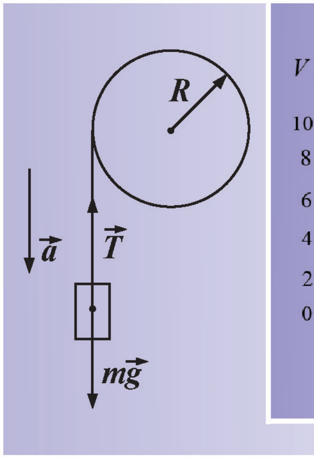
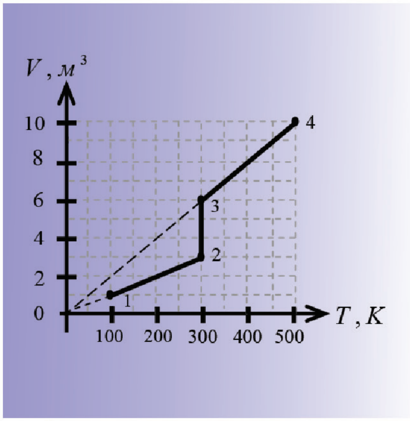
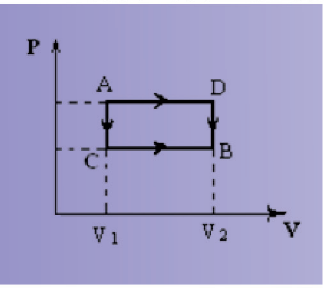
Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Тольяттинский государственный университет
Институт математики, физики и информационных технологий

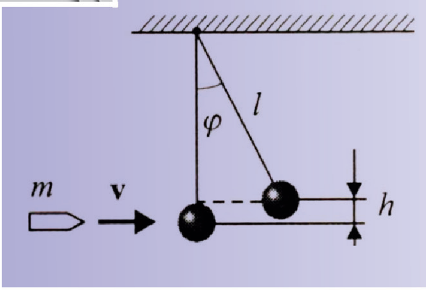
МЕХАНИКА. МОЛЕКУЛЯРНАЯ ФИЗИКА И ТЕРМОДИНАМИКА

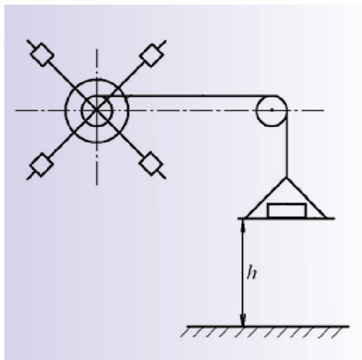
Электронное учебно-методическое пособие











ISBN 978-5-8259-1572-2

УДК 53
ББК 22.3

Авторы:
С.Н. Потемкина, В.А. Сарафанова, Н.В. Чиркунова,
А.П. Воленко, И.С. Ясников

Рецензенты:
д-р техн. наук, профессор, заведующий кафедрой
«Сервис технических и технологических систем» Поволжского
государственного университета сервиса *Б.М. Горшков*;
д-р физ.-мат. наук, доцент, профессор кафедры
«Общая и теоретическая физика» Тольяттинского
государственного университета *В.А. Решетов.*

Механика. Молекулярная физика и термодинамика : электронное учебно-методическое пособие / С.Н. Потемкина, В.А. Сарафанова, Н.В. Чиркунова [и др.]. – Тольятти : Изд-во ТГУ, 2021. – 1 оптический диск. – ISBN 978-5-8259-1572-2.

Учебно-методическое пособие предназначено для студентов, обучающихся по техническим направлениям подготовки бакалавров очной и заочной форм обучения в системе высшего образования.

Пособие по организации и проведению практических занятий по курсу «Физика-1» разделено на два модуля, содержащих теоретический, методический и практический материал; направлено на формирование у студентов знаний физических явлений, законов и методов расчета физических величин, характеризующих физические явления, а также умений применять физические законы в процессе решения качественных и расчетных задач для формирования навыков самостоятельного научного мышления.

Текстовое электронное издание.

Рекомендовано к изданию научно-методическим советом Тольяттинского государственного университета.

Минимальные системные требования: IBM PC-совместимый компьютер: Windows XP/Vista/7/8; PIII 500 МГц или эквивалент; 128 Мб ОЗУ; SVGA; CD-ROM; Adobe Acrobat Reader.

Редактор *Т.М. Воропанова*
Технический редактор *Н.П. Крюкова*
Компьютерная верстка: *Л.В. Сызганцева*
Художественное оформление,
компьютерное проектирование: *И.И. Шишкина*

Дата подписания к использованию 08.06.2021.
Объем издания 10,7 Мб.
Комплектация издания: компакт-диск,
первичная упаковка.
Заказ № 1-58-18.

Издательство Тольяттинского
государственного университета
445020, г. Тольятти, ул. Белорусская, 14,
тел. 8 (8482) 53-91-47, www.tltsu.ru

Содержание

ПРЕДИСЛОВИЕ

В электронном учебно-методическом пособии «Механика. Молекулярная физика и термодинамика» рассматриваются следующие разделы курса общей физики: «Классическая механика», «Элементы СТО», «Молекулярная физика», «Термодинамика».

Цель пособия – оказать помощь студентам технических специальностей и направлений подготовки при изучении курса физики в Тольяттинском государственном университете, в организации их самостоятельной работы на практических занятиях и при обучении по индивидуальным образовательным траекториям.

Содержание практических занятий направлено на формирование у студентов знаний физических явлений, законов, формул, единиц измерения физических величин, различных методов расчета искомых величин, умений применять физические законы для решения качественных и расчетных задач, графически представлять физические явления и законы, анализировать полученные результаты. Решение задач способствует формированию навыков самостоятельного мышления.

В данном учебно-методическом пособии подобраны задания, предназначенные для организации аудиторной и внеаудиторной самостоятельной работы студентов, самоконтроля при подготовке к итоговому тестированию.

Каждое практическое занятие содержит: 1) основные формулы; 2) методические указания по решению задач; 3) примеры решения задач разного уровня сложности; 4) задания для аудиторной самостоятельной работы; 5) билеты для контроля усвоения материала; 6) домашнее задание.

Авторы выражают уверенность, что самостоятельная работа с учебно-методическим пособием при изучении дисциплины «Физика» поможет студентам при подготовке к итоговому контролю и будет способствовать более глубокому изучению данного раздела курса общей физики.

ВВЕДЕНИЕ

В основе современной естественнонаучной картины мира лежат физические принципы и концепции. В этой связи роль физики как основы всего естествознания трудно переоценить. С другой стороны, физика является теоретической базой, без которой невозможна успешная деятельность выпускника вуза в области знаний «Технические науки».

Данное пособие отражает современное состояние физики и ее приложений. В нем естественным образом сочетаются макро- и микроскопические подходы. Порядок расположения материала соответствует современной структуре физики как науки и отражает мировой педагогический опыт. В учебно-методическом пособии приведены практические занятия с методическими указаниями по их решению, а также набор заданий для контроля усвоения материала.

Задачи учебно-методического пособия по курсу «Физика-1»

1. Формирование у студентов основ научного мышления, правильного понимания границ применимости различных физических понятий, законов, теорий и умения оценивать степень достоверности результатов, полученных с помощью экспериментальных или научных методов исследования.
2. Усвоение основных физических явлений и законов из разделов механики, молекулярной физики и термодинамики.
3. Выработка у студентов приёмов владения основными методами решения и навыков их применения к решению конкретных физических задач из разделов механики, молекулярной физики и термодинамики.

Планируемые результаты обучения по учебному курсу «Физика-1»

После изучения курса «Физика-1» студент должен

– *знать:* фундаментальные законы природы и основные физические законы в области механики, молекулярной физики и термодинамики;
– *уметь* применять физические методы и законы для решения физических задач из перечисленных разделов;

– *владеть* основными методами решения физических задач из этих разделов.

Общая трудоемкость учебного курса «Физика-1» – 2 Z.

Распределение учебной аудиторной нагрузки в семестре

Время изучения дисциплины «Физика-1» – 12 недель. Курс начинается с вводной лекции, на которой студенты (лекционный поток) знакомятся с особенностями их учебной деятельности при изучении дисциплины «Физика» по технологии с использованием балльно-рейтинговой системы (БРС) оценки знаний.

Учебный курс разбит на 2 учебных модуля – М1, М2. Каждый модуль изучается 6 недель.

Содержание курса «Физика-1»

Дидактические единицы			
Раздел, модуль	Подраздел	Тема	Понятия
Модуль 1. Физические основы классической механики	ДЕ 1. Механика	Кинематика поступательного и вращательного движения	Векторы, скаляры, перемещение, путь, линейные скорость и ускорение, угловые скорость и ускорение, угловой путь. Физические модели: материальная точка, твердое тело
		Динамика точки и поступательного движения твердого тела	Инерциальные системы отсчета. Масса, сила, импульс, внешние и внутренние, консервативные и неконсервативные силы
		Работа. Энергия. Законы сохранения импульса и механической энергии	Механическая работа, кинетическая и потенциальная энергия, замкнутая система
		Динамика вращательного движения твердого тела	Момент инерции, момент силы
		Законы сохранения момента импульса и энергии	Момент импульса относительно точки и оси
		Элементы специальной теории относительности	Лоренцево сокращение длины. Релятивистский импульс

Дидактические единицы			
Раздел, модуль	Подраздел	Тема	Понятия
Модуль 2. Молекулярная физика и термодинамика	ДЕ 2. Статистические распределения	Распределение Максвелла и Больцмана	Функция распределения Максвелла, барометрическая формула, распределение Больцмана
		Внутренняя энергия и теплоемкость газов	Внутренняя энергия, число степеней свободы. Молярные теплоемкости C_p и C_V. Показатель адиабаты
		Первое начало термодинамики. Работа в различных процессах	Количество теплоты, работа газа, приращение внутренней энергии
		Второе начало термодинамики. Энтропия. Циклы	Энтропия. КПД тепловой машины

Формой контроля знаний студентов по курсу «Физика-1» является зачет.

Критерии оценки

Традиционная шкала рейтинговых баллов (РБ), действующая в ТГУ:

1. «Отлично» – 80–100 баллов.
2. «Хорошо» – 60–79 баллов.
3. «Удовлетворительно» – 40–59 баллов.
4. «Неудовлетворительно» – 0–39 баллов.

Для студентов, изучающих курс «Физика-1», действует следующая принципиальная схема распределения рейтинговых баллов по видам учебной деятельности студента.

Принципиальная схема распределения РБ

<table>
<tr><th rowspan="2">Тип курса</th><th rowspan="2">Составляющие аудиторной нагрузки по учебному плану</th><th rowspan="2">Формы контроля</th><th colspan="2">Примерное распределение баллов по учебным мероприятиям</th></tr>
<tr><th>Наименование учебных мероприятий</th><th>Кол-во баллов</th></tr>
<tr><td rowspan="2">Практико-теоретический (ПТ) курс</td><td rowspan="2">Лекции, практические занятия, лабораторные занятия</td><td>Текущий контроль (60 %)</td><td>Аудиторная работа:
1) лабораторный практикум;
2) практические занятия;
3) коллоквиумы

Бонусы</td><td>3 б. × 8 = 24 б.

2 б. × 10 = 20 б.

20 б. × 2 = 40 б.

16 б.</td></tr>
<tr><td>Итоговый тест</td><td></td><td>max – 100 б.</td></tr>
<tr><td colspan="5">Итого за семестр: $\frac{\mathbf{200}\text{ б.}}{\mathbf{2}}$ = 100 б.</td></tr>
</table>

Каждый модуль состоит из 6 практических занятий, пяти лекций, 6 лабораторных занятий.

На лекционных занятиях излагается теоретический материал модуля, на практических и лабораторных занятиях, а также самостоятельно он повторяется и закрепляется. На практических занятиях преподаватель знакомит студентов с различными методами решения физических задач, приводит примеры решения избранных задач по соответствующим дидактическим единицам (ДЕ) курса «Физика», организует индивидуальную самостоятельную аудиторную работу студентов в виде экспресс-опросов (пятиминуток) или работу по билетам для контроля.

Экспресс-опрос (пятиминутка) на практических занятиях состоит из 4 заданий, каждое задание оценивается по 0,5 РБ.

Билет для самостоятельной работы также состоит из 4 заданий: в него включаются определения, формулировки законов и теорем, формулы связи, одна или две простые задачи. Каждое задание оценивается 0,5 РБ, всего 2 рейтинговых балла.

Максимальный балл за практические занятия в семестре составляет 20 РБ.

В каждом модуле проводится один коллоквиум, который оценивается в 20 РБ.

Семестровый рейтинг студента, изучающего дисциплину «Физика» на основе модульной системы, складывается из рейтинговых баллов:

1) практические занятия – $Пр_i$;
2) лабораторные работы – $ЛР_i$;
3) коллоквиумы – Кол;
4) бонусы – ББ (бонусные баллы);
5) итоговое тестирование – ИТ.

Итоговый рейтинговый балл за семестр (ИРБ) рассчитывается по формуле

$$ИРБ = \frac{\sum\limits_{i-1}^{N=12} Пр_i + \sum\limits_{i=1}^{N=12} ЛР_i + Кол + ББ + ИТ}{2}.$$

Если ИРБ ≥ 40, то студенту может быть выставлен зачет по курсу «Физика-1» согласно приведённым выше критериям.

Отметка о зачете проставляется в ведомость и зачетную книжку студента экзаменатором – лектором потока.

Практическое занятие 1.1
Кинематика поступательного движения

1. Задача кинематики. Основные понятия: материальная точка, абсолютно твердое тело, механическая система, система отсчета, траектория.

2. Кинематические характеристики поступательного движения материальной точки: пройденный путь, координаты, радиус-вектор, вектор перемещения, скорость и ускорение. Кинематические уравнения движения в векторной и координатной формах записи.

3. Поступательное движение. Кинематические уравнения движения.

Основные формулы

Название ФВ	Формула
Вектор средней скорости	$\vec{V}_{\text{ср}} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$, (1) где $\Delta\vec{r}$ – приращение радиус-вектора за промежуток времени Δt
Средняя путевая скорость	$V_{\text{ср}} = \frac{\Delta S}{\Delta t}$ (2)
Мгновенная скорость	$\vec{V} = \lim \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = (\vec{r})',\ \Delta t \to 0.$ (3) Мгновенная скорость равна производной от радиус-вектора по времени, направлена по касательной к траектории в направлении движения
Закон сложения скоростей	$\vec{V} = \vec{V}_\tau + \vec{V}_n$, (4) где $\vec{V}_\tau$ – тангенциальная составляющая скорости. Характеризует быстроту изменения радиус-вектора по модулю, направлена вдоль радиус-вектора; $\vec{V}_n$ – нормальная составляющая скорости. Характеризует быстроту изменения радиус-вектора по направлению, направлена перпендикулярно радиус-вектору
Вектор среднего ускорения	$\vec{a}_{\text{ср}} = \frac{\Delta\vec{V}}{\Delta t}$ (5)

Название ФВ	Формула
Вектор мгновенного ускорения	$$\vec{a} = \lim \frac{\Delta\vec{V}}{\Delta t} = \vec{V}', \qquad \Delta t \to 0 \qquad (6)$$
Закон сложения ускорений	$$\vec{a} = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n \qquad (7)$$

Ускорение характеризует быстроту изменения вектора скорости:

$\vec{a}_\tau \parallel \vec{V}$ – тангенциальная составляющая ускорения характеризует быстроту изменения вектора скорости по модулю;

$\vec{a}_n \perp \vec{V}$ – нормальная составляющая ускорения характеризует быстроту изменения вектора скорости только по направлению;

$a_\tau = (V)'$ – модуль тангенциальной составляющей линейного ускорения равен первой производной от модуля скорости по времени;

$a_n = V^2/R$ – модуль нормальной составляющей линейного ускорения, где R – радиус кривизны траектории.

Кинематические уравнения движения

Кинематическое уравнение движения определяет положение материальной точки в текущий момент времени.

$\vec{r} = \vec{r}(t)$ – векторная форма уравнения движения.

$x = x(t)$, $y = y(t)$ – координатная (скалярная) форма уравнения движения на плоскости XOY.

$y = f(x)$ – уравнение траектории.

1. **Прямолинейное движение:**

$\vec{a}_n = 0$ – вектор скорости не изменяется по направлению.

1.1. $\vec{a}_\tau = 0$ – равномерное прямолинейное движение (или покой).

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \vec{V}_0 t, \ \vec{V}(t_0) = \vec{V}_0.$$

При движении вдоль оси OX: $x(t) = x_0 + V_0 t$.

1.2. $\vec{a}_\tau = \text{const}$ – прямолинейное равнопеременное движение.

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{V}_0 t + \frac{\vec{a}t^2}{2},$$

где $\vec{a} = \vec{a}_\tau$. При движении вдоль оси OX;

$$\vec{V}(t) = \vec{V}_0 + \vec{a}t; \ x(t) = x_0 + V_0 t + \frac{at^2}{2}.$$

1.3. Если $a_\tau > 0$ – равноускоренное движение;

$a_\tau < 0$ – равнозамедленное движение.

Если в равнопеременном движении на пути S скорость тела изменилась от V_1 до V_2, то имеет место соотношение $2aS = V_2^2 - V_1^2$.

2. **Криволинейное движение:**

$\vec{a}_n \neq 0$ – вектор скорости изменяется по направлению.

2.1. a_n = const – за любые равные промежутки времени вектор скорости поворачивается на равные углы – движение по окружности.

За координату материальной точки в этом случае удобно взять угол поворота радиус-вектора – φ.

Тогда: $\omega = (\varphi)' = \lim \Delta\varphi/\Delta t$ – угловая скорость;

$\varepsilon = (\omega)' = \lim \Delta\omega/\Delta t$ – угловое ускорение при $\Delta t \to 0$.

2.2. **Равномерное движение по окружности:**

$$a_\tau = 0;\ a_n = \text{const}.\ a = \omega^2 R = V^2/R,\ V = \omega \cdot r,\ a_\tau = \varepsilon \cdot r.$$

$S = V \cdot t$ – линейный путь;

$\varphi = \omega \cdot t$ – угловое перемещение;

$V = \Delta S/\Delta t$ – линейная скорость;

$\omega = \Delta\varphi/\Delta t$ – угловая скорость.

Центростремительное ускорение направлено перпендикулярно скорости. $\vec{a}_{\text{цс}} \perp \vec{V}$.

Вектор угловой скорости $\vec{\omega}$ направлен по оси вращения. Направление определяется по правилу буравчика.

Период $T = t/N$ (с); линейная частота: $\nu = N/t$ (1 Гц = 1/с); циклическая (или круговая) частота: $\omega = 2\pi / T = 2\pi\nu$ (рад/с).

2.3. **Равнопеременное движение по окружности:**

a_n = const.

Если $a_\tau = \text{const} > 0$, то $\varepsilon > 0$ – равноускоренное движение по окружности;

если $a_\tau = \text{const} < 0$, то $\varepsilon < 0$ – равнозамедленное движение по окружности.

Уравнения движения при этом имеют аналогичную форму:

$$\varphi(t) = \varphi_0 + \omega_0 t + \frac{\varepsilon t^2}{2},\ \omega(t) = \omega_0 + \varepsilon t.$$

Если при равнопеременном вращении по окружности при угле поворота φ угловая скорость изменилась от ω_1 до ω_2, то $2\varepsilon\varphi = \omega_2^2 - \omega_1^2$.

Графическая иллюстрация кинематических законов движения

Равномерное прямолинейное движение

В векторной форме

$$\vec{a} = 0$$

$$\vec{V} = \text{const}$$

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{V}t$$

В скалярной форме (при движении вдоль оси OX):

$$a_X = 0$$

$$V_X = \text{const}$$

$$x = x_0 + V_X t$$

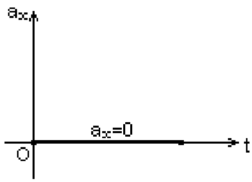


Рис. 1.1

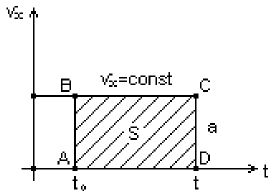


Рис. 1.2

Для прямолинейного однонаправленного движения $|\vec{r}| = S$ (пройденный путь). Кроме того, $|\vec{r}| = x - x_0$, значит, $S = f(t)$.

Графики зависимостей $a_x = f(t)$ и $V_x = (t)$ для равномерного прямолинейного движения приведены на рис. 1.1 и 1.2.

По графику зависимости $V_x = f(t)$ (рис. 1.3) можно рассчитать путь, пройденный за промежуток времени $(t - t_0)$. Он равен площади фигуры *ABCD*, находящейся под графиком скорости. Это справедливо для любого вида движения.

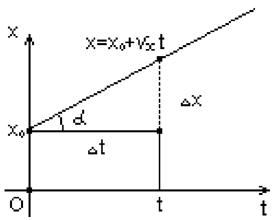


Рис. 1.3

Зависимость координаты точки от времени в равномерном движении – прямая линия, тангенс угла наклона которой к оси времени определяет модуль скорости точки – $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{\Delta x}{\Delta t} = V$.

Равнопеременное прямолинейное движение

Равнопеременное прямолинейное движение – движение, при котором за любые равные промежутки времени скорость тела изменяется на одну и ту же величину.

В векторной форме

$$\vec{a} = \text{const}$$

$$\vec{V} = \vec{V}_0 + \vec{a}t$$

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{V}_0 t + \frac{\vec{a}t^2}{2}$$

В скалярной форме (при движении вдоль OX):

$$a_X = \text{const}$$

$$V_X = V_{0X} + a_X t$$

$$x = x_0 + V_{0X} t + \frac{a_X t^2}{2}$$

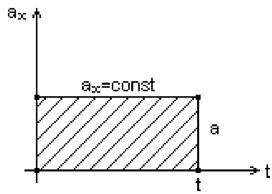


Рис. 1.4

По графику зависимости $a_x(t)$ (рис. 1.4) можно судить об изменении модуля скорости: $\Delta V = V - V_0 = at$ – *численно равно площади фигуры, ограниченной графиком ускорения и осью t.*

На графике зависимости $V_x(t)$ (рис. 1.5) – путь, пройденный точкой за время t, определяется как площадь фигуры *ABCD*, а тангенс угла наклона графика к оси времени есть ускорение точки.

Зависимость координаты от времени – нелинейная:

$x = x_0 + V_{0X} t + \frac{a_X t^2}{2}$ – квадратичная зависимость, график – ветвь параболы (рис. 1.6).

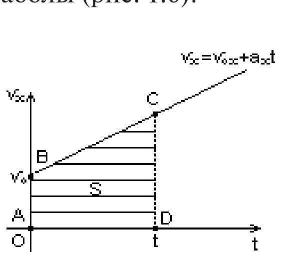


Рис. 1.5

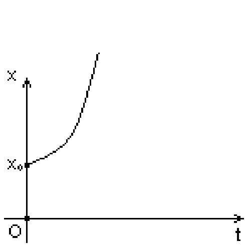


Рис. 1.6

Методические рекомендации

Кинематика поступательного движения

В кинематике не рассматриваются причины возникновения или изменения движения. Считается, что характер движения или законы движения (кинематические уравнения движения) известны. Прямая основная задача кинематики заключается в нахождении любого параметра движения (координаты, радиуса кривизны траектории, скорости, ускорения) по известному закону движения. Обратная задача кинематики состоит в определении закона движения по какому-либо известному параметру движения.

Если закон движения в задаче не задан в виде кинематического уравнения, то сначала надо выяснить, какой вид движения совершает данное тело. Для наиболее простых видов движения (равномерное прямолинейное, равнопеременное прямолинейное, равномерное и равнопеременное вращательное движение) вид этих уравнений приведен в разделе «Основные формулы».

Как правило, закон движения удобнее записывать в координатной форме.

Систему координат (обычно декартову) необходимо выбирать в зависимости от условий задачи, максимально упрощая вид кинематических уравнений в координатной форме. Следите за тем, чтобы правильно были определены проекции кинематических величин на выбранную ось координат.

Обратите внимание на то, что кинематическое уравнение в координатной форме содержит не путь, пройденный телом, а только его координаты.

При изменении направления движения тела пройденный путь продолжает увеличиваться, тогда как координата меняет характер своего изменения (например, увеличение координаты после изменения направления движения сменяется на уменьшение координаты).

В системе координат, связанной с Землей, уравнения движения имеют вид:

а) для тела, брошенного горизонтально с высоты h над землей с начальной скоростью $\vec{V}_0$:

$$\begin{cases} y = y_0 - \dfrac{gt^2}{2}, \\ x = V_{0X}t, \end{cases} \qquad (V_{0Y} = 0,\ y_0 = h);$$

$$\begin{cases} V_X = V_{0X} = V_0 \\ V_Y = gt \end{cases}$$

б) для тела, брошенного вертикально вверх с поверхности Земли:

$$\begin{cases} y = y_0 + V_{0Y}t - \dfrac{gt^2}{2} \\ V_Y = V_{0Y} - gt \end{cases};$$

в) для свободно падающего тела:

$$\begin{cases} y = y_0 - \dfrac{gt^2}{2} \\ V_Y = gt \end{cases}.$$

Алгоритм решения задачи

1. Внимательно прочитайте условие задачи и кратко запишите его в системе единиц измерения СИ.

2. Сделайте краткий анализ условия задачи: охарактеризуйте движение тел(а) (равномерное или равнопеременное, прямолинейное или криволинейное?).

3. Выполните схематический чертеж, поясняющий условие задачи. При решении задачи векторно-координатным методом:

а) покажите начальную координату тел, направление скорости и ускорения (не забывайте, что для равноускоренного движения $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{V}_0$, для равнозамедленного $\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{V}_0$);

б) выберите систему отсчета, обозначив начало системы координат и направление координатных осей (выбор системы координат произволен, но выбирать ее необходимо каждый раз в зависимости от условий задачи таким образом, чтобы математическое решение было проще).

4. На основании проведенного анализа запишите кинематические законы движения в векторной и координатной формах, при этом внимательно следите за знаками проекций векторов на соот-

ветствующие оси (по чертежу); объясните все введенные вами обозначения.

5. Составьте систему уравнений, проверьте, чтобы число уравнений совпадало с числом неизвестных. Решите полученную систему уравнений относительно искомых величин.

Если число неизвестных больше числа уравнений, добавьте уравнения, связывающие неизвестные величины между собой так, чтобы число уравнений совпадало с числом неизвестных. Решите полученную систему уравнений относительно искомых величин.

6. Проверьте размерность искомых величин по полученным выражениям.

7. Сделайте числовые расчеты и оцените разумность полученного результата.

8. Помните, что путь, пройденный телом, может быть только положительным; встреча двух тел означает равенство соответствующих координат этих тел в данный момент времени.

Примеры решения задач

Пример 1. За промежуток времени Δt = 10,0 с точка прошла половину окружности радиуса R = 1,60 м. Вычислить за это время: а) среднюю путевую скорость $<V_п>$; б) модуль среднего вектора скорости – $<\vec{V}>$.

Дано:
R = 1,60 м
Δt = 10,0 с
a_τ = const

$<V_п>$ = ?
$<\vec{V}>$ = ?

Решение

Сделаем рисунок.

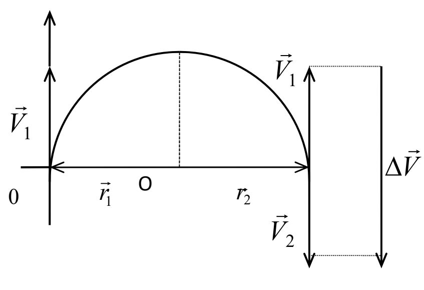


Рис. 1.7

По определению $<V_п> = \Delta S/\Delta t$. По условию задачи $\Delta t = t$, а $\Delta S = \pi R$. Отсюда: $<V_п> = \pi R/\Delta t = 3{,}14 \cdot 1{,}6/10 = 0{,}50$ (м/с).

По определению: $\left|<\vec{V}>\right| = \left|\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}\right|$; $|\Delta\vec{r}| = |\vec{r_2} - \vec{r}_1| = 2R$.

Следовательно: $\left|<\vec{V}>\right| = \left|\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}\right| = 2R/\Delta t = 2 \cdot 1{,}6\ /10 = 0{,}32$ м/с.

Ответ: $<V_{\text{п}}> = 0{,}50$ м/с, $= 0{,}32$ м/с.

Пример 2. Тело движется прямолинейно вдоль оси *OX*. На графике (рис. 1.8) показана зависимость координаты тела *x* от времени *t*. Чему равна средняя скорость движения тела на всем пути, пройденном за 2 с.

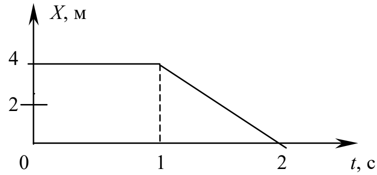


Рис. 1.8

Дано:	*Решение*
$\Delta t = 2$ с	Средняя скорость движения
$<V> = ?$	$<V> = \Delta S/\Delta t$.

При прямолинейном однонаправленном движении величину пройденного пути можно найти из графика: $\Delta S = \Delta x = 4$ м – путь, пройденный точкой за интервал времени $\Delta t = 2$ с. Тогда $<V> = 2$ м/с.

Ответ: $<V> = 2$ м/с.

Пример 3. Два автомобиля одновременно выезжают из городов *A* и *B*, расстояние между которыми равно *l*, и движутся равномерно и прямолинейно по трассе со скоростями V_1 и V_2 навстречу друг другу. Через какое время *t* и на каком расстоянии *s* от города *A* они встретятся?

Дано:	*Решение*
l, V_1, V_2	В этой задаче удобно выбрать в качестве тела отсчета Землю.
$<V> = ?$ $t = ?$ $S = ?$	

Направим ось абсцисс по линии, соединяющей города *A* и *B*, в сторону города *B*, а начало отсчета поместим в точку *A* (рис. 1.9).

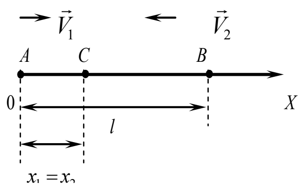


Рис. 1.9

Условимся отсчитывать время от общего для обоих автомобилей момента начала движения. Тогда уравнения движения автомобилей (которые мы примем за материальные точки) будут иметь вид:

$$x_1 = x_{01} + (V_1)_x t = x_{01} + V_1 t \quad \text{и} \quad x_2 = x_{02} - (V_2)_x t = x_{02} - V_2 t,$$

где x_1 и x_2 – координаты автомобилей в произвольный момент времени; $x_{01} = 0$, $x_{02} = l$ – начальные координаты автомобилей.

В точке C, в которой автомобили встретятся, координаты их будут одинаковыми: $x_1 = x_2$. Тогда

$$V_1 t = l - V_2 t, \; t = \frac{l}{V_1 + V_2}.$$

Место встречи автомобилей находится на расстоянии $s = x_1$ или $s = x_2$ от города A, т. е. $s = \dfrac{V_1}{V_1 + V_2} l$.

Ответ: $t = \dfrac{l}{V_1 + V_2}$; $s = \dfrac{V_1}{V_1 + V_2} l$.

Пример 4. В течение какого времени скорый поезд длиной l_1, идущий со скорость V_1, будет проходить мимо встречного товарного поезда длиной l_2, идущего со скоростью V_2?

Дано:
l_1, l_2, V_1, V_2

$t = ?$

Решение

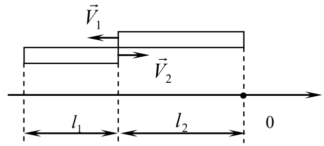


Рис. 1.10

Началом встречи скорого и встречного товарного поездов следует считать тот момент времени $t_0 = 0$, в который координаты начал этих поездов одинаковы. Окончанием же встречи будем считать момент времени t, в который равны координаты их концов. Свяжем систему отсчета с одним из движущихся поездов, например, с товарным. Направим ось в сторону движения скорого поезда, а начало координат совместим с концом товарного поезда (рис. 1.10). Очевидно, скорость скорого поезда относительно встречного товарного

$$V_{\text{отн}} = V_1 + V_2.$$

Тогда если за начальный момент времени принять начало встречи, то закон движения конца скорого поезда $x = -x_0 + V_{\text{отн}}t$, где $x_0 = l_1 + l_2$ – начальная координата. Знак минус перед ней стоит потому, что x_0 отсчитывается влево от начала координат. В момент завершения обгона конец скорого поезда будет в начале выбранной системы координат, т. е. $x = 0$. Тогда для этого момента времени

$$-(l_1 + l_2) + (V_1 + V_2)t = 0,$$

откуда

$$t = \frac{l_1 + l_2}{V_1 + V_2}.$$

Ответ: $t = \dfrac{l_1 + l_2}{V_1 + V_2}$.

Пример 5. Найти среднюю скорость тела в двух случаях:

а) первую четверть времени оно двигалось со скоростью V_1, оставшееся время – со скоростью V_2;

б) первую четверть пути оно двигалось со скоростью V_1, оставшуюся часть пути – со скоростью V_2.

Дано:	*Решение*
V_1, V_2	По определению средней скорости движения
$<V> = ?$	$$<V> = \frac{\Delta S}{\Delta t}, \qquad (1)$$
	где ΔS – весь пройденный путь; Δt – все время движения.

Случай а. Весь пройденный путь складывается из двух участков:

$$\Delta S = S_1 + S_2, \qquad (2)$$

где

$$S_1 = V_1 \frac{1}{4} t, \qquad (3)$$

$$S_2 = V_2 \frac{3}{4} t \qquad (4)$$

– участки пути, пройденные телом за первую четверть времени и за оставшиеся три четверти времени соответственно. Следовательно:

$$\Delta S = V_1 \frac{1}{4} t + V_2 \frac{3}{4} t = \frac{t}{4}(V_1 + 3V_2). \qquad (5)$$

Подставляя (5) в выражение в (1), получим ответ на первый вопрос задачи:

$$< V >_{\text{а}} = \frac{1}{4}(V_1 + 3V_2). \tag{6}$$

Случай б. Все время движения складывается из времени прохождения первой четверти пути – t_1 и времени прохождения оставшейся части пути – t_2. Выразим времена движения на каждом участке:

$$t_1 = \frac{1}{4}\frac{S}{V_1}; \tag{7}$$

$$t_2 = \frac{3}{4}\frac{S}{V_2}. \tag{8}$$

Тогда:

$$\Delta t = t_1 + t_2 = \frac{S}{4V_1} + \frac{3S}{4V_2} = \frac{S(3V_1 + V_2)}{4V_1V_2}. \tag{9}$$

Подставив выражение (9) в (1), получим ответ на второй вопрос задачи:

$$< V >_{\text{б}} = \frac{4V_1V_2}{3V_1 + V_2}. \tag{10}$$

Ответ: 1) $< V >_{\text{а}} = \frac{1}{4}(V_1 + 3V_2)$; 2) $< V >_{\text{б}} = \frac{4V_1V_2}{3V_1 + V_2}$.

Пример 6. Вдоль наклонной доски пустили катиться снизу вверх шарик. На расстоянии l от начала пути шарик побывал дважды: через время t_1 и время t_2 после начала движения. Считая движение равнопеременным, определить его начальную скорость V_0, ускорение a и максимальное расстояние x_{max}, на которое шарик может откатиться вверх.

Дано:	*Решение*
l, t_1, t_2	
V_0, a, x_{max}?	

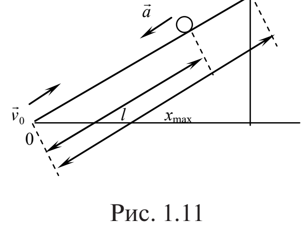


Рис. 1.11

Если наклонную доску выбрать в качестве тела отсчета, а ось абсцисс выбрать так, как показано на рис. 1.11, то зависимость координаты x шарика от времени записывается следующим образом: $x = x_0 + V_0 t - at^2/2$, где $x_0 = 0$. При $x = t$ имеем квадратное уравнение:

$$l = V_0 t - \frac{at^2}{2}, \tag{1}$$

корнями которого являются заданные значения t_1 и t_2. Придадим уравнению (1) вид приведенного квадратного уравнения:

$$t^2 - \frac{2v_0}{a} t + \frac{2l}{a} = 0. \tag{2}$$

Тогда в соответствии с теоремой Виета $t_1 + t_2 = 2V_0/a$ и $t_1 t_2 = 2l/a$.

Из этих уравнений находим $a = 2l/t_1 t_2$, $V_0 = l(t_1 + t_2)/t_1 t_2$.

Шарик, двигаясь вверх, совершает равнозамедленное движение, следовательно, $(\vec{a})_x = -a$, в самой верхней точке его траектории скорость равна нулю $V = 0$. Тогда максимальное расстояние x_{max}, на которое шарик может откатиться вверх, равно:

$$x_{max} = \frac{V^2 - V_0^2}{-2a} = \frac{V_0^2}{2a} = \frac{l(t_1 + t_2)^2}{4t_1 t_2}.$$

Ответ: $a = 2l / t_1 t_2$; $V_0 = l(t_1 + t_2)/t_1 t_2$; $x_{max} = \dfrac{l(t_1 + t_2)^2}{4t_1 t_2}$.

Пример 7. Пуля, летящая со скоростью V_0, попадает в деревянную преграду и проникает в нее на глубину l. Найти ускорение a и время движения пули t внутри преграды. Какова была ее скорость V_1 на глубине $l_1 < l$? На какой глубине l_2 скорость пули уменьшилась в n раз?

Решение

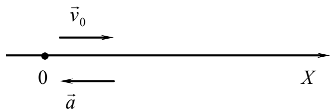


Рис. 1.12

Ось абсцисс направляем вдоль движения пули, а началом отсчета будем считать точку соприкосновения пули с преградой (рис. 1.12). Движение пули внутри преграды является равнозамедленным, поэтому $(\vec{a})_x = -a$.

Уравнения движения пули в проекции на ось $0X$:

$$x = x_0 + V_0 t - at^2/2, \tag{1}$$

$$V = V_0 - at. \tag{2}$$

Так как пуля движется вдоль прямой в одном направлении, то ее координата x и пройденный путь l равны в любой момент времени, если начальная координата пули $x_0 = 0$. Тогда уравнение (1) запишется так:

$$l = V_0 t - at^2/2 . \qquad (3)$$

В конце пути l скорость пули $v = 0$, поэтому уравнение (2) перепишется в виде

$$V_0 - at = 0 . \qquad (4)$$

Решая совместно уравнения (3) и (4), находим:

$$t = 2l/V_0 ,\ a = V_0^2/2l .$$

Для нахождения скорости V_1 пули на глубине l_1 воспользуемся следующей формулой для равнозамедленного движения:

$$l_1 = \frac{V_1^2 - V_0^2}{-2a}, \text{ откуда } V_1 = \sqrt{V_0^2 - 2al_1} = V_0\sqrt{1 - l_1/l} .$$

Для глубины l_2, на которой начальная скорость пули уменьшилась в n раз, т. е. $V_2 = V_0/n$, получим:

$$l_2 = \frac{V_2^2 - V_0^2}{-2a} = l\,\frac{n^2 - 1}{n^2} .$$

Ответ: $t = 2l/V_0$; $a = V_0^2/2l$; $V_1 = \sqrt{V_0^2 - 2al_1} = V_0\sqrt{1 - l_1/l}$;
$l_2 = \dfrac{V_2^2 - V_0^2}{-2a} = l\,\dfrac{n^2 - 1}{n^2}$.

Пример 8. Тело брошено под углом α к горизонту с начальной скоростью $\vec{V}_0$. Найти: а) уравнение траектории движения тела; б) максимальную высоту подъема тела; в) время движения; г) дальность полета; д) величину и направление конечной скорости тела, если начальное и конечное положение тела находятся на одной горизонтали.

Дано:	*Решение*
α $\vec{V}_0$	Сделаем рисунок.
$\beta = ?\ y(x) = ?$ $t = ?\ h_{max} = ?$ $V_K = ?\ S = ?$	

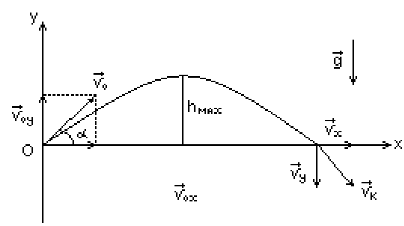


Рис. 1.13

Начало системы координат XOY свяжем с положением тела в начальный момент времени. Тогда начальные радиус-вектор и координаты его будут равны нулю ($\vec{r}_0 = 0$, $x_0 = 0$, $y_0 = 0$). Направим оси системы координат, как показано на чертеже. Поскольку векторы ускорения $\vec{g}$ и скорости $\vec{V}_0$ направлены под углом друг к другу, то движение будет происходить по криволинейной траектории.

Закон движения тела в векторной форме в этом случае имеет вид:

$$\vec{r} = \vec{V}_0 t + \frac{\vec{g}t^2}{2}. \qquad (1)$$

Представим данное движение как суперпозицию двух простых движений по осям OX и OY. Для этого разложим вектор начальной скорости $\vec{V}_0$ и ускорение $\vec{g}$ на две составляющие:

$$\vec{V}_0 = \vec{V}_{0X} + \vec{V}_{0Y}; \; \vec{g} = \vec{g}_X + \vec{g}_Y.$$

Проектируя уравнение (1) на оси OX и OY, видим, что в направлении OX тело движется **равномерно** и **прямолинейно**, так как в этом направлении проекции ускорения свободного падения $g_x = 0$.

Законом движения тела по OX будет уравнение: $x = V_{0X} t$, где $V_{0X} = V_0 \cos\alpha$ – проекция начальной скорости на ось OX.

Тогда

$$x = V_0 t \cos\alpha. \qquad (2)$$

В направлении OY тело совершает **равнопеременное движение** с начальной скоростью $\vec{V}_{0Y}$ и ускорением $\vec{g}$. Уравнение движения тела по OY будет иметь вид:

$$y = V_{0Y} t - \frac{gt^2}{2},$$

где $V_{0Y} = V_0 \sin\alpha$ – проекция начальной скорости на ось OY.

Следовательно:

$$y = V_0 t \sin\alpha - \frac{gt^2}{2}. \qquad (3)$$

А. Найдем уравнение траектории движения: $y = f(x)$.

Для этого из (2) выразим время: $t = \dfrac{x}{V_0 \cos\alpha}$ и подставим его в (3). Получим:

$$y = V_0 \sin\alpha \frac{x}{V_0 \cos\alpha} - \frac{g}{2} \frac{x^2}{V_0^2 \cos^2\alpha}. \qquad (4)$$

Окончательно: $y = x\,\mathrm{tg}\,\alpha - \dfrac{g(1+\mathrm{tg}^2\,\alpha)}{2V_0^2}x^2$, так как зависимость $y = f(x)$ – квадратичная, то *траектория движения – парабола*.

Б. До максимальной точки подъема тело совершает по OY равнозамедленное движение. Значит:

$$y_{\text{МАХ}} = V_{0Y}t_{\text{ПОД}} - \frac{gt_{\text{ПОД}}^2}{2}, \tag{5}$$

где $t_{\text{ПОД}}$ – время движения тела до $y_{\text{МАХ}}$.

Зная, что в точке $y_{\text{МАХ}} = h_{\max}$ скорость тела по $OY\,(\vec{V}_Y)$ равна нулю, найдем это время подъема:

$$V_Y = V_{0Y} - gt_{\text{ПОД}} = 0 \Rightarrow t_{\text{ПОД}} = \frac{V_0 \sin\alpha}{g}. \tag{6}$$

Подставляя (5) с (4), получим:

$$h_{\text{МАХ}} = y_{\text{МАХ}} = \frac{V_0^2 \sin^2\alpha}{2g}. \tag{7}$$

В. Полное время полета t найдем из уравнения (3). Так как конечная координата тела по OY равна нулю, то

$$V_0 t \sin\alpha - \frac{gt^2}{2} = 0 \Rightarrow t = \frac{2V_0 \sin\alpha}{g}. \tag{8}$$

Г. Под дальностью полета (S_x) следует понимать путь, пройденный телом по горизонтали за полное время движения.

Из уравнения (1)

$$S_x = \Delta x = V_0 t \cos\alpha.$$

Используя (8), получим:

$$S_x = \frac{V_0 \cos\alpha \cdot 2V_0 \sin\alpha}{g} = \frac{V_0^2 \sin 2\alpha}{g}. \tag{9}$$

Конечная скорость ($\vec{V}_K$) равна:

$$\vec{V}_K = \vec{V}_X + \vec{V}_Y. \tag{10}$$

Модуль конечной скорости найдем по теореме Пифагора:

$$V_K = \sqrt{V_X^2 + V_Y^2}, \tag{11}$$

где V_X и V_Y – проекции мгновенной скорости $\vec{V}_K$ на соответствующей оси.

Так как

$$V_X = V_{0X} = V_0 \cos\alpha \text{ и } V_Y = V_{0Y} - gt = V_0 \sin\alpha - g\frac{2V_0 \sin\alpha}{g} = -V_0 \sin\alpha,$$

то

$$V_K = \sqrt{V_0^2 \cos^2 \alpha + V_0^2 \sin^2 \alpha} = V_0. \qquad (12)$$

Д. Найти направление вектора конечной скорости – значит определить величину угла между этим вектором и горизонталью. Таким углом является угол β.

Из чертежа следует:

$$\mathrm{tg}\,\beta = \left|\frac{V_Y}{V_X}\right| = \left|\frac{V_0 \sin\alpha}{V_0 \cos\alpha}\right| = \mathrm{tg}\,\alpha\,, \ \beta = \alpha\,.$$

Ответ: А. $y = x\,\mathrm{tg}\,\alpha - \dfrac{g}{2V_0^2 \cos^2 \alpha} x^2$; Б. $h_{\mathrm{MAX}} = \dfrac{V_0^2 \sin^2 \alpha}{2g}$; В. $t = \dfrac{2V_0 \sin\alpha}{g}$; Г. $S_x = \dfrac{V_0^2}{g}\sin 2\alpha$; Д. $V_K = V_0$; $\beta = \alpha$.

Примечание. Полученные уравнения движения (1)–(3) могут быть применены и к другим частным случаям движения тела вблизи поверхности Земли.

Пример 9. Точка движется в плоскости *XOY* по закону: $x = bt$, $y = bt(1 - kt)$, где b и k – положительные константы; t – время. Найти: а) уравнение траектории точки – $y(x)$; б) скорость и ускорение точки в зависимости от времени t.

Дано:	*Решение*
$x = bt$	Закон движения материальной точки задан.
$y = bt(1 - kt)$	Необходимо решить прямую задачу кинематики,
$b, k = \mathrm{const}$	т. е. по известному закону движения определить
$b, k > 0$	параметры движения – модуль скорости и модуль
	ускорения, а также траекторию движения.
$y(x)$ – ?	Для нахождения траектории движения исклю-
$V(t)$ – ?	чим из уравнений движения, заданных коорди-
$a(t)$ – ?	натным способом, зависимость от времени.

$$\begin{cases} x = bt & (1) \\ y = bt(1 - kt) & (2) \end{cases}$$

Из уравнения (1) выразим t: $t = x/b$ и подставив в уравнение (2), получим уравнение траектории: $y = x - kx^2/b$. Так как уравнения движения заданы координатным способом, то необходимо найти проекции вектора скорости на соответствующие координатные оси: V_X и V_Y.

$$V_x = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2}; \tag{3}$$

$$V_y = \sqrt{\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}. \tag{4}$$

Модуль вектора полной скорости по определению равен:

$$V = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}. \tag{5}$$

Найдем модуль вектора полной скорости:

$$V_x = b,\ V_y = b - 2kbt \quad \text{и} \quad V = \sqrt{(V_x)^2 + (V_y)^2} = b\sqrt{1 + (1 - 2kt)^2}.$$

Теперь по определению найдем модуль вектора полного ускорения:

$$\vec{a} = \vec{a}_x + \vec{a}_y = a_x\vec{i} + a_y\vec{j},$$

$$a_x = d^2x/dt^2;\ a_y = d^2y/dt^2;\ a_x = 0;\ a_y = -2kb.$$

Движение вдоль оси y равнозамедленное.

Найдем модуль ускорения:

$$a = \sqrt{(a_x)^2 + (a_y)^2} = a_y = 2kb = \text{const}.$$

Ответ: $y = x - kx^2/b$; $V = b\sqrt{1 + (1 - 2kt)^2}$; $a = 2kb = \text{const}$.

Задания для самостоятельной аудиторной работы

1. Велосипедист проехал первую половину пути со скоростью V_0 (км/ч). Оставшуюся часть пути он половину времени двигался со скоростью V_1, а последний участок со скоростью V_2. Найти среднюю за все время движения скорость.

2. Радиус-вектор частицы с течением времени изменяется по закону: $\vec{r} = 3t^2\vec{i} + 4t^2\vec{j} + 7\vec{k}$ (м). Найти: 1) вектор перемещения и его модуль за первые 10 секунд движения; 2) вектор и модуль вектора мгновенной скорости.

3. Точка движется в плоскости XOY по закону: $x = bt$; $y = bt(1 - kt)$, где b, k – положительные константы; t – время движения. Найти: 1) уравнение траектории точки; 2) зависимость мгновенной скорости точки от времени.

4. С башни высотой $H = 25$ м горизонтально бросили камень со скоростью $V_0 = 15$ м/с. Найти: 1) время полета камня; 2) на каком расстоянии от основания башни он упадет на землю; 3) с какой скоростью он упадет на землю; 4) какой угол составит траектория камня с горизонтом в точке его падения на землю. Сопротивлением воздуха пренебречь.

5. Тело бросили со скоростью $V_0 = 20$ м/с под углом $\alpha = 30°$ к горизонту. Пренебрегая сопротивлением воздуха, определите: 1) время полета тела; 2) максимальную высоту подъема; 3) дальность полета (по горизонтали); 4) радиусы кривизны начала и вершины траектории; 5) уравнение траектории.

6. Тело, брошенное вертикально вверх, находилось на одной и той же высоте $H = 8{,}6$ м два раза с интервалом $\Delta t = 3$ с. Пренебрегая сопротивлением воздуха, вычислить начальную скорость движения брошенного тела.

7. Снаряд, выпущенный из орудия под углом $\alpha = 30°$ к горизонту, дважды был на одной и той же высоте H: спустя время $t_1 = 10$ с и $t_2 = 50$ с после выстрела. Определить начальную скорость снаряда и высоту его подъема H.

8. Зависимость пройденного телом пути от времени задаётся уравнением: $S = A - Bt + Ct^2 + Dt^3$, где $A = 6$ м; $B = 3$ м/с; $C = 2$ м/с^2; $D = 1$ м/с^3. Определить для тела в интервале времени от $t_1 = 1$ с до $t_2 = 4$ с: а) среднюю скорость; б) среднее ускорение.

9. Радиус-вектор частицы изменяется со временем по закону: $\vec{r} = 3t^2\vec{i} + 2\vec{tj} + 1\vec{k}$ (м). Найти: а) скорость $\vec{V}$ и ускорение частицы; б) модуль скорости V в момент времени $t = 1$ с; в) приближенное значение пути S, пройденного частицей за 11-ю секунду движения.

10. Частица движется со скоростью $\vec{V} = \vec{i} + 2t\vec{j} + 3t^2\vec{k}$ (м/с). Найти: а) перемещение $\vec{r}$ частицы за первые 2 секунды ее движения; б) модуль скорости в момент времени $t = 2$ с.

11. Движение материальной точки задано уравнением $S = 4t + 0{,}05t^3$ (S – в метрах, t – в секундах). Определить скорость и ускорение точки в моменты времени $t_1 = 2$ с и $t_2 = 10$ с.

12. Материальная точка движется прямолинейно, уравнение движения $S = 2 + 3t + 0{,}01t^3$ (путь в метрах, время в секундах). Каковы скорость и ускорение точки в момент времени $t_1 = 0$; $t_2 = 10$ с?

13. Зная уравнение движения материальной точки, записанное в системе СИ: $S = 2t^3 - t^2$, найти скорость и ускорение точки через 2 с после начала движения.

14. Прямолинейное движение материальной точки задано уравнением: $S = at^2 - bt + c$, где $a = 2$ м/с^2; $b = 3$ м/с; с = 4 м. Определить скорость и ускорение точки в конце третьей секунды, а также путь, пройденный точкой за пять секунд.

15. Материальная точка движется прямолинейно. Уравнение движения, записанное в системе СИ, имеет вид: $S = 4t^3 - t^2 + 5t$. Определить скорость и ускорение точки в конце третьей секунды.

16. Материальная точка движется прямолинейно с начальной скоростью 10 м/с и постоянным ускорением $a_x = 5$ м/с^2. Определить, во сколько раз путь, пройденный материальной точкой, будет отличаться от модуля ее перемещения спустя 4 с после начала отчета времени. Нарисовать графики зависимости пройденного пути и модуля перемещения этой точки от времени.

17. С балкона, находящегося на высоте 10 м от земли, вертикально вверх брошено тело с начальной скоростью 5 м/с. Определить время и скорость приземления тела. Нарисовать графики зависимости координаты тела от времени и проекции скорости тела от времени.

18. С балкона, находящегося на высоте 20 м от земли, первое тело бросили вертикально вверх со скоростью 10 м/с, второе просто уронили. Определить максимальное расстояние между телами. Нарисовать графики зависимости координаты от времени для первого и второго тела.

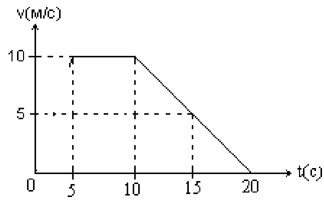
19. Материальная точка движется в плоскости XOY согласно уравнениям $x = 2 + 7t - 2t^2$ и $y = 2 - t + 0{,}2t^2$. Найти модули скорости и ускорения точки в момент времени $t = 5$ с.

20. Частица совершает прямолинейное движение вдоль оси X. В начальный момент времени координаты частицы $x_0 = 0$. Проекция скорости меняется по закону: $V_x = 10(1 - 0{,}2t)$ м/с. Получить кинематическое уравнение движения, нарисовать графики зависимости $x = f(t)$. В какие моменты времени частица будет находиться на расстоянии 10 м от начала координат.

Билеты для самоконтроля

Билет 1

1. Записать определения: а) траектории движения; б) вектора мгновенного ускорения.
2. Дан график зависимости $V = f(t)$. Построить график зависимости $S = f(t)$, определить длину пути, пройденного за первые 15 с движения.



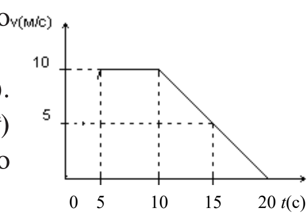
3. Кинематические уравнения движения МТ имеют вид: $x = 2t$; $y = t^3$. Определить величину модуля мгновенной скорости для момента времени $t = 1$ с.
4. Записать формулы, определяющие: а) модуль касательной составляющей ускорения; б) закон изменения пути при равномерном движении.

Билет 2

1. Записать определения: а) вектора среднего ускорения; б) базиса пространственной декартовой системы координат.
2. Зависимость пройденного МТ пути от времени задано уравнением: $S = 6 + 2t + t^2$ (м). Построить график зависимости $V = f(t)$ в интервале времени от $t = 0$ до $t = 4$ с.
3. Кинематическое уравнение движения МТ имеет вид: $\vec{r} = t^3\vec{i} + t^2\vec{j}$ (м). Определить величину модуля мгновенной скорости для момента времени $t = 1$ с.
4. Записать формулы, определяющие: а) модуль касательной составляющей ускорения; б) закон изменения пути при равномерном движении.

Билет 3

1. Записать определения: а) средней путевой скорости; б) равномерного движения.
2. Зависимость пройденного МТ пути от времени задано уравнением: $S = 6 + 2t + t^2$ (м). Найти среднюю скорость за вторую секунду движения.
3. Дан график зависимости $V = f(t)$. Построить график зависимости $S = f(t)$ и определить длину пути, пройденного за первые 10 с движения.



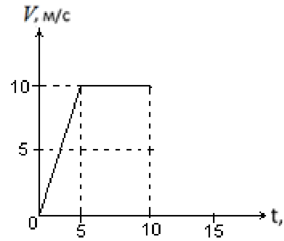
4. Записать формулы, определяющие: а) модуль вектора полного линейного ускорения при движении по криволинейной траектории; б) закон изменения пути при равноускоренном движении.

Билет 4

1. Записать определения: АТТ; вектора средней скорости.
2. Зависимость пройденного МТ пути от времени задано уравнением: $S = 6 - 3t + 2t^2$ (м). Построить график зависимости в интервале времени от $t = 0$ до $t = 3$ с.
3. Кинематическое уравнение движения МТ имеет вид: $\vec{r} = 2t^2\vec{i} + t^3\vec{j}$ (м). Определить компоненты вектора мгновенной скорости для момента времени $t = 2$ с.
4. Записать формулы, определяющие: а) модуль вектора линейной скорости при движении МТ в плоскости XOY по криволинейной траектории; б) кинематические уравнения движения МТ, заданные координатным способом.

Билет 5

1. Дан график зависимости $V = f(x)$. Построить график зависимости $a = f(t)$ и определить величины ускорения движения на каждом участке пути.



2. Радиус-вектор МТ изменяется с течением времени по закону: $\vec{r} = 4t^2\vec{i} + 3t\vec{j} + 2\vec{k}$ (м). Определить для момента времени $t = 2$ с скорость V, ускорение a и их модули. $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ – орты осей X, Y, Z.
3. Записать формулы, определяющие: а) модуль нормальной составляющей ускорения; б) закон изменения скорости при равноускоренном движении.
4. Записать определения: а) векторной ФВ; б) радиус-вектора.

Билет 6

1. Записать определения: а) механического движения; б) средней скорости неравномерного движения.
2. Кинематическое уравнение движения МТ имеет вид: $\vec{r} = t^3\vec{i} + 3t^2\vec{j}$ (м). Определить величину модуля мгновенной скорости для момента времени $t = 1$ с.
3. Кинематические уравнения движения МТ имеют вид: $x = 2t$; $y = t^2$. Получить уравнение траектории.

4. Зависимость пройденного МТ пути от времени задано уравнением: $S = 6 - 3t + 2t^2$ (м). Построить график зависимости в интервале времени от $t = 0$ до $t = 3$ с.

Билет 7

1. Записать определения: а) траектории движения; б) скалярной ФВ.
2. Начальное значение вектора скорости: $\vec{V_0} = 2\vec{i} + 1\vec{j} + 4\vec{k}$ (м/с), а конечное – $\vec{V_t} = 3\vec{i} + 4\vec{j} + 5\vec{k}$ (м/с). Найти: 1) приращение вектора скорости; 2) модуль приращения вектора скорости; 3) приращение модуля вектора скорости.
3. Кинематические уравнения движения МТ имеют вид: $x = 2t$; $y = t^2$. Получить уравнение траектории.
4. Зависимость пройденного МТ пути от времени задано уравнением: $S = 6 - 3t + 2t^2$ (м). Построить график зависимости в интервале времени от $t = 0$ до $t = 3$ с.

Домашнее задание

1. Поезд движется прямолинейно со скоростью V_0 = 180 км/ч. При экстренном торможении скорость поезда изменяется по закону $V = V_0 - \mathrm{A}t$, где $\mathrm{A} = 1$ м/с^3. Каков тормозной путь поезда? Через какое время после начала торможения он остановится?

Ответ: $t = \sqrt{\dfrac{V_0}{\alpha}} = 7\ \text{с}$; $x = V_0 t - \dfrac{\alpha \cdot t^3}{3} = 230\ \text{м}$.

2. Две материальные точки движутся согласно уравнениям: $x_1 = 4t + 8t^2 - 16t^3$ и $x_2 = 2t - 4t^2 + t^3$. В какой момент времени t ускорения этих точек будут одинаковыми? Найти скорости V_1 и V_2 точек в этот момент времени.

Ответ: $t = 0{,}235$ с; $V_1 = 5{,}1$ м/с; $V_2 = 0{,}286$ м/с.

3. Мяч брошен под углом 60° к горизонту со скоростью 20 м/с. Определить наибольшую высоту подъема и дальность полета, радиус кривизны траектории в наивысшей точке траектории.

Ответ: $H = 15$ м; $S = 35$ м; $R = 10$ м.

Практическое занятие 1.2
Кинематика вращательного движения

1. Кинематические характеристики вращательного движения: угол поворота, угловая скорость, угловое ускорение.

2. Кинематические уравнения вращательного движения.

Основные формулы

Название ФВ	Формула
Вектор мгновенной угловой скорости	$\vec{\omega} = \frac{d\vec{\varphi}}{dt}$ (1)
Вектор средней угловой скорости	$\langle\vec{\omega}\rangle = \frac{\Delta\vec{\varphi}}{\Delta t}$ (2)
Связь между линейными и угловыми характеристиками движения	$V = \omega R$ (3)
Вектор мгновенного углового ускорения	$\langle\vec{\varepsilon}\rangle = \frac{\Delta\vec{\omega}}{\Delta t}$ (4)
Вектор среднего углового ускорения	$\vec{\varepsilon} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} = \frac{d^2\vec{\varphi}}{dt^2}$ (5)
Касательная составляющая ускорения	$\vec{a}_\tau = \frac{d\vec{V}}{dt}$ (6)
Нормальная составляющая ускорения	$\vec{a}_n = \frac{V^2}{R}\vec{n}$ (7)
Модуль касательной составляющей ускорения	$a_\tau = \frac{dV}{dt}$ (8)
Модуль нормальной составляющей ускорения	$a_n = \frac{V^2}{R}$ (9)
Вектор полного ускорения	$\vec{a} = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n$ (10)
Модуль вектора полного ускорения	$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2}$ (11)
Связь между линейными и угловыми характеристиками движения	$a_\tau = \varepsilon R,$ (12) $a_n = \frac{V^2}{R} = \omega^2 R$

Название ФВ	Формула
Кинематические уравнения вращательного движения	$\omega_t = \omega_0 + \varepsilon t$ (13)
	$\varphi = \omega_0 t + \dfrac{\varepsilon t^2}{2}$ (14)
	$\varphi = 2\pi N$ (15)

Методические указания к решению задач

Кинематика вращательного движения

Всякое сложное, криволинейное движение можно представить как совокупность составляющих движений вдоль выбранных осей координат – принцип разложения движения. Часто для составляющих движений получаются простые кинематические уравнения движения. Например, свободное движение тела с ускорением $\vec{g}$ можно представить как равномерное движение по оси X и равнопеременное движение с ускорением $\vec{g}$ вдоль оси Y. Плоское движение твердого тела в общем случае можно представить как совокупность поступательного движения со скоростью $\vec{V}_0$ и вращательного движения вокруг выбранной оси с угловой скоростью $\vec{\omega}$. Скорость $\vec{V}_0$ – скорость поступательного движения, одинаковая для всех точек тела, является также скоростью поступательного движения выбранной оси вращения. Линейная скорость движения любой точки тела:

$$\vec{V} = \vec{V}_0 + \vec{V}'; \ \vec{V}' = [\vec{\omega}, \vec{r}],$$

где $\vec{V}'$ – линейная скорость точки, обусловленная вращением тела; $\vec{r}$ – расстояние от оси вращения до данной точки. Такое представление движения твердого тела можно осуществить множеством способов, отличающихся значением $\vec{V}_0$ (выбором оси вращения) и $\vec{V}'$, но соответствующих одной и той же угловой скорости $\vec{\omega}$.

При равноускоренном вращении по окружности по часовой стрелке направления векторов полного линейного ускорения и его составляющих показаны на рис. 1.14.

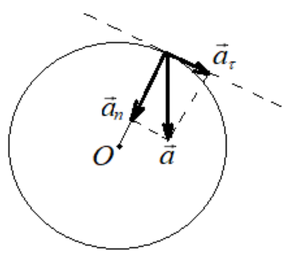


Рис. 1.14

Примеры решения задач

Пример 1. Вагон движется равномерно с постоянной скоростью 54 км/ч относительно железной дороги. Найти все кинематические характеристики точки обода колеса, имеющего радиус 30 см, если между колесом и рельсом нет проскальзывания.

Дано:
$V = 54$ км/ч
$R = 30$ см

$T = ?$
$V = ?$
$\omega = ?$
$a_{\text{цс}} = ?$

Решение

Сделаем рисунок.

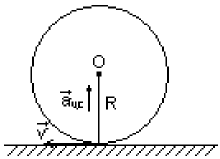


Рис. 1.15

Переходим в подвижную систему отсчета, связанную с центром колеса вагона. Скорость равномерного движения:

$$V = \frac{S}{t}. \qquad (1)$$

За время t, равное периоду, точка пройдет путь S, равный длине окружности обода колеса. Тогда формула (1) примет вид:

$$V = \frac{2\pi R}{T} \Rightarrow T = \frac{2\pi R}{V}.$$

Частота вращения: $\nu = \dfrac{1}{T}$.

Угловую скорость и центростремительное ускорение находим по формулам:

$$V = \omega R \Rightarrow \omega = \frac{V}{R}; \; a_{\text{ЦС}} = \frac{V^2}{R}.$$

Проверка размерности:

$$[T] = 1\,\frac{\text{м}\cdot\text{с}}{\text{м}} = 1\ \text{с}; \; [\omega] = 1\,\frac{\text{м}}{\text{м}\cdot\text{с}} = 1\ \text{с}^{-1}; \; [a_{\text{ЦС}}] = 1\frac{\text{м}^2}{\text{с}^2\cdot\text{м}} = 1\,\frac{\text{м}}{\text{с}^2}.$$

Расчет:

$$T = \frac{2\cdot 3{,}14\cdot 0{,}3}{15} = 0{,}125\ \text{с}; \nu = \frac{1}{0{,}125} = 8\ \text{с}^{-1}; \; \omega = \frac{15}{0{,}3} = 50\,\frac{\text{рад}}{\text{с}}; \; a_{\text{ЦС}} = \frac{15^2}{0{,}3} = 750\,\frac{\text{м}}{\text{с}^2}.$$

Ответ: период вращения точки обода колеса $T = 0{,}125$ с; частота вращения $\nu = 8$ с$^{-1}$; угловая скорость $\omega = 50$ рад/с; центростремительное ускорение $a_{\text{цс}} = 750$ м/с^2.

Пример 2. Выбрать вариант, указывающий верное направление векторов линейной скорости $\vec{V}$, угловой скорости $\vec{\omega}$ и углового ускорения $\vec{\varepsilon}$ материальной точки A при равноускоренном ее вращении по окружности против часовой стрелки.

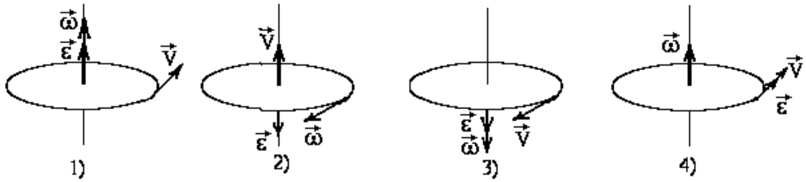


Рис. 1.16

Решение

По определению: вектор мгновенной скорости направлен по касательной к траектории движения в направлении движения. Следовательно, верное направление вектора мгновенной скорости указано в вариантах 1 и 4, рис. 1.16.

Так как вращение по окружности равноускоренное и против часовой стрелки, векторы $\vec{\omega}$ и $\vec{\varepsilon}$ аксиальные и сонаправлены, а их направление подчиняется правилу правого винта, то верное направление этих векторов правильно указано в варианте 1, рис. 1.16. Следовательно, верно указаны направления трех векторов в варианте 1, рис. 1.16.

Ответ: Вариант 1.

Пример 3. Выбрать рисунок, указывающий верное направление векторов линейной скорости $\vec{V}$, угловой скорости $\vec{\omega}$ и углового ускорения $\vec{\varepsilon}$ материальной точки A при равноускоренном ее вращении по окружности по часовой стрелке.

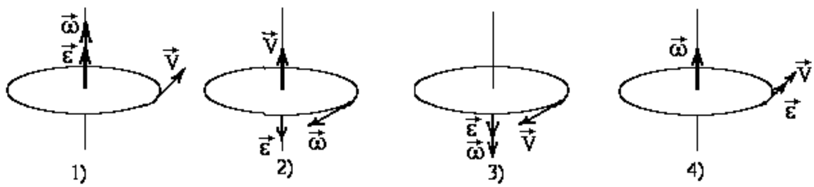


Рис. 1.17

Решение

По определению: вектор мгновенной скорости направлен по касательной к траектории движения в направлении движения. Следовательно, верное направление вектора мгновенной скорости указано на рис. 1.17.

Так как вращение по окружности равноускоренное и по часовой стрелке, векторы $\vec{\omega}$ и $\vec{\varepsilon}$ аксиальные и сонаправлены, а их направление подчиняется правилу правого винта, то верное направление этих векторов правильно указано в варианте 3, рис. 1.17. Следовательно, верно указаны направления трех векторов в варианте 3, рис. 1.17.

Ответ: Вариант 3, рис. 1.17.

Пример 4. Нормальное ускорение точки, движущейся по окружности радиусом $R = 4$ м, задается уравнением $a_n = A + Bt + Ct^2$ ($A = 1$ м/с^2, $B = 6$ м/с^3, $C = 9$ м/с^4). Определите: 1) тангенциальное ускорение точки; 2) путь, пройденный точкой за время $t_1 = 5$ с после начала движения; 3) полное ускорение для момента времени $t_2 = 1$ с.

Дано:
$R = 4$ м
$a_n = A + Bt + Ct^2$
$A = 1$ м/с^2
$B = 6$ м/с^3
$C = 9$ м/с^4
$t_1 = 5$ с
$t_2 = 1$ с

$a_\tau = ?$
$S = ?$
$a = ?$

Решение

1. По определению:

$$a_n = \frac{V^2}{R}. \quad (1)$$

Из условия задачи:

$$a_n = A + Bt + Ct^2. \quad (2)$$

Приравняв выражения (1) и (2), получим зависимость $V = f(t)$:

$$V = \sqrt{R\left(A + Bt + Ct^2\right)} = \sqrt{4\left(1 + 6t + 9t^2\right)} =$$

$$= 2(1 + 3t) = 2 + 6t. \quad (3)$$

По определению:

$$a_\tau = \frac{dV}{dt} = \frac{d}{dt}\left(2 + 6t\right). \quad (4)$$

2. По определению:

$$V = \frac{dS}{dt}. \quad (5)$$

Отсюда:

$$dS = V(t)dt = (2 + 6t)dt. \quad (6)$$

Проинтегрировав выражение (6), получим:

$$S_1 = \int_0^{t_1} V dt = \int_0^{t_1} (2 + 6t) dt = 2t_1 + 3t_1^2. \tag{7}$$

3. Найдем полное ускорение.

$$a_{\tau 2} = a_\tau,$$

$$a_{n2} = \frac{V_2^2}{R} = \frac{(2 + 6t_2)^2}{R},$$

$$a_2 = \sqrt{a_{\tau 2}^2 + a_{n2}^2} = \sqrt{a_{\tau 2}^2 + \frac{(2 + 6t_2)^4}{r^2}}.$$

Расчеты: $a_\tau = 6$ м/с^2; $S_1 = 85$ м; $a_2 = 17{,}1$ м/с^2.

Ответ: 1) $a_\tau = 6$ м/с^2; 2) $S_1 = 85$ м; 3) $a_2 = 17{,}1$ м/с^2.

Пример 5. Твердое тело начинает вращаться вокруг оси OZ с угловой скоростью, проекция которой изменяется со временем, как показано на графике (рис. 1.18).

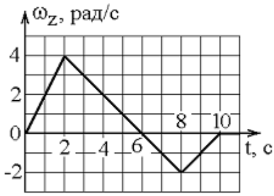


Рис. 1.18

Определить величину среднего углового перемещения (в радианах) в промежутке времени от 4 с до 8 с.

Решение

По определению: $\omega_z = \frac{d\varphi}{dt}$.

Отсюда: $d\varphi = \omega_z dt$; $\varphi = \int_{t_1}^{t_2} \omega_z$.

Используя геометрический смысл интеграла, искомый угол поворота можно найти как площадь двух треугольников. При этом нужно учесть, что, во-первых, в момент времени $t_1 = 6$ с происходит изменение направления вращения тела на противоположное, и во-вторых, площади треугольников равны. Поэтому угловое перемещение тела за рассматриваемый промежуток времени равно нулю.

Ответ: 0.

Пример 6. Угловая скорость тела изменяется по закону: $\omega = kt$. Найти закон изменения тангенса угла между векторами полного линейного ускорения и линейной скорости некоторой точки A этого тела.

Дано:	*Решение*
$\omega = kt$	Сделаем рисунок.
$\mathrm{tg}\,\alpha = f(t) = ?$	

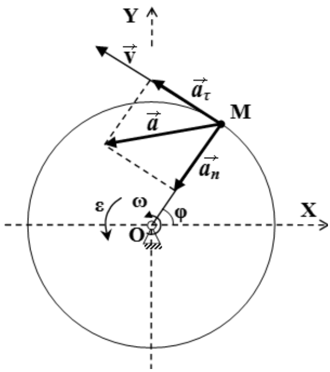


Рис. 1.19

Предположим, что тело вращается вокруг неподвижной оси, проходящей через т. О против часовой стрелки.

Направления $\vec{V}, \vec{a}_\tau, \vec{a}_n, \vec{a}$ показаны на рисунке. Интересующий нас угол $\alpha = \widehat{\vec{a}\,\vec{V}}$, а $\vec{a}_\tau \perp \vec{a}_n$, т. е. из рисунка видно, что $\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{a_n}{a_\tau}$.

Из формул связи $a_n = \omega^2 R$ и $a_\tau = \left(\frac{d\omega}{dt}\right) R$ получим:

$$\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{k^2 t^2}{k} = kt^2.$$

Ответ: $\mathrm{tg}\,\alpha = kt^2$, тангенс угла α пропорционален квадрату времени вращения.

Пример 7. Твердое тело вращается вокруг неподвижной оси по закону: $\varphi = At - 2Bt^3$, где $A = 6$ рад/с; $B = 2$ рад/с^3. Найти: 1) средние значения угловой скорости и углового ускорения за промежуток времени от $t = 0$ с до остановки; 2) угловое ускорение в момент остановки.

Дано:	*Решение*
$\varphi = At - 2Bt^3$	По условию задачи тело через некоторый проме-
$A = 6$ рад/с	жуток времени останавливается, а так как закон
$B = 2$ рад/с^3	изменения $\varphi = f(t)$ задан, то можем найти закон
$\langle\omega\rangle = ?$	изменения угловой скорости $\omega = f(t)$. Учтя, что
$\langle\varepsilon\rangle = ?$	в момент остановки $\omega = 0$, найдем время движения
$\varepsilon_{ост} = ?$	до остановки.

Зная определения <ω>, <ε>, Δφ, Δt, ω, ответим на вопросы задачи.

По определению: $\omega = \frac{d\varphi}{dt} = A - 3Bt^2$.

Тогда: $0 = A - 3Bt^3$, откуда $t_{\text{ост}} = \sqrt{\frac{A}{3B}}$ — время в момент остановки тела.

По определению: $\langle\omega\rangle = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \frac{[\varphi(t)-\varphi(0)]}{(t-0)} = \frac{\varphi(t_{\text{ост}})}{t_{\text{ост}}}$, но $\varphi(t) = At - Bt^3$.

Подставив $t_{\text{ост}} = \frac{A}{3B}$, получим: $\langle\omega\rangle = \frac{2A}{3} = 4$ рад/с^2.

По определению: $\langle\varepsilon\rangle = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{[\omega(t)-\omega(0)]}{(t)} = -3Bt$.

Модуль среднего углового ускорения равен $3Bt$.

Подставив $t_{\text{ост}}$, получим: $\langle\varepsilon\rangle = \sqrt{3AB} = 6$ рад/с^2.

По определению: $\varepsilon = \frac{d^2\varphi}{dt^2} = -6Bt$; тогда модуль углового ускорения в момент остановки равен: $|\varepsilon_{\text{ост}}| = 6Bt_{\text{ост}} = 12$ рад/с^2.

Ответ: $\langle\omega\rangle = \frac{2A}{3} = 4$ рад/с^2; $\langle\varepsilon\rangle = \sqrt{3AB} = 6$ рад/с^2; $|\varepsilon_{\text{ост}}| = 6Bt_{\text{ост}} = 12$ рад/с^2.

Задания для аудиторной самостоятельной работы

1. Точка движется по окружности радиусом R согласно закону: $S = Ct^3$, где C – положительная константа. Как меняется с течением времени угол между скоростью и ускорением точки?

2. Частица брошена в точке O под углом α к горизонту с начальной скоростью V_0. Пренебрегая сопротивлением воздуха, найти радиус кривизны траектории в точке O.

3. Точка движется по окружности с ускорением a_τ. Как меняется угол между $\vec{a}_\tau$ и $\vec{V}$ с течением времени?

4. МТ начинает двигаться по окружности радиусом $R = 0{,}10$ м с постоянным касательным ускорением $a_\tau = 0{,}4$ см/с^2. Через какой промежуток времени вектор ускорения $\vec{a}_\tau$ образует с вектором скорости углы, равные $\alpha = 60°$ и $\beta = 80°$? Какой путь за это время проходит точка?

5. Точка движется по окружности радиусом 10 см с постоянным тангенциальным ускорением a_τ. Найти нормальное ускорение a_n точки через $t = 20$ с после начала движения, если известно, что к концу пятого оборота после начала движения линейная скорость точки $V = 10$ см/с.

6. Точка движется по окружности радиусом $R = 30$ см с постоянным угловым ускорением. Найти тангенциальное ускорение a_τ точки, если известно, что за время $t = 4$ с она совершила три оборота и в конце третьего оборота ее нормальное ускорение $a_n = 2{,}7$ м/с?

7. Зависимость пройденного телом пути по окружности радиусом $R = 3$ м задаётся уравнениями: 1) $S = At^2 + Bt$, 2) $S = Bt^2 + At$, где $A = 0{,}4$ м/с; $B = 0{,}1$ м/с^2. Определить для момента времени $t = 1$ с после начала движения: а) нормальное ускорение; б) тангенциальное ускорение; в) полное ускорение.

8. Точка движется по окружности радиусом $R = 10$ см с постоянным тангенциальным ускорением a_τ. Найти нормальное ускорение a_n точки через $t = 10$ с после начала движения, если известно, что к концу пятого оборота после начала движения линейная скорость точки равна $V = 5$ см/с.

9. Колесо вращается вокруг неподвижной оси так, что угол φ его поворота зависит от времени по закону: $\varphi = \beta t^2$, где $\beta = 0{,}20$ рад/с^2. Найти полное ускорение a точки A на ободе колеса в момент $t = 2{,}5$ с, если скорость точки A в этот момент $V = 0{,}65$ м/с.

10. Твердое тело начинает вращаться вокруг неподвижной оси с угловым ускорением: $\varepsilon = At$, где $A = 2{,}0$ рад/с^3. Через сколько времени после начала вращения вектор полного ускорения произвольной точки тела будет составлять угол 60° с ее вектором линейной скорости?

11. Колесо радиусом $R = 0{,}1$ м равномерно катится без скольжения по горизонтальной плоскости со скоростью $V_0 = 2$ м/с. Найти величину и направление векторов скорости V и ускорения a для двух точек обода колеса, расположенных в данный момент времени на противоположных концах горизонтального диаметра колеса.

12. Колесо радиуса $R = 10$ см катится без скольжения по горизонтальной плоскости так, что его центр движется с постоянным ускорением $a_0 = 2{,}5$ см/с^2. Найти величину скорости V и ускорения a верхней точки колеса через $t = 2$ с после начала движения.

13. Колесо радиуса $R = 0{,}1$ м равномерно катится без скольжения по горизонтальной плоскости со скоростью 2 м/с. Определить ускорение a верхней точки колеса и радиус кривизны траектории этой точки.

14. Точка движется по окружности радиусом $R = 20$ см с постоянным тангенциальным ускорением $a_\tau = 5$ см/с^2. Через какое время после начала движения нормальное ускорение будет равно тангенциальному?

15. Диск вращается с угловым ускорением $\varepsilon = -2$ рад/с^2. Сколько оборотов сделает диск при изменении частоты вращения от $n_1 = 240$ мин$^{-1}$ до $n_2 = 90$ мин$^{-1}$? В течение какого времени это произойдет?

16. Велосипедное колесо вращается с частотой $n = 5$ с$^{-1}$. Под действием сил трения оно остановилось через интервал времени $\Delta t = 1$ мин. Определить угловое ускорение ε и число оборотов N, которое колесо сделало за это время.

17. Якорь электродвигателя, имеющий частоту вращения $n = 50$ с$^{-1}$ после выключения тока, сделав $N = 628$ оборотов, остановился. Определить модуль углового ускорения якоря.

18. Колесо автомашины вращается равноускоренно. Сделав $N = 50$ полных оборотов, оно изменило частоту вращения с $n_1 = 4$ с$^{-1}$ до $n_2 = 6$ с$^{-1}$. Определить угловое ускорение колеса.

19. Тело вращается по закону: $\omega = 2 + 0{,}5t$ (рад). Найти полное число оборотов, совершаемых телом за 20 с после начала вращения.

Билеты для самоконтроля

Билет 1

1. Записать определения: а) вектора средней угловой скорости; б) вектора мгновенного углового ускорения.
2. Выбрать зависимости, задающие равноускоренное вращение по окружности: 1) $w = w_0 + \varepsilon t$; 2) $w = w_0 - \varepsilon t$; 3) $\varphi = w_0 t + \varepsilon t^2/2$; 4) $\varphi = w_0 t - \varepsilon t^2/2$; 5) $\varphi = w_0 t$.
3. Кинематическое уравнение движения МТ имеет вид: $\vec{\varphi} = t^3\vec{i} + t^2\vec{j}$ (м). Определить величину модуля мгновенной угловой скорости для момента времени $t = 1$ с.
4. Колесо радиусом $R = 0{,}1$ м и массой 2 кг вращается так, что его угловая скорость как функция времени задана уравнением: $\omega = 5t^4 + 4t$. Найти величину модуля тангенциальной составляющей силы, действующей на колесо в момент времени $t = 1$ с.

Билет 2

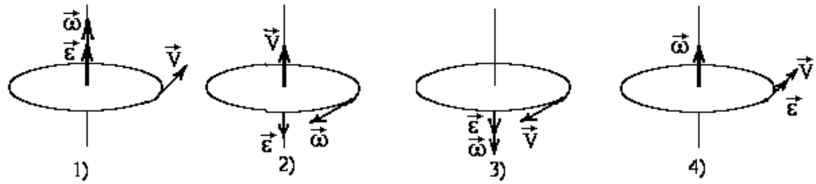
1. Записать формулы, определяющие: а) модуль касательной составляющей ускорения; б) закон изменения углового пути при равномерном движении.
2. Зависимость пройденного МТ пути от времени задано уравнением: $S = 6 + 2t + t^2$ (м). Построить график зависимости в интервале времени от $t = 0$ до $t = 4$ с.
3. Кинематическое уравнение движения МТ имеет вид: $\vec{r} = t^2\vec{i} + t^2\vec{j}$ (м). Определить величину модуля мгновенной линейной скорости для момента времени $t = 2$ с.
4. Колесо радиусом $R = 0{,}1$ м и массой 2 кг вращается так, что его угловая скорость изменяется по закону: $\omega = 5t^3 + 2t$. Определите модуль нормальной составляющей силы, действующей на колесо в момент времени $t = 3$ с.

Билет 3

1. Записать определения: а) вектора мгновенной угловой скорости; б) вращательного движения.
2. Маховик вращается равнозамедленно по ходу часовой стрелки вокруг вертикальной оси. Укажите на рисунке направления: а) угловой скорости вращения; б) углового ускорения маховика.
3. Мяч массой 100 г, летевший со скоростью 20 м/с, ударился о горизонтальную плоскость. Угол падения (угол между направлением скорости и перпендикуляром к плоскости) равен 60°. Найти приращение импульса, если удар абсолютно упругий, а угол падения равен углу отражения.
4. Запишите формулу, определяющую: а) полное число оборотов тела при вращательном движении; б) модуль нормальной составляющей ускорения при вращательном движении.

Билет 4

1. Записать определения: а) АТТ; б) вектора среднего углового ускорения.
2. Выбрать рисунок, указывающий верное направление векторов линейной скорости $\vec{V}$, угловой скорости $\vec{\omega}$ и углового ускорения $\vec{\varepsilon}$ материальной точки A при равноускоренном ее вращении по окружности против часовой стрелки:



3. Колесо вращается вокруг неподвижной оси по закону: $\varphi = bt^2$, где $b = 0{,}20$ рад/с^2. Найти полное ускорение точки, лежащей на ободе колеса, в момент времени $t = 2{,}5$ с, если линейная скорость этой точки в этот момент времени $V = 0{,}65$ м/с.
4. Записать формулы, определяющие: а) вектор полного линейного ускорения при криволинейном движении; б) закон изменения угловой скорости как функции от времени для равноускоренного вращения из состояния покоя.

Билет 5

1. Материальная точка вращается равнозамедленно по окружности радиуса R, лежащей в плоскости листа, по часовой стрелке. Показать на рисунке направления векторов линейной скорости $\vec{V}$, угловой скорости $\vec{\omega}$ и углового ускорения $\vec{\varepsilon}$ материальной точки A.
2. Колесо вращается вокруг неподвижной оси так, что угол его поворота меняется с течением времени по закону: $\varphi = bt^2$, где $b = 0{,}20$ рад/с^2. Найти угловую скорость и угловое ускорение колеса в момент времени $t = 2$ с.
3. Записать определения: а) вектора мгновенной угловой скорости; б) равномерного вращения тела.
4. Записать формулы, определяющие связь между векторами: а) $\vec{V}$ и $\vec{\omega}$; б) $\vec{a}_\tau$ и $\vec{\varepsilon}$.

Билет 6

1. Записать определения: а) вектора мгновенного углового ускорения; б) вращательного движения тела.
2. Материальная точка равноускоренно вращается по окружности радиуса R, лежащей в плоскости листа, против часовой стрелки. Показать на рисунке направления векторов линейной скорости $\vec{V}$, угловой скорости $\vec{\omega}$ и углового ускорения $\vec{\varepsilon}$ материальной точки.

3. Записать формулы, определяющие связь между модулями: а) V и ω; б) a_τ и ε.
4. Точка движется по окружности радиусом 20 см с постоянным тангенциальным ускорением 5 см/с^2. Через сколько времени после начала движения нормальное ускорение точки будет в два раза меньше тангенциального?

Билет 7

1. Какова особенность вращательного движения?
2. МТ вращается вокруг вертикальной оси равнозамедленно, по окружности радиуса R, лежащей в плоскости, перпендикулярной плоскости листа, по часовой стрелке. Покажите на рисунке направления векторов угловой скорости и углового ускорения.
3. Записать формулы, определяющие: а) вектор полного линейного ускорения при криволинейном движении; б) связь между модулями a_n и ω.
4. Сколько оборотов сделали колеса автомобиля после начала торможения до полной остановки, если в момент начала торможения автомобиль имел скорость 60 км/ч и остановился через 3 с после начала торможения? Диаметр колес $D = 0{,}7$ м. Чему равно среднее угловое ускорение колес при торможении?

Домашнее задание

1. Твердое тело вращается вокруг неподвижной оси по закону: $\varphi = at - bt^3$, где $a = 6{,}0$ рад/с; $b = 2{,}0$ рад/с^3. Найти: 1) средние значения угловой скорости и углового ускорения за промежуток времени от $t = 0$ до остановки; 2) угловое ускорение в момент остановки тела.

Ответ: $\langle\omega\rangle = 2a/3 = 4$ рад/с; $\langle\varepsilon\rangle = \sqrt{3ab} = 6$ рад/с^2.

2. Найти радиус вращающегося колеса, если известно, что линейная скорость V_1 точки, лежащей на ободе, в 2,5 раза больше линейной скорости V_2 точки, лежащей на 5 см ближе к оси колеса.

Ответ: $R = 8{,}33$ см.

3. Точка движется по окружности радиусом $R = 4$ м. Закон ее движения выражается уравнением: $S = A + Bt^2$, где $A = 8$ м; $B = 2$ м/с^2. Определить момент времени t, когда нормальное ускорение a_n точ-

ки равно 9 м/с^2. Найти скорость V, тангенциальное a_τ и полное a ускорения точки в тот же момент времени t.

Ответ: $t = 1{,}5$ с; $V = 6$ м/с; $a_\tau = 4$ м/с^2; $a = 9{,}84$ м/с^2.

4. Определить величины угловой и линейной скоростей точки поверхности Земли, обусловленные её вращением вокруг оси на широте 45°.

Ответ: $\omega = 7{,}3 \cdot 10^{-5}$ рад/с; $V = 3{,}32 \cdot 10^2$ м/с.

Практическое занятие 1.3
Динамика поступательного движения. Законы Ньютона

1. Основная задача динамики. Понятие массы, силы, импульса.
2. Законы Ньютона, их использование при решении задач.
3. Силы, рассматриваемые в механике, их природа, законы, по которым они определяются.
4. Сложение сил. Результирующая сила.
5. Центр масс. Законы движения центра масс тела.

Основные формулы

Физическая величина	Формула
Импульс материальной точки массой m, движущейся со скоростью $\vec{V}$	$\vec{p} = m\vec{V}$ (1)
Импульс системы материальных точек	$\vec{p} = \Sigma m_i \vec{V}_i$, (2) где m_i – масса i-точки; $\vec{V}_i$ – скорость i-точки
Результирующая сила $\vec{F}$, ускорение $\vec{a}$	$\vec{F} = m\vec{a}$, или $d\vec{P} = \vec{F} \cdot dt$ (3)
Импульс силы	$\vec{F} \cdot dt$ (4)
Сила гравитационного взаимодействия между двумя телами массами m_1 и m_2 (материальными точками), находящимися на расстоянии r друг от друга	$F = G\dfrac{m_1 m_2}{r^2}$ (5)
Гравитационная постоянная	$G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ м^3/(кг · с^2) (6)

Физическая величина	Формула
Вес $\vec{P}$ тела	$$\vec{P} = m(\vec{g} - \vec{a}), \quad (7)$$ где $\vec{g}$ – ускорение свободного падения; $\vec{a}$ – ускорение, с которым движется опора или подвес
Сила тяжести	$$\vec{F}_T = m\vec{g} \quad (8)$$
Ускорение свободного падения вблизи поверхности Земли	$$g = G\frac{M_з}{R^2}, \quad (9)$$ где $M_з$ – масса Земли; R – радиус Земли; $g = 9{,}81$ м/с^2
Ускорение свободного падения на некоторой высоте от поверхности Земли	$$g = G\frac{M_з}{(R+h)^2} \quad (10)$$
Сила упругости	$$F = -kx, \quad (11)$$ где k – коэффициент упругости (в случае пружины – жёсткость)
Сила трения скольжения	$$F_{тр} = \mu N, \quad (12)$$ где μ – коэффициент трения; N – сила нормального давления, с которой одно тело действует на другое
Сила сопротивления среды	$$\vec{F} = -k\vec{V}, \quad (13)$$ где k – коэффициент сопротивления, зависит от формулы и размера тела, а также вязкости среды; $\vec{V}$ – скорость тела. Формула справедлива при малых скоростях движения
Центр масс системы материальных точек (тела) определяется радиус-вектором	$$\vec{r}_c = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2 + \ldots + m_n\vec{r}_n}{m_1 + m_2 + \ldots + m_n} = \frac{\Sigma m_i\vec{V}}{\Sigma m_i} = \frac{\Sigma m_i\vec{r}_i}{M} \quad (14)$$
Ускорение центра масс системы материальных точек (тела)	$$\overrightarrow{a_C} = \frac{\sum_{i=1}^{N} m_i\vec{V}_i'}{M} \quad (15)$$

Методические указания

Основной задачей динамики является определение механического состояния системы в заданный момент времени, если известны силы, действующие на систему, и начальные условия (положение и скорости материальных точек системы (тела) в начальный момент времени). Основное уравнение динамики поступательного движения (второй закон Ньютона) позволяет определить ускорение тела как функцию времени. Далее решается обратная задача кинематики – по известному ускорению и начальным условиям определяется закон движения тела.

При использовании законов Ньютона особое внимание надо уделять анализу сил, действующих на рассматриваемое тело. При решении таких задач рисунок, как правило, определяет успех или неудачу решения, поэтому его выполнение обязательно. На рисунке расставляются все силы, действующие на тело или тела системы, с учётом их величины и направления.

Третий закон Ньютона помогает правильно выполнить эту операцию. Если тело является материальной точкой, то все действующие силы приложены к этой точке. Если тело не является материальной точкой (например, брусок на наклонный плоскости), но по условию задачи известно, что тело совершает поступательное движение, то все действующие силы можно считать приложенными к центру масс тела. Отметим, что рисунок позволяет резко сократить словесное описание решения задач.

Существуют определённые правила использования второго закона Ньютона при решении задач. Эти правила позволяют избежать многих ошибок при решении стандартных задач.

Сформулируем эти правила:

1. Сделать рисунок и расставить на нём все силы.

2. Записать второй закон Ньютона для рассматриваемого тела в векторной форме.

3. Выбрать координатные оси (при плоском движении оси *XOY*), на которые спроецировать векторное уравнение и получить систему скалярных уравнений.

4. Дополнить полученную систему уравнениями, вытекающими из условий задачи (например, кинематическими). Проверить, что-

бы число уравнений системы совпадало с числом неизвестных, и решить полученную систему уравнений.

Законы Ньютона справедливы только для инерциальных систем отсчёта. Почти во всех рассматриваемых задачах систему отсчёта, связанную с Землёй, можно считать инерциальной, пренебрегая её ускорением относительно системы неподвижных звёзд.

При решении задачи в неинерциальной системе отсчёта (иногда это бывает очень удобно делать) необходимо учитывать силы инерции $\vec{F}_{\text{ин}} = -m\vec{a}$, где $\vec{a}$ – ускорение неинерциальной системы отсчёта.

При решении задач на движение системы тел, связанных между собой, второй закон Ньютона целесообразно применять к каждому телу системы в отдельности, учитывая связь между координатными и кинематическими параметрами этих сил.

Примеры решения задач

Пример 1. На тело массой $m = 2$ кг, находящееся в начале координат и имеющее начальную скорость $\vec{V}_0 = 5\vec{i}$, действует сила $\vec{F} = 2\vec{i} + 4\vec{j}$. Определить ускорение, скорость и координаты тела через время $t = 2$ с движения из начального положения.

Решение. Поскольку начальная скорость $\vec{V}_0$ и сила $\vec{F}$, действующая на тело, лежат в плоскости (X, Y), движение тела будет плоским, положение тела будет определяться двумя координатами – x и y. Ускорение тела

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m} = \frac{2\vec{i} + 4\vec{j}}{2} = \vec{i} + 2\vec{j}$$

$$a_x = 1; \; a_y = 2$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5} \text{ м/с}^2.$$

Движение тела равноускоренное, $\vec{a} = \text{const}$.

Определим скорость тела как функцию времени:

$$\vec{V} = \vec{V}_0 + \int_0^t \vec{a} \cdot dt = 5\vec{i} + \int_0^t (\vec{i} + 2\vec{j})dt = 5\vec{i} + t \cdot \vec{i} + 2t\vec{j}.$$

В момент времени $t = 2$ с

$$\vec{V} = 5\vec{i} + 2\vec{i} + 4\vec{j} = 7\vec{i} + 4\vec{j},$$

$$|\vec{V}| = \sqrt{V_x^2 + V_y^2} = \sqrt{7^2 + 4^2} = \sqrt{49 + 16} = \sqrt{65} \text{ м/с}.$$

Определим вектор перемещения тела как функцию времени

$$\vec{r} = \int_0^t \vec{V}dt = \int_0^t (5\vec{i} + t\vec{i} + 2t\vec{j})dt = 5t\vec{i} + \frac{1}{2}t^2\vec{i} + t^2\vec{j}.$$

В момент времени $t = 2$ с

$$\vec{r} = 10\vec{i} + 2\vec{i} + 4\vec{j} = 12\vec{i} + 4\vec{j};$$

координаты тела $x = r_x = 12$ м, $y = r_y = 4$ м.

Ответ: $a = \sqrt{5}$ м/с^2; $V = \sqrt{65}$ м/с; $x = 12$ м; $y = 4$ м.

Пример 2. На наклонной плоскости находится груз массой $m_1 = 1$ кг, связанный нерастяжимой невесомой нитью, перекинутой через невесомый блок, с другим грузом массой $m_2 = 2$ кг. Первый груз скользит вверх по наклонной плоскости. Коэффициент трения $\mu = 0{,}2$, угол наклона плоскости к горизонту $\alpha = 30°$. Определить ускорение грузов, силу натяжения нити и силу давления на ось блока со стороны нити.

Решение. Сделаем рисунок и обозначим на нём силы, действующие на грузы. На первый груз действует сила тяжести $m\vec{g}$, сила нормальной реакции $\vec{N}$, сила натяжения нити $\vec{T_1}$ и сила трения $\vec{F}_{\text{Тр}}$, направленная в сторону, противоположную скорости груза. На второй груз действует сила тяжести $m_2\vec{g}$ и сила натяжения нити. Запишем уравнение второго закона Ньютона для первого и второго груза в векторной форме.

$$m_1\vec{g} + \vec{N} + \vec{F}_{\text{Тр}} + \vec{T}_1 = m_1\vec{a}_1, \; m_2\vec{g} + \vec{T}_2 = m_2\vec{a}_2. \qquad (1)$$

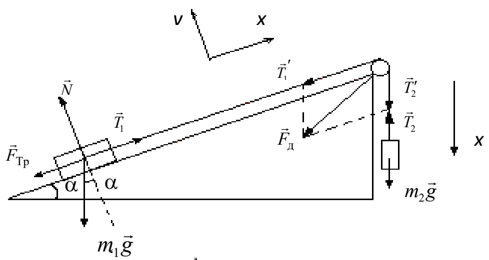


Рис. 1.20

Спроецируем уравнение (1) на выбранные оси X, Y. Ось Y_1 для первого груза направим вертикально вниз, а ось X_2 для второго груза совпадает по направлению с ускорением движения этих грузов $\vec{a}_1$ и $\vec{a}_2$.

По условию задачи блок невесом, поэтому величины сил натяжения нити тоже одинаковы:

$$\left|\vec{T}_1\right| = \left|\vec{T}_2\right| = T\ .$$

Поскольку нить не растяжима, величины этих ускорений одинаковы: $\left|\vec{a}_1\right| = \left|\vec{a}_2\right| = a$.

С учётом этого получим систему скалярных уравнений:

$OX_1: -m_1 g \cdot \sin\alpha - F_{\text{Тр}} + T = m_1 a.$

$OY: -m_1 g \cdot \cos\alpha + N = 0.$

$OX_2:\ m_2 g - T = m_2 a.$

Дополнительное уравнение, определяющее связь силы трения и силы нормальной реакции:

$$F_{\text{Тр}} = \mu \cdot N\ .$$

Решая полученную систему уравнений, найдём величины a и T:

$$-m_1 g \sin\alpha - \mu \cdot mg \cos\alpha + T = m_1 a;$$

$$m_2 g - T = m_2 a.$$

Складываем правые и левые части уравнений:

$$-m_1 g \sin\alpha - \mu \cdot mg \cos\alpha + T + m_2 g - T = a(m_1 + m_2).$$

Ускорение грузов равно:

$$a = \frac{m_2 g - m_1 g \sin\alpha - \mu \cdot m_1 g \cos\alpha}{m_1 + m_2} = g\frac{m_2 - m_1(\sin\alpha + \mu \cdot \cos\alpha)}{m_1 + m_2} = 4{,}3\ \text{м/с}^2.$$

Сила натяжения нити:

$$T = m_2 g - m_2 a = \frac{m_1 m_2 g(1 + \sin\alpha + \mu \cdot \cos\alpha)}{m_1 + m_2} = 11{,}3\ \text{Н}.$$

Сила давления $\vec{F}_{\text{д}}$ на ось блока со стороны нити является результирующей двух сил $\vec{T}_1'$ и $\vec{T}_2'$, равных по величине силе T и направленных под углом $\beta = 90^\circ - \alpha = 60^\circ$ друг к другу.

Используя правило параллелограмма, построим вектор $\vec{F}_{\text{д}}$ и найдём величину этой силы:

$$\vec{F}_{\text{д}} = \vec{T}_1' + \vec{T}_2',$$

$$F_{\text{д}} = T_1' \cdot \cos 30^\circ + T_2' \cdot \cos 30^\circ = 2T \cdot \cos 30^\circ = 2 \cdot T \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}T = 18\ \text{Н}.$$

Ответ: $a = 4{,}3$ м/с^2; $T = 11{,}3$ Н; $F_{\text{д}} = 18$ Н.

Пример 3. Вагон массой m = 20 т движется равнозамедленно, имея начальную скорость V_0 = 54 км/ч и ускорение a = –0,3 м/с^2. Какая сила торможения F действует на вагон? Через какое время t вагон остановится? Какое расстояние s вагон пройдет до остановки?

Дано:
m = 20 т
V_0 = 54 км/ч
a = –0,3 м/с^2

s = ?

Решение

Так как движение вагона равнозамедленное (a = –0,3 м/с^2), то в момент остановки вагона его скорость V_t = 0, поэтому ускорение вагона равно: $a = \frac{V_t - V_0}{t}$, следовательно, $a = -\frac{V_0}{t}$, откуда $t = -\frac{V_0}{a}$; $t = 50$ с.

По второму закону Ньютона $\vec{F} = m\vec{a}$, или в проекции на направление движения $-F = -ma$, откуда сила торможения по абсолютной величине равна F = 6 кН. Пройденный путь, с учетом, что движение равнозамедленное (a < 0), найдем по формуле

$$s = V_0 t - at^2/2;\ s = 375\ \text{м}.$$

Ответ: s = 375 м.

Пример 4. К концам шнура, перекинутого через блок, подвешен груз m_1 = 100 г и m_2 = 150 г. Найти ускорение грузов, силу натяжения нити T и показание F динамометра, на котором висит блок.

Дано:
m_1 = 100 г
m_2 = 150 г
g = 9,8 мс/с^2

a = ?
T = ?
F = ?

Решение

Сделаем рисунок.

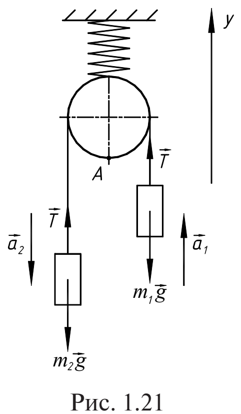


Рис. 1.21

Так как масса груза m_2 больше массы груза m_1, значит, блок будет вращаться справа налево и ускорения будут направлены, как показано на рис 1.21. Для данной системы грузов составим систему уравнений и решим её.

В проекции на выбранные оси:

$$\begin{cases} m_1 a = -m_1 g + T \\ -m_2 a = -m_2 g + T \end{cases} \text{ так как } a_1 = a_2 = a.$$

Выразим ускорение:

$$a = \frac{m_2 - m_1}{m_2 + m_1} g.$$

Определим силу натяжения нити:

$$T = \frac{2 m_2 m_1 g}{m_2 + m_1}.$$

Рассчитаем величины: a = 2 м/с^2; T = 1,2 Н.

Так как силы натяжения нити одинаковы и они нам известны, то показание динамометра равно $F = 2T \rightarrow F = 2{,}4$ Н.

Ответ: a = 2 м/с^2; T = 1,2 Н; F = 2,4 Н.

Пример 5. На тележке массой m_1 = 20 кг лежит груз массой m_2 = 5 кг. К грузу приложена сила F, сообщающая тележке с грузом ускорение a. Направленные силы образуют угол 30° с горизонтальным направлением. Каково максимальное значение этой силы, при которой груз не будет скользить по тележке? Коэффициент трения между грузом и тележкой μ = 0,2. Трением между тележкой и дорогой пренебречь. С каким ускорением будет двигаться тележка под действием силы F?

Дано:
m_1 = 20 кг
m_2 = 5 кг
α = 30°
μ = 0,2

F = ?
a = ?

Решение

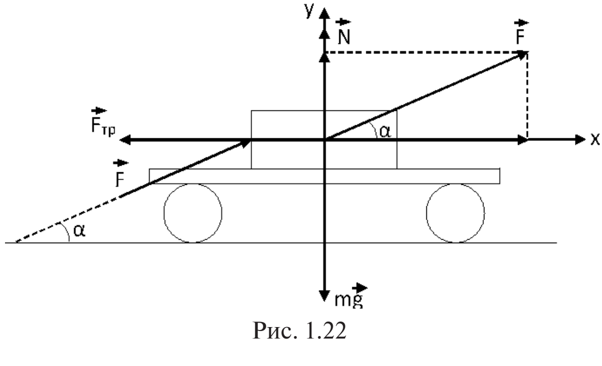


Рис. 1.22

1. Проекция на ось OX:

$$\begin{cases} -F_{\text{ТР}} + F\cos\alpha = 0 \\ N - m_2 g + F\sin\alpha = 0 \end{cases}.$$

Проекция на ось OY:

$$F_{\text{ТР}} = \mu N = \mu\left(m_2 g - F\sin\alpha\right),$$

$$-\mu m_2 g - \mu F\sin\alpha + F\cos\alpha = 0,$$

$$F\left(\mu\sin\alpha + \cos\alpha\right) = \mu m_2 g\,,$$

$$F = \frac{\mu m_2 g}{\mu\sin\alpha + \cos\alpha} = \frac{0{,}2\cdot 5\cdot 9{,}8}{0{,}2\cdot\sin 30^\circ + \cos 30^\circ} = 10\ \text{Н}.$$

2. $\left(m_1 + m_2\right)a = F\cos\alpha$,

$$a = \frac{\mu m_2 g\cos\alpha}{\left(m_1 + m_2\right)\left(\mu\sin\alpha + \cos\alpha\right)} = 0{,}35\ \text{м/с}^2.$$

Ответ: $F = \dfrac{\mu m_2 g}{\mu\sin\alpha + \cos\alpha} = \dfrac{0{,}2\cdot 5\cdot 9{,}8}{0{,}2\cdot\sin 30^\circ + \cos 30^\circ} = 10\ \text{Н}$;

$$a = \frac{\mu m_2 g\cos\alpha}{\left(m_1 + m_2\right)\left(\mu\sin\alpha + \cos\alpha\right)} = 0{,}35\ \text{м/с}^2.$$

Пример 6. Невесомый блок укреплен в вершине двух наклонных плоскостей, составляющих с горизонтом углы $\beta = 45^\circ$ и $\alpha = 30^\circ$. Гири 1 и 2 одинаковой массы $m_1 = m_2 = 1$ кг соединены нерастяжимой нитью, перекинутой через блок. Найти ускорение $\vec{a}$, с которым движутся гири, и силу натяжения нити $\vec{T}$. Трением гирь о наклонные плоскости, а также трением в блоке пренебречь.

Дано:
$m_1 = m_2 = 1$ кг
$\alpha = 30^\circ$
$\beta = 45^\circ$

$T = ?$
$a = ?$

Решение

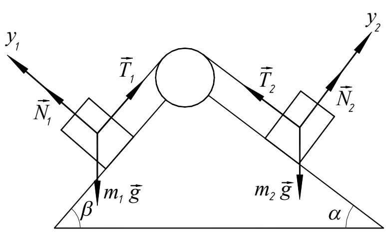


Рис. 1.23

Покажем все силы, действующие на тела 1 и 2. Записав сначала второй закон Ньютона в векторной форме для каждого из тел, а затем в проекциях на соответствующие координаты оси, получим систему двух уравнений с двумя неизвестными $\vec{a}$ и $\vec{T}$. Решив эту систему двух уравнений относительно $\vec{a}$ и $\vec{T}$, ответим на вопросы задачи. По условию задачи блок невесом, следовательно,

$$\left|\vec{T}_1\right| = \left|\vec{T}_2\right| = T. \tag{1}$$

Блок служит лишь для изменения направления движения нити. Так как нить нерастяжима, то

$$\left|\vec{a}_{1\tau}\right| = \left|\vec{a}_{2\tau}\right| = a_\tau. \tag{2}$$

Тогда второй закон Ньютона для каждой из гирь, записанный в векторной форме, имеет вид:

$$m_1\vec{a}_\tau = m_1\vec{g} + \vec{N}_1 + \vec{T}, \tag{3}$$

$$m_2\vec{a}_\tau = m_2\vec{g} + \vec{N}_2 + \vec{T}. \tag{4}$$

Будем считать, что гиря массой m_1 опускается по наклонной плоскости, а гиря массой m_2 – поднимается. Координатные оси OX_1 и OX_2 направим параллельно наклонным плоскостям в направлении движения гирь 1 и 2, а оси OY_1 и OY_2 – перпендикулярно осям OX_1 и OX_2. Тогда, в проекциях на соответствующие координатные оси, получим систему уравнений:

$$OX_1 : m_1 a = m_1 g \sin\beta - T; \tag{5}$$

$$OX_2 : m_2 a = T - m_2 g \sin\alpha. \tag{6}$$

Решив ее, получим:

$$a_\tau = \frac{m_1 g(\sin\beta - \sin\alpha)}{m_1 + m_2} = \frac{g(\sin\beta - \sin\alpha)}{2}. \tag{7}$$

$$T = \frac{mg(\sin\beta + \sin\alpha)}{2}. \tag{8}$$

Расчет дает значения: a = 1,02 м/с^2; T = 5,9 Н.

Ответ: a = 1,02 м/с^2; T = 5,9 Н.

Пример 7. Тело массой 4 кг движется по горизонтальной плоскости под действием силы 30 Н, направленной под углом 30° к горизонту. Коэффициент трения тела о плоскость 0,01. Найти ускорение тела.

Дано:

$m = 4$ кг

$F = 30$ Н

$\alpha = 30°$

$\mu = 0{,}01$

$a = ?$

Решение

Сделаем рисунок.

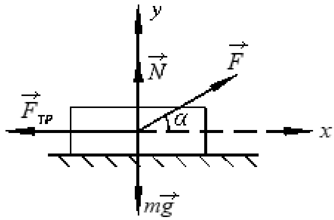


Рис. 1.24

Покажем все силы, действующие на тело: силу реакции опоры $\vec{N}$, силу тяги $\vec{F}$, силу трения $\vec{F}_{\text{ТР}}$, силу тяжести $m\vec{g}$.

Запишем второй закон Ньютона в векторной форме записи, а затем в проекциях на вертикальную и горизонтальную координатные оси, получим систему двух уравнений с двумя неизвестными: $\vec{a}$ и $\vec{N}$.

Решив систему относительно $\vec{a}$, ответим на вопрос задачи.

Запишем в векторной форме уравнение данного тела (второй закон Ньютона):

$$m\vec{g} = \vec{F}_{\text{ТР}} + \vec{N} + \vec{F}\,. \qquad (1)$$

Ось OX направим горизонтально в сторону движения тела, а ось OY – вертикально вверх. Запишем уравнение (1) в проекциях на оси OX и OY:

$$OX\!: ma = \mu N + F\cos\alpha\,, \qquad (2)$$

$$OY\!: a = F\sin\alpha + N - mg\,. \qquad (3)$$

Из уравнения (3) выразим N в виде $N = mg - F\sin\alpha$ и подставим в уравнение (2), получим:

$$ma = -\mu(mg - F\sin\alpha) + F\cos\alpha\,. \qquad (4)$$

Откуда:

$$a = \frac{(F\cos\alpha - \mu mg + \mu F\sin\alpha)}{m} = \frac{F(\cos\alpha + \mu\sin\alpha) - \mu mg}{m}\,. \qquad (5)$$

Проверка размерности: $[\alpha] = \text{м/с}^2 = \text{Н/кг} = \lfloor \text{кг}\cdot\text{м/с}^2 \rfloor/\text{кг} = \text{м/с}^2$.

Расчет: $a = \dfrac{30\cdot(0{,}87 + 0{,}01\cdot 0{,}5) - 0{,}01\cdot 4\cdot 9{,}8}{4} = 6{,}5$ м/с^2.

Ответ: $a = 6{,}5$ м/с^2.

Пример 8. Какую силу F надо приложить к вагону, стоящему на рельсах, чтобы вагон стал двигаться равноускоренно и за время t = 30 с прошел путь s = 11 м? Масса вагона m = 16 т. Во время движения на вагон действует сила трения $F_{\text{Тр}}$, равная 0,05 действующей на него силы тяжести mg.

Дано:
t = 30 с
s = 11 м
m = 16 т
$F_{\text{Тр}} = 0{,}05mg$

F = ?

Решение

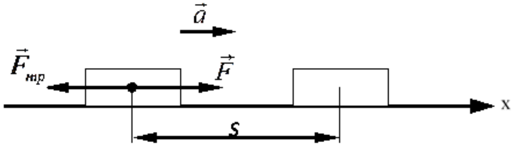


Рис. 1.25

По второму закону Ньютона: $\vec{F} + \vec{F}_{\text{Тр}} = m\vec{a}$ или в проекции на ось OX: $F - F_{\text{Тр}} = ma$, откуда $F = ma + F_{\text{Тр}}$.

Поскольку движение равноускоренное и V_0 = 0, то путь равен: $S = \frac{at^2}{2}$, откуда $a = \frac{2S}{t^2}$.

По условию задачи: $F_{\text{Тр}} = 0{,}5mg$, тогда:

$$F = ma + F_{Tp} = m\left(\frac{2S}{t^2} + 0{,}05g\right).$$

Расчет: F = 8,2 кН.

Ответ: F = 8,2 кН.

Пример 9. Тело массой m = 0,5 кг движется так, что зависимость пройденного телом пути s от времени t дается уравнением $s = A\sin\omega t$, где A = 5 см и $\omega = \pi$ рад/с. Найти силу F, действующую на тело через время $t = \left(\frac{1}{6}\right)$ с после начала движения.

Дано:
m = 0,5 кг
$s = A\sin\omega t$
A = 5 см
$\omega = \pi$ рад/с
$t = \left(\frac{1}{6}\right)$ с

F = ?

Решение

По второму закону Ньютона $F = ma$, где $a = \frac{d^2s}{dt^2}$.

Первая производная $\frac{ds}{dt} = A\omega\cos\omega t$; вторая производная

$$\frac{d^2s}{dt^2} = -A\omega^2\sin\omega t = a,$$

отсюда $F = -mA\omega^2\sin\omega t$; $F = -0{,}125$ Н.

Ответ: $F = -0{,}125$ Н.

Пример 10. Шар на нити подвешен к потолку трамвайного вагона. Вагон тормозится, и его скорость за время $t = 3$ с равномерно уменьшается от $V_1 = 18$ км/ч до $V_2 = 6$ км/ч. На какой угол отклонится при этом нить с шаром?

Дано:
$t = 3$ с
$V_1 = 18$ км/ч
$V_2 = 6$ км/ч

$\alpha = ?$

Решение

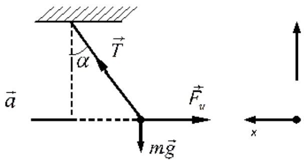


Рис. 1.26

Рассмотрим положение шара относительно системы отсчета, связанной с потолком вагона. Поскольку вагон движется с ускорением, то система является неинерциальной.

Уравнение движения в векторной форме:

$$\vec{T} + m\vec{g} + \vec{F}_и = 0, \tag{1}$$

где $F_и = -ma$, тогда уравнение (1) в проекциях на ось X:

$$T \sin\alpha = ma \tag{2}$$

и на ось Y:

$$T \cos\alpha - mg = 0. \tag{3}$$

Разделив (2) на (3), получим $\text{tg}\,\alpha = \dfrac{a}{g}$, откуда $\alpha = \text{arctg}\dfrac{a}{g}$ или учитывая, что $a = \dfrac{\Delta V}{t}$, $\alpha = \text{arctg}\dfrac{\Delta V}{gt}$. Подставляя числовые данные, получим $\alpha = 6°30'$.

Ответ: $\alpha = 6°30'$.

Пример 11. Две гири с массами $m_1 = 2$ кг и $m_2 = 1$ кг соединены нитью и перекинуты через невесомый блок. Найти ускорение a, с которым движутся гири, и силу натяжения нити T. Трением в блоке пренебречь.

Дано:
$m_1 = 2$ кг
$m_2 = 1$ кг

$a = ?$
$T = ?$

Решение

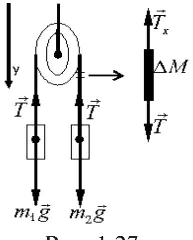


Рис. 1.27

Предположим, что нить невесома и нерастяжима. Выберем элемент нити Δm и запишем уравнение движения в проекции на ось Y: $\Delta ma = T - T_X$.

Поскольку $\Delta m = 0$, то $T_1 = T_2 = T$, т. е. сила натяжения нити во всех точках ее одинакова. Ускорения движения грузов тоже одинаковы, так как из-за нерастяжимости нити за одно и то же время грузы проходят один путь, т. е. $S_1 = \frac{a_1 t^2}{2}$; $S_2 = \frac{a_2 t^2}{2}$; $S_1 = S_2$, следовательно, $a_1 = a_2$. Но направление векторов a_1 и a_2 противоположны. Запишем второй закон Ньютона для первой и второй гири в проекциях на ось Y:

$$\begin{cases} m_1 g - T = m_1 a & (1) \\ m_2 g - T = -m_2 a & (2) \end{cases}$$

Вычтем (2) из (1):

$$a(m_1 + m_2) = g(m_1 - m_2),$$

отсюда

$$a = \frac{g(m_1 - m_2)}{m_1 + m_2}. \qquad (3)$$

Подставим (3) в (1): $\frac{m_1 g(m_1 - m_2)}{(m_1 + m_2)} = m_1 g - T$; следовательно,

$$T = m_1 g\left(1 - \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\right);\ T = m_1 g\left(\frac{m_1 + m_2 - m_1 + m_2}{m_1 + m_2}\right);$$

$$T = m_1 g\left(\frac{2m_2}{m_1 + m_2}\right) = \frac{2g m_1 m_2}{m_1 + m_2}.$$

Подставляя числовые данные, получим: $T = 13$ Н; $a = 3{,}27$ м/с^2.

Ответ: $T = 13$ Н; $a = 3{,}27$ м/с^2.

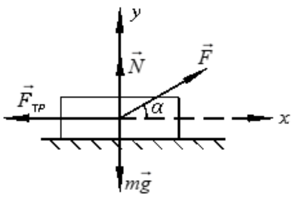
Пример 12. Канат лежит на столе так, что часть его свешивается со стола и начинает скользить тогда, когда длина свешивающийся части составляет 1/4 его длины. Найти коэффициент трения k каната о стол.

Дано:	*Решение*
$l_1 = \frac{l}{4}$	Обозначим силу тяжести, действующую на единицу длины каната, через $m_1 g$. Тогда сила тяжести свешивающейся части каната равна $\frac{m_1 g l}{4}$.
$k = ?$	

Эта сила тяжести уравновешивается силой трения $F_{тр}$, действующей на ту часть каната, которая лежит на столе: $F_{тр} = \frac{3km_1gl}{4}$. Таким образом, $\frac{m_1gl}{4} = \frac{3km_1gl}{4}$, откуда $k = 0{,}33$.

Ответ: $k = 0{,}33$.

Пример 13. На небольшое тело массой m, лежащее на гладкой горизонтальной плоскости, в момент $t_0 = 0$ начала действовать сила, зависящая от времени по закону: $F = bt$, где b – положительная константа. Направление этой силы все время составляет угол α с горизонтом. Найти: а) скорость тела в момент отрыва от плоскости; б) путь, пройденный телом к этому моменту.

Дано:	*Решение*
m_1 $F = bt$ $b = \text{const}$ $b > 0$ $t_0 = 0$ ——— $t_{отр} = ?$ $V_{x\,отр} = ?$ $S_{x\,отр} = ?$	Сделаем рисунок и покажем все силы, действующие на тело. На тело действуют три силы: $\vec{N}, m\vec{g}, \vec{F}$.  Рис. 1.28

Представим силу $\vec{F}$ в виде векторной суммы двух взаимно перпендикулярных составляющих:

$$\vec{F} = \vec{F}_x + \vec{F}_y\,. \tag{1}$$

Спроецируем силу $\vec{F}$ на координатные оси OX, OY:

$$F_{yt} = b \cdot t \cdot \sin\alpha;\; F_{xt} = b \cdot t \cdot \cos\alpha. \tag{2}$$

Рассмотрим два случая.

1. Тело будет двигаться поступательно вдоль оси ОX до тех пор, пока $F_{yt} < mg$.

Отрыв от плоскости произойдет в момент времени: $F_{yt} \geq mg$.

Тогда

$$t_{отр} = \frac{mg}{b\sin\alpha}. \tag{3}$$

2. При движении тела вдоль оси ОX тело имеет горизонтальную составляющую линейного ускорения:

$$a_x = \frac{F_{xt}}{m} = \frac{bt\cos\alpha}{m}. \tag{4}$$

По определению:

$$a_x = \frac{dV_{xt}}{dt}, \tag{5}$$

так как $a_x > 0$, то движение вдоль оси OX будет ускоренным. Получим закон изменения проекции скорости на ось OX:

$$dV_{xt} = a_x(t)dt = \frac{b\cos\alpha}{m} tdt. \tag{6}$$

Для нахождения величины иксовой компоненты скорости в момент отрыва необходимо проинтегрировать выражение (6) по времени:

$$V_{xt} = \frac{b\cos\alpha}{m}\int_0^t tdt = \frac{b\cos\alpha}{m}\ \frac{t^2}{2}. \tag{7}$$

Формула (7) выражает закон изменения проекции скорости на ось OX как функцию от времени.

Подставив в (7) значения времени отрыва, получим ответ на второй вопрос задачи:

$$V_{xt\text{отр}} = \frac{b\cos\alpha}{2m}\ \frac{m^2t^2}{2\sin^2\alpha\cdot b^2}. \tag{8}$$

3. По определению:

$$V_{xt} = \frac{dS_x}{dt}. \tag{9}$$

Отсюда

$$dS_{xt} = V_{xt}dt. \tag{10}$$

Подставив выражение (6) в выражение (10) и проинтегрировав полученную зависимость по времени, получим ответ на третий вопрос задачи:

$$S_{xt\text{отр}} = \frac{b\cos\alpha}{2m}\int t^2\,dt = \frac{b\cos\alpha}{6m}\ t^3. \tag{11}$$

Подставив в соотношение (11) значение времени отрыва, получим ответ на третий вопрос задачи:

$$S_{xt\text{отр}} = \frac{b\cos\alpha\ g^3m^3}{6m\sin^3\alpha\ b^3}. \tag{12}$$

Ответ: $t_{\text{отр}} = \dfrac{mg}{b\sin\alpha}$; $V_{xt\text{отр}} = \dfrac{b\cos\alpha}{2m}\ \dfrac{m^2t^2}{2\sin^2\alpha\cdot b^2}$;

$S_{xt\text{отр}} = \dfrac{b\cos\alpha\ \ g^3m^3}{6m\sin^3\alpha\ \cdot b^3}$.

Задания для аудиторной самостоятельной работы

1. В установке известны: масса второго тела m_2, угол наклона наклонной плоскости с горизонтом α и коэффициент трения μ между телом m_1 и наклонной плоскостью. Блок и нить невесомы, нить нерастяжима, трения в блоке нет. Считая, что в начальный момент времени оба тела неподвижны, найти отношение масс m_2/m_1, при котором тело m_2: а) начнет опускаться; б) начнет подниматься; в) будет оставаться в покое.

2. Канат лежит на столе так, что часть его свешивается со стола. Канат начинает скользить тогда, когда длина его свешивающейся части составляет 1/4 его длины. Найти коэффициент трения каната о стол.

3. Простейшая машина Атвуда, применяемая для изучения законов равноускоренного движения, представляет собой 2 груза с неравными массами m_1 и m_2 ($m_1 > m_2$), которые подвешены на лёгкой нерастяжимой нити, перекинутой через невесомый блок. Пренебрегая трением в оси блока, найти: а) ускорение грузов; б) силу натяжения нити.

4. Частица массой m движется прямолинейно с ускорением $a = 6t$ м/с^2. Определить зависимость силы, действующей на частицу, от пройденного пути $F = F(S)$, если $V(0) = 0$, $x(0) = 0$.

5. Тело массой $m = 2$ кг движется прямолинейно по закону: $S = A - Bt + Ct^2 - Dt^3$, где C = 2 м/с^2; $D = 0{,}4$ м/с^3. Найти силу, действующую на тело, в конце первой секунды движения.

6. С вершины клина, длина которого $l = 2$ м и высота $h = 1$ м, начинает скользить небольшое тело. Коэффициент трения между телом и клином $\mu = 0{,}15$. Определите ускорение тела, время спуска и скорость тела у основания клина.

7. Невесомый блок укреплён в общей вершине двух наклонных плоскостей, составляющих с горизонтом угол $\alpha = 30°$ и $\beta = 45°$. Гири одинаковой массы $m_1 = m_2 = 1$ кг соединены нитью, перекинутой через блок. Найти ускорение а, с которым движутся гири, и силу натяжения нити T. Трением гирь о наклонные плоскости и трением в блоке пренебречь.

8. На шкив ротора электродвигателя намотан невесомый шнур. К концам шнура привязали груз массой 1 кг и предоставили ему воз-

можность опускаться. Двигаясь равноускоренно, он за 5 с опустился на 2,5 м. Найти модуль силы натяжения шнура.

9. На концах нити, перекинутой через неподвижный блок, подвешены тела, каждое из которых имеет массу $m = 240$ г. Какую массу m_1 должен иметь добавочный груз, положенный на одно из тел, чтобы каждое из них прошло за время $t = 4$ с путь $S = 160$ см?

10. С вершины наклонной плоскости, длина которой $l = 10$ м и высота $h = 5$ м, начинает двигаться без начальной скорости тело. Какое время t будет продолжаться движение тела до основания наклонной плоскости, если коэффициент трения между телом и наклонной плоскостью $\mu = 0{,}2$? Какую скорость будет иметь тело у основания наклонной плоскости?

11. На небольшое тело массой m, лежащее на гладкой горизонтальной плоскости в момент $t = 0$, начала действовать сила, зависящая от времени по закону: $F = bt$, где b – положительная константа. Направление этой силы все время составляет угол α с горизонтом. Найти: а) скорость тела в момент отрыва от плоскости; б) путь, пройденный телом к этому моменту, если $m = 1$ кг, $b = 2$ Н/с, $\alpha = 30°$, $g = 9{,}81$ м/с^2.

12. Тело скользит по наклонной плоскости, составляющей с горизонтом угол 45°. Пройдя расстояние 36,4 см, тело приобретает скорость 2 м/с. Чему равен коэффициент трения тела о плоскость?

13. Ящик массой 60 кг тянут равномерно по полу с помощью веревки, прикрепленной к ящику. Веревка образует угол 30° с полом. Коэффициент трения между ящиком и полом равен 0,4. Определить силу, под действием которой движется ящик.

14. Период обращения искусственного спутника Земли равен 2 часам. Считая орбиту спутника круговой, найти, на какой высоте над поверхностью Земли движется спутник.

15. Радиус малой планеты 250 км, средняя плотность 3 г/см^3. Определить ускорение свободного падения на поверхность планеты.

16. Диск радиусом 40 см вращается вокруг вертикальной оси. На краю диска стоит кубок. Принимая коэффициент трения равным 0,4, найти, при каком числе оборотов в минуту кубок соскользнет с диска.

17. Акробат на мотоцикле описывает мертвую петлю радиусом $R = 4$ м. С какой наименьшей скоростью должен проезжать акробат верхнюю точку петли, чтобы не сорваться?

18. Невесомый блок укреплен на вершине наклонной плоскости, составляющей с горизонтом угол 30°. Гири одинаковой массой 1 кг соединены нитью, перекинутой через блок. Первая гиря висит на нити, вторая находится на плоскости. Коэффициент трения гири о плоскости равен 0,1. Найти ускорение, с которым движутся гири, и натяжение нити.

19. Три грузика массой 0,02 кг каждый связаны двумя нитями и подвешены с помощью третьей нити к потолку лифта. Лифт поднимается вверх с ускорением 0,5 м/с^2. Найти силу натяжения каждой нити.

20. Материальная точка массой 1 кг, двигаясь равномерно, описывает четверть окружности радиусом $R = 1{,}2$ м в течение 2 с. Найти изменение импульса точки.

Билеты для самоконтроля

Билет 1

1. Записать: а) определение вектора импульса; б) формулировку первого закона Ньютона.
2. Тело движется равноускоренно по шероховатой поверхности. Показать все силы, действующие на тело.
3. Записать формулу, выражающую векторную запись второго закона Ньютона.
4. Под действием постоянной силы $F = 1$ Н тело движется прямолинейно так, что зависимость пройденного телом расстояние S от времени t дается уравнением: $S = A - Bt + Ct^2$. Найти массу тела, если постоянная $C = 1$ м/с^2.

Билет 2

1. Записать формулу, определяющую: а) модуль касательной составляющей силы, действующей на тело, движущееся по окружности радиуса R со скоростью V; б) модуль вектора импульса силы.
2. Тело равномерно скользит по наклонной плоскости с углом наклона α. Показать все силы, действующие на тело.

3. Частица массой m двигалась со скоростью $\vec{V}_1$. Затем в течение интервала времени τ на нее действовала постоянная сила, в результате чего частица стала двигаться со скоростью $\vec{V}_2$. Чему равна сила, действующая на частицу?
4. Колесо радиусом $R = 0{,}1$ м и массой 2 кг вращается так, что его угловая скорость изменяется по закону: $\omega = 5t^4 + 4t$. Определите модуль нормальной составляющей силы, действующей на колесо в момент времени $t = 1$ с.

Билет 3

1. Записать формулу, определяющую: а) скорость изменения вектора импульса тела; б) модуль нормальной составляющей силы, действующей на тело, движущееся по окружности радиуса R со скоростью V.
2. Тело равноускоренно скользит по наклонной плоскости с углом наклона α. Показать все силы, действующие на тело.
3. Тело массой m движется так, что зависимость пройденного пути от времени описывается уравнением $S = A \cos (wt)$ (м), где A и w – постоянные. Записать закон изменения силы F как функции от времени.
4. Сформулируйте третий закон Ньютона.

Билет 4

1. Записать в векторной форме записи основной закон динамики поступательного движения МТ и его формулировку.
2. Простейшая машина Атвуда, применяемая для изучения законов равноускоренного движения, представляет собой 2 груза с неравными массами m_1 и m_2 ($m_1 > m_2$), которые подвешены на лёгкой нерастяжимой нити, перекинутой через невесомый блок. Пренебрегая трением в оси блока, показать силы, действующие на каждый из грузов.
3. Гирька массой $m = 50$ г, привязанная к нити длиной $l = 25$ см, описывает в горизонтальной плоскости окружность. Частота вращения гирьки $n = 2$ об/с. Найти силу натяжения нити.
4. Записать формулу, определяющую результирующую всех сил, действующих на первый груз в задании 3.

Билет 5

1. Материальная точка A вращается равнозамедленно по окружности радиуса R, лежащей в плоскости листа, по часовой стрелке. Показать на рисунке направления векторов нормальной, касательной и полной сил, действующих на эту точку.
2. Сформулировать первый закон Ньютона.
3. Уравнение движения материальной точки имеет вид: $\vec{F} = m\vec{a}$, где $\vec{F} = \mathrm{const}$. Найти закон движения точки, если известны ее начальная скорость – $\vec{V}_0$ и радиус-вектор – $\vec{r}_0$.
4. Записать формулу, определяющую связь между векторами $\vec{F}$ и $\vec{p}$.

Билет 6

1. Записать определение механической системы тел.
2. Материальная точка равноускоренно вращается по окружности радиуса R, лежащей в плоскости листа, против часовой стрелки. Показать на рисунке направления векторов нормальной, касательной и полной сил, действующих на эту точку.
3. Записать формулу, определяющую связь между модулями $\vec{V}$ и $\vec{p}$.
4. Тело массой m движется в плоскости XOY по закону: $x = A\cos(wt)$; $y = B\sin(wt)$, где A, B, w – положительные константы. Найти модуль силы, действующей на тело.

Билет 7

1. Записать определение замкнутости механической системы.
2. МТ вращается вокруг вертикальной оси равнозамедленно, по окружности радиуса R, лежащей в плоскости, перпендикулярной плоскости листа, по часовой стрелке. Покажите на рисунке направление векторов угловой скорости и углового ускорения.
3. Записать формулу, определяющую величину упругой силы.
4. Две гири массами 1 кг и 2 кг соединены нитью, перекинутой через невесомый блок. Найти ускорения, с которыми движутся гири, и натяжение нити. Трением в блоке пренебречь.

Домашнее задание

1. Под действием постоянной силы $F = 400$ Н, направленной вертикально вверх, груз массой $m = 20$ кг был поднят на высоту $H = 15$ м. Какой потенциальной энергией будет обладать поднятый груз? Какую работу A совершит сила F?

Ответ: 1) 2,94 кДж; 2) 6 кДж.

2. Невесомый блок укреплен на вершине наклонной плоскости, составляющей с горизонтом угол 30°. Грузы массами $m_1 = m_2 = 1$ кг соединены невесомой нерастяжимой нитью, перекинутой через блок. Найти ускорение, с которым движутся грузы, и силу натяжения нити. Трением в блоке и трением о наклонную плоскость пренебречь.

Ответ: $a = 2{,}45$ м/с^2, $T_1 = T_2 = 7{,}35$ Н.

3. Тело массой m, находящееся на вершине наклонной плоскости высотой H, соскальзывает вниз и, пройдя некоторый путь по горизонтальной поверхности, останавливается. Какую работу нужно совершить, чтобы втащить это тело на наклонную плоскость по тому же пути?

Ответ: $2mg$ Н.

4. Конькобежец, разогнавшись до скорости V, въезжает на ледяную горку. На какую высоту H от начального уровня он поднимется, если горку составляет угол α с горизонтом, а коэффициент трения конькобежца о лед равен μ?

Ответ: $H = \left(\frac{V^2}{2g}\right)(1 + \mu\ \cdot c\text{tg}\,\alpha)$.

Практическое занятие 1.4
Механическая работа. Законы сохранения импульса и энергии

1. Работа, мощность.

2. Кинетическая энергия тела, системы тел.

3. Силовое поле. Потенциальное поле, консервативные силы, потенциальная энергия. Работа консервативных сил, её выражение через разность потенциальной энергии.

4. Связь между консервативной силой и потенциальной энергией.

5. Механическая энергия. Закон сохранения механической энергии.

6. Импульс силы и импульс тела, связь между ними. Закон сохранения импульса.

7. Абсолютно упругий удар двух тел, абсолютно неупругий удар двух тел.

Основные формулы

Название ФВ	Формула
Импульс МТ Импульс системы МТ	$\vec{p} = m\vec{V}$ (1) $\vec{p}_{\text{сист}} = \Sigma m_i \vec{V}_i$ (2)
Закон сохранения импульса	$\sum \vec{F}_{i\,\text{внеш}} = 0;$ (3) $\vec{p}_{\text{сист}} = \text{const}$
Механическая работа	$dA = \vec{F} \cdot d\vec{r}$ (4) $A_{12} = Fr_{12}\cos\alpha$ (5) $A_{12} = \int_{r_1}^{r_2} F_r dr$ (6)
Кинетическая энергия	$W_k = m\frac{V^2}{2} = \frac{p^2}{2m}$ (7)
Потенциальная энергия	$W_p = mgh$ (8) $W_p = k\frac{x^2}{2}$ (9)
Теорема о приращении кинетической энергии	$A_{12} = W_{k2} - W_{k1},$ (10) где A_{12} – работа равнодействующей всех сил
Закон сохранения механической энергии	$\sum \vec{F}_{i\,\text{внеш}} = 0$ (11) $W = W_k + W_p = \text{const}$
Мощность	$P = dA/dt$ (12) $P = \vec{F} \cdot \vec{\vartheta}$ (13)

Название ФВ	Формула
Радиус-вектор, определяющий положение центра масс системы	$$\vec{r}_C = \frac{\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{r}_i}{\sum_{i=1}^{N} m_i} \qquad (14)$$ $$x_C = \frac{\sum_{i=1}^{N} m_i x_i}{m_{\text{сист}}};\ y_C = \frac{\sum_{i=1}^{N} m_i y_i}{m_{\text{сист}}} \qquad (15)$$
Скорость движения центра масс	$$\vec{V}_C = \frac{\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{V}_i}{\sum_{i=1}^{N} m_i} \qquad (16)$$
Связь между силой и потенциальной энергией	$$\vec{F} = -\mathrm{grad}U = -\left(\frac{\partial U}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial U}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial U}{\partial z}\vec{k}\right) \qquad (17)$$
Работа консервативных сил потенциального поля	$$A = U_1 - U_2 \qquad (18)$$
Полная механическая энергия тела	$$E = T + U \qquad (19)$$
Абсолютно упругий удар шаров (происходит с сохранением импульса системы и механической энергии системы)	$$\vec{V}_1' = \frac{2m_2\vec{V}_2 + (m_1 - m_2)\vec{V}_1}{m_1 + m_2} \qquad (20)$$ $$\vec{V}_2' = \frac{2m_1\vec{V}_1 + (m_2 - m_1)\vec{V}_2}{m_1 + m_2} \qquad (21)$$
Абсолютно неупругий удар шаров (происходит с сохранением импульса системы и превращением части механической энергии шаров в их внутреннюю энергию)	$$m_1\vec{V}_1 + m_2\vec{V}_2 = (m_1 + m_2)\vec{V} \qquad (22)$$ $$\frac{m_1V_1^2}{2} + \frac{m_2V_2^2}{2} = \frac{(m_1 + m_2)V^2}{2} + \Delta U_{\text{внутр}}, \qquad (23)$$ где $\vec{V}$ – общая скорость шаров после взаимодействия

Методические указания

Решение задач на механическое движение часто облегчается применением законов изменения и сохранения импульса и энергии системы (тела). Особенно эффективным является использование законов сохранения в тех случаях, когда действующие силы неизвестны или меняются со временем сложным образом.

Рассмотрим методику решения таких задач.

1. Необходимо провести предварительный анализ задачи, определить характер действующих на систему сил (внешние или внутренние) и выбрать метод решения (с использованием второго закона Ньютона или законов изменения и сохранения энергии и импульса).

2. Сделать рисунок, на котором обозначить начальное 1 и конечное 2 состояния системы, определить состав системы, расставить силы и определить, какие из них являются внешними по отношению к системе.

3. Если система незамкнута, т. е. на неё действуют внешние силы, то справедливы уравнения:

$$E_2 - E_1 = A_{\text{внеш}};\ \vec{p}_2 - \vec{p}_1 = \vec{F}_{\text{внеш}} \cdot \Delta t\,.$$

Если работа $A_{\text{внеш}}$ внешних сил или импульс внешних сил $\vec{F}_{\text{внеш}} \cdot \Delta t$ могут быть определены, то уравнения используются для решения задач.

4. Если система замкнута, т. е. на неё не действуют внешние силы, то справедливы законы сохранения:

$$E_1 = E_2 \text{ или } U_1 + T_1 = U_2 + T_2\,;$$

$$\vec{p}_1 = \vec{p}_2 \text{ или } \sum_{i=1}^{n} m_i \vec{V}_i = \sum_{i=1}^{n} m_i \vec{V}_i'\,.$$

Закон сохранения импульса можно использовать и в том случае, когда:

а) равнодействующая всех сил, действующих на систему (тело), равна нулю;

б) промежуток времени Δt, в течение которого на систему (тело) действуют внешние силы, мал ($\Delta t \to 0$), а равнодействующая $\vec{F}_{\text{внеш}}$ ограничена по величине (например, при взрыве, при резком столкновении).

5. Возможны случаи, когда импульс системы в целом не сохраняется, но сохраняется проекция импульса на некоторые направления (ось X), т. е. $\Delta p_x = p_{2x} - p_{1x} = F_{\text{внеш}.x} \cdot \Delta t = 0$. Это возможно, если проекция равнодействующей всех внешних сил на ось X $F_{\text{внеш}} = 0$ или промежуток времени Δt мал, а проекция $F_{\text{внеш}}$ ограничена по величине.

Следует помнить, что закон сохранения импульса — векторный закон. Записав его, необходимо спроецировать векторные уравнения на выбранные оси и далее работать со скалярными уравнениями.

Центр масс системы тел движется так, как двигалась бы материальная точка, масса которой равна массе системы, под действием равнодействующей всех внешних сил, действующих на систему (теорема о движении центра масс). Поэтому $\Delta\vec{p} = M\Delta\vec{V}_c = \vec{F}_{\text{внеш}} \cdot \Delta t$, и если система замкнута, то $\Delta\vec{V}_c = 0$, скорость $\vec{V}_c$ центра масс системы сохраняется неизменной. Использование сформулированной теоремы позволяет иногда существенно упростить решение задачи.

Для характеристики действия силы на определённом участке траектории служит физическая величина, называемая механической работой. В общем случае механическая работа рассчитывается как криволинейный интеграл по траектории движения точки приложения силы. Чтобы привести интеграл к табличному виду, необходимо выразить проекцию силы F_S на направление перемещения и дифференциал dS через одну и ту же переменную. При этом необходимо правильно определить знак в соотношении между dS и дифференциалом новой переменной.

При решении задач надо помнить, что работа консервативных сил может быть определена как разность потенциальной энергии тела ($A_{\text{конс}} = U_1 - U_2$). Если эта энергия входит в полную механическую энергию системы, то соответствующие консервативные силы уже не считаются внешними силами.

Связь между потенциальной энергией и консервативной силой ($\vec{F} = -\text{grad}U$ или $F_x = -\dfrac{\partial U}{\partial x}$; $F_y = -\dfrac{\partial U}{\partial y}$; $F_z = -\dfrac{\partial U}{\partial z}$) позволяет определять силу $\vec{F}$, если известна зависимость $U = U(x, y, z)$. Зачастую по виду этой зависимости легко определить характер движения тела в потенциальном поле. Например, тело, двигаясь в сторону возрастания потенциальной энергии, уменьшает свою скорость.

Примеры решения задач

Пример 1. Шар массой m_1, движущийся горизонтально с некоторой скоростью V_1, столкнулся с неподвижной массой m_2. Шары абсолютно упругие, удар прямой, центральный. Какую долю своей кинетической энергии первый шар передал второму?

Решение. Доля энергии, переданной первым шаром второму, выразится соотношением

$$\varepsilon = \frac{T_2}{T_1} = \frac{m_2 U_2^2}{m_1 V_1^2} = \frac{m_2}{m_1}\left(\frac{U_2}{V_1}\right)^2, \qquad (1)$$

где T_1 – кинетическая энергия 1-го шара до удара; U_2 и T_2 – скорость и кинетическая энергия второго шара после удара.

Как видно из формулы (1), для определения ε надо найти U_2. Согласно условию задачи, импульс системы двух шаров относительно горизонтального направления не изменяется и механическая энергия шаров в другие виды не переходит. Пользуясь этим, найдём:

$$m_1 V_1 = m_1 U_1 + m_2 U_2; \qquad (2)$$

$$\frac{m_1 V_1^2}{2} = \frac{m_1 U_1^2}{2} + \frac{m_2 U_2^2}{2}. \qquad (3)$$

Решим совместно уравнения (2) и (3):

$$U_2 = \frac{2 m_1 V_1}{m_1 + m_2}.$$

Подставим это выражение в формулу (1) и, сократив на V_1 и m_1, получим:

$$\varepsilon = \frac{m_2}{m_1}\left[\frac{2 m_1 V_1}{V_1(m_1 + m_2)}\right] = \frac{4 m_1 m_2}{(m_1 + m_2)^2}.$$

Ответ: $\varepsilon = \frac{m_2}{m_1}\left[\frac{2 m_1 V_1}{V_1(m_1 + m_2)}\right] = \frac{4 m_1 m_2}{(m_1 + m_2)^2}$.

Из найденного соотношения видно, что доля переданной энергии зависит только от масс сталкивающихся шаров.

Пример 2. Тележка с песком массой $M = 100$ кг движется прямолинейно и равномерно по горизонтальной плоскости со скоростью $V_0 = 3$ м/с. Шар массой $m = 20$ кг падает без начальной скорости с высоты $h = 10$ м и попадает в тележку с песком. Пренебрегая трением, определить скорость тел после взаимодействия.

Дано:	*Анализ*
$M = 100$ кг $m = 20$ кг $h = 10$ м $V_0 = 3$ м/с	
$V = ?$	

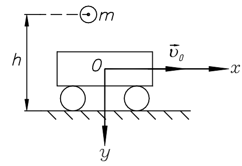


Рис. 1.29

Рассматриваемая система состоит из двух тел – тележки и шара. Эта система не является замкнутой, так как на шар действует сила тяготения Земли, никакой другой внешней силой не уравновешенная. Поэтому закон сохранения импульса не выполняется. Но сила тяготения не имеет составляющей вдоль направления движения тележки, поэтому должна сохраняться проекция импульса на это направление.

Систему отсчета в задаче свяжем с поверхностью Земли, ось *OX* направим вдоль направления движения тележки, а ось *OY* – вертикально вниз. Будем считать, что ускорение Земли мало и связанную с ее поверхностью систему отсчета можно считать инерциальной.

Записав закон сохранения импульса в проекции на ось *OX*, ответим на вопрос задачи.

Решение

Обозначим V_1 – скорость шара в момент падения; V – скорость движения системы тел (шар + тележка) после взаимодействия.

Тогда закон сохранения импульса в проекции на ось *OX* запишем в виде:

$$OX : mV_{1x} + MV_0 = (m + M)V .$$

Учитывая, что $V \perp OX$, т. е. $V_{1x} = 0$, получаем:

$$V = \frac{MV_0}{m + M} .$$

Проверка размерности: [V] = м/с = (кг · м/с)/кг = м/с.

Расчет: $V = \dfrac{100 \cdot 3}{120} = 2{,}5$ м/с.

Из решения видно, что искомая скорость не зависит от высоты падения шара.

Ответ: $V = 2{,}5$ м/с.

Пример 3. На спокойной воде пруда перпендикулярно берегу и носом к нему стоит лодка массой M и длиной L. На корме стоит человек массой m. На какое расстояние s удалится лодка от берега, если человек перейдет с кормы на нос лодки? Силами трения и сопротивления пренебречь.

Решение

Систему «человек – лодка» относительно горизонтального направления можно рассматривать как замкнутую. Согласно следствию из закона сохранения импульса, внутренние силы замкнутой системы тел не могут изменить положение центра масс системы. Применяя это следствие к системе «человек – лодка», можно считать, что при перемещении человека по лодке центр масс системы не изменит своего положения, т. е. останется на прежнем расстоянии от берега.

Пусть центр масс системы «человек – лодка» находится на вертикали,проходящей в начальный момент через точку C_1 лодки (рис. 1.30), а после перемещения лодки – через другую ее точку C_2. Так как эта вертикаль неподвижна относительно берега, то искомое перемещение s лодки относительно берега равно перемещению лодки относительно вертикали.

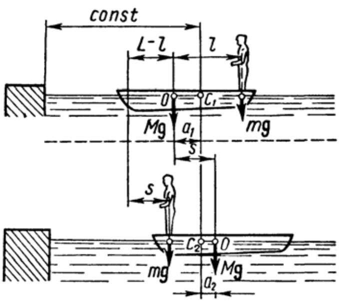


Рис. 1.30

А это последнее легко определить по перемещению центра масс O лодки. Как видно из рис. 1.30, в начальный момент точка O находится на расстоянии a_1 слева от вертикали, а после перехода человека – на расстоянии a_2 справа от вертикали. Следовательно, искомое перемещение лодки

$$s = a_1 + a_2. \qquad (1)$$

Для определения a_1 и a_2 воспользуемся тем, что результирующий момент сил, действующих на систему относительно горизонтальной оси, перпендикулярной продольной оси лодки, равен нулю.

Для точки C_1 имеем: $Mga_1 = mg(l - a_1)$.

Поэтому: $a_1 = \dfrac{ml}{M + m}$.

После перемещения лодки для точки C_2: $Mga_2 = mg(L - a_2 - l)$, откуда $a_2 = \dfrac{m(L-l)}{M+m}$.

Подставив полученные выражения для a_1 и a_2 в (1), найдем:

$$s = \frac{m}{M+m}l + \frac{m}{M+m}(L-l) = \frac{m}{M+m}L.$$

Ответ: $s = \dfrac{m}{M+m}L.$

Пример 4. Пуля массой m = 15 г, летящая с горизонтальной скоростью V = 0,5 км/с, попадает в баллистический маятник M = 6 кг и застревает в нем. Определите высоту h, на которую поднимется маятник, откачнувшись после удара.

Дано:
m = 15 г = $15 \cdot 10^{-3}$ кг
V = 0,5 км/с = 500 м/с
M = 6 кг

h = ?

Решение

Сделаем рисунок.

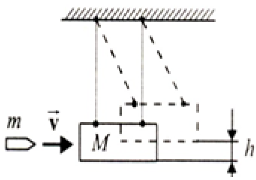


Рис. 1.31

Рассматриваемая система состоит из двух тел: пули и баллистического маятника. Эта система не является замкнутой, так как на пулю действует сила тяготения Земли, никакой другой внешней силой не уравновешенная. Но сила тяжести не имеет составляющей, направленной вдоль оси OX, следовательно, должна сохраняться проекция вектора импульса на ось OX.

$$mV = (m+M)u, \; u = \frac{mV}{m+M}, \; \frac{(m+M)u^2}{2} = (m+M)gh,$$

$$h = \frac{u^2}{2g} = \frac{(mV)^2}{2g(m+M)^2}.$$

Ответ: h = 7,9 см.

Пример 5. Пуля массой m = 15 г, летящая с горизонтальной скоростью V = 200 м/с, попадает в баллистический маятник длиной l = 1 м и массой M = 1,5 кг и застревает в нем. Определите угол отклонения φ маятника.

Дано:

$m = 15$ г $= 15 \cdot 10^{-3}$ кг

$l = 1$ м

$M = 1{,}5$ кг

$\varphi = ?$

Решение

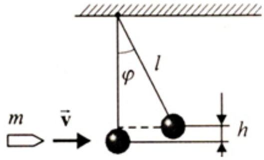


Рис. 1.32

Введем обозначения: m, V – масса и скорость пули до удара, U – скорость системы «пуля – баллистический маятник» после удара. Система «пуля – баллистический маятник» замкнута, и для нее выполняются законы сохранения импульса и энергии. Запишем их.

$$mV = (m + M)u,$$

$$u = \frac{mV}{m + M},$$

$$\frac{(m + M)u^2}{2} = (m + M)gh,$$

$$h = \frac{u^2}{2g} = \frac{(mV)^2}{2g(m + M)^2},$$

$$\cos\varphi = \frac{l - h}{l} = 1 - \frac{h}{l},$$

$$\cos\varphi = 1 - \frac{(mV)^2}{2gl(m + M)^2},$$

$$\varphi = \arccos\left[1 - \frac{(mV)^2}{2gl(m + M)^2}\right].$$

Ответ: $\varphi = 37°$.

Пример 6. Человек массой $m = 60$ кг, бегущий со скоростью $V_1 = 8$ км/ч, догоняет тележку массой $m_2 = 80$ кг, движущуюся со скоростью $V_2 = 2{,}9$ км/ч, и вскакивает в нее. С какой скоростью U будет двигаться тележка? С какой скоростью U^1 будет двигаться тележка, если человек бежал ей навстречу?

Дано:

$m = 60$ кг

$V_1 = 8$ км/ч

$m_2 = 80$ кг

$V_2 = 2{,}9$ км/ч

U, $U^1 = ?$

Решение

Система «человек – тележка» замкнута в проекции на горизонтальную ось.

А. Человек догоняет тележку. По закону сохранения импульса $m_1V_1 + m_2V_2 = (m_1 + m_2)U^1$, откуда

$$U = \frac{m_1 V_1 + m_2 V_2}{m_1 + m_2}; \ U = 5{,}14 \text{ км/ч}.$$

Б. Человек бежит навстречу тележке. По закону сохранения импульса $m_1V_1 - m_2V_2 = (m_1 + m_2)U^1$, откуда

$$U^1 = \frac{m_1 V_1 - m_2 V_2}{m_1 + m_2}; \ U^1 = 1{,}71 \text{ км/ч}.$$

Ответ: $U = 5{,}14$ км/ч, $U^1 = 1{,}71$ км/ч.

Пример 7. Снаряд массой $m = 100$ кг, летящий горизонтально вдоль железнодорожного пути со скоростью $V_1 = 800$ км/ч, попадает в вагон с песком, масса $m = 10$ т, и застревает в нем. Какую скорость U получит вагон, если: а) вагон стоит неподвижно; б) вагон движется со скоростью $V_2 = 36$ км/ч в том же направлении, что и снаряд; в) вагон движется со скоростью $V_2 = 36$ км/ч в направлении против движения снаряда?

Дано:	*Решение*
$m = 100$ кг $V_1 = 800$ км/ч $m = 10$ т $V_2 = 36$ км/ч	а) будем считать удар абсолютно неупругим, тогда в проекции на горизонтальную ось по закону сохранения импульса $m_1V_1 = (m_1 + m_2)U$, откуда $U = \frac{m_1 V_1}{m_1 + m_2}$; $U \approx 5$ м/с;
$U = ?$	

б) $m_1V_1 + m_2V_2 = (m_1 + m_2)U$, следовательно, $U = \frac{m_1 V_1 + m_2 V_2}{m_1 + m_2}$; $U = 15$ м/с;

в) $m_1V_1 - m_2V_2 = (m_1 + m_2)U$, следовательно, $U = \frac{m_1 V_1 - m_2 V_2}{m_1 + m_2}$; $U = -5$ м/с, т. е. вагон продолжает двигаться в том же направлении, но с меньшей скоростью.

Ответ: а) $U \approx 5$ м/с; б) $U = 15$ м/с; в) $U = -5$ м/с.

Задачи для самостоятельного решения

1. Насос выбрасывает струю воды диаметром $d = 2$ см со скоростью $V = 20$ м/с. Найти мощность N, развиваемую насосом.

2. Подвешенный на нити шарик массой $m = 200$ г отклоняют на угол $\alpha = 45°$. Определите силу напряжения нити в момент прохождения шариком положения равновесия.

3. Пуля массой $m = 12$ г, летящая с горизонтальной скоростью $V = 0{,}6$ км/с, попадает в мешок с песком массой $M = 10$ кг, висящий на длинной нити, и застревает в нём. Определите: 1) высоту, на которую поднимается мешок, отклонившись после удара; 2) долю кинетической энергии, израсходованной на пробивание песка.

4. Два шарика массами $m_1 = 9$ кг и $m_2 = 12$ кг подвешены на нитях длиной $l = 1{,}5$ м. Первоначально шары соприкасаются между собой, затем меньший шар отклонили на угол $\alpha = 30°$ и отпустили. Считая удар неупругим, определите высоту h, на которую поднимутся оба шара после удара.

5. Орудие, жестко закрепленное на железнодорожной платформе, производит выстрел вдоль полотна железной дороги под углом 30° к линии горизонта. Определить скорость отката платформы, если снаряд вылетает со скоростью 480 м/с. Масса платформы с орудием и снарядами 18 т, масса снаряда 60 кг.

6. Конькобежец, стоя на коньках на льду, бросает камень массой 2,5 кг под углом 30° к горизонту со скоростью 10 м/с. Какова начальная скорость движения конькобежца, если его масса 60 кг. Перемещением конькобежца во время броска пренебречь.

7. Материальная точка массой 2 кг двигалась под действием некоторой силы согласно уравнению $x = A + Bt + Ct^2 + Dt^3$, где $A = 10$ м; $B = -2$ м/с; $C = 1$ м/с^2; $D = -0{,}2$ м/с^3. Найти мощность, затрачиваемую на движение точки в моменты времени $t_1 = 2$ с и $t_2 = 5$ с.

8. Тело массой $m = 1$ кг начинает двигаться под действием силы $\vec{F} = 2t\vec{i} + 3t^2\vec{j}$, где $\vec{i}$ и $\vec{j}$ – соответственно единичные векторы координатных осей OX и OY. Определите мощность $N(t)$, развиваемую силой в момент времени $t = 2$ с.

9. Какая работа должна быть совершена при поднятии с земли материалов для постройки цилиндрической дымоходной трубы высотой 40 м, наружным диаметром 3,0 м и внутренним диаметром 2,0 м? Плотность материала принять равной $\rho = 2{,}8 \cdot 10^3$ кг/м^3.

10. Льдина площадью поперечного сечения 1 м^2 и высотой $H = 0{,}4$ м плавает в воде. Какую работу надо совершить, чтобы полностью погрузить льдину в воду? Плотность воды $\rho = 10^3$ кг/м^3, плотность льда $\rho = 900$ кг/м^3.

11. Груз массой $m = 0{,}5$ кг, привязанный к резиновому шнуру длиной $l = 9{,}5$ см, отклоняют на угол 90° и отпускают. Найти длину резинового шнура в момент прохождения грузом положения равновесия. Жесткость шнура $k = 1$ кН/м.

12. Конькобежец, стоя на льду, бросил вперед камень массой $m = 5$ кг и покатился назад со скоростью $V = 1$ м/с. Масса конькобежца $m_k = 60$ кг. Определить работу, совершенную конькобежцем при бросании камня.

13. В деревянный шар массой $M = 8$ кг, подвешенный на нити длиной $L = 1{,}8$ м, попадает горизонтально летящая пуля массой $m = 4$ г. С какой скоростью летела пуля, если нить с шаром и застрявшей в нем пулей отклонилась от вертикали на угол 3°? Размером шара пренебречь. Удар пули считать прямым, центральным.

14. Пуля ударила в ящик с песком, подвешенный на шнурах, и застряла в нем. При этом шнуры отклонились на угол 20°. Определить скорость пули, если масса ее равна $m = 9$ г, масса ящика с песком $M = 2$ кг и длина каждого шнура $L = 2{,}4$ м.

15. Упругий шарик ударился о стенку со скоростью $V = 1$ м/с и отскочил от нее без потери скорости. До удара и после удара шарик двигался перпендикулярно стене. Масса шарика равна $m = 100$ г. Определить импульс, полученный стенкой.

16. Вычислить работу A, совершаемую при равноускоренном подъеме груза массой $m = 100$ кг на высоту $h = 4$ м за время $t = 2$ с.

17. Найти работу подъема груза по наклонной плоскости длиной $L = 2$ м, если масса груза равна $M = 100$ кг, угол наклона наклонной плоскости $\alpha = 30°$, коэффициент трения $\mu = 0{,}1$ и груз движется с ускорением $a = 0{,}1$ м/с^2.

18. Вычислить работу A на пути $S = 12$ м, совершенную равномерно возрастающей силой, если начальное значение силы $F_0 = 10$ Н, а конечное $F_t = 46$ Н.

19. Под действием постоянной силы F вагонетка прошла путь $S = 5$ м и приобрела скорость $V = 2$ м/с. Определить работу этой силы, если масса вагонетки равна $M = 400$ кг, а коэффициент трения $\mu = 0{,}01$.

Билеты для самоконтроля

Билет 1

1. Записать определения: а) вектора импульса тела; б) вектора импульса силы.
2. Сформулировать: а) закон сохранения механической энергии; б) определение механической мощности.
3. Записать формулу, определяющую: а) механическую работу силы $\vec{F}$; б) кинетическую энергию тела.
4. Камень брошен под углом 60° к горизонту. Кинетическая энергия камня в начальный момент времени равна 20 Дж. Определить кинетическую и потенциальную энергию камня в высшей точке траектории.

Билет 2

1. Записать определения: а) замкнутой механической системы; б) вектора импульса силы.
2. Записать формулу, определяющую: а) скорость изменения импульса механической системы; б) величину потенциальной энергии тела.
3. Найти мгновенную мощность силы тяжести в конце первой секунды падения тела массой m. Сопротивлением воздуха пренебречь.
4. Потенциальная энергия частицы в некотором силовом поле задана функцией $U = -x^2 - y^2 + z^2$. Найти работу потенциальной силы (в Дж) по перемещению частицы из точки B (1, 1, 1) в точку C (2, 2, 2).

Билет 3

1. Записать определение: а) радиуса-вектора $\vec{r}_C$, характеризующего положение центра масс системы МТ; б) вектора импульса силы.
2. Мяч массой m = 100 г, летевший со скоростью V = 20 м/с, ударился о горизонтальную плоскость. Угол падения (угол между направлением скорости и перпендикуляром к плоскости) равен 60°. Найти приращение импульса, если удар абсолютно упругий, а угол падения равен углу отражения.
3. Запишите формулу, определяющую: а) величину полной механической энергии; б) связь между проекцией силы на ось X и величиной потенциальной энергии.

4. Потенциальная энергия частицы в некотором силовом поле задана функцией $U = x^2 + y^2 + z^2$. Найти работу потенциальной силы (в Дж) по перемещению частицы из точки B (1, 1, 1) в точку C (2, 2, 2).

Билет 4

1. С формулировать: а) теорему о приращении кинетической энергии; б) закон сохранения импульса для замкнутой системы.
2. Записать определения: а) импульса силы; б) вектора скорости движения центра масс системы МТ.
3. Тело массой m движется на плоскости XOY по закону: $x = A\cos\omega t$; $y = D\sin\omega t$ (м), где A, D, ω – положительные константы. Определить модуль силы, действующей на тело.
4. Записать формулу, определяющую: а) элементарную механическую работу; б) связь работы и мощности.

Билет 5

1. Материальная точка вращается равнозамедленно по окружности радиуса R, лежащей в плоскости листа, по часовой стрелке. Показать на рисунке направления векторов мгновенного импульса и нормальной составляющей силы для материальной точки A, лежащей на окружности.
2. Записать формулы, определяющие связь между: а) кинетической энергией и импульсом тела; б) $\vec{F}_\tau$ и $\vec{a}_\tau$.
3. Записать определения: а) вектора импульса тела; б) механической работы.
4. Частица массой m под действием некоторой силы движется по закону $\vec{r} = Ct^2\vec{i} + Bt\vec{j}$ (м). Найти работу этой силы за интервал времени τ после начала ее действия.

Билет 6

1. Записать определения: а) вектора ускорения движения центра масс системы МТ; б) механической системы тел.
2. Материальная точка равноускоренно вращается по окружности радиуса R, лежащей в плоскости листа, против часовой стрелки. Показать на рисунке направления векторов касательной составляющей силы и вектора мгновенного импульса для материальной точки A, лежащей на окружности.

3. Записать формулы, определяющие связь между модулями: а) F_n и ω; б) F_τ и a_τ.
4. Конькобежец, стоя на коньках на льду, бросает камень массой m = 2,5 кг под углом 30° к горизонту со скоростью V = 10 м/с. Какова начальная скорость движения конькобежца, если его масса M = 60 кг. Перемещением конькобежца во время броска пренебречь.

Домашнее задание

1. Шар массой m_1 = 6 кг налетает на другой, покоящийся шар массой m_2 = 4 кг. Импульс первого шара равен p_1 = 5 кг · м/с. Удар шара прямой неупругий. Определить непосредственно после удара: 1) импульсы первого и второго шара; 2) кинетические энергии первого и второго шара.

Ответ: p_1' = 3 кг · м/с; p_2' = 2 кг · м/с; T_1' = 0,75 Дж; T_2' = 0,5 Дж.

2. В баллистический маятник M = 5 кг попала пуля массой m = 10 г и застряла в нем. Найти скорость пули, если маятник, отклонившись после удара, поднялся на высоту h = 10 см.

Ответ: V = 701 м/с.

3. Два маленьких шарика массой 10 г в каждом скреплены тонким невесомым стержнем длиной 20 см. Определить момент инерции системы относительно оси, перпендикулярной стержню и проходящей через центр масс.

Ответ: $2 \cdot 10^{-4}$ кг · м^2.

4. Сколько времени будет скатываться без скольжения обруч с наклонной плоскости высотой h = 10 см и длиной L = 2 м?

Ответ: 4,04 с.

Практическое занятие 1.5
Динамика вращательного движения

1. Момент силы, импульса относительно точки и оси.
2. Момент инерции тела.
3. Основной закон динамики вращательного движения.
4. Закон сохранения момента импульса тела.
5. Кинетическая энергия вращательного и плоского движения.
6. Работа и мощность при вращательном движении.

Основные формулы

Название ФВ	Формула
Момент инерции МТ	$J = m_i r_i^2$ (1)
Момент инерции системы МТ	$J_{\text{сист}} = \Sigma m_i r_i^2$ (2)
Момент инерции сплошного твердого тела	$J = \int_V \rho(V)dV$ (3)
Теорема Штейнера	$J_O = J_C + m(OC)^2$ (4)
Момент силы относительно точки O	$\vec{M} = \left[\vec{r}, \vec{F}\right]$ (5)
Момент силы относительно оси z	$M_z = F_\tau l$, (6) где l – плечо касательной силы
Момент импульса относительно точки O	$L = \left[\vec{r}, \vec{p}\right]$ (7)
Момент импульса относительно оси OZ	$L_z = p_\tau l$, (8) где l – плечо импульса
Уравнение моментов (векторная форма записи)	$\dfrac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}$ (9)
Основной закон динамики вращательного движения в проекциях на ось OZ	$M_z = J_z \cdot \varepsilon_z$ (10)
Закон сохранения момента импульса в проекциях на ось OZ	Если $\sum \vec{F}_{i\ \text{внеш}} = 0$, $L_{z\ \text{сист}} = \text{const}$, (11) $J_{\tau 1}\omega_{z1} = J_{z2}\omega_{z2}$ (12)

Название ФВ	Формула
Радиус-вектор, определяющий положение центра масс системы	$\vec{r}_C = \dfrac{\sum\limits_{i=1}^{N} m_i \vec{r}_i}{\sum\limits_{i=1}^{N} m_i};$ (13) $x_C = \dfrac{\sum\limits_{i=1}^{N} m_i x_i}{m_{\text{сист}}}; y_C = \dfrac{\sum\limits_{i=1}^{N} m_i y_i}{m_{\text{сист}}}$ (14)
Скорость движения центра масс	$\vec{\vartheta}_C = \dfrac{\sum\limits_{i=1}^{N} m_i \vec{\vartheta}_i}{\sum\limits_{i=1}^{N} m_i}$ (15)
Кинетическая энергия вращательного движения	$W_k = J_z \dfrac{\omega_z^2}{2}$ (16)
Кинетическая энергия плоского движения	$W_k = \dfrac{m\vartheta_C^2}{2} + J_C \dfrac{\omega_z^2}{2}$ (17)
Элементарная работа постоянного момента силы при вращательном движении	$dA = M_z \cdot d\varphi,$ (18) где $d\varphi$ – угол поворота тела
Мгновенная мощность, развиваемая при вращательном движении	$P = \dfrac{dA}{dt} = M_z \cdot \omega_z$ (19)

Моменты инерции тел правильной формы

Тело	Положение оси вращения	Момент инерции
Однородный тонкий стержень массой m и длиной l	Проходит через центр масс стержня	$J_{\text{ст}C} = \dfrac{1}{12} ml^2$
Однородный тонкий стержень массой m и длиной l	Проходит через конец стержня, перпендикулярно ему	$J_{\text{ст}O} = \dfrac{1}{3} ml^2$
Тонкий обруч (кольцо или труба) радиусом R, массой m, распределенной по ободу	Проходит через центр масс обруча перпендикулярно плоскости обруча	$J_{\text{обр}C} = mR^2$

Тело	Положение оси вращения	Момент инерции
Круглый однородный диск (цилиндр) радиусом R, массой m	Проходит через центр масс диска перпендикулярно плоскости диска	$J_{\text{диска}\,C} = \frac{1}{2}mR^2$
Однородный шар радиусом R, массой m	Проходит через центр шара	$J_{\text{шара}\,C} = \frac{2}{5}mR^2$

Методические указания

Методология решения задач динамики вращательного движения во многом сходна с методологией динамики поступательного движения. Мерой инертности тела при вращательном движении является момент инерции J, мерой силового воздействия – момент силы $\vec{M}$, движение вращающегося тела определяется угловым ускорением $\vec{\varepsilon}$. Связь между этими величинами устанавливается основным уравнением динамики вращательного движения: $\vec{M}_z = J_z\vec{\varepsilon}$, роль которого аналогично роли второго закона Ньютона в динамике поступательного движения.

Соотношение между кинематическими и динамическими величинами, характеризующими поступательное и вращательное движение, похожи, что облегчает их запоминание.

В динамике вращательного движения тоже используются два основных метода решения задач – силовой, с использованием основного уравнения, и метод с использованием законов сохранения (закон сохранения импульса и закон сохранения энергии). Часто в состав системы входят тела, совершающие только вращательное движение, и тела, совершающие поступательное движение. Для первых записывается уравнение динамики вращательного движения, для вторых – уравнение динамики поступательного движения (второй закон Ньютона). Важно правильно определить силы, действующие на тела системы, моменты этих сил, определить соотношения между кинематическими характеристиками поступательного и вращательного движения частей системы.

При использовании законов сохранения следует обращать внимание на возможность их применения. Для сплошного тела плоское движение можно представить как совокупность поступательного движения и вращения вокруг воображаемой оси, проходящей через центр масс. Для центра масс записывается второй закон Ньютона $\sum \vec{F}_i = m\vec{a}_c$, для выбранной оси вращения записывается уравнение $\sum \vec{M}_{zi} = J_z\vec{\varepsilon}$. Следует помнить, что при сложном плоском движении кинетическая энергия тела складывается из кинетической энергии поступательного движения $T_{\text{пост}} = \frac{mV_c^2}{2}$ и кинетической энергии вращательного движения $T_{\text{вращ}} = \frac{J_z\omega^2}{2}$.

Примеры решения задач

Пример 1. Автомобиль движется по выпуклому мосту, имеющему форму дуги окружности радиусом 40 м. Какое максимальное ускорение в горизонтальном направлении может развить автомобиль в высшей точке моста, если его скорость в этой точке равна 50,4 км/м? Коэффициент трения колёс автомобиля о мост равен 0,57.

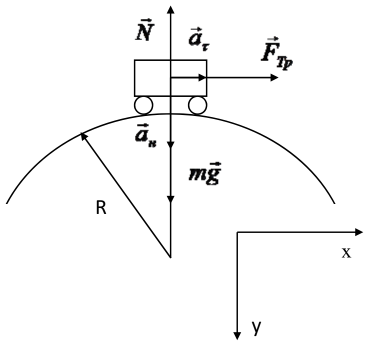


Рис. 1.33

Решение

Силы, действующие на автомобиль, показаны на рис. 1.33. Со стороны Земли на него действует сила тяжести $m\vec{g}$, со стороны моста – сила нормальной реакции $\vec{N}$ и сила трения $\vec{F}_{\text{Тр}}$. Обратите внимание на направление силы трения. При вращении ведущих колёс покрышка отталкивается от поверхности дороги, действуя на неё в сторону, противоположную движению машины.

По третьему закону Ньютона поверхность дороги действует на автомобиль в направлении движения. Для автомобиля движущей силой является сила трения сцепления (трения покоя), действующая на него со стороны полотна дороги.

Распространённой ошибкой является представление о том, что сила трения, действующая на колёса автомобиля, препятствует движению и направлена против движения. Препятствует движению сила сопротивления, обусловленная сопротивлением среды (воздуха), и сила трения качения, действующая на колёса автомобиля. При равномерном движении автомобиля сила тяги (сила трения, действующая на ведущие колёса) уравновешивается результирующей силой сопротивления. В нашем случае силой сопротивления пренебрегаем. Воспользуемся вторым законом Ньютона:

$$\vec{N} + m\vec{g} + \vec{F}_{\text{Тр}} = m\vec{a}\,, \tag{1}$$

где $\vec{a} = \vec{a}_{\text{н}} + \vec{a}_{\tau}$ – полное ускорение автомобиля, которое складывается из нормального ускорения $\vec{a}_{\text{н}}$ и тангенциального ускорения $\vec{a}_{\tau}$.

По условию задачи ускорение является максимальным, поэтому колёса находятся на грани пробуксовки и сила трения (напомним, сила трения покоя) имеет максимальное значение:

$$F_{\text{Тр}} = \mu \cdot N\,. \tag{2}$$

Спроецируем уравнение (1) на выбранные оси *X*, *Y*.

$$\text{Ось } X\text{: } F_{\text{Тр}} = ma_x = ma_{\tau}\,. \tag{3}$$

$$\text{Ось } Y\text{: } mg - N = ma_y = ma_{\text{н}} = m\frac{V^2}{R}\,. \tag{4}$$

Решая систему уравнений (2), (3), (4), получим:

$$a_{\tau} = \frac{F_{\text{Тр}}}{m} = \frac{\mu N}{m} = \frac{\mu\left(mg - m\dfrac{V^2}{R}\right)}{m} = \mu \cdot \left(g - \frac{V^2}{R}\right) = 2{,}8 \text{ м/с}^2.$$

Ответ: $a_{\tau} = \mu \cdot \left(g - \dfrac{V^2}{R}\right) = 2{,}8 \text{ м/с}^2$.

Пример 2. Через блок в виде сплошного диска, имеющего массу m = 80 г, перекинута тонкая гибкая нить, к концам которой подвешены грузы с массами m_1 = 100 г и m_2 = 200 г. Определить ускорение, с которым будут двигаться грузы, если их предоставить самим себе. Трением и массой нити пренебречь.

Решение

Сделаем рисунок. Рассмотрим силы, действующие на каждый груз и на блок в отдельности (рис. 1.34). На каждый груз действуют две силы: сила тяжести и сила

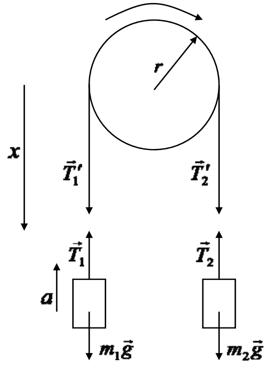


Рис 1.34

упругости (сила натяжения нити). Пусть система скрепленных тел движется слева направо. Направим ось OX вертикально вниз и напишем для каждого груза уравнение движения (второй закон Ньютона) в проекциях на эту ось.

Для первого груза:

$$T_1 - m_1 g = m_1 a, \tag{1}$$

для второго груза:

$$m_2 g - T_2 = m_2 a. \tag{2}$$

Под действием моментов сил $\vec{T'}_1$ и $\vec{T'}_2$ относительно оси OZ, перпендикулярной плоскости чертежа направленной за чертеж, блок приобретает угловое ускорение ε. Запишем основной закон динамики вращательного движения:

$$T'_2 R - T'_1 R = J_z \varepsilon, \tag{3}$$

где $\varepsilon = a/R$; $J_z = \frac{mR^2}{2}$ – момент инерции блока (сплошного диска) относительно оси OZ.

Согласно третьему закону Ньютона, с учетом невесомости нити $T_1' = T_1$, $T_2' = T_2$. Воспользовавшись этим, подставим в уравнение (3) вместо T_1' и T_2' выражения T_1 и T_2, получив их предварительно из уравнений (1) и (2):

$$(m_2 g - m_1 a)R - (m_1 g + m_1 a)R = \frac{mR^2}{2R} a.$$

После сокращения на R и перегруппировки членов найдем величину линейного ускорения движения системы скрепленных тел:

$$a = g \frac{m_2 - m_1}{m_2 + m_1 + \frac{m}{2}}. \tag{4}$$

Формула (4) позволяет массы m_1, m_2 и m выразить в граммах, как они заданы в условии задачи, а ускорение – в единицах СИ. После подстановки числовых значений в формулу (4) получим:

$$a = \frac{(200 - 100)\text{ г}}{(200 + 100 + 80/2)\text{ г}} \cdot 9{,}81 \text{ м/с}^2 = 2{,}88 \text{ м/с}^2.$$

Ответ: $a = 2{,}88$ м/с^2.

Пример 3. Маховик в виде сплошного диска радиусом $R = 0{,}2$ м и массой $m = 50$ кг раскручен до частоты вращения $n_1 = 480$ мин$^{-1}$ и предоставлен сам себе. Под действием сил трения маховик остановился через $t = 50$ с. Найти момент M сил трения.

Решение

Для решения задачи воспользуемся основным уравнением динамики вращательного движения в проекциях на ось OZ:

$$dL_Z = M_Z dt, \tag{1}$$

где dL_Z – изменение проекции на ось OZ момента импульса маховика, вращающегося относительно оси OZ, совпадающей с геометрической осью маховика, за интервал времени dt; M_Z – момент внешних сил (в данном случае момент сил трения), действующих на маховик относительно оси OZ.

Момент сил трения можно считать не изменяющимся с течением времени ($M_Z = \text{const}$), поэтому интегрирование уравнения (1) приводит к выражению

$$\Delta L_Z = M_Z \Delta t. \tag{2}$$

При вращении твердого тела относительно неподвижной оси изменение проекции момента импульса

$$\Delta L_Z = J_Z \Delta\omega, \tag{3}$$

где J_Z – момент инерции маховика относительно оси Z; $\Delta\omega$ – изменение угловой скорости маховика.

Приравняв правые части равенств (2) и (3), получим $M_Z \Delta t = J_Z \Delta\omega$, откуда

$$M_Z = J_Z \frac{\Delta\omega}{\Delta t}. \tag{4}$$

Момент инерции маховика в виде сплошного диска определяется по формуле

$$J_Z = \frac{1}{2} m R^2.$$

Изменение угловой скорости $\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1$ выразим через конечную n_2 и начальную n_1 частоты вращения, пользуясь соотношением $\omega = 2\pi n$:

$$\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1 = 2\pi n_2 - 2\pi n_1 = 2\pi(n_2 - n_1).$$

Подставив в формулу (4) выражения J_Z и $\Delta\omega$, получим:

$$M_Z = \pi m R^2 (n_2 - n_1) / \Delta t. \qquad (5)$$

Проверим, дает ли расчетная формула единицу момента силы (Н · м). Для этого в правую часть формулы вместо символов величин подставим их единицы:

$$\frac{[m][R^2][n]}{[t]} = \frac{1\,\text{кг} \cdot 1\,\text{м}^2 \cdot 1\,\text{с}^{-1}}{1\,\text{с}} = 1\,\text{кг} \cdot \text{м} \cdot \text{с}^{-2} \cdot 1\,\text{м} = 1\,\text{Н} \cdot \text{м}.$$

Подставим в (5) числовые значения величин и произведем вычисления, учитывая, что

$$n_1 = 480\,\text{мин}^{-1} = 480/60\,\text{с}^{-1} = 8\,\text{с}^{-1}:$$

$$M_Z = \frac{3{,}14 \cdot 50 \cdot (0{,}2)^2 \cdot (0-8)}{50}\,\text{Н} \cdot \text{м} = -1\,\text{Н} \cdot \text{м}.$$

Ответ: $M_Z = -1$ Н · м, а знак минус показывает, что момент сил трения оказывает на маховик тормозящее действие.

Пример 4. Стержень длиной $l = 1{,}5$ м и массой $M = 10$ кг может вращаться вокруг неподвижной оси, проходящей через верхний конец стержня. В середину стержня ударяет пуля массой $m = 10$ г, летящая в горизонтальном направлении со скоростью $V_0 = 500$ м/с, и застревает в стержне. На какой угол φ отклонится стержень после удара?

Сделаем рисунок.

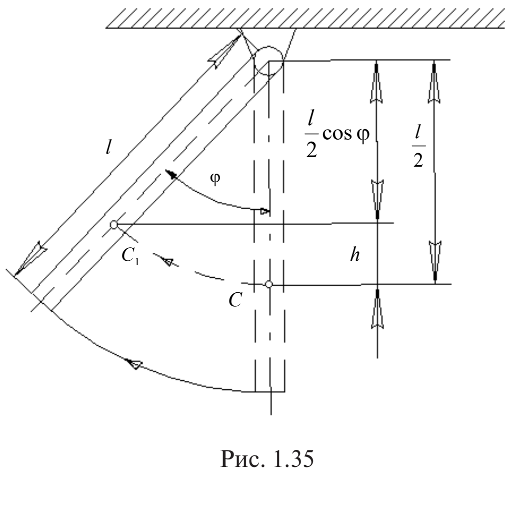


Рис. 1.35

Решение

Удар пули следует рассматривать как неупругий: после удара и пуля, и соответствующая точка стержня будут двигаться с одинаковыми скоростями (рис. 1.35).

Рассмотрим подробнее явления, происходящие при ударе. Сначала пуля, ударившись о стержень, за ничтожно малый промежуток времени приводит его в движение с некоторой угловой скоростью ω и сообщает ему некоторую кинетическую энергию:

$$T = \frac{J\omega^2}{2}, \tag{1}$$

где J – момент инерции стержня относительно оси вращения.

Затем стержень поворачивается на некоторый угол, причём центр тяжести его поднимается на высоту

$$h = \frac{l}{2}(1 - \cos\varphi).$$

В отклонённом положении стержень будет обладать потенциальной энергией:

$$\Pi = Mg\frac{l}{2}(1 - \cos\varphi). \tag{2}$$

Потенциальная энергия получена за счёт кинетической энергии и равна ей по закону сохранения энергии.

Приняв правые части равенств (1) и (2), получим:

$$Mg\frac{l}{2}(1 - \cos\varphi) = \frac{J\omega^2}{2}.$$

Отсюда

$$\cos\omega = 1 - \frac{J\omega^2}{Mgl}.$$

Если в эту формулу подставить выражение для момента инерции стержня

$$J = \frac{Ml^2}{3},$$

то она примет вид:

$$\cos\omega = 1 - \frac{l\omega^2}{3g}. \tag{3}$$

Чтобы из выражения (3) найти ω, необходимо предварительно определить числовое значение ω. В момент удара на пулю и на стержень действуют силы тяжести, линии действия которых проходят через ось вращения и направлены вертикально вниз.

Моменты этих сил относительно оси вращения равны нулю. Поэтому при ударе пули о стержень будет справедлив закон сохранения момента импульса.

В начальный момент удара угловая скорость стержня $\omega_0 = 0$, и поэтому момент импульса стержня $L_{01} = J\omega_0 = 0$.

Пуля коснулась стержня, имея линейную скорость V_0, и начала углубляться в стержень, сообщая ему угловое ускорение и участвуя во вращении стержня вокруг (около) оси.

Начальный момент импульса пули:

$$L_{02} = mV_0 r,$$

где r – расстояние точки попадания от оси вращения.

В конечный момент удара стержень имел угловую скорость ω, а пуля – линейную скорость V, равную линейной скорости точек стержня, находящихся на расстоянии r от оси вращения.

Так как $V = \omega \cdot r$, то конечный момент импульса пули равен:

$$L_2 = mVr = mr^2\omega.$$

Применив закон сохранения импульса, мы запишем уравнение

$$mV_0 r = J\omega + mr^2\omega,$$

откуда

$$\omega = \frac{mV_0 r}{J + mr^2},$$

где J – момент инерции системы «стержень – пуля». Отсюда получаем:

$$\omega = \frac{mV_0 r}{\frac{Ml^2}{3} + mr^2}, \tag{4}$$

так как $J = \frac{Ml^2}{3}$.

Подставив числовые значения в уравнение (4), найдём

$$\omega = \frac{0{,}01 \cdot 500 \cdot 0{,}75}{\frac{1}{3} \cdot 10(1{,}5)^2 + 0{,}01 \cdot (0{,}75)^2}\ \text{рад/с} = 0{,}5\ \text{рад/с}.$$

Подставив числовые значения l и ω в выражение (3), получаем:

$$\cos\omega = 1 - \frac{1{,}5 \cdot (0{,}5)^2}{3 \cdot 9{,}81} = 0{,}987,$$

$$\omega = 9^\circ 20'.$$

Ответ: $\omega = 9^\circ 20'$.

Пример 5. Вычислить момент инерции проволочного равностороннего треугольника со стороной $a = 10$ см относительно: 1) оси, лежащей в плоскости треугольника и проходящей через его вершину, параллельную стороне, противоположной этой вершине (рис. 1.36, *а*); 2) оси, совпадающей с одной из сторон треугольника (рис. 1.36, *б*). Масса треугольника $m = 12$ г и равномерно распределена по длине проволоки.

Дано:
$a = 10$ см $= 0{,}1$ м
$m = 12$ г $= 12 \cdot 10^{-3}$кг

$J_1 = ?$
$J_2 = ?$

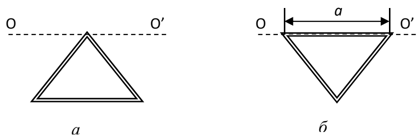


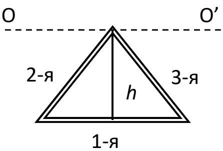
Рис. 1.36

Решение

Каждая из сторон проволочного треугольника – стержень (тонкий однородный) длиной *а*. И весь треугольник состоит из 3-х однородных тонких стержней, масса каждой стороны $m/3$. По свойству аддитивности

$$J = J_{\text{1-й стороны}} + J_{\text{2-й стороны}} + J_{\text{3-й стороны}}. \tag{1}$$

Для случая 1 (рис 1.36, *а*):



Пронумеруем стороны треугольника. Для 1-й стороны: вся масса этой стороны удалена на расстояние h:

$$h = \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{3}}{2}. \tag{2}$$

Момент инерции для 1-й стороны треугольника равен:

$$J_{\text{1-й}} = \frac{1}{3} m h^2 = \frac{3ma^2}{3 \cdot 4} = \frac{ma^2}{4}. \tag{3}$$

2 и 3-я стороны треугольника расположены под углом 30° к направлению, перпендикулярному оси вращения OO’.

Тогда вся масса каждой из этих сторон будет сосредоточена на стержне длиной h, который вращается вокруг оси OO’, не проходящей через центр масс этих стержней.

По теореме Штейнера:

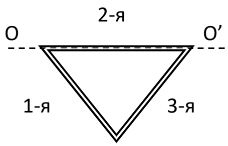
$$J_{2\text{-й}} = J_{3\text{-й}} = \frac{1}{3}\cdot\frac{m}{3}\cdot h^2 = \frac{mh^2}{9} = \frac{m}{9}\cdot\frac{3a^2}{4} = \frac{ma^2}{12}. \qquad (4)$$

Подставив (4) и (3) в (1), получим:

$$J = \frac{ma^2}{4} + \frac{ma^2}{12} = \frac{5ma^2}{12}.$$

Расчёт: $\dfrac{5\cdot 12\cdot 10^{-3}\cdot 10^{-2}}{12} = 5\cdot 10^{-5}$ кг · м^2.

Для случая 2 (рис. 1.36, *б*):



Пронумеруем стороны. Момент инерции 2-й стороны треугольника относительно оси, проходящей через её ось симметрии, равен 0.

А моменты инерции сторон 1-й и 3-й равны по величине друг другу и, как и в первом случае, определяются соотношением:

$$J_{1\text{-й}} = J_{3\text{-й}} = \frac{1}{3}\cdot\frac{m}{3}\cdot h^2 = \frac{ma^2}{12}.$$

Тогда $J = 2J_{1\text{-й}} = \dfrac{2ma^2}{12} = \dfrac{ma^2}{6} = \dfrac{12\cdot 10^{-3}\cdot 10^{-2}}{6} = 2\cdot 10^{-5}$ кг · м^2.

Проверка единиц измерения: $[J]$ = кг · м^2.

Ответ: 1) $J = 5\cdot 10^{-5}$ кг · м^2; 2) $J = 2\cdot 10^{-5}$ кг · м^2.

Пример 6. В однородном диске массой m = 1 кг и радиусом R = 30 см вырезано круглое отверстие диаметром d = 20 см, центр которого находится на расстоянии l = 15 см от оси диска (рис. 1.37). Найти момент инерции J полученного тела относительно оси, проходящей перпендикулярно плоскости диска через его центр.

Дано:	*Решение*
$R = 30$ см $= 0{,}3$ м	Сделаем рисунок.
$m = 1$ кг	
$d = 20$ см $= 0{,}2$ м	
$l = 15$ см $= 0{,}15$ м	
$J = ?$	

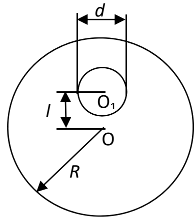


Рис. 1.37

Так как у диска вырезано отверстие, то по свойству аддитивности результирующий момент инерции будет равен:

$$J = J_1 - J_2, \tag{1}$$

где J_1 – момент инерции цилиндра без отверстия; J_2 – момент инерции цилиндра, вырезанного из большого цилиндра.

Момент инерции сплошного цилиндра радиуса R относительно оси OZ равен:

$$J_1 = \frac{m_1 R^2}{2}. \tag{2}$$

Малый цилиндр диаметром d совершает вращение относительно оси, не проходящей через центр масс. Его момент инерции определяется по теореме Штейнера:

$$J_2 = \frac{m_2 d^2}{8} + m_2 (OO_1) = \frac{m_2 d^2}{8} + m_2 l^2. \tag{3}$$

Так как диск однородный, то m_1 – масса большого сплошного диска равна:

$$m_1 = \rho \pi R^2 h, \tag{4}$$

где ρ – плотность материала диска; h – высота диска, а

$$m_2 = \rho \pi \frac{d^2}{4} h. \tag{5}$$

Найдём

$$\frac{m_2}{m_1} = \frac{d^2}{4R^2}. \tag{6}$$

Тогда

$$m_2 = m_1 \frac{d^2}{4R^2}. \tag{7}$$

Подставляя (7) в (3), получаем:

$$J_2 = \frac{m_1 d^2}{4R^2}\left(\frac{d^2}{8} + l^2\right). \qquad (8)$$

Результирующий момент инерции равен:

$$J = J_1 - J_2 = \frac{m_1 R^2}{2} - \frac{m_1 d^2}{4R^2}\left(\frac{d^2}{8} + l^2\right).$$

Проверка единиц измерения: [J] = кг · м^2.

Расчёт: J = 0,025 – 0,003055 = 0,0419 кг · м^2.

Ответ: J = 0,0419 кг · м^2.

Пример 7. Горизонтальная платформа массой M вращается вокруг вертикальной оси, проходящей через центр платформы, делая n_1 оборотов в секунду. Человек массой m стоит при этом на краю платформы. С какой скоростью начнёт вращаться платформа, если человек перейдёт от края платформы к её центру? Считать платформу круглым однородным диском, а человека — точечной массой.

Дано:	*Решение*
M	По закону сохранения момента импульса
m	$$I_1\omega_1 = I_2\omega_2, \qquad (1)$$
n_1	где I_1, I_2 — моменты инерции системы в начальном
ω_z = ?	и конечном состояниях; ω_1, ω_2 — угловые скорости начального и конечного состояния.

Тогда

$$\omega_2 = \frac{I_1\omega_1}{I_2}. \qquad (2)$$

Определим I_1, I_2, ω_1. Так как система состоит из двух тел — платформы и человека, то: $I_1 = I_{\text{пл1}} + I_{\text{чел1}}$; $I_2 = I_{\text{пл2}} + I_{\text{чел2}}$.

По условию задачи в первом состоянии человек как точечная масса находится на краю платформы. Пусть R — радиус платформы, тогда $I_1 = I_{\text{пл}} + mR^2$; $I_{\text{пл}} = \frac{MR^2}{2}$ (так как платформа — круглый однородный диск).

Во втором состоянии человек (как точечная масса) находится в центре платформы и $I_{\text{чел2}} = 0$, тогда $I_2 = \frac{MR^2}{2}$. По определению $\omega_1 = 2\pi n_1$ подставив значения в формулу (2), получим:

$$\omega_2 = \frac{\left(\frac{MR^2}{2} + mR^2\right)2\pi n_1}{\frac{MR^2}{2}} = \frac{\left(\frac{M}{2} + m\right)4\pi n_1}{M}.$$

Проверка: [ω] = рад/с = (кг · рад/с)/кг = рад/с.

Ответ: $\omega_2 = \frac{\left(\frac{M}{2} + m\right)4\pi n_1}{M}$ рад/с.

Пример 8. Вывести формулу для расчёта момента инерции ротора относительно оси СС, проходящей через центр масс, если высота ротора h, внутренний диаметр d_1, внешний d_2, а плотность материала, из которого изготовлен ротор, равна ρ.

Дано:
$d_1 = 2R_1$
$d_2 = 2R_2$
h
ρ

$I_{CC} = ?$

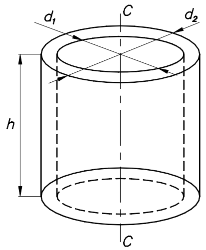


Рис. 1.38

Решение

По определению

$$I = \int \rho r^2 dV. \quad (1)$$

Выберем в качестве dV тонкостенный цилиндр радиусом r, высотой h и толщиной стенки dr. Весь материал этого цилиндра лежит на расстоянии r от оси CC, а его объём

$$dV = 2\pi \cdot r \cdot dr \cdot h. \quad (2)$$

Весь объём ротора можно заполнить такими цилиндрами, изменяя их радиусы в диапазоне от R_1 до R_2 (рис. 1.38). Тогда искомый момент инерции можно найти, подставив (2) в (1) и интегрируя в пределах от R_1 до R_2:

$$I_{CC} = \int_{R_1}^{R_2} \rho r^2 2\pi \cdot r \cdot h \cdot dr = 2\pi \cdot \rho \cdot h \int_{R_1}^{R_2} r^3 \cdot dr, \text{ так как } \rho = \text{const}.$$

Вычисляя интеграл, получаем:

$$I_{CC} = \left.\frac{2\pi \cdot h \cdot \rho \cdot r^4}{4}\right|_{R_1}^{R_2} = \frac{\pi \cdot h \cdot \rho}{2}\left(R_2^4 - R_1^4\right) = \frac{\pi \cdot h \cdot \rho}{32}(d_2^4 - d_1^4).$$

Проверка: [I] = кг · м^2 = м · (кг/м^3) · м^4 = кг · м^2.

Ответ: $I_{CC} = \frac{\pi \cdot h \cdot \rho}{32}(d_2^4 - d_1^4)$.

Пример 9. Выведите формулу для момента инерции сплошного шара радиусом R и массой m относительно оси, проходящей через центр масс шара.

Дано:	*Решение*
m	Сделаем рисунок.
R	Разобьем шар на кольцевые
$J = ?$	сегменты. Введем обозначения:
	R – радиус шара, r – радиус

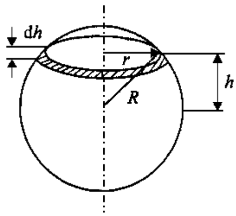


Рис. 1.39

кольцевого сегмента, h – расстояние от центра шара до кольцевого сегмента, dh – высота кольцевого сегмента (рис. 1.39).

$$r^2 = R^2 - h^2 \text{ (по теореме Пифагора).} \qquad (1)$$

Элементарный момент инерции кольцевого сегмента равен:

$$dJ = \frac{mr^2}{2} = \frac{\rho\pi r^2 dh r^2}{2} = \frac{\rho\pi r^4}{2} dh. \qquad (2)$$

Масса шара равна: $m = \rho \cdot \frac{4}{3}\pi R^3$.

Проинтегрируем выражение (2):

$$J = \int dJ = 2\int_0^R \frac{\rho\pi}{2}\left(R^2 - h^2\right) dh = \rho\pi \cdot \frac{8}{15} R^5 .$$

Пределы изменения r от $(-R)$ до $(+R)$

$$J = \frac{2}{5}\left(\rho \cdot \frac{4}{3}\pi R^3\right) R^2 = \frac{2}{5} mR^2.$$

Ответ: $J = \frac{2}{5} mR^2$.

Пример 10. Выведите формулу для момента инерции полого шара относительно оси, проходящей через его центр. Масса шара m, внутренний радиус r, внешний – R.

Дано:	*Решение*
m, r, R	Для расчета используем свойство аддитивности
$J = ?$	момента инерции шара относительно оси, проходящей через его центр.

Масса шара m, внутренний радиус r, внешний R.

$$J = \frac{2}{5} m_1 R^2 - \frac{2}{5} m_2 r^2. \qquad (1)$$

Выразим массы сплошного шара и вырезанного шарика:

$$m_1 = \frac{4}{3} \pi \rho R^3, \qquad (2)$$

$$m_2 = \frac{4}{3} \pi \rho r^3. \qquad (3)$$

Результирующая масса будет равна:

$$m = m_1 - m_2 = \frac{4}{3} \pi \rho \left(R^3 - r^3 \right). \qquad (4)$$

Подставив выражения (2), (3), (4) в формулу (1), получим ответ.

$$J = \frac{2}{5} \cdot \frac{4}{3} \pi \rho R^3 R^2 - \frac{2}{5} \cdot \frac{4}{3} \pi \rho r^3 r^2 = \frac{2}{5} \cdot \frac{4}{3} \pi \rho R^5 - \frac{2}{5} \cdot \frac{4}{3} \pi \rho r^5 =$$

$$= \frac{2}{5} \cdot \frac{4}{3} \pi \rho \left(\frac{R^3 - r^3}{R^3 - r^3} \right) \left(R^5 - r^5 \right) = \frac{2}{5} \cdot m \frac{R^5 - r^5}{R^3 - r^3}.$$

Ответ: $J = \frac{2}{5} m \frac{R^5 - r^5}{R^3 - r^3}$ кг · м^2.

Пример 11. Выведите формулу для момента инерции цилиндрической муфты относительно оси, совпадающей с её осью симметрии. Масса муфты равна m, внутренний радиус – r, внешний – R.

Дано:	*Решение*
m	Сделаем рисунок.
r, R	Введем обозначения: r –
$J = ?$	внутренний радиус муфты,

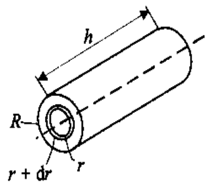


Рис. 1.40

($r + dr$) – радиус цилиндрического слоя, R – внешний радиус муфты, h – высота муфты (рис. 1.40). Разобьем муфту на цилиндрические слои, коаксиальные ее оси, толщиной dr и найдем момент инерции такого слоя:

$$dm = \rho dV = \rho \cdot 2\pi r h dr. \qquad (1)$$

Проинтегрируем выражение (1):

$$J = \int_r^R \rho \cdot 2\pi r^3 h dr = 2\pi \rho h \int_r^R r^3 dr = 2\pi \rho h \left. \frac{r^4}{4} \right|_r^R = \frac{\pi \rho h}{2} \left(R^4 - r^4 \right), \qquad (2)$$

$$m = m_1 - m_2 = \pi\rho h\left(R^2 - r^2\right), \; J = \frac{1}{2}m\left(R^2 + r^2\right).$$

Ответ: $J = \frac{1}{2}m\left(R^2 + r^2\right)$. .

Пример 12. Определите момент инерции J тонкого однородного стержня длиной l = 50 см и массой m = 360 г относительно оси, перпендикулярной стержню и проходящей через: конец стержня; точку, отстоящую от конца стержня на 1/6 его длины.

Дано:
$l = 50$ см $= 0{,}5$ м
$m = 360$ г $= 0{,}36$ кг
$AB = {}^{l}/_{6}$

$J_A = ?$
$J_B = ?$

Решение

Сделаем рисунок (рис. 1.41).

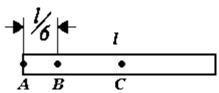


Рис. 1.41

Так как ось вращения не проходит через центр масс, то момент инерции рассчитываем по теореме Штейнера.

$$J_A = \frac{1}{12}ml^2 + m\left(\frac{l}{2}\right)^2 = \frac{1}{3}ml^2,$$

$$J_B = \frac{1}{12}ml^2 + m\left(\frac{l}{2} - \frac{l}{6}\right)^2 = \frac{7}{36}ml^2.$$

Расчеты:

$$J_A = 3\cdot 10^{-2} \text{ кг}\cdot\text{м}^2;\; J_B = 1{,}75\cdot 10^{-2} \text{ кг}\cdot\text{м}^2.$$

Ответ: $J_A = 3\cdot 10^{-2}$ кг · м^2; $J_B = 1{,}75\cdot 10^{-2}$ кг · м^2.

Пример 13. Шар и сплошной цилиндр, изготовленные из одного и того же материала, одинаковой массы катятся без скольжения с одинаковой скоростью. Определите, во сколько раз кинетическая энергия шара меньше кинетической энергии сплошного цилиндра.

Дано:
$m_1 = m_2 = m$
$V_1 = V_2 = V$

$\frac{T_2}{T_1} = ?$

Решение

Шар и сплошной цилиндр выполняют плоское движение. Кинетическая энергия плоского движения равна:

$$T = \frac{mV^2}{2} + \frac{J\omega^2}{2}. \qquad (1)$$

Формула связи между ω и V:

$$\omega = \frac{V}{R}. \tag{2}$$

Рассчитаем моменты инерции шара J_1 и сплошного цилиндра J_2 и их кинетические энергии плоского движения T_1 и T_2.

$$J_1 = \frac{2}{5} mR^2,$$

$$J_2 = \frac{1}{2} mR^2,$$

$$T_1 = \frac{mV^2}{2} + \frac{2}{5} mR^2 \cdot \frac{V^2}{2R^2} = \frac{7}{10} mV^2,$$

$$T_2 = \frac{mV^2}{2} + \frac{1}{2} mR^2 \cdot \frac{V^2}{2R^2} = \frac{3}{4} mV^2,$$

Расчеты:

$$\frac{T_2}{T_1} = 1{,}07.$$

Ответ: $\frac{T_2}{T_1} = 1{,}07.$

Пример 14. Шар радиусом R = 10 см и массой m = 5 кг вращается вокруг оси симметрии согласно уравнению $\varphi = A + Bt^2 + Ct^3$ (B = 2 рад/с^2, C = –0,5 рад/с^3). Определите момент сил M для t = 3 с.

Дано:	*Решение*
R = 10 см = 0,1 м m = 5 кг $\varphi = A + Bt^2 + Ct^3$ B = 2 рад/с^2 C = –0,5 рад/с^3 t = 3 с	Запишем основной закон динамики вращательного движения: $$M = J\varepsilon. \tag{1}$$ Момент инерции шара относительно оси симметрии: $$J = \frac{2}{5} mR^2. \tag{2}$$
M = ?	

По определению:

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt}. \tag{3}$$

Тогда

$$\omega = 2Bt + 3Ct^2. \tag{4}$$

По определению:

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt}. \tag{5}$$

Тогда

$$\varepsilon = 2B + 6Ct. \tag{6}$$

Подставив (2) и (6) в (1), получим ответ на вопрос задачи:

$$M = \frac{2}{5} mR^2 \left(2B + 6Ct\right).$$

Расчет: $M = -0{,}1$ Н · м.

Ответ: $M = -0{,}1$ Н · м.

Пример 15. Вентилятор вращается с частотой n = 600 об/мин. После выключения он начал вращаться равнозамедленно и, сделав N = 50 оборотов, остановился. Работа А сил торможения равна 31,4 Дж. Определите: 1) момент сил M торможения; 2) момент инерции J вентилятора.

Дано:	*Решение*
n = 600 об/мин = 10 об/с N = 50 об A = 31,4 Дж	Работа сил торможения при вращении: $A = M\varphi$. (1) Угол поворота равен: $\varphi = 2\pi N$. (2)
M = ? J = ?	

Выразим величину момента сил торможения из (1), подставив (2) в (1):

$$M = \frac{A}{\varphi} = \frac{A}{2\pi N}. \tag{3}$$

Выразим величину момента инерции из основного закона динамики вращательного движения:

$$M = J\varepsilon, \tag{4}$$

получим:

$$J = \frac{M}{\varepsilon}. \tag{5}$$

Найдем величину углового ускорения:

$$\omega_0 = 2\pi n,\ \varepsilon = \frac{\omega_0}{t} = \frac{2\pi n}{t}, \tag{6}$$

а

$$\varphi = 2\pi N = \omega_0 t - \frac{\varepsilon t^2}{2} = \frac{\omega_0 t}{2}. \tag{7}$$

Подставив (6) в (7), найдем t:

$$t = \frac{2\varphi}{\omega_0} = \frac{2 \cdot 2\pi N}{2\pi n} = \frac{2N}{n}. \qquad (8)$$

Подставив (8) и (6) в (5), найдем J:

$$J = \frac{M}{\varepsilon} = \frac{MN}{\pi n^2}. \qquad (9)$$

Расчеты: 1) $M = -0{,}1$ Н · м; 2) $J = 1{,}59 \cdot 10^{-2}$ кг · м^2.

Ответ: 1) $M = -0{,}1$ Н · м; 2) $J = 1{,}59 \cdot 10^{-2}$ кг · м^2.

Пример 16. Сплошной однородный диск скатывается без скольжения с наклонной плоскости, образующей угол α с горизонтом. Определите линейное ускорение a центра диска.

Дано:	*Решение*
α	Сделаем рисунок.
$a = ?$	

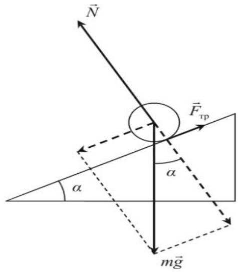


Рис. 1.42

Покажем все силы, действующие на диск. Выразим силу трения из основного закона динамики вращательного движения для диска (рис. 1.42):

$$F_{тр} R = J\varepsilon. \qquad (1)$$

По определению:

$$J = \frac{mR^2}{2}; \qquad (2)$$

$$\varepsilon = \frac{a}{R}. \qquad (3)$$

Подставив (2) и (3) в (1), получим:

$$F_{тр} = \frac{J\varepsilon}{R} = \frac{mR^2 a}{2R^2} = \frac{ma}{2}. \qquad (4)$$

Запишем второй закон Ньютона:

$$ma = mg\sin\alpha - F_{тр}. \qquad (5)$$

Подставив (4) в (5), получим:

$$\frac{3}{2}a = g\sin\alpha. \qquad (6)$$

Из выражения (6) получим ответ на вопрос задачи:

$$a = \frac{2}{3} g \sin\alpha .$$

Ответ: $a = \frac{2}{3} g \sin\alpha$.

Пример 17. К ободу однородного сплошного диска радиусом R = 0,5 м приложена постоянная касательная сила F = 100 Н. При вращении диска на него действует момент $M_{тр}$ = 2 Н · м. Определите массу m диска, если известно, что его угловое ускорение ε постоянно и равно 16 рад/с^2.

Дано:
R = 0,5 м
F = 100 Н
$M_{тр}$ = 2 Н · м
ε =16 рад/с^2

m = ?

Решение

$$M = FR - M_{тр},$$

$$M = J\varepsilon ,$$

$$J\varepsilon = FR - M_{тр},$$

$$J = \frac{mR^2}{2},$$

$$\frac{mR^2}{2}\varepsilon = FR - M_{тр},$$

$$m = \frac{2\left(FR - M_{тр}\right)}{\varepsilon R^2}.$$

Расчет: m = 24 кг.

Ответ: m = 24 кг.

Пример 18. Частота вращения n_0 маховика, момент инерции J которого равен 120 кг · м^2, составляет 240 об/мин. После прекращения действия на него вращающего момента маховик под действием сил трения в подшипниках остановился за время $t = \pi$ мин. Считая трение в подшипниках постоянным, определите момент M сил трения.

Дано:
n_0 = 240 об/мин = 4 об/с
J = 120 кг · м^2
$t = \pi$ мин = 60ϖ с = 188,40 с

M = ?

Решение

Работа тормозящей силы совершается за счет запаса кинетической энергии при вращении:

$$\frac{J\omega_0^2}{2} = M\varphi . \qquad (1)$$

Выразим модуль момента сил трения из (1):

$$M = \frac{J\omega_0^2}{2\varphi}. \qquad (2)$$

Учитывая условия задачи, получим:

$$\varphi = \frac{\omega_0 t}{2}, \ \ \omega_0 = 2\pi n_0.$$

Тогда

$$M = \frac{2\pi n_0 J}{t}. \qquad (3)$$

Расчет: $M = \frac{2\pi n_0 J}{t} = 16 \text{ Н} \cdot \text{м}$.

Ответ: $M = 16$ Н · м.

Пример 19. Однородный диск радиусом $R = 0{,}2$ м и массой $m = 0{,}5$ кг вращается вокруг оси, проходящей через его центр перпендикулярно к его плоскости. Зависимость угловой скорости ω вращения диска от времени t дается уравнением $\omega = A + Bt$, где $B = 8$ рад/с^2. Найти касательную силу F, приложенную к ободу диска. Трением пренебречь.

Дано:	*Решение*
$m = 0{,}5$ кг $R = 0{,}2$ м $\omega = A + Bt$ $B = 8$ рад/с^2	Относительно оси OX момент касательной силы, приложенной к ободу диска: $M = F \cdot R. \qquad (1)$
$F = ?$	

Уравнение вращательного движения в проекции на ось OX:

$$M = J \cdot \varepsilon, \qquad (2)$$

где момент инерции диска $J = \frac{mR^2}{2}$, т. е.

$$M = \frac{mR^2\varepsilon}{2}, \qquad (3)$$

угловое ускорение

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = B. \qquad (4)$$

Решая совместно (1)–(4), найдем:

$$F = \frac{BmR}{2}.$$

Расчет: $F = 4$ Н.

Ответ: $F = 4$ Н.

Пример 20. К ободу колеса радиусом $R = 0,5$ м и массой $m = 50$ кг приложена касательная сила $F = 98,1$ Н. Найти угловое ускорение ε колеса. Через какое время t после начала действия силы колесо будет иметь частоту вращения $n = 100$ об/с? Колесо считать однородным диском. Трением пренебречь.

Дано:	*Решение*
$m = 50$ кг $R = 0,5$ м $F = 98,1$ Н $n = 100$ об/с	Данную задачу решим в скалярной форме относительно оси, проходящей через центр масс диска и совпадающей по направлению с вектором $\vec{\varepsilon}$. Момент касательной силы, приложенный к ободу диска:
$\varepsilon = ?$ $t = ?$	

$$M = F \cdot R. \qquad (1)$$

Кроме того, $M = J \cdot \varepsilon$, где момент инерции диска $J = \frac{mR^2}{2}$, т. е.:

$$M = \frac{mR^2\varepsilon}{2}. \qquad (2)$$

Приравнивая правые части уравнений (1) и (2), получим:

$$\varepsilon = \frac{2F}{mR}. \qquad (3)$$

Проведем расчет: $\varepsilon = 7,8$ град/с^2.

Угловую скорость ω можно выразить двумя способами: $\omega = 2\pi \cdot n$ и $\omega = \varepsilon \cdot t$.

Отсюда: $t = \frac{2\pi n}{\varepsilon}$.

Расчет: $t = 1$ мин 20 с.

Ответ: 1) $\varepsilon = 7,8$ рад/с^2; 2) $t = 80$ с.

Пример 21. На барабан массой $m_0 = 9$ кг намотан шнур, к концу которого привязан груз массой $m = 2$ кг. Найти ускорение a груза. Барабан считать однородным цилиндром. Трением пренебречь.

Дано:
$m_0 = 9$ кг
$m = 2$ кг
$a = ?$

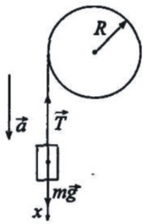


Рис. 1.43

Решение

Без учета сил трения и сопротивления среды систему «груз – цилиндр» можно считать замкнутой и применить к ней закон сохранения энергии (рис. 1.43).

В начальный момент времени груз обладает потенциальной энергией:

$$W_p = mgh. \tag{1}$$

При опускании груза его потенциальная энергия уменьшается, переходя в кинетическую энергию поступательного движения груза и в кинетическую энергию вращения барабана:

$$mgh = \frac{mV^2}{2} + \frac{J\omega^2}{2}, \tag{2}$$

где момент инерции барабана:

$$J = \frac{m_0 R^2}{2}; \tag{3}$$

$$\omega = \frac{V}{R}, \tag{4}$$

где R – радиус барабана.

Уравнение (1) с учетом (2), (3) и (4) можно записать так:

$$mgh = \frac{V^2}{2}\left(m + \frac{m_0}{2}\right). \tag{5}$$

Груз опускается под действием постоянной силы, следовательно, его движение равноускоренное. Тогда

$$h = \frac{at^2}{2}; \tag{6}$$

$$V = at. \tag{7}$$

Подставляя (6) и (7) в (5), получим:

$$a = \frac{2mg}{m_0 + 2m}. \qquad (8)$$

Расчет: $a = 3$ м/с^2.

Ответ: $a = 3$ м/с^2.

Пример 22. На барабан радиусом $R = 0{,}5$ м намотан шнур, к концу которого привязан груз массой $m = 10$ кг. Найти момент инерции J барабана, если известно, что груз опускается с ускорением $a = 2{,}04$ м/с^2.

Дано:
$m = 10$ кг
$R = 0{,}5$ м
$a = 2{,}04$ м/с^2
$J = ?$

Решение

Сделаем рисунок и покажем все действующие на тело силы (рис. 1.44). Сила натяжения шнура создает вращающий момент

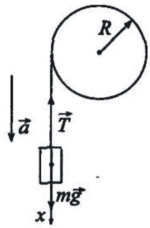


Рис. 1.44

$$M = TR. \qquad (1)$$

С другой стороны:

$$M = J\varepsilon. \qquad (2)$$

Ускорение, с которым опускается груз, равно тангенциальному ускорению вращения барабана. Тогда:

$$\varepsilon = \frac{a}{R}. \qquad (3)$$

Решая совместно (1)–(3), получим:

$$J = \frac{TR^2}{a}. \qquad (4)$$

Силу натяжения шнура $\vec{T}$ найдем из второго закона Ньютона в проекциях на ось OX:

$$mg - T = ma. \qquad (5)$$

Откуда:

$$T = m(g - a). \qquad (6)$$

Тогда уравнение (4) примет вид:

$$J = \frac{mR^2(g-a)}{a}. \tag{7}$$

Расчет: $J = 9{,}5$ кг · м^2.

Ответ: $J = 9{,}5$ кг · м^2.

Пример 23. К ободу однородного сплошного диска массой m = 10 кг, насаженного на ось, приложена постоянная касательная сила F = 30 Н. Определить кинетическую энергию через время t = 4 с после начала действия силы.

Дано:	*Решение*
$m = 10$ кг $F = 30$ Н $t = 4$ с	$T_{\text{вр}} = \frac{J\omega^2}{2},\ M = FR = J\varepsilon,\ J = \frac{mR^2}{2},$
$T_{\text{вр}} = ?$	

$$\varepsilon = \frac{FR}{J} = \frac{2F}{mR},\ \ \omega = \varepsilon t = \frac{2F}{mR}t;$$

$$T_{\text{вр}} = \frac{mR^2}{2}\left(\frac{2F}{mR}t\right)^2 \cdot \frac{1}{2} = \frac{F^2t^2}{m}.$$

Расчет: 1,44 кДж.

Ответ: 1,44 кДж.

Пример 24. Диск массой m = 2 кг катится без скольжения по горизонтальной плоскости со скоростью M = 4 м/с. Найти кинетическую энергию W_k диска.

Дано:	*Решение*
$m = 2$ кг $V = 4$ м/с	В задаче рассматривается так называемое «плоское движение».
$W_k = ?$	Полная кинетическая энергия диска складывается

из кинетической энергии поступательного движения точки центра масс и кинетической энергии вращения относительно оси, проходящей через центр масс:

$$W_k = \frac{mV^2}{2} + \frac{J\omega^2}{2}. \tag{1}$$

Поскольку

$$J = \frac{mR^2}{2}, \tag{2}$$

угловая скорость равна:

$$\omega = \frac{V}{R}, \tag{3}$$

где m – масса диска; R – радиус диска.

Кинетическая энергия плоского движения равна:

$$W_k = \frac{3mV^2}{4}. \tag{4}$$

Расчет: $W_k = 24$ Дж.

Ответ: $W_k = 24$ Дж.

Пример 25. Шар диаметром $D = 6$ см и массой $m = 0{,}25$ кг катится без скольжения по горизонтальной плоскости с частотой вращения $n = 4$ об/с. Найти кинетическую энергию W_k шара.

Дано:	*Решение*
$m = 0{,}25$ кг $D = 6$ см $n = 4$ об/с	Кинетическая энергия шара складывается из кинетической энергии поступательного движения и кинетической энергии вращения:
$W_k = ?$	$$W_k = \frac{mv^2}{2} + \frac{J\omega^2}{2},$$

где $J = \frac{2mR^2}{5}$; $\omega = 2\pi n$, следовательно,

$$W_k = \frac{4\pi^2 mR^2 n^2}{2} + \frac{2mR^2 4\pi^2 n^2}{5 \cdot 2} = \frac{7\pi^2 D^2 mn^2}{10}.$$

Расчет: $W_k = 0{,}1$ Дж.

Ответ: $W_k = 0{,}1$ Дж.

Пример 26. Вентилятор вращается с частотой $n = 900$ об/мин. После выключения вентилятор, вращаясь равнозамедленно, сделал до остановки $N = 75$ об. Работа сил торможения $A = 44{,}4$ Дж. Найти момент инерции J вентилятора и момент сил торможения M.

Дано:	*Решение*
$n = 900$ об/мин $N = 75$ об $A = 44{,}4$ Дж	Работа сил трения равна приращению кинетической энергии: $-A = W_k - W_{k0}$. Поскольку в момент остановки $W_k = 0$, то
$J = ?$ $M_{торм} = ?$	$$A = W_{k0} = \frac{J\omega^2}{2}.$$

Откуда выразим момент инерции J, учитывая, что

$$\omega = 2\pi n; \tag{1}$$

$$J = \frac{2A}{4\pi^2 n^2}. \tag{2}$$

Расчет: $J = 0{,}01$ кг · м^2.

2. Момент сил торможения

$$M = J\varepsilon. \tag{3}$$

Угловое ускорение
$$\varepsilon = \frac{\omega}{t}. \tag{4}$$

Поскольку вращение является равнозамедленным, то:

$$2\pi N = 2\pi nt - \frac{2\pi nt}{2}, \tag{5}$$

откуда

$$t = \frac{2N}{n}. \tag{6}$$

Решая совместно (1)–(6), получим:

$$M = \frac{J\pi n^2}{N}. \tag{7}$$

Расчет: $M = 94 \cdot 10^{-3}$ Н · м.

Ответ: $M = 94 \cdot 10^{-3}$ Н · м.

Пример 27. Однородный стержень длиной $l = 0{,}5$ м совершает малые колебания в вертикальной плоскости около горизонтальный оси, проходящей через его верхний конец. Найти период колебаний T стержня.

Дано:	*Решение*
$l = 0{,}5$ м	В данной задаче стержень является физическим
$T = ?$	маятником, его период малых колебаний

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{J}{mdg}}, \tag{1}$$

где J – момент инерции стержня относительно оси вращения; d – расстояние от центра масс до оси вращения.

$$d = \frac{l}{2}. \tag{2}$$

Момент инерции стержня рассчитаем по теореме Штейнера:

$$J_O = J_C + md^2, \tag{3}$$

где $J_C = \frac{1}{12} ml^2$.

Отсюда

$$J_O = \frac{ml^2}{3}. \tag{4}$$

Подставив (2) и (3) в (1), получим:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{2l}{3g}}. \tag{5}$$

Расчет: $T = 1{,}16$ с.

Ответ: $T = 1{,}16$ с.

Задания для аудиторной самостоятельной работы

1. Через неподвижный блок в виде сплошного цилиндра массой $m = 160$ г перекинута невесомая нерастяжимая нить, к концам которой прикреплены грузы массами $m_1 = 200$ г и $m_2 = 300$ г. Пренебрегая трением в оси блока, определить: 1) ускорение движения грузов; 2) силы натяжения нитей T_1 и T_2.

2. Вал массой $m = 100$ кг и радиусом $R = 5$ см вращался с частотой $n = 8$ об/с. К цилиндрической поверхности вала прижали тормозную колодку с силой $F = 40$ Н, под действием которой вал остановился через $t = 10$ с. Определить величину коэффициента трения.

3. Через неподвижный блок, масса которого равномерно распределена по ободу, массой $m = 200$ г перекинут невесомый нерастяжимый шнур, к концам которого прикреплены грузы массами $m_1 = 300$ г и $m_2 = 500$ г. Пренебрегая трением в оси блока, определить: 1) ускорение движения грузов; 2) силы натяжения нитей T_1 и T_2.

4. Шар массой $m = 10$ кг и радиусом $R = 20$ см вращается вокруг оси, проходящей через его центр, по закону: $\varphi = 4t^2 - t^3$ (рад). Найти закон изменения момента сил, действующих на шар. Определить величину момента сил для момента времени $t = 2$ с.

5. Цилиндр, расположенный горизонтально, может вращаться вокруг оси, совпадающей с осью цилиндра. Масса цилиндра $m_1 = 12$ кг. На цилиндр намотали шнур, к которому привязали гирю массой $m_2 = 1$ кг. С каким ускорением будет опускаться гиря? Какова сила натяжения шнура во время движения гири?

6. Шар скатывается с наклонной плоскости высотой $h = 90$ см. Какую линейную скорость будет иметь центр шара в тот момент, когда шар скатится с наклонной плоскости?

7. Платформа в виде диска вращается по инерции около вертикальной оси с частотой $n_1 = 14$ мин$^{-1}$. На краю платформы стоит человек. Когда человек перешел в центр платформы, частота возросла до $n_2 = 25$ мин$^{-1}$. Масса человека $m = 70$ кг. Определить массу платформы. Момент инерции человека рассчитывать как для материальной точки.

8. С какой наименьшей высоты Н должен съехать велосипедист, чтобы по инерции (без трения) проехать дорожку, имеющую форму мертвой петли радиусом $R = 3$ м, и не оторваться от дорожки в верхней точке петли? Масса велосипедиста вместе с велосипедом $m = 75$ кг, причем на массу колес приходится $m_1 = 3$ кг. Колеса велосипеда считать обручами.

9. Маховое колесо, имеющее момент инерции $J = 245$ кг · м^2, вращается, делая $n = 20$ об/с. Через минуту, после того как на колесо перестал действовать вращающий момент, оно остановилось. Найти: 1) момент сил трения, 2) число оборотов, которое сделало колесо до полной остановки после прекращения действия сил.

10. Вентилятор вращается со скоростью, соответствующей $n = 900$ об/мин. После выключения вентилятор, вращаясь равнозамедленно, сделал до остановки $N = 75$ об. Работа сил торможения равна $A_{торм} = 44{,}4$ Дж. Найти: 1) момент инерции вентилятора; 2) момент силы торможения.

11. Человек весом 600 Н находится на неподвижной платформе массой 100 кг. Какое число оборотов в минуту будет делать платформа, если человек будет двигаться по окружности радиусом $R = 5$ м вокруг оси вращения? Скорость движения человека относительно платформы равна $V = 4$ км/ч. Радиус платформы $R = 10$ м. Считать платформу однородным диском, а человека – точечной массой.

12. На скамье Жуковского стоит человек и держит в руках стержень вертикально по оси скамьи. Скамья с человеком вращается с угловой скоростью $\omega_1 = 4$ рад/с. С какой угловой скоростью ω_2 будет вращаться скамья с человеком, если повернуть стержень так, чтобы он занял горизонтальное положение? Суммарный момент

инерции человека и скамьи $J = 5$ кг · м^2. Длина стержня $l = 1{,}8$ м, масса $m = 6$ кг. Считать, что центр масс стержня с человеком находится на оси платформы.

13. На краю неподвижной скамьи Жуковского диаметром $D = 0{,}8$ м и массой $m_1 = 6$ кг стоит человек $m_2 = 60$ кг. С какой угловой скоростью ω начнет вращаться скамья, если человек поймает летящий на него мяч массой $m = 0{,}5$ кг? Траектория мяча горизонтальна и проходит на расстоянии $r = 0{,}4$ м от оси скамьи. Скорость мяча $V = 5$ м/с.

14. Обруч и диск имеют одинаковый вес P и катятся без скольжения с одинаковой линейной скоростью V. Кинетическая энергия обруча равна $W_1 = 4$ кГм. Найти кинетическую энергию W_2 диска.

15. Шар массой $m = 1$ кг, катящийся без скольжения, ударяется о стенку и откатывается от нее. Скорость шара до удара о стенку $V_1 = 10$ см/с, после удара $V_2 = 8$ см/с. Найти количество тепла Q, выделившееся при ударе.

16. Найти кинетическую энергию велосипедиста, едущего со скоростью $V = 9$ км/ч. Вес велосипедиста вместе с велосипедом $P = 780$ Н, причем на вес колес приходится $P_1 = 30$ Н. Колеса велосипеда считать обручами.

17. Медный шар радиусом $R = 10$ см вращается со скоростью, соответствующей $V = 2$ об/с, вокруг оси, проходящей через его центр. Какую работу надо совершить, чтобы увеличить угловую скорость вращения шара вдвое?

18. К ободу диска массой $m = 5$ кг приложена постоянная касательная сила $F = 20$ Н. Какую кинетическую энергию будет иметь диск через $\Delta t = 5$ с после начала действия силы?

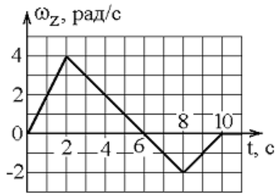
19. Однородный стержень длиной $l = 1{,}0$ м может свободно вращаться вокруг горизонтальной оси, проходящей через один из его концов. В другой конец абсолютно неупруго ударяет пуля массой $m = 7$ г, летящая перпендикулярно стержню и его оси. Определить массу M стержня, если в результате попадания пули он отклонится на угол $\alpha = 60°$. Принять скорость пули $V = 360$ м/с.

20. При торможении диск остановился, сделав 10 оборотов от начала торможения до остановки. Определить момент силы торможения.

Билеты для самоконтроля

Билет 1

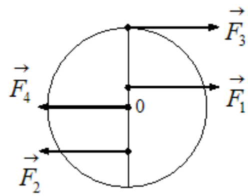
1. Записать определения: а) момента инерции *ТТ*; б) вектора вращающего момента относительно точки *O*.
2. Твердое тело начинает вращаться вокруг оси *OZ* с угловой скоростью, проекция которой изменяется со временем, как показано на графике. Определить величину углового перемещения (в радианах) в промежутке времени от 4 до 8 с.



3. Кинематические уравнения движения *МТ* имеют вид: $x = 2t$; $y = t^3$. Определить величину модуля мгновенной скорости для момента времени $t = 1$ с.
4. Записать формулы, определяющие: а) полную энергию плоского движения тела; б) момент инерции тела относительно произвольной оси.

Билет 2

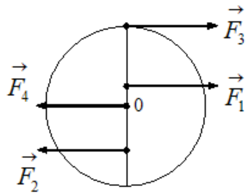
1. Записать определение: а) момента силы относительно оси *OZ*; б) момента импульса относительно точки O.
2. Диск может вращаться вокруг оси, перпендикулярной плоскости диска и проходящей через его центр (т. *O*). К нему прикладывают одну из сил ($\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$, $\vec{F}_3$ или $\vec{F}_4$), лежащих в плоскости диска и равных по модулю. Определить величину углового ускорения, сообщенного диску силой F_4.



3. Записать формулу, определяющую: а) основной закон динамики вращательного движения в проекциях на ось OZ; б) кинетическую энергию плоского движения *ТТ*.
4. Маховое колесо начинает вращаться с постоянным угловым ускорением $\varepsilon = 0{,}5$ рад/с^2 и через $t_1 = 15$ с после начала движения приобретает момент импульса, равный $L = 73{,}5$ (кг · м^2)/с. Найти кинетическую энергию колеса через $t_2 = 20$ с после начала вращения.

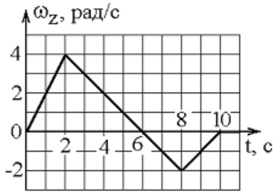
Билет 3

1. Записать определение: а) момента силы относительно точки O; б) момента инерции TT при дискретном распределении массы в твердом теле.
2. Записать формулу, выражающую: а) кинетическую энергию плоского движения ТТ; б) связь между моментом импульса и моментом инерции относительно оси OZ.
3. Медный шар радиусом $R = 10$ см вращается со скоростью, соответствующей $n = 2$ об/с, вокруг оси, проходящей через его центр. Какую работу надо совершить, чтобы увеличить угловую скорость вращения шара вдвое?
4. Диск радиусом R может вращаться вокруг оси, перпендикулярной плоскости диска и проходящей через его центр (т. O). К нему прикладывают одну из сил ($\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$, $\vec{F}_3$ или $\vec{F}_4$), лежащих в плоскости диска и равных по модулю. Определить величину и направление вращающего момента, сообщенного диску силой F_3.



Билет 4

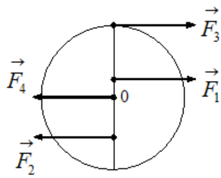
1. Записать определения: а) момента импульса относительно точки O; б) момента инерции TT при непрерывном распределении массы в твердом теле.
2. Твердое тело начинает вращаться вокруг оси OZ с угловой скоростью, проекция которой изменяется со временем, как показано на графике. Определить величину углового ускорения тела в промежутке времени от 0 до 4 с.



3. Пуля массой 10 г летит со скоростью 800 м/с, вращаясь около продольной оси с частотой $n = 3000$ с$^{-1}$. Принимая пулю за цилиндрик диаметром $d = 8$ мм, определить полную кинетическую энергию пули.
4. Маховое колесо начинает вращаться с постоянным угловым ускорением $\varepsilon = 2$ рад/с^2 и через $t_1 = 5$ с после начала движения приобретает момент импульса, равный $L = 100$ (кг · м^2)/с. Найти кинетическую энергию колеса через $t_2 = 10$ с после начала вращения.

Билет 5

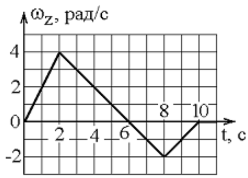
1. Записать определения: а) плеча силы; б) плоского движения ТТ.
2. Записать формулу, выражающую: а) теорему Штейнера; б) связь между моментом импульса и моментом инерции тела относительно оси Z.
3. Диск радиусом R может вращаться вокруг оси, перпендикулярной плоскости диска и проходящей через его центр (т. О). К нему прикладывают одну из сил ($\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$, $\vec{F}_3$ или $\vec{F}_4$), лежащих в плоскости диска и равных по модулю. Определить величину и направление вектора углового ускорения, сообщенного диску силой F_3.



4. Мальчик катит обруч по горизонтальной дороге со скоростью $V = 7{,}2$ км/ч. На какое расстояние может вкатиться обруч за счет его кинетической энергии на горку? Уклон горки равен 10 м на каждые 100 м пути.

Билет 6

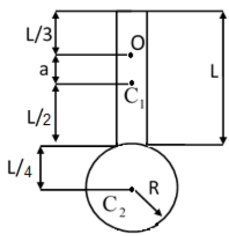
1. Записать формулу, выражающую: а) уравнение моментов в векторной форме записи; б) работу при вращательном движении.
2. Сформулировать: а) основной закон динамики вращательного движения в проекциях на ось Z; б) закон сохранения момента импульса при вращении вокруг оси Z.
3. Твердое тело начинает вращаться вокруг оси Z с угловой скоростью, проекция которой изменяется со временем, как показано на графике. Определить величину углового ускорения тела в промежутке времени от 8 до 10 с.



4. Закон вращения ТТ имеет вид: $\vec{\varphi} = 2t^2\vec{i} + t^3\vec{j}$ (рад). Определить модуль вектора мгновенного углового ускорения тела для момента времени $t = 2$ с.

Билет 7

1. Записать определение: а) момента силы относительно точки O; б) момента инерции *ТТ* при дискретном распределении массы в *ТТ*.
2. Записать формулу, выражающую: а) кинетическую энергию плоского движения *ТТ*; б) связь между моментом импульса и момента инерции относительно оси Z.
3. Медный шар радиусом $R = 10$ см вращается со скоростью, соответствующей $n = 2$ об/с, вокруг оси, проходящей через его центр. Какую работу надо совершить, чтобы увеличить угловую скорость вращения шара вдвое?
4. Физический маятник представляет собой стержень длиной $l = 1$ м и массой $M = 1$ кг с прикрепленным к одному из его концов диском массой $m = 0{,}5$ М. Определить момент инерции J_z такого маятника относительно оси, проходящей через точку О на стержне перпендикулярно плоскости чертежа (см. рис.).



Домашнее задание

1. Маховое колесо, имеющее момент инерции $J = 245$ кг · м^2, вращается, делая 20 об/с. Через минуту, после того как на колесо перестал действовать вращающий момент, оно остановилось. Найти: 1) момент сил трения, 2) число оборотов, которое сделало колесо до полной остановки после прекращения действия сил.

Ответ: $M_{тр} = 513$ Дж; $N = 600$ об.

2. Обруч, диск и шар, имеющие одинаковые массы m и радиусы R, катятся без скольжения с одинаковой линейной скоростью V по горизонтальной поверхности. Сравнить их кинетические энергии.

Ответ: $W_{кд} = W_{ко}/2$; $W_{кш} = \frac{1}{5}W_{ко}$.

3. Частица движется со скоростью $V = 0{,}5$ с. Во сколько раз релятивистская масса частицы больше массы покоя?

Ответ: в $\frac{\sqrt{3}}{2}$ раз.

4. На барабан массой $M = 9$ кг намотан невесомый шнур, к концу которого прикреплен груз массой $m = 2$ кг. Найти ускорение, с которым опускается груз. Барабан считать однородным цилиндром. Трением пренебречь.

Ответ: $a = 3$ м/с^2.

Практическое занятие 1.6
Элементы специальной теории относительности (СТО)

1. Преобразования Лоренца и следствия из них.

2. Релятивистский импульс, релятивистское уравнение динамики частицы.

3. Полная и кинетическая энергия. Закон взаимосвязи массы и энергии.

Основные формулы

Название ФВ	Формула
Релятивистский импульс	$$p = mV = \frac{m_0 V}{\sqrt{1-\beta^2}}, \qquad (1)$$ где m — релятивистская масса, $\beta = \frac{V}{c}$
Релятивистская масса	$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1-\beta^2}}, \qquad (2)$$ где m_0 — масса покоя
Преобразования Лоренца	$$x = \frac{x' + Vt'}{\sqrt{1-\beta^2}};\ y = y';\ z = z'; \qquad (3)$$ $$t = \frac{t' + \frac{Vx'}{c^2}}{\sqrt{1-\beta^2}},\ \text{где}\ \beta = \frac{V}{c}$$
Следствия из преобразований Лоренца	$$L = L_0\sqrt{1-\beta^2}; \qquad (4)$$ $$\Delta t_0 = \frac{\Delta t}{\sqrt{1-\beta^2}}$$
Преобразования скорости	$$V_x = \frac{V_x' + V}{1 + V \cdot V_x'/c^2};\ V_x' = \frac{V_x - V}{1 - V_0 V_x/c^2}; \qquad (5)$$ $$V_y = \frac{V_y'\sqrt{1-\beta^2}}{1 + V \cdot V_x'/c^2};\ V_y' = \frac{V_y\sqrt{1-\beta^2}}{1 + V \cdot V_x/c^2}$$

Название ФВ	Формула
Релятивистское уравнение динамики частицы	$$F = \frac{dp}{dt} = \frac{d\left(\frac{m_0 V}{\sqrt{1-\beta^2}}\right)}{dt} \quad (6)$$
Полная и кинетическая энергии релятивистской частицы	$$W = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-\beta^2}} = mc^2; \quad (7)$$ $$W_k = mc^2 - m_0 c^2$$
Связь между энергией и импульсом релятивистской частицы	$$p^2 c^2 = W_k \left(W_k + 2m_0 c^2\right); \quad (8)$$ $$W^2 - p^2 c^2 = m_0 c^4,$$ где W, p – полные энергия и импульс релятивистской частицы; m_0 – масса покоя частицы
Закон взаимосвязи массы и энергии	$$W_0 = m_0 c^2;\ \Delta W_0 = c^2 \Delta m_0 \quad (9)$$

Методические указания

При рассмотрении элементов специальной теории относительности рассматриваются только инерциальные системы отсчета (ИСО). Во всех задачах принимается, что оси Y, Y' и Z, Z' сонаправлены, а подвижная система отсчета K' движется относительно общей оси X, X'.

Абсолютной скоростью тела в СТО V называют скорость тела относительно неподвижной системы координат K, V' – скорость тела относительно подвижной системы координат K', называют относительной скоростью, а скорость движения системы K' относительно системы K называют переносной скоростью V_0.

Примеры решения задач

Пример 1. Стержень пролетает с постоянной скоростью мимо метки, неподвижной в K-системе отсчёта. Время пролёта $\Delta t = 20$ нс в K-системе. В системе же отсчёта, связанной со стержнем, метка движется вдоль него в течение $\Delta t' = 25$ нс. Найти собственную длину стержня.

Дано:	*Решение*
$\Delta t = 20$ нс	Анализ
$\Delta t' = 25$ нс	По определению собственной длиной стержня называется длина стержня, измеренная в системе отсчёта, связанной со стержнем.
$L_0 = ?$	

Если наблюдатель находится в системе отсчёта, связанной со стержнем, то для расчёта собственной длины необходимо знать время движения системы, в которой находится стержень, и её скорость движения, т. е. $l_0 = V\grave{t}$. А чтобы найти V, необходимо знать собственное время движения стержня (по условию задачи это Δt) и время движения неподвижной системы отсчёта (это $\Delta t'$). Тогда из соотношения $\Delta t' = \dfrac{\Delta t}{\sqrt{1-\beta^2}}$ найдём скорость V и получим ответ на вопрос задачи.

Из соотношения $\Delta t' = \dfrac{\Delta t}{\sqrt{1-\beta^2}}$ получаем:

$$\frac{V^2}{c^2} = 1 - \left(\frac{\Delta t}{\Delta t'}\right)^2; \quad V = c\sqrt{1 - \left(\frac{\Delta t}{\Delta t'}\right)^2}.$$

Тогда $l_0 = V\Delta t' = c\Delta t'\sqrt{1 - \left(\dfrac{\Delta t}{\Delta t'}\right)^2}$.

Расчёт: $l_0 = 4{,}5$ м.

Ответ: $l_0 = 4{,}5$ м.

Пример 2. Электрон с массой покоя m_0 начинает двигаться под действием постоянной силы F. Как будут изменяться со временем его скорость и кинетическая энергия?

Дано:	*Решение*
m_0	Анализ
F	Скорость можно найти из выражения для релятивистского импульса. А релятивистский импульс – из основного закона релятивистской динамики материальной точки.
$V = ?$	
$W_k = ?$	

Кинетическую энергию электрона найдём из релятивистского выражения для кинетической энергии.

По определению $P = mV$, где m – релятивистская масса. Отсюда $V = \dfrac{P}{m}$.

Из основного уравнения релятивистской динамики материальной точки следует: $dP = Fdt$. Интегрируя это выражение при $F = \text{const}$, получим: $P = F \cdot t$.

Тогда

$$V = \frac{Ft\sqrt{1 - V^2/c^2}}{m_0} = \frac{Ft\sqrt{1 - p^2/c^2m^2}}{m_0}. \qquad (1)$$

Преобразуем выражение, стоящее под знаком радикала, умножив и разделив его на c^2:

$$1 - \left(\frac{p}{mc}\right)^2 = \frac{m^2c^4 - p^2c^2}{m^2c^4}. \qquad (2)$$

Из соотношения между полной энергией и импульсом частицы следует:

$$m^2c^4 - P^2c^2 = m_0^2c^4. \qquad (3)$$

Следовательно,

$$\sqrt{1 - \left(\frac{p}{cm}\right)^2} = \frac{m_0c}{\sqrt{m_0^2c^2 + p^2}}. \qquad (4)$$

Подставив (2), (3), (4) в (1), получим:

$$V = \frac{Ftc}{\sqrt{m_0c^2 + F^2t^2}}.$$

По определению:

$$W_k = W - W_0 = m_0c^2\left(\frac{1}{\sqrt{1-V^2/c^2}} - 1\right).$$

Подставив значение V, получим зависимость кинетической энергии электрона в зависимости от времени:

$$W_k = m_0c^2\left(\frac{\sqrt{m_0c^2 + F^2t^2}}{m_0c} - 1\right).$$

Ответ: $V = \dfrac{Ft\sqrt{1-V^2/c^2}}{m_0} = \dfrac{Ft\sqrt{1-p^2/c^2m^2}}{m_0}$;

$W_k = m_0c^2\left(\dfrac{\sqrt{m_0c^2 + F^2t^2}}{m_0c} - 1\right).$

Пример 3. Частица с массой покоя m_0, движущаяся со скоростью $V = 0{,}8$ с, испытывает неупругое столкновение с покоящейся частицей равной массы. Найти массу покоя образовавшейся частицы.

Дано:	*Решение*
$m_{01} = m_{02} = m_0$	Анализ
$V = 0{,}8$ с	Массу покоя образовавшейся частицы определим из взаимной связи массы и энергии, а полную энергию образовавшейся частицы – из закона сохранения энергии.
$m_0' = ?$	

Ещё необходимо воспользоваться законом сохранения импульса.

Запишем законы сохранения энергии и проекции импульса:

$$W_1 + W_2 = W', \quad P_{1x} + P_{2x} = P_x'.$$

Используя релятивистские выражения энергии и импульса, получим:

$$m_0c^2\left(\frac{1}{\sqrt{1-V_1^2/c^2}} + 1\right) = \frac{m_0'c^2}{\sqrt{1-V^2/c^2}}; \qquad (1)$$

$$\frac{m_0V_1}{\sqrt{1-V_1^2/c^2}} + 0 = \frac{m_0'V}{\sqrt{1-V^2/c^2}}. \qquad (2)$$

Подставив в уравнения (1) и (2) значение $V_1 = 0{,}8$ с, получим:

$$8m_0c^2 = \frac{3m_0'c^2}{\sqrt{1-V^2/c^2}}; \qquad (3)$$

$$4m_0c^2 = \frac{3m_0'V}{\sqrt{1-V^2/c^2}}. \tag{4}$$

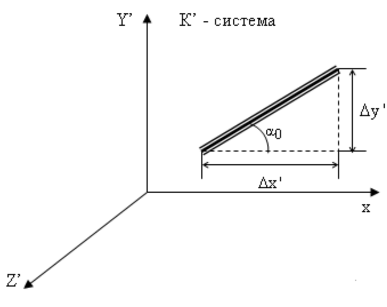
Поделим выражения (3) и (4): $2c = c^2/V$. Отсюда $V = c/2$.

Подставив это значение в уравнение (4), получим: $4m_0 = \frac{3m_0'}{\sqrt{3}}$.

Ответ: $m_0' = \frac{4}{\sqrt{3}}m_0$.

Пример 4. В лабораторной системе отсчёта K движется стержень со скоростью $V = 0{,}8$ с. По измерениям, произведённым в системе K', его длина оказалась $l = 10$ м, а угол α, который он составляет с осью X, – 30°. Определить собственную длину l_0 стержня в K-системе, связанной со стержнем, и угол α_0, который он составляет с осью X'.

Дано:	*Решение*
$V = 0{,}8$ с	Анализ. Сделаем рисунок.
$\alpha = 30°$	
$l = 10$ м	
$l_0 = ?$	
$\alpha_0 = ?$	



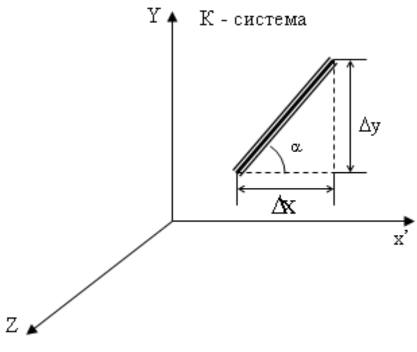


Рис. 1.45 Рис. 1.46

Пусть в K-системе стержень лежит в плоскости XOY, а в K' – в плоскости $X'OY'$. Тогда из рис. 1.45 видно, что $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\Delta y}{\Delta x}$, а $\operatorname{tg}\alpha_0 = \frac{\Delta y'}{\Delta x'}$ и $l = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$, $l_0 = \sqrt{\Delta x'^2 + \Delta y'^2}$. При переходе от системы K' к системе K размеры стержня в направлении оси Y не изменятся, а в направлении оси X будет наблюдаться лоренцево сокращение: $\Delta y = \Delta y'$; $\Delta x = \Delta x'\sqrt{1 - V^2/c^2}$.

Тогда собственная длина стержня выразится соотношением:

$$l_0 = \sqrt{(\Delta y)^2 + \left(\Delta x\sqrt{1 - V^2/c^2}\right)^2} = \frac{\sqrt{l^2 - \beta^2(\Delta y)^2}}{\sqrt{1 - \beta^2}}.$$

Но $\Delta y = l \sin\alpha$ (из рис. 1.46), тогда $l_0 = l\dfrac{\sqrt{1 - \beta^2 \sin^2\alpha}}{\sqrt{1 - \beta^2}}$.

Из равенства $\operatorname{tg}\alpha_0 = \dfrac{\Delta y'}{\Delta x'} = \operatorname{tg}\alpha\sqrt{1 - \beta^2}$.

Отсюда $\alpha_0 = \operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg}\alpha\sqrt{1 - \beta^2}\right)$.

Расчёт: $l_0 = 15{,}3$ м; $\alpha_0 = 19{,}1°$.

Ответ: $l_0 = 15{,}3$ м; $\alpha_0 = 19{,}1°$.

Задания для аудиторной самостоятельной работы

1. При какой скорости движения масса движущегося электрона вдвое больше массы покоя?

2. Фотонная ракета движется относительно Земли со скоростью $V = 0{,}6$ с. Во сколько раз замедляется ход времени в ракете с точки зрения земного наблюдателя?

3. Космический корабль летит со скоростью $V = 0{,}8c$ (c – скорость света в вакууме) в системе отсчета, связанной с некоторой планетой. Один из космонавтов медленно поворачивает метровый стержень из положения 1, перпендикулярного направлению движения корабля, в положение 2, параллельное направлению движения. Длина этого стержня с точки зрения другого космонавта:
1) равна 1,0 м при любой его ориентации;
2) изменяется от 1,0 м в положении 1 до 1,67 м в положении 2;
3) изменяется от 1,0 м в положении 1 до 0,6 м в положении 2;
4) изменяется от 0,6 м в положении 1 до 1,0 м в положении 2.

4. Мюоны, рождаясь в верхних слоях атмосферы, при скорости $V = 0{,}995$ с пролетают до распада $L = 6$ км. Определите: 1) собственную длину пути, пройденную ими до распада; 2) время жизни мюона для наблюдателя на Земле; 3) собственное время жизни мюона.

5. Какую скорость должно иметь движущееся тело, чтобы его продольные размеры уменьшились в два раза?

6. Электрон движется со скоростью $V = 0{,}6$ с. Определить релятивистский импульс электрона.

7. Вычислить энергию покоя: 1) электрона; 2) протона; 3) α-частицы. Ответ выразить в Дж и МэВ.

8. Кинетическая энергия электрона равна $W_k = 10$ МэВ. Во сколько раз его релятивистская масса больше массы покоя?

9. Солнце излучает ежеминутно энергию 6,5 кВт · ч. Считая излучение Солнца постоянным, найти, за какое время масса Солнца уменьшится в два раза.

Билеты для самоконтроля

Билет 1

1. Какую скорость должно иметь движущееся тело, чтобы его продольные размеры уменьшились в 2 раза?
2. Собственное время жизни пиона $25 \cdot 10^{-3}$ с. Какое расстояние пройдёт эта частица за время своей жизни при скорости движения $V = 0{,}8$ с?

Билет 2

1. При какой скорости частицы её релятивистский импульс в 3 раза больше ньютоновского импульса?
2. Собственное время жизни некоторой нестабильной частицы $\Delta t_0 = 10$ нс. Найти путь, который пройдёт эта частица до распада в лабораторной системе отсчёта, где её время жизни $\Delta t = 20$ нс.

Билет 3

1. При какой скорости масса электрона увеличится в n раз?
2. Мюоны, распадаясь в верхних слоях атмосферы, пролетают до распада $l = 6{,}0$ км при скорости $V = 0{,}995$ с. Найти собственное время жизни этого мюона.

Билет 4

1. Мюоны, распадаясь в верхних слоях атмосферы, пролетают до распада $l = 6{,}0$ км при скорости $V = 0{,}995$ с. Найти собственную длину пути, пройденного мюоном до распада.
2. Электрон летит со скоростью $V = 0{,}8$ с. Определить кинетическую энергию электрона в мегаэлектрон-вольтах.

Билет 5

1. Мюоны, распадаясь в верхних слоях атмосферы, пролетают до распада $l = 6{,}0$ км при скорости $V = 0{,}995$ c. Найти время жизни мюона для наблюдателя на Земле.
2. Определить релятивистский импульс протона, если скорость его движения $V = 0{,}8$ c.

Билет 6

1. Собственное время жизни мюонов 2 мкс. Какой путь они пройдут, «с их точки зрения», при скорости $V = 0{,}9$ c?
2. Определить кинетическую энергию протона, движущегося со скоростью $V = 0{,}75$ c.

Билет 7

1. Заряженная частица с массой покоя m_0 движется в однородном магнитном поле по окружности радиусом R равномерно со скоростью V. Найти релятивистское выражение модуля силы, действующей на частицу.
2. Электрон начинает движение в однородном электрическом поле с напряжённостью $E = 4 \cdot 10^6$ В/м. Найти скорость электрона через 10 нс после начала движения.

Билет 8

1. Определить, какую ускоряющую разность потенциалов должен пройти протон, чтобы его скорость стала равной $V = 0{,}9$ c.
2. Определить релятивистский импульс p и кинетическую энергию протона, движущегося со скоростью $V = 0{,}75$ c.

Домашнее задание

Повторить теоретический и практический материалы изучаемого курса «Физика-1» для подготовки к итоговому тестированию.

Практическое занятие 2.1
Основы молекулярно-кинетической теории. Уравнение состояния идеального газа. Статистические распределения

1. Физические основы молекулярно-кинетической теории.
2. Основное уравнение молекулярно-кинетической теории газов.
3. Уравнение состояния идеального газа.
4. Статистические распределения.

Основные формулы

Название ФВ	Формула
Количество вещества	$\nu = \frac{m}{\mu} = N/N_A$ (1)
Молярная масса вещества	$\mu = m_{\text{мол}} \cdot N_A$ (2)
Уравнение состояния идеальных газов (уравнение Менделеева – Клапейрона)	$pV = \frac{m}{\mu} RT$, (3) $pV = \nu RT$
Объединенный газовый закон	$\frac{pV}{T} = \text{const}$ (4)
Зависимость давления газа от концентрации молекул и температуры	$p = nkT$ (5)
Закон Дальтона	$p = \sum_{i=1}^{n} p_i$ (6)
Соотношение между термодинамическими константами	$R = N_A \cdot k$, (7) где $N_A = 6{,}02 \cdot 10^{23}$ моль$^{-1}$; $k = 1{,}38 \cdot 10^{-23}$ Дж/К
Концентрация частиц (молекул, атомов и т. п.) однородной системы	$n = N/V$, (8) где V – объем системы

Название ФВ	Формула
Основное уравнение кинетической теории газов	$$p=\frac{2}{3}n<\varepsilon>, \qquad (9)$$ где p – давление газа; $<\varepsilon>$ – средняя кинетическая энергия поступательного движения молекулы
Средняя кинетическая энергия, приходящаяся на одну степень свободы молекулы	$$<\varepsilon_1>=kT/2 \qquad (10)$$
Средняя кинетическая энергия, приходящаяся на все степени свободы молекулы (полная энергия молекулы)	$$<\varepsilon>=\frac{i}{2}kT \qquad (11)$$
Средняя кинетическая энергия поступательного движения молекулы	$$<\varepsilon>=\frac{3}{2}kT \qquad (12)$$
Средняя кинетическая энергия вращательного движения молекулы	$$\varepsilon_{вр}=\frac{i-3}{2}kT \qquad (13)$$
Средняя квадратичная скорость молекул	$$<u_{кв}>=\sqrt{3kT/m_1} \text{ или } <u_{кв}>=\sqrt{3RT/\mu}, \qquad (14)$$ где m_1 – масса одной молекулы
Средняя арифметическая скорость молекул	$$<u>=\sqrt{8kT/(\pi m_1)}, \qquad (15)$$ где m_1 – масса одной молекулы, или $$<u>=\sqrt{8RT/(\pi\mu)}$$
Наиболее вероятная скорость молекул	$$<u_в>=\sqrt{2kT/m_1} \text{ или } <u_в>=\sqrt{2RT/\mu} \qquad (16)$$
Барометрическая формула (распределение давления в однородном поле силы тяжести)	$$p_h = p_0 e^{-mgh/(kT)}, \text{ или } p_h = p_0 e^{-\mu gh/(RT)} \qquad (17)$$

Название ФВ	Формула
Распределение Больцмана (распределение частиц в силовом поле)	$$n_h = n_0 e^{-mgh/(kT)}, \qquad (18)$$ где n – концентрация частиц; mgh – их потенциальная энергия; n_0 – концентрация частиц в точках поля, где $mgh = 0$; k – постоянная Больцмана; T – термодинамическая температура; e – основание натурального логарифма
Функция распределения Максвелла (распределение молекул по скоростям)	$$f(u) = 4\pi\left(\frac{m_0}{2\pi kT}\right)^{3/2} V^2 \ell^{-m_0 V^2/(2kT)} \qquad (19)$$

Методические указания

При изучении этого раздела физики, как, впрочем, и других, закрепление материала происходит посредством решения расчетных или экспериментальных задач. Они бывают простые, посложнее, требующие для решения некоторых усилий и размышлений и бывают сложные, для решения которых надо не просто понимать материал, но уверенно владеть математическим аппаратом, уметь выделять в физическом явлении существенные составляющие, а несущественные отбрасывать.

Решение задач, требующих простой подстановки данных в ту или другую формулу, как правило, трудностей не представляет.

Если задача посложнее, то необходимо проявлять дополнительные умения, например, уметь определять молярную массу по таблице Менделеева или если какой-либо из термодинамических параметров газа неизвестен, то его можно определить по уравнению Менделеева – Клапейрона.

При переходе газа из одного состояния в другое с сохранением массы можно записать обобщенный газовый закон

$$P_1V_1/T_1 = P_2V_2/T_2,$$

из которого найти неизвестный параметр.

Если масса газа не остается постоянной, то необходимо записать уравнение Менделеева – Клапейрона для начального и конечного состояния и решать полученную систему относительно искомой величины.

Если газ разделен подвижной перегородкой (перемещающейся без трения), то когда перегородка остановится, это значит, что давление газа с обеих сторон одинаково – положение равновесия. В этом случае для каждой части газа можно записать объединенный газовый закон, связывающий начальные и конечные параметры.

Для определения параметров водяного пара можно использовать уравнение Менделеева – Клапейрона, считая его идеальным газом.

Примеры решения задач

Пример 1. Определите число молекул, содержащихся в 2 мм^3 воды при 4 °C.

Дано:	*Решение*
$V = 2 \cdot 10^{-9}$ м^3 $T = 277$ K	Число молекул определим, используя выражение
$N = ?$	$$N = \nu \cdot N_A, \quad (1)$$ где ν – количество вещества; N_A – число Авогадро.

Учитывая, что $\nu = m/\mu$, где μ – молярная масса, использовав (1), получим:

$$N = (m/\mu)N_A. \quad (2)$$

Массу воды определим через плотность и объем: $m = \rho V$.

Тогда формула (2) примет вид:

$$N = (\rho V/\mu)N_A. \quad (3)$$

Вычислим молярную массу молекулы воды H_2O:

$$M = (2 \cdot 1 + 1 \cdot 16) \cdot 10^{-3} \text{ кг/моль} = 18 \cdot 10^{-3} \text{ кг/моль}.$$

Рассчитаем искомую величину по формуле (3), получим:

$$N \approx 6{,}68 \cdot 10^{19}.$$

Ответ: $N \approx 6{,}68 \cdot 10^{19}$.

Пример 2. Поршневой насос, объем цилиндра которого равен 0,5 л, соединен с баллоном емкостью 3 л, содержащим воздух при нормальном атмосферном давлении. Определите давление воздуха в баллоне после пяти рабочих ходов поршня, если насос работает в режиме: а) нагнетательном; б) разрежающем. Считать процесс изотермическим.

Дано:	*Решение*
$V_1 = 5 \cdot 10^{-4}$ м^3 $V_2 = 3 \cdot 10^{-3}$ м^3 $p_0 = 1{,}013 \cdot 10^{-3}$ Па $n = 5$	А. Поршневой насос после n-рабочих ходов в нагнетательном режиме заберет из атмосферы объем воздуха $V_n = nV_1$ при давлении p_0. Этот воздух, попадая в баллон, создает там парциальное давление p_n.
$p_н, p_р = ?$	

Тогда, согласно закону Бойля – Мариотта (по условию $T = \text{const}$), $pnV_2 = p_0 nV_1$, отсюда $p_n = p_0 n(V_1/V_2)$.

Искомое давление воздуха в баллоне:

$$p_н = p_n + p_0 = p_0\left(\frac{V_1}{V_2}n + 1\right). \tag{1}$$

Б. По условию задачи воздух в баллоне занимает объем V_2 при давлении p_0. К концу первого хода в разрежающем режиме та же масса воздуха займет объем $V_2 + V_1$ при давлении p_1. Тогда по закону Бойля – Мариотта: $p_1(V_2 + V_1) = p_0V_2$, отсюда: $p_1 = p_0(V_2/V_2 + V_1))$.

В начале второго хода поршня объем и давление газа в баллоне соответственно равны V_2 и p_1, а в конце хода – $(V_2 + V_1)$ и p_2. Тогда:

$$p_2 = p_1(V_2/(V_2 + V_1)) = V_2/(V_2 + V_1),$$

$$p_0(V_2/(V_2 + V_1)) = p_0(V_2/(V_2 + V_1))^2.$$

Следовательно, к концу n-го рабочего хода

$$p_p = p_0(V_2/(V_2 + V_1))^n. \tag{2}$$

Подставляя числовые значения в выражения (1) и (2), получим:

$$p_н = 1{,}86 \cdot 10^5 \text{ Па}; \; p_р = 0{,}48 \cdot 10^5 \text{ Па}.$$

Ответ: $p_н = 1{,}86 \cdot 10^5$ Па; $p_р = 0{,}48 \cdot 10^5$ Па.

Пример 3. Идеальный газ находится под давлением 250 кПа и занимает объем 2,5 л при температуре 200 К. Сначала газ изохорно нагревают до температуры 400 К. Затем, изотермически расширяя, газ доводят до первоначального давления. После этого газ возвращают в начальное состояние путем изобарного сжатия. Изобразите процесс графически на pV-диаграмме. Определите давление p_2 и объем V_3.

Дано:

$p_1 = 2{,}5 \cdot 10^3$ Па

$V_1 = 2{,}5 \cdot 10^{3}$ м^3

$T_1 = 200$ К

$T_2 = 400$ К

$p_2 = ?$ $V_3 = ?$

Решение

Построим график цикла.

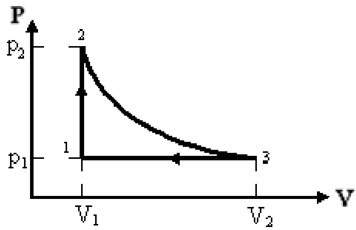


Рис. 2.1

При переходе газа из состояния 1 в состояние 2 осуществляется изохорный процесс. Следовательно, по закону Шарля имеем:

$$p_1/T_1 = p_2/T_2,$$

откуда:

$$p_2 = p_1 T_2/T_1. \qquad (1)$$

При переходе газа из состояния 3 в состояние 1 осуществляется изобарный процесс. Тогда, согласно закону Гей-Люссака:

$$V_1/T_1 = V_3/T_3,$$

отсюда:

$$V_3 = V_1 T_3/T_1.$$

Учитывая, что $T_3 = T_2$ (точки 2 и 3 принадлежат одной изотерме), получим:

$$V_3 = V_1 T_2/T_1. \qquad (2)$$

Произведем вычисления по формулам (1) и (2): $p_2 = 5 \cdot 10^5$ Па; $V_3 = 5 \cdot 10^{-3}$ м^3.

Ответ: $p_2 = 5 \cdot 10^5$ Па; $V_3 = 5 \cdot 10^{-3}$ м^3.

Пример 4. Идеальный газ находится в баллоне при 27 °С и давлении $3 \cdot 10^6$ Па. Какой станет температура, если из баллона будет выпущено 0,3 массы газа, а его давление понизится до $2 \cdot 10^6$ Па?

Дано:	*Решение*
$T_1 = 300$ K $p_1 = 3 \cdot 10^6$ Па $p_2 = 2 \cdot 10^6$ Па $k = 0{,}3$	Рассмотрим два состояния идеального газа. В первом состоянии газ имеет массу m и характеризуется параметрами p_1, V и T; во втором состоянии он имеет массу и характеризуется параметрами p_2, V и T_2.
$T_2 = ?$	

Параметры каждого из этих состояний связаны уравнением Менделеева – Клапейрона:

$$p_1 V = (m/\mu) R T_1, \tag{1}$$

$$p_2 V = ((1-k)m/\mu) R T_2. \tag{2}$$

Разделив почленно уравнение (1) на уравнение (2), получим:

$$p_1/p_2 = T_1/(1-k)T_2 \text{, откуда } T_2 = p_2 T_1/(1-k)p_1.$$

Произведем вычисления: $T_2 = 286$ K.

Ответ: $T_2 = 286$ K.

Пример 5. Барометр в кабине летящего самолета все время показывает одинаковое давление $p = 79$ кПа, благодаря чему летчик считает высоту h_1 полета неизменной. Однако температура воздуха за бортом изменилась с $t = 5$ °С до $t = 1$ °С. Какую ошибку Δh в определении высоты допустил летчик? Давление p_0 у поверхности Земли считать нормальным.

Дано:	*Решение*
$p = 80 \cdot 10^3$ Па $t_1 = 5$ °С $T_1 = 278$ K $t_2 = 1$ °С $T_2 = 274$ K	Для решения задачи воспользуемся барометрической формулой: $$p = p_0 \exp\left(-\frac{\mu g h}{RT}\right). \tag{1}$$ Барометр может показывать одинаковое давление p при изменении температуры за бортом от T_1 до T_2 только в том случае, если самолет изменяет высоту полета от h_1 (которую летчик считает неизменной) до некоторой другой h_2.
$\Delta h = ?$	

Запишем барометрическую формулу для этих двух случаев:

$$\begin{cases} p = p_0 \exp\left(-\mu g h_1 / RT_1\right) \\ p = p_0 \exp\left(-\mu g h_2 / RT_2\right). \end{cases}$$

Найдем отношение p_0/p и обе части полученного равенства прологарифмируем:

$$\ln\left(p_0/p\right) = \mu g h_1 / RT_1;$$

$$\ln\left(p_0/p\right) = \mu g h_2 / RT_2.$$

Из полученных соотношений выразим высоты h_2 и h_1 и найдем их разность:

$$\Delta h = h_2 - h_1 = \frac{R \ln\left(p_0 - p\right)}{\mu g}\left(T_2 - T_1\right). \tag{2}$$

Подставим в выражение (2) значения величин (давления в отношении p_0/p можно выразить в килопаскалях, это не повлияет на окончательный результат).

Расчет: $\Delta h = -28{,}5$ м.

Знак «–» означает, что $h_2 < h_1$ и, следовательно, самолет спустился на 28,5 метров по сравнению с предполагаемой высотой.

Ответ: самолет спустился на 28,5 метров по сравнению с предполагаемой высотой.

Пример 6. Чтобы не стать помехой движению самолетов, олимпийский аэростат «Миша», наполненный гелием при $p_1 = 10^5$ Па и температуре $T_0 = 300$ K, должен был подняться над Лужниками на высоту $h = 1{,}5$ км, где плотность воздуха на 20 % меньше, чем у поверхности Земли. Какова масса M оболочки аэростата, если его объем $V = 500$ м³ (оболочку считать герметичной и нерастяжимой).

Дано:	*Решение*
$V = 500$ м³	Анализ
$p_0 = 10^5$ Па	Предполагаем, что $T = \text{const}$, а $V = \text{const}$
$T_0 = 300$ K	из условия. Условия равновесия аэростата
$h = 1{,}5 \cdot 10^3$ м	выполняются на высоте $h = 1500$ м.
$\mu_в = 29 \cdot 10^{-3}$ кг/моль	Тогда из закона Архимеда: $m_в = m_Г + M$,
$\mu_г = 4 \cdot 10^{-3}$ кг/моль	где $m_в$ – масса вытесненного воздуха; $m_Г$ –
$M_{обл} = ?$	масса гелия.

Решив это уравнение, ответим на вопрос задачи.

Выразим $m_в$ и $m_Г$: $m_в = \rho_в V$, где $\rho_в = 0{,}8\ \rho_{вп}$, а $\rho_{вп}$ – плотность воздуха у поверхности Земли.

Тогда: $m_в = 0{,}8\rho_{вп}V$, а $\rho_{вп} = p_0\,\mu_в/RT$.

Следовательно: $m_в = 0{,}8p_0\,\mu_в V/RT$.

Аналогично: $m_Г = p_0\,\mu_Г V/RT$.

Тогда: $M = m_в - m_Г = p_0V\left(0{,}8\mu_в - \mu_Г\right)/RT$.

Произведем вычисление: $M = 380$ кг.

Ответ: $M = 380$ кг.

Пример 7. Спутник погрузился в тень Земли. При этом температура внутри спутника, равная вначале $T_1 = 300$ K, упала на 1 %, вследствие чего давление воздуха изменилось на величину $\Delta p = 10{,}5 \cdot 10^2$ Па. Определите массу воздуха в спутнике, если его объем $V = 10$ м^3.

Дано:
$T_1 = 300$ K
$\Delta T = 1$ K
$\Delta p = 10{,}5 \cdot 10^2$ Па
$p_0 = 10^5$ Па
$V = 10$ м^3
$\mu = 29 \cdot 10^{-3}$кг/моль

$m = ?$

Решение

Считаем, что газ (воздух) внутри спутника является идеальным. Для каждого состояния запишем уравнение Менделеева – Клапейрона:

$$p_1V = (m/\mu)RT_1, \qquad (1)$$

$$p_2V = (m/\mu)RT_2. \qquad (2)$$

$$\Delta p = p_1 - p_2. \qquad (3)$$

Объем V, масса m и молярная масса μ газа являются постоянными. В системе трех уравнений неизвестны три величины: m, p_1, p_2, следовательно, система уравнений разрешима.

Так как температура внутри спутника упала, то:

$$T_1 = T_2 + \Delta T. \qquad (4)$$

Вычитая из соотношения (2) соотношение (1), получим:

$$\Delta pV = R\left(\frac{m}{\mu}\right)(T_1 - T_2). \qquad (5)$$

Подставим в (5) величины Δp и ΔT и выразим искомую величину m.

Получим:

$$m = \frac{\Delta pV\mu}{R\Delta T}. \qquad (6)$$

Произведем вычисления: $m = 12$ кг.

Ответ: $m = 12$ кг

Пример 8. Идеальный газ, масса которого равна 6,1 кг, занимает объем 5 м^3 при давлении $2 \cdot 10^5$ Па. Определите среднюю квадратичную скорость движения молекул газа.

Дано:
$m = 6{,}1$ кг
$V = 5$ м^3
$p = 2 \cdot 10^5$ Па

$\langle u_{кв} \rangle = ?$

Решение

Средняя квадратичная скорость молекулы:

$$\langle u_{кв} \rangle = \sqrt{\frac{3RT}{\mu}}. \qquad (1)$$

Из уравнения Менделеева – Клапейрона

$$pV = (m/\mu)RT \qquad (2)$$

выразим:

$$\frac{RT}{\mu} = \frac{pV}{m}. \qquad (3)$$

Тогда:

$$\langle u_{кв} \rangle = \sqrt{\frac{3pV}{m}}. \qquad (4)$$

Произведя вычисления, получим: $\langle u_{кв} \rangle = 700$ м/с.

Ответ: $\langle u_{кв} \rangle = 700$ м/с.

Пример 9. В баллоне находится азот массой 4 г при 300 K. Определите среднюю энергию поступательного и вращательного движения молекул, находящихся в баллоне.

Дано:
$i = 5$
$m = 4$ г $= 4 \cdot 10^{-3}$ кг
T = 300 K
$\mu = 28 \cdot 10^{-3}$ кг/моль

$\langle W_{кп} \rangle = ?$
$\langle W_{квр} \rangle = ?$

Решение

Средняя энергия поступательного движения всех молекул определяется выражением

$$\langle W_p \rangle = \langle \varepsilon \rangle N, \qquad (1)$$

где $\langle \varepsilon \rangle$ – средняя энергия поступательного движения одной молекулы; N – число молекул, находящихся в баллоне.

Известно, что:

$$\langle \varepsilon_n \rangle = \frac{3}{2}kT, \qquad (2)$$

а

$$\langle \varepsilon_{k\,вр} \rangle = \frac{i-3}{2}kT, \qquad (3)$$

где $k = 1{,}38 \cdot 10^{-23}$Дж/К – постоянная Больцмана, T – термодинамическая температура.

Число N молекул найдем по формуле

$$N = \nu N_A, \tag{4}$$

где ν – количество вещества, $N_A = 6{,}02 \cdot 10^{23}$моль$^{-1}$ – постоянная Авогадро.

По определению:

$$\nu = m/\mu, \tag{5}$$

где m – масса азота, $\mu = 28 \cdot 10^{-3}$ кг/моль – молярная масса азота.

Выражение (1) с учетом (2), (3) и (5) примет вид:

$$< W_p >= \frac{3}{2} kT \frac{m}{\mu} N_A. \tag{6}$$

Теперь найдем среднюю энергию вращательного движения всех молекул:

$$\left\langle W_{\text{вр}} \right\rangle =< \varepsilon_{\text{в}p} > N = kT \frac{m}{\mu} N_A. \tag{7}$$

Произведем вычисления по формулам (6) и (7). Получим:

$$< W_{\text{вр}} > = < W_p > \approx 534 \text{ Дж}.$$

Ответ: $< W_{\text{вр}} > = < W_n > \approx 534$ Дж.

Пример 10. Смесь водорода и гелия при температуре 27 °С находится под давлением $2 \cdot 10^2$ Па. Масса водорода составляет 60 % от общей массы смеси. Определите концентрацию молекул каждого газа.

Дано:	*Решение*
$T_{\text{см}} = 300$ К $P_{\text{см}} = 2 \cdot 10^2$ Па $k = 1{,}38 \cdot 10^{-23}$ Дж/К $\tau_1 = 0{,}6$ $\tau_2 = 0{,}4$	Массовая доля каждого из газов в смеси определяется соотношением $$m_1 = \tau_1 m, \quad m_2 = \tau_2 m, \tag{1}$$ где m – масса смеси; τ_1 и τ_2 – массовые доли соответственно водорода и гелия.
$n_1, n_2 = ?$	

С другой стороны, масса каждого из газов

$$m_1 = V \frac{n_1}{N_A} \mu_1; \;\; m_2 = V \frac{n_2}{N_A} \mu_2. \tag{2}$$

Сравнив (1) и (2), получим: $\tau_1 m = Vn_1 \mu_1 / N_A$, $\tau_2 m = Vn_2 \mu_2 / N_A$, откуда:

$$n_1/n_2 = \tau_1 \mu_2 / \tau_2 \mu_1 = 3. \qquad (3)$$

Для смеси газов:

$$n = n_1 + n_2. \qquad (4)$$

Из выражения (3) и (4) получим:

$$n_1 = \frac{3}{4} n \quad n_2 = \frac{1}{4} n. \qquad (5)$$

При заданном давлении водород и гелий можно считать идеальными газами, подчиняющимися уравнению $p = nkT$.

Отсюда:

$$n = p/kT. \qquad (6)$$

С учетом (6) преобразуем соотношение (5):

$$n_1 = \frac{3p}{4kT}, \quad n_2 = \frac{1p}{4kT}. \qquad (7)$$

Произведем вычисления: $n_1 \approx 0{,}36 \cdot 10^{23}$, $n_2 \approx 0{,}12 \cdot 10^{23}$.

Ответ: $n_1 \approx 0{,}36 \cdot 10^{23}$, $n_2 \approx 0{,}12 \cdot 10^{23}$.

Задания для аудиторной самостоятельной работы

1. В колбе вместимостью $V = 0{,}5$ л находится кислород при нормальных условиях. Определить среднюю энергию поступательного движения всех молекул, находящихся в колбе.

2. Средняя квадратичная скорость некоторого газа при нормальных условиях $T = 273$ K равна $\langle U_{кв} \rangle = 480$ м/с. Сколько молекул N содержится в $m = 0{,}001$ кг этого газа?

3. На какой высоте h давление воздуха составляет $p = 0{,}6p_0$ от давления на уровне моря? Считайте, что температура воздуха везде одинакова и равна $t = 10$ °C.

4. Кислород массой $m = 0{,}01$ кг, находящийся при температуре $T_1 = 370$ K, подвергли адиабатному расширению, в результате которого его давление уменьшилось в $n = 4$ раза. В результате последующего изотермического процесса газ сжимается до первоначального давления. Определить количество теплоты, отданное газом.

5. На какой высоте плотность газа составляет 50 % от его плотности на уровне моря?

6. Пылинки, взвешенные в воздухе , имеют массу $m = 10^{-18}$ г. Во сколько раз уменьшится их концентрация n при увеличении высоты на $\Delta h = 10$ м? Температура воздуха $T = 300$ К.

7. На какой высоте H над поверхностью Земли атмосферное давление вдвое меньше, чем на ее поверхности. $T = 290$ К и постоянна.

8. Средняя квадратичная скорость движения молекул некоторого газа при нормальных условиях равна 480 м/с. Сколько молекул содержит 1 г газа?

9. Пассажирский самолет совершает полеты на высоте 8300 м. Чтобы не снабжать пассажиров кислородными масками, в кабинах при помощи компрессора поддерживается постоянное давление, соответствующее высоте 2700 м. Найти разность давлений внутри и снаружи кабины. Среднюю температуру наружного воздуха считать равной 0 °С.

10. При какой температуре T средняя квадратичная скорость атомов гелия станет равной 11,2 км/с?

11. Определить среднюю арифметическую скорость молекул газа, если их средняя квадратичная скорость равна 1 км/с.

12. Определить наиболее вероятную скорость молекул водорода при температуре $T = 400$ К.

13. На какой высоте давление воздуха составляет 75 % от давления на уровне моря? Температуру считать постоянной и равной 0 °С.

14. При какой температуре средняя квадратичная скорость молекул азота больше их наиболее вероятной скорости на 50 м/с?

15. Плотность некоторого газа равна $6 \cdot 10^{-2}$ кг/м^3, средняя квадратичная скорость молекул этого газа равна 500 м/с. Найти давление, которое газ оказывает на стенки сосуда.

16. В сосуде объемом 2 л находится 10 г кислорода под давлением 680 мм рт. ст. Найти: 1) среднюю квадратичную скорость молекул газа; 2) число молекул, находящихся в сосуде; 3) плотность газа.

17. Найти кинетическую энергию теплового движения молекул, находящихся в 1 г воздуха при температуре 15 °С. Воздух считать однородным газом, масса одного киломоля равна 29 кг/кмоль.

18. Воздух в цилиндрах внутреннего сгорания сжимается адиабатически, и его давление при этом изменяется от $p_1 = 1$ атм до $p_2 = 35$ атм. Начальная температура воздуха 40 °С. Найти температуру воздуха в конце сжатия.

19. Пассажирский самолет совершает полеты на высоте 8300 м. Чтобы не снабжать пассажиров кислородными масками, в кабинах при помощи компрессора поддерживается постоянное давление, соответствующее высоте 2700 м. Во сколько раз плотность воздуха в кабине самолета больше плотности воздуха вне её, если температура наружного воздуха равна –20 °C, а в кабине +20 °C.

20. Во сколько раз средняя квадратичная скорость пылинки, взвешенной в воздухе, меньше средней квадратичной скорости молекул воздуха? Масса пылинки $m = 10^{-8}$ г. Воздух считать однородным газом, масса одного киломоля воздуха равна 29 кг/моль.

Билеты для самоконтроля

Билет 1

1. Записать формулу, определяющую: 1) величину наиболее вероятной скорости молекул газа; 2) основное уравнение молекулярно-кинетической теории.
2. Записать формулу и сформулировать зависимость давления от высоты.
3. Какую температуру имеют 2 г азота, занимающего объём 820 см^3 при давлении 2 атм?
4. Определить массу моля и массу одной молекулы кислорода.

Билет 2

1. Записать формулу, определяющую: 1) величину средней арифметической скорости молекул газа; 2) уравнение состояния идеального газа (Менделеева – Клапейрона).
2. Записать формулу и сформулировать зависимость концентрации молекул от высоты в силовом поле.
3. Баллон ёмкостью 12 л наполнен азотом при давлении $p = 8{,}1 \cdot 10^6$ Па и температуре $t = 17$ °C. Какое количество азота находится в баллоне?
4. Определить концентрацию молекул идеального газа при температуре $t = 27$ °C и давлении $p = 10^3$ Па.

Билет 3

1. Записать формулу, определяющую: 1) величину средней арифметической скорости молекул газа; 2) основное уравнение молекулярно-кинетической теории.
2. Записать формулу, определяющую среднюю кинетическую энергию, приходящуюся на одну степень свободы молекулы.
3. 12 г газа занимают объём 4 л при температуре $t = 7$ °C. После нагревания газа при постоянном давлении его плотность стала $\rho = 2 \cdot 10^{-4}$ г/см^3. До какой температуры нагрели газ?
4. Сколько молекул газа содержится в баллоне ёмкостью $V = 30$ л при $t = 27$ °C и $p = 5 \cdot 10^{-3}$ Па?

Билет 4

1. Записать формулу, определяющую: 1) среднюю кинетическую энергию поступательного движения молекулы; 2) величину средней арифметической скорости молекул газа.
2. Записать формулу, определяющую распределение Больцмана.
3. Баллон ёмкостью $V = 20$ л содержит углекислый газ массой $m = 500$ г под давлением $p = 1{,}3 \cdot 10^{-3}$ Па. Определить температуру газа.
4. Сколько молекул содержится в 1 мм^3 воды при $t = 4$ °C?

Билет 5

1. Записать формулу, определяющую: 1) среднюю кинетическую энергию вращательного движения молекулы; 2) величину средней квадратичной скорости молекул газа.
2. Записать формулу, определяющую плотность газа.
3. При температуре $T = 309$ K и давлении $p = 12 \cdot 10^5$ Па плотность газа $\rho = 12$ кг/м^3. Определить молекулярную массу газа μ.
4. Колба ёмкостью $V = 0{,}5$ л содержит газ при нормальных условиях. Сколько молекул газа находится в колбе?

Билет 6

1. Записать формулу, определяющую: 1) среднюю кинетическую энергию поступательного движения молекулы; 2) величину наиболее вероятной скорости молекул газа.
2. Записать формулу, определяющую распределение Максвелла (распределение молекул по скоростям).

3. Какому давлению необходимо подвергнуть идеальный углекислый газ при $T = 300$ K, чтобы его плотность оказалась $\rho = 500$ г/л?
4. Определить число атомов N в 1 кг водорода и массу одного атома водорода.

Билет 7

1. Записать формулу, определяющую: 1) среднюю кинетическую энергию движения молекулы; 2) величину средней арифметической скорости молекул газа.
2. Записать формулу связи между величинами средней квадратичной и наиболее вероятной скоростей.
3. В сосуде ёмкостью 4 л содержится 1 г кислорода (O_2). Какое число молекул содержится в 1 см^3 этого сосуда?
4. Давление в рентгеновской трубке при $t = 15$ °C и $p = 1{,}2 \cdot 10^{-3}$ Па. Какое давление будет в работающей трубке при $t_1 = 80$ °C и $t_{21} = 150$ °C?

Билет 8

1. Записать формулу, определяющую: 1) число степеней свободы для двухатомной молекулы с жесткой связью между атомами; 2) величину наиболее вероятной скорости молекул газа.
2. Записать формулу связи между величинами средней квадратичной и средней арифметической скоростями.
3. Какое количество молекул будет находиться в 1 см^3 сосуда при $t = 10$ °C, если сосуд откачан до $p = 10^{-11}$ мм рт. ст.?
4. Газ при $T = 300$ K занимает объём $V = 250$ см^3. Какой объём займёт этот газ, если его температура: 1) повысится до 324 K? 2) понизится до 270 K? Давление считать постоянным, массу газа неизменной.

Домашнее задание

1. Советская высотная космическая станция расположена на горе Алагез в Армении на высоте 3250 м над уровнем моря. Найти давление воздуха на этой высоте. Температуру воздуха считать постоянной и равной 5 °C. Массу одного киломоля воздуха на этой высоте принять равной 29 кг/кмоль. Давление воздуха на уровне моря равно 760 мм рт. ст.

Ответ: $P = 510$ мм рт. ст.

2. Какая часть молекул кислорода при 0 °C обладает скоростью от 100 м/с до 110 м/с?

Ответ: 0,4 %.

3. Водород массой m = 4 г был нагрет на ΔT = 10 К при постоянном давлении. Определить: 1) работу расширения газа; 2) приращение внутренней энергии газа; 3) количество теплоты, полученное газом.

Ответ: 1) А = 166 Дж; 2) 249 Дж; 3) 415 Дж.

4. На какой высоте плотность газа составляет 50 % от его плотности на уровне моря?

Ответ: H = 5880 м.

Практическое занятие 2.2
Работа, внутренняя энергия газа. Первое начало термодинамики идеального газа для различных процессов

1. Работа газа в различных процессах.
2. Внутренняя энергия.
3. Первое начало термодинамики для различных процессов.

Основные формулы

Название ФВ	Формула
Работа газа при изменении объема	$A = \int_{V_1}^{V_2} p dV$ (1)
Работа газа в изотермическом процессе	$A = \frac{m}{\mu} RT \ln \frac{V_2}{V_1} = \frac{m}{\mu} RT \ln \frac{p_1}{p_2}$ (2)
Работа газа в изохорном процессе	$A = 0$ (3)
Работа газа в адиабатном процессе	$A = \frac{m}{\mu} C_V (T_1 - T_2)$ или (4) $A = \frac{RT_1}{\gamma - 1} \frac{m}{\mu} \left[1 - \left(\frac{V_1}{V_2} \right)^{\gamma - 1} \right]$
Внутренняя энергия идеального газа	$U = \frac{i}{2} \nu RT$ (5)

Название ФВ	Формула
Работа газа в изобарном процессе	$A_{12} = \frac{m}{\mu} R\Delta T$ (6)
Приращение внутренней энергии в изобарном процессе	$\Delta U_{12} = \frac{i}{2} \cdot \frac{m}{\mu} \cdot R \cdot \Delta T$ (7)
Связь между приращением внутренней энергии и работой в изобарном процессе	$\Delta U_{12} = \frac{i}{2} \cdot A_{12}$ (8)
Первое начало термодинамики для изобарного процесса	$\Delta Q_{12} = \Delta U_{12} + A_{12}$ (9)
	$\Delta Q_{12} = \frac{(i+2)}{i} \Delta U_{12}$ (10)
	$\Delta Q_{12} = \frac{i+2}{2} A_{12}$ (11)
Первое начало термодинамики для изохорного процесса	$\Delta Q_{12} = \Delta U_{12}$ (12)
Первое начало термодинамики для изотермического процесса	$\Delta Q_{12} = A_{12}$ (13)
Первое начало термодинамики для адиабатного процесса	$A_{12} = U_1 - U_2$ (14)

Примеры решения задач

Пример 1. Определите количество теплоты, поглощаемое водородом массой 0,2 кг при нагревании его от температуры 0 °C до температуры 100 °C при постоянном давлении. Найдите также изменение внутренней энергии газа и совершаемую им работу.

Дано:	*Решение*
$m = 0{,}2$ кг $t_1 = 0$ °C, $T_1 = 273$ K $t_2 = 100$ °C, $T_2 = 373$ K $\Delta U = ?\ Q = ?\ A = ?$	Количество теплоты, поглощаемое газом при изобарном нагревании: $Q = mc_p \Delta T,$ (1) где m – масса нагреваемого газа, c_p – его удельная теплоемкость при постоянном давлении, ΔT – изменение температуры газа.

По определению:

$$c_p = \frac{i+2}{2}\frac{R}{\mu}. \tag{2}$$

Подставив (2) в формулу (1), получим:

$$Q = \frac{i+2}{2}\frac{m}{\mu}R\Delta T. \tag{3}$$

Внутренняя энергия:

$$U = \frac{i}{2}\frac{m}{\mu}RT. \tag{4}$$

Следовательно, изменение внутренней энергии равно:

$$\Delta U = \frac{i}{2}\frac{m}{\mu}R\Delta T. \tag{5}$$

Работу расширения газа определим из первого начала термодинамики:

$$Q = \Delta U + A. \tag{6}$$

Откуда:

$$A = Q - \Delta U. \tag{7}$$

Произведя вычисления по формулам (3), (5), (7), получим ответы на вопросы задачи.

Расчеты: Q = 291 кДж, A = 83 кДж, ΔU = 208 кДж.

Ответ: Q = 291 кДж, A = 83 кДж, ΔU = 208 кДж.

Пример 2. 10 г кислорода находятся под давлением 300 кПа при температуре 10 °С. После нагревания при p = const газ занял объем 10 л. Найдите количество теплоты Q, полученное газом, изменение ΔU внутренней энергии газа и работу A, совершенную газом при расширении.

Дано:
$m = 10^{-2}$ кг
$p = 3 \cdot 10^5$ Па
C_p = 29,1 Дж/(моль · K)
t = 10 °С
T = 283 K
V = 10 л = 10^{-2} м^3

A = ? Q = ? ΔU = ?

Решение

Количество теплоты, полученное газом, определяется следующим соотношением:

$$Q = \frac{m}{\mu}C_p\Delta T. \tag{1}$$

Молярная теплоемкость кислорода при p = const; C_p = 29,1 Дж/(моль · K).

Запишем уравнение состояния газа до и после нагревания:

$$pV_1 = \frac{m}{\mu} RT_1, \tag{2}$$

$$pV_2 = \frac{m}{\mu} RT_2. \tag{3}$$

Вычитая из (3) уравнение (2), получим:

$$p(V_2 - V_1) = \frac{m}{\mu} R\Delta T. \tag{4}$$

Из (2) выразим

$$V_1 = \frac{mRT_1}{\mu p}. \tag{5}$$

Из (4) для ΔT с учетом (5):

$$\Delta T = \frac{\mu p\left(V_2 - \frac{mRT_1}{\mu p}\right)}{mR} = \frac{\mu p V_2 - mRT_1}{mR}. \tag{6}$$

Тогда уравнение (1) можно записать в виде:

$$Q = C_p \frac{(\mu p V_2 - mRT_1)}{mR}. \tag{7}$$

Изменение внутренней энергии кислорода:

$$\Delta U = \frac{5}{2}\frac{m}{\mu} R\Delta T, \tag{8}$$

или, подставляя (6) в (8):

$$\Delta U = \frac{5}{2}\frac{1}{\mu}(\mu p V_2 - mRT_1). \tag{9}$$

Работа, совершаемая при изменении объема газа:

$$A = p\int_{V_1}^{V_2} dV = p(V_2 - V_1). \tag{10}$$

Подставив в (10) соотношение (5), получим:

$$A = p\left(V_2 - \frac{mRT_1}{\mu p}\right). \tag{11}$$

Произведя вычисления по формулам (11), (9), (7), получим:

A = 2,26 кДж, Q = 7,92 кДж, ΔU = 5,66 кДж.

Ответ: A = 2,26 кДж, Q = 7,92 кДж, ΔU = 5,66 кДж.

Пример 3. Кислород занимает объем 1 м^3 и находится под давлением 200 кПа. Газ нагрели сначала при постоянном давлении до объема 3 м^3, а затем при постоянном объеме до давления 500 кПа. Постройте график процесса и найдите: 1) изменение ΔU внутренней энергии газа; 2) совершенную им работу A; 3) количество теплоты Q, переданное газу.

Дано:
$V_1 = 1$ м^3
$p_1 = 2 \cdot 10^5$ Па
$V_2 = 3$ м^3
$p_2 = 5 \cdot 10^5$ Па

$\Delta U = ?$ $A = ?$ $Q = ?$

Решение

Построим график процесса.

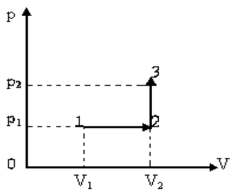


Рис. 2.2

На графике точками 1, 2, 3 обозначены состояния газа, характеризуемые параметрами (p_1, V_1, T_1), (p_1, V_2, T_2), (p_2, V_2, T_3).

1. Изменение внутренней энергии газа при переходе его из состояния 1 в состояние 3 равно:

$$\Delta U = c_V m \Delta T, \tag{1}$$

где c_V – удельная теплоемкость газа при постоянном объеме; m – масса газа; ΔT – разность температур, соответствующих конечному 3 и начальному 1 состояниям:

$$\Delta T = T_2 - T_1. \tag{2}$$

По определению:

$$c_V = \frac{i}{2}\frac{R}{\mu}, \tag{3}$$

где μ – молярная масса газа.

Температуры T_1 и T_3 выразим из уравнения Менделеева – Клапейрона:

$$T_1 = \frac{\mu p_1 V_1}{mR}, \tag{4}$$

$$T_3 = \frac{\mu p_2 V_2}{mR}. \tag{5}$$

Подставив (3), (4) и (5) в (1), получим формулу для расчета приращения внутренней энергии:

$$\Delta U = \frac{i}{2}\frac{m}{\mu}R(T_3 - T_1) = \frac{i}{2}\left(p_2V_2 - p_1V_1\right). \qquad (6)$$

2. Полная работа, совершаемая газом:

$$A = A_1 + A_2, \qquad (7)$$

где A_1 – работа на участке 1–2; A_2 – работа на участке 2–3.

На участке 1–2 давление постоянно (p = const). Работа в этом случае:

$$A_1 = p_1(V_2 - V_1). \qquad (8)$$

На участке 2–3 объем газа не изменяется и, следовательно, работа газа на этом участке равна нулю ($A_2 = 0$).

Тогда:

$$A = A_1 = p_1(V_2 - V_1). \qquad (9)$$

3. Согласно первому началу термодинамики количество теплоты Q, переданное газу, равно сумме работы A, совершенной газом, и изменению ΔU внутренней энергии:

$$Q = A + \Delta U. \qquad (10)$$

Произведем вычисления по формулам (6), (9), (10).

Расчеты: Q = 3,65 МДж, ΔU = 3,25 МДж, A = 0,4 МДж.

Ответ: Q = 3,65 МДж, ΔU = 3,25 МДж, A = 0,4 МДж.

Пример 4. Работа изотермического расширения 10 г газа от объема V_1 до $V_2 = 2V_1$ оказалась равной 575 Дж. Найдите среднюю квадратичную скорость молекул газа при этой температуре.

Дано:	*Решение*
$m = 10^{-2}$ кг	Работа изотермического расширения газа
A = 575 Дж	$$A = \frac{m}{\mu}RT\ln\frac{V_2}{V_1}. \qquad (1)$$
$\langle u_{кв}\rangle$ = ?	

Тогда:

$$T = \frac{A\mu}{mR\ln\frac{V_2}{V_1}} = \frac{A\mu}{mR\ln 2}. \qquad (2)$$

Средняя квадратичная скорость молекул:

$$\langle u_{кв}\rangle = \sqrt{\frac{3RT}{\mu}}. \qquad (3)$$

Из формулы (1) выразим отношение:

$$\frac{RT}{\mu}=\frac{A}{m\ln 2}. \tag{4}$$

Подставив (4) в формулу (3), получим ответ на вопрос задачи:

$$\langle u_{\text{кв}}\rangle=\sqrt{\frac{3A}{m\ln 2}}. \tag{5}$$

Произведем вычисления: $<u_{\text{кв}}> = 500$ м/с.

Ответ: $<u_{\text{кв}}> = 500$ м/с.

Пример 5. Некоторый газ массой 1 кг находится при температуре $T = 300$ К и под давлением $p_1 = 0{,}5$ МПа. В результате изотермического сжатия давление газа увеличилось в два раза. Работа, затраченная на сжатие, $A = –432$ кДж. Определите: 1) какой это газ; 2) первоначальный удельный объем газа.

Дано:
$m = 1$ кг
$T = 300$ К
$p_1 = 5 \cdot 10^5$ Па
$p_2 = 2p_1$
$A = –4{,}32 \cdot 10^5$ Дж

Какой это газ?
$\upsilon_1 = ?$

Решение

Обозначим первоначальный удельный объем газа υ_1. Работа в изотермическом процессе равна:

$$A=\int_{V_1}^{V_2}\frac{mRT}{\mu}\frac{dV}{V}=\frac{mRT}{\mu}\ln\frac{V_2}{V_1}=\frac{mRT}{\mu}\ln\frac{p_1}{p_2}. \tag{1}$$

По определению:

$$\upsilon_1=\frac{V_1}{m}. \tag{2}$$

Из уравнения Менделеева – Клапейрона:

$$V_1=\frac{mRT}{\mu\cdot p_1}. \tag{3}$$

Выразим μ из соотношения (1):

$$\mu=\frac{mRT}{A}\ln\frac{p_1}{p_2}. \tag{4}$$

Произведем вычисления:

$\mu = 4 \cdot 10^{-3}$ кг/моль, газ – гелий; $\upsilon_1 = 1{,}25$ м^3/кг.

Ответ: газ – гелий; $\upsilon_1 = 1{,}25$ м^3/кг.

Пример 6. Работа расширения некоторого двухатомного идеального газа составляет $A = 2$ кДж. Определите количество подведенной к газу теплоты, если процесс протекал: 1) изотермически; 2) изобарно.

Дано:
$A = 2$ кДж $= 2 \cdot 10^3$ Дж
$i = 5$
1) $T = \text{const}$
2) $p = \text{const}$

$Q_1 = ?$
$Q_2 = ?$

Решение

Сделаем рисунок.

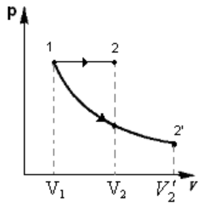


Рис. 2.3

1. Рассмотрим изотермический процесс и запишем для него первое начало термодинамики:

$$\Delta U = 0, \quad Q_1 = A. \tag{1}$$

2. Рассмотрим изобарный процесс и запишем для него первое начало термодинамики, выразив количество теплоты через величину совершенной работы:

$$Q_2 = \frac{i+2}{2} A_{12}. \tag{2}$$

Проведем вычисления: $Q_1 = 2$ кДж; $Q_2 = 7$ кДж.

Ответ: $Q_1 = 2$ кДж; $Q_2 = 7$ кДж.

Пример 7. Кислород, занимающий при давлении $p_1 = 1$ МПа объем $V_1 = 5$ л, расширяется в $n = 3$ раза. Определите конечное давление и работу, совершенную газом. Рассмотрите следующие процессы: 1) изобарный; 2) изотермический; 3) адиабатный.

Дано:
$\mu = 32 \cdot 10^{-3}$ кг/моль
$i = 5$
$p_1 = 10^6$ Па
$V_1 = 5$ л $= 5 \cdot 10^{-3}$ м^3
$V = nV_1$
$n = 3$
1) $p = \text{const}$
2) $T = \text{const}$
3) $Q = 0$

$p = ?$
$A = ?$

Решение

Построим графики процессов в координатах p, V.

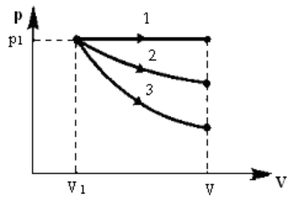


Рис. 2.4

1. Рассмотрим изобарный процесс и запишем для него формулу, определяющую величину работы: $p = \text{const}$; $p = p_1$.

$$A_1 = p_1 \Delta V = p_1 V_1 (n - 1). \tag{1}$$

2. Рассмотрим изотермический процесс и запишем для него формулы, определяющие конечное давление и работу:

$$T = \text{const},\ p_1V_1 = p_2V_2,\ \ p_2 = \frac{p_1V_1}{V_2}. \tag{2}$$

$$A = \int_{V_1}^{V_2} pdV = p_1V_1 \int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V} = p_1V_1 \ln\frac{V}{V_1}. \tag{3}$$

3. Рассмотрим адиабатный процесс и запишем для него формулы для расчета конечного давления и работы:

$$Q = 0,\ A = -\Delta U,\ \ pV^{\gamma} = \text{const},\ \ p = p_1\left(\frac{V_1}{V}\right)^{\gamma},\ \ \gamma = \frac{i+2}{i} = 1{,}4,$$

$$p = p_1 n^{-\gamma}. \tag{4}$$

Работа в адиабатном процессе совершается за счет убыли внутренней энергии:

$$\Delta U = \frac{m}{\mu} C_V (T - T_1),\ \ A = \frac{m}{\mu}\frac{i}{2} R (T_1 - T),\ \ p_1V_1 = \frac{m}{\mu} RT_1,\ \ pV = \frac{m}{\mu} RT,$$

$$A = \frac{i}{2}(p_1V_1 - pV). \qquad 5)$$

Произведем вычисления по формулам (1)–(5):
1) изобарный процесс: $p = 1$ МПа, $A = 10$ кДж;
2) изотермический процесс: $p = 0{,}33$ МПа, $A = 5{,}5$ кДж;
3) адиабатный процесс: $p = 0{,}21$ МПа, $A = 4{,}63$ кДж.

Ответ: 1) изобарный процесс: $p = 1$ МПа, $A = 10$ кДж;
2) изотермический процесс: $p = 0{,}33$ МПа, $A = 5{,}5$ кДж;
3) адиабатный процесс: $p = 0{,}21$ МПа, $A = 4{,}63$ кДж.

Пример 8. Некоторая масса кислорода занимает объем $V_1 = 3$ л при температуре $t_1 = 27$ °С и давлении $p_1 = 820$ кПа. В другом состоянии газ имеет параметры $V_2 = 4{,}5$ л и $p_2 = 600$ кПа. Найти количество теплоты Q, полученное газом, работу A, совершенную газом при расширении, и изменение ΔU внутренней энергии газа при переходе газа из одного состояния в другое: а) по участку АСВ; б) по участку *ADB*.

Дано:	*Решение*
$V_1 = 3$ л $t_1 = 27$ °C $p_1 = 820$ кПа $V_2 = 4{,}5$ л $p_2 = 600$ кПа	Построим графики процессов в координатах p, V.
$Q_{ACB} = ?$ $Q_{ADB} = ?$ $A_{ACB} = ?$ $A_{ADB} = ?$ $\Delta U_{ACB} = ?$ $\Delta U_{ADB} = ?$	

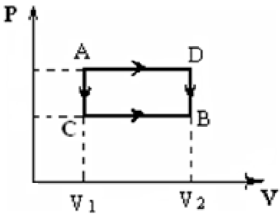


Рис. 2.5

А. Рассмотрим процесс *ACB*: участок *AC* – изохора, т. е. $A_{AC} = 0$, поскольку $\Delta V = 0$. Следовательно:

$$Q_{AC} = \Delta U_{AC} = \frac{5}{2}\frac{m}{\mu}R\Delta T. \quad (1)$$

Согласно уравнению Менделеева – Клапейрона:

$$p_1V_1 = \frac{m}{\mu}RT_1 \quad (2)$$

и

$$p_2V_1 = \frac{m}{\mu}RT_2. \quad (3)$$

Вычтем уравнение (3) из (2). Тогда:

$$(p_1 - p_2)V_1 = \frac{m}{\mu}R\Delta T. \quad (4)$$

Подставив (4) в (1), получим:

$$Q_{AC} = \frac{5}{2}(p_1 - p_2)V_1. \quad (5)$$

Участок *CB* – изобара, следовательно:

$$A_{CB} = p_2(V_2 - V_1). \quad (6)$$

Изменение внутренней энергии на участке *CB*:

$$\Delta U_{CB} = \frac{5m}{2\mu}R\Delta T = \frac{5}{2}A_{CB}. \quad (7)$$

Найдем работу, приращение внутренней энергии и количество теплоты на участке *ACB*.

1. $Q_{ACB} = 4{,}78$ кДж; $A_{ACB} = A_{CB} = p_2(V_2 - V_1) = 0{,}9$ кДж;

$$\Delta U_{CB} = \frac{5}{2}A_{CB} = 3{,}90 \text{ кДж}.$$

Б. Рассмотрим участок ADB. Участок AD – изобарный процесс, следовательно: $A = A_1 = p_1(V_2 - V_1) = 1{,}23$ кДж.

Изменение внутренней энергии на участке AD:

$$\Delta U_{AD} = 2{,}5A_{AD} = 3{,}075 \text{ кДж}.$$

Количество теплоты: $Q_{AD} = 3{,}5A_{AD} = 4{,}305$ кДж.

Участок DB – изохорный процесс: $A_{DB} = 0$,

$$Q_{DB} = \Delta U_{DB} = -2{,}5 \cdot 220 \cdot 4{,}5 = -2{,}475 \text{ кДж};$$

$$Q_{ADB} = 1{,}83 \text{ кДж};$$

$$\Delta U_{ACB} = \Delta U_{ADB} = 0{,}6 \text{ кДж};$$

$$A_{ACB} = 1{,}23 \text{ кДж}.$$

Ответ: $Q_{ADB} = 1{,}83$ кДж; $\Delta U_{ACB} = \Delta U_{ADB} = 0{,}6$ кДж; $Q_{ACB} = 4{,}78$ кДж; $A_{ACB} = 0{,}9$ кДж; $A_{ADB} = 1{,}23$ кДж.

Задания для аудиторной самостоятельной работы

1. Один моль некоторого идеального газа нагрели на $\Delta T = 72$ К, сообщив ему $Q = 1{,}60$ кДж тепла. Найти совершённую газом работу, приращение внутренней энергии.

2. Азот массой $m = 5$ кг, нагретый на $\Delta T = 150$ К, сохранил неизменный объём V. Найти: 1) количество теплоты Q, сообщённое газу; 2) изменение внутренней энергии ΔU; 3) совершённую газом работу A.

3. Какое количество тепла необходимо сообщить азоту при его изобарическом нагревании, чтобы газ совершил работу $A = 2{,}0$ Дж?

4. Показать, что внутренняя энергия воздуха в комнате не зависит от температуры, если наружное давление $p = \text{const}$. Вычислить U, если $p = 10^5$ Па, $V = 40$ м^3.

5. Водород занимает объём $V_1 = 10$ м^3 при давлении $p_1 = 10^5$ Па. Газ нагрели при постоянном объёме до давления $p_2 = 300$ кПа. Определить: 1) изменение внутренней энергии – ΔU; 2) работу A, совершаемую газом; 3) количество теплоты Q, сообщённое газу.

6. Газообразный водород, находившийся при нормальных условиях в закрытом сосуде в объёме $V = 5{,}0$ л, охладили на $T = 55$ К. Найти приращение внутренней энергии газа и количество отданного им тепла.

7. Кислород массой 32 г находится в закрытом сосуде под давлением 0,1 МПа при температуре $T = 290$ К. После нагревания давление в сосуде повысилось в 4 раза. Определить:

1) объём сосуда;

2) температуру, до которой нагрели газ;

3) количество теплоты, сообщённое газу.

8. Два моля идеального газа при температуре $T_0 = 300$ К охладили изохорически, вследствие чего его давление уменьшилось в $n = 2$ раза. Затем газ изобарически расширили так, что в конечном состоянии его температура стала равна первоначальной. Найти количество теплоты, поглощенной газом в данном процессе.

9. Какая работа совершается при изотермическом расширении водорода массой: а) $m = 5$ г, взятого при температуре $T = 290$ К; б) $m = 1$ г, взятого при температуре $T = 280$ К, если объём газа увеличился в $n = 3$ раза?

10. При изотермическом расширении 1 моля кислорода, имевшего температуру $T = 300$ К, газу было передано $Q = 2$ кДж теплоты. Во сколько раз увеличился объём газа?

11. Кислород объёмом $V = 1$ л находится под давлением 1 МПа. Определить, какое количество теплоты необходимо сообщить газу, чтобы: увеличить его объём вдвое в результате изобарного процесса; 2) увеличить его давление вдвое в результате изохорного процесса.

12. Расширяясь, водород совершил работу $A = 6$ кДж. Определить количество теплоты, подведённое к газу, если процесс протекал: 1) изобарически; 2) изотермически.

13. Водород при нормальных условиях имел объём $V_1 = 100$ м^3. Найти изменение внутренней энергии газа при его адиабатическом расширении до $V_2 = 150$ м^3.

14. На нагревание 40 г кислорода от 16 до 40 °C затрачено150 кал. При каких условиях нагревался газ (при постоянном давлении или постоянном объёме)?

1) объём V_2; 2) давление p_2. Начертить график этих процессов.

15. При изотермическом расширении водорода массой $m = 1$ г, имевшего температуру $T = 280$ К, объем газа увеличился в три раза. Определить работу расширения газа и количество теплоты, полученное газом.

16. Азот находится в закрытом сосуде объемом 3 л при температуре 27 °С и давлении $3 \cdot 10^5$ Па. После нагревания давление в сосуде повысилось до $25 \cdot 10^5$ Па. Определить: 1) температуру азота после нагревания; 2) количество сообщенного азоту тепла.

17. Работа расширения некоторого двухатомного идеального газа с жёсткой связью между молекулами $A = 2$ кДж. Определить количество подведённой к газу теплоты, если процесс протекал: 1) изотермически; 2) изобарно.

18. Расширяясь, гелий совершил работу $A = 6$ кДж. Определить количество теплоты, подведенное к газу, если процесс протекал: 1) изобарно; 2) изотермически.

19. Углекислый газ CO_2 массой $m = 400$ г был нагрет на $\Delta T = 50$ К при постоянном давлении. Определить изменение внутренней энергии – ΔU газа, количество теплоты, полученное газом, и совершенную им работу.

20. Давление азота объемом $V = 3$ л при нагревании увеличилось на $\Delta p = 1$ МПа. Определить количество теплоты, полученное газом, если объем газа остался неизменным.

Билеты для самостоятельной работы

Билет 1

1. Записать формулу, определяющую первое начало термодинамики для изобарного процесса.
2. Сформулировать определение изохорного процесса.
3. Двухатомному газу сообщено 500 кал тепла. При этом газ расширяется при постоянном давлении. Найти работу расширения газа.
4. Азот массой $m = 14$ г сжимают изотермически при температуре $T = 300$ К от давления $p_1 = 100$ кПа до давления $p_2 = 500$ кПа. Определить: 1) изменение внутренней энергии газа; 2) работу сжатия; 3) количество выделившейся теплоты.

Билет 2

1. Записать формулу, определяющую первое начало термодинамики для изохорного процесса.
2. Сформулировать определение изотермического процесса.
3. При изобарическом расширении двухатомного газа была совершена работа A. Какое количество тепла было сообщено газу.

4. При адиабатическом расширении кислорода ($\nu = 2$ моль), находящегося при нормальных условиях, его объём увеличился в $n = 3$ раза. Определить: 1) изменение внутренней энергии газа; 2) работу расширения газа.

Билет 3

1. Записать формулу, определяющую первое начало термодинамики для изотермического процесса.
2. Сформулировать определение адиабатного процесса.
3. Кислород объёмом 1 л находится под давлением 1 МПа. Определить, какое количество теплоты необходимо сообщить газу, чтобы: 1) увеличить его объём вдвое в результате изобарного процесса; 2) увеличить его давление вдвое в результате изохорного процесса.
4. 10,5 г азота изотермически расширяются при температуре –23 °С от давления $p_1 = 2{,}5$ атм до $p_2 = 1$ атм. Найти работу, совершённую газом при расширении.

Билет 4

1. Записать формулу, определяющую первое начало термодинамики для адиабатного процесса.
2. Сформулировать определение изобарного процесса.
3. 1 моль азота, находящегося при нормальных условиях, расширяется адиабатически от объёма V_1 до объёма $V_2 = 5V_1$. Найти: 1) изменение внутренней энергии газа; 2) работу, совершённую при расширении.
4. Азот массой $m = 280$ г расширяется в результате изобарного процесса при давлении $p = 1$ МПа. Определить: 1) работу расширения; 2) конечный объём газа, если на расширение затрачена теплота $Q = 5$ кДж, а начальная температура азота $T_1 = 290$ К.

Билет 5

1. Записать формулу, определяющую работу газа при изменении объема для изобарного процесса.
2. Записать формулу, определяющую приращение внутренней энергии в изохорном процессе.
3. Газ расширяется адиабатически, и при этом объём его увеличивается вдвое, а температура (абсолютная) падает в 1,32 раза. Какое число степеней свободы имеют молекулы этого газа?

4. Некоторый газ массой $m = 5$ г расширяется изотермически от объёма V_1 до объёма $V_2 = 2V_1$. Работа расширения $A = 1$ кДж. Определить среднюю квадратичную скорость молекул газа.

Билет 6

1. 7,5 л кислорода адиабатически сжимаются до объёма в 1 л, причём в конце сжатия установилось давление $1{,}6 \cdot 10^6$ Па. Под каким давлением находился газ до сжатия?
2. Азот массой $m = 14$ г сжимается изотермически при температуре $T = 300$ К от давления $p_1 = 100$ кПа до давления $p_2 = 500$ кПа. Определить: 1) изменение внутренней энергии газа; 2) работу сжатия; 3) количество выделившейся теплоты.
3. Записать формулу, определяющую работу газа в адиабатном процессе.
4. Записать формулу, определяющую приращение внутренней энергии в изобарном процессе.

Билет 7

1. Азот массой $m = 1$ кг занимает при температуре $T_1 = 300$ К объём $V_1 = 0{,}5$ м^3. В результате адиабатического сжатия давление газа увеличилось в 3 раза. Определить: 1) конечный объём газа; 2) его конечную температуру; 3) изменение внутренней энергии газа.
2. 400 г углекислого газа было нагрето на $\Delta t = 50$ °С при постоянном давлении. Найти: 1) приращение внутренней энергии газа; 2) работу расширения газа; 3) количество теплоты, полученное газом.
3. Записать формулу, определяющую работу газа при изотермическом расширении.
4. Записать формулу, определяющую приращение внутренней энергии в изохорном процессе.

Домашнее задание

1. Вычислить молярные теплоемкости C_V и C_P газов: 1) гелия; 2) водорода; 3) углекислого газа.

Ответ: 1) $C_V = 12{,}465$ Дж/(моль · К); $C_P = 20{,}775$ Дж/(моль · К);
2) $C_V = 20{,}775$ Дж/(моль · К); $C_P = 29{,}085$ Дж/(моль · К);
3) $C_V = 24{,}93$ Дж/(моль · К); $C_P = 33{,}24$ Дж/(моль · К).

2. Азот массой $m = 5$ кг, нагретый на $\Delta T = 50$ К, сохранил неизменный объем. Найти: 1) количество теплоты, сообщенное газу; 2) изменение внутренней энергии; 3) совершенную газом работу.

Ответ: $\Delta Q = \Delta U = 1{,}885$ Дж.

3. При адиабатном сжатии кислорода массой $m = 1$ кг совершена работа 100 кДж. Определить конечную температуру газа, если до сжатия кислород находился при температуре $T_1 = 300$ К.

Ответ: 454 К.

4. При адиабатном сжатии газа его объем уменьшился в $n = 10$ раз, а давление увеличилось в $k = 21{,}4$ раза. Определить коэффициент адиабаты газа.

Ответ: $\gamma = \dfrac{\ln 21{,}4}{\ln 10}$.

Практическое занятие 2.3 Число степеней свободы. Теплоемкость газа. Показатель адиабаты

1. Число степеней свободы.
2. Теплоемкость газа.
3. Показатель адиабаты.
4. Политропический процесс. Показатель политропы.

Основные формулы

Название ФВ	Формула
Теплоемкость вещества	$$c = \frac{dQ}{dT} \qquad (1)$$
Удельная теплоемкость	$$c = \frac{dQ}{m \cdot dT} \qquad (2)$$
Молярная теплоемкость	$$C_\mu = \frac{dQ}{\nu \cdot dT} \qquad (3)$$
Молярная теплоемкость газа при постоянном объеме	$$C_{\mu V} = \frac{i}{2}R, \qquad (4)$$ где i – число степеней свободы; R – универсальная газовая постоянная, или $$C_{\mu V} = \frac{R}{\gamma - 1} \qquad (4')$$

Название ФВ	Формула
Молярная теплоемкость газа при постоянном давлении	$$C_{\mu p} = \frac{(i+2)}{2}R \qquad (5)$$
Удельная теплоемкость газа при постоянном объеме	$$c_{\mu V} = \frac{i}{2\mu}R \qquad (6)$$
Удельная теплоемкость газа при постоянном давлении	$$c_{\mu p} = \frac{(i+2)}{2\mu}R \qquad (7)$$
Уравнение Майера	$$C_{\mu V} + C_{\mu p} = R \qquad (8)$$
Коэффициент адиабаты	$$\gamma = \frac{C_{\mu p}}{C_{\mu V}} = \frac{c_p}{c_V} = \frac{i+2}{i} \qquad (9)$$ $$\gamma = 1 + \frac{R}{C_V} \qquad (9')$$
Уравнение адиабаты	$$pV^{\gamma} = \mathrm{const} \qquad (10)$$ $$TV^{\gamma-1} = \mathrm{const} \qquad (11)$$
Уравнение политропы	$$pV^{n} = \mathrm{const} \qquad (12)$$ $$TV^{n-1} = \mathrm{const} \qquad (13)$$
Показатель политропы	$$n = \frac{\left(C - C_p\right)}{\left(C - C_V\right)} \qquad (14)$$
Связь теплоемкости с показателем политропы	$$C = \frac{\left(nC_V - C_p\right)}{n} - 1 \qquad (15)$$
Внутренняя энергия моля идеального газа	$$U_{1\text{м}} = \frac{RT}{\gamma - 1} \qquad (16)$$
Внутренняя энергия произвольной массы идеального газа	$$U = \frac{pV}{\gamma - 1} \qquad (17)$$

Методические указания

Из экспериментальных опытов известно, что сообщение разным телам одинакового количества теплоты приводит к нагреванию их до различной разности температур. Поэтому для характеристики нагретости тел вводят понятие теплоёмкости вещества (1). Обычно рассчитывают величины: удельной (2) и молярной (3) теплоемкостей вещества (тела).

Теплоёмкость зависит от условий нагревания тела. Для газов наибольший интерес представляют теплоёмкости для случаев нагревания при постоянном объеме и постоянном давлении. В первом случае будем иметь дело с молярной – $C_{\mu V}$ (4) или удельной – $c_{\mu V}$ (6) теплоёмкостью при постоянном объеме, а во втором с молярной – $C_{\mu P}$ (4) или удельной – $c_{\mu P}$ (7) теплоёмкостью при постоянном давлении.

Отношение молярной теплоёмкости при постоянном давлении к молярной теплоёмкости при постоянном объёме называют показателем адиабаты – γ, или коэффициентом Пуассона (9).

Коэффициент Пуассона (показатель адиабаты) можно определить, зная число степеней свободы данного газа. Уравнения адиабаты определяются выражениями (10) и (11), а политропы – (12) и (13).

Процессы, в ходе которых теплоемкость тела остается постоянной, называются политропическими. Все четыре изопроцесса являются политропическими. При политропическом процессе газ кроме уравнения состояния подчиняется еще дополнительному условию: (C = const). Показатель политропы определяется соотношением (14).

Примеры решения задач

Пример 1. Вычислите показатель адиабаты смеси водорода и неона, если массовые доли газов в смеси одинаковы.

Дано:	*Решение*
$k = 0{,}5$	Показатель адиабаты равен: $\gamma = c_p/c_V$,
$i_1 = 5$	где c_p и c_V – удельные теплоемкости при
$i_2 = 3$	постоянном давлении и постоянном объ-
$\mu_2 = 20 \cdot 10^{-3}$ кг/моль	еме. Удельную теплоемкость при постоян-
$\mu_1 = 2 \cdot 10^{-3}$ кг/моль	ном объеме смеси газа найдем, используя
$\gamma = ?$	соотношения:

$$Q = c_V(m_1 + m_2)\Delta T. \tag{1}$$

$$Q = (c_{V1} m_1 + c_{V2} m_2)\Delta T. \tag{2}$$

Из соотношений (1) и (2) следует:

$$c_V = c_{V1}\frac{m_1}{m_1+m_2} + c_{V2}\frac{m_2}{m_1+m_2},$$

где $\frac{m_1}{m_1+m_2} = k_1$ и $\frac{m_2}{m_1+m_2} = k_2$ – массовые доли водорода и неона соответственно. Учитывая, что $k_1 = k_2$, получаем $c_V = k(c_{V1} + c_{V2})$.

Рассуждая аналогично, получим формулу для вычисления удельной теплоемкости при постоянном давлении:

$$c_p = k\left(c_{p1} + c_{p2}\right).$$

Учитывая, что $c_V = \frac{i}{2}\cdot\frac{R}{\mu}$ и $c_p = \frac{i+2}{2}\cdot\frac{R}{\mu}$, получим $c_V = \frac{Rk}{2}\left(\frac{i_1}{\mu_1} + \frac{i_2}{\mu_2}\right)$, $c_p = \frac{Rk}{2}\left(\frac{i_1+2}{\mu_1} + \frac{i_2+2}{\mu_2}\right)$, отсюда

$$\gamma = \frac{(i_1+2)\mu_2 + (i_2+2)\mu_1}{i_1\mu_2 + i_2\mu_1}. \quad (3)$$

Расчет: $\gamma = 1{,}42$.

Ответ: $\gamma = 1{,}42$

Пример 2. Идеальный двухатомный газ расширяется согласно уравнению $pV^n = \text{const}$, где $n = 1{,}2$. При расширении объем газа увеличивается в 2 раза. Определите изменение внутренней энергии газа и совершенную им работу, если в начале процесса объем газа был равен 6 л, а давление $2 \cdot 10^5$ Па. Чему равна молярная теплоемкость в этом процессе?

Дано:	*Решение*
$V_1 = 6 \cdot 10^{-3}$ м^3 $p_1 = 2 \cdot 10^5$ Па $V_2 = 12 \cdot 10^{-3}$ м^3 $n = 1{,}2$	Процесс расширения газа является политропическим. Изменение внутренней энергии газа можно рассчитать по формуле
ΔU; A; C = ?	$$\Delta U = \frac{i}{2}\frac{m}{\mu}R(T_2 - T_1). \quad (1)$$

Данное выражение преобразуем, используя уравнение Менделеева – Клапейрона:

$$\Delta U = \frac{i}{2}\left(p_2V_2 - p_1V_1\right). \quad (2)$$

Давление p_2 найдем, используя уравнение политропы:

$$pV^n = \text{const}. \tag{3}$$

Тогда: $p_1V_1^n = p_2V_2^n$, тогда:

$$p_2 = p_1\left(V_1/V_2\right)^n. \tag{4}$$

Из (2) и (1) следует:

$$\Delta U = \frac{i}{2}p_1\left[\left(V_1/V_2\right)^n \cdot V_2 - V_1\right]. \tag{5}$$

Работу газа рассчитаем по формуле

$$A = \int_{V_1}^{V_2} p\Delta V. \tag{6}$$

Подставим (4) в (6), получим:

$$A = p_1V_1^n\int_{V_1}^{V_2}\frac{dV}{V} = p_1V_1^n \cdot \frac{1}{n-1}\left(\frac{1}{V_1^{n-1}} - \frac{1}{V_2^{n-1}}\right) = \frac{1}{n-1}\left(\frac{p_1V_1^n}{V_1^{n-1}} - \frac{p_1V_1^n}{V_2^{n-1}}\right), \tag{7}$$

или

$$A = \frac{1}{n-1}\left(p_1V_1 - p_2V_1\right) = \frac{p_1}{n-1}\left[V_1 - \left(V_1/V_2\right)^n\right]. \tag{8}$$

Молярная теплоемкость газа

$$C = \frac{Q}{\nu\Delta T} = \frac{Q}{\nu(T_2 - T_1)}. \tag{9}$$

С учетом выражений (2) и (8) первое начало термодинамики запишем в виде:

$$Q = \frac{i}{2}(p_2V_2 - p_1V_1) + \frac{1}{(n-1)}(p_1V_1 - p_2V_2) =$$

$$= \left(\frac{i}{2} - \frac{1}{n-1}\right)(p_2V_2 - p_1V_1). \tag{10}$$

Используя уравнение Менделеева – Клапейрона, получим:

$$Q = \nu\left(\frac{i}{2} - \frac{1}{n-1}\right)R(T_2 - T_1). \tag{11}$$

Подставим выражение (11) в (9):

$$C = \left(\frac{i}{2} - \frac{1}{n-1}\right)R. \tag{12}$$

Произведем вычисления по формулам (5), (8) и (12):

$\Delta U = -400$ Дж; $A = 780$ Дж; $C = -21$ Дж/(моль · К).

Ответ: $\Delta U = -400$ Дж; $A = 780$ Дж; $C = -21$ Дж/(моль · К).

Пример 3. Найти для идеального газа уравнение такого процесса, при котором теплоемкость газа изменяется с температурой по закону $C = \alpha/T$, где $\alpha = \text{const}$.

Дано:	*Решение*
$C = \alpha/T$ $\alpha = \text{const}$	Процесс не политропный. Поэтому применим первое начало термодинамики в дифференциальной форме:
Уравнение процесса – ?	

$$\delta Q = dU + \delta A. \tag{1}$$

Для одного моля газа:

$$\frac{\alpha}{T}dT = C_V dT + pdV. \tag{2}$$

Используя уравнение Менделеева – Клапейрона, перепишем это уравнение в виде:

$$\frac{\alpha}{T}dT = C_V dT + RT\frac{dV}{V}. \tag{3}$$

Разделив переменные и проинтегрировав, получим:

$$-\frac{\alpha}{RT} = \frac{1}{\gamma - 1}\ln T + \ln V + \text{const}. \tag{4}$$

Отсюда находим искомое уравнение процесса:

$$VT^{1/(\gamma-1)}e^{(\alpha/RT)} = \text{const}. \tag{5}$$

Ответ: $VT^{1/(\gamma-1)}e^{(\alpha/RT)} = \text{const}$.

Пример 4. В цилиндрах карбюраторного двигателя внутреннего сгорания газ сжимается политропически так, что после сжатия температура газа становится равной t_2 = 427 °C. Начальная температура t_1 = 140 °C газа. Степень сжатия V_2/V_1 = 5,8. Найти показатель политропы n.

Дано:	*Решение*
t_2 = 427 °C V_2/V_1 = 5,8 t_1 = 140 °C	Из уравнения политропического процесса $T_2 = T_1 \cdot 5{,}8^{n-1}$ или $\frac{T_2}{T_1} = 5{,}8^{n-1}$.
n = ?	

Прологарифмируем полученное выражение:

$$\ln\frac{T_2}{T_1} = \ln 5{,}8^{n-1} \quad \text{или} \quad \ln\frac{T_2}{T_1} = (n-1)\ln 5{,}8,$$

откуда: $n = \dfrac{\ln(T_2/T_1)}{\ln 5{,}8} + 1$; $n = 1{,}3$.

Ответ: $n = 1{,}3$.

Пример 5. Работа расширения некоторого двухатомного идеального газа составляет $A = 2$ кДж. Определите количество подведенной к газу теплоты, если процесс протекал: 1) изотермически; 2) изобарно.

Дано:	*Решение*
$A = 2$ кДж $= 2 \cdot 10^3$ Дж	
$i = 5$	
1) $T = \text{const}$	
2) $p = \text{const}$	
$Q_1 = ?$	
$Q_2 = ?$	

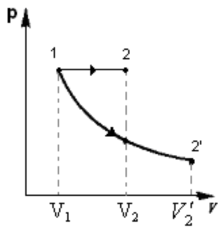


Рис. 2.6

Из уравнения политропы:

$$Q_1 = \Delta U + A,\ T = \text{const},\ \Delta U = 0,\ Q_1 = A;$$

$$p = \text{const},\ A = p\Delta V,\ p\Delta V = \frac{m}{\mu}R\Delta T,\ A = \frac{m}{\mu}R\Delta T,$$

$$\Delta T = \frac{\mu A}{mR},\ \Delta U = \frac{m}{\mu}C_V,\ \Delta T = \frac{m}{\mu}\frac{i}{2}R\cdot\frac{\mu A}{mR} = \frac{iA}{2},$$

$$Q_2 = \Delta U + A = \frac{i}{2}A + A = A\left(\frac{i}{2} + 1\right).$$

Вычисляем. $Q_1 = 2$ кДж; $Q_2 = 7$ кДж.

Задания для аудиторной самостоятельной работы

1. Газ расширяется адиабатически, причем объем его увеличивается вдвое, а термодинамическая температура падает в 1,32 раза. Какое число степеней свободы i имеют молекулы этого газа?

2. Идеальный двухатомный газ, занимающий объем 4 л при давлении 300 кПа, расширяется адиабатно до объема 6 л. Затем в ходе

изохорного охлаждения давление газа падает до 100 кПа. Определите работу газа, изменение внутренней энергии и количество теплоты, отданное газом. Изобразите процесс графически.

3. При адиабатном расширении объем азота увеличился в пять раз, а внутренняя энергия уменьшилась на 4 кДж. Определите массу азота, если начальная температура его была 400 К.

4. 10 г кислорода находятся под давлением 300 кПа при температуре 10 °С. После нагревания при p = const газ занял объем 10 л. Найдите количество теплоты Q, полученное газом, изменение ΔW внутренней энергии газа и работу A, совершенную газом при расширении.

5. Определить значение молярной теплоёмкости при постоянном давлении, число и характер степеней свободы молекул газа, для которых показатель адиабаты равен: а) 1,40; б) 1,29.

6. Газ расширяется адиабатически так, что его давление падает от 200 до 100 кПа. Затем нагревается при постоянном объёме до первоначальной температуры, причём его давление возрастает до 122 кПа. Определить показатель адиабаты.

7. В качестве газонаполнителя в лампах накаливания используется смесь, состоящая по массе из 86 % аргона ($\mu_{Ar} = 40 \cdot 10^{-3}$ кг/моль) и 14 % азота ($\mu_{N_2} = 28$ г/моль). Температура газа в лампе $T = 400$ К. Найти показатель адиабаты для этой смеси.

8. Объясните, почему расширение газа при постоянной температуре возможно только при подведении к нему тепла.

9. Объём газа увеличился в два раза: один раз изотермически, другой раз изобарически. В каком из двух этих случаев газ совершит большую работу?

10. Идеальный газ с показателем адиабаты γ совершает процесс, при котором его внутренняя энергия зависит от объёма по закону $U = bV^a$, где b и a – положительные константы. Найти:

1) работу, которую произведёт газ, и количество теплоты, которое надо сообщить ему, чтобы внутренняя энергия испытала приращение ΔU;
2) молярную теплоёмкость газа в этом процессе.

11. Идеальный газ, показатель адиабаты которого γ, расширяется так, что сообщаемое газу количество теплоты равно убыли его внутренней энергии. Найти:
1) молярную теплоёмкость газа в этом процессе;
2) уравнение процесса в параметрах T; V;
3) совершённую газом работу при увеличении его объёма в η раз.

12. Какое количество тепла необходимо для нагревания $m = 7$ г азота (N_2) (связь между молекулами жёсткая) от $t_1 = 10$ °С до $t_2 = 25$ °С при постоянном давлении? На сколько увеличится при этом внутренняя энергия газа? Какую работу совершает газ?

13. Два различных газа, один из которых одноатомный, а другой — двухатомный, находятся при одинаковой температуре и занимают одинаковый объем. Газы сжимают адиабатически так, что объем их уменьшается в 2 раза. Какой из газов нагреется больше и во сколько раз?

14. 1 кг воздуха, находящегося при температуре 30 °С и давлении 1,5 атм, расширяется адиабатически, и давление при этом падает до 1,0 атм. Найти: 1) степень расширения; 2) конечную температуру; 3) работу, совершенную газом при расширении.

Билеты для самоконтроля

Билет 1

1. Записать формулу, определяющую: 1) молярную теплоемкость вещества; 2) связь между молярной и удельной теплоемкостями вещества.
2. Записать определение теплоемкости вещества (тела).
3. Идеальный газ, показатель адиабаты которого γ, расширяется так, что сообщаемое газу количество теплоты равно убыли его внутренней энергии. Найти молярную теплоёмкость газа в этом процессе.

Билет 2

1. Записать формулу, определяющую: 1) уравнение адиабаты в координатах p, V; 2) связь между показателем адиабаты и числом степеней свободы газа.
2. Записать определение молярной теплоемкости вещества (тела).

3. Вычислить удельные теплоемкости водорода при постоянном объеме и давлении, принимая водород за идеальный газ.

Билет 3

1. Записать формулу, определяющую: 1) уравнение политропы в координатах p, V; 2) связь между молярными теплоемкостями газа при постоянном давлении и постоянном объеме.
2. Записать определение политропического процесса.
3. Вычислить удельные теплоемкости неона при постоянном объеме и давлении, принимая его за идеальный газ.

Билет 4

1. Записать формулу, определяющую: 1) уравнение политропы в координатах p, V; 2) связь между молярными теплоемкостями газа при постоянном давлении и постоянном объеме.
2. Записать определение политропического процесса.
3. Газ расширяется адиабатически так, что его давление падает от 2 до 1 атм. Затем он нагревается при постоянном объёме до первоначальной температуры, причём его давление возрастает до 1,22 атм. Определить отношение $\frac{C_p}{C_V}$ для этого газа. Начертить график этого процесса.

Билет 5

1. Записать формулу, определяющую: 1) молярную теплоемкость газа при постоянном объеме; 2) связь между показателем адиабаты и числом степеней свободы газа.
2. Чему равен показатель политропы для адиабатного процесса?
3. Вычислить удельные теплоемкости углекислого газа при постоянном объеме и давлении, принимая его за идеальный газ.

Билет 6

1. В сосуде под поршнем находится газ при нормальных условиях. Расстояние между дном сосуда и дном поршня равно 25 см. Когда на поршень положили груз массой 620 кг, поршень опустился на 13,4 см. Считая сжатие адиабатическим, найти для данного газа отношение $\frac{C_p}{C_V}$. Площадь поперечного сечения поршня равна 10 см^2; весом поршня пренебречь.

2. Записать формулу, определяющую: 1) уравнение Майера; 2) выражение для числа степеней свободы газа через показатель адиабаты.
3. Вычислить удельные теплоемкости окиси углерода при постоянном объеме и давлении, принимая его за идеальный газ.

Домашнее задание

1. 28 г азота, находящегося при температуре 40 °C и давлении 750 мм рт. ст., сжимается до объёма 13 л. Найти температуру и давление азота после сжатия, если азот сжимается: 1) изотермически; 2) адиабатически. Найти работу сжатия в каждом из этих случаев.

Ответ: 1) 313 °C; $2{,}0 \cdot 10^5$ Па; –1000 Дж. 2) 413 °C; $2{,}6 \cdot 10^5$ Па; –2080 Дж.

2. Объясните, почему расширение газа при постоянной температуре возможно только при подведении к нему тепла.

Ответ: при расширении без подведения тепла газ совершает работу и охлаждается.

3. Идеальный газ совершает цикл Карно. Температура охладителя равна 290 K. Как изменится η, если:
1) температура нагревателя увеличится от $T_н' = 400$ K до $T_н'' = 600$ K;
2) температура нагревателя увеличится от 300 K до 600 K;
3) температура охладителя уменьшится на 100 K при $T_н = 600$ K;
4) температура охладителя уменьшится на 50 K при $T_н = 400$ K.

4. Определить приращение энтропии при изотермическом расширении азота массой 10 г, если давление газа уменьшилось от 0,1 МПа до 50 кПа.

Ответ: 2,06 Дж/K.

Практическое занятие 2.4
Энтропия. Циклы

1. Энтропия.
2. Второе начало термодинамики.
3. КПД тепловой машины.
4. Цикл Карно.

Основные формулы

Название ФВ	Формула
Элементарное приращение энтропии в равновесном процессе	$dS = \partial Q/T$, (1) где ∂Q – элементарное количество теплоты, полученной системой
Конечное приращение энтропии системы	$\Delta S \geq \int \partial Q/T$, (2) где знак «=» соответствует равновесному процессу, знак «>» – неравновесному; T – температура тела, отдающего тепло
Связь между энтропией и статистическим весом состояния термодинамической системы	$S = k\mathrm{Ln}(w)$ (3)
Изменение энтропии идеального газа в произвольном процессе	$\Delta S_{1\to 2} = S_2 - S_1 = \frac{m}{\mu}\left(C_V \ln\frac{T_2}{T_1} + R\ln\frac{V_2}{V_1}\right)$ (4)
Изменение энтропии при адиабатном процессе	$\partial Q = 0$; следовательно, $\Delta S = 0$ (5)
Изменение энтропии при изотермическом процессе	$\Delta S = \frac{m}{\mu} R\ln\frac{V_2}{V_1}$ (6)
Изменение энтропии при изохорическом процессе	$\Delta S = \frac{m}{\mu} C_V \ln\frac{T_2}{T_1}$ (7)
Термический коэффициент полезного действия (КПД) цикла в общем случае	$\eta = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1}$, (8) где Q_1 – количество теплоты, полученное рабочим телом (газом) от нагревателя; Q_2 – количество теплоты, переданное рабочим телом охладителю

Название ФВ	Формула
КПД цикла Карно	$$\eta = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} \text{ или } \eta = \frac{T_1 - T_2}{T_1}, \qquad (9)$$ где T_1 – температура нагревателя; T_2 – температура охладителя
Эффективность холодильной машины	$$\eta' = \frac{Q_2}{A'} = \frac{Q_2}{Q_1 - Q_2}, \qquad (10)$$ где Q_2 – отнятое от охлаждаемого тела тепло; A' – работа, затрачиваемая на приведение машины в действие

Методические указания

При решении задач часто бывает нужно рассчитать изменение (приращение или убыль) энтропии. Для равновесных (обратимых) термодинамических процессов расчет производится по формулам (1) и (2).

При расчете изменения энтропии идеального газа в произвольном процессе используют формулы (4)–(7).

Для расчёта энтропии больших систем используется свойство аддитивности энтропии: энтропия системы равна сумме энтропий её частей.

Если процесс происходит в несколько стадий (например, плавление, потом нагревание и т. д.), то рассчитывается изменение энтропии на каждой из стадий, а затем ищется алгебраическая сумма этих изменений.

Для расчёта изменения энтропии при необратимых процессах учитываем, что энтропия является функцией состояния термодинамической системы и её изменение не зависит от вида процесса. Поэтому для расчёта необратимый процесс можно мысленно заменить на любой обратимый с теми же начальными и конечными состояниями. Изменение энтропии системы в таком процессе будет тем же самым. Так же можно поступать и в тех случаях, когда прямой расчёт по обратимому процессу, указанному в условии задачи, неудобен или нецелесообразен.

КПД тепловой машины в общем случае рассчитывается по формуле (8), где A представляет собой полную работу, совершённую за цикл (т. е. алгебраическую сумму работ на всех участках цикла).

Формулу (9) можно использовать для определения КПД только для цикла Карно или максимально возможного значения КПД реального цикла.

Примеры решения

Пример 1. В результате нагревания массы m = 22 г азота его термодинамическая температура увеличилась от T_1 до $T_2 = 1{,}2T_1$, а энтропия увеличилась на ΔS = 4,19 Дж/К. При каких условиях производилось нагревание азота (при постоянном объеме или постоянном давлении)?

Дано:	*Решение*
m = 22 г $T_2 = 1{,}2T_1$ ΔS = 4,19 Дж/К $\mu = 28 \cdot 10^{-3}$ кг/моль	Изменение энтропии: $$\Delta S = \frac{x}{2}\frac{m}{\mu}R\ln\frac{T_2}{T_1}. \qquad (1)$$ Если газ двухатомный, то число степеней свободы, приписываемых газу, равно $i = 5$.
V или p = const?	

Выразим величину x:

$$x = \frac{2\mu\Delta S}{mR\ln(T_2/T_1)}. \qquad (2)$$

Рассчитав величину x, получим ответ на вопрос задачи.

По определению: $C_{\mu p} = \frac{(i+2)}{2}R$. Следовательно, для изобарного процесса: $x = (i + 2) = 7$. Тогда если $x = 7$, то p = const, а если $x = 5$, то V = const.

Расчет дает значение $x = 7$, следовательно, нагревание производилось при постоянном давлении.

Ответ: газ двухатомный, нагревание производилось при постоянном давлении.

Пример 2. Найдите приращение ΔS энтропии при превращении m = 10 г льда (t^o = –20 °C) в пар (t^o_n = 100 °C).

Дано:	*Решение*
$m = 10^{-2}$ кг T =253 K T_n = 373 K	В системе совершаются 4 процесса: 1) нагревание льда как твердого тела до температуры плавления; 2) плавление льда; 3) нагрев воды, полученной изо льда, до температуры кипения; 4) превращение воды в пар.
ΔS = ?	

При переходе из одного агрегатного состояния в другое общее изменение энтропии складывается из изменений её в отдельных процессах:

$$\Delta S = \Delta S_1 + \Delta S_2 + \Delta S_3 + \Delta S_4. \tag{1}$$

По определению:

$$\Delta S_n = \frac{m}{\mu}\left(\frac{i}{2}R \cdot \ln\frac{T_2}{T_1} + R \cdot \ln\frac{V_2}{V_1}\right). \tag{2}$$

1. Рассчитаем приращение энтропии в процессе нагревания льда от T до T_0 (T_0 – температура плавления):

$$\Delta S_1 = \int_T^{T_0} \frac{mc_л dT}{T} = mc_л \ln\frac{T_0}{T}, \tag{3}$$

где $c_л = 2{,}1$ кДж/(кг · К) – удельная теплоемкость льда.

2. Рассчитаем приращение энтропии в процессе плавления льда:

$$\Delta S_2 = \int_1^2 \frac{dQ}{T_0} = \frac{m\lambda}{T_0}, \tag{4}$$

где $\lambda = 0{,}33$ МДж/кг – удельная теплота плавления.

3. Рассчитаем приращение энтропии в процессе нагревания воды от T_0 до T_n:

$$\Delta S_3 = \int_{T_0}^{T_n} \frac{mc_в dT}{T} = mc_в \ln\frac{T_n}{T_0}, \tag{5}$$

где $c_в = 4{,}19$ кДж/(кг · К) – удельная теплоемкость воды.

4. Рассчитаем приращение энтропии в процессе испарения воды при температуре T_n:

$$\Delta S_4 = \int_1^2 \frac{dQ}{T_n} = \frac{mr}{T_n}, \tag{6}$$

где $r = 2{,}26$ МДж/кг – удельная теплота парообразования.

Найдем суммарное приращение энтропии, подставив в (1) соотношения (3), (4), (5), (6):

$$\Delta S = mc_л \ln\frac{T_0}{T} + \frac{m\lambda}{T_0} + mc_в \ln\frac{T_n}{T_0} + \frac{mr}{T_n}. \tag{7}$$

Произведем вычисления по формуле (7), получим: $\Delta S = 87{,}6$ Дж/К.

Ответ: $\Delta S = 87{,}6$ Дж/К.

Пример 3. Определите изменение ΔS энтропии при изотермическом расширении кислорода массой m = 10 г от объёма V_1 = 25 л до объема V_2 = 100 л.

Дано:	*Решение*
$m = 10^{-2}$ кг	Для изотермического процесса:
$V_1 = 25 \cdot 10^{-3}$ м^3	$$\Delta S = \frac{1}{T}\int_1^2 \partial Q = \frac{Q}{T}. \quad (1)$$
$V_2 = 0{,}1$ м^3	
ΔS = ?	

Количество теплоты Q, полученное газом, найдем из первого начала термодинамики: $Q = \Delta U + A$. Для изотермического процесса $\Delta U = 0$, следовательно,

$$Q = A. \quad (2)$$

Работа в изотермическом процессе равна:

$$A = \frac{m}{\mu} RT \ln \frac{V_2}{V_1}. \quad (3)$$

С учетом выражений (2) и (3) равенство (1) примет вид:

$$\Delta S = \frac{m}{\mu} R \ln \frac{V_2}{V_1}. \quad (4)$$

Подставим в выражение (4) числовые значения и получим ответ на вопрос задачи.

Расчет: ΔS = 3,6 Дж/К.

Ответ: ΔS = 3,6 Дж/К.

Пример 4. Найдите изменение ΔS энтропии при изобарическом расширении массы m = 8 г гелия от объёма V_1 = 10 л до объёма V_2 = 25 л.

Дано:	*Решение*
$m = 8 \cdot 10^{-3}$ кг	Изменение энтропии:
$V_1 = 10^{-2}$ м^3	$$\Delta S = \int_1^2 \frac{\partial Q}{T}, \quad (1)$$
$V_2 = 25 \times 10^{-3}$ м^3	
ΔS = ?	где $\partial Q = C_p \frac{m}{\mu} dT$, так как p = const.

Теплоемкость при постоянном давлении:

$$C_p = \frac{i+2}{2} R. \quad (2)$$

Тогда:

$$\Delta S=\int_1^2 C_p \frac{m}{\mu}\frac{dT}{T}=\frac{i+2}{2}\frac{m}{\mu}R\ln T\Big|_1^2=\frac{i+2}{2}\frac{m}{\mu}R\ln\frac{T_2}{T_1}. \qquad (3)$$

Так как гелий – одноатомный газ, то число степеней свободы $i=3$, и так как $p=\text{const}$, то $\frac{V_1}{T_1}=\frac{V_2}{T_2}$ или $\frac{V_2}{V_1}=\frac{T_2}{T_1}$, следовательно,

$$\Delta S=\frac{5}{2}\frac{m}{\mu}R\ln\frac{V_2}{V_1}. \qquad (4)$$

Произведем вычисления по формуле (4): $\Delta S = 38{,}1$ Дж/К.

Ответ: $\Delta S = 38{,}1$ Дж/К.

Пример 5. Изменение энтропии на участке между двумя адиабатами в цикле Карно равно 4,19 кДж/К, разность температур между двумя изотермами 100 К. Какое количество теплоты Q превращается в работу в этом цикле?

Дано:	*Решение*
$\Delta S = 4190$ Дж/К	Изменение энтропии:
$\Delta T = 100$ К	$$\Delta S=\int\frac{\partial Q}{T}=\frac{Q_1}{T_1}. \qquad (1)$$
$A = ?$	

Откуда температура нагревателя:

$$T_1=\frac{Q_1}{\Delta S}. \qquad (2)$$

КПД цикла Карно:

$$\eta=\frac{T_1-T_2}{T_1}=\frac{\Delta T\Delta S}{Q_1}. \qquad (3)$$

С другой стороны,

$$\eta=\frac{A}{Q_1}. \qquad (4)$$

Тогда: $\frac{\Delta T\Delta S}{Q_1}=\frac{A}{Q_1}$, откуда:

$$A=\Delta S\Delta T. \qquad (5)$$

Подставив заданные значения в формулу (5), получим искомое значение.

Расчет: $A = 419$ кДж.

Ответ: $A = 419$ кДж.

Пример 6. Массу m = 640 г расплавленного свинца при температуре плавления $t_{пл}$ вылили на лёд (t = 0 °C). Найти изменение ΔS энтропии при этом процессе.

Дано:	*Решение*
m = 640 г t = 0 °C	Предположим, что система «свинец – лёд» замкнута, т. е. потерь тепла во внешнюю среду не происходит и весь образовавшийся пар сконденсировался и остался внутри системы в виде воды.
ΔS = ?	

Тогда изменение энтропии системы ΔS будет складываться из изменения энтропии свинца ΔS_1 при затвердевании, изменения энтропии свинца ΔS_2 при охлаждении до t = 0 °C и изменения энтропии льда при таянии ΔS_3.

То есть

$$\Delta S = \Delta S_1 + \Delta S_2 + \Delta S_3. \tag{1}$$

Задачу рассматриваем при условии, что льда имеется достаточное количество для поддержания температуры t = 0 °C.

Обозначим: T_1 = 600 K – температура плавления свинца, T_2 = 273 K – температура таяния льда.

Тогда:

$$\Delta S_1 = -\int_1^2 \frac{dQ_1}{T_1} = -\frac{m\lambda}{T_1}, \tag{2}$$

где λ = 22,6 кДж/кг – удельная теплота плавления (кристаллизации) свинца. Приращение энтропии при затвердевании свинца:

$$\Delta S_2 = \int_{T_1}^{T_2} \frac{mc_c dT}{T} = mc_c \ln\frac{T_2}{T_1}, \tag{3}$$

где c_c = 126 Дж/(кг · K) – удельная теплоемкость свинца.

Приращение энтропии при таянии льда:

$$\Delta S_3 = \frac{Q_3}{T_2}. \tag{4}$$

В соответствии с законом сохранения энергии:

$$Q_3 = Q_1 + Q_2 = \lambda m + cm(T_1 - T_2), \tag{5}$$

отсюда:

$$\Delta S_3 = \frac{\lambda m + cm(T_1 - T_2)}{T_2}. \tag{6}$$

Следовательно, полное изменение энтропии системы будет равно:

$$\Delta S = -\frac{m\lambda}{T_1} + mc_{\text{c}} \ln\frac{T_2}{T_1} + \frac{\lambda m + cm(T_1 - T_2)}{T_2}. \qquad (7)$$

Подставляя в формулу (7) числовые данные, окончательно получаем:

$$\Delta S = -\frac{0{,}64 \cdot 22{,}6 \cdot 10^3}{600} + 0{,}64 \cdot 126 \cdot (-0{,}79) +$$

$$+\frac{22{,}6 \cdot 10^3 \cdot 0{,}64 + 126 \cdot 0{,}64(600 - 273)}{273} = 62{,}2 \text{ Дж/К}.$$

Ответ: $\Delta S = 62{,}2$ Дж/К.

Пример 7. При нагревании двухатомного идеального газа (v = 2 моль) его термодинамическая температура увеличилась в $n = 2$ раза. Определите изменение энтропии, если нагревание происходит: 1) изохорно; 2) изобарно.

Дано:	*Решение*
$i = 5$ $v = 2$ моль $n = \frac{T_2}{T_1} = 2$ 1) $V = \text{const}$ 2) $p = \text{const}$ $\Delta S_1 = ?$ $\Delta S_2 = ?$	1. Рассмотрим изохорный процесс. $V = \text{const}\ \ dQ = \nu C_V dT,\ C_V = \frac{i}{2}R,$ $\Delta S_1 = \int_1^2 \frac{dQ}{T} = \int_{T_1}^{T_2} \nu C_V \frac{dT}{T} = \nu C_V \ln\frac{T_2}{T_1},$ $\Delta S_1 = \nu\frac{i}{2}R\ln\frac{T_2}{T_1} = \nu\frac{i}{2}R\ln n. \qquad (1)$

2. Рассмотрим изобарный процесс.

$$p = \text{const}\ \ \Delta S_2 = \int_1^2 \frac{dQ}{T} = \int_{T_1}^{T_2} \nu C_p \frac{dT}{T} = \nu C_p \ln\frac{T_2}{T_1},$$

$$\Delta S_2 = \nu\frac{i+2}{2}R\ln\frac{T_2}{T_1} = \nu\frac{i+2}{2}R\ln n. \qquad (2)$$

Расчеты: $\Delta S_1 = 28{,}8$ Дж/К; $\Delta S_2 = 40{,}3$ Дж/К.

Ответ: $\Delta S_1 = 28{,}8$ Дж/К; $\Delta S_2 = 40{,}3$ Дж/К.

Пример 8. Найти изменение ΔS энтропии при переходе массы $m = 8$ г кислорода от объема $V_1 = 10$ л при температуре $t_1 = 80$ °С к объему $V_2 = 40$ л при температуре $t_2 = 300$ °С.

Дано:	*Решение*
$m = 8$ г; $i = 5$ $V_1 = 10$ л $t_1 = 80$ °С $V_2 = 40$ л $t_2 = 300$ °С	Изменение энтропии при переходе вещества из состояния 1 в состояние 2:
$S = ?$	

$$\Delta S = \int_1^2 \frac{dQ}{T}, \qquad (1)$$

где согласно первому началу термодинамики:

$$dQ = dU + dA = \frac{m}{\mu} C_V dT + pdV. \qquad (2)$$

Из уравнения Менделеева – Клапейрона: $p = \frac{m}{\mu}\frac{RT}{V}$, тогда:

$$dQ = \frac{m}{\mu} C_V dT + \frac{m}{\mu}\frac{RT}{V} dV.$$

Проинтегрировав, получаем:

$$\Delta S = \frac{m}{\mu}\frac{i}{2} R \ln\frac{T_2}{T_1} + \frac{m}{\mu} R \ln\frac{V_2}{V_1}. \qquad (3)$$

Расчет: $\Delta S = 5{,}4$ Дж/К.

Ответ: $\Delta S = 5{,}4$ Дж/К.

Пример 9. Определить изменение энтропии 1 моля идеального газа в изобарном, изохорном и изотермическом процессах.

Дано:	*Решение*
$\nu = 1$ моль 1) $p = \mathrm{const}$ 2) $V = \mathrm{const}$ 3) $T = \mathrm{const}$	Физическая система «1 моль идеального газа» участвует в трех изопроцессах. Эти процессы квазистатические и обратимые. Следовательно, изменение энтропии для изобарного процесса можно рассчитать по формуле
$\Delta S_p = ?$ $\Delta S_V = ?$ $\Delta S_T = ?$	

$$\Delta S_p = \int_{T_1}^{T_2} \frac{\delta Q}{T} = \int_{T_1}^{T_2} \frac{C_p dT}{T} = C_p \ln\frac{T_2}{T_1} = C_p \ln\frac{V_2}{V_1}. \qquad (1)$$

Для изохорного процесса:

$$\Delta S_V = \int_{T_1}^{T_2} \frac{\delta Q}{T} = \int_{T_1}^{T_2} \frac{C_V dT}{T} = C_V \ln\frac{T_2}{T_1} = C_V \ln\frac{p_2}{p_1}. \qquad (2)$$

Для изотермического процесса:

$$\Delta S_T = \int \frac{\delta Q}{T} = \int \frac{\delta A}{T} = \int \frac{pdV}{T} = \int_{V_1}^{V_2} \frac{RTdV}{TV} = R \ln \frac{V_2}{V_1}. \tag{3}$$

Подставив данные условия задачи в выражения (1), (2), (3), получим ответ на вопросы задачи.

Ответ: 1) $\Delta S_p = C_p \ln \frac{V_2}{V_1} = \frac{i+2}{2} R \cdot \ln \frac{V_2}{V_1}$;

2) $\Delta S_V = C_V \ln \frac{T_2}{T_1} = \frac{i}{2} R \cdot \ln \frac{p_2}{p_1}$; ; 3) $\Delta S_T = R \cdot \ln \frac{V_2}{V_1}$.

Пример 10. Трехатомный идеальный газ совершает цикл Карно. Определите КПД цикла, если при адиабатическом расширении объем газа увеличивается в 8 раз.

Дано:	*Решение*
$V_3/V_2 = 8$	Сделаем график цикла
$i = 6$	в координатах p, V.
$\eta = ?$	

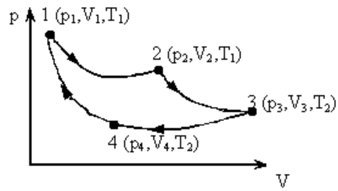


Рис. 2.7

По определению КПД:

$$\eta = \frac{T_1 - T_2}{T_1}. \tag{1}$$

Для определения температур T_1 нагревателя и T_2 холодильника воспользуемся уравнением адиабаты:

$$TV^{\gamma-1} = \text{const}.$$

Откуда: $T_1 V_2^{\gamma-1} = T_2 V_3^{\gamma-1}$, или $\left(\frac{V_3}{V_2}\right)^{\gamma-1} = \frac{T_1}{T_2}$,

где $\gamma - 1 = \frac{2}{i} = \frac{1}{3}$.

Тогда:

$$\frac{T_1}{T_2} = \left(\frac{V_3}{V_2}\right)^{1/3} = 8^{1/3} = \sqrt[3]{8},$$

т. е.

$$T_1 = 2T_2. \tag{2}$$

Подставим (2) в (1), получим выражение для расчета КПД:

$$\eta = \frac{T_2}{2T_2}. \tag{3}$$

Расчет: $\eta = 0{,}5$, или $\eta = 50$ %.

Ответ: $\eta = 0{,}5$, или $\eta = 50$ %.

Пример 11. Идеальный двухатомный газ (ν = 1 моль), занимающий объём 10 л и под давлением 250 кПа, подвергают изохорному нагреванию до 400 К. Затем газ изотермически расширяется до начального давления, после чего путем изобарного сжатия газ возвращают в первоначальное состояние. Постройте график цикла и определите его КПД.

Дано:	Решение
$\nu = 1$ моль $V_1 = 10$ л $= 10^{-2}$ м^3 $p_1 = 250 \cdot 10^3$ Па $T_2 = 400$ К $\eta = ?$	Построим график цикла, состоящего из изохоры, изотермы и изобары (рис. 2.8).

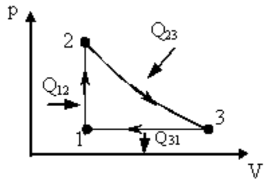


Рис. 2.8

Термический КПД цикла:

$$\eta = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1}. \tag{1}$$

Количество теплоты Q_1, полученное газом за цикл, складывается из количеств теплоты, сообщенных газу на участках 1→2 и 2→3:

$$Q_1 = Q_{12} + Q_{23}. \tag{2}$$

Количество теплоты в изохорном процессе: $Q_{12} = C_V \nu(T_2 - T_1)$, где $C_V = \frac{i}{2}R$. Следовательно:

$$Q_{12} = \frac{i}{2} R\nu\left(T_2 - T_1\right). \tag{3}$$

Температуру T_1 определим из уравнения Менделеева – Клапейрона:

$$T_1 = \frac{p_1 V_1}{\nu R}. \tag{4}$$

Объединив формулы (4) и (3), получим:

$$Q_{12} = \frac{i}{2} R\nu\left(T_2 - \frac{p_1 V_1}{\nu R}\right). \tag{5}$$

Рассмотрим процесс 2→3. Из первого начала термодинамики для изотермического процесса:

$$Q_{23} = A_{23} = \nu R T_2 \ln\left(\frac{V_3}{V_2}\right). \tag{6}$$

Учтя, что при p = const, согласно закону Гей-Люссака, $\frac{V_3}{V_1} = \frac{T_3}{T_1}$ и по условию $V_1 = V_2$, $T_3 = T_2$ преобразуем выражение (6) к виду:

$$Q_{23} = \nu RT_2 \ln\left(\frac{V_3}{V_2}\right) = \nu RT_2 \ln\left(\frac{\nu RT_2}{p_1 V_1}\right). \qquad (7)$$

Объединив (5), (7) и (2), найдем:

$$Q_1 = \frac{i}{2} R\nu\left(T_2 - \frac{p_1 V_1}{\nu R}\right) + \nu RT_2 \ln\left(\frac{\nu RT_2}{p_1 V_1}\right). \qquad (8)$$

Количество теплоты, отданное газом при изобарном сжатии: $Q_2 = |Q_{31}| = C_p \nu (T_3 - T_1)$, где $C_p = \frac{i+2}{2} R$, $T_3 = T_2$; отсюда

$$Q_2 = \frac{i+2}{2} R\nu\left(T_2 - \frac{p_1 V_1}{\nu R}\right). \qquad (9)$$

Подставив выражения (8) и (9) в (1), получим формулу для расчета КПД цикла:

$$\eta = 1 - \frac{(i+2)\left(T_2 - \frac{p_1 V_1}{\nu \cdot R}\right)}{i\left(T_2 - \frac{p_1 V_1}{\nu \cdot R}\right) + 2T_2 \ln \frac{T_2 \nu R}{p_1 V_1}}. \qquad (10)$$

Произведем вычисления по формуле (10), получим η = 0,041, или 4,1 %.

Ответ: η = 0,041, или 4,1 %.

Пример 12. Идеальный газ совершает цикл, состоящий из процессов: изобарного расширения (1→2), адиабатического расширения (2→3) и изотермического сжатия (3→1). Определите коэффициент полезного действия цикла, если при изобарном процессе газ нагревается от 200 до 400 K.

Дано:	*Решение*
T_1 = 200 K T_2 = 400 K	Сделаем график цикла в координатах p, V (рис. 2.9).
η = ?	

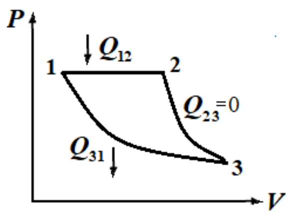


Рис. 2.9

Коэффициент цикла равен:

$$\eta = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} = 1 - \frac{Q_2}{Q_1}. \qquad (1)$$

Газ получает теплоту только при изобарном расширении, поэтому $Q_1 = Q_{12} = C_p \nu (T_2 - T_1)$, где $C_p = \frac{i+2}{2} R$, отсюда

$$C_1 = \frac{i+2}{2} R\nu (T_2 - T_1). \qquad (2)$$

При изотермическом сжатии (3→1) газ отдает теплоту. Тогда согласно первому началу термодинамики:

$$Q_2 = |Q_{31}| = |A_{31}| = \nu R T_1 \ln\left(\frac{V_3}{V_1}\right). \qquad (3)$$

Для определения отношения (V_3/V_1) рассмотрим процесс адиабатического расширения (2→3). Из уравнения адиабаты $TV^{\gamma} = \text{const}$: $T_2 V_2^{\gamma-1} = T_3 V_3^{\gamma-1}$, отсюда $\left(\frac{V_3}{V_2}\right)^{\gamma-1} = \frac{T_2}{T_3}$ и, учитывая, что $T_3 = T_1$,

$$\left(\frac{V_3}{V_2}\right)^{\gamma-1} = \frac{T_2}{T_1}$$

$$\text{или } \frac{V_3}{V_2} = \left(\frac{T_2}{T_1}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}}. \qquad (4)$$

При изобарном расширении (1→2), согласно закону Гей-Люссака:

$$\frac{V_1}{T_1} = \frac{V_2}{T_2},$$

откуда

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{T_2}{T_1}. \qquad (5)$$

Из (1) и (2) следует: $\frac{V_3}{V_1} = \left(\frac{T_2}{T_1}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}$, где $\frac{\gamma}{\gamma - 1} = \frac{i+2}{2}$.

Тогда

$$\frac{V_3}{V_1} = \left(\frac{T_2}{T_1}\right)^{\frac{i+2}{2}}. \qquad (6)$$

С (6) формула (3) примет вид:

$$Q_2 = \nu R T_1 \frac{i+2}{2} \ln\left(\frac{T_2}{T_1}\right). \qquad (7)$$

Объединив уравнения (1), (2) и (7), получим формулу для расчета КПД цикла:

$$\eta = 1 - \frac{T_1\left(\ln\frac{T_2}{T_1}\right)}{T_2 - T_1}. \qquad (8)$$

Произведем вычисления: $\eta = 0{,}3$, или $\eta = 30$ %.

Ответ: $\eta = 30$ %.

Пример 13. Холодильная машина работает по циклу Карно в интервале температур $t_1 = 27$ °С и $t_2 = -3$ °С. Рабочее тело – азот, масса которого $m = 0{,}2$ кг. Определите: а) количество теплоты, отбираемое от охлаждаемого тела; б) количество теплоты, отдаваемое рабочим телом в окружающую среду; в) работу внешних сил за цикл; г) холодильный коэффициент, если отношение максимального объема к минимальному равно 5.

Дано:	*Решение*
N_2 $m = 0{,}2$ кг $T_1 = 300$ К $\frac{V_{max}}{V_{min}} = 5$	Изобразим цикл Карно (обратный), который положен в основу действия холодильной машины, графически в координатах pV (рис. 2.10).
$Q_1 = ?$ $Q_2 = ?$ $A' = ?$ $\eta' = ?$	

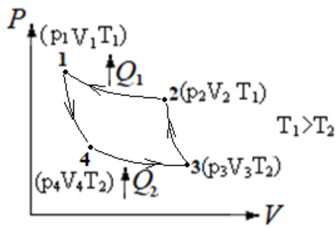


Рис. 2.10

На участке изотермического (T_2 = const) расширения 4–3 азот отбирает от охлаждаемого тела (термостат при температуре T_2) количество теплоты $Q_2 = Q_{43}$. На участке 2–1 происходит (T_1 = const) изотермическое сжатие рабочего тела, сопровождаемое работой внешних сил. При этом рабочее тело отдаёт в окружающую среду (термостат при температуре T_1) количество теплоты: $Q_1 = |Q_{21}|$.

Количество теплоты, отбираемое от охлаждаемого тела

$$Q_2 = A_{43} = \frac{m}{\mu} R T_2 \ln\left(\frac{V_3}{V_4}\right). \qquad (1)$$

Из графика видно, что $V_{min} = V_1$, а $V_{max} = V_3$, следовательно,

$$\frac{V_3}{V_1} = 5. \qquad (2)$$

Из уравнения адиабаты: $\left(TV^{\gamma-1}=\text{const}\right)\cdot\left(\frac{V_1}{V_4}\right)^{\gamma-1}=\frac{T_2}{T_1}$, или

$$\frac{V_1}{V_4}=\left(\frac{T_2}{T_1}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}}. \qquad (3)$$

Перемножим почленно (2) и (3), получим:

$$\frac{V_3}{V_4}=5\left(\frac{T_2}{T_1}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}}. \qquad (4)$$

Решая совместно уравнения (1) и (4), найдем:

$$Q_2=\frac{m}{\mu}RT_2\left(\ln 5+\frac{1}{\gamma-1}\ln\left(\frac{T_2}{T_1}\right)\right),$$

где $\gamma = 1{,}4$.

Для цикла Карно: $\frac{Q_1-Q_2}{Q_1}=\frac{T_1-T_2}{T_1}$, или $\frac{Q_1}{Q_2}=\frac{T_2}{T_1}$.

Тогда:

$$Q_1 = Q_2T_1/T_2. \qquad (5)$$

Работа за цикл, согласно первому началу термодинамики, равна количеству теплоты, полученному рабочим телом, так как изменение внутренней энергии равно нулю: $A = -Q_1 + Q_2$.

Тогда работа внешних сил , следовательно:

$$A' = Q_1 - Q_2. \qquad (6)$$

Холодильный коэффициент:

$$\eta'=\frac{Q_2}{A'}=\frac{Q_2}{Q_1-Q_2}=\frac{T_2}{T_1-T_2}. \qquad (7)$$

Произведем вычисления по формулам (1), (5), (6), (7).

Расчеты: $Q_2 = 21{,}6$ кДж, $Q_1 = 24$ кДж, $A' = 2{,}4$ кДж, $\eta' = 9$ %.

Ответ: $Q_2 = 21{,}6$ кДж, $Q_1 = 24$ кДж, $A' = 2{,}4$ кДж, $\eta' = 9$ %.

Задания для аудиторной самостоятельной работы

1. В каком случае КПД цикла Карно повысится больше: при увеличении температуры нагревателя на ΔT или при уменьшении температуры холодильника на такую же величину?

2. Идеальный газ совершает цикл Карно. Температура холодильника $T_2 = 290$ К. Во сколько раз увеличится КПД цикла, если температура нагревателя повысится от $T_1'' = 400$ К до $T_1'' = 600$ К?

3. Идеальный газ совершает цикл Карно. Температура нагревателя равна 470 K, температура холодильника 280 K. При изотермическом расширении газ совершает работу $A = 100$ Дж. Определить термический КПД цикла, а также количество теплоты Q_2, которое газ отдаёт холодильнику при изотермическом сжатии.

4. Водород совершает цикл Карно. Найти КПД цикла, если при адиабатическом расширении: а) объём газа увеличивается в $n = 2$ раза; б) давление уменьшается в $n = 2$ раза.

5. Идеальный газ совершает цикл Карно. Газ получил от нагревателя количество теплоты $Q_1 = 5{,}5$ кДж и совершил работу 1,1 кДж. Найти: 1) КПД цикла; 2) отношение температур нагревателя и холодильника.

6. Идеальная тепловая машина, работающая по циклу Карно, получает за цикл от нагревателя 600 кал теплоты. Температура нагревателя 400 K, температура холодильника 300 K. Найти: 1) работу, совершаемую машиной за 1 цикл; 2) количество теплоты, отдаваемое холодильнику за 1 цикл.

7. Одноатомный газ, содержащий $\nu = 10{,}0$ молей вещества, под давлением $p_1 = 100$ кПа, занимал объём $V_1 = 5$ м^3, затем сжимался адиабатически и расширялся при постоянной температуре до начального объёма и давления. Построить график процесса. Найти: 1) температуры T_1, T_2, объёмы V_2, V_3 и давление p_3, соответствующие характерным точкам цикла; 2) количество теплоты Q_1, полученное газом от нагревателя; 3) количество теплоты Q_2, переданное газом охладителю; 4) работу A, совершённую газом за весь цикл; 5) термический КПД цикла.

8. Один киломоль идеального газа совершает цикл, состоящий из двух изохор и двух изобар. При этом объём газа изменяется от $V_1 = 25$ м^3 до $V_2 = 50$ м^3, а давление от $p_1 = 1$ атм до $p_2 = 2$ атм. Во сколько раз работа, совершаемая в таком цикле, меньше работы, совершаемой в цикле Карно, изотермы которого соответствуют наибольшей и наименьшей температурам рассматриваемого цикла, если при изотермическом расширении объём увеличился в два раза?

9. В результате кругового процесса газ совершил работу A и передал охладителю количество теплоты Q_2. Определить термический КПД цикла. Решить задачу для:

а) $A = 1$ Дж; $Q_2 = 4$ Дж;
б) $A = 2$ Дж; $Q_2 = 4,2$ Дж;
в) $A = 1$ Дж; $Q_2 = 4$ Дж;
г) $A = 1$ Дж; $Q_2 = 5$ Дж.

10. Совершая замкнутый процесс, газ получил от нагревателя количество теплоты Q_1. Определить работу газа A при протекании цикла, если его термический КПД η. Решить задачу для: а) $Q_1 = 4$ кДж, $\eta = 0,1$; б) $Q_1 = 5$ кДж, $\eta = 0,1$; в) $Q_1 = 4$ кДж, $\eta = 0,2$; г) $Q_1 = 3,6$ кДж, $\eta = 0,2$.

11. Идеальный газ совершает цикл Карно. Температура охладителя равна 290 К. Как изменится η, если:
1) температура нагревателя увеличится от $T_н' = 400$ К до $T_н'' = 600$ К;
2) температура нагревателя увеличится от 300 К до 600 К;
3) температура охладителя уменьшится на 100 К при $T_н = 600$ К;
4) температура охладителя уменьшится на 50 К при $T_н = 400$ К.

12. При изотермическом расширении идеального газа в количестве 5 молей его энтропия увеличилась на 57,5 Дж/К. Во сколько раз при этом увеличился его объём?

13. При нагревании двухатомного идеального газа в количестве 3 молей его термодинамическая температура увеличилась в 2 раза. Определить приращение энтропии, если нагревание происходит: а) изохорно; б) изобарно.

14. Азот массой 28 г адиабатически расширили в 2 раза, а затем изобарно сжали до первоначального объёма. Определить приращение энтропии газа в ходе указанных процессов.

15. Определить приращение энтропии при изотермическом расширении азота массой 10 г, если давление газа уменьшилось от 0,1 МПа до 50 кПа.

16. Найти приращение энтропии при превращении 10 г льда, при –20 °С в пар при 100 °С.

17. Найти приращение энтропии при плавлении 1 кг льда, находящегося при 0 °С.

18. Найти приращение энтропии при переходе 8 г кислорода от объёма 10 л при температуре 80 °С к объёму 40 л при температуре 300 °С.

19. Найти приращение энтропии при переходе 6 г водорода от объёма 20 л под давлением $1{,}5 \cdot 10^5$ Н/м^2 к объёму 60 л под давлением $1 \cdot 10^5$ Н/м^2.

20. 6,6 г водорода расширяются изобарически до удвоения объёма. Найти приращение энтропии при этом расширении.

Билеты для самоконтроля

Билет 1

1. При изотермическом расширении идеального газа в количестве 5 молей его энтропия увеличилась на 57,5 Дж/К. Во сколько раз при этом увеличился его объём?
2. В каком случае КПД цикла Карно повысится больше: при увеличении температуры нагревателя на ΔT или при уменьшении температуры холодильника на такую же величину?
3. Сформулировать первое начало термодинамики.
4. Записать формулу, определяющую приращение энтропии в адиабатном процессе.

Билет 2

1. Идеальный газ совершает цикл Карно. Температура холодильника $T_2 = 290$ К. Во сколько раз увеличится КПД цикла, если температура нагревателя повысится от $T_1'' = 400$ К до $T_1'' = 600$ К?
2. При нагревании двухатомного идеального газа в количестве 3 молей его термодинамическая температура увеличилась в 2 раза. Определить приращение энтропии, если нагревание происходит: а) изохорно; б) изобарно.
3. Сформулировать второе начало термодинамики.
4. Записать формулу, определяющую приращение энтропии в изотермическом процессе.

Билет 3

1. Идеальный газ совершает цикл Карно. Температура нагревателя равна 470 К, температура холодильника 280 К. При изотермическом расширении газ совершает работу $A = 100$ Дж. Определить термический КПД цикла, а также количество теплоты Q_2, которое газ отдаёт холодильнику при изотермическом сжатии.

2. Два моля идеального газа сначала изобарно нагрели, так что объём газа увеличился в два раза, а затем изохорно охладили, так что давление его уменьшилось в два раза. Определить приращение энтропии в ходе указанных процессов.
3. Сформулировать теорему Нернста.
4. Записать формулу, определяющую коэффициент полезного действия тепловой машины.

Билет 4

1. Идеальный газ совершает цикл Карно. Газ получил от нагревателя количество теплоты $Q_1 = 5{,}5$ кДж и совершил работу 1,1 кДж. Найти: 1) КПД цикла; 2) отношение температур нагревателя и холодильника.
2. Азот массой 28 г адиабатически расширили в 2 раза, а затем изобарно сжали до первоначального объёма. Определить приращение энтропии газа в ходе указанных процессов.
3. Сформулировать и записать первое начало термодинамики для изобарного процесса.
4. Записать формулу, определяющую приращение энтропии в изохорном процессе.

Билет 5

1. Идеальная тепловая машина, работающая по циклу Карно, получает за цикл от нагревателя 600 кал теплоты. Температура нагревателя 400 К, температура холодильника 300 К. Найти: 1) работу, совершаемую машиной за 1 цикл; 2) количество теплоты, отдаваемое холодильнику за 1 цикл.
2. Определить приращение энтропии при изотермическом расширении азота массой 10 г, если давление газа уменьшилось от 0,1 МПа до 50 кПа.
3. Сформулировать и записать первое начало термодинамики для изохорного процесса.
4. Записать формулу, определяющую приращение энтропии в изобарном процессе.

Билет 6

1. В результате кругового процесса газ совершил работу A и передал охладителю количество теплоты Q_2. Определить термический КПД цикла, если $A = 1$ Дж; $Q_2 = 4$ Дж.
2. Найти приращение энтропии при превращении 10 г льда при –20 °С в пар при 100 °С.
3. Сформулировать и записать определение приращения энтропии.
4. Записать формулу, определяющую первое начало термодинамики для адиабатного процесса.

Билет 7

1. Термический КПД цикла $\eta = 19{,}2\ \%$. В результате кругового процесса газ передал охладителю количество теплоты $Q_2 = 4$ Дж. Определить количество теплоты, полученное газом от нагревателя за цикл.
2. Кислород массой 32 г адиабатически расширили в 2 раза. Определить приращение энтропии газа в ходе указанного процесса.
3. Сформулировать и записать определение КПД холодильной машины.
4. Записать формулу, определяющую первое начало термодинамики для изобарного процесса.

ПОДГОТОВКА К ИТОГОВОМУ ТЕСТИРОВАНИЮ ПО КУРСУ «ФИЗИКА-1»

Итоговой формой контроля по курсу «Физика-1» является зачет. Результатом освоения студентом теоретического материала по курсу физики является тестирование, которое проводится по расписанию учебного семестра.

Итоговый тест по курсу «Физика-1» состоит из 50 заданий. В итоговом тесте имеются задания разных форм:

1) с выбором одного верного ответа;
2) с выбором нескольких верных ответов;
3) на упорядочение ответов;
4) на соответствие понятий;
5) с открытой формой ответа.

Структура теста

1. Определения ФВ, формулировки законов и теорем – 10 заданий.
2. Единицы измерения ФВ – 10 заданий.
3. Формулы – 10 заданий.
4. Графические задачи – 10 заданий.
5. Расчетные задачи – 10 заданий.

Максимальный балл за итоговый тест **– 100.**

При подготовке к итоговому тестированию студенту необходимо самостоятельно повторить: 1) теоретический материал изучаемого курса; 2) основные методы расчета физических величин, применяемых при решении задач этого курса; 3) приемы решения графических задач, применяемые для ускорения решения; 4) проверить степень готовности к итоговому тестированию.

Для самопроверки подготовленности к итоговому тестированию студенту предлагается пройти примерный тест-тренинг по курсу «Физика-1».

Обсуждаются результаты прохождения студентами примерного теста и разбираются проблемные задания.

Авторы выражают уверенность, что самостоятельная работа студентов с примерным тестом-тренингом по изученному курсу будет способствовать более глубокому освоению теоретического и практического материала данного раздела курса общей физики.

ПРИМЕР ТЕСТА-ТРЕНИНГА ПО КУРСУ «ФИЗИКА-1»

Модуль 1. Кинематика. Динамика. Законы сохранения. Динамика вращательного движения

Задание 1 (определение физической величины).

Мгновенная скорость тела – это

1) скалярная физическая величина, которая находится как первая производная пути по времени; измеряется в м/с
2) векторная физическая величина, равная первой производной радиуса-вектора по времени; измеряется в м/с; направлена по касательной к данной точке траектории в сторону движения
3) векторная физическая величина, равная отношению радиуса-вектора ко времени; измеряется в м/с; направлена по радиусу-вектору
4) векторная физическая величина, равная отношению приращения радиуса-вектора к промежутку времени; измеряется в м/с; направлена по приращению радиуса-вектора $\Delta\vec{r}$

Задание 2 (определение физической величины).

Первый закон Ньютона гласит

1) ускорение, приобретаемое материальной точкой (телом), пропорционально вызывающей его силе, совпадает с нею по направлению и обратно пропорционально массе материальной точки (тела)
2) между любыми двумя материальными точками действует сила взаимного притяжения, прямо пропорциональная произведению масс этих точек и обратно пропорциональная квадрату расстояния между ними
3) всякая материальная точка (тело) сохраняет состояние покоя или равномерного прямолинейного движения до тех пор, пока воздействие со стороны других тел не заставит ее изменить это состояние
4) всякое действие материальных точек (тел) друг на друга носит характер взаимодействия; силы, с которыми действуют друг на друга материальные точки, всегда равны по модулю, противоположно направлены и действуют вдоль прямой, соединяющей эти точки

Задание 3 (определение физической величины).

Теорема Штейнера гласит

1) момент инерции тела J относительно любой оси вращения равен сумме момента его инерции J_c относительно параллельной оси, проходящей через центр масс тела, и произведения массы m тела на квадрат расстояния между осями
2) момент инерции тела J относительно любой оси вращения равен сумме момента его инерции J_c относительно параллельной оси, проходящей через центр масс тела, и произведения массы m тела на расстояние между осями
3) момент инерции тела J относительно любой оси вращения равен разности момента его инерции J_c относительно параллельной оси, проходящей через центр масс тела, и произведения массы m тела на квадрат расстояния между осями
4)vмомент инерции тела J относительно оси, проходящей через центр масс С тела, равен сумме момента инерции относительно произвольной параллельной оси и произведения массы m тела на квадрат расстояния между осями

Задание 4 (определение физической величины).

Принцип относительности Эйнштейна гласит

1) уравнения, выражающие законы природы, инвариантны по отношению к преобразованиям Лоренца
2) все законы природы не инвариантны по отношению к переходу от одной инерциальной системы отсчета к другой
3) законы динамики одинаковы во всех инерциальных системах отсчета
4) только законы механики инвариантны по отношению к переходу от одной инерциальной системы отсчета к другой

Задание 5 (формулы).

Кинетическая энергия вращательного движения твердого тела определяется соотношением

1) $E_к = \frac{mV_c^2}{2}$ 2) $E_к = \frac{mV_c^2}{2} + \frac{I_z\omega^2}{2}$ 3) $E_к = \frac{I_z\omega^2}{2}$ 4) $E_к = \frac{I_z\varepsilon^2}{2}$

Задание 6 на соответствие (формулы).

Соответствие между физическими величинами и формулами, их выражающими

1) момент инерции полого тонкостенного цилиндра относительно оси симметрии
2) момент инерции сплошного цилиндра относительно оси симметрии
3) момент инерции прямого тонкого стержня относительно оси, перпендикулярной стержню и проходящей через его центр
4) момент инерции шара относительно оси, проходящей через центр масс

1) $\frac{1}{3}ml^2$ 2) $\frac{1}{3}mR^2$ 3) $\frac{2}{5}mR^2$ 4) $\frac{1}{2}mR^2$ 5) mR^2 6) $\frac{1}{12}ml^2$

Задание 7 (единицы измерения).

Единица измерения момента импульса L в системе единиц СИ

1) (кг · м)/с 2) (кг · м^2)/с^2 3) (кг · м^2)/с 4) (кг · м)/с^2

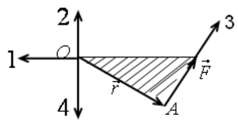
Задание 8 (единицы измерения).

Единица измерения выражения, определяемого формулой $Mz \cdot d\varphi$

1) Вт 2) Н · м 3) Дж 4) Н/м

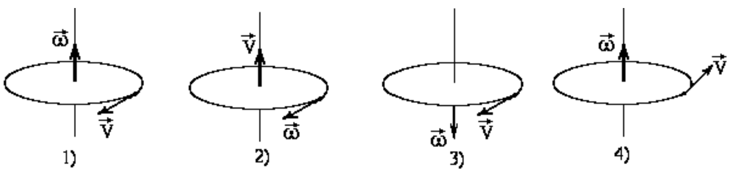
Задание 9 (задание вектора).

Выбрать верное направление вектора момента силы



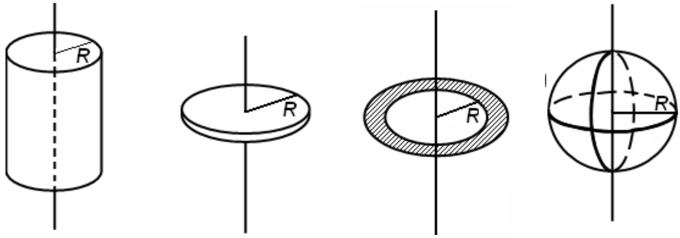
Задание 10 (задание вектора)

Выбрать рисунок, указывающий верное направление векторов линейной скорости $\vec{V}$ и угловой скорости $\vec{\omega}$ материальной точки A при равномерном ее вращении по окружности по часовой стрелке



Задание 11 (качественная задача).

Минимальным моментом инерции J обладает тело, изображенное на рисунке



1) цилиндр 2) диск 3) обруч 4) шар

Задание 12 (качественная задача).

Горизонтальный диск вращается вокруг вертикальной оси, проходящей через его центр. Человек, стоящий на краю диска, начинает равномерно перемещаться к его центру. Угловая скорость вращения диска

1) не будет изменяться

2) будет увеличиваться

3) будет уменьшаться

4) не зависит от движения человека

Задание 13 (формулы).

Механическая работа в общем случае рассчитывается по формуле

1) $A = FS\cos\alpha$ 2) $dA = \vec{F}d\vec{r}$ 3) $A = \int_1^2 F_S dS$ 4) $A = \int_1^2 F dS\cos\alpha$

Задание 14 (формулы).

Связь между угловой скоростью тела и частотой вращения тела выражается формулой

1) $\omega = 2\pi\nu$ 2) $\nu = \frac{2\pi}{\omega}$ 3) $\nu = 2\pi\omega$ 4) $\omega = \frac{2\pi}{\nu}$

Задание 15 (единицы измерения).

Единица измерения механической энергии в системе единиц СИ

1) Вт · с 2) Вт 3) Дж 4) Н · м

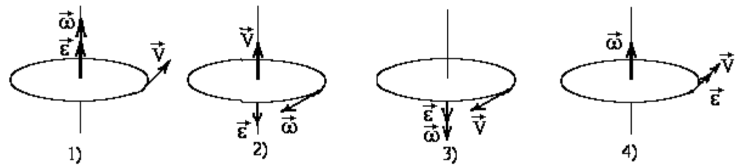
Задание 16 (единицы измерения).

Единица измерения нормальной составляющей ускорения

1) м/с^2 2) м/с 3) рад/с^2 4) рад/с

Задание 17 (задание вектора)

Выбрать рисунок, указывающий верное направление векторов линейной скорости $\vec{V}$, угловой скорости $\vec{\omega}$ и углового ускорения $\vec{\varepsilon}$ материальной точки A при равноускоренном ее вращении по окружности против часовой стрелки.



Задание 18 (задание вектора).

Импульс $\vec{p}$ тела направлен

1) по радиусу-вектору $\vec{r}$
2) по приращению радиуса-вектора $\Delta\vec{r}$
3) по вектору скорости $\vec{V}$
4) по вектору ускорения $\vec{a}$

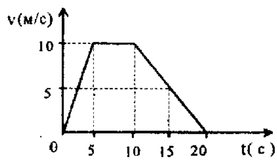
Задание 19 (качественная задача).

Определить тип движения, если $a_\tau = \text{const}, a_n \neq 0$.

1) равномерное криволинейное
2) криволинейное движение с переменным ускорением
3) криволинейное равнопеременное движение
4) равномерное движение по окружности

Задание 20 (качественная задача).

Дан график зависимости скорости тела как функции от времени для прямолинейного движения. В промежутке времени от 5 до 20 с тело прошло путь



1) 50 м 2) 125 м 3) 100 м/с 4) 75 м

Задание 21 на соответствие (формулы).

Соответствие между физическими величинами и формулами, их выражающими

1) момент инерции полого тонкостенного цилиндра относительно оси симметрии
2) момент инерции сплошного цилиндра относительно оси симметрии

3) момент инерции прямого тонкого стержня относительно оси, перпендикулярной стержню и проходящей через его центр
4) момент инерции шара относительно оси, проходящей через центр масс

1) $\frac{1}{3}ml^2$ 2) $\frac{1}{3}mR^2$ 3) $\frac{2}{5}mR^2$ 4) $\frac{1}{2}mR^2$ 5) mR^2 6) $\frac{1}{12}ml^2$

Задание 22 (единицы измерения).

Единица измерения момента импульса L в системе единиц СИ

1) кг · м/с 2) кг · м^2/с^2 3) кг · м^2/с 4) кг · м/с^2

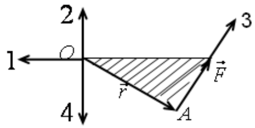
Задание 23 (единицы измерения).

Единица измерения выражения, определяемого формулой $M_z \cdot d\varphi$

1) Вт 2) Н · м 3) Дж 4) Н/м

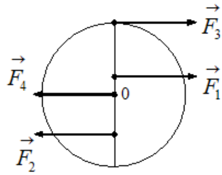
Задание 24 (задание вектора).

Выбрать верное направление вектора момента силы



Задание 25 (задание вектора)

Диск может вращаться вокруг оси, перпендикулярной плоскости диска и проходящей через его центр (т. O). К нему прикладывают одну из сил ($\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3$ или $\vec{F}_4$), лежащих в плоскости диска и равных по модулю. Определить величину углового ускорения, сообщенного диску силой F_4.

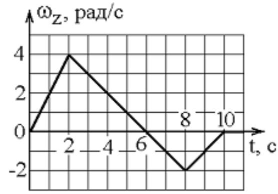


Задание 26 (качественная задача).

Горизонтальный диск вращается вокруг вертикальной оси, проходящей через его центр. Человек, стоящий на краю диска, начинает равномерно перемещаться к его центру. Угловая скорость вращения диска

1) не будет изменяться
2) будет увеличиваться
3) будет уменьшаться
4) не зависит от движения человека

Задание 27 (задача).



Твердое тело начинает вращаться вокруг оси Z с угловой скоростью, проекция которой изменяется со временем, как показано на графике

Определить величину углового ускорения тела в промежутке времени от 0 *с* до 4 *с*.

Модуль 2. Молекулярная физика и термодинамика

Задание 28 (определение физической величины).

Неравенство Клаузиуса гласит

1) энтропия замкнутой системы может либо возрастать (в случае необратимых процессов), либо оставаться постоянной (в случае обратимых процессов)
2) энтропия замкнутой системы всегда возрастает
3) энтропия замкнутой системы всегда остается неизменной
4) энтропия замкнутой системы может либо возрастать (в случае обратимых процессов), либо оставаться постоянной (в случае необратимых процессов)

Задание 29 (определение физической величины).

Теплоемкостью вещества называется

1) величина, равная количеству теплоты, необходимому для нагревания 1 кг вещества на 1 К
2) величина, равная количеству теплоты, необходимому для нагревания 1 моль вещества на 1 К
3) величина, равная количеству теплоты, необходимому для нагревания вещества на 1 К
4) величина, равная изменению внутренней энергии 1 моль газа при повышении его температуры на 1 К

Задание 30 (формулы).

Работа газа для изотермического процесса определяется соотношением

1) $A = p(V_2 - V_1)$ 2) $A = 0$ 3) $A = \dfrac{m}{M} RT \ln \dfrac{V_2}{V_1}$ 4) $A = \dfrac{m}{M} C_V (T_1 - T_2)$

Задание 31 на соответствие (формулы).

Соотношение между физическими величинами и их формулами

1) теплоемкость вещества

2) удельная теплоемкость

3) молярная теплоемкость

1) $C = \dfrac{\delta Q}{\nu \cdot dT}$ 2) $C = \dfrac{\delta Q}{dT}$ 3) $C = \dfrac{i}{2}R$ 4) $c = \dfrac{\delta Q}{m \cdot dT}$ 5) $C = \dfrac{dT}{\delta Q}$

Задание 32 (единицы измерения).

Единица измерения показателя адиабаты

1) Дж/К 2) безразмерная величина 3) Дж/кг 4) Дж/моль

Задание 33 (формулы связи).

Указать верную формулу связи между термодинамическими параметрами P, V, T

1) $P = V/T$ 2) $V = P/T$ 3) $T = V/P$ 4) $PV/T = \text{const}$

Задание 34 (формулы связи).

Указать верную формулу, выражающую уравнение Менделеева – Клапейрона

1) $P = V/T$ 2) $V = P/T$ 3) $PV = \dfrac{m}{\mu}RT$ 4) $PV = \text{const}$

Задание 35 (формулы связи).

Указать верную формулу, выражающую закон Бойля – Мариотта

1) $PV = \text{const}$ 2) $V = P/T$ 3) $T = V/P$ 4) $PV/T = \text{const}$

Задание 36 (формулы связи).

Указать верную формулу, выражающую закон Дальтона

1) $P = P_1 + P_2 + ... + P_n$ 2) $P = P_1 - P_2 - ... - P_n$ 3) $T = V/P$ 4) $PV/T = \text{const}$

Задание 37 (формулы связи).

Указать верную формулу связи между давлением, концентрацией и термодинамической температурой

1) $P = nkT$ 2) $PV = \text{const}$ 3) $PV = NkT$ 4) $PV/T = \text{const}$

Задание 38 (формулы связи).

Указать верную формулу связи между универсальной газовой постоянной (R), постоянной Больцмана (k) и числом Авогадро N_A

1) $k = N_A R$ 2) $k = R/N_A$ 3) $R = N_A k$ 4) $N_A = kR$

Задание 39 (формулы связи).

Указать верную формулу связи между массой одной молекулы (m_0), числом Авогадро (N_A) и молярной массой (μ)

1) $m_0\mu = N_A$ 2) $\mu = m_0/N_A$ 3) $\mu = m_0N_A$ 4) $N_A = \mu m_0$

Задание 40 (формулы связи).

Указать верную формулу, выражающую закон Гей-Люссака

1) $PV = \text{const}$ 2) $V/T = \text{const}$ 3) $T = V/P$ 4) $P/T = \text{const}$

Задание 41 (формулы связи).

Указать для изохорного процесса верную формулу связи между термодинамическими параметрами P, V, T

1) $PV = \text{const}$ 2) $V = P/T$ 3) $T = V/P$ 4) $P/T = \text{const}$

Задание 42 (формулы связи).

Указать верную формулу связи между температурой по шкале Кельвина и температурой по шкале Цельсия

1) $T = t + 273^{\circ}$ 2) $T = t - 273^{\circ}$ 3) $t = T + 273^{\circ}$ 4) $t = T - 273^{\circ}$

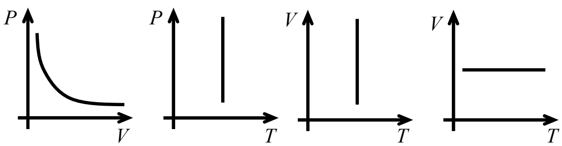
Задание 43 (единицы измерения).

Единица измерения внутренней энергии

1) Дж 2) Н · м 3) Н · м^2 4) Н/м

Задание 44 (графическая задача).

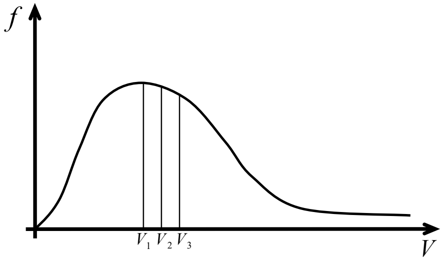
Изотермический процесс изображен на рисунке



1 2 3 4

Задание 45 (графическая задача).

Указать номер скорости, задающей правильное расположение на графике $f(V)$ наиболее вероятной скорости $V_в$

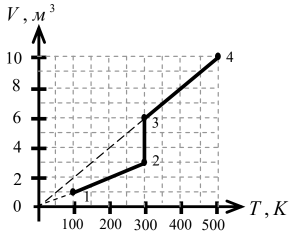


Задание 46 (качественная задача)

Число степеней свободы молекул кислорода

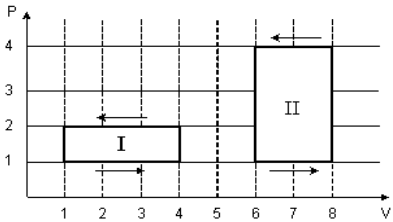
Задание 47 (качественная задача).

1 кмоль одноатомного идеального газа расширяется при нагревании, как показано на рисунке. Давление газа в точке 1, выраженное с точностью до сотых долей МПа, равно



Задание 48 (качественная задача)

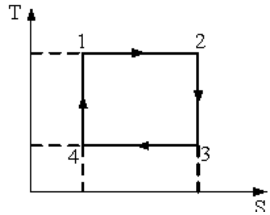
На *P*, *V*-диаграмме изображены два циклических процесса. Отношение работ, совершенных в каждом цикле A_I / A_{II}, равно



...

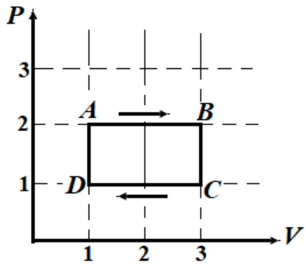
Задание 49 (качественная задача)

На рисунке изображен цикл Карно в координатах (*T*, *S*), где *S* – энтропия. Адиабатное сжатие происходит на этапе



Задание 50 (качественная задача):

На *P*, *V*-диаграмме изображен циклический процесс. Как изменяется температура на участке ВС–СД?



БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

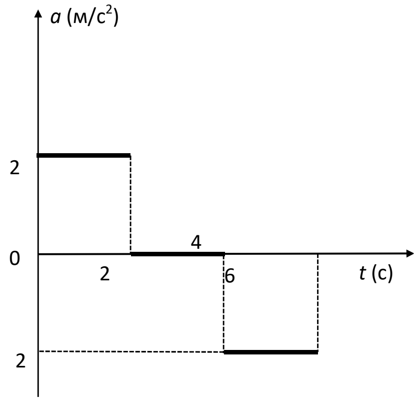
1. Порядок организации балльно-рейтинговой системы оценки успеваемости студентов. – ТГУ. – 17.07. 2017. – С. 14.
2. Козел, С.М. Физика. 10–11 классы : пособие для учащихся и абитуриентов. В 2 ч. Ч. 2. / С.М. Козел. – Москва : Мнемозина, 2010. – 400 с.
3. Савельев, И.В. Курс физики : учеб. пособие. В 3 т. Т. 1. Механика. Молекулярная физика / И.В. Савельев. – Изд. 5-е, стер. – Санкт-Петербург : Лань, 2016. – 352 с.
4. Савельев, И.В. Сборник вопросов и задач по общей физике / И.В. Савельев. – Изд. 7-е, стер. – Санкт-Петербург : Лань, 2016. – 288 с.
5. Открытая физика : мультимедийное пособие, версия 2.6, часть 1. Program Files\Physicon\Open Physics 2.6, Part 1\design\index.htm
6. Иродов, И.Е. Задачи по общей физике / И.Е. Иродов. – Изд. 15-е, стер. – Санкт-Петербург : Лань, 2018. – 420 с.
7. Трофимова, Т.И. Курс физики / Т.И. Трофимова. – 20-е изд., стер. – Москва : Академия, 2014. – 558 с.
8. Чертов, А.Г. Задачник по физике : учеб. пособие для студентов втузов / А.Г. Чертов, А.А Воробьев. – Москва : Интеграл-Пресс, 1997. – 544 с.

Приложение 1

Входной контроль

Вариант 1

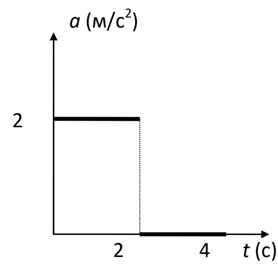
1. График зависимости ускорения тела от времени имеет вид, изображенный на рисунке. Построить графики зависимостей: $V = f(t)$ и $s = f(t)$.



2. По одному направлению из одной точки одновременно начали двигаться 2 тела: одно с постоянной скоростью V = 9,8 м/с, другое – равноускоренно без начальной скорости и с ускорением a = 0,98 м/с^2. Через какое время второе тело нагонит первое?

Вариант 2

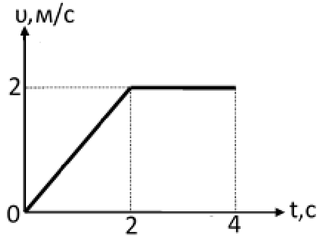
1. График зависимости ускорения тела от времени имеет вид, изображенный на рисунке. Построить графики зависимостей: $V = f(t)$ и $s = f(t)$.



2. Из двух городов, расположенных на расстоянии 154 км друг от друга, выехали одновременно в одном направлении два мотоциклиста: первый со скоростью V = 72 км/ч, второй со скоростью V = 54 км/ч. Через сколько времени первый мотоциклист после старта догонит второго?

Вариант 3

1. График зависимости скорости тела от времени имеет вид, изображенный на рисунке. Построить график зависимости $a = f(t)$ и $s = f(t)$.

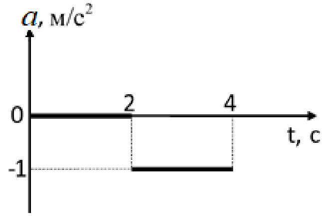


2. Два автомобиля движутся навстречу друг другу: один с начальной

скоростью V_{01} = 36 км/ч и ускорением a_1 = 0,3 м/с^2, а второй – с V_{02} = 54 км/ч и ускорением a_2 = 0,5 м/с^2. Через какое время автомобили встретятся?

Вариант 4

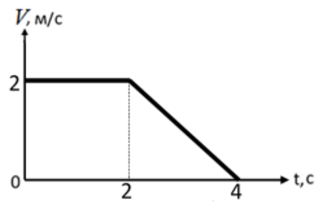
1. График зависимости ускорения a тела от времени имеет вид, изображенный на рисунке. Построить графики зависимостей $V = f(t)$ и $s = f(t)$.



2. Мотоциклист проехал первую половину пути со скоростью 60 км/ч, а вторую – со скоростью 90 км/ч. Найти среднюю скорость движения на всем пути.

Вариант 5

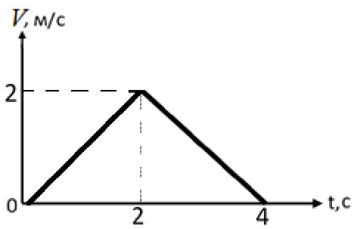
1. График зависимости скорости тела от времени имеет вид, изображенный на рисунке. Построить графики зависимостей: $a = f(t)$ и $s = f(t)$.



2. Автомобиль проехал первые 216 км со скоростью 72 км/ч, остальные 324 км он двигался со скоростью 54 км/ч. Найти среднюю скорость движения автомобиля на всем пути.

Вариант 6

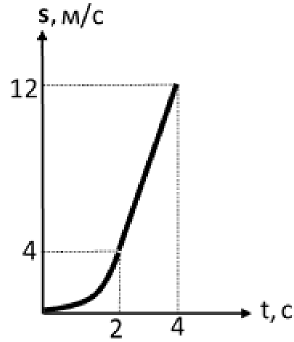
1. График зависимости скорости тела от времени t имеет вид, изображенный на рисунке. Построить графики зависимостей: $a = f(t)$ и $s = f(t)$.



2. Поезд движется на подъеме со скоростью 10 м/с, а затем на спуске со скоростью 25 м/с. Найти среднюю скорость поезда на всем пути, если длина спуска в 2 раза больше длины подъема.

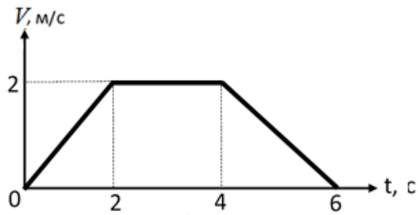
Вариант 7

1. График зависимости пути s от времени t имеет вид, изображенный на рисунке. Построить графики зависимостей: $a = f(t)$ и $V = f(t)$.
2. Камень брошен под углом $\alpha = 45°$ к горизонту. Пренебрегая сопротивлением воздуха, найти максимальную дальность полета и максимальную высоту подъёма, если $V_0 = 10$ м/с.



Вариант 8

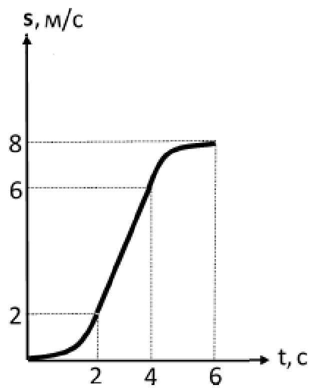
1. Задан график зависимости скорости V как функция от времени t (см. рис.). Построить графики зависимостей: $a = f(t)$ и $s = f(t)$.



2. Тело прошло половину пути со скоростью $V_1 = 6$ м/с, а вторую – со скоростью $V_2 = 4$ м/с. Найти среднюю скорость движения тела на всём пути.

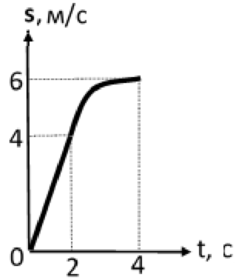
Вариант 9

1. График зависимости пути s от времени t имеет вид, изображенный на рисунке. Построить графики зависимостей: $a = f(t)$ и $V = f(t)$.
2. Пассажирский катер проходит расстояние 150 км по течению реки за 2 часа, а против течения за 3 часа. Найти скорость катера в стоячей воде.



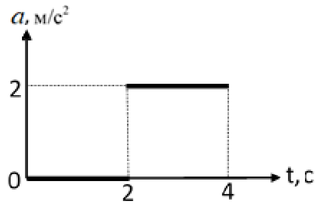
Вариант 10

1. Два тела брошены с одинаковой начальной скоростью под углами α_1 и $\alpha_2 = \left(\frac{\pi}{2} - \alpha_1\right)$ к горизонту. Пренебрегая сопротивлением воздуха, найти отношение дальностей полёта первого и второго тела.
2. График зависимости пути s от времени t имеет вид, изображенный на рисунке. Построить графики зависимостей $a = f(t)$ и $V = f(t)$.



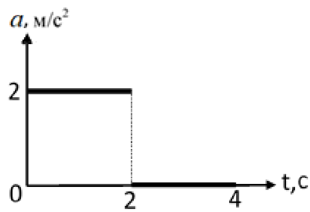
Вариант 11

1. Человек идёт со скоростью 1,5 м/с относительно вагона поезда по направлению движения. Скорость поезда относительно Земли 36 км/ч. Найти скорость человека относительно Земли.
2. График зависимости ускорения a тела от времени t имеет вид, изображенный на рисунке, а V_0 = 10 м/с. Построить графики зависимостей $V = f(t)$ и $s = f(t)$.



Вариант 12

1. График зависимости ускорения a тела от времени t имеет вид, изображенный на рисунке. Построить графики зависимостей $V = f(t)$ и $s = f(t)$.
2. Мяч, брошенный вертикально вверх, упал на землю через 3 с. Найти величину скорости мяча в момент падения на землю.



Приложение 2

Внесистемные величины

1 час = 3600 с

1 сут = 86 400 с

1 год = 365,25 сут = $3,16 \cdot 10^7$ с

1° = $1,75 \cdot 10^{-2}$ рад

1′ = $2,91 \cdot 10^{-4}$ рад

1″ = $4,85 \cdot 10^{-6}$ рад

1 мм рт. ст. = 133,3 Па

1 эВ = $1,6 \cdot 10^{-19}$ Дж

Десятичные приставки к названиям единиц

Э	экса	10^{18}	к	кило	10^3	мк	микро	10^{-6}
П	пета	10^{15}	г	гекто	10^2	н	нано	10^{-9}
Т	тера	10^{12}	д	деци	10^{-1}	п	пико	10^{-12}
Г	гига	10^9	с	санти	10^{-2}	ф	фемто	10^{-15}
М	мега	10^6	м	милли	10^{-3}	а	атто	10^{-18}

Таблица 1

Основные физические постоянные

Название константы	Обозначение	Значение	Измерение
Гравитационная постоянная	G	$6,672 \cdot 10^{-11}$	$Н \cdot м^2/кг^2$
Ускорение свободного падения	g	9,8065	$м/с^2$
Атмосферное давление	p_0	101325	Па
Постоянная Авогадро	N_a	$6,022045 \cdot 10^{23}$	$Моль^{-1}$
Объем 1 моля идеального газа	V_0	22,41383	$м^3/моль$
Газовая постоянная	R	8,31441	$\frac{Дж}{моль \cdot К}$
Постоянная Больцмана	k	$1,380662 \cdot 10^{-23}$	Дж/К
Скорость света в вакууме	c	$2,99792458 \cdot 10^8$	м/с

Окончание табл. 1

Название константы	Обозначение	Значение	Измерение
Магнитная постоянная	μ_0	$4\pi \cdot 10^{-7} =$ $1{,}25663706 \cdot 10^{-6}$	Гн/м
Электрическая постоянная	ε_0	$8{,}8541878 \cdot 10^{-12}$	Ф/м
Масса покоя электрона	m_e	$9{,}109534 \cdot 10^{-31}$	кг
Масса покоя протона	m_p	$1{,}6726485 \cdot 10^{-27}$	кг
Масса покоя нейтрона	m_n	$1{,}6749543 \cdot 10^{-27}$	кг
Элементарный заряд	e	$1{,}6021892 \cdot 10^{-19}$	Кл
Отношение заряда к массе	e/m_e	$1{,}7588047 \cdot 10^{11}$	Кл/кг
Постоянная Фарадея	F	$9{,}648456 \cdot 10^{4}$	Кл/моль
Постоянная Планка	h $\hbar = \dfrac{h}{2\pi}$	$6{,}626176 \cdot 10^{-34}$ $1{,}054887 \cdot 10^{-34}$	Дж · с Дж · с

Таблица 2

Некоторые постоянные элементов

Элемент	Символ	ρ, г/см^3	C_p, Дж/(моль · K)	$t_{пл}$, °C	$t_{кип}$, °C
Алюминий	Al	2,70	24,35	660	2447
Барий	Ba	3,78	26,36	710	1637
Бериллий	Be	1,84	16,44	1283	2477
Бор (крист.)	B	3,33	11,09	2030	3900
Бром	Br	3,12	75,71	–7,3	58,2
Ванадий	V	5,96	24,7	1730	3380
Висмут	Bi	9,75	25,52	271,3	1559
Вольфрам	W	18,6–19,1	24,8	3380	5530
Германий	Ge	5,46	28,8	937,2	2830
Железо	Fe	7,87	25,02–26,74	1535	–
Золото	Au	19,3	25,23	1063	2700
Индий	In	7,28	26,7	156,01	2075
Йод	I	4,94	26,02	113,6	182,8
Иридий	Ir	22,42	25,02	2443	4350

Продолжение табл. 2

Элемент	Символ	ρ, г/см^3	C_p, Дж/(моль · К)	$t_{пл}$, °C	$t_{кип}$, °C
Кадмий	Cd	8,65	26,32	321,03	765
Калий	K	0,87	29,96	63,4	753
Кальций	Ca	1,55	26,28	850	1487
Кобальт	Co	8,71	24,6	1492	2255
Кремний (крист.)	Si	2,42	–	1423	2355
Литий	Li	0,534	24,65	180,5	1317
Магний	Mg	1,74	24,6	649	1120
Марганец	Mn	7,42	26,32	1244	2095
Медь	Cu	8,93	24,52	1083	2595
Молибден	Mo	9,01	23,8	2625	4800
Натрий	Na	0,971	28,12	97,82	890
Неодим	Nd	6,96	27,49	1019	3110
Никель	Ni	8,6–8,9	25,77	1453	2800
Олово (серое)	Sn	5,8	25,77	231,9	2687
Палладий	Pd	12,16	25,52	1552	3560
Платина	Pt	21,37	25,69	1769	4310
Родий	Rh	12,44	25,52	1960	3960
Ртуть (жидк.)	Hg	13,546	27,98	–38,86	356,73
Рубидий	Rb	1,53	30,88	38,7	701
Свинец	Pb	11,34	26,44	327,3	1751
Селен (крист.)	Se	4,5	25,36	217,4	657
Сера (ромбич.)	S	2,1	22,60	115,18	444,6
Серебро	Ag	10,42–10,59	25,49	960,8	2212
Стронций	Sr	2,54	25,11	770	1367
Сурьма	Sb	6,62	25,2	630,5	1637
Тантал	Ta	16,6	25,4	2996	5400
Теллур (крист.)	Te	6,25	25,7	449,5	989,8
Титан	Ti	4,5	25,02	1668	3280
Торий	Th	11,1–11,3	27,32	1695	4200
Углерод (алмаз)	C	3,52	6,12	–	–

Окончание табл. 2

Элемент	Символ	ρ, г/см^3	C_p, Дж/(моль · К)	$t_{пл}$, °С	$t_{кип}$, °С
Углерод (графит)	C	2,25	8,53	3500	3900
Уран (13 °С)	U	18,7	27,8	1133	3900
Фосфор (белый)	P	1,83	24,69	44,2	–
Хром	Cr	7,1	23,22	1903	2642
Цезий	Cs	1,87	31,4	28,64	685
Цинк	Zn	6,97	25,40	419,5	907
Цирконий	Zr	6,44	25,15	1855	4380

Некоторые постоянные элементов (при давлении 760 мм рт. ст.): ρ – плотность, C_p – молярная теплоемкость (при 25 °С); $t_{пл}$ и $t_{кип}$ – температуры плавления и кипения.

Таблица 3

Удельная теплоемкость, удельная теплота плавления

Вещество	Плотность, кг/м^3	Удельная теплоемкость вещества, Дж/(кг · °С)	Удельная теплота плавления, Дж/кг	Удельная теплота парообразования, Дж/кг	Температура плавления, °С или К
Вода	1000	$4{,}2 \cdot 10^3$		$2{,}3 \cdot 10^6$	
Лед		$2{,}1 \cdot 10^3$	$3{,}3 \cdot 10^5$		0 или 273
Свинец	11340	130	$2{,}5 \cdot 10^4$		327
Парафин	900		$1{,}5 \cdot 10^5$		