
1,9	0656	0644	0632	0620	0608	0596	0584	0573	0562	0551
2,0	0,0540	0529	0519	0508	0498	0488	0478	0468	0459	0449
2,1	0440	0431	0422	0413	0404	0396	0387	0379	0371	0363
2.2	0355	0347	0339	0332	0325	0317	0310	0303	0297	0290
2,3	0283	0277	0270	0264	0258	0252	0246	0241	0235	0229
2,4	0224	0219	0213	0208	0203	0198	0194	0189	0184	0180
2,5	0175	0171	0167	0163	0158	0154	0151	0147	0143	0139
2,6	0136	0132	0129	0126	0122	0119	0116	0113	0110	0107
2,7	0104	0101	0099	0096	0093	0091	0088	0086	0084	0081
2,8	0079	0077	0075	0073	0071	0069	0067	0065	0063	0061
2,9	0060	0058	0056	0055	0053	0051	0050	0048	0047	0046
3,0	0,0044	0043	0042	0040	0039	0038	0037	0036	0035	0034
3,1	0033	0032	0031	0030	0029	0028	0027	0026	0025	0025
3,2	0024	0023	0022	0022	0021	0020	0020	0019	0018	0018
3,3	0017	0017	0016	0016	0015	0015	0014	0014	0013	0013
3,4	0012	0012	0012	0011	0011	0010	0010	0010	0009	0009
3,5	0009	0008	0008	0008	0008	0007	0007	0007	0007	0006

Приложение Б

Таблица значений функции $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-t^2/2}dt$

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
0,00	0,0000	0,39	0,1517	0,78	0,2823	1,17	0,3790
0,01	0,0040	0,40	0,1554	0,79	0,2852	1,18	0,3810
0,02	0,0080	0,41	0,1591	0,80	0,2881	1,19	0,3830
0,03	0,0120	0,42	0,1628	0,81	0,2910	1,20	0,3849
0,04	0,0160	0,43	0,1664	0,82	0,2939	1,21	0,3869
0,05	0,0199	0,44	0,1700	0,83	0,2967	1,22	0,3883
0,06	0,0239	0,45	0,1736	0,84	0,2995	1,23	0,3907
0,07	0,0279	0,46	0,1772	0,85	0,3023	1,24	0,3925
0,08	0,0319	0,47	0,1808	0,86	0,3051	1,25	0,3944
0,09	0,0359	0,48	0,1844	0,87	0,3078	1,26	0,3962
0,10	0,0398	0,49	0,1879	0,88	0,3106	1,27	0,3980
0,11	0,0438	0,50	0,1915	0,89	0,3133	1,28	0,3997
0,12	0,0478	0,51	0,1950	0,90	0,3159	1,29	0,4015
0,13	0,0517	0,52	0,1985	0,91	0,3186	1,30	0,4032
0,14	0,0557	0,53	0,2019	0,92	0,3212	1,31	0,4049
0,15	0,0596	0,54	0,2054	0,93	0,3238	1,32	0,4066
0,16	0,0636	0,55	0,2088	0,94	0,3264	1,33	0,4082
0,17	0,0675	0,56	0,2123	0,95	0,3289	1,34	0,4099
0,18	0,0714	0,57	0,2157	0,96	0,3315	1,35	0,4115
0,19	0,0753	0,58	0,2190	0,97	0,3340	1,36	0,4131
0,20	0,0793	0,59	0,2224	0,98	0,3365	1,37	0,4147
0,21	0,0832	0,60	0,2257	0,99	0,3389	1,38	0,4162
0,22	0,0871	0,61	0,2291	1,00	0,3413	1,39	0,4177
0,23	0,0910	0,62	0,2324	1,01	0,3438	1,40	0,4192
0,24	0,0948	0,63	0,2357	1,02	0,3461	1,41	0,4207
0,25	0,0987	0,64	0,2389	1,03	0,3485	1,42	0,4222
0,26	0,1026	0,65	0,2422	1,04	0,3508	1,43	0,4236
0,27	0,1064	0,66	0,2454	1,05	0,3531	1,44	0,4251
0,28	0,1103	0,67	0,2486	1,06	0,3554	1,45	0,4265
0,29	0,114	0,68	0,2517	1,07	0,3577	1,46	0,4279
0,30	0,1179	0,69	0,2549	1,08	0,3599	1,47	0,4292
0,31	0,1217	0,70	0,2580	1,09	0,3621	1,48	0,4306
0,32	0,1255	0,71	0,2611	1,10	0,3643	1,49	0,4319
0,33	0,1293	0,72	0,2642	1,11	0,3665	1,50	0,4332
0,34	0,1331	0,73	0,2673	1,12	0,3686	1,51	0,4345
0,35	0,1368	0,74	0,2703	1,13	0,3708	1,52	0,4357
0,36	0,1406	0,75	0,2734	1,14	0,3729	1,53	0,4370
0,37	0,1443	0,76	0,2764	1,15	0,3749	1,54	0,4382
0,38	0,1480	0,77	0,2794	1,16	0,3770	1,55	0,4394

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
1,56	0,4406	1,82	0,4656	2,16	0,4846	2,68	0,4963
1,57	0,4418	1,83	0,4664	2,18	0,4854	2,70	0,4965
1,58	0,4429	1,84	0,4671	2,20	0,4861	2,72	0,4967
1,59	0,4441	1,85	0,4678	2,22	0,4868	2,74	0,4969
1,60	0,4452	1,86	0,4686	2,24	0,4875	2,76	0,4971
1,61	0,4463	1,87	0,4693	2,26	0,4881	2,78	0,4973
1,62	0,4474	1,88	0,4699	2,28	0,4887	2,80	0,4974
1,63	0,4484	1,89	0,4706	2,30	0,4893	2,82	0,4976
1,64	0,4495	1,90	0,4713	2,32	0,4898	2,84	0,4977
1,65	0,4505	1,91	0,4719	2,34	0,4904	2,86	0,4979
1,66	0,4515	1,92	0,4726	2,36	0,4909	2,88	0,4980
1,67	0,4525	1,93	0,4732	2,38	0,4913	2,90	0,4981
1,68	0,4535	1,94	0,4738	2,40	0,4918	2,92	0,4982
1,69	0,4545	1,95	0,4744	2,42	0,4922	2,94	0,4984
1,70	0,4554	1,96	0,4750	2,44	0,4927	2,96	0,4985
1,71	0,4564	1,97	0,4756	2,46	0,4931	2,98	0,4986
1,72	0,4573	1,98	0,4761	2,48	0,4934	3,00	0,49865
1,73	0,4582	1,99	0,4767	2,50	0,4938	3,20	0,49931
1,74	0,4591	2,00	0,4772	2,52	0,4941	3,40	0,49966
1,75	0,4599	2,02	0,4783	2,54	0,4945	3,60	0,499841
1,76	0,4608	2,04	0,4793	2,56	0,4948	3,80	0,499928
1,77	0,4616	2,06	0,4803	2,58	0,4951	4,00	0,499968
1,78	0,4625	2,08	0,4812	2,60	0,4953	4,50	0,499997
1,79	0,4633	2,10	0,4821	2,62	0,4956	5,00	0,499997
1,80	0,4641	2,12	0,4830	2,64	0,4959		
1,81	0,4649	2,14	0,4838	2,66	0,4961		

Приложение В

Критические точки t^2 распределения χ^2

Число степеней свободы k	Уровень значимости α							
	0,01	0,025	0,05	0,1	0,9	0,95	0,975	0,99
1	6,635	5,024	3,841	2,706	0,016	0,0039	0,00098	0,00016
2	9,210	7,378	5,991	4,605	0,211	0,103	0,051	0,020
3	11,35	9,348	7,815	6,251	0,584	0,352	0,216	0,115
4	13,28	11,14	9,488	7,779	1,064	0,711	0,484	0,297
5	15,09	12,83	11,07	9,236	1,610	1,15	0,831	0,554
6	16,81	14,45	12,59	10,65	2,204	1,64	1,24	0,872
7	18,48	16,01	14,07	12,02	2,833	2,17	1,69	1,24
8	20,09	17,54	15,50	13,36	3,490	2,73	2,18	1,65
9	21,67	19,02	16,92	14,68	4,168	3,33	2,70	2,09
10	23,21	20,48	18,31	15,99	4,865	3,94	3,25	2,56
11	24,73	21,92	19,68	17,28	5,578	4,57	3,82	3,05
12	26,22	23,34	21,03	18,55	6,304	5,23	4,40	3,57
13	27,69	24,74	22,36	19,81	7,042	5,89	5,01	4,11
14	29,14	26,12	23,69	21,06	7,790	6,57	5,63	4,66
15	30,58	27,49	25,00	22,31	8,547	7,26	6,26	5,23
16	32,00	28,85	26,30	23,54	9,312	7,96	6,91	5,81
17	33,41	30,19	27,59	24,77	10,09	8,67	7,56	6,41
18	34,81	31,53	28,87	25,99	10,87	9,39	8,23	7,01
19	36,19	32,85	30,14	27,20	11,65	10,12	8,91	7,63
20	37,57	34,17	31,41	28,41	12,44	10,85	9,59	8,26
21	38,93	35,48	32,67	29,62	13,24	11,59	10,28	8,90
22	40,29	36,78	33,92	30,81	14,04	12,34	10,98	9,54
23	41,64	38,08	35,17	32,00	14,85	13,09	11,69	10,20
24	42,98	39,36	36,42	33,20	15,66	13,85	12,40	10,86
25	44,31	40,65	37,65	34,38	16,47	14,61	13,12	11,52
26	45,64	41,92	38,89	35,56	17,29	15,38	13,84	12,20
27	46,96	43,19	40,11	36,74	18,11	16,15	14,57	12,88
28	48,28	44,46	41,34	37,92	18,94	16,93	15,31	13,56
29	49,59	45,72	42,56	39,09	19,77	17,71	16,05	14,26
30	50,89	46,98	43,77	40,26	20,60	18,49	16,79	14,95
35	57,34	53,20	49,80	46,06	24,80	22,47	20,57	18,51
40	63,69	59,34	55,76	51,81	29,05	26,51	24,43	22,16
45	69,96	65,41	61,66	57,51	33,35	30,61	28,37	25,90
50	76,15	71,42	67,50	63,17	37,69	34,76	32,36	29,71
55	82,29	77,38	73,31	68,80	42,06	38,96	36,40	33,57
60	88,38	83,30	79,08	74,40	46,46	43,19	40,48	37,48
65	94,42	89,18	84,82	79,97	50,88	47,45	44,60	41,44

Число степеней свободы k	Уровень значимости α							
	0,01	0,025	0,05	0,1	0,9	0,95	0,975	0,99
70	100,4	95,02	90,53	85,53	55,33	51,74	48,76	45,44
75	106,4	100,8	96,22	91,06	59,79	56,05	52,94	49,48
80	112,3	106,6	101,9	96,58	64,28	60,39	57,15	53,54
90	124,1	118,1	113,1	107,6	73,29	69,13	65,65	61,75
100	135,8	129,6	124,3	118,5	82,36	77,93	74,22	70,06

Приложение Г

Критические точки t-распределения Стьюдента

Число степеней свободы k	Уровень значимости α (двусторонняя крит. область)					
	0,10	0,05	0,02	0,01	0,002	0,001
1	6,31	12,70	31,82	63,70	318,30	637,0
2	2,92	4,30	6,97	9,92	22,33	31,6
3	2,35	3,18	4,54	5,84	10,22	12,9
4	2,13	2,78	3,75	4,60	7,17	8,61
5	2,01	2,57	3,37	4,03	5,89	6,86
6	1,94	2,45	3,14	3,71	5,21	5,96
7	1,89	2,36	3,00	3,50	4,79	5,40
8	1,86	2,31	2,90	3,36	4,50	5,04
9	1,83	2,26	2,82	3,25	4,30	4,78
10	1,81	2,23	2,76	3,17	4,14	4,59
11	1,80	2,20	2,72	3,11	4,03	4,44
12	1,78	2,18	2,68	3,05	3,93	4,32
13	1,77	2,16	2,65	3,01	3,85	4,22
14	1,76	2,14	2,62	2,98	3,79	4,14
15	1,75	2,13	2,60	2,95	3,73	4,07
16	1,75	2,12	2,58	2,92	3,69	4,01
17	1,74	2,11	2,57	2,90	3,65	3,96
18	1,73	2,10	2,55	2,88	3,61	3,92
19	1,73	2,09	2,54	2,86	3,58	3,88
20	1,73	2,09	2,53	2,85	3,55	3,85
22	1,72	2,07	2,51	2,82	3,51	3,79
24	1,71	2,06	2,49	2,80	3,47	3,74
26	1,71	2,06	2,48	2,78	3,44	3,71
28	1,70	2,05	2,46	2,76	3,40	3,66
30	1,70	2,04	2,46	2,75	3,39	3,65
40	1,68	2,02	2,42	2,70	3,31	3,55
60	1,67	2,00	2,39	2,66	3,23	3,46
120	1,66	1,98	2,36	2,62	3,17	3,37
∞	1,64	1,96	2,33	2,58	3,09	3,29
	0,05	0,025	0,01	0,005	0,001	0,0005
	Уровень значимости α (односторонняя крит. область)					

Приложение Д

Значения F-критерия Фишера

Уровень значимости $\alpha = 0,01$												
k_2	k_1 – число степеней свободы большей дисперсии											
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	4052	4999	5403	5625	5764	5889	5928	5981	6022	6056	6082	6106
2	98,49	99,01	99,17	99,25	99,30	99,33	99,34	99,36	99,38	99,40	99,41	99,42
3	34,12	30,81	29,46	28,71	28,24	27,91	27,67	27,49	27,34	27,23	27,13	27,05
4	21,20	18,00	16,69	15,98	15,52	15,21	14,98	14,80	14,66	14,54	14,45	14,37
5	16,26	13,27	12,06	11,39	10,97	10,67	10,45	10,27	10,15	10,05	9,96	9,89
6	13,74	10,92	9,78	9,15	8,75	8,47	8,26	8,10	7,98	7,87	7,79	7,72
7	12,25	9,55	8,45	7,85	7,46	7,19	7,00	6,84	6,71	6,62	6,54	6,47
8	11,26	8,65	7,59	7,01	6,63	6,37	6,19	6,03	5,91	5,82	5,74	5,67
9	10,56	8,02	6,99	6,42	6,06	5,80	5,62	5,47	5,35	5,26	5,18	5,11
10	10,04	7,56	6,55	5,99	5,64	5,39	5,21	5,06	4,95	4,85	4,78	4,71
11	9,86	7,20	6,22	5,67	5,32	5,07	4,88	4,74	4,63	4,54	4,46	4,40
12	9,33	6,93	5,95	5,41	5,06	4,82	4,65	4,50	4,39	4,30	4,22	4,16
13	9,07	6,70	5,74	5,20	4,86	4,62	4,44	4,30	4,19	4,10	4,02	3,96
14	8,86	6,51	5,56	5,03	4,69	4,46	4,28	4,14	4,03	3,94	3,86	3,80
15	8,68	6,36	5,42	4,89	4,56	4,32	4,14	4,00	3,89	3,80	3,73	3,67
16	8,53	6,23	5,29	4,77	4,44	4,20	4,03	3,89	3,78	3,69	3,61	3,55
17	8,40	6,11	5,18	4,67	4,34	4,10	3,93	3,79	3,68	3,59	3,52	3,45

Уровень значимости $\alpha = 0,05$										
k_2	k_1									
	1	2	3	4	5	6	8	12	24	∞
1	161,5	199,5	215,7	224,6	230,2	233,9	238,9	243,9	249,0	254,3
2	18,51	19,00	19,16	19,25	19,30	19,33	19,37	19,41	19,45	19,50
3	10,13	9,55	9,28	9,12	9,01	8,94	8,84	8,74	8,64	8,53
4	7,71	6,94	6,59	6,39	6,26	6,16	6,04	5,91	5,77	5,63
5	6,61	5,79	5,41	5,19	5,05	4,95	4,82	4,68	4,53	4,36
6	5,99	5,14	4,76	4,53	4,39	4,28	4,15	4,00	3,84	3,67
7	5,59	4,74	4,35	4,12	3,97	3,87	3,73	3,57	3,41	3,23
8	5,32	4,46	4,07	3,84	3,69	3,58	3,44	3,28	3,12	2,93
9	5,12	4,26	3,86	3,63	3,48	3,37	3,23	3,07	2,90	2,71

Уровень значимости $\alpha = 0{,}05$										
k_2	k_1									
	1	2	3	4	5	6	8	12	24	∞
10	4,96	4,10	3,71	3,48	3,33	3,22	3,07	2,91	2,74	2,54
11	4,84	3,98	3,59	3,36	3,20	3,09	2,95	2,79	2,61	2,40
12	4,75	3,88	3,49	3,26	3,11	3,00	2,85	2,69	2,50	2,30
13	4,67	3,80	3,41	3,18	3,02	2,92	2,77	2,60	2,42	2,21
14	4,60	3,74	3,34	3,11	2,96	2,85	2,70	2,53	2,35	2,13
15	4,54	3,68	3,29	3,06	2,90	2,79	2,64	2,48	2,29	2,07
16	4,49	3,63	3,24	3,01	2,85	2,74	2,59	2,42	2,24	2,01
17	4,45	3,59	3,20	2,96	2,81	2,70	2,55	2,38	2,19	1,96
18	4,41	3,55	3,16	2,93	2,77	2,66	2,51	2,34	2,15	1,92
19	4,38	3,52	3,13	2,90	2,74	2,63	2,48	2,31	2,11	1,88
20	4,35	3,49	3,10	2,87	2,71	2,60	2,45	2,28	2,08	1,84
21	4,32	3,47	3,07	2,84	2,68	2,57	2,42	2,25	2,05	1,81
22	4,30	3,44	3,05	2,82	2,66	2,55	2,40	2,23	2,03	1,78
23	4,28	3,42	3,03	2,80	2,64	2,53	2,38	2,20	2,00	1,76
24	4,26	3,40	3,01	2,78	2,62	2,51	2,36	2,18	1,98	1,73
25	4,24	3,38	2,99	2,76	2,60	2,49	2,34	2,16	1,96	1,71
26	4,22	3,37	2,98	2,74	2,59	2,47	2,32	2,15	1,95	1,69
27	4,21	3,35	2,96	2,73	2,57	2,46	2,30	2,13	1,93	1,67
28	4,20	3,34	2,95	2,71	2,56	2,44	2,29	2,12	1,91	1,65
29	4,18	3,33	2,93	2,70	2,54	2,43	2,28	2,10	1,90	1,64
30	4,17	3,32	2,92	2,69	2,53	2,42	2,27	2,09	1,89	1,62
35	4,12	3,26	2,87	2,64	2,48	2,37	2,22	2,04	1,83	1,57
40	4,08	3,23	2,84	2,61	2,45	2,34	2,18	2,00	1,79	1,51
45	4,06	3,21	2,81	2,58	2,42	2,31	2,15	1,97	1,76	1,48
50	4,03	3,18	2,79	2,56	2,40	2,29	2,13	1,95	1,74	1,44
60	4,00	3,15	2,76	2,52	2,37	2,25	2,10	1,92	1,70	1,39
70	3,98	3,13	2,74	2,50	2,35	2,23	2,07	1,89	1,67	1,35
80	3,96	3,11	2,72	2,49	2,33	2,21	2,06	1,88	1,65	1,31
90	3,95	3,10	2,71	2,47	2,32	2,20	2,04	1,86	1,64	1,28
100	3,94	3,09	2,70	2,46	2,30	2,19	2,03	1,85	1,63	1,26
125	3,92	3,07	2,68	2,44	2,29	2,17	2,01	1,83	1,60	1,21
150	3,90	3,06	2,66	2,43	2,27	2,16	2,00	1,82	1,59	1,18
200	3,89	3,04	2,65	2,42	2,26	2,14	1,98	1,80	1,57	1,14
300	3,87	3,03	2,64	2,41	2,25	2,13	1,97	1,79	1,55	1,10
400	3,86	3,02	2,63	2,40	2,24	2,12	1,96	1,78	1,54	1,07
500	3,86	3,01	2,62	2,39	2,23	2,11	1,96	1,77	1,54	1,06
1000	3,85	3,00	2,61	2,38	2,22	2,10	1,95	1,76	1,53	1,03
∞	3,84	2,99	2,60	2,37	2,21	2,09	1,94	1,75	1,52	1

Распределение Пуассона $\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$

k	$\lambda =$ 0,1	$\lambda =$ 0,2	$\lambda =$ 0,3	$\lambda =$ 0,4	$\lambda =$ 0,5	$\lambda = 0,6$	$\lambda =$ 0,7	$\lambda =$ 0,8	$\lambda =$ 0,9	
0	0,9048	0,8187	0,7408	0,6703	0,6065	0,5488	0,4966	0,4493	0,4066	
1	0,0905	0,1637	0,2222	0,2681	0,3033	0,3293	0,3476	0,3595	0,3659	
2	0,0045	0,0164	0,0333	0,0536	0,0758	0,0988	0,1217	0,1438	0,1647	
3	0,0002	0,0011	0,0033	00072	0,0126	0,0198	0,0284	0,0383	0,0494	
4		0,0001	0,0003	0,0007	0,0016	0,0030	0,0050	0,0077	0,0111	
5				0,0001	0,0002	0,0004	0,0007	0,0012	0,0020	
6							0,0001	0,0002	0,0003	

k	$\lambda = 1$	$\lambda = 2$	$\lambda = 3$	$\lambda = 4$	$\lambda = 5$	$\lambda = 6$	$\lambda = 7$	$\lambda = 8$	$\lambda = 9$	$\lambda = 10$
0	0,3679	0,1353	0,0498	0,0183	0,0067	0,0025	0,0009	0,0003	0,0001	0,0000
1	0,3679	0,2707	0,1494	0,0733	0,0337	0,0149	0,0064	0,0027	0,0011	0,0005
2	0,1839	0,2707	0,2240	0,1465	0,0842	0,0446	0,0223	0,0107	0,0050	0,0023
3	0,0613	0,1804	0,2240	0,1954	0,1404	0,0892	0,0521	0,0286	0,0150	0,0076
4	0,0153	0,0902	0,1680	0,1954	0,1755	0,01339	0,0912	0,0572	0,0337	0,0189
5	0,0031	0,0361	0,1008	0,1563	0,1755	0,01606	0,1277	0,0916	0,0607	0,0378
6	0,0005	0,0120	0,0504	0,1042	0,1462	0,01606	0,1490	0,1221	0,0911	0,0631
7	0,0001	0,0034	0,0216	0,0595	0,1044	0,1377	0,1490	0,1396	0,1171	0,0901
8		0,0009	0,0081	0,0298	0,0653	0,1033	0,1304	0,1396	0,1318	0,1126
9		0,0002	0,0027	0,0132	0,0363	0,0688	0,1014	0,1241	0,1318	0,1251
10			0,0008	0,0053	0,0181	0,0413	0,0710	0,0993	0,1186	0,1251
11			0,0002	0,0019	0,0082	0,0213	0,0452	0,0722	0,0970	0,1137
12			0,0001	0,0006	0,0034	0,0226	0,0263	0,0481	0,0728	0,0948
13				0,0002	0,0013	0,0052	0,0142	0,0296	0,0504	0,0729
14				0,0001	0,0005	0,0022	0,0071	0,0169	0,0324	0,0521
15					0,0002	0,0009	0,0033	0,0090	0,0194	0,0347
16						0,0003	0,0014	0,0045	0,0109	0,0217
17						0,0001	0,0006	0,0021	0,0058	0,0128
18							0,0002	0,0009	0,0029	0,0071
19							0,0001	0,0004	0,0014	0,0037
20								0,0002	0,0006	0,0019
21								0,0001	0,0003	0,0009
22									0,0001	0,0004
23										0,0002
24										0,0001