Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Тольяттинский государственный университет
Институт математики, физики и информационных технологий

Н.А. Сосина

ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ

Электронное учебное пособие

В двух частях

Часть 2

ISBN 978-5-8259-1043-7

УДК 519.8(075.8)
ББК 22.185я73

Рецензенты:
канд. физ.-мат. наук, доцент, зав. кафедрой «Высшая математика» Тольяттинской академии управления *А.А. Кельин*;
канд. физ.-мат. наук, доцент, доцент кафедры «Прикладная математика и информатика» Тольяттинского государственного университета *О.В. Лелонд*.

Сосина, Н.А. Исследование операций : электронное учебное пособие : в 2 ч. / Н.А. Сосина. – Тольятти : Изд-во ТГУ, 2022. – Ч. 2. – 1 оптический диск. – ISBN 978-5-8259-1043-7.

В учебном пособии рассматриваются некоторые методы решения нелинейных задач оптимизации. Большое внимание уделяется решению задач методом динамического программирования и сетевыми методами. Учебное пособие не содержит строгих доказательств излагаемого материала. Целью автора при создании учебного пособия было сформировать навыки применения теоретического материала дисциплины для решения профессиональных задач.

Предназначено для студентов, обучающихся по направлениям подготовки бакалавров 01.03.02 «Прикладная математика и информатика», 02.03.03 «Математическое обеспечение и администрирование информационных систем» очной и заочной форм обучения.

Текстовое электронное издание.

Рекомендовано к изданию научно-методическим советом Тольяттинского государственного университета.

Минимальные системные требования: IBM PC-совместимый компьютер: Windows XP/Vista/7/8; PIII 500 МГц или эквивалент; 128 Мб ОЗУ; SVGA; CD-ROM; Adobe Acrobat Reader.

Редактор *Е.В. Пилясова*
Технический редактор *Н.П. Крюкова*
Компьютерная верстка: *Л.В. Сызганцева*
Художественное оформление,
компьютерное проектирование: *Г.В. Карасева*

Дата подписания
к использованию 26.01.2022.
Объем издания 3,3 Мб.
Комплектация издания:
компакт-диск,
первичная упаковка.
Заказ № 1-38-20.

Издательство Тольяттинского государственного университета
445020, г. Тольятти, ул. Белорусская, 14,
тел. 8 (8482) 53-91-47, www.tltsu.ru

Оглавление

ВВЕДЕНИЕ

В первой части учебного пособия рассматривалось решение задачи линейного программирования (ЛП), которая состояла в максимизации или минимизации линейной функции при условии линейных ограничений. В большинстве задач оптимизации целевая функция, или функции, задающие ограничения, не являются линейными. Подобные задачи называются задачами нелинейного программирования (НП).

Нелинейные задачи оптимизации составляют широкий класс задач, поэтому до настоящего времени нет разработанных методов, подобно симплекс-методу в ЛП, с помощью которых можно было бы решать любые нелинейные задачи. Тем не менее, несмотря на отсутствие универсальных методов решения задач НП, в настоящее время разработаны способы решения отдельных специальных классов задач оптимизации, и прежде всего задач с выпуклыми (вогнутыми) целевыми функциями. В представленном учебно-методическом пособии рассматриваются некоторые из методов нелинейного программирования.

Глава 1. НЕЛИНЕЙНОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ

§ 1.1. Постановка задачи. Геометрическая интерпретация задачи нелинейного программирования с ограничениями

Сформулируем задачу нелинейного программирования в общем виде.

Пусть на множестве $X \subset R^n$ определена функция $F(x)$, где $x(x_1, x_2, x_3, ..., x_n)$ – n-мерный вектор. Требуется найти такой вектор x^* из множества допустимых решений X, которому соответствует максимальное (минимальное) значение функции на этом множестве, т. е.

$$F(x) \to \max\ (\min);$$
$$x \in X.$$

В том случае, когда на множество допустимых решений X накладываются ограничения, решается задача поиска *условного экстремума*. Если же ограничения на множество допустимых решений X отсутствуют, то решается задача *безусловного экстремума*.

Хорошо известно, что область допустимых решений (ОДР) в задаче ЛП является выпуклым многоугольником или многогранником (в том числе и в гиперпространстве), а оптимальное решение находится в одной из вершин или на границе (случай альтернативного решения) ОДР, но не внутри ОДР. В отличие от задач ЛП в задачах НП с ограничениями если ОДР существует, то не всегда является выпуклой. В любом случае решение задачи сводится к определению точки, принадлежащей области ОДР, через которую проходит гиперповерхность наивысшего (или низшего) уровня, заданная целевой функцией. Решение же задачи НП может находиться как на границе, так и внутри ОДР.

Если гиперповерхность наивысшего (низшего) уровня найти невозможно, то целевая функция не ограничена сверху (снизу), т. е. задача максимизации (минимизации) не имеет решения.

Алгоритм нахождения решения задачи НП с ограничениями с использованием геометрической интерпретации:

- определить область допустимых решений задачи НП;
- построить гиперповерхность на основании функции цели;
- определить гиперповерхность наивысшего (низшего) уровня;

• найти точку ОДР, через которую проходит гиперповерхность, и определить для нее значения переменных и функции цели.

Задача 1.1.1. Найти максимальное значение функции

$$F(x) = 10x_1 - x_1^2 + x_2 \tag{1.1}$$

при условиях

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \le 24, \\ x_1 + 2x_2 \le 15, \\ 3x_1 + 2x_2 \le 24, \\ 0 \le x_2 \le 4, \\ x_1 \ge 0. \end{cases} \tag{1.2}$$

Решение. Заметим, что целевая функция (1.1) является нелинейной. Следовательно, задача 1.1.1 – задача НП. Воспользовавшись методами линейного программирования, описанными в первом методическом пособии, и тем, что задача имеет всего две переменные, построим область допустимых решений, определяемую (1.2). Это будет многоугольник *OABC* (рис. 1).

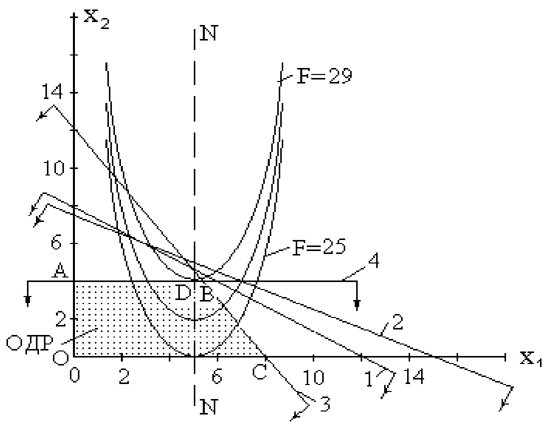

Рис. 1

Воспользуемся вышеприведенным алгоритмом. Определим точку многоугольника *OABC*, в которой функция цели достигнет своего максимального значения. В этих целях построим линию уровня

$$F(x) = 10x_1 - x_1^2 + x_2 = h,$$

где h – произвольно задаваемая постоянная.

Для анализа поведения линии уровня при различных значениях h исследуем функцию вида:

$$x_2 = h - 10x_1 + x_1^2, \tag{1.3}$$

где h = const.

Линиями уровня будет семейство парабол с ветвями, направленными вверх, и со смещенной вершиной по горизонтали (смещение вдоль оси x_1) и вертикали (смещение вдоль оси x_2). Продифференцировав исследуемую функцию и приравняв производную к нулю, найдем смещение вдоль оси x_1: $\frac{dx_2}{dx_1} = 2x_1 - 10 = 0$, получим $x_1 = 5$.

Так как вторая производная по x_1 больше нуля: $\left(\frac{d^2x_2}{{dx_1}^2} = 2 > 0\right)$, то в точке $x_1 = 5$ функция достигает минимума. Смещение вдоль оси x_2 определим из равенства $x_2 = h - 10x_1 + x_1^2$, при $x_1 = 5$; $x_2 = h - 25$.

Заметим, что изменение h повлечет за собой изменение x_2 (т. е. будет происходить смещение линии уровня): при различных значениях h линия уровня (парабола) будет своей точкой минимума смещаться вверх или вниз вдоль вертикали NN (рис. 1). Таким образом, своего наименьшего значения функция цели (1.1) достигнет в точке ОДР с координатами: $x_1 = 5$; $x_2 = h - 25$. Минимальное значение функции цели получим при $h = 25$ (и соответственно $F(x) = 25$) в точке $x_1 = 5$; $x_2 = 0$. Ниже оси x_1 параболу смещать нельзя, может быть нарушено требование неотрицательности параметров. Смещение параболы (1.3) вдоль отрезка NN (рис. 1) вверх вызовет увеличение значения функции цели (1.1). Так как x_2 можно увеличить только до 4 (при дальнейшем увеличении точка покинет ОДР), то очевидно, что решение задачи будет в точке при $x_2 = 4$. Таким образом, точка оптимального решения исходной задачи x^* (5; 4). Заметим, что решение задачи лежит не в вершине области допустимых решений, а на границе ОДР.

§ 1.2. Основные понятия нелинейного программирования

Определение 1. Точка x называется точкой глобального максимума (*минимума*) функции $F(x)$ на допустимом множестве X, если функция достигает в этой точке своего наибольшего (наименьшего) значения, т. е. $F(x^*) \geq F(x), \forall x \in X$ $(F(x^*) \leq F(x), \forall x \in X)$.

Определение 2. Точка x^* называется точкой локального максимума (*минимума*) функции $F(x)$ на допустимом множестве X, если существует такое число $\delta > 0$, для которого выполняется неравенство $F(x^*) \geq F(x)$ ($F(x^*) \leq F(x)$) для всех x из δ-окрестности точки x^*, т. е.

$$\exists \delta > 0 \ \forall x \in X : \left\| x - x^* \right\| < \delta \Rightarrow F(x^*) \geq F(x) \quad (F(x^*) \leq F(x)),$$

где $\|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots x_n^2}$ – евклидова норма вектора x.

Точка x^* в определении глобального максимума сравнивается по значению функции со всеми точками из множества допустимых решений X, а в определении локального максимума сравнивается только с точками, принадлежащими ее δ-окрестности. Поэтому глобальный максимум является одновременно локальным максимумом, обратное утверждение в общем случае неверно.

Сформулируем свойства выпуклых функций, полезные при решении задач.

✓ Если $F(x)$ – выпуклая (вогнутая) функция на выпуклом множестве X, в этом случае любая точка локального минимума (максимума) является точкой ее глобального минимума (максимума) на множестве X.

✓ Если же $F(x)$ строго выпуклая (вогнутая) функция на выпуклом множестве X, то своего глобального минимума (максимума) она может достигать на множестве X не более чем в одной точке.

Теорема Вейерштрасса. Если множество допустимых решений X функции $F(x)$ является компактным (ограниченным и замкнутым) и непустым, то непрерывная функция $F(x)$ на этом множестве достигает по крайней мере один раз своего наибольшего значения и по крайней мере один раз – своего наименьшего значения.

Согласно теореме Вейерштрасса, если множество X – компакт, то $\forall x \in X$, $\exists x^* \in X$, $\exists x^{**} \in X$:

$$F\left(x^*\right) \leq F\left(x\right) \leq F\left(x^{**}\right). \qquad (1.4)$$

Так как неравенство выполняется на всем множестве X, то точки x^* и x^{**} будут точками глобального минимума и максимума соответственно.

Определение 3. Функция $F(x)$, определенная на выпуклом множестве X, называется *выпуклой вниз* на этом множестве, если для любых точек $x^1, x^2 \in X$ и произвольного числа $\alpha \in [0; 1]$ справедливо неравенство

$$F\left(\alpha x^1 + (1-\alpha)x^2\right) \le \alpha F\left(x^1\right) + (1-\alpha)F\left(x^2\right).$$

Определение 4. Функция $F(x)$, определенная на выпуклом множестве X, называется *вогнутой* или *выпуклой вверх*, если для любых точек $x^1, x^2 \in X$ и произвольного числа $\alpha \in [0; 1]$ справедливо неравенство

$$F(\alpha x^1 + (1-\alpha)x^2) \ge \alpha F(x^1) + (1-\alpha)F(x^2).$$

Приведем геометрическую иллюстрацию определений 3–4 для двухмерного пространства.

Согласно определению, график выпуклой вниз функции (рис. 2) целиком расположен не выше отрезка, соединяющего две произвольные точки графика, график вогнутой (выпуклой вверх) функции (рис. 3) целиком лежит не ниже отрезка, соединяющего две произвольные точки графика.

Определить выпуклость функции можно, вычислив матрицу Гессе.

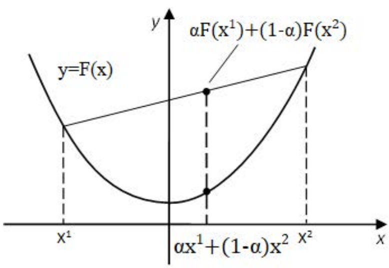

Рис. 2

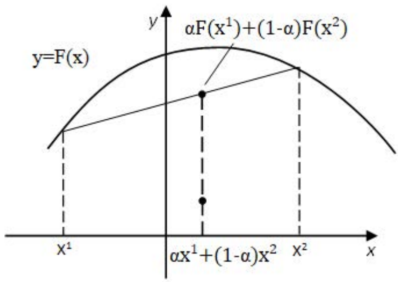

Рис. 3

Определение 5. Матрицей Гессе (гессенианом) $H(x)$ дважды непрерывно дифференцируемой в точке x функции $F(x)$, называется матрица частных производных второго порядка, вычисленных в данной точке:

$$H(x)=(h_{ij})=\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j}\right)=\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 F}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \frac{\partial^2 F}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 F}{\partial x_2^2} & \cdots & \frac{\partial^2 F}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial^2 F}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial^2 F}{\partial x_n \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 F}{\partial x_n^2} \end{pmatrix}.$$

Ввиду того что все частные производные второго порядка непрерывны, будет выполняться равенство

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j}=\frac{\partial^2 F}{\partial x_j \partial x_i}.$$

Отсюда следует, что матрица Гессе является симметричной матрицей.

Определение 6. Симметричная матрица A называется *положительно определенной* (*положительно полуопределенной*), если для любого ненулевого вектора y выполняется неравенство

$$yAy=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}y_i y_j>0 \quad \left(yAy=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}y_i y_j\ge 0\right).$$

Определение 7. Симметричная матрица A называется *отрицательно определенной* (*отрицательно полуопределенной*), если для любого ненулевого вектора y выполняется неравенство

$$yAy=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}y_i y_j<0 \quad \left(yAy=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}y_i y_j\le 0\right).$$

Определение 8. Угловыми минорами матрицы называются определители, составленные из первых k строк и k столбцов матрицы:

$$M_1=a_{11},\ M_2=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix},\ M_3=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},\ \ldots,\ M_n=|A|.$$

С помощью угловых миноров записываются критерии положительно и отрицательно определенной матрицы.

Критерий Сильвестра

✓ Симметричная матрица A положительно определена, если все ее угловые миноры положительны: $M_1 > 0$, $M_2 > 0$, ..., $M_n = |A| > 0$.

✓ Симметричная матрица A отрицательно определена, если все ее угловые миноры нечетного порядка отрицательны, а четного – положительны: $M_1 < 0$, $M_2 > 0$, $M_3 < 0$, $M_4 > 0$, ...

Если матрица Гессе дважды дифференцируемой функции $F(x)$ на выпуклом множестве X положительно определена (полуопределена), то функция $F(x)$ является строго выпуклой (выпуклой) на множестве X.

Если матрица Гессе дважды дифференцируемой функции $F(x)$ на выпуклом множестве X отрицательно определена (полуопределена), то функция $F(x)$ является строго вогнутой (вогнутой) на множестве X.

Теорема 1. Если $F(x)$ – выпуклая (вогнутая) функция на выпуклом множестве X, то всякая точка локального минимума (максимума) является точкой ее глобального минимума (максимума) на множестве X.

§ 1.3. Безусловный экстремум

Пусть на множестве X ($X \subset R^n$) определена дважды непрерывно дифференцируемая функция $F(x)$. Определим точки x^* ее локального минимума и максимума: $F(x^*) = \min\limits_{x \in X} F(x)$ и $F(x^*) = \max\limits_{x \in X} F(x)$ соответственно.

С помощью необходимых и достаточных условий локального экстремума первого и второго порядка (порядок условий определяется порядком используемых производных) можно установить точки локальных экстремумов.

Теорема 2 (необходимые условия экстремума первого порядка). Если x^* – точка локального экстремума дифференцируемой на множестве X функции $F(x)$, то все частные производные в этой точке будут равны нулю или не существуют.

Точка x^* называется стационарной, если в этой точке все частные производные равны нулю: $(\frac{\partial}{\partial x_i}(F(x^*)) = 0 \; \forall i = \overline{1, n})$. Следовательно, и градиент функции, вычисленный в стационарной точке x^*, равен нулю, т. е. $\mathrm{grad}F(x^*) = 0$.

Теорема 3 (необходимые условия экстремума второго порядка). Если x^* – точка локального максимума (минимума) дважды дифференцируемой на множестве X функции $F(x)$, то матрица Гессе $H(x)$ функции, вычисленной в точке локального максимума (минимума) x^* дважды дифференцируемой на множестве X функции $F(x)$, отрицательно полуопределена (положительно полуопределена), т. е. $H(x^*) \le 0$, $(H(x^*) \ge 0)$.

Теорема 4 (достаточные условия существования экстремума). Если градиент дважды дифференцируемой функции $F(x)$ в точке x^* равен нулю, а матрица Гессе отрицательно (положительно) определена, т. е. $\mathrm{grad}F(x^*) = 0$ и $H(x^*) < 0$, $(H(x^*) > 0)$, то x^* – точка локального максимума (минимума).

Таким образом, можно сформулировать *необходимые и достаточные условия существования экстремума.*

✓ Из того, что $\mathrm{grad}F(x^*) = 0$ и матрица Гессе $H(x^*)$ отрицательно определена, следует, что точка x^* является точкой локального максимума.

✓ Из того, что $\mathrm{grad}F(x^*) = 0$ и матрица Гессе $H(x^*)$ положительно определена, следует, что точка x^* является точкой локального минимума.

Исследуем на экстремум функцию двух переменных. Рассмотрим дважды дифференцируемую функцию двух переменных $F(x_1, x_2)$ в точке $x^*(x_1^*, x_2^*)$. Предположим, что точка x^* является стационарной точкой для $F(x)$: $\mathrm{grad}F(x^*) = 0$ или, что то же самое, в точке $x^*(x_1^*, x_2^*)$ выполняются одновременно равенства

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x_1} = 0, \\ \dfrac{\partial F}{\partial x_2} = 0. \end{cases}$$

Запишем гессиан для рассматриваемой функции:

$$H(x) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 F}{\partial x^2} & \dfrac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \\ \dfrac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} & \dfrac{\partial^2 F}{\partial y^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix}; \ M_2 = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} = AC - B^2; \ M_1 = A.$$

Предположим, что в стационарной точке x^* (x_1^*, x_2^*) функции $F(x_1, x_2)$ определитель матрицы Гессе M_2 положителен, т. е. $AC - B^2 > 0$, в этом случае x^* (x_1^*, x_2^*) будет точкой экстремума, так как матрица Гессе будет либо положительно, либо отрицательно определенной.

x^* (x_1^*, x_2^*) – точка локального минимума для положительно определенной матрицы Гессе $H(x^*)$, т. е. при $A > 0$.

x^* (x_1^*, x_2^*) – точка локального максимума для отрицательно определенной матрицы Гессе $H(x^*) < 0$, т. е. при $A < 0$.

Задача 1.3.1. Исследовать на экстремум функцию

$$F(x) = \frac{x_1^2}{a} + \frac{x_2^2}{b}$$

при $a \neq 0$, $b \neq 0$.

Решение. Найдем частные производные функции и приравняем их к нулю:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x_1} = \dfrac{2x_1}{a} = 0, \\ \dfrac{\partial F}{\partial x_2} = \dfrac{2x_2}{b} = 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0, \\ x_2 = 0. \end{cases}$$

$x^*(0, 0)$ – стационарная точка.

Составим матрицу Гессе:

$$H(x) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 F}{\partial x^2} & \dfrac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \\ \dfrac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} & \dfrac{\partial^2 F}{\partial y^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{2}{a} & 0 \\ 0 & \dfrac{2}{b} \end{pmatrix},$$

$$M_2 = AC - B^2 = \frac{4}{ab} - 0 = \frac{4}{ab},$$

$$M_1 = A = \frac{2}{a}.$$

1. Если $a > 0$, $b > 0$, тогда матрица положительно определена: $(H(x^*) > 0)$, следовательно, в стационарной точке минимум.

2. Если $a > 0$, $b < 0$, минор M_2 отрицательный, экстремума нет.

3. Если $a < 0$, $b > 0$, тогда миноры M_1 и M_2 отрицательны, экстремума нет.

4. Если $a < 0$, $b < 0$, тогда матрица отрицательно определена, следовательно, в стационарной точке максимум.

Задача 1.3.2. Найти экстремумы функции $F(x) = x_1^3 + x_2^2 + x_3^2 + x_2 x_3 - 3x_1 + 6x_2 + 2$ на множестве R^n.

Решение. Запишем условия первого порядка для исходной функции:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x_1} = 3x_1^2 - 3 = 0, \\ \dfrac{\partial F}{\partial x_2} = 2x_2 + x_3 + 6 = 0, \\ \dfrac{\partial F}{\partial x_3} = 2x_3 + x_2 = 0. \end{cases}$$

Решая эти три уравнения совместно, получим две стационарные точки: $X_1^* = (1; –4; 2)$, $X_2^* = (–1; –4; 2)$.

Составим матрицу Гессе для заданной функции $F(x)$. В каждой стационарной точке проверим выполнение достаточных условий экстремума.

Матрица Гессе будет иметь вид

$$H(X) = \begin{pmatrix} 6x_1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Исследуем $H(X_1^*)$, $X_1^* = (1; –4; 2)$.

$$H(X_1^*) = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix},\ M_1 = 6 > 0,\ M_2 = \begin{vmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 12 > 0,\ M_3 = \begin{vmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 24 > 0.$$

Следовательно, $H(X_1^*) > 0$ и $X_1^* = (1; –4; 2)$ — точка локального минимума.

Исследуем $H(X_2^*)$, $X_2^* = (–1; –4; 2)$.

$$H(X_2^*) = \begin{pmatrix} -6 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix},\ M_1 = -6 < 0,\ M_2 = \begin{vmatrix} -6 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = -12 < 0,$$

$$M_3 = \begin{vmatrix} -6 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -24 < 0.$$

Так как угловые миноры матрицы Гессе $H(X_2^*)$ отрицательны, то не выполняются достаточные условия экстремума второго порядка, т. е. в точке X_2^* нет экстремума.

§ 1.4. Условный экстремум. Метод множителей Лагранжа

Среди задач НП выделен класс задач на условный экстремум – задач оптимизации с ограничениями-равенствами:

$$\begin{aligned} &F(x) \to \max\ (\min), \\ &\varphi_i(x) = b_i \qquad (i = \overline{1, m}). \end{aligned} \tag{1.5}$$

Для решения задачи (1.5) строится новая целевая функция, которая позволяет в виде штрафа учитывать ограничения:

$$\Phi(x, \lambda) = F(x) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i (\varphi_i(x) - b_i). \tag{1.6}$$

Функция (1.6) называется функцией Лагранжа. Коэффициенты чувствительности ограничений λ_i называются множителями Лагранжа. При условии выполнения всех ограничений будет выполняться равенство $\Phi(x) = F(x)$. В результате задача на условный экстремум сводится к задаче на безусловный экстремум, для решения которой можно воспользоваться классическим приемом – записать необходимые условия существования экстремума $\operatorname{grad} \Phi(x) = 0$ или в координатной форме:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \Phi}{\partial x_j} = \dfrac{\partial F}{\partial x_j} + \sum\limits_{i=1}^{m} (\lambda_i \cdot \dfrac{\partial \varphi_i}{\partial x_j}) = 0 \qquad (j = \overline{1, n}), \\ \dfrac{\partial \Phi}{\partial \lambda_i} = \varphi_i(x) - b_i = 0 \qquad (i = \overline{1, m}). \end{cases} \tag{1.7}$$

Выполнив операции дифференцирования, получим систему нелинейных уравнений относительно неизвестных x_j и множителей Лагранжа λ_i.

Решая систему (1.7), определим стационарные точки, которые необходимо проверить на экстремум с помощью достаточных признаков экстремума.

Функция Лагранжа – это один из основных инструментов для теоретического обоснования решения задачи НП.

Задача 1.4.1. Найти точки экстремума функции $F(x) = x_1^2 + x_2^2$ при условии выполнения ограничения $x_1 + x_2 = 2$.

Решение. Составим функцию Лагранжа:

$$\Phi(x, \lambda) = x_1^2 + x_2^2 + \lambda(x_1 + x_2 - 2).$$

В результате задача на условный экстремум сводится к задаче на безусловный экстремум. Запишем необходимое условие существования экстремума в координатной форме:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \Phi}{\partial x_1} = 2x_1 + \lambda = 0, \\ \dfrac{\partial \Phi}{\partial x_2} = 2x_2 + \lambda = 0, \\ \dfrac{\partial \Phi}{\partial \lambda} = x_1 + x_2 - 2 = 0. \end{cases}$$

Стационарная точка одна – $x(1, 1)$. Проверим $x(1, 1)$ на экстремум с помощью достаточных признаков экстремума. Матрица Гессе $H(x) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ положительно определена для всех $x \in R^n$, так как не зависит от x. Получили, что $F(x)$ – строго выпуклая функция, а точка $x^* = x(1, 1)$ – точка ее локального минимума. Ввиду того что $F(x)$ – выпуклая функция на выпуклом множестве, точка $x^* = x(1, 1)$ будет также и точкой глобального минимума.

Поясним задачу с геометрической точки зрения (рис. 4, 5).

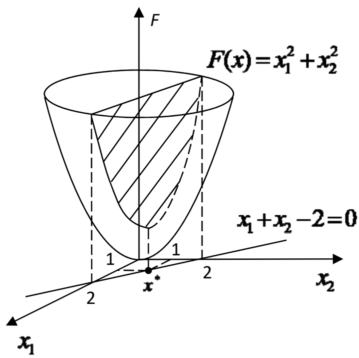

Рис. 4

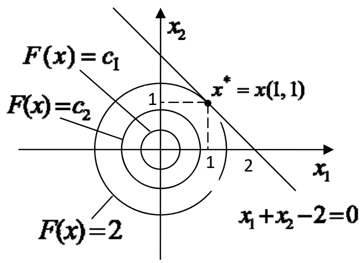

Рис. 5

В задаче круговой параболоид $F(x) = x_1^2 + x_2^2$ пересекается с плоскостью $x_1 + x_2 = 2$. Линией пересечения является парабола с ветвями, направленными вверх, и с вершиной в точке $x(1, 1)$.

§ 1.5. Задачи выпуклого программирования

Предположим, что задача НП имеет вид:

$$\begin{aligned} &F(x) \to \max\ (\min), \\ &\varphi_i(x) \le 0 \qquad (i = \overline{1, m}). \end{aligned} \tag{1.8}$$

Функция Лагранжа в этом случае будет иметь вид:

$$\Phi(x,\lambda) = F(x) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \varphi_i(x). \tag{1.9}$$

Универсальных методов для решения задачи в такой общей постановке не существует, но для отдельных классов задач разработаны эффективные методы их решения. Например, если все функции обладают свойством выпуклости, то будет выполняться фундаментальная теорема Куна – Таккера, в соответствии с которой решение (1.8) будет находиться в седловой точке функции Лагранжа (1.9).

Точка (x^*, λ^*) является *седловой точкой функции Лагранжа* $\Phi(x, \lambda)$ двух векторных переменных $x(x_1, x_2, ..., x_n)$ и $\lambda(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n)$ для *задачи на максимум*, если выполняется соотношение $\Phi(x, \lambda^*) \le \Phi(x^*, \lambda^*) \le \Phi(x^*, \lambda)$ для всех x и λ из δ-окрестности точки (x^*, λ^*).

Точка (x^*, λ^*) является *седловой точкой для функции Лагранжа* $\Phi(x, \lambda)$ двух векторных переменных $x(x_1, x_2, ..., x_n)$ и $\lambda(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n)$ для *задачи на минимум*, если выполняется соотношение $\Phi(x, \lambda^*) \ge \Phi(x^*, \lambda^*) \ge \Phi(x^*, \lambda)$ для всех x и λ из δ-окрестности точки (x^*, λ^*).

Условия Куна – Таккера

✓ Если в задаче НП (1.8) на максимум все функции выпуклы, а множество допустимых решений, определяемое ограничениями, содержит внутренние точки, то для оптимальности точки x^* необходимо и достаточно выполнения условий:

$$\frac{\partial}{\partial x_j}\Phi(x^*, \lambda^*) \le 0, \ \frac{\partial}{\partial \lambda_i}\Phi(x^*, \lambda^*) \le 0, \ x_j^* \cdot \frac{\partial}{\partial x_j}\Phi(x^*, \lambda^*) = 0,$$

$$\lambda_i^* \cdot \frac{\partial}{\partial \lambda_i}\Phi(x^*, \lambda^*) = 0,$$

$$x_j \ge 0, \ \lambda_i \ge 0, \ i = \overline{1, m}, \ j = \overline{1, n}. \tag{1.10}$$

✓ Если в задаче НП (1.8) на минимум все функции выпуклы, а множество допустимых решений, определяемое ограничениями, содержит внутренние точки, то для оптимальности точки x^* необходимо и достаточно выполнения условий:

$$\frac{\partial}{\partial x_j}\Phi(x^*,\lambda^*)\geq 0,\ \frac{\partial}{\partial \lambda_i}\Phi(x^*,\lambda^*)\leq 0,\ x_j^*\cdot\frac{\partial}{\partial x_j}\Phi(x^*,\lambda^*)=0,$$

$$\lambda_i^*\cdot\frac{\partial}{\partial \lambda_i}\Phi(x^*,\lambda^*)=0,$$

$$x_j\geq 0,\ \lambda_i\geq 0,\ i=\overline{1,m},\ j=\overline{1,n}. \tag{1.11}$$

Замечание 1. Условие, что область допустимых решений задачи (1.8) содержит внутренние точки, равносильно тому, что в области допустимых решений задачи существует такая точка x, в которой все ограничения неактивны, т. е. $\varphi_i(x) < 0$ $(i=\overline{1,m})$ (*условие регулярности Слейтера*).

Если все ограничения линейны, то условия Слейтера в теореме необязательны.

Замечание 2. Если в задаче ограничения записаны в форме $\varphi_i(x)\geq 0$, то их необходимо переписать в виде $-\varphi_i(x)\leq 0$.

Задача 1.5.1. Требуется определить расстояние от начала координат до множества точек на плоскости, удовлетворяющих неравенствам

$$\begin{cases} x_1+x_2\geq 4,\\ 2x_1+x_2\geq 5. \end{cases} \tag{1.12}$$

Решение

Перепишем задачу в виде

$$F(x)=x_1^2+x_2^2\to\min, \tag{1.13}$$

$$\begin{cases} 4-x_1-x_2\leq 0,\\ 5-2x_1-x_2\leq 0. \end{cases} \tag{1.14}$$

Так как все ограничения линейны, то выполняется условие регулярности Слейтера. Например, точка (3, 3) является внутренней точкой области (1.14). Составим функцию Лагранжа:

$$\Phi(x,\lambda)=x_1^2+x_2^2+\lambda_1(4-x_1-x_2)+\lambda_2(5-2x_1x_2)\to\min.$$

Запишем условия Куна – Таккера в виде (1.11). Рассмотрим случаи: $\lambda_1=\lambda_2=0$; $\lambda_1=0,\ \lambda_2\neq 0$; $\lambda_1\neq 0,\ \lambda_2=0$.

В первом и втором случаях получим точки, не удовлетворяющие (1.14). В случае $\lambda_1 \neq 0$, $\lambda_2 = 0$ получим $\lambda_1 = 4$. Точка $x^*(2; 2)$ будет соответствовать $\lambda^*(4; 0)$ и, согласно условиям Куна – Таккера, (1.11) будет решением задачи.

§ 1.6. Квадратичное программирование

Задачей квадратичного программирования (КП) называется такая задача НП, в которой целевая функция представляет собой сумму линейной и квадратичной формы, а все ограничения линейны. В качестве основной в КП рассматривается задача минимизации функции:

$$F(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(d_{ij} x_i x_j) \Rightarrow \min,$$

$$\varphi_i(x) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j - b_i \le 0, \qquad (1.15)$$

$$x_j \ge 0, \quad i = \overline{1, m}, \quad j = \overline{1, n}.$$

Матрица $D = [d_{ij}]_{m \times n}$ квадратичной формы предполагается симметрической и положительно полуопределенной, это гарантирует выпуклость $F(x)$.

Метод Баранкина – Дорфмана непосредственно основан на применении теоремы Куна – Таккера. Для задачи КП запишем функцию Лагранжа в матричной форме:

$$\Phi(X, \lambda) = c'X + X'DX + \lambda(FX - B).$$

В этом случае

$$\frac{\partial \Phi}{\partial X} = Z = c' + 2DX + A'\lambda; \quad \frac{\partial \Phi}{\partial \lambda} = Y = -AX + B.$$

Условия Куна – Таккера можно записать в следующем виде:

$AX + Y = B$; $2DX - T + A'\lambda = -c'$; $X \ge 0$; $Y \ge 0$; $T \ge 0$; $\lambda \ge 0$; $XT + Y\lambda = 0$.

Неизвестными являются X, Y, T, λ.

В записанных условиях Куна – Таккера только последнее условие является нелинейным, все остальные условия линейны. В связи с чем можно переходить от одного опорного (допустимого базисного) решения к другому и проверять условие $XT + Y\lambda = 0$.

Если в задаче КП целевая функция не минимизируется, а максимизируется или если в некоторых ограничениях вместо знак $\le$

стоит знак ≥, то такие задачи всегда можно привести к основной форме (1.15).

Если рассматривать задачу с геометрической точки зрения, то она (1.15) может быть сведена к нахождению точки выпуклого многогранника решений, через которую проходит линия уровня поверхности. Если в разрешимой задаче ЛП оптимальное решение находилось в вершине или на границе многогранника, то в задаче КП (1.15) решение может быть как на границе, так и внутри многогранника решений.

Система (1.15) может быть представлена через вектор Z в следующей форме:

$$\begin{bmatrix} A & E & 0 & 0 \\ 2D & 0 & -E & A^T \end{bmatrix} \cdot Z = \begin{pmatrix} b \\ c \end{pmatrix},$$

$$Z \geq 0,$$

$$T = Z' \cdot \tilde{Z},$$

где $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$; $E = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$; $D = \begin{pmatrix} d_{11} & \dots & d_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ d_{m1} & \dots & d_{mn} \end{pmatrix}$; $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix}$;

$c = \begin{pmatrix} c_1 \\ \dots \\ c_m \end{pmatrix}$; $Z = (x_1, \dots, x_n; y_1, \dots, y_m; v_1, \dots, v_n; \lambda_1, \dots, \lambda_m)$; $\tilde{Z} = (v_1, \dots, v_n; \lambda_1, \dots, \lambda_m; x_1, \dots, x_n; y_1, \dots, y_m)$; λ_i – множители Лагранжа; v_i, y_i – частные производные функции Лагранжа по переменным x_i, λ_i соответственно.

Выводы

Еще раз заметим, что не существует общих методов решения нелинейных задач оптимизации. В настоящее время разработаны общие методы решения только для некоторых классов задач нелинейной оптимизации.

Математическая теория оптимизации включает также численные методы, позволяющие находить наилучший вариант из множества возможных без их полного перебора и сравнения.

Контрольные вопросы и задания

1. Сформулировать задачу НП в общем виде.
2. Алгоритм нахождения решения задачи НП с ограничениями с использованием геометрической интерпретации.
3. Сформулировать задачу НП в общем виде.
4. Алгоритм нахождения решения задачи НП с ограничениями с использованием геометрической интерпретации.
5. Сформулировать определение точки локального максимума (минимума).
6. Сформулировать определение точки глобального максимума (минимума).
7. Свойства выпуклых функций.
8. Теорема Вейерштрасса о достижении своего наибольшего и наименьшего значений на замкнутом ограниченном множестве.
9. Сформулировать определение матрицы Гессе (гессениана).
10. Сформулировать определение выпуклой (вогнутой) функции.
11. Сформулировать определения положительно определенной (положительно полуопределенной) и отрицательно определенной (отрицательно полуопределенной) матриц.
12. Сформулировать определение углового минора.
13. Критерий Сильвестра.
14. Сформулировать необходимые условия экстремума первого порядка.
15. Сформулировать необходимые условия экстремума второго порядка.
16. Достаточные условия существования экстремума.
17. Сформулировать задачу на условный экстремум в общем виде.
18. Определить понятие функции Лагранжа.
19. Метод решения задачи оптимизации на условный экстремум с помощью функции Лагранжа.
20. Сформулировать определение седловой точки для функции Лагранжа.
21. Сформулировать теорему Куна – Таккера.
22. Сформулировать задачу квадратичного программирования (КП).
23. Методы решения задачи КП.

Глава 2. ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ СЕТЕВЫМИ МОДЕЛЯМИ

§ 2.1. Основные понятия теории сетей и графов

Теория графов – это один из самых эффективных аппаратов, позволяющих осуществлять формализацию широкого спектра экономических и управленческих задач, решаемых при автоматизации управления производством, рационализации схем перевозок, а также в календарном и сетевом планировании.

Рассмотрим основные понятия и определения теории графов.

Граф G – это совокупность двух конечных множеств: множества точек x_i, которые называются *вершинами*, и множества пар вершин (x_i, x_j), которые называются *ребрами*.

Для ребра (x_i, x_j) вершины x_i и x_j называются *концевыми*.

Две вершины называются *смежными вершинами*, если являются концевыми для некоторого ребра.

Если вершина для ребра является концевой, то вершина и ребро называются *инцидентными* друг другу.

Ребра называются *смежными ребрами*, если они являются инцидентными одной вершине.

Ребра, имеющие одинаковые концевые вершины, называются *параллельными*.

Петлей называется ребро, концевые вершины которого совпадают.

Степенью вершины графа называют число ребер графа, инцидентных данной вершине графа. Если степень вершины равна нулю, то вершина называется *изолированной*. Если степень вершины равна единице, то вершина называется *висячей*. Если степень вершины четная, то вершина называется *четной,* в противном случае – *нечетной*.

Число вершин графа называется *порядком графа*.

Граф *G* называется *простым*, если он не содержит петель и параллельных дуг. Простой граф, в котором каждая пара вершин смежная, называется *полным*.

Граф, содержащий хотя бы два параллельных ребра, называется *мультиграфом*. Граф, содержащий петли, называется *псевдографом*.

Дополнением графа G_1 называется граф G_2, состоящий из всех ребер и их концов, которые необходимо добавить к исходному графу, чтобы получить полный граф.

Последовательность ребер, ведущая от некоторой вершины x_i к другой вершине x_j, образует *путь* $L(x_i, x_j)$. Вершины x_i и x_j называют *началом* и *концом* пути соответственно, а остальные вершины называют *промежуточными*.

Последовательность неповторяющихся ребер, ведущая от некоторой вершины x_i к другой вершине x_j, называется *цепью*.

Цепь, начальная и конечная вершины которой совпадают, называется *циклом*. *Простым циклом* называется цикл, не проходящий ни через одну из вершин графа более одного раза.

Длиной пути (*цикла*) называется число ребер этого пути (цикла).

Граф называется связным, если для любых двух его вершин существует путь, соединяющий их; в противном случае граф называется *несвязным*.

Граф называется *ориентированным* (*орграфом*), если рассматриваемые пары вершин являются упорядоченными, т. е. на каждом ребре задается направление. Такие направленные ребра называют *дугами*.

Граф, содержащий конечное число вершин и ребер, называется *конечным*. В дальнейшем будем рассматривать только конечные графы.

Задача 2.1.1. Граф $G_{1.1}$, изображенный на рис. 6, является неориентированным графом пятого порядка (содержит пять вершин).

Вершина x_5 графа $G_{1.1}$ является изолированной (нулевой степени), следовательно, граф $G_{1.1}$ не является связным. Вершины x_3 и x_4 являются четными второго порядка. Вершины x_1 и x_2 являются нечетными: x_1 – первого порядка (висячая вершина), x_2 – третьего порядка.

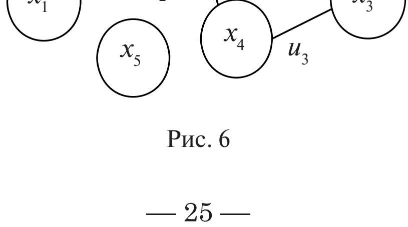

Рис. 6

Вершины x_1 и x_2, x_2 и x_3, x_3 и x_4, x_2 и x_4 являются смежными вершинами.

Ребра u_1 и u_2, u_1 и u_3, u_2 и u_4, u_3 и u_4 являются смежными.

Каждое из ребер u_1, u_2, u_3 инцидентно вершине x_2; каждое из ребер u_3 и u_4 инцидентно вершине x_3; ребра u_2 и u_4 инцидентны вершине x_4; ребро u_1 инцидентно вершине x_1.

Задача 2.1.2. На рис. 7 изображены псевдограф $G_{1.2}$ (граф $G_{1.2}$ содержит петлю) и мультиграф $D_{1.2}$ (граф $D_{1.2}$ содержит параллельные ребра).

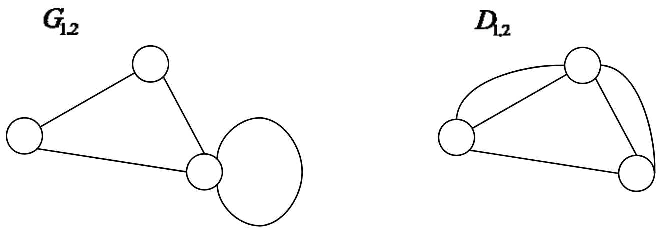

Рис. 7

Граф $G_{1.2}$ и граф $D_{1.2}$ являются связными графами, так как для любых двух вершин графа $G_{1.2}$ и для любых двух вершин графа $D_{1.2}$ существует путь, соединяющий их.

Задача 2.1.3. Графы $G_{1.3}$, $D_{1.3}$, $K_{1.3}$, изображенные на рис. 8, не содержат петель и параллельных дуг, при этом в каждом из графов $G_{1.3}$, $D_{1.3}$, $K_{1.3}$ каждая пара вершин – смежная (любые две вершины соединены ребром). Следовательно, графы $G_{1.3}$, $D_{1.3}$, $K_{1.3}$ являются полными.

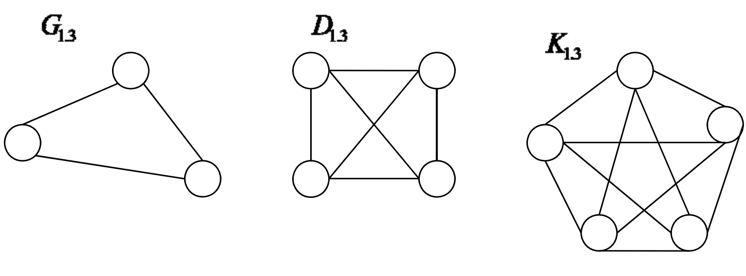

Рис. 8

Задача 2.1.4. Граф $G_{1.4}$, изображенный на рис. 9, является орграфом, так как вершины графа $G_{1.4}$ соединены дугами.

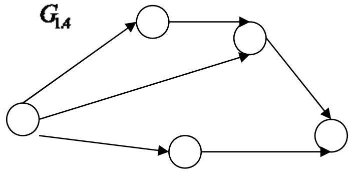

Рис. 9

Граф называется *плоским графом*, если он может быть изображен на плоскости так, что все пересечения ребер являются его вершинами.

Любая микросхема на практике строится в виде графа, который не имеет пересечения ребер. Аналогично при проектировании железнодорожных и авиационных путей строится граф без пересечения ребер. В результате возникает задача построения и исследования плоского графа.

При изображении графа вершины графа можно располагать произвольно. Форма линий, соединяющих вершины, может быть выбрана также произвольно. Один и тот же граф может быть представлен в различных видах. Подобные графы несут одну и ту же информацию и называются *изоморфными*.

В связи с этим возникает следующая довольно сложная задача. Как можно определить, являются ли изображенные графы изоморфными? Для того чтобы ответить на этот вопрос, определяются некоторые параметры графов: число вершин, число ребер, число компонент связности, последовательность степеней вершин в убывающем порядке.

Если какие-то из этих параметров у графов различны, то эти графы различны, но даже если все перечисленные параметры у графов совпали, то это не гарантирует, что графы изоморфны.

Имеют место теоремы.

Теорема 2.1.1. Полный граф с пятью вершинами не является плоским.

Теорема 2.1.2 (теорема Понтрягина – Куратовского). Граф является плоским тогда и только тогда, когда он не имеет в качестве подграфа полного графа с пятью вершинами.

Задача 2.1.5. Рассмотрим граф $G_{2.1}$, изображенный на рис. 10, *а*. Плоским изображением графа G2.1 является каждый из графов $K_{2.1}$ и $D_{2.1}$, представленных на рис. 10, *б*, *в*. Графы $G_{2.1}$, $K_{2.1}$, $D_{2.1}$ являются изоморфными.

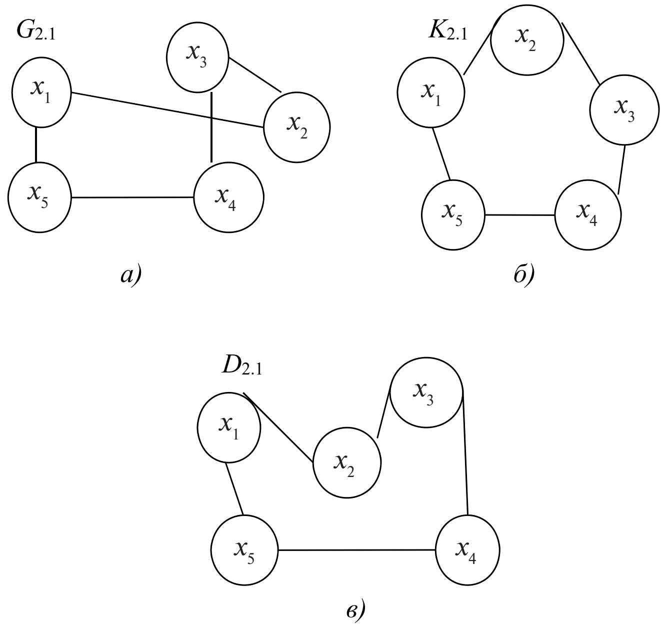

Рис. 10

Задача 2.1.6. Рассмотрим графы $D_{2.4}$ и $K_{2.4}$, изображенные на рис. 11.

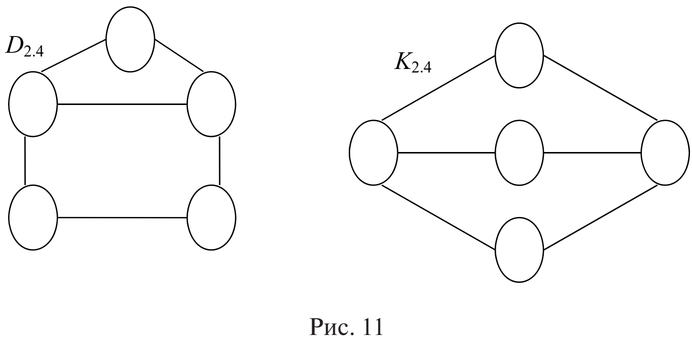

Рис. 11

Графы $D_{2.4}$ и $K_{2.4}$ содержат равное количество вершин и ребер. Оба графа связные, и тем не менее они не изоморфны.

Задача 2.1.7. Согласно теореме 2.1.2 граф, изображенный на рис. 12, не является плоским.

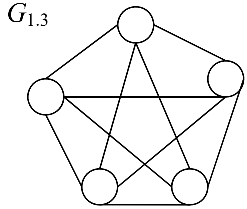

Рис. 12

Выделяют эйлеров граф и гамильтонов граф.

Цикл (путь), содержащий все ребра графа ровно один раз, называется *эйлеровым*. Такой цикл (путь) можно нарисовать, не отрывая карандаша от бумаги и не повторяя линий. Связный граф, обладающий эйлеровым циклом, называется *эйлеровым графом*.

Теорема 2.1.3 (критерий эйлеровости графа). Для того чтобы конечный связный граф был эйлеровым, необходимо и достаточно, чтобы степени всех его вершин были четными числами.

Согласно определению, эйлеров цикл содержит каждое ребро и притом только один раз, т. е. количество ребер, входящих в вершину, равно количеству ребер, выходящих из вершины. Отсюда следует, что степень каждой вершины – число четное.

Теорема 2.1.4. Для того чтобы конечный связный граф обладал эйлеровым путем с концами x_i и x_j, необходимо и достаточно, чтобы x_i и x_j были единственные его вершины нечетной степени.

Цикл (путь), проходящий через каждую вершину графа и только по одному разу, называется *гамильтоновым*. Связный граф, обладающий гамильтоновым циклом, называется *гамильтоновым графом*.

Достаточное условие существования гамильтонова цикла – полнота графа G. Необходимое условие существования гамильтонова цикла в произвольном графе G еще не найдено.

Задача 2.1.8. Граф $G_{3.1}$ на рис. 13 обладает эйлеровым путем $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_1, x_3)$ с концами x_1, x_3. Для графа $G_{3.1}$ выполняются условия теоремы 2.1.4: каждая из вершин x_1, x_3 графа $G_{3.1}$ является нечетной, все остальные вершины четные. Но граф $G_{3.1}$ не является эйлеровым, так как не обладает эйлеровым циклом.

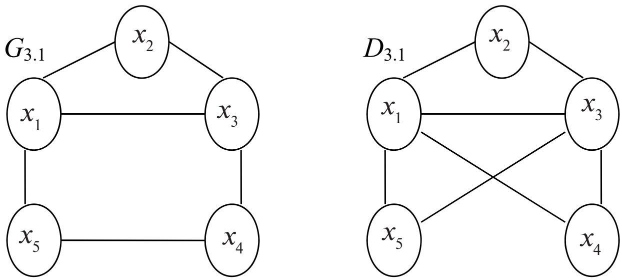

Рис. 13

Граф $D_{3.1}$ на рис. 13 является эйлеровым, так как он обладает эйлеровым циклом $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_1, x_5, x_3, x_1)$. Для графа $D_{3.1}$ выполняются условия теоремы 2.1.3: все вершины графа $D_{3.1}$ четные.

Задача 2.1.9. Рассмотрим граф $G_{3.2}$, изображенный на рис. 14.

На основании теоремы 2.1.3 можно утверждать, что граф $G_{3.2}$ не является эйлеровым, так как содержит вершины x_1, x_2, x_4 нечетной степени. На основании теоремы 2.1.4 можно утверждать, что граф $G_{3.2}$ не обладает эйлеровым путем, так как содержит более двух вершин нечетной степени.

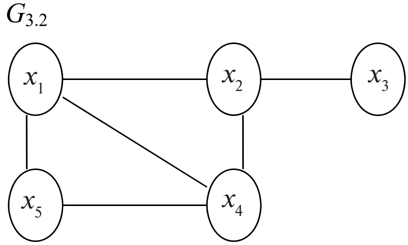

Рис. 14

Граф $G_{3.2}$ обладает гамильтоновыми путями: $(x_3, x_2, x_1, x_5, x_4)$, $(x_3, x_2, x_1, x_4, x_5)$. Граф $G_{3.2}$ не является гамильтоновым, так как не обладает гамильтоновым циклом.

Связный граф без циклов, имеющий не менее двух вершин, называется *деревом*. Любой граф без циклов называется *лесом*. Таким образом, деревья являются компонентами леса.

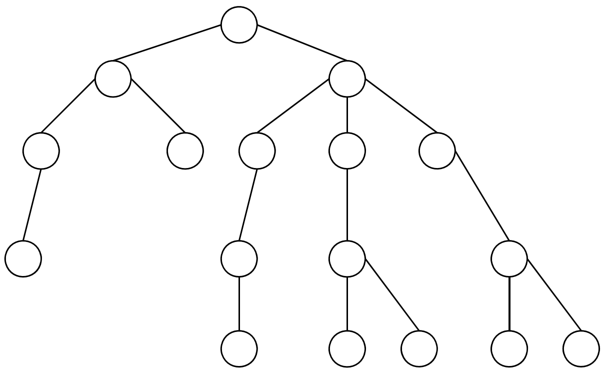

Рис. 15

В дереве всегда может быть выбрана исходная вершина (вершина нулевого яруса) x_0, которую называют *корнем дерева*. Соседние вершины назовем вершинами первого яруса и т. д. Вершины, соседние вершинам $(i - 1)$-го яруса, не отнесенные еще ни к одному ярусу, назовем вершинами i-го яруса. Каждая вершина дерева принадлежит ровно одному ярусу (рис. 15). Пути от исходной вершины к крайним вершинам называются *ветвями*.

Простейшее дерево состоит из двух вершин, соединенных ребром. Каждый раз, когда мы добавляем еще одно ребро, в конце его прибавляется также и вершина. Следовательно, дерево с n вершинами имеет $n - 1$ ребер.

Остовом называется дерево, содержащее все вершины графа.

§ 2.2. Матричные способы задания графа

При большом числе вершин и ребер, когда рисунок теряет свою наглядность, граф может быть представлен в виде матрицы. Представление графов в виде матриц удобно для решения задач с применением вычислительной техники.

Рассмотрим граф G, не содержащий петель, имеющий m вершин и n ребер (дуг). Графу G можно поставить в соответствие *матрицу инциденций графа G*. Строки матрицы инциденций соответствуют вершинам, столбцы – ребрам (дугам).

Представление графа с помощью матрицы инциденций $H[i, j]$ для неориентированного графа:

$$H[i,\ j]=\begin{cases}1, & \text{если вершина } x_i \text{ инцидентна ребру } u_j;\\ 0, & \text{если вершина } x_i \text{ не инцидентна ребру } u_j.\end{cases}$$

Представление графа с помощью матрицы инциденций для ориентированного графа:

$$H[i,\ j]=\begin{cases}-1, \text{если вершина } x_i \text{ инцидентна дуге } u_j \text{ и является ее началом};\\ \ \ 0, \text{если вершина } x_i \text{ не инцидентна дуге } u_j;\\ \ \ 1, \text{если вершина } x_i \text{ инцидентна дуге } u_j \text{ и является ее концом}.\end{cases}$$

Для ориентированных и неориентированных графов можно построить *матрицу смежности вершин*. Рассмотрим простой граф G, содержащий n вершин. Его матрица смежности будет квадратной матрицей n-го порядка. Строки и столбцы матрицы будут соответствовать вершинам G. Матрица смежности будет иметь вид:

$$M[i,\ j]=\begin{cases}1, & \text{если вершина } x_i \text{ смежна вершине } x_j;\\ 0, & \text{если вершины } x_i \text{ и } x_j \text{ не смежны}.\end{cases}$$

Очевидно, что для неориентированного графа матрица смежности будет симметрической.

Для орграфа матрица смежности строится аналогично. В орграфе, не содержащем параллельных дуг, элементами матрицы смежности $M[i, j]$ будут также числа 0 и 1:

$$M[i,\ j]=\begin{cases}1, & \text{если дуга выходит из вершины } x_i \text{ и входит в вершину } x_j;\\ 0, & \text{если вершины } x_i \text{ и } x_j \text{ не смежны}.\end{cases}$$

Если же граф G не является простым, то элемент матрицы смежности a_{ij} равен числу дуг, выходящих из вершины x_i и входящих в вершину x_j.

Теорема 2.2.1. Графы изоморфны тогда и только тогда, когда их матрицы смежности вершин получаются друг из друга одновременными перестановками строк и столбцов. То есть одновременно с перестановкой i-й и j-й строк должны быть переставлены i-й и j-й столбцы.

Теорема 2.2.2. Графы изоморфны тогда и только тогда, когда их матрицы инциденций получаются друг из друга произвольными перестановками строк и столбцов.

Задача 2.2.1. Для графа $G_{5.1}$, изображенного на рис. 16, построим матрицы смежности и инциденций.

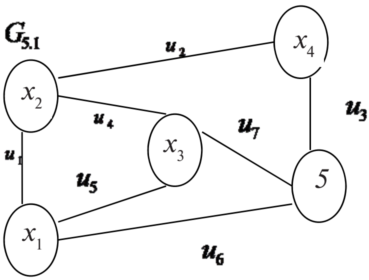

Рис. 16

	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6	u_7
x_1	1	0	0	0	1	1	0
x_2	1	1	0	1	0	0	0
x_3	0	0	0	1	1	0	1
x_4	0	1	1	0	0	0	0
x_5	0	0	1	0	0	1	1

Матрица инциденций
графа $G_{5.1}$

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
x_1	0	1	1	0	1
x_2	1	0	1	1	0
x_3	1	1	0	0	1
x_4	0	1	0	0	1
x_5	1	0	1	1	0

Матрица смежности
графа $G_{5.1}$

Задача 2.2.2. Для графа $G_{5.2}$, изображенного на рис. 17, построим матрицы смежности и инциденций.

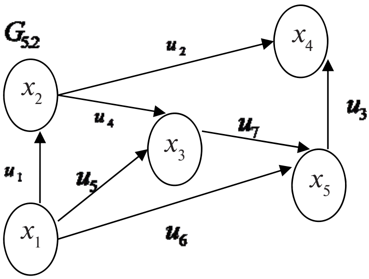

Рис. 17

	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6	u_7
x_1	−1	0	0	0	−1	−1	0
x_2	1	−1	0	−1	0	0	0
x_3	0	0	0	1	1	0	−1
x_4	0	1	1	0	0	0	0
x_5	0	0	−1	0	0	1	1

Матрица инциденций орграфа $G_{5.2}$

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
x_1	0	1	1	0	1
x_2	0	0	1	1	0
x_3	0	0	0	0	1
x_4	0	0	0	0	0
x_5	0	0	0	1	0

Матрица смежности орграфа $G_{5.2}$

Задача 2.2.3. Для графа $G_{5.3}$, изображенного на рис. 18, построить матрицы смежности и инциденций.

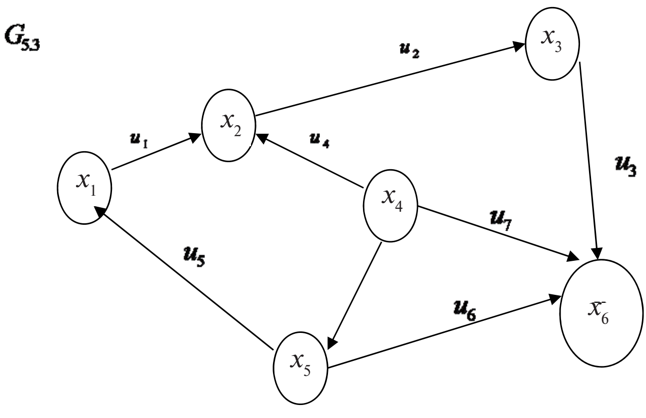

Рис. 18

§ 2.3. Упорядочивание дуг и вершин орграфа

Прежде чем решать задачу на основе связного графа без циклов, необходимо осуществить упорядочение его элементов, в связи с чем вершины графа разбивают на группы таким образом, чтобы вершины первой группы не имели предшествующих вершин, а вершины последней группы не имели последующих, вершины любой другой группы не имели предшествующих в следующей группе, вершины одной и той же группы дугами не соединялись.

Подобное разбиение всегда можно выполнить графическим или матричным способом. В результате упорядочивания получается граф, изоморфный исходному. Графический способ называется *алгоритмом Фалкерсона*. Выделение групп вершин согласно алгоритму Фалкерсона осуществляется следующим образом:

- первая группа вершин – это вершины графа, в которые не входит ни одна дуга. Вершины в группе нумеруются в произвольном порядке;
- вторая группа вершин – это вершины, оставшиеся после вычеркивания всех пронумерованных вершин и дуг, исходящих из этих вершин. Вершинам, оставшимся после вычеркивания дуг, в которые не будет входить ни одна дуга, присваиваются следующие номера и т. д.

Процесс продолжать до тех пор, пока не будут упорядочены все вершины.

Задача 2.3.1. Упорядочим граф $G_{6.1}$, изображенный на рис. 19, *а*.

В первую группу вершин, в которую не входит ни одна дуга, согласно алгоритму Фалкерсона войдет вершина x_1. Вычеркнем все дуги, выходящие из вершины x_1 (рис. 19, *б*).

Во вторую группу вершин войдет только одна вершина – вершина x_2, так как x_2 – единственная вершина на данном шаге, в которую не входит ни одна дуга. Вычеркнем вершину x_2 и все выходящие из нее дуги (рис. 19, *в*).

К третьей группе вершин отнесем вершины x_3 и x_4. Вычеркнем дуги, выходящие из вершин x_3, x_4 (рис. 19, *г*).

К четвертой группе отнесем вершину x_5. Вершина x_6 образует пятую группу вершин.

Изоморфный граф с упорядоченными вершинами изображен на рис. 19, *д*.

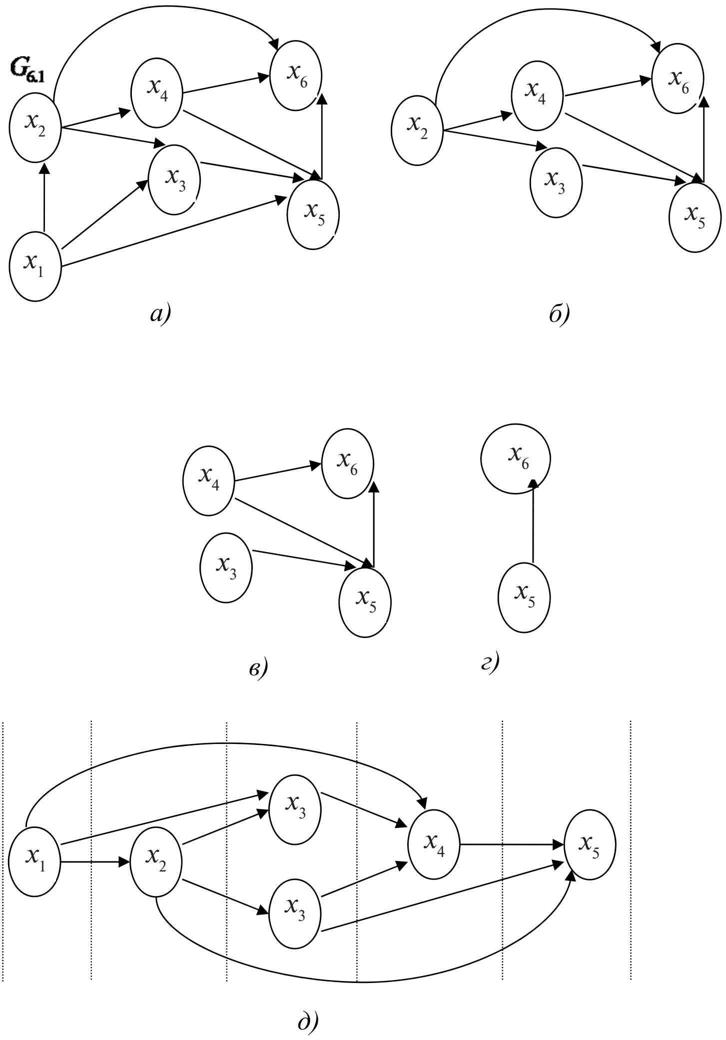

Рис. 19

Замечание. Если при упорядочивании вершин графа нарушается порядок нумерации, то вершинам графа присваивают новые номера в порядке возрастания.

§ 2.4. Некоторые примеры задач, решаемых с помощью теории графов

В приложениях граф обычно интерпретируется как сеть, а его вершины называют узлами. Рассмотрим примеры решения некоторых характерных задач.

Построение коммуникационной сети минимальной длины

Коммуникационная сеть минимальной длины (дерево кратчайших расстояний) – это совокупность ребер графа (дуг сети), имеющая минимальную суммарную длину и обеспечивающая достижение всех вершин графа (узлов сети), то есть возможность попасть из любой вершины в любую другую вершину графа.

Построение коммуникационной сети можно начать, соединив одну из вершин графа с ближайшей к ней вершиной. В результате получится связное множество, состоящее из двух вершин. К связному множеству присоединяется следующая ближайшая вершина. Если таких ближайших вершин несколько, то выбирается любая, и т. д.

Задача 2.4.1. Телевизионная фирма планирует создание кабельной сети для обслуживания 9 районов-новостроек (рис. 20). Числа на ребрах графа указывают длину кабеля в условных единицах. Узел A – телевизионный центр. Отсутствие ребра между узлами означает, что соединение соответствующих новостроек либо связано с большими затратами, либо невозможно. Найти такое соединение кабеля, чтобы длина его была минимальна.

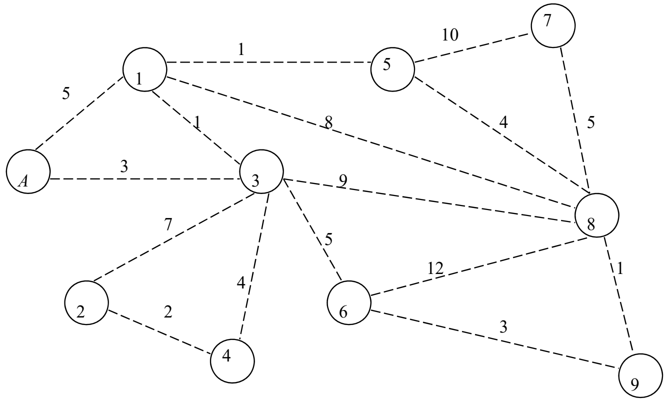

Рис. 20

Решение. Начнем с вершины *А*, присоединим к ней ближайшую вершину *3*, соединив вершину *А* с вершиной *3* ребром. Получим связное множество {*А*, 3}. Следующая к связному множеству, как ближайшая, будет присоединена вершина *1*. Получим связное множество, состоящее из трех элементов: {*А*, 3, 1}.

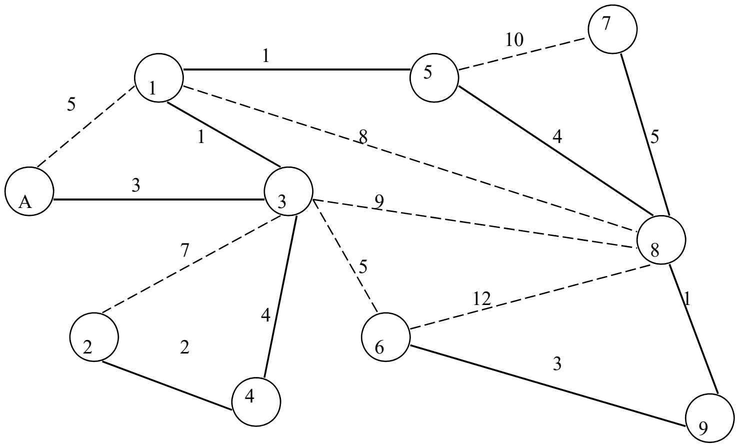

Рис. 21

На следующем шаге получим связное множество, состоящее из четырех элементов: {*А*, 3, 1, 5}. Возрастание количества элементов связного множества продолжится в следующем порядке: {*А*, 3, 1, 5, 8}, {*А*, 3, 1, 5, 8, 9, 6}, {*А*, 3, 1, 5, 8, 9, 4, 2}, {*А*, 3, 1, 5, 8, 9, 4, 2, 6, 7} (рис. 21).

Предполагаемая длина кабеля – 24 условные единицы.

Дерево решений

Одной из основных задач управленческого персонала является задача принятия правильного решения. Чаще всего его приходится принимать в условиях неопределенности, когда каждое решение зависит от исхода предыдущего: после принятия решения возникает необходимость принятия следующего решения и т. д.

Дерево решений – это графическое изображение процесса принятия решений, в котором отражены альтернативные решения, состояния среды, соответствующие вероятности, и выигрыши для любых комбинаций альтернатив и состояний среды. Дерево рисуют слева направо. Вершины, соответствующие принятию решения, изображаются в виде квадрата. Вершины, соответствующие исходам, не подвластным контролю, обозначаются кругами.

На ребрах графа проставляются расходы, соответствующие выбранным решениям.

Задача 2.4.2. Предприниматель, анализируя ситуацию на рынке в связи с открытием магазина, заметил, что открытие большого магазина может принести прибыль до 60 млн рублей при благоприятствующем состоянии рынка, но при открытии подобного магазина конкурентом можно понести убытки до 40 млн рублей. Открытие небольшого магазина даст не более 30 млн рублей прибыли при благоприятном состоянии рынка и 10 млн рублей убытков при неблагоприятном. Для себя развитие каждого из сценариев рынка (благоприятного и неблагоприятного) предприниматель оценивает равнозначно.

Если же для исследования рынка пригласить специалиста, то будет необходимо оплатить услуги стоимостью 5 млн рублей. Специалист считает, что с вероятностью 0,6 состояние рынка окажется благоприятным. В то же время при положительном заключении специалиста состояние рынка окажется благоприятным лишь с вероятностью 0,9. При отрицательном заключении с вероятностью 0,12 состояние рынка может оказаться благоприятным. Необходимо принять решение, используя дерево решений, и ответить на вопрос: какова ожидаемая стоимостная оценка наилучшего решения.

Решение. Дерево решений начнем с построения вершины *1*, которая соответствует принятию решения «Приглашать специалиста для проведения исследования рынка или не приглашать».

Вершины *2*, *3*, *4* соответствуют принятию решения «Открыть большой магазин или открыть маленький магазин».

Вершины B, C, D, E, F соответствуют исходам, не подвластным контролю предпринимателя: «Состояние рынка окажется благоприятным или неблагоприятным для открытия магазинов».

Вершина A также соответствует исходу, не подвластному контролю предпринимателя: «Специалист прогнозирует благоприятное состояние рынка или неблагоприятное».

Там, где исход события не зависит от решения предпринимателя, укажем вероятность возможных исходов (рис. 22).

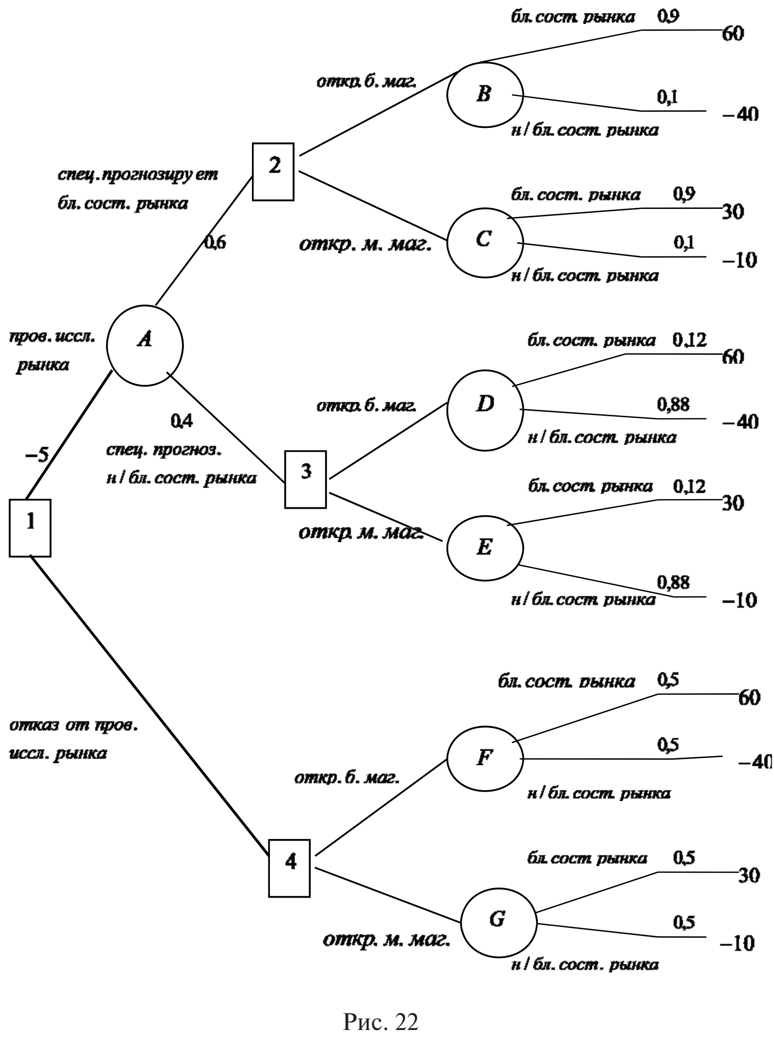

Рис. 22

Введем обозначения: *APR* – среднее значение прибыли, *MPR* – максимальное значение прибыли. Для каждой из вершин *B*, *C*, *D*, *E*, *F, G* вычислим среднее значение прибыли в млн руб.:

$$APR_B = 60 \cdot 0{,}9 + (-40) \cdot 0{,}1 = 50;$$

$$APR_C = 30 \cdot 0{,}9 + (-10) \cdot 0{,}1 = 26;$$

$$APR_D = 60 \cdot 0{,}12 + (-40) \cdot 0{,}88 = -28;$$
$$APR_E = 30 \cdot 0{,}12 + (-10) \cdot 0{,}88 = -5{,}2;$$
$$APR_F = 60 \cdot 0{,}5 + (-40) \cdot 0{,}5 = 10;$$
$$APR_G = 30 \cdot 0{,}5 + (-10) \cdot 0{,}5 = 10.$$

Для вершин *2*, *3*, *4* вычислим максимальное значение прибыли:

$$MPR_2 = \max(APR_B, APR_C) = \max(50, 26) = 50;$$
$$MPR_3 = \max(APR_D, APR_E) = \max(-28, -5{,}2) = -5{,}2;$$
$$MPR_4 = \max(APR_F, APR_G) = \max(10, 10) = 10.$$

Для вершины A вычислим среднее от значений MPR_2 и MPR_3:

$$APR_A = MPR_2 \cdot 0{,}6 + MPR_3 \cdot 0{,}4 = 50 \cdot 0{,}6 + (-5{,}2) \cdot 0{,}4 = 50.$$

Для вершины *1* вычислим максимальное значение прибыли:

$$MPR_1 = \max(APR_A - 5, MPR_4) = \max(50 - 5; 10) = 45.$$

Отсюда следует, что если предприниматель закажет обследование рынка и, при благоприятном прогнозе рынка специалистом, откроет большой магазин, то ожидаемая стоимостная оценка наилучшего решения будет равна 45 млн руб.

§ 2.5. История возникновения и развития сетевых методов

Сетевая модель – это математическая модель комплекса взаимосвязанных работ, позволяющая наилучшим образом упорядочить выполнение работ, прогнозируя и предупреждая возможные срывы.

Объектом управления в системах сетевого планирования и управления являются коллективы исполнителей, располагающих определенными ресурсами и выполняющих определенный комплекс операций, который призван обеспечить достижение намеченной цели, например разработку нового изделия, строительство объекта и т. п. Методики сетевого планирования были разработаны в период с 1956 по 1958 год, причем в этот временной промежуток были разработаны параллельно два метода. Один из них – метод критического пути при фиксированном числе работ (CPM – Critical Path Method) – был разработан строительным концерном «Дюпон» и применялся для составления расписания при строительстве и ремонте химических заводов. Второй метод – метод оценки и пересмотра проектов (PERT – Program Evaluation and Review Technique) –

был разработан по заказу военно-морских сил в целях координации исследовательских и проектных работ. Впервые метод PERT был применен при разработке проекта по созданию ракетной системы «Поларис». Проект «Поларис» объединял 3800 основных подрядчиков и состоял из 60 тысяч операций. Проект удалось завершить на два года раньше запланированного срока благодаря внедрению сетевого моделирования в процесс управления проектом. Оба метода нашли применение при выполнении сложных проектов, включающих более тысячи работ.

В СССР сетевые методы начали внедряться в начале 70-х годов XX века на машиностроительных предприятиях, в том числе в авиационной промышленности, в целях управления процессами, создания и освоения производства новых изделий.

В настоящее время сетевые методы нашли широкое применение в строительстве, транспортной логистике, стратегическом менеджменте. Наиболее распространенными направлениями применения сетевого планирования являются целевые научно-исследовательские и проектно-конструкторские разработки сложных объектов, машин и установок, в создании которых принимают участие большое количество предприятий и организаций.

Современное представление графа отличается от разработанного в середине прошлого века. Уже в конце XX века элементная база графа сузилась до одного понятия: процесс, который имеет начало, завершение и длительность, это позволило сетевым методам получить еще более широкое применение. Качественный скачок методы сетевого планирования получили с появлением персональных компьютеров и применением современного программного обеспечения. В настоящее время появились системы управления проектами на рынке программного обеспечения. Существуют десятки систем управления проектами. Наиболее распространенными являются Microsoft Project, Primavera Project Planner, Spider Project, Open Plan.

Сетевое планирование обычно применяется в проектной деятельности при планировании сложных разработок, не имеющих в прошлом никаких аналогов. Основным плановым документом в системе сетевого планирования и управления (СПУ) является сетевой график (сетевая модель, или просто сеть), представляющий собой информационно-динамическую модель, в которой изображаются взаимосвязи и результаты всех работ, необходимых для достижения конечной цели разработки.

§ 2.6. Элементы сетевого планирования

С математической точки зрения сетевой график – это связный орграф без петель и контуров.

Основные понятия сетевой модели: *работа, событие, путь.*

✓ *Работа* понимается в широком смысле. Это действительно может быть работа, требующая затрат времени и ресурсов; может быть просто ожидание (протяженный во времени процесс, не требующий никаких затрат).

Работа в сетевых графиках изображается в виде дуги, которая соединяет два события и задает направление. Дуга обозначается парой заключенных в скобки чисел (i, j), где i – номер события, из которого работа выходит, а j – номер события, в которое она входит. Работа не может начаться раньше, чем свершится событие, из которого она выходит. Каждая работа имеет определенную продолжительность $t(i, j)$. Существует понятие «фиктивная работа», которая устанавливает логическую взаимосвязь между событиями, но не требует материальных затрат и времени выполнения. Так, например, нельзя устанавливать мебель, пока не высохнет пол после покраски. Фиктивная работа обычно изображается в виде дуги штриховыми линиями.

✓ *Событие* – это момент завершения какого-либо процесса (работы), отражающий отдельный этап выполнения проекта.

Среди событий сетевой модели выделяют исходное событие (источник) и завершающее (сток). Исходное событие не имеет предшествующих работ и событий. Завершающее событие не имеет последующих работ и событий.

События не имеют протяженности во времени. Событие свершается в тот момент, когда оканчивается последняя из работ, входящая в него. Событие обозначается одним числом и при графическом представлении в сетевой модели изображается кружком (или иной геометрической фигурой), внутри которого проставляется порядковый номер ($i = 1, 2, ..., n$).

✓ Путь – любая последовательность работ. Полный путь – это путь от «источника» до «стока». Продолжительность пути определяется суммой продолжительностей составляющих его работ. Критический путь – это наиболее продолжительный полный путь. Работы и события, расположенные на критическом пути, называют критическими. Их несвоевременное выполнение ведет к срыву сроков всего комплекса работ. Время прохождения критического пути называют также критическим. Комплекс работ выполнить за время меньшее, чем критическое, невозможно.

Анализ проекта с точки зрения минимизации временны́х затрат

Предположим, что требуется проанализировать проект с точки зрения минимальных временных затрат на его выполнение. Анализ осуществляют поэтапно:

1) проект разбивают на отдельные работы;
2) оценивают время, необходимое для проведения каждой из них;
3) записывают последовательность операций, показывающую, какие работы должны быть закончены, прежде чем начнутся другие;
4) строится сетевая модель, с помощью которой определяется степень напряженности выполнения отдельных работ, а также всего комплекса, и принимается решение о перераспределении ресурсов.

Основные требования, которым должна удовлетворять сеть

Перед расчетом сетевой модели следует убедиться, что она удовлетворяет основным требованиям.

1. Сеть должна быть изображена слева направо. События должны быть упорядочены. При упорядочении сетевого графика события и работы располагают таким образом, что предшествующее событие для любой работы расположено левее и имеет меньший номер по сравнению с завершающим данную работу событием.

2. Сетевая модель не должна содержать тупиковых событий, т. е. таких, за которыми не следует хотя бы одна работа. Исключение составляет завершающее событие – сток. На рис. 23 событие *i* является тупиковым.

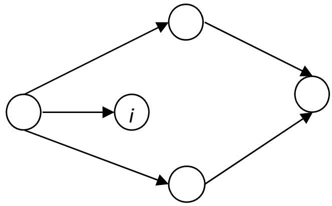

Рис. 23

3. Сетевая модель не должна содержать событий, за исключением исходного, которым не предшествует хотя бы одна работа. На рис. 24 событию *j* не предшествует ни одна работа.

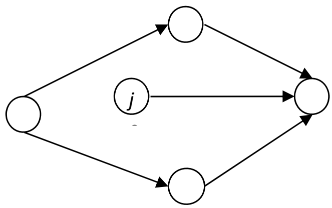

Рис. 24

4. Сетевая модель не должна содержать замкнутых циклов, подобных циклу, изображенному на рис. 25.

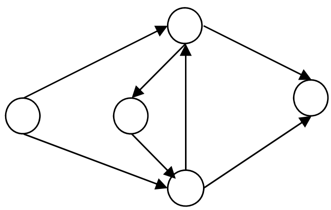

Рис. 25

Рассмотрим основные временные параметры сетевых графиков.

✓ *Ранний срок* $t_p(j)$ свершения события *j* – это самый ранний момент, к которому завершаются все работы, предшествующие этому событию.

Ранний срок события $t_p(j)$ будем отмечать в верхней части соответствующей вершины.

Ранний срок $t_p(j)$ (рис. 26) подсчитывается путем сложения раннего срока предшествующего $t_p(i)$ события и длительности работы $t(i, j)$: $t_p(j) = t(i, j) + t_p(i)$.

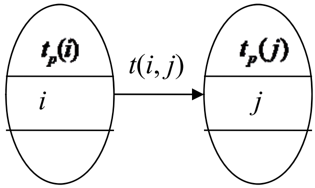

Рис. 26

Если событию j предшествуют несколько событий, то из полученных сумм выбирается та, которая больше. Например, если событию j предшествуют два события i_1 и i_2, то $t_p(j) = \max\{t(i_1, j) + t_p(i_1); t(i_2, j) + t_p(i_2)\}$ (рис. 27).

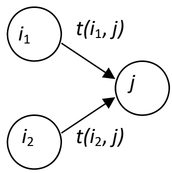

Рис. 27

✓ *Поздний срок* $t_n(i)$ свершения события i – это самый поздний момент совершения события, после которого остается ровно столько времени, сколько необходимо для выполнения всех работ, следующих за этим событием.

Поздний срок события i находится как разность позднего срока $t_n(j)$ последующего события j и длительности работы $t(i, j)$: $t_n(i) = t_n(j) - t(i, j)$.

Если за событием i следует несколько событий, то для подсчета поздних сроков события i выбирается наименьшее число из разностей времени наступления позднего срока последующего события и длительности работы. Например, если событие i имеет ровно два последующих события, то $t_n(i) = \min\{t_n(j_1) - t(i, j_1); t_n(j_2) - t(i, j_2)\}$ (рис. 28).

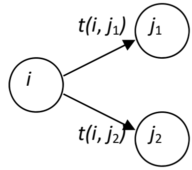

Рис. 28

Формула расчета ранних сроков событий предполагает, что они рассчитываются от начального события (источника) к конечному (стоку). Определение же поздних сроков события выполняется при движении от последнего события к предшествующему.

Критическое время и критический путь

Ранний срок наступления конечного события называется *критическим временем* и обозначается $T_{кр}$. Весь проект не может быть завершен раньше момента времени $T_{кр}$, т. е. критическое время – это минимальный срок окончания всего комплекса работ. Критический путь выделяется двойной линией. На протяжении всего критического пути ранний и поздний сроки совпадают. Таким образом:

1) для того чтобы определить минимальное (критическое) время, необходимое для завершения всего проекта, определяется ранний срок выполнения завершающего события;
2) для того чтобы определить топологию критического пути, необходимо вычислить поздний срок свершения каждого события. Путь, проходящий через все события, для которых ранний и поздний сроки свершения равны, является критическим.

Определение критических работ очень важно для эффективного составления проекта. Малейшая задержка работы, лежащей на критическом пути, увеличивает общую продолжительность работ.

В отличие от критической работы момент начала работы, не являющейся критической, может быть передвинут назад без увеличения общей продолжительности работы. Необходимо, чтобы сдвинутая некритическая работа была завершена до начала критических работ. Поэтому важно уметь подсчитывать резервы времени.

Полный резерв времени показывает, на сколько можно увеличить время выполнения конкретной работы при условии, что срок выполнения всего комплекса работ не изменится.

Полный резерв времени $\Delta^{\text{п}}{}_{i,j}$ для работы (i, j) определяется как разность позднего срока $t_n(i)$ события j минус ранний срок $t_p(i)$ события i и продолжительность $t(i, j)$ работы (i, j): $\Delta^{\text{п}}{}_{i,j} = t_{\text{п}}(j) - t_{\text{р}}(i) - t(i, j)$ (рис. 29).

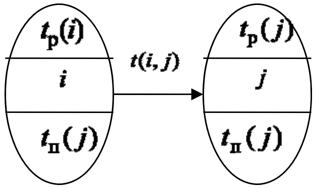

Рис. 29

Использовать этот резерв в полном объеме можно, только если предыдущая работа завершилась с ранним сроком, а часть следующих работ этого резерва вообще лишается. В производственной практике использование полного резерва может быть только в результате согласования с теми, кто выполняет предшествующие и последующие работы, или с руководителем проекта.

Независимый резерв времени соответствует случаю, когда все предшествующие работы заканчиваются в поздние сроки, а все последующие – начинаются в ранние сроки. Использование этого резерва не влияет на величину резервов времени других работ.

Независимый резерв времени $\Delta^{\text{н}}{}_{i,j}$ вычисляется по формуле

$$\Delta^{\text{н}}{}_{i,j} = t_{\text{р}}(j) - t_{\text{п}}(i) - t(i, j).$$

Использование этого резерва никак не отражается на других работах.

Для полного и независимого резервов времени выполняется неравенство $\Delta^{\text{н}}{}_{i,j} \le \Delta^{\text{п}}{}_{i,j}$.

Для всех работ, оказавшихся на критическом пути, полный и независимый резервы равны нулю. Верно и обратное утверждение: цепочка работ, которая имеет нулевые резервы, лежит на критическом пути.

Задача 2.6.1. Продемонстрируем сетевой метод решения на примере строительства дачного дома.

Исходные данные внесем в табл. 1 и дадим временную оценку проекта строительства дома.

Таблица 1

Работа	Название работы	Продолжительность работы (в днях)	Предшествующие работы
A	Заливка фундамента	2	
B	Изготовление оконных рам и дверей	7	
C	Изготовление встроенных шкафов и мебели	15	
D	Монтаж водопроводной системы	8	*E*
E	Возведение стен	10	*A*, *B*
F	Оштукатуривание стен	2	*D*, *G*
G	Возведение крыши	6	*E*
H	Благоустройство территории	8	*G*
I	Установка встроенной мебели	2	*C*, *F*, *H*
J	Покраска	3	*I*

Дадим временную оценку продолжительности выполнения каждой из предполагаемых работ и внесем эти значения в первые три столбца табл. 1. Продолжительность работ указана в днях. В последней графе перечислим работы, предшествующие рассматриваемой.

Составим диаграмму работ в виде графа. Вершины графа i будут соответствовать событиям; дуги графа (i, j) будут соответствовать работам.

Построим и проанализируем сеть согласно алгоритму.

1. Строим сеть (рис. 30) согласно табл. 1.

2. Применяя алгоритм Фалкерсона, упорядочиваем полученную сеть.

3. Нумеруем слева направо события.

4. Указываем продолжительность работ.

5. Для каждого события вычисляем ранний срок свершения $t_p(i)$, полученное значение заносим в верхнюю часть соответствующей вершины. Ранний срок свершения события вычисляем слева направо, начиная с нулевой вершины (рис. 31), присвоив $t_p(0) = 0$.

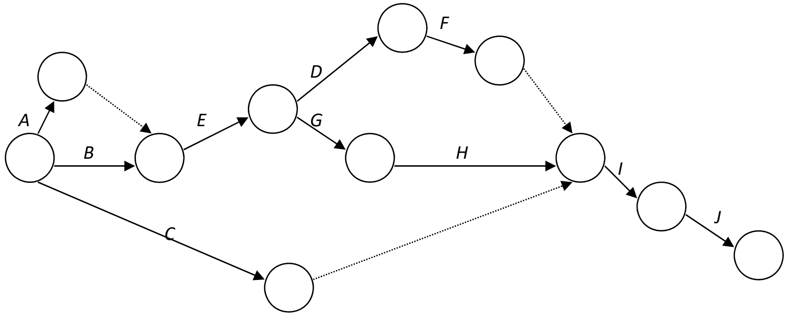

Рис. 30

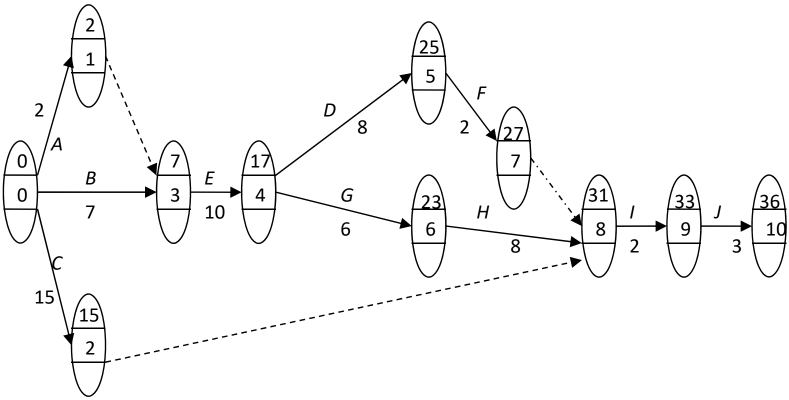

Рис. 31

Так как в вершину *1* входит только одна дуга, то

$$t_p(1) = t(0, 1) + t_p(0) = 2 + 0 = 2.$$

Аналогично, так как в вершину *2* входит только одна дуга, то

$$t_p(2) = t(0, 2) + t_p(0) = 15 + 0 = 15.$$

В вершину *3* входят две дуги, поэтому

$$t_p(3) = \max\{t(1, 3) + t_p(1); t(0, 3) + t_p(0)\} = \max\{2 + 0; 7 + 0\} = 7 \text{ и т. д.}$$

6. Значение *36* в верхней части последней вершины означает, что для строительства дома потребуется не меньше чем 36 дней. Дом можно будет построить ровно за 36 дней при условии, что все работы, лежащие на критическом пути, будут выполнены в установленные для них сроки.

7. Для построения критического пути для каждого события рассчитаем поздний срок свершения $t_n(i)$. Полученное значение заносим в нижнюю часть соответствующей вершины (рис. 32). Поздний срок свершения события вычисляем справа налево, начиная с последней вершины. В последней вершине ранний срок свершения равен позднему сроку: $t_n(10) = t_p(10) = 36$. Из вершины *9* выходит одна дуга, поэтому $t_n(9) = t_n(10) - t(9, 10) = 36 - 3 = 33$. Аналогично $t_n(8) = t_n(9) - t(8, 19) = 33 - 2 = 31$; $t_n(7) = t_n(8) - t(7, 8) = 31 - 0 = 31$ и т. д. Из вершины *4* выходят две дуги, поэтому

$$t_n(4) = \min\{t_n(5) - t(4; 5); t_n(6) - t(4; 6)\} = \min\{29 - 8; 23 - 6\} = 17 \text{ и т. д.}$$

8. Критический путь отметим двойной стрелкой, двигаясь слева направо от события 0. Критический путь пойдет через все вершины, у которых значения раннего и позднего срока свершения события совпадают (рис. 32).

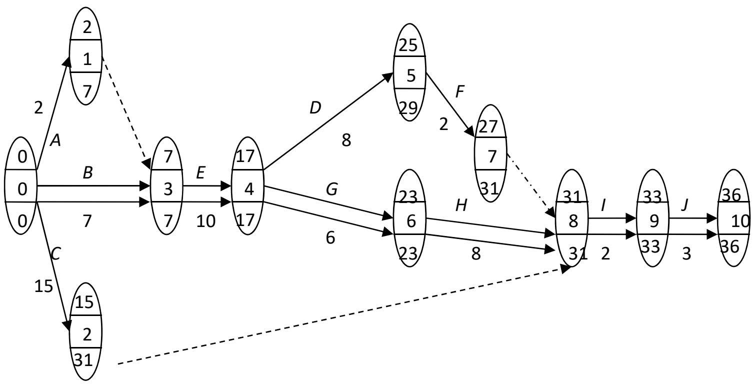

Рис. 32

9. Рассчитаем резервы времени. Например, работа (4, 5) не имеет независимого резерва времени ($\Delta''_{4,5} = 25 - 17 - 8 = 0$), а полный резерв времени для работы (4, 5) равен 4 дням ($\Delta''_{4,5} = 29 - 17 - 8 = 4$). Следовательно, если выполнение работы (4, 5) задержать на 4 дня, то все последующие работы не будут иметь резервов времени.

Вычислим резервы времени для работы (5, 7):

$$\Delta''_{5,7} = 31 - 2 - 25 = 4; \quad \Delta''_{5,7} = 27 - 2 - 29 = -4 < 0.$$

Работа (5, 7) независимого резерва не имеет.

Для работы (3, 4), лежащей на критическом пути:

$$\Delta''_{3,4} = 17 - 7 - 10 = 0; \quad \Delta''_{4,5} = 17 - 7 - 10 = 0.$$

Ответ. Критическое время в задаче равно 36 дням. Отсюда следует, что анализируемый проект может быть реализован не менее чем за 36 дней. Критическими являются работы *B*, *E*, *G*, *H*, *I*, *J*.

Задача 2.6.2. При составлении проекта выделено 12 событий и 26 связывающих их работ: (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (2, 3), (2, 6), (2, 9), (3, 4), (3, 6), (4, 6), (4, 8), (5, 4), (5, 7), (6, 8), (6, 9), (7, 4), (7, 8), (7, 10), (7, 12), (8, 9), (8, 10), (9, 10), (9, 11), (10, 12), (11, 10), (11, 12).

Задано время выполнения работ:

$t(1, 2) = 1$,	$t(1, 3) = 7$,	$t(1, 4) = 4$,	$t(1, 5) = 2$,
$t(2, 3) = 4$,	$t(2, 6) = 2$,	$t(2, 9) = 10$,	$t(3, 4) = 6$,
$t(3, 6) = 3$,	$t(4, 6) = 4$,	$t(4, 8) = 9$,	$t(5, 4) = 3$,
$t(5, 7) = 6$,	$t(6, 8) = 1$,	$t(6, 9) = 7$,	$t(7, 4) = 1$,
$t(7, 8) = 3$,	$t(7, 10) = 2$,	$t(7, 12) = 1$,	$t(8, 9) = 5$,
$t(8, 10) = 7$,	$t(9, 10) = 6$,	$t(9, 11) = 2$,	$t(10, 12) = 3$,
$t(11, 10) = 8$,	$t(11, 12) = 3$.		

Определить:

1) временные параметры событий;
2) минимальное время, необходимое для осуществления всего проекта;
3) критический путь.

Решение

1. Составим сетевой граф согласно условию (рис. 33).

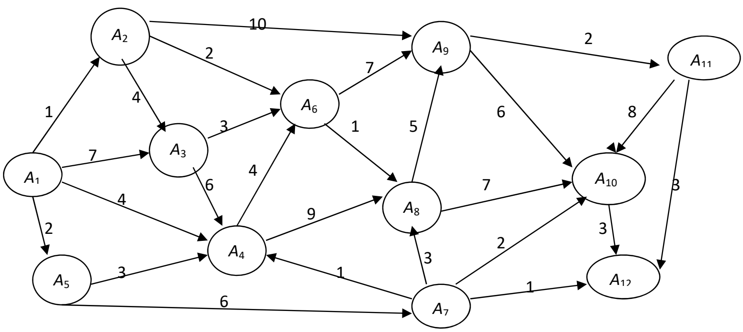

Рис. 33

2. Упорядочим граф, воспользовавшись алгоритмом Фалкерсона (рис. 34).

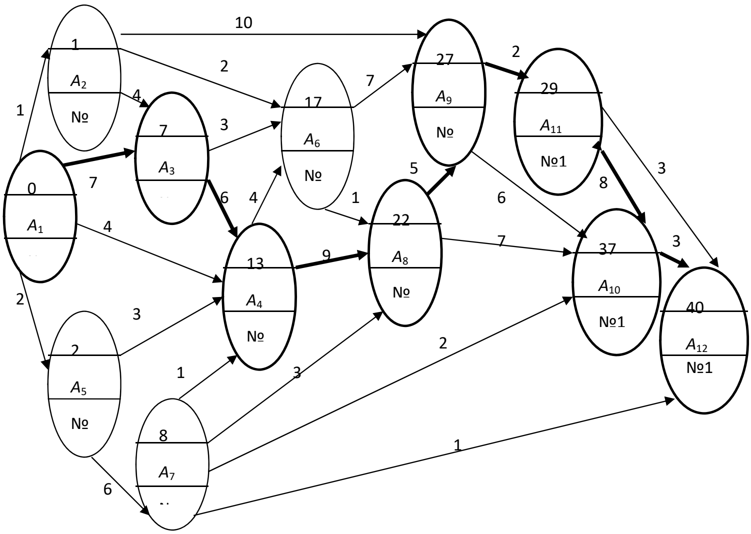

Рис. 34

3. Присвоим новые номера событиям в порядке возрастания слева направо. Так, например, событию A_6 присвоим № 7.

4. Ранний срок свершения событий внесем в верхние части вершин, заполняя сеть слева направо. Получим: критическое время равно 40 у. е.

5. В нижние части вершин внесем поздний срок свершения событий, заполняя сеть справа налево.

6. Выделим путь, проходящий через все вершины, ранний и поздний сроки которых совпадают. Получим критический путь: A_1, A_3, A_4, A_8, A_9, A_{11}, A_{10}, A_{12} (рис. 34).

§ 2.7. Анализ и оптимизация сетевой модели

Решение задачи сетевым методом не ограничивается построением модели и вычислением ее основных параметров. В дальнейшем осуществляется анализ целесообразности структуры модели, степени сложности входящих в модель работ, загрузки исполнителей работ на отдельных этапах. После чего осуществляется оптимизация по какому-то из параметров модели.

Для анализа сложности соблюдения сроков выполнения работ на некритических путях вычисляется коэффициент напряженности работ $K_н(i, j)$:

$$K_н(i,\ j) = (t(L_{max}) - t'_{кр})/(t_{кр} - t'_{кр}) = 1 - \Delta^n(i,\ j)/(t_{кр} - t'_{кр}),$$

где $t(L_{max})$ – продолжительность максимального пути, проходящего через работу $t(i, j)$; $t'_{кр}$ – продолжительность отрезка рассматриваемого пути, совпадающего с критическим путем.

Знание значений коэффициентов напряженности работ позволяет уменьшить критическое время за счет перераспределения трудовых ресурсов с ненапряженных работ на критические.

Значение коэффициента напряженности меняется от 0 до 1. Чем сложнее выполнить в намеченный срок работу, тем ближе коэффициент напряженности к 1. Для работ на критическом пути коэффициент напряженности равен 1. Условно работы сетевой модели в зависимости от значения коэффициента напряженности разбивают на три группы:

- напряженные ($K_н(i, j) > 0{,}8$);
- подкритические ($0{,}6 < K_н(i, j) < 0{,}8$);
- резервные ($K_н(i, j) < 0{,}6$).

Критическое время выполнения комплекса работ можно уменьшить в результате перераспределения ресурсов, переводя по возможности работы в первую группу.

После того как построена сетевая модель проекта работ, найден критический путь и определены резервы времени и коэффициент напряженности, руководитель может осознанно организовать проведение работ, распределение людских и материальных ресурсов, установку оборудования и переброску бригад, а также плановые сроки завершения работ.

§ 2.8. Сетевые методы управления проектами в условиях неопределенности

В отличие от производственной деятельности, которую можно рассматривать чаще всего как циклическую, любая проектная деятельность является однократной и неповторимой. Если даже проект повторяется, то прошлый опыт может лишь ограниченно подсказать руководителю проекта, чего можно ожидать при выполнении проекта, так как любая проектная деятельность сопряжена с неопределенностью и риском. Информация, используемая в управлении проектами, обычно не бывает достоверной на все сто процентов. Большинство управленческих решений приходится принимать в условиях ограниченности, неточности исходной информации о самом объекте и внешней среде, в которой он функционирует и развивается, т. е. в условиях неопределенности и риска. В условиях риска вероятность наступления отдельных событий, влияющих на конечный результат, может быть установлена с некоторой степенью точности. В условиях неопределенности из-за отсутствия необходимой информации вероятность отдельных событий установить невозможно. Грамотное заключение контракта и дальнейшее планирование выполнения проекта невозможно без учета неопределенности исходной информации.

Продолжительность работы по сетевому графику чаще всего является случайной величиной, о которой известно, что она может принимать лишь одно из ряда возможных значений, характеризующееся своим законом распределения, своими числовыми характеристиками: математическим ожиданием – $\bar{t}(i, j)$; дисперсией – $\sigma^2(i, j)$.

Установлено, что распределение продолжительности работ непрерывно и обладает свойствами унимодальности (наличием единичного максимума у кривой распределения) и положительной асимметрией (максимум кривой распределения смещен влево относительно медианы). Известное в математической статистике β-распределение обладает перечисленными свойствами, поэтому в дальнейшем вычисления проводятся в предположении, что продолжительность работ имеет β-распределение.

Для определения числовых характеристик (математического ожидания и дисперсии) случайной величины продолжительности работы (i, j) на основании опроса ответственных исполнителей проекта и экспертов определяют три временные характеристики:

- $t_{нв}(i, j)$ – наиболее вероятная оценка продолжительности работ (оценка продолжительности работ при нормальных условиях);
- $t_0(i, j)$ – оптимистическая оценка продолжительности работ (оценка при наиболее благоприятных условиях);
- $t_n(i, j)$ – пессимистическая оценка (оценка при наиболее неблагоприятных условиях).

Очевидно, что $t_0(i, j) < t_{нв}(i, j) < t_n(i, j)$.

При определении временных оценок работы (i, j) учитывается ряд факторов. Оценки не должны зависеть от возможных ситуаций при выполнении других работ; не должны влиять на оценки событий, которые случаются крайне редко (стихийные бедствия: пожары, наводнения, ураганы и т. д.). Оценки должны учитывать возможность появления событий, классифицируемых как случайные величины, например вызванных погодными условиями.

Плотность вероятности $f(t)$ β-распределения продолжительности работы (i, j) имеет четыре параметра распределения: t_n, t_0, α, λ и определяется по формуле

$$f(t) = \frac{(t - t_0)^{\alpha}(t_n - t)^{\gamma}}{\int\limits_{t_0}^{t_n}(t - t_0)^{\alpha}(t_n - t)^{\gamma}\,dt}. \tag{2.1}$$

На рис. 35 изображена кривая распределения продолжительности работ.

Предположение о β-распределении продолжительности работы (i, j) позволяет получить следующие оценки математического ожидания и дисперсии:

$$\bar{t}(i, j) = \frac{t_0(i, j) + 4t_{нв}(i, j) + t_n(i, j)}{6}; \tag{2.2}$$

$$\sigma^2(i, j) = \left[\frac{t_n(i, j) - t_0(i, j)}{6}\right]^2. \tag{2.3}$$

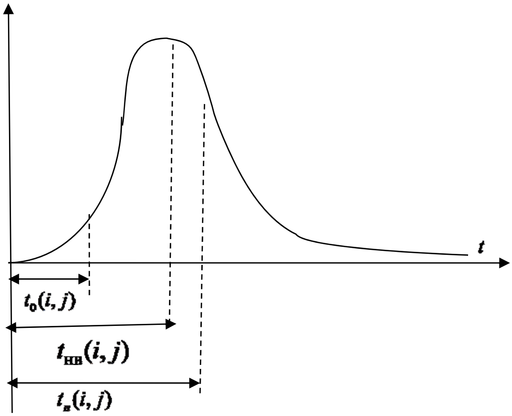

Рис. 35

Наиболее вероятное время выполнения работы $t_{нв}$ довольно сложно оценить даже специалистам. Поэтому при проектировании чаще используется упрощенная, менее точная оценка средней продолжительности работ:

$$\bar{t}(i,\ j) = \frac{2t_0(i,\ j) + 3t_n(i,\ j)}{5}. \qquad (2.4)$$

Знание $\bar{t}(i,\ j)$ и $\sigma^2(i, j)$ позволяет определить временные параметры сетевого графика и оценить их надежность.

При достаточно большом количестве работ, принадлежащих пути L, можно применить центральную предельную теорему Ляпунова, на основании которой можно утверждать, что общая продолжительность пути L подчиняется нормальному закону распределения со средним значением $\bar{t}(L)$, равным сумме средних значений $\bar{t}(i,\ j)$ продолжительности составляющих его работ, и дисперсией σ^2, равной сумме соответствующих дисперсий $\sigma^2(i, j)$.

Все временные параметры в условиях неопределенности являются средними значениями соответствующих случайных величин. Предположим, мы определили, что критический путь равен $\bar{t}_{кр}$. Но в каждом конкретном проекте возможны отклонения, и они могут быть существенные. Поэтому весьма важным моментом в проектной деятельности является умение оценить возможные риски. Управленческое решение может быть принято только при условии, что ожидаемый срок выполнения проекта, равный $\bar{t}_{кр}$, не превзойдет заданного директивного срока T. В качестве количественной оценки эффективности управления риском можно рассмотреть показатели вариации дисперсию σ^2 общей продолжительности критического пути $L_{кр}$ и коэффициент вариации, а также функцию риска F_r (вероятность того, что время выполнения проекта может оказаться больше директивного срока T):

$$F_r = P(t_{кр} > T). \qquad (2.5)$$

Таким образом, функцию риска (2.5) можно выразить через плотность распределения случайной величины $t_{кр}$:

$$F_r(t_{кр}) = 1 - \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{t_{кр}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} dx, \qquad (2.6)$$

где $m = M(t_{кр}) = \int_{t_0}^{t_n} x \cdot f(x)dx,\ \sigma^2 = \int_{t_0}^{t_n} (x-m)^2 \cdot f(x)dx$.

Если функция рисков $F_r\,(t_{кр}) > 0{,}3$, то опасность срыва заданного комплекса велика, необходимо принять дополнительные меры: перераспределить ресурсы по сети, пересмотреть состав работ.

Если $F_r\,(t_{кр})$ близка к нулю, то с достаточной степенью надежности можно прогнозировать выполнение проекта в директивный срок.

Проведем анализ возможных рисков для принятия управленческого решения на конкретном примере.

Предположим, что при составлении проекта выделено 12 событий и 21 связывающая их работа, заданы временные оценки выполнения каждой из работ (табл. 2). Используя β-распределение в качестве априорного для всех работ, вычислим числовые характеристики работ: математическое ожидание $\bar{t}(i, j)$ и дисперсию $\sigma^2(i, j)$, для чего воспользуемся формулами (2.2) и (2.3).

Решая задачу сетевыми методами с применением алгоритма Дейкстры, можно определить топологию критического пути, а также критическое время $\bar{t}_{кр}$ выполнения всех работ. На критическом пути в рассматриваемой задаче лежат работы (0, 1), (1, 3), (3, 6), (6, 9), (9, 11), (11, 12). Вычислим минимальное время, необходимое для выполнения проекта:

$$\bar{t}_{кр} = \bar{t}(0,1) + \bar{t}(1,3) + \bar{t}(3,6) + \bar{t}(6,9) + \bar{t}(9,11) + \bar{t}(11,12) = 48 \text{ (временных единиц).}$$

Далее определим дисперсию:

$$\sigma^2(L_{\text{кр}}) = \sigma^2(0,1) + \sigma^2(1,3) + \sigma^2(3,6) + \sigma^2(6,9) + \sigma^2(9,11) + \sigma^2(11,12) = 13{,}56.$$

Коэффициент вариации составит $V = 11{,}5\ \%$.

Таблица 2

Работа (i, j)	Время выполнения работы				Дисперсия $\sigma^2(i, j)$
	$t_0(i, j)$	$t_{\text{нв}}(i, j)$	$t_n(i, j)$	$\bar{t}(i, j)$	
0,1	4	5	12	**6**	**1,78**
0,2	2	3	10	4	1,78
0,3	4	7	16	8	4
0,5	7	10	19	11	4
1,3	4	6	8	**6**	**0,44**
1,4	7	11	15	11	1,78
2,9	1	4	7	4	1
3,6	3	5	13	**6**	**2,78**
5,6	3	4	11	5	1,78
5,9	5	8	17	9	4
4,7	4	8	18	9	5,44
4,8	3	6	15	7	4
6,8	7	9	17	10	2,78
6,9	4	6	14	**7**	**2,78**
7,1	5	7	15	8	2,78
8,1	2	4	6	4	0,44
8,12	6	9	18	10	4
9,11	8	11	20	**12**	**4**
10,12	8	10	18	11	2,78
11,12	7	11	15	**11**	**1,78**

Если предположить, что продолжительность критического пути $t_{\text{кр}}$ подчиняется нормальному закону распределения со средним значением $\bar{t}_{\text{кр}}$, то вероятность того, что время выполнения проекта может оказаться больше директивного срока T, допустим $T = 50$, можно вычислить с помощью интеграла Лапласа:

$$F_r(t_{\text{кр}}) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\Phi\left(\frac{T - \bar{t}_{\text{кр}}}{\sigma_{\text{кр}}}\right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\Phi\left(\frac{50 - 48}{\sqrt{13{,}556}}\right) \approx 0{,}30.$$

Может представлять интерес решение обратной задачи: определить с заданной надежностью γ максимальный срок T выполнения проекта. В этом случае время выполнения проекта T можно вычислить по формуле

$$T = \bar{t}_{\text{кр}} + Z_\gamma \sigma_{\text{кр}}, \tag{2.7}$$

где Z_γ – нормированное отклонение случайной величины, определяемое с помощью формулы Лапласа $\Phi(Z_\gamma) = \gamma$.

Оценим максимально возможный срок T выполнения проекта с надежностью $\gamma = 0{,}95$. Согласно формуле (2.7) и с учетом того, что $Z_{0,95} = 1{,}96$, определим максимальный срок выполнения проекта с заданной надежностью:

$$T = 48 + 1{,}96 \cdot 3{,}68 \approx 55{,}2.$$

Таким образом, с надежностью $\gamma = 0{,}95$ время выполнения проекта не превысит 55,2 временных единицы.

Выводы

Общеизвестно, что руководители проектов отвечают за все аспекты их реализации, в том числе за три основных аспекта: сроки, расходы и качество результата. В соответствии с общепринятым принципом управления проектами считается, что эффективное управление сроками работ является ключом к успеху по всем трем показателям. Таким образом, учет вероятностного характера продолжительности работ при расчете параметров времени на сетевой модели имеет большое значение для осуществления проекта, позволяет руководителю проекта определить вероятность окончания проекта в заданные периоды времени и к заданным срокам, просчитать всевозможные риски и уже на следующем этапе приступить к анализу сетевого графика с последующей оптимизацией.

Контрольные вопросы и задания

1. Основные понятия сетевой модели: работа, событие, путь, критический путь, ранний срок свершения события, поздний срок свершения события.
2. Методы вычисления резервов времени.
3. Предположим, что при составлении проекта выделено семь событий: A_0, A_1, ..., A_6, связанных работами (0, 1), (1, 3), (1, 2), (2, 4), (2, 5), (4, 5), (3, 6), (5, 6), (4, 3). Продолжительность работ указана на ребрах графа (рис. 36).

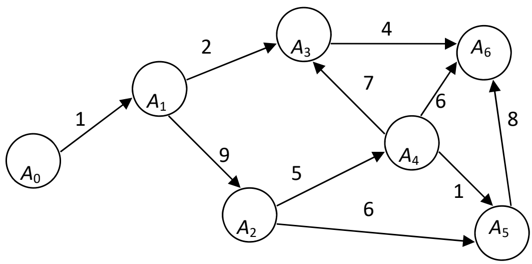

Рис. 36

   Вычислить критическое время выполнения всего проекта, предварительно упорядочив сетевой график. Определить критический путь. Вычислить резервы времени работ, не лежащих на критическом пути.
4. Предприятия А, Б, В, Г, Д, Е сотрудничают на основе договорных соглашений. Изобразить граф договорных соглашений, если в настоящий момент предприятие А сотрудничает со всеми остальными предприятиями; Б сотрудничает только с Г и Д; В сотрудничает со всеми предприятиями, кроме Е.
5. Определить понятия: граф, вершина, ребро, порядок графа.
6. Какой из графов называют мультиграфом, псевдографом, орграфом, плоским графом?
7. Каково необходимое и достаточное условие того, что граф является плоским?
8. Определить понятия: путь, цепь, цикл.
9. Сформулировать условия того, что граф является эйлеровым.

10. Определить понятия: матрица смежности, матрица инциденций.
11. Для орграфа $G_{5.3}$, изображенного на рис. 37, построить матрицы смежности и инциденций.
12. Сформулировать алгоритм Фалкерсона для упорядочивания дуг и вершин орграфа.
13. Графически упорядочить граф $G_{6.2}$, изображенный на рис. 37.

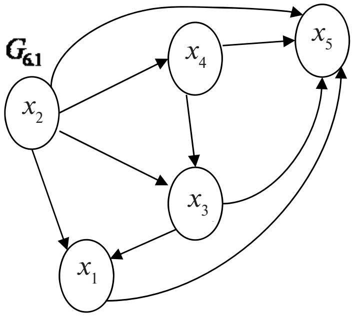

Рис. 37

14. Построить коммуникационную сеть минимальной длины. Граф состояния системы изображен на рис. 38 Построение начать с вершины А.

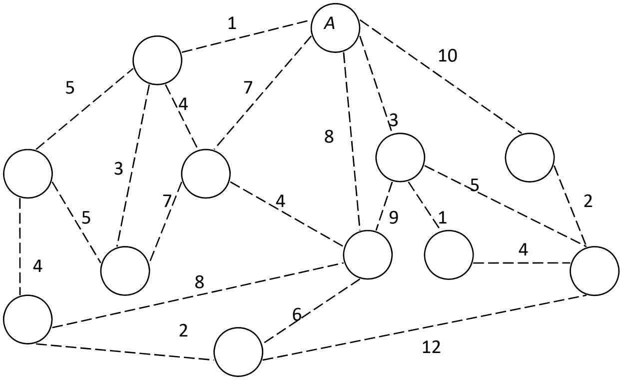

Рис. 38

15. Главному инженеру компании надо решить, монтировать или нет новую производственную линию, использующую новейшую технологию. Если новая линия будет работать безотказно, компания получит прибыль 200 млн руб. Если же линия откажет, компания может потерять 150 млн руб. По оценкам главного инженера, существует 60 % шансов, что новая производственная линия откажет. Можно создать экспериментальную установку, после чего решить вопрос об установке новой производственной линии. Эксперимент обойдется в 10 млн рублей. Главный инженер считает, что существует 50 % шансов, что экспериментальная установка будет работать. Если экспериментальная установка будет работать, то 90 % шансов за то, что смонтированная производственная линия также будет работать. Если же экспериментальная установка не будет работать, то только 20 % шансов за то, что производственная линия заработает. Используя дерево решений, определить ожидаемую стоимость наилучшего решения, а также ответить на вопросы: следует ли строить экспериментальную установку, следует ли монтировать производственную линию.
16. Анализ сетевой модели с помощью коэффициента напряженности.
17. Оптимизация сетевой модели с помощью коэффициента напряженности.
18. Свойства и распределение случайной величины «продолжительность работы», ее временные оценки.
19. Оценки надежности временных параметров сетевого графика.

Глава 3. ЭЛЕМЕНТЫ ДИНАМИЧЕСКОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

§ 3.1. Общая постановка задачи динамического программирования

Динамическое программирование возникло и сформировалось в 1950–1953 гг. благодаря работам американского математика Ричарда Беллмана и его сотрудников. Динамическое программирование (ДП) – это вычислительный метод для решения задач определенной структуры. В общей постановке задача динамического программирования формулируется следующим образом. Имеется некоторая управляемая физическая система S, характеризующаяся определенным набором параметров. Требуется построить оптимальное управление u^* (на множестве допустимых управлений), переводящее систему из начального состояния x_0 в конечное состояние x_N, обеспечив целевой функции (показателю эффективности управления) экстремум.

Особенность задач, решаемых методом ДП, заключается в том, что процесс, протекающий в системе, либо зависит от времени (от этапов), либо имеет многоступенчатую структуру. Метод решения задач ДП состоит в том, что оптимальное управление строится поэтапно, шаг за шагом. На каждом этапе оптимизируется только один шаг, но при этом учитывается изменение всего процесса, так как управление, оптимизирующее целевую функцию только для данного шага, может привести к неоптимальному эффекту всего процесса. Управление на каждом шаге должно быть оптимальным с точки зрения процесса в целом.

В каждом процессе имеется последний шаг. Чтобы спланировать последний шаг, необходимо знать состояние системы на $(n-1)$-м шаге. Если состояние системы на $(n-1)$-м шаге неизвестно, то делаются различные предположения о возможных состояниях системы на этом шаге. Для каждого предположения выбирается оптимальное управление на последнем $(n-1)$-м шаге. Такое оптимальное управление называется *условно оптимальным*. Затем рассматриваются возможные состояния системы на $(n-2)$-м шаге и для каждого состояния выбирается условно оптимальное управление на (n – 2)-м шаге и т. д. Таким образом, приходим к единственному первоначальному состоянию системы x_0. Рассматриваемый процесс решения как бы разворачивается от конца к началу.

Затем из первоначального состояния x_0, двигаясь по условно оптимальным управлениям, можно прийти в конечное состояние x_N. При таком движении осуществляется безусловная оптимизация, определяется оптимальное управление всего процесса в целом.

В основе вычислительных алгоритмов динамического программирования лежит следующий *принцип оптимальности*, сформулированный Р. Беллманом: *каково бы ни было состояние системы S в результате k – 1 шагов, управление на k-м шаге должно выбираться так, чтобы оно в совокупности с управлениями на всех последующих шагах с (k + 1)-го до N-го включительно доставляло экстремум целевой функции.*

Введем обозначения:

x_{k-1} – множество состояний, в которых система S может находиться перед k-м шагом;

x_k – множество состояний, в которых система S может находиться в конце k-го шага;

u_k – множество управлений, которые могут быть выбраны на k-м шаге для перевода системы S в одно из состояний множества x_k;

$z_k(x_{k-1}, u_k)$ – значение целевой функции на k-м шаге;

$F_k(x_{k-1}, u_k)$ – условно оптимальное значение целевой функции на интервале от k-го до N-го шага включительно;

$F_{k+1}(x_k)$ – условно оптимальное значение целевой функции на интервале от (k + 1)-го до N-го шага включительно.

Принцип оптимальности Беллмана с учетом вышеизложенных обозначений можно записать в математической форме:

$$F_k(x_{k-1}, u_k) = \underset{u_k}{\mathrm{extr}}\,(z_k(x_{k-1}, u_k) + F_{k+1}(x_k)). \qquad (3.1)$$

Равенство (3.1) – *основное функциональное уравнение динамического программирования*.

При вычислении $F_N(x_{N-1}, u_N)$ на последнем шаге значение $F_{N+1}(x_N)$ можно положить равным нулю.

В соответствии с уравнением (3.1) и с учетом множеств состояний системы x_{k-1}, x_k и множеств управлений u_k, которые могут быть построены на k-м шаге, вычислительная процедура метода ДП распадается на два этапа: условную и безусловную оптимизацию.

На основании равенства (3.1) условная оптимизация осуществляется поэтапно при движении из конечного состояния x_n системы S в первоначальное состояние x_0 путем построения на каждом этапе условно оптимального управления и нахождения условно оптимального значения функции цели для каждого шага. Безусловная оптимизация осуществляется в обратном направлении: от первого шага к последнему, в результате чего находятся уже оптимальные управления на каждом шаге с точки зрения всего процесса. Первый этап сложнее и длительнее второго, на втором этапе отрабатываются рекомендации, полученные на первом этапе.

Следует отметить, что понятия «конец» и «начало» можно поменять местами и разворачивать процесс оптимизации в другом направлении. С какого конца начать – диктуется удобством выбора этапов и возможных состояний на их начало.

Метод динамического программирования можно использовать для решения весьма широкого круга управленческих задач. Лучше всего принцип метода ДП объяснить с помощью сетей. Рассмотрим несколько достаточно простых задач, решаемых методом ДП на сетях.

§ 3.2. Задача о запуске комплекса взаимосвязанных работ

Задача 3.2.1. На предприятии необходимо запустить в эксплуатацию два комплекса взаимосвязанного оборудования (рис. 39).

Запуск 1-го комплекса состоит из шести промежуточных этапов, запуск 2-го комплекса состоит из четырех промежуточных этапов. Числа на ребрах, расположенных горизонтально, означают затраты (в тыс. рублей) при запуске определенного этапа 1-го комплекса. Числа на ребрах, расположенных вертикально, означают затраты (в тыс. рублей) при запуске определенного этапа 2-го комплекса. Вершины графа соответствуют возможным состояниям системы. Комплексы взаимосвязаны: затраты по запуску очередного этапа одного комплекса зависят от того, на каком этапе находится запуск другого комплекса. Работы на двух комплексах одновременно не ведутся.

Необходимо найти управление последовательностью этапов запуска комплексов, при котором общие расходы были бы минимальными.

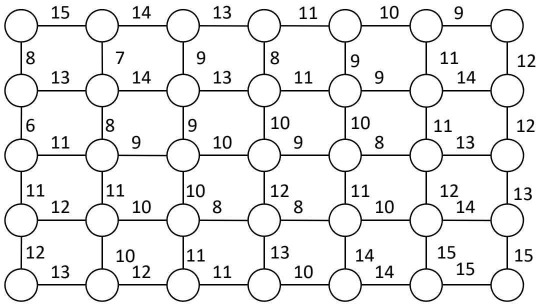

Рис. 39

Решение. По горизонтали отметим этапы запуска 1-го комплекса, по вертикали – этапы запуска 2-го комплекса (рис. 40). Вершина x_0 соответствует начальному состоянию системы (начало запуска). Вершина x_{10} соответствует конечному состоянию системы (запуск обоих комплексов). Весь процесс разбивается на $6 + 4 = 10$ этапов (шагов).

Задачу можно решить следующим образом: рассмотреть все возможные траектории от x_0 до x_{10}, определить затраты для каждой траектории и выбрать ту траекторию, вдоль которой затраты будут наименьшими. Решение на первый взгляд простое, но если число этапов достаточно велико, то перебор всех траекторий, даже при использовании компьютерной техники, займет очень много времени.

Решим эту задачу, используя принцип оптимальности. Оптимизацию начнем с последнего, 10-го шага. В вершину x_{10} можно попасть либо из вершины A_1, либо из вершины A_2. Если на предпоследнем, девятом шаге система была в состоянии A_1 (завершен запуск 2-го комплекса и завершен предпоследний этап запуска 1-го комплекса), то, чтобы перейти в состояние x_{10}, необходимо выполнить запуск последнего этапа 1-го комплекса. Затраты при этом составят 9 тыс. руб. Управление единственно, следовательно, оно и будет условно оптимальным. Аналогично, если на предпоследнем шаге система была в состоянии A_2, то управление также единственно и оно будет условно оптимальным. Соответствующие затраты запишем в вершинах графа, а условно оптимальные управления отметим стрелками (рис. 40).

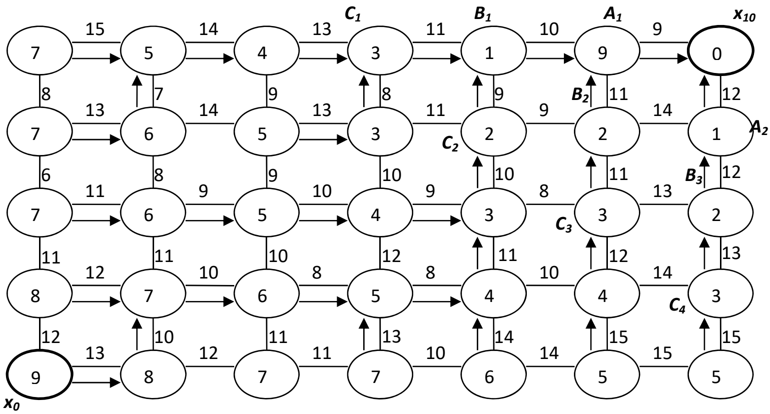

Рис. 40

Рассмотрим возможные состояния системы на восьмом шаге: B_1, B_2, B_3. Вершине B_1 соответствует единственное управление, оно проходит через вершину A_1, аналогично из вершины B_3 можно построить единственное управление, оно пройдет через вершину A_2.

Из вершины B_2 возможны два пути: либо через вершину A_1 (выполнить последний этап запуска 2-го комплекса, а затем последний этап запуска 1-го комплекса), либо через вершину A_2 (выполнить последний этап запуска 1-го комплекса, а затем последний этап запуска 2-го комплекса). В первом случае затраты составят 20 тыс. руб., во втором – 26 тыс. руб. Выберем условно оптимальное управление, соответствующее наименьшим затратам, через вершину A_1. Предполагаемые затраты 20 тыс. рублей занесем в вершину B_2, управление укажем стрелкой. Далее аналогично оптимизируем 8-й шаг. На этом шаге, например, для вершины C_2 получим два условно оптимальных управления: через вершину B_1 и через вершину B_2. В первом случае затраты составят 28 тыс. руб., во втором – 29 тыс. руб. Выберем управление, проходящее через вершину B_1. Аналогично, продолжая процесс для оставшихся шагов, придем в вершину x_0.

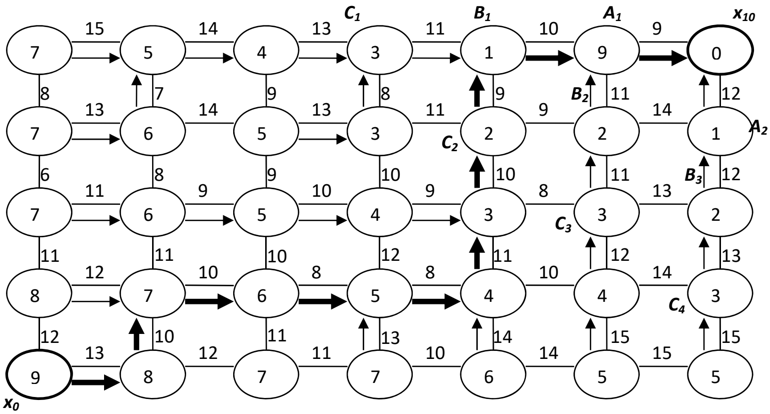

Рис. 41

Затем, двигаясь от вершины x_0 по условно оптимальным управлениям (отметим это управление жирной стрелкой), придем в вершину x_{10} и получим оптимальное управление всего процесса (рис. 41).

Наименьшие затраты по запуску двух комплексов оборудования составят 98 тыс. руб. Для того чтобы достичь минимальных затрат, необходимо выполнить запуск комплексов в следующем порядке: 1-й этап первого комплекса; 1-й этап второго комплекса; 2-й, 3-й, 4-й этапы первого комплекса; 2-й, 3-й, 4-й этапы второго комплекса; 5-й, 6-й этапы второго комплекса.

§ 3.3. Задача о кратчайшем пути

Задача состоит в том, чтобы найти кратчайший путь в сети от какой-то выделенной вершины до любой другой вершины. Пусть вершина x_0 – начало пути, а вершина x_N – конец пути.

Задача о кратчайшем пути – частный случай задачи динамического программирования о нахождении в заданном графе G пути, соединяющего заданные вершины и доставляющего минимум или максимум некоторой аддитивной функции. Чаще всего эта функция определяет длину пути, и задача называется задачей о кратчайшем пути. *Алгоритм Дейкстры* – одна из реализаций этой задачи.

В процессе работы этого алгоритма узлам сети x_i приписываются числа (метки) $\theta(x_i)$. Метки служат оценкой длины кратчайшего пути от вершины x_0 к вершине x_i. Если вершина x_i на некотором шаге получила метку $\theta(x_i)$, это означает, что в графе G существует путь из x_0 в x_i длиной $\theta(x_i)$.

Метки могут находиться в двух состояниях – быть временными $\widetilde{\theta}(x_i)$ или постоянными $\theta^*(x_i)$. Превращение метки в постоянную означает, что кратчайшее расстояние от вершины x_0 до соответствующей вершины найдено.

Алгоритм состоит из двух этапов. На первом этапе вычисляется длина кратчайшего пути, на втором – строится сам путь от вершины x_s к вершине x_0.

Задача 3.3.1. Рассмотрим сеть, заданную на рис. 42. Каждое ребро сети помечено числом, равным его длине. Требуется найти кратчайший путь, ведущий от вершины A к каждой из вершин сети.

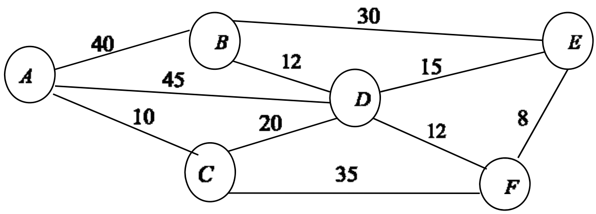

Рис. 42

Решение. **Первый этап (прямой ход алгоритма)**

1-й шаг. Вершину A выделим и присвоим ей постоянную метку 0^*.

2-й шаг. Всем вершинам, соединенным с выделенной вершиной A одним ребром, в данном случае вершинам B, C, D, присвоим метки с числами, равными расстоянию до вершины A. Под каждой из вершин B, C, D обозначим вершину A. Выделим вершину C, так как ей присвоена метка с наименьшим числовым значением. Метка 10^* вершины C становится постоянной (рис. 43).

3-й шаг. Рассмотрим вершины, не имеющие постоянных меток и соединенные одним ребром с вершиной C, таковыми являются вершины D и F.

Длина пути из вершины A в вершину F через вершину C равна 45, поэтому вершине F присвоим временную метку $4\widetilde{5}$. Под вершиной F отметим, что путь, соответствующий метке $4\widetilde{5}$, проходит через вершину C.

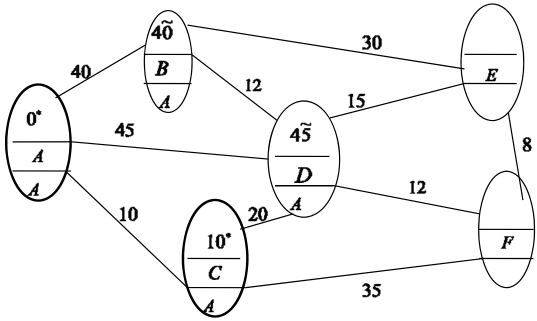

Рис. 43

Путь наименьшей длины от вершины *A* до вершины *D* на данном шаге равен 30 (min(10 + 20; 45) = 30), вершине *D* присвоим новую метку $3\tilde{0}$. Отметим, что путь, соответствующий метке $3\tilde{0}$, проходит через вершину *C*.

Получены две временные метки: $4\tilde{5}$ и $3\tilde{0}$. Выделим вершину *D*, так как ей соответствует метка с наименьшим числовым значением. Вершине *D* присвоим постоянную метку 30^* (рис. 44).

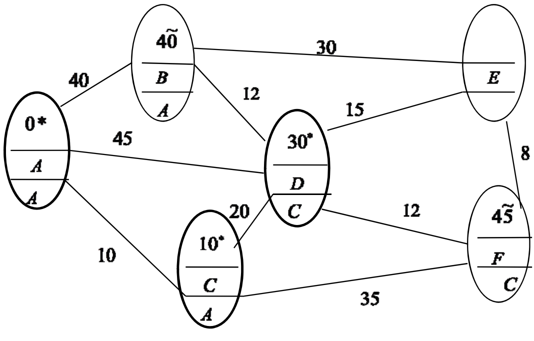

Рис. 44

4-й шаг. Рассмотрим вершины, не имеющие постоянных меток и соединенные одним ребром с вершиной *D*, таковыми являются вершины *B*, *E* и *F*.

Длина пути из вершины *A* в вершину *E* через вершину *D* равна 45, поэтому вершине *E* присвоим временную метку $4\tilde{5}$. Под вершиной *E* отметим, что путь, соответствующий метке $4\tilde{5}$, проходит через вершину *D*.

Путь наименьшей длины от вершины *A* до вершины *B* на данном шаге равен 40 (min(40; 30 + 12) = 40), поэтому метку $4\tilde{0}$ для вершины *B* менять не будем.

Вершине *F* на данном шаге присвоим новую временную метку (min(30 + 12; 45) = 42). Метку $4\tilde{5}$ заменим меткой $4\tilde{2}$. Под вершиной *F* отметим, что путь, соответствующий метке $4\tilde{2}$, проходит через вершину *D*.

На четвертом шаге получены три временные метки: $4\tilde{5}$, $4\tilde{0}$, $4\tilde{2}$. Наименьшее числовое значение метки соответствует вершине *B*. Выделим вершину *B*, присвоим ей постоянную метку 40^* (рис. 45).

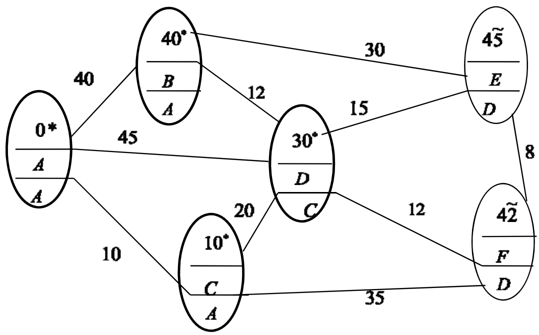

Рис. 45

5-й шаг. С вершиной *B* соединена только одна вершина *E*, не имеющая постоянных меток. Так как 40 + 30 > 45, то значение метки для вершины *E* не изменится. Выделим вершину *E* и присвоим ей постоянную метку 45^* (рис. 46).

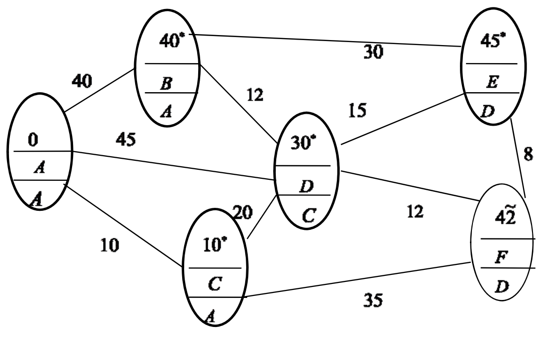

Рис. 46

6-й шаг. С вершиной *E* соединена только одна вершина *F*, не имеющая постоянных меток. Так как 45 + 8 > 42, то значение метки для вершины *F* не изменится. Выделим вершину *F* и присвоим ей постоянную метку 42* (рис. 47).

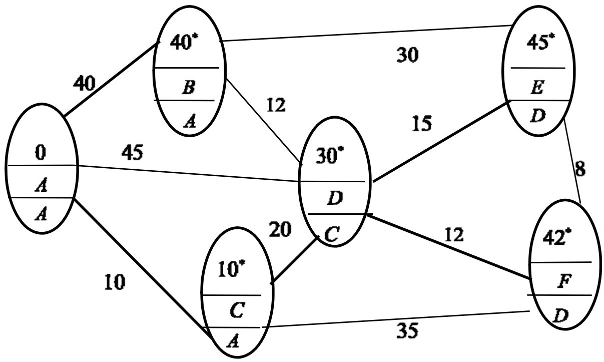

Рис. 47

Второй этап (обратный ход алгоритма)

Для каждой из вершин графа запишем последовательность вершин, определяющих кратчайший путь до вершины *A*, а также длину самого пути.

Вершина	Путь	Длина
B	$B \Rightarrow A$	40
C	$C \Rightarrow A$	10
D	$D \Rightarrow C \Rightarrow A$	30
E	$E \Rightarrow D \Rightarrow C \Rightarrow A$	45
F	$F \Rightarrow D \Rightarrow C \Rightarrow A$	42

§ 3.4. Задача о замене оборудования

Во всем мире существует множество предприятий, которые используют для производства своей продукции машинное оборудование. Поэтому при его внедрении нужно составлять оптимальный план использования и замены оборудования. Задачи по замене оборудования рассматриваются как многоэтапный процесс, который характерен для динамического программирования. Многие руководители предприятий сохраняют или заменяют оборудование по своей интуиции, не применяя методы динамического программирования. Применять эти методы целесообразно, так как это позволяет наиболее четко максимизировать прибыль или минимизировать затраты.

Задача 3.4.1. Предположим, что к началу текущей пятилетки на предприятии установлено новое оборудование. Зависимости прибыли $r(\tau)$ от реализации продукции на единицу оборудования и ежегодные затраты $c(\tau)$ на содержание и ремонт одной единицы оборудования в зависимости от времени τ, в течение которого используется оборудование, показаны в табл. 3.

Таблица 3

	Время τ, в течение которого используется оборудование				
	$\tau = 1$	$\tau = 2$	$\tau = 3$	$\tau = 4$	$\tau = 5$
$r(\tau)$, тыс. руб.	80	75	65	60	60
$c(\tau)$, тыс. руб.	20	25	30	35	45

Затраты на приобретение и установку нового оборудования составляют 40 тыс. рублей, старое оборудование списывается. Составить план замены оборудования, максимизирующий общую прибыль, на пять лет.

Решение. Данную задачу можно рассматривать как задачу динамического программирования, в которой в качестве системы S выступает оборудование. Состояние системы определяется фактическим временем использования оборудования τ, т. е. описывается единственным параметром. В качестве управлений выступают решения о замене и сохранении оборудования, принимаемые в начале каждого года. Таким образом, необходимо найти такую стратегию управления, определяемую решениями к началу каждого года о замене или сохранении оборудования, при которой прибыль за все пять лет работы предприятия была бы максимальной.

Решение задачи методом динамического программирования будем осуществлять в два этапа. На первом этапе при движении от начала пятого года пятилетки к началу первого года для каждого допустимого состояния оборудования будем находить условное оптимальное управление. На втором этапе при движении от начала первого года пятилетки к началу пятого года из условных оптимальных решений для каждого года составим оптимальный план замены оборудования на пятилетку.

Через С обозначим решение о сохранении оборудования, а через З обозначим решение о замене оборудования.

Уравнение Беллмана (3.1) будет иметь вид:

$$F_k(\tau, u_k) = \max_{u_k} \begin{cases} r(\tau+1) - c(\tau) + F_{k+1}(\tau+1) & \text{при} \quad u_k = \text{С} \\ -40 + r(1) - c(1) + F_{k+1}(1) & \text{при} \quad u_k = \text{З} \end{cases},$$

где $F_k(\tau,\ u_k)$ – условно оптимальное значение целевой функции (функции прибыли от реализации продукции) на интервале от начала k-го года до последнего, пятого года пятилетки, которое зависит только от срока использования оборудования τ.

Начнем процедуру условной оптимизации с анализа последнего года планового периода. В этом случае в правой части уравнение Беллмана будет иметь вид:

$$F_{k+1}(\tau) = 0.$$

I этап. Условная оптимизация

• $k = 5$

К началу пятого года необходимо решить вопрос о сохранении или замене оборудования. Возможные состояния системы: оборудование прослужило один год, два, три, четыре года (соответствующие значения параметра τ = 1, 2, 3, 4). Прибыль от реализации продукции для каждого состояния рассчитывается дважды: первый раз в предположении, что в течение пятого года предприятие будет работать на старом оборудовании, второй раз – в предположении, что к началу пятого года произошла замена оборудования. В зависимости от того, какое из двух полученных значений больше, выбирается управление u_5: сохранять (С) или заменять (З) оборудование.

$$F_5(1,u_5)=\max_{u_5}\begin{cases} r(2)-c(2) \\ -40+r(1)-c(1) \end{cases}=\max_{u_5}\begin{cases} 75-25=50 \\ -40+80-20=20 \end{cases}=50 \text{ при } u_5=\text{С};$$

$$F_5(2,u_5)=\max_{u_5}\begin{cases} r(3)-c(3) \\ -40+r(1)-c(1) \end{cases}=\max_{u_5}\begin{cases} 65-30=35 \\ -40+80-20=20 \end{cases}=35 \text{ при } u_5=\text{С};$$

$$F_5(3,u_5)=\max_{u_5}\begin{cases} r(4)-c(4) \\ -40+r(1)-c(1) \end{cases}=\max_{u_5}\begin{cases} 60-35=25 \\ -40+80-20=20 \end{cases}=25 \text{ при } u_5=\text{С};$$

$$F_5(4,u_5)=\max_{u_5}\begin{cases} r(5)-c(5) \\ -40+r(1)-c(1) \end{cases}=\max_{u_5}\begin{cases} 60-45=15 \\ -40+80-20=20 \end{cases}=20 \text{ при } u_5=\text{З}.$$

• $k = 4$

К началу четвертого года также необходимо решить вопрос о сохранении или замене оборудования. Возможные состояния системы: оборудование прослужило один год, два, три года (соответствующие значения параметра $\tau = 1, 2, 3$). Управление выбирается согласно принципу Беллмана так, чтобы оно в совокупности с управлением на предыдущем шаге доставляло максимум целевой функции (суммарной прибыли от реализации продукции, произведенной за четвертый и пятый годы работы предприятия).

$$F_4(1,u_4)=\max_{u_4}\begin{cases} r(2)-c(2)+F_5(2) \\ -40+r(1)-c(1)+F_5(1) \end{cases}=\max_{u_4}\begin{cases} 75-25+35=85 \\ -40+80-20+50=70 \end{cases}=85 \text{ при } u_4=\text{С};$$

$$F_4(2,u_4)=\max_{u_4}\begin{cases} r(3)-c(3)+F_5(3) \\ -40+r(1)-c(1)+F_5(1) \end{cases}=\max_{u_4}\begin{cases} 65-30+25=60 \\ -40+80-20+50=70 \end{cases}=70 \text{ при } u_4=\text{З};$$

$$F_4(3,u_4)=\max_{u_4}\begin{cases} r(4)-c(4)+F_5(4) \\ -40+r(1)-c(1)+F_5(1) \end{cases}=\max_{u_4}\begin{cases} 60-35+20=45 \\ -40+80-20+50=70 \end{cases}=70 \text{ при } u_4=\text{З}.$$

• $k = 3$

К началу третьего года аналогично решается вопрос о сохранении или замене оборудования. Возможные состояния системы: оборудование прослужило один год, два года (соответствующие значения параметра $\tau = 1, 2$). Управление выбирается согласно принципу Беллмана так, чтобы оно в совокупности с управлением на предыдущем шаге доставляло максимум целевой функции (суммарной прибыли от реализации продукции, произведенной за третий и последующие годы пяти лет работы предприятия).

$$F_3(1,u_3)=\max_{u_3}\begin{cases} r(2)-c(2)+F_4(2) \\ -40+r(1)-c(1)+F_4(1) \end{cases}=\max_{u_3}\begin{cases} 75-25+70=120 \\ -40+80-20+85=105 \end{cases}=120 \text{ при } u_3=\text{С};$$

$$F_3(2,u_3)=\max_{u_3}\begin{cases} r(3)-c(3)+F_4(3) \\ -40+r(1)-c(1)+F_4(1) \end{cases}=\max_{u_3}\begin{cases} 65-30+70=105 \\ -40+80-20+85=105 \end{cases}=105 \text{ при } u_3=\text{С}.$$

• $k = 2$

К началу второго года решается вопрос о сохранении или замене оборудования. К началу второго года оборудование может прослужить не более года. Управление выбирается согласно принципу Беллмана так, чтобы оно в совокупности с управлением на предыдущем шаге доставляло максимум целевой функции (суммарной прибыли от реализации продукции, произведенной за второй и последующие годы пяти лет работы предприятия).

$$F_2(1,u_2)=\max_{u_2}\begin{cases} r(2)-c(2)+F_3(2) \\ -40+r(1)-c(1)+F_3(1) \end{cases}=\max_{u_2}\begin{cases} 75-25+105=155 \\ -40+80-20+120=140 \end{cases}=155 \text{ при } u_2=C.$$

• $k = 1$

Так как к началу первого года пятилетки установлено новое оборудование ($\tau = 0$), то $F_1(0, u_1) = r(1) - c(1) + F_2(1) = 80 - 20 + 155 = 215$.

Таким образом, получили, что максимально возможная прибыль предприятия при своевременной замене оборудования равна 215 тыс. руб.

Определим оптимальный план замены оборудования.

II этап. Составление оптимального плана замены оборудования на пятилетку

Результаты вычислений сводим в таблицу значений функции прибыли от реализации продукции.

Начало k-го года пятилетки	Возраст оборудования τ			
	1	2	3	4
2	155 (С)			
3	120 (С)	**105 (С)**		
4	85 (С)	70 (З)	**70 (З)**	
5	**50 (С)**	35 (С)	25 (С)	20 (З)

Проанализируем результаты вычислений, полученные на I этапе, в обратном порядке. Для первого года пятилетки решение единственное – следует сохранить оборудование. Следовательно, возраст оборудования τ к началу второго года пятилетки составит один год. Тогда оптимальное решение для второго года пятилетки – сохранение оборудования. Реализация такого решения приводит к тому, что возраст оборудования τ составит к началу третьего года пятилетки два года. При таком возрасте оборудование следует сохранить. Если к началу третьего года сохранить оборудование, то его возраст τ к началу четвертого года пятилетки составит три года. На этом этапе оборудование следует заменить. В этом случае к началу пятого года пятилетки оборудование проработает один год и его следует сохранить.

Таким образом, максимальная прибыль при реализации продукции 215 тыс. руб. может быть получена при эксплуатации оборудования в течение трех лет и замене на новое оборудование в начале четвертого года.

Общая схема возможных состояний системы и управлений к началу каждого года за пятилетку изображена на рис. 48.

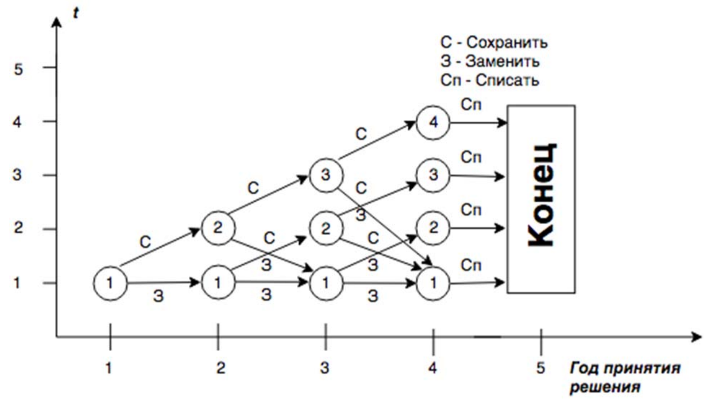

Рис. 48

Задача 3.4.2. Найти оптимальный план замены оборудования на период продолжительностью 6 лет, если годовая прибыль и остаточная стоимость в зависимости от возраста задаются табл. 4.

Таблица 4

	Время τ, в течение которого используется оборудование						
	τ = 1	τ = 2	τ = 3	τ = 4	τ = 5	τ = 6	τ = 7
$r(\tau)$	12	11	11	10	8	6	3
$s(\tau)$	11	10	8	7	5	3	1

Стоимость нового оборудования равна 13, а возраст к началу эксплуатационного периода – 1 год.

Уравнение Беллмана (3.1) будет иметь вид:

$$F_k(\tau, u_k) = \max_{u_k} \begin{cases} r(\tau) + F_{k+1}(\tau+1) \quad \text{при} \quad u_k = \text{С} \\ s(\tau) - 13 + r(0) + F_{k+1}(1) \ \ \text{при} \quad u_k = \text{З} \end{cases},$$

где $F_k(\tau, u_k)$ – условно оптимальное значение целевой функции (функции прибыли от реализации продукции) на интервале от начала k-го года до последнего, шестого года эксплуатации оборудования.

Начнем процедуру условной оптимизации с анализа последнего года планового периода. В этом случае уравнение Беллмана имеет вид: $F_{k+1}(\tau) = 0$.

I этап. Условная оптимизация

• $k = 6$

$$F_6(1, u_6) = \max_{u_6} \begin{cases} r(2) \\ s(1) - 13 + r(1) \end{cases} = \max_{u_6} \begin{cases} 11 \\ 10 - 13 + 12 = 9 \end{cases} = 11 \text{ при } u_6 = \text{С};$$

$$F_6(2, u_6) = \max_{u_6} \begin{cases} r(3) \\ s(2) - 13 + r(1) \end{cases} = \max_{u_6} \begin{cases} 11 \\ 8 - 13 + 12 = 7 \end{cases} = 11 \text{ при } u_6 = \text{С};$$

$$F_6(3, u_6) = \max_{u_6} \begin{cases} r(4) \\ s(3) - 13 + r(1) \end{cases} = \max_{u_6} \begin{cases} 10 \\ 7 - 13 + 12 = 6 \end{cases} = 10 \text{ при } u_6 = \text{С};$$

$$F_6(4, u_6) = \max_{u_6} \begin{cases} r(5) \\ s(4) - 13 + r(1) \end{cases} = \max_{u_6} \begin{cases} 8 \\ 5 - 13 + 12 = 4 \end{cases} = 8 \text{ при } u_6 = \text{С};$$

$$F_6(5, u_6) = \max_{u_6} \begin{cases} r(6) \\ s(5) - 13 + r(1) \end{cases} = \max_{u_6} \begin{cases} 6 \\ 3 - 13 + 12 = 2 \end{cases} = 6 \text{ при } u_6 = \text{С};$$

$$F_6(6, u_6) = \max_{u_6} \begin{cases} r(7) \\ s(6) - 13 + r(1) \end{cases} = \max_{u_6} \begin{cases} 3 \\ 1 - 13 + 12 = 0 \end{cases} = 3 \text{ при } u_6 = \text{С};$$

• $k = 5$

$$F_5(1, u_5) = \max_{u_5} \begin{cases} r(2) + F_6(2) \\ s(1) - 13 + r(1) + F_6(1) \end{cases} = \max_{u_5} \begin{cases} 11 + 11 = 22 \\ 10 - 13 + 12 + 11 = 20 \end{cases} = 22 \text{ при } u_5 = \text{С};$$

$$F_5(2, u_5) = \max_{u_5} \begin{cases} r(3) + F_6(3) \\ s(2) - 13 + r(1) + F_6(1) \end{cases} = \max_{u_5} \begin{cases} 11 + 10 = 21 \\ 8 - 13 + 12 + 11 = 18 \end{cases} = 21 \text{ при } u_5 = \text{С};$$

$$F_5(3, u_5) = \max_{u_5} \begin{cases} r(4) + F_6(4) \\ s(3) - 13 + r(1) + F_6(1) \end{cases} = \max_{u_5} \begin{cases} 10 + 8 = 18 \\ 7 - 13 + 12 + 11 = 17 \end{cases} = 18 \text{ при } u_5 = \text{С};$$

$$F_5(4,u_5)=\max_{u_5}\begin{cases} r(5)+F_6(5) \\ s(4)-13+r(1)+F_6(1) \end{cases}=\max_{u_5}\begin{cases} 8+6=14 \\ 5-13+12+11=15 \end{cases}=15 \text{ при } u_5=\text{З};$$

$$F_5(5,u_5)=\max_{u_5}\begin{cases} r(6)+F_6(6) \\ s(5)-13+r(1)+F_6(1) \end{cases}=\max_{u_5}\begin{cases} 6+3=9 \\ 3-13+12+11=13 \end{cases}=13 \text{ при } u_5=\text{З}.$$

• $k=4$

$$F_4(1,u_4)=\max_{u_4}\begin{cases} r(2)+F_5(2) \\ s(1)-13+r(1)+F_5(1) \end{cases}=\max_{u_4}\begin{cases} 11+21=32 \\ 10-13+12+22=31 \end{cases}=32 \text{ при } u_4=\text{С};$$

$$F_4(2,u_4)=\max_{u_4}\begin{cases} r(3)+F_5(3) \\ s(2)-13+r(1)+F_5(1) \end{cases}=\max_{u_4}\begin{cases} 11+18=29 \\ 8-13+12+22=29 \end{cases}=29 \text{ при } u_4=\text{С}$$

$$F_4(3,u_4)=\max_{u_4}\begin{cases} r(4)+F_5(4) \\ s(3)-13+r(1)+F_5(1) \end{cases}=\max_{u_4}\begin{cases} 10+15=25 \\ 7-13+12+22=28 \end{cases}=28 \text{ при } u_4=\text{З};$$

$$F_4(4,u_4)=\max_{u_4}\begin{cases} r(5)+F_5(5) \\ s(4)-13+r(1)+F_5(1) \end{cases}=\max_{u_4}\begin{cases} 8+13=21 \\ 5-13+12+22=26 \end{cases}=26 \text{ при } u_4=\text{З}.$$

• $k=3$

$$F_3(1,u_3)=\max_{u_3}\begin{cases} r(2)+F_4(2) \\ s(1)-13+r(1)+F_4(1) \end{cases}=\max_{u_3}\begin{cases} 11+29=40 \\ 10-13+12+32=41 \end{cases}=41 \text{ при } u_3=\text{З};$$

$$F_3(2,u_3)=\max_{u_3}\begin{cases} r(3)+F_4(3) \\ s(2)-13+r(1)+F_4(1) \end{cases}=\max_{u_3}\begin{cases} 11+28=39 \\ 8-13+12+32=39 \end{cases}=39 \text{ при } u_3=\text{С};$$

$$F_3(3,u_3)=\max_{u_3}\begin{cases} r(4)+F_4(4) \\ s(3)-13+r(1)+F_4(1) \end{cases}=\max_{u_3}\begin{cases} 10+26=36 \\ 7-13+12+32=38 \end{cases}=38 \text{ при } u_3=\text{З}.$$

• $k=2$

$$F_2(1,u_2)=\max_{u_2}\begin{cases} r(2)+F_3(2) \\ s(1)-13+r(1)+F_3(1) \end{cases}=\max_{u_2}\begin{cases} 11+39=50 \\ 10-13+12+41=50 \end{cases}=50 \text{ при } u_2=\text{С};$$

$$F_2(2,u_2)=\max_{u_2}\begin{cases} r(3)+F_3(3) \\ s(2)-13+r(1)+F_3(1) \end{cases}=\max_{u_2}\begin{cases} 11+38=49 \\ 8-13+12+41=48 \end{cases}=49 \text{ при } u_2=\text{С}.$$

• $k=1$

$$F_1(1,u_1)=\max_{u_1}\begin{cases} r(2)+F_2(2) \\ s(1)-13+r(1)+F_2(1) \end{cases}=\max_{u_1}\begin{cases} 11+49=60 \\ 10-13+12+50=59 \end{cases}=60 \text{ при } u_1=\text{С}.$$

Определим оптимальный план замены оборудования.

Таким образом, получили, что максимально возможная прибыль предприятия при своевременной замене оборудования равна 60 условным единицам.

II этап. Составление оптимального плана замены оборудования на пятилетку

Результаты вычислений сводим в таблицу значений функции прибыли от реализации продукции.

Начало *k*-го года из шести лет работы предприятия	Возраст оборудования τ					
	1	2	3	4	5	6
1	**60 (С)**					
2	50 (С)	**49 (С)**				
3	41 (З)	39 (С)	**38 (З)**			
4	**32 (С)**	29 (С)	28 (З)	26 (З)		
5	22 (С)	**21 (С)**	18 (С)	15 (З)	13 (З)	
6	11 (С)	11 (С)	**10 (С)**	8 (С)	6 (С)	3 (С)

Проанализируем результаты вычислений, полученные на I этапе, в обратном порядке. Согласно условию задачи, к началу первого года из шести лет работы предприятия оборудование прослужило один год. Оптимальное решение для начала первого года – сохранить оборудование. Следовательно, возраст оборудования τ к началу второго года составит два года. Тогда оптимальное решение для второго года – сохранение оборудования. Реализация такого решения приводит к тому, что возраст оборудования τ составит к началу третьего года три года. При таком возрасте оборудование следует заменить. В этом случае к началу четвертого года оборудование проработает один год и его следует сохранить, к началу пятого года оборудование проработает два года и его следует сохранить, к началу шестого года оборудование проработает три года и его следует сохранить.

Таким образом, замену оборудования необходимо произвести один раз – в начале третьего года из рассматриваемых шести лет работы предприятия при условии, что возраст оборудования к началу первого года равен одному году. При таком управлении заменой оборудования суммарная прибыль предприятия составит 60 условных единиц.

§ 3.5. Задача оптимального распределения ресурсов

В производственной практике очень часто возникают задачи на оптимальное распределение ресурсов между предприятиями или внутри предприятия. К задачам на оптимальное распределение ресурсов можно также отнести задачи о распределении средств на приобретение оборудования, закупку сырья и наём рабочей силы; задачи о распределении товаров по торговым и складским помещениям; задачи о распределении средств между различными отраслями промышленности и т. п.

Рассмотрим числовой пример широко распространенной задачи, в которой решается вопрос о том, как спланировать работу группы предприятий, чтобы экономический эффект от выделенных этим предприятиям дополнительных финансовых или материальных ресурсов был максимальным.

Задача 3.5.1. Производственное объединение выделяет четырем входящим в него предприятиям кредит в сумме 60 млн рублей для расширения производства и увеличения выпуска продукции. По каждому предприятию известен возможный прирост $z_k(u_k)$ $(k=\overline{1,4})$ выпуска продукции (в млн руб.) в зависимости от выделенной ему суммы u_k. Для упрощения вычислений выделяемые суммы кратны 20 млн руб. При этом предполагается, что прирост выпуска продукции на k-м предприятии не зависит от суммы средств, вложенных в другие предприятия, а общий прирост выпуска в производственном объединении равен сумме приростов, полученных на каждом предприятии объединения (табл. 5).

Таблица 5

Выделяемые средства, млн руб.	Предприятия			
	№ 1	№ 2	№ 3	№ 4
	Прирост выпуска продукции на предприятиях, млн руб.			
	$z_1(u_k)$	$z_2(u_k)$	$z_3(u_k)$	$z_4(u_k)$
0	0	0	0	0
20	7	6	14	14
40	23	23	21	20
60	31	30	34	35

Требуется так распределить кредит между предприятиями, чтобы общий прирост выпуска продукции на производственном объединении был максимальным.

Решение. Очевидно, что данная задача может быть решена просто перебором всех возможных вариантов распределения 60 млн руб. по всем рассматриваемым предприятиям. Задачу также можно решить более эффективным способом.

В рассматриваемой задаче физической системой S является производственное объединение. В качестве шага процесса принятия решения следует понимать назначение той или иной суммы средств конкретному предприятию: на первом шаге – первому предприятию, на втором – второму и т. д. В результате весь процесс разбивается на четыре шага.

При решении задачи будем придерживаться обозначений, введенных в начале параграфа:

x_{k-1} – возможные остатки средств (множество состояний), которыми располагает производственное объединение (система S) перед k-м шагом;

u_k – возможные суммы, выделяемые k-му предприятию (множество управлений на k-м шаге для перевода системы S в одно из состояний множества x_k);

$z_k(x_{k-1}, u_k)$ – значение прироста выпуска продукции на k-м предприятии (целевая функция на k-м шаге);

$F_k(x_{k-1}, u_k)$ – максимальный суммарный прирост, полученный на всех предприятиях, начиная с k-го по 4-е включительно, при условии, что перед выделением этому предприятию некоторой допустимой суммы, равной элементу множества u_k, остаток кредита характеризовался некоторым элементом множества x_{k-1}.

В результате принцип оптимальности Беллмана, записанный в виде уравнения (3.1), можно представить следующим образом:

$$F_k(x_{k-1}, u_k) = \max_{u_k}(z_k(x_{k-1}, u_k) + F_{k+1}(x_k)). \qquad (3.2)$$

Начальное состояние системы $x_0 = 60$ млн руб. На последнем (четвертом) шаге состояние системы $x_4 = 0$, так как все средства распределены. Процесс распределения средств начнем с предпоследнего шага.

I этап. Условная оптимизация

• $k = 4$

На предпоследнем шаге состояние системы S неизвестно, но известны возможные состояния системы: остаток средств x_3, полученный после распределения между первым, вторым и третьим предприятиями, может принимать значения {0, 20, 40, 60}. Из тех же элементов состоит множество допустимых управлений u_4 (возможные суммы, выделяемые 4-му предприятию). Очевидно, чтобы получить максимум прироста выпуска с четвертого предприятия, необходимо вложить в него все оставшиеся средства. Оптимальным управлением будет выделение четвертому предприятию кредита в объеме всех оставшихся средств после распределения между тремя другими предприятиями: $u_4^* = x_3$. С учетом того, что $F_{4+1}(x_4) = 0$, уравнение Беллмана (3.2) на этом шаге имеет вид:

$$F_4(x_3, u_4) = \max z_4(x_3, u_4) = z_4(x_3, u_4).$$

Решим вопрос о выделении средств четвертому предприятию, выполнив процедуру условной оптимизации и заполнив табл. 6. Второй столбец заполним значениями прироста выпуска продукции на четвертом предприятии в зависимости от величины выделяемых средств.

Таблица 6

Возможные остатки средств x_3	Возможные суммы, выделяемые 4-му предприятию u_4				Максимальный прирост выпуска продукции $F_4(x_3, u_4)$	Оптимальное управление u_4^*
	0	20	40	60		
	Значения прироста выпуска продукции на 4-м предприятии					
0	0				0	0
20		14			14	20
40			20		20	40
60				35	35	60

• $k = 3$

Рассмотрим следующий шаг. Состояние системы S на этом шаге также неизвестно. Известны возможные состояния системы: остаток средств x_2, полученный после распределения между первым и вторым предприятиями, может принимать значения {0, 20, 40, 60}. Множество допустимых управлений u_3 (возможные суммы, выделяемые 3-му предприятию) состоит из тех же элементов {0, 20, 40, 60}. Для каждого допустимого состояния необходимо выбрать условно оптимальное управление и найти условно оптимальную величину прироста выпуска продукции.

Уравнение Беллмана (3.2) на этом шаге будет иметь вид:

$$F_3(x_2, u_3) = \max_{u_3}(z_3(x_2, u_3) + F_4(x_3)). \quad (3.3)$$

Решим вопрос о выделении средств третьему предприятию, выполнив процедуру условной оптимизации и заполнив табл. 7. Второй столбец заполним значениями суммарного прироста выпуска продукции на третьем и четвертом предприятиях, в зависимости от величины выделяемых средств третьему предприятию и остатка средств на долю четвертого.

Таблица 7

Возможные остатки средств x_2	Возможные суммы, выделяемые 3-му предприятию u_3				Максимальный прирост выпуска продукции $F_3(x_2, u_3)$	Оптимальное управление u_3^*
	0	20	40	60		
	Суммарные значения прироста выпуска продукции на 3-м и 4-м предприятиях					
0	0 + 0				0	0
20	0 + 14	14 + 0			14	0 или 20
40	0 + 20	14 + 14	21 + 0		28	20
60	0 + 35	14 +20	21 +14	34 + 0	35	0 или 40

Поясним заполнение предпоследней строки таблицы. Если на момент выделения средств третьему предприятию в наличии имеется 40 млн руб. (x_2 = 40), то третьему предприятию можно выделить либо 0, либо 20 млн руб., либо 40 млн руб. (u_3 = 0, u_3 = 20, u_3 = 40 соответственно). Из всех возможных управлений необходимо выбрать условно оптимальное управление, максимизирующее суммарный прирост на третьем и четвертом предприятиях. Рассмотрим каждый из трех возможных вариантов.

Если третье предприятие получило отказ в кредитовании ($u_3 = 0$), то все оставшиеся 40 млн руб. будут выделены четвертому предприятию. Если же из 40 млн руб. третьему предприятию будет выделено 20 млн руб. ($u_3 = 20$), это значит, что четвертое предприятие получит также 20 млн руб. Если же из 40 млн руб. все средства будут выделены третьему предприятию ($u_3 = 40$), то четвертое предприятие получит отказ в получении кредита (табл. 7).

В каждом из трех рассмотренных случаев прирост выпуска складывается из прироста выпуска, получаемого третьим предприятием при освоении отведенной для него суммы, и максимума прироста выпуска, полученного четвертым предприятием на предыдущем шаге.

Проведем расчеты, используя условие задачи (табл. 5) и результаты условной оптимизации предыдущего шага (табл. 6), на основе равенства (3.3) получим:

$$F_3(x_2, u_3) = \max_{u_3}(z_3(40, 0) + F_4(40),\ z_3(40, 20) + F_4(20),\ z_3(40, 40) + F_4(0)) =$$
$$= \max_{u_3}(0 + 20, 14 + 14, 21 + 0) = 28.$$

Отсюда следует, что если на момент выделения средств третьему предприятию в наличии имеется 40 млн руб. ($x_2 = 40$), то максимальная величина прироста выпуска достигает 28 млн руб. при условии, что 20 млн руб. будет выделено третьему предприятию и столько же четвертому. То есть условно оптимальное управление на третьем шаге: $u_3^* = 20$.

Аналогичным образом осуществляется выбор условно оптимальных управлений и для всех остальных допустимых состояний из множества x_3.

• $k = 2$

Решим вопрос о выделении средств второму предприятию, выполнив процедуру условной оптимизации и заполнив табл. 8. Второй столбец заполним значениями суммарного прироста выпуска продукции на втором, третьем и четвертом предприятиях, в зависимости от величины выделяемых средств второму предприятию, при условии, что третье и четвертое предприятия в сумме получают максимальный прирост при освоении оставшихся на их долю средств.

Таблица 8

Возможные остатки средств x_1	Возможные суммы, выделяемые 2-му предприятию u_2				Максимальный прирост выпуска продукции $F_2(x_1, u_2)$	Оптимальное управление u_2^*
	0	20	40	60		
	Суммарные значения прироста выпуска продукции на 2–4-м предприятиях					
0	0 + 0				0	0
20	0 + 14	6 + 0			14	0
40	0 + 28	6 + 14	23 + 0		28	0
60	0 + 35	6 + 28	23 + 14	30 + 0	37	40

Уравнение Беллмана (3.2) на этом шаге будет иметь вид:

$$F_2(x_1, u_2) = \max_{u_2}(z_2(x_1, u_2) + F_3(x_2)).$$

• $k = 1$

Решим вопрос о выделении средств первому предприятию, выполнив процедуру условной оптимизации и заполнив табл. 9.

Таблица 9

Возможные остатки средств x_0	Возможные суммы, выделяемые 1-му предприятию u_1				Максимальный прирост выпуска продукции $F_1(x_0, u_1)$	Оптимальное управление u_1^*
	0	20	40	60		
	Суммарные значения прироста выпуска продукции на 1–4-м предприятиях					
60	0 + 37	7 + 28	23 + 14	31 + 0	37	0 или 40

Из табл. 9 видно, что максимальный прирост выпуска продукции равен 37 млн руб.

II этап. Безусловная оптимизация: поиск наиболее выгодного распределения кредита между предприятиями

Для того чтобы записать оптимальное решение, будем двигаться по условно оптимальным управлениям из первоначального состояния $x_0 = 60$ в конечное состояние $x_4 = 0$. На предыдущем этапе получили $u_1^* = 0$ или $u_1^* = 40$ (табл. 9). Следовательно, оптимальных решений не менее двух.

Рассмотрим решение для $u_1^* = 0$. Если первое предприятие получило отказ в кредитовании, то $x_1 = 60$, а $u_2^* = 40$ (табл. 8). Следовательно, второе предприятие получит 40 млн руб. Остаток средств после передачи 40 млн руб. второму предприятию составит 20 млн руб. ($x_2 = 20$). Из табл. 7 следует, что при $x_2 = 20$ в качестве решения возможны два варианта: третьему предприятию будет отказано в кредитовании ($u_3^* = 0$), а четвертое предприятие получит оставшиеся 20 млн руб. ($u_4^* = 20$) или третье предприятие получит 20 млн руб. ($u_3^* = 20$), а четвертому будет отказано в кредитовании ($u_4^* = 0$).

Аналогично получим два решения для $u_1^* = 40$. В каждом из четырех случаев суммарная прибыль будет 37 млн руб.

Результат занесем в табл. 10.

Таблица 10

Оптимальное решение			
u_1^*	u_2^*	u_3^*	u_4^*
0	40	0	20
0	40	20	0
40	0	0	20
40	0	20	0

Выводы

На основании вышеизложенного можно утверждать, что динамическое программирование — это математический аппарат, предназначенный для эффективного решения класса задач оптимизации. К этому классу задач можно отнести задачи, в которых рассматривается процесс, допускающий разбиение на отдельные этапы. На каждом этапе состояние системы зависит только от состояния системы на предыдущем шаге, а выбор управления не зависит от выбора управления на предыдущих шагах, а зависит только от состояния системы на данном шаге. Целевая функция в подобных задачах является аддитивной.

Контрольные вопросы и задания

1. Общая постановка задачи динамического программирования.
2. Особенность задач, решаемых методом ДП.
3. Сформулировать принцип оптимальности Беллмана.
4. Решить задачу о запуске комплекса взаимосвязанных работ для графа, изображенного на рис. 49.

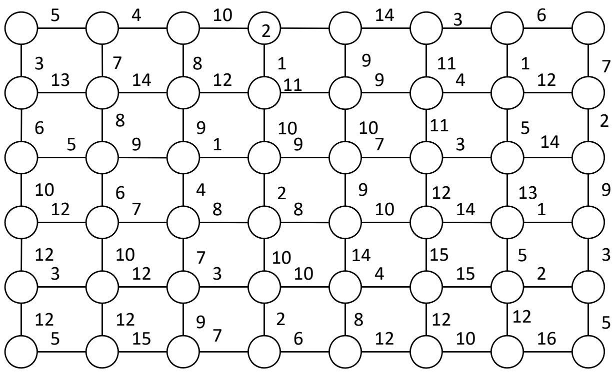

Рис. 49

5. Вершина *A* – склад, остальные вершины – строительные площадки компании. Числа, проставленные на ребрах графа (рис. 50), – расстояния в километрах. Найти кратчайшее расстояние от склада *A* до каждой строительной площадки.

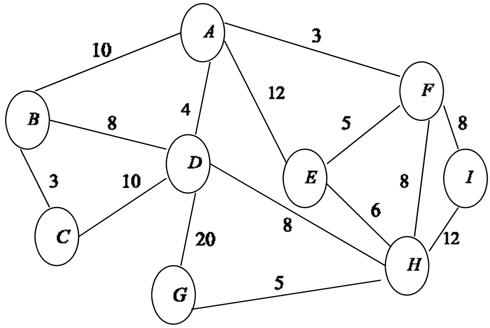

Рис. 50

6. В начале планового периода из N лет имеется оборудование возраста 4 года. Для каждого года планового периода известны стоимость $r(\tau)$ произведенной с использованием этого оборудования продукции и затраты $c(\tau)$, связанные с его эксплуатацией.

	Время τ, в течение которого используется оборудование					
	$\tau = 0$	$\tau = 1$	$\tau = 2$	$\tau = 3$	$\tau = 4$	$\tau = 5$
$r(\tau)$	46	46	45	45	45	43
$c(\tau)$	15	15	17	18	18	19

Известны также остаточная стоимость s оборудования и цена p единицы нового оборудования. Требуется разработать оптимальную политику в отношении имеющегося оборудования, т. е. в начале каждого года планового периода установить, сохранять в этом году оборудование или продать его по остаточной стоимости и купить новое, с тем чтобы ожидаемая прибыль за N лет достигла максимальной величины. Задачу решить при следующих числовых значениях: $N = 8$, $s = 2$, $p = 6$.

7. Решить предыдущую задачу при условии, что к началу первого года планового периода оборудование прослужило один год.
Составить план распределения суммы в 4 миллиона долларов между тремя предприятиями: $П_1$, $П_2$ и $П_3$, приносящий наибольшую прибыль, если в каждое из предприятий может быть вложено 1, 2, 3 или 4 миллиона долларов, а прибыль каждого из предприятий задана в таблице.

Размер вложенных средств (млн долл.)	Прибыль предприятий (млн долл.)		
	$П_1$	$П_2$	$П_3$
0	0	0	0
1	0,20	0,22	0,25
2	0,40	0,36	0,46
3	0,60	0,51	0,45
4	0,72	0,64	0,76

8. Составить план распределения суммы в 700 тысяч долларов между тремя предприятиями: $П_1$, $П_2$ и $П_3$, приносящий наибольшую прибыль, если в каждое из предприятий может быть вложена сумма, кратная 100 тыс. долларов, а прибыль каждого из предприятий задана в таблице.

Размер вложенных средств (млн долл.)	Прибыль предприятий (млн долл.)		
	$П_1$	$П_2$	$П_3$
0	0	0	0
100	30	50	40
200	50	80	50
300	90	90	110
400	110	150	120
500	170	190	180
600	180	210	220
700	210	220	240

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

По мере изменения экономических условий большинству предприятий и организаций с целью повышения эффективности производства приходится продолжать разрабатывать практические рекомендации и формировать новые методические основы построения систем управления. Имеющийся эмпирический материал по построению динамических и сетевых моделей не является сугубо сложившейся наукой. С развитием вычислительной техники появились новые математические теории и новые типы математических моделей. В настоящее время получила развитие теория перехода от стационарного графа к динамическому – динамическая теория графов. Динамический граф (динамическая сеть) может рассматриваться в качестве модели сложной структурно изменяющейся сети. Это может быть социальная сеть, сеть связи, межбанковская сеть и т. д. Основным объектом исследования динамической теории графов являются графы, претерпевающие некоторые изменения. Основной задачей динамической теории графов является анализ изменения структурных характеристик графа в зависимости от изменения элементов связности графа.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Исследование операций : учеб. пособие (практикум) / сост. А.С. Адамчук, С.Р. Амироков, А.М. Кравцов. – Ставрополь : Изд-во СКФУ, 2015. – 178 с.
2. Методы принятия решений : лаб. практикум / Н.В. Акамсина, Д.К. Проскурин, Ю.С. Сербулов, Е.А. Шипилова. – Воронеж : ВГАСУ, 2013. – 103 с.
3. Горлач, Б.А. Исследование операций : учеб. пособие / Б.А. Горлач. – Санкт-Петербург : Лань, 2013. – 448 с. – (Учебники для вузов. Специальная литература).
4. Есипов, Б.А. Методы исследования операций : учеб. пособие / Б.А. Есипов. – 2-е изд., испр. и доп. – Санкт-Петербург : Лань, 2013. – 304 с. – (Учебники для вузов. Специальная литература).
5. Жидкова, Н.В. Методы оптимизации систем : учеб. пособие / Н.В. Жидкова, О.Ю. Мельникова. – Саратов : Ай Пи Эр Медиа, 2018. – 149 с.
6. Кузнецов, А.В. Высшая математика: Математическое программирование : учебник / А.В. Кузнецов, В.А. Сакович, Н.И. Холод ; под общ. ред. А.В. Кузнецова. – 4-е изд., стер. – Санкт-Петербург : Лань, 2013. – 352 с. – (Учебники для вузов. Специальная литература).
7. Минько, Э.В. Методы прогнозирования и исследования операций : учеб. пособие / Э.В. Минько, А.Э. Минько. – Саратов : Ай Пи Эр Медиа, 2017. – 316 с.
8. Ржевский, С.В. Исследование операций : учеб. пособие / С.В. Ржевский. – Санкт-Петербург : Лань, 2013. – 480 с. – (Учебники для вузов. Специальная литература).
9. Сдвижков, О.А. Практикум по методам оптимизации : учеб. пособие / О.А. Сдвижков. – Москва : Вузовский учебник : ИНФРА-М, 2015. – 200 с.
10. Сосина, Н.А. Методические указания по выполнению контрольной работы по дисциплине «Математика», раздел «Линейное и динамическое программирование» : для всех экон. специальностей и направлений ВПО заоч. формы обучения / Н.А. Сосина. – Тольятти : ПВГУС, 2015. – 132 с. – URL: http://elib.tolgas.ru (дата обращения: 10.10.2020).

11. Сосина, Н.А. Учебно-методическое пособие по дисциплине «Математика», раздел «ЭММ и модели» : для студентов экон. специальностей и направлений / Н.А. Сосина. – Тольятти : ПВГУС, 2012. – 46 с. – URL: http://elib.tolgas.ru (дата обращения: 10.10.2020).
12. Сосина, Н.А. Учебно-методическое пособие для проведения практических занятий по дисциплине «Математика», раздел «Экономико-математические методы и модели» : «Основы теории графов. Сетевые методы решения задач» : для студентов экон. специальностей и направлений. Ч. 2 / Н.А. Сосина. – Тольятти : ПВГУС, 2009. – 67 с. – URL: http://elib.tolgas.ru (дата обращения: 10.10.2020).
13. Сосина, Н.А. Учебно-методическое пособие по дисциплине «Экономико-математические методы и модели» : для студентов экон. специальностей / Н.А. Сосина. – Тольятти : ПВГУС, 2008. – 89 с. – URL: http://elib.tolgas.ru (дата обращения: 10.10.2020).
14. Сосина, Н.А. Принятие управленческих решений в условиях риска на примере сетевого моделирования в проектной деятельности / Н.А. Сосина // Информационные технологии в моделировании и управлении: подходы, методы, решения : I Всероссийская научная конференция : сб. статей. – Тольятти : Изд-во ТГУ, 2017. – С 262–270.
15. Стронгин, Р.Г. Исследование операций и модели экономического поведения : учеб. пособие / Р.Г. Стронгин. – 2-е изд., испр. – Москва : ИНТУИТ, 2016. – 246 с. – (Основы информационных технологий).
16. Шелехова, Л.В. Методы оптимальных решений : учеб. пособие / Л.В. Шелехова. – Санкт-Петербург : Лань, 2016. – 304 с. – (Учебники для вузов. Специальная литература).

ГЛОССАРИЙ

Алгоритм Фалкерсона – алгоритм, позволяющий упорядочить вершины графа графическим или матричным способом, при этом исходный и преобразованный графы остаются изоморфными.

Вогнутая функция – функция, график которой целиком лежит не ниже отрезка, соединяющего две произвольные точки графика.

Выпуклая функция – функция, график которой целиком лежит не выше отрезка, соединяющего две произвольные точки графика.

Граф – это совокупность двух конечных множеств: множества точек x_i, которые называются вершинами, и множества пар вершин (x_i, x_j), которые называются ребрами.

Длина пути (цикла) – число ребер этого пути (цикла).

Задача квадратичного программирования (КП) – задача нелинейного программирования, в которой целевая функция представляет собой сумму линейной и квадратичной формы, а все ограничения линейны.

Задача на безусловный экстремум – задача на максимальное (минимальное) значение, которое функция, определенная на множестве и принимающая вещественные значения, достигает без дополнительных ограничений.

Задача на условный экстремум – задача на максимальное (минимальное) значение, которое функция, определенная на множестве и принимающая вещественные значения, достигает при условии, что значения присутствующих в задаче функций с той же областью определения подчинены определенным ограничениям.

Задача нелинейного программирования (НП) – задача математического программирования, в которой целевая функция и(или) ограничения заданы при помощи нелинейных функций.

Инцидентные вершина и ребро – вершина и ребро графа при условии, что вершина для этого ребра является концевой.

Коммуникационная сеть минимальной длины (дерево кратчайших расстояний) – это совокупность ребер графа (дуг сети), имеющая минимальную суммарную длину и обеспечивающая достижение всех вершин графа (узлов сети).

Конечный граф – граф, содержащий конечное число вершин и ребер.

Коэффициент напряженности работ – отношение продолжительности несовпадающих, заключенных между одними и теми же событиями, отрезков пути, одним из которых является путь максимальной продолжительности, проходящий через рассматриваемую работу, а другим – критический путь.

Критическая работа (событие) – работа (событие), расположенная на критическом пути.

Критическое время – время прохождения критического пути (ранний срок наступления конечного события).

Критический путь – наиболее продолжительный полный путь.

Матрица Гессе (гессениан) – матрица частных производных второго порядка дважды непрерывно дифференцируемой функции, вычисленных в точке.

Матрица инциденций графа – способ представления графа в виде матрицы, строки которой соответствуют вершинам, а столбцы – ребрам (дугам).

Матрица смежности – способ представления графа в виде квадратной матрицы n-го порядка, строки и столбцы которой соответствуют вершинам графа.

Мультиграф – граф, содержащий хотя бы два параллельных ребра.

Независимый резерв времени – резерв времени, использование которого не влияет на величину резервов времени других работ.

Отрицательно определенная (отрицательно полуопределенная) матрица *A* – симметричная матрица *A*, для которой выполняется неравенство $yAy = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_i y_j < 0$ ($yAy = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_i y_j \le 0$) для любого ненулевого вектора y.

Ориентированный граф (орграф) – граф с упорядоченными парами вершин (граф, на каждом ребре которого задается направление).

Плоский граф – граф, который может быть изображен на плоскости так, что все пересечения ребер являются его вершинами.

Поздний срок свершения события – это самый поздний момент совершения события, после которого остается ровно столько времени, сколько необходимо для выполнения всех работ, следующих за этим событием.

Положительно определенная (положительно полуопределенная) матрица A – симметричная матрица A, для которой выполняется неравенство $yAy = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_i y_j > 0$ ($yAy = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_i y_j \geq 0$) для любого ненулевого вектора y.

Полный резерв времени – резерв времени, позволяющий увеличить время выполнения конкретной работы при условии, что срок выполнения всего комплекса работ не изменится.

Полный путь – это путь от «источника» до «стока».

Порядок графа – число вершин графа.

Принцип оптимальности Беллмана – принцип, согласно которому, каково бы ни было состояние системы S в результате $k - 1$ шагов, управление на k-м шаге должно выбираться так, чтобы оно в совокупности с управлениями на всех последующих шагах с $(k + 1)$-го до N-го включительно доставляло экстремум целевой функции.

Простой граф – граф, который не содержит петель и параллельных дуг.

Простой цикл – цикл, не проходящий ни через одну из вершин графа более одного раза.

Псевдограф – граф, содержащий петли.

Путь – последовательность ребер, ведущая от некоторой вершины x_i к другой вершине x_j.

Путь в сетевом графе – любая последовательность работ.

Работа в сетевом графике – работа, требующая затрат времени и ресурсов, или просто ожидание (протяженный во времени процесс, не требующий никаких затрат).

Ранний срок свершения события – это самый ранний момент, к которому завершаются все работы, предшествующие этому событию. Определяется продолжительностью максимального пути, предшествующего этому событию.

Связный граф – граф, для любых двух вершин которого существует путь, соединяющий их.

Сетевой график – связный орграф без петель и контуров.

Смежные вершины – две вершины, являющиеся концевыми для некоторого ребра.

Событие – это момент завершения какого-либо процесса (работы), отражающий отдельный этап выполнения проекта.

Степень вершины графа – число ребер графа, инцидентных данной вершине графа.

Точка глобального максимума функции на допустимом множестве *X* – точка, в которой значение функции будет больше, чем в любой другой точке множества *X*.

Точка глобального минимума функции на допустимом множестве *X* – точка, в которой значение функции будет меньше, чем в любой другой точке множества *X*.

Точка локального максимума функции – точка, для которой существует пусть сколь угодно малая окрестность, принадлежащая области определения функции, для всех точек которой значения функции будут меньше, чем в самой точке.

Точка локального минимума функции – точка, для которой существует пусть сколь угодно малая окрестность, принадлежащая области определения функции, для всех точек которой значения функции будут больше, чем в самой точке.

Функция Лагранжа – функция, которая строится по определенным правилам при решении задач на условный экстремум.

Цепь – последовательность неповторяющихся ребер, ведущая от некоторой вершины x_i к другой вершине x_j.

Цикл – цепь, начальная и конечная вершины которой совпадают.