МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Тольяттинский государственный университет»

Институт Математики, физики и информационных технологий
(наименование института полностью)

Кафедра «Прикладная математика и информатика»
(наименование кафедры полностью)

01.03.02 Прикладная математика и информатика
(код и наименование направления подготовки, специальности)

Математическое и компьютерное моделирование
(направленность (профиль))

ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА (БАКАЛАВРСКАЯ РАБОТА)

на тему «Сравнительный анализ методов решения задачи оптимизации портфеля ценных бумаг»

Студент	А.Ю. Макаров (И.О. Фамилия)	(личная подпись)
Руководитель	канд. техн. наук, доцент, Н.А. Сосина (ученая степень, звание, И.О. Фамилия)	
Консультант	М. В. Дайнеко (ученая степень, звание, И.О. Фамилия)	

Тольятти 2021

Аннотация

Работа была выполнена студентом Тольяттинского Государственного Университета, института математики, физики и информационных технологий, группы ПМИп-1702б, Макаровым Артёмом Юрьевичем.

Выпускная квалификационная работа по теме «Сравнительный анализ методов решения задачи оптимизации портфеля ценных бумаг» посвящена реализации задачи оптимизации инвестиционного портфеля по модели Марковица и усовершенствованной модели Шарпа.

Цель работы – Разработать алгоритм для решения задачи оптимизации инвестиционного портфеля по модели Марковица и усовершенствованной модели Шарпа и выполнить программную реализацию разработанного алгоритма.

Объект анализа – задача оптимизации модели Марковица и усовершенствованной модели Шарпа.

Предмет анализа – алгоритм решения задачи оптимизации портфеля модели Марковица и усовершенствованной модели Шарпа.

Задачи работы:

1) Проанализировать теоретический материал о модели Марковица и усовершенствованной модели Шарпа;

2) Разработать алгоритм для решения задачи оптимизации портфеля по модели Марковица и модели Шарпа;

3) Выполнить программную реализацию разработанного алгоритма.

Актуальность работы заключается в диверсификации инвестиционного портфеля. Результатом работы является программа решения задачи диверсификации инвестиционного портфеля по модели Марковица и усовершенствованной модели Шарпа.

Abstract

The topic of the present graduation work is *Comparative analysis of methods for solving the securities portfolio optimization problem.*

The research is devoted to solving the problem of the investment portfolio optimization according to Markowitz model and improved Sharpe model.

The relevance of the investigation consists in the diversification of the investment portfolio.

The object of the research is the problem of optimizing Markowitz model and improved Sharpe model.

The subject of the investigation is an algorithm for solving the problem of optimizing the investment portfolio of Markowitz model and improved Sharpe model.

The purpose of the work is to study the existing mathematical methods of preparing a diversification portfolio; to develop an algorithm for solving the investment portfolio optimization problem according to Markowitz model and improved Sharpe model; to provide the software implementation of the developed algorithm.

To achieve the purpose, the following tasks have to be performed:

1) to analyze the theoretical foundations about Markowitz model and improved Sharpe model;

2) to develop an algorithm for solving the investment portfolio optimization problem according to the formulas of Markowitz model and improved Sharpe model;

3) to provide software implementation of the developed algorithm.

The result of the graduation work is a programme for solving and preparing Markowitz model and improved Sharpe model.

Содержание

Введение

Любой инвестор хочет получить прибыль при вложении средств. Существуют разные типы инвестиций, одним из которых является портфельное инвестирование. Портфельные инвестиции - это вложения, основной целью которых является извлечение прибыли за счет повышения стоимости ценной бумаги или дивидендов. Главное достоинство инвестирования в портфеле – это возможность вручную выбирать из каких активов состоит портфель. Это даёт возможность инвестору принять приемлемый уровень риска с определённым уровнем доходности. Как правило, инвестиционный портфель, состоящий из набора ценных бумаг, имеет меньший риск по сравнению с отдельными ценными бумагами. Формирование диверсифицированного портфеля – это задача актуальная в настоящее время.

Объект исследования ВКР – задача составления портфеля по формулам модели Марковица и усовершенствованной модели Шарпа(CAPM).

Предмет исследования – задача оптимизации модели Марковица и усовершенствованной модели Шарпа.

Цель выпускной квалификационной работы - проанализировать математические методы составления диверсифицированного портфеля, разработать алгоритм для решения задачи оптимизации портфеля по модели Марковица и усовершенствованной модели Шарпа, выполнить программную реализацию разработанного алгоритма.

Для достижения поставленной цели необходимо решить следующие задачи:

1) проанализировать теорию о модели Марковица и усовершенствованной модели Шарпа(CAPM);
2) разработать алгоритм для решения задачи оптимизации портфеля;

3) выполнить программную реализацию алгоритма построения диверсифицированного портфеля;

4) провести тестирование разработанной программной реализации.

Выпускная квалификационная работа состоит из введения, трех разделов, заключения, списка используемых источников.

В разделе 1 рассматривается общая постановка задачи модели Марковица и усовершенствованной модели Шарпа(CAPM), теоретическая информация о моделях и работе с большими объемами данных на примере стоимости акций.

В разделе 2 приводится анализ существующих математических методов построения портфеля инвестиций. Рассматриваются примеры аналитического решения задачи Марковица

В разделе 3 представлена программная реализация решения задач, результаты тестирования программной реализации. В заключении представлены результаты и выводы о проделанной работе.

1 Модель Марковица и усовершенствованная модель Шарпа

1.1 Общая постановка задачи

Перед инвестором зачастую стоит задача вложения денег с получением максимально возможной прибыли при минимальных рисках. Суть модели Марковица в том, чтобы учесть статистику будущего дохода ценной бумаги по прошлой исторической доходности этой ценной бумаги. В ситуации, когда происходят колебания рынка, каждый инвестиционный портфель может получить конкретные наступления вероятных событий, можно распределить доход для каждой другого альтернативного метода инвестиций.

Попробуем предположить, что всё распределено в соответствии с нормой диверсификации. Построенную модель можно использовать как определитель таких характеристик как количество ценных бумаг, то есть самих инвестиций, а также объём рисков. Это даст возможность сравнить другие альтернативные варианты инвестиций в зависимости от цели и, тем самым, создать ориентировочную шкалу показателей для оценивания той или иной комбинации.

Целью самой модели является отображение вероятности достижимой цели в реальных случаях.

Марковиц дал определение такому понятию как "Эффективная граница портфеля". Подобными портфелями являются инвестиционные портфели, у которых объём доходности прямо зависит от объёма рисков, то есть при увеличении прибыли возрастает и риск и наоборот.

Данные инвестиционные портфели именуются эффективными. Инвестор сам определяет какой инвестиционный портфель активов для него является оптимальным, наиболее прибыльным, но при этом с высоким риском, или наиболее безопасный в плане рисков, но с меньшей доходностью.

На самом главном, на чём основывается модель Марковица, на том что прогнозируемая прибыль по этой модели определяется по доходности, которая основана на исторических данных на фондовой бирже. Это значит, что прогноз не учитывает колебания рынка, которые неизбежно происходят. Тем самым это главный недостаток данной модели. Ещё одна проблема, с которой сталкивается инвестор при использовании модели Марковица - это объём вычислений который напрямую зависит от объёма ценных бумаг в инвестиционном портфеле. При увеличении активов возрастает количество вычислений попарной корреляций этих самых активов.

Решение данной проблемы, в 1963 году, предложил Уилл Шарп. Альтернативу, которую предложил Шарп, была оптимизация портфеля с другим подходом, который требовал меньше затрат на количество вычислений.

Если модель Марковица основывалась на исторической доходности конкретной ценной бумаги, то модель Шарпа основывалась на доходности всего рынка на фондовой бирже. То есть считался рыночный индекс.

Метод, который предложил Шарп, позволял сократить объём затрачиваемых ресурсов на вычисления, при этом результат был приблизителен модели Марковица.

Главным достоинством Модели Шарпа является то, что она требует намного меньше вычислений, тем самым позволяет работать с большим количеством ценных бумаг. Но, также, у модели существует существенный недостаток - она не учитывает общие рыночные риски в том числе и резкие колебания на рынке.

1.2 Модель Марковица

При составлении портфеля по модели Марковица, инвесторы при принятии итоговых инвестиционных решений, которые состоят из общего положения всего фондового рынка и поведением самого инвестора, также учитываю ряд постулатов - предположений.

Самые основные предположения:

1) Инвесторы ведут себя максимально рационально и логично, действуют из интересов максимальной прибыли при определённом объёме активов.

2) Инвесторы заранее располагают информацией о возможных рисках и доходах.

3) Инвесторы стараются сделать максимальную возможную доходность, при этом не готовы идти на высокие риски.

4) Сам рынок максимально эффективен и располагает всю необходимую информацию инвесторам, то есть история доходности акции, информация и информация о дивидендах.

«Также на основе поведения инвестора существую две гипотезы. Первая гипотеза основана на том, насколько инвестор несклонен к риску. Вторая гипотеза основана на насыщаемости рынка. По этим гипотезам можно понять:

1. При рассмотрении всех возможных вариантов активов, инвестор больше склонен к выбору актива с минимальным риском.

2. При рассмотрении всех возможных вариантов активов, инвестор больше склонен к выбору актива с большей доходностью при одинаковых условиях.» [17]

Сформируем, с помощью диверсификации активов (диверсификация обеспечивает безопасность, снижает риски и уменьшает зависимость от колебаний рынка), максимально возможный эффективный портфель. Для этого нужно провести анализ корреляции активов, для этого понадобится индекс ковариации $COV(A,B)$ с помощью двух ценных бумаг A и B и их доходностями:

$$COV(A,B) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(R_{Ai} - \overline{R}_A)(R_{Bi} - \overline{R}_B) . \qquad (1)$$

«При помощи применения статистики возможных оценок риска ценных бумаг, из которых состоит сам инвестиционный портфель, можно манипулировать рисками самого инвестиционного портфеля. Изначально ясно, что уровень доходности и рисков тесно взаимосвязаны. При снижении рисков - снижается уровень доходности и наоборот. Инвестор при желании может попробовать достичь других результатов, таких как увеличение прибыльности при этом заранее задав уровень риска, или можно достичь результатов с другой стороны, например, снизив сам риск установив заранее уровень дохода, это можно достичь при правильной диверсификации своих инвестиционных активов по разным секторам.» [18]

Теперь рассмотрим общую формулу. У участника рынка(инвестора) имеются свободные средства, обозначим средства за 1. Введём переменную X_i - доля средств участника рынка вложенная в ценную бумагу обозначенную номером i $(i = 1,...,n)$, после появляются ограничение которые имеют вид:

$$\sum_{i=1}^{n} X_i \le 1; \qquad (2)$$

$$X_i \ge 0 \ \ (i = 1,...,n) \qquad (3)$$

Далее вводим и находим переменную R_p - это возможный доход инвестиционного портфеля, и вычислим R_i $(i = 1,...,n)$ - то есть вычисляем сумму доходностей отдельных акций с выбранной долей портфеля X_i:

$$R_p = \sum_{i=1}^{n} R_i X_i \ . \qquad (4)$$

Для примера на рисунке 1 изображён график эффективности по модели Марковица по которой и состоит формула(4). На оси абсцисс отображается степень риска. На оси ординат отображается потенциальная доходность.

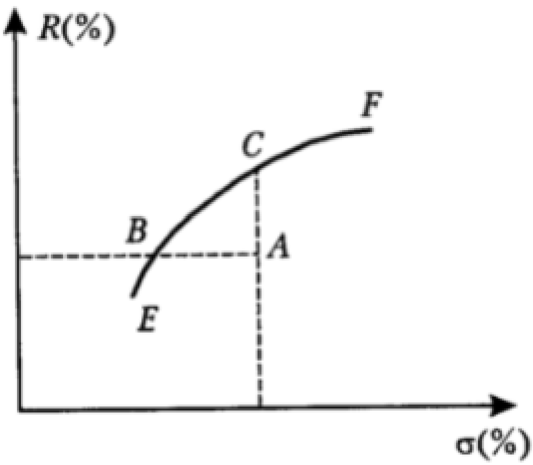

Рисунок 1 – График эффективности по модели Марковица.

Далее вводим переменную s_p – которая является общей степенью риска всего инвестиционного портфеля, для расчёта данной переменной используем ковариацию V_{ij} между изменениям цен на отдельные ценные бумаги. Для того чтобы вычислить переменную s_p^2 Которая является дисперсией инвестиционного портфеля используем формулой(5):

$$s_p^2 = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} V_{ij} X_i X_j \ . \qquad (5)$$

Самая главная цель при решении задачи оптимизации портфеля: получить максимальную возможную доходность при минимально возможном риске, т.е. обозначим условия:

$$\begin{cases} R_p \to \max, \\ s_p^2 \to \min, \\ \sum_{i=1}^{n} X_i = 1, \\ X_i \geq 0. \end{cases} \quad (6)$$

Данная задача не имеет единого корректного решения с ответом из-за прямой корреляционной взаимосвязи доходности и риска, так как при повышении доходности, повышаются и риски.

Поэтому будут сформулированы две оптимизационные задачи.

Общая прямая задача: введём переменную S - максимально возможную величину риска и оптимизационная задача будет сведена к выбору такой конфигурации инвестиционного портфеля, при которой риск инвестиционного портфеля не превышает указанного заранее значения переменной S, а доходность портфеля является максимальна возможной. Вид, сформулированной задачи такой математической модели, имеет следующий:

$$\begin{cases} R_p \to \max, \\ s_p^2 \leq s^2, \\ \sum_{i=1}^{n} X_i = 1, \\ X_i \geq 0. \end{cases} \quad (7)$$

Сформулированную задачу, обозначим прямой оптимизационной задачей инвестиционного портфеля.

« Вторая, Обратная задача оптимизации инвестиционного портфеля будет сведена к выбору такой конфигурации портфеля, при которой доходность будет либо равно, либо больше заранее заданного значения переменной R , а риск при этом минимально возможен. Данная математическая модель задачи в этом случае имеет следующий вид:

$$\begin{cases} s_p \to \min, \\ R_p \geq R, \\ \sum_{i=1}^{n} X_i = 1, \\ X_i \geq 0. \end{cases} \tag{8}$$

При решении этих двух задач по оптимизации инвестиционного портфеля который состоит из n различных ценных бумаг, инвестор может получить в результате точную оценку ценных бумаг по каждому виду активов и секторов рынка для того чтобы сформировать наиболее эффективный инвестиционный портфель с максимально возможной доходностью при минимально возможном риске» [5]

Достоинства модели Марковица:

1. Модель Марковица является достаточно универсальной. Чаще всего она используется для построения оптимальной структуры инвестиционных портфелей ценных бумаг, но подходит и для других типов инвестиционных средств - деривативов, опционов, фьючерсов, индексов, недвижимости.

2. Также модель учитывает не только один фактор. Помимо факторов, определяющих приемлемый уровень риска и доходности. На эффективность финансовых инструментов влияют многие факторы, такие как индикаторы фондового рынка. Теория Марковица раскрывает не один оптимум, а набор нескольких вариантов, среди которых инвестор может выбрать тот, который удовлетворяет всем условиям.

3. Регулярная переоценка портфеля способствует стабильной оптимальной структуре активов и значений показателей доходности и риска.

4. Пакет акций, сформированный по принципам Марковица, не предусматривает торговлю на коротких позициях (спекуляцию) и дает возможность формировать портфель с минимальными рисками.

Недостатки модели Марковица:

1. Прогнозирование доходности активов в портфеле по теории Марковица производится посредством анализа исторической доходности активов. Для этого анализируются изменения стоимости за прошедший период. Но даже в этом случае при более глубоком временном периоде увеличивается погрешность что тоже даёт менее точный результат.

2. Односторонность показателей. Прогнозируемая доходность финансовых активов определяется с помощью значения среднее арифметическое прошлых значений доходности. Но следует учитывать и множество влияющих факторов, такие как колебания рынка и нынешнее состояние рынка в целом. А также сама величина риска оценивается с помощью меры колебания доходности активов относительно среднего арифметического, но тогда, в данной ситуации, невозможно учесть чрезмерную доходность ценных бумаг, она также отражается в модели как составляющая риска, что не является верным.

3. Вычислительная сложность. Модель Марковица при большом объёме активов становится более трудной для вычислений, даже с учётом информационно-вычислительной мощности, что делает её, весьма, ограниченной в количестве активов.

4. Изменчивость. Это не только плюс, но и минус метода. Полученных наборов эффективных портфелей может быть слишком много, что усложнит выбор инвестора, повлечет за собой дополнительные затраты на торговые операции с большим количеством акций.

1.3 Модель Шарпа(CAPM)

В реальной задаче модель Марковица становится менее эффективной и более сложной при наличии большого объёма активов, тогда Шарп предложил более усовершенствованную модель - CAPM. Шарп, в своей модели, упростил общую задачу и, тем самым, ресурсы, затрачиваемые на вычисление, требовались куда в меньших объёмах. А также Шарп ввёл понятие β-фактор. Теория Шарпа гласит, что при использовании корреляцию между колебанием стоимости на отдельные активы, и при помощи прогноза потенциальной стоимости индекса можно узнать прогнозируемый курс активов и, в виде дисперсии, риск отдельного взятого актива в общем.

Модель оценки финансовых активов (CAPM). Это модель, которая описывает ценообразование. Главный фактор модели - риск актива напрямую связан с прогнозируемой доходностью, для измерения введём переменную p.

CAPM используется при учёте постулата, в котором все участники рынка имеют доступ к одной и той же информации и рационально подходят к оценке активов. При этом сами рынки ценных бумаг являются максимально эффективными, то есть подразумевается отсутствие препятствий для инвестиций.

В эти препятствия могут входить: налоги, комиссия банка, разница между ставками по кредиту и займам, издержки по транзакциям и т.д

Это позволяет сместить внимание с того, как участник рынка распределяет свои свободные средства, то есть потенциальная ситуация колебаний курса активов при учёте действий всех участников рынка

Формула САРМ:

$$R_i = \overline{R_\iota} + \beta_i (R_{sp} - \overline{R_\iota}) \quad (9)$$

R_i — прогнозируемая доходность;

$\overline{R_\iota}$ — доходность безрисковых активов;

R_{sp} — прогнозируемый уровень доходности инвестиционного портфеля по средней норме рынка;

Коэффициент β_i определяет, насколько зависимо прибыльность i-й ценной бумаги от прибыльности единичного портфеля. Чем больше значение β, тем сильнее зависит.

«Также в качестве показателя, который используется в модели, является риск того, что доходность ценной бумаги не будет совпадать с построенной линией регрессии, это является остаточным риском. Остаточный риск отображает, в какой степени доходность ценной бумаги будет отличаться от линии регрессии. Для i-й ценной бумаги остаточный риск обозначают как $\sigma_{\varepsilon i}$. Общий риск ценной бумаги получают из суммы β-риска и остаточного риска.» [19] Прогнозируемая доходность портфеля ценных бумаг определяется по формуле, которая имеет следующий вид:

$$\mathrm{R_p} = \sum_{i=1}^{N} (\overline{R_\iota}\, W_i) + \left(R_{sp} - \overline{R_{sp}} \right) \sum_{i=1}^{N} (\beta_i\, W_i) \quad (10)$$

N — количество активов в портфеле

W_i — доля конкретной i-й ценной бумаги в портфеле.

Риск портфеля вычисляется по следующей формуле:

$$\sigma_{\mathrm{p}} = \sqrt{\sum_{i=1}^{N} (\beta_i\, W_i)^2 * \sigma^2{}_{\mathrm{sp}} + \sum_{i=1}^{N} \left(\sigma^2{}_{\varepsilon \mathrm{i}}\, W_i{}^2 \right)} \quad (11)$$

σ_{sp} – риск единичного портфеля.

Общая сумма всех ценных бумаг равна 1:

$$W_1 + W_2 + \cdots + W_N = 1 \qquad (12)$$

Также доля ценной бумаги не отрицательная:

$$W_i \geq 0 \qquad (13)$$

Достоинства CAPM:

1. CAPM принимает во внимание только систематический или рыночный риск или не только неотъемлемый или системный риск ценной бумаги. Этот фактор устраняет неопределенность, связанную с риском отдельной ценной бумаги, и только общий рыночный риск, который имеет определенную степень уверенности, становится основным фактором. Модель предполагает, что инвестор владеет диверсифицированным портфелем, и, следовательно, устраняется несистематический риск между пакетами акций.
2. Она широко используется в финансовой отрасли для расчета стоимости собственного капитала и, в конечном итоге, для расчета средневзвешенной стоимости капитала, которая широко используется для проверки стоимости финансирования из различных источников. Считается, что это гораздо лучшая модель для расчета стоимости собственного капитала, чем другие существующие модели.
3. Это универсальная и простая в использовании модель. Учитывая широкое распространение этой модели, ее можно легко использовать для сравнения запасов различных стран.

Недостатки CAPM:

1. Модель ценообразования основных средств основана на различных предположениях. Одно из предположений состоит в том, что более рискованный актив принесет более высокую прибыль. Затем исторические данные используются для расчета бета-версии. Модель также предполагает,

что прошлые результаты являются хорошей мерой будущих результатов функционирования акций. Однако это далеко не так.

2. Модель также предполагает, что безрисковая доходность останется постоянной в течение инвестирования в акции. Если доходность государственных казначейских ценных бумаг вырастет или упадет, это изменит безрисковую доходность и, возможно, расчет модели. Не учитывается при расчете CAPM.

3. Модель предполагает, что инвесторы имеют доступ к одной и той же информации и имеют одинаковый процесс принятия решений в отношении рисков и доходов, связанных с ценными бумагами. Предполагается, что при заданной доходности инвесторы предпочтут ценные бумаги с низким уровнем риска ценным бумагам с высоким уровнем риска. При заданном риске инвесторы предпочтут более высокую доходность более низкой доходности. Хотя это общее руководство, некоторые из наиболее экстравагантных инвесторов могут не согласиться с этой теорией.

Выводи и результаты по первому разделу

В данном разделе была рассмотрена общая постановка задачи модели Марковица и усовершенствованной модели Шарпа(CAMP), теоретическая информация о моделях и работе с большими объемами данных на примере стоимости акций.

2 Разработка алгоритма

2.1 Анализ вычислительного алгоритма (модель Марковица)

В качестве примера построим портфель с помощью диверсификации. Предположим, что участник рынка имеет доступ к информации на рынке, то есть информация об прошлом временном периоде стоимости и дивидендов по этим ценным бумагам. Обозначим эти ценные бумаги переменными A, B, C. Временной период длинною в 10 месяцев, а также участник рынка располагает информацией об стоимости следующего месяца. Все данные отобразим в таблице 1.

Таблица 1. Динамика курса акций за определённый временной период

Временной период (в месяцах)	Курсы ценных бумаг			Дивиденды		
	A	B	C	A	B	C
1	22,01	66,21	48	3,48	0,05	0,04
2	24,81	64,19	57,09	4,33	4,71	16,71
3	20,94	64,18	60,95	5,9	7,53	7,24
4	17,02	61,37	58,22	7,85	56,95	47,11
5	18,72	51,88	70,42	8,65	20,96	2,24
6	29,17	65,85	51,87	6,45	34,5	30,32
7	32,08	89	72	5,17	8,65	50,8
8	25,12	77,57	120	5,83	73,12	56,75
9	27,63	56,68	73,15	5,75	12,7	25,2
10	31,63	65,14	89,93	9,86	14,59	25,59
11	35,36	74,87	107			

В распоряжении инвестора имеется капитал в 1 миллион рублей. Инвестору необходимо решить, какие акции эмитента и сколько следует купить по нынешнему курсу продажи, чтобы максимизировать доход в ближайший месяц с минимальным риском для себя.

Вычислим R_i - временные ряды колебания доходности ценной бумаги:

$$R_i = \frac{P_{i+1} - P_i + D_i}{P_i},$$

где P_i показатель колебания стоимости актива; D_i всевозможные денежные поступления от использования актива, например дивиденды.

Таблица 2. Временные ряды изменения доходности ценных бумаг

Временной период	Доходность ценных бумаг		
	A	B	C
1	0,285	−0,030	0,190
2	0,019	0,073	0,360
3	0,095	0,072	0,074
4	0,561	0,773	1,018
5	1,020	0,673	-0,232
6	0,321	0,874	0,975
7	-0,056	-0,030	1,369
8	0,333	0,673	0,082
9	0,353	0,373	0,574
10	0,430	0,373	0,474
прогнозируемая доходность	0,336	0,383	0,489

Рассчитаем по формуле (1) и внесём в таблицу 3 оценки парных ковариаций между ценными бумагами.

Таблица 3. Матрица ковариации

	A	B	C
A	0,0937	0,0703	-0,0631
B	0,0703	0,1217	0,0050
C	-0,0631	0,0050	0,2511

В итоге, проанализировав числовые данные которые получили, следует что инвестиционный портфель в котором находятся только ценные бумаги С самый выгодный в плане доходности, которая равна 48,9%, при этом данный актив имеет самый высокий риск. У ценной бумаги C дисперсия доходности инвестционного портфеля равна 0,25. В то время как инвестиционный портфель состоящий только из ценных бумаг A имеет самый минимальный риск. Его дисперсия равна 0.09. Соответсвтенно, у актива A ожидаемо самая низкая доходность – 33,6%. А также портфель состоящий только из ценной бумаги B имеет доходность 38,3% и риском, которая измеряется дисперсией доходности инвестиционного портфеля, равна 0,12.

После анализа парной ковариации мы можем заметить что значение доходности прибыльности ценных бумаг A и B закономерно меняются, а это значит что отрицательный знак $COV(A, C)$ доказывает о прямой взаимосвязи доходности активов A и C.

После того как провели диверсификацию инвестиционного портфеля, сводим к максимально возможной доходности, также учитывая условие в котором задано, что дисперсия инвестиционного портфеля не будет выше заданного значения, к примеру, $s_p^2 \le 0{,}12$.

Данная задача, является сформулированной прямой задачей оптимизации:

$$\begin{cases} R_p = 0{,}336X_1 + 0{,}383X_2 + 0{,}489X_3 \rightarrow \max, \\ s_p^2 = \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} V_{ij} X_i X_j \leq 0{,}12, \\ \sum_{i=1}^{3} X_i = 1, \\ X_i \geq 0 \quad (i = 1,2,3). \end{cases} \tag{14}$$

В данном случае, X_1, X_2, X_3 - часть акций A, B, C соответственно в диверсифицированном портфеле, V_{ij} - оценка парной ковариации между изменениями доходностей акций A, B и C.

Сделаем информационно-вычислительный вариант модели инвестора для трёх ценных бумаг (14). Получим конфигурацию оптимизированного инвестиционного портфеля по модели Марковица:

Таблица №4. Оптимальная структура портфеля

Ценные бумаги	Доля ценных бумаг		Число ценных бумаг
A	X_1	0,09	2524
B	X_2	0,236	3149
C	X_3	0,675	6308
Доходность оптимального портфеля	R_p	45%	
Дисперсия	s_p^2	0,12	

« Таким образом, для того, чтобы в следующий наступающий временной период, в данном случае месяц, максимизировать доходность от инвестиционного портфеля, только тогда когда дисперсия портфеля s_p^2 не превысит заданного значения: $s_p^2 \le 0{,}12$, участник рынка должен будет вложить средства в 2524 ценных бумаг вида A; 3149 ценных бумаг вида B; 6308 ценных бумаг вида C. Доходность инвестиционного портфеля при этом составит 45%. Если в качестве оценки риска взять среднеквадратическое отклонение, то при прогнозируемом значении доходности портфеля 45%, отклонение от прогнозируемого значения в среднем составит не более 34%.

Конфигурация портфеля никак не изменится при решении двойной задачи, если мы минимизируем риск и введем условие в виде ограничения доходности: доходность диверсифицированного портфеля составляет не менее 45%. В заключение мы видим, что, диверсифицируя портфель, мы можем изменить условия стоимости риска в инвестиционном портфеле и сделать его намного меньше, чем риск отдельных инвестиционных активов, составляющих весь инвестиционный портфель. Следовательно, чтобы создать конфигурацию инвестиционного портфеля с оптимальным соотношением доходности и риска, необходимо диверсифицировать активы, для этого необходимо использовать корреляционный анализ» [20]

2.2 Анализ вычислительного алгоритма(модель Шарпа)

Также рассмотрим пример задачи с применением модели Шарпа(CAPM).

По формулам (10) – (13) прямая задача имеет вид:

$$\begin{cases} \mathrm{R_p} = \sum_{i=1}^{N}(\overline{R_\iota}\, W_i) + \left(R_{sp} - \overline{R_{sp}}\right)\sum_{i=1}^{N}(\beta_i\, W_i) \to max \\ \sigma_\mathrm{p} = \sqrt{\sum_{i=1}^{N}(\beta_i\, W_i)^2 * \sigma^2{}_\mathrm{sp} + \sum_{i=1}^{N}\left(\sigma^2{}_{\varepsilon\mathrm{i}}\, {W_i}^2\right)} \le \sigma_\mathrm{req} \\ W_i \ge 0 \\ \sum_{i=1}^{N} W_i = 1 \end{cases} \quad (15)$$

σ_req – максимальный уровень риска

Также обратная задача будет иметь вид:

$$\begin{cases} \mathrm{R_p} = \sum_{i=1}^{N} (\bar{R_i}\, W_i) + \left(R_{sp} - \overline{R_{sp}} \right) \sum_{i=1}^{N} (\beta_i\, W_i) \to \mathrm{R_{req}} \\ \sigma_\mathrm{p} = \sqrt{\sum_{i=1}^{N} (\beta_i\, W_i)^2 * \sigma^2{}_{\mathrm{sp}} + \sum_{i=1}^{N} \left(\sigma^2{}_{\varepsilon \mathrm{i}}\, {W_i}^2 \right)} \leq \min \\ W_i \geq 0 \\ \sum_{i=1}^{N} W_i = 1 \end{cases} \qquad (16)$$

$\mathrm{R_{req}}$ – Минимальный уровень риска

$W_1, W_2, \ldots W_N$ – набор значений который является решением задачи.

Теперь ниже представлены формулы, которые нужны для расчёта показателей

$${R_{sp}}^t = \frac{\sum_{i=1}^{N} R_i^t}{N} \qquad (17)$$

R_i^t – доходность бумаги i за период t.

$$\bar{R}_i = \frac{\sum_{i=1}^{T} R_i^t}{T} \qquad (18)$$

T – Периоды

Средняя доходность портфеля за конкретный

$$\bar{R}_{sp} = \frac{\sum_{i=1}^{T} R_{sp}^t}{T} \qquad (19)$$

Коэффициент β для бумаги i

$$\beta = \frac{\sum_{i=1}^{T} [(R_i^t - \bar{R}_i)(R_{sp}^t - \bar{R}_{sp})]}{\sum_{i=1}^{T} (R_{sp}^t - \bar{R}_{sp})^2} \qquad (20)$$

Рассчитаем остаточный риск для бумаги i

$$\sigma_{\varepsilon i} = \frac{\sum_{i=1}^{T} (R_i^t - \bar{R}_i - \beta_i(R_{sp}^t - \bar{R}_{sp}))^2}{T} \qquad (21)$$

Показатель риска единичного портфеля

$$\sigma_{sp} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{T} (R_{sp}^t - \bar{R}_{sp})^2}{T}} \qquad (22)$$

Также рассмотрим ещё один пример вычисления коэффициента β для актива A. В таблице 5 отображены данные о доходности актива A и всего рынка за определённый временной период, в данном случае девять лет.

Таблица 5 – доходность ценной бумаги и рынка

Временной период(который измеряется в годах)	Доходность акции X, (R_n,)	Доходность рынка (R, %)
1	3	5
2	–2	–4
3	–1	–2
4	2	4
5	6	9
6	5	7
7	8	12
8	10	14
9	12	15
$R_{ср}$	4,8	6,7
β	0,706	

Далее необходимо найти дисперсию доходности рынка:

$\delta^{2=}$ $((5-6{,}7)^2 + (-4-6{,}7)^2 + (-2-6{,}7)^2 + (4-6{,}7)^2 + (9-6{,}7)^2 + (7-6{,}7)^2 + (12-6{,}7)^2 + (14-6{,}7)^2 + (15-6{,}7)^2) / 9-1 = 44{,}5$

Далее нужно вычислить коэффициент выборочной ковариации доходности ценных бумаг и всего рынка:

$COV = ((3-4{,}8)(5-6{,}7) + (-2-4{,}8)(-4-6{,}7) + (-1-4{,}8)(-2-6{,}7) + (2-4{,}8)(4-6{,}7) + (6-4{,}8)(9-6{,}7) + (5-4{,}8)(7-6{,}7) + (8-4{,}8)(12-6{,}7) + (10-4{,}8)(14-6{,}7) + (12-4{,}8)(15-6{,}7)) / 9-1 = 31{,}42$

Находим β для бумаги X

β = 31,42 / 44,5 = 0,706

На основании результата полученного в решении примера, можно предположить, что в случае если рынок в следующем году вырастет на 1%, то инвестор на основании полученных результатов ожидает роста доходности ценной бумаги X на 0,706%. В заключении можно утверждать, что набор различных ценных бумаг, которые принадлежат инвестору сформировывает инвестиционный портфель, который сочетает в себе максимально возможную доходность с минимально возможными рисками и ликвидности активов.

2.3 Альтернативные варианты решения

2.3.1 Модель Марковица с безопасным активом

Сформируем портфель из N рисковых активов $A_i, i = \overline{1, N}$ с вектором предполагаемой прибыльностью $\mu = (\mu_i)_{i=1}^N$ и матрицей ковариаций $V = \left(V_{ij}\right)_{i,j=1}^N$ и безрискового актива A_0 с детерминированной доходностью μ_0.

Предполагается, что $\exists\ i \in \{1, \dots, N\}$: $\mu_i \neq \mu_o$ и матрица ковариаций V положительно определена, т.е это единственное решение задачи оптимизации которое на данный момент существует. Для любого портфеля x из достижимого множества

$$X = \left\{(x_0, x_1, .., x_N): \sum_{i=1}^{N} W_i = 1\right\} \quad (23)$$

Имеем:

$$\mu_x = x_0\, \mu_o + \sum_{i=1}^N x_i\, \mu_i,$$

Векторная форма:

$$\mu_x = x_0\, \mu_o + \mu^T x\ ,$$

$$\sigma_x^2 = x^T V x,$$

$$\sigma_x^2 = \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} x_i x_j\, V_{ij}$$

Где $e^T = (1, \dots .,1) \in \mathrm{R}^N, x = (x_1, \dots, x_N)$

Эффективность портфеля может сводиться к следующим оптимизационном задачам.

1. Если в качестве критерия оптимальности является минимум риска для заданного значения m предполагаемой доходности портфеля, то получаем оптимизационную задачу:

$$x^T V x \rightarrow min$$

$$m = x_0\,\mu_o + \mu^T x$$

$$x_0 + e^T x = 1$$

Для того чтобы решить задачу находим из системы $N + 3$ линейных уравнений с $N + 3$ неизвестными переменными:

$$\lambda_1\,\mu_o + \lambda_2 = 0,$$

$$2Vx + \lambda_1\,\mu + \lambda_2\,e = 0,$$

$$m = x_0\,\mu_o + \mu^T x,$$

$$x_0 + e^T x = 1,$$

Где $\lambda_1,\ \lambda_2$ – множители Лагранжа.

$$x_0 = 1 - \frac{(m - \mu V_{-o})}{d^2}\, e^T V^{-1}(\mu - \mu_0 e),$$

$$x = (x_1, \dots, x_N)^T = \frac{(m - \mu_o)}{d^2} V^{-1}(\mu - \mu_0 e)$$

Где $d^2 = (\mu - \mu_0 e)^T V^{-1} (\mu - \mu_0 e)$

Решая задачу оптимизации для каждого $m \in [\mu_0, \max\{\mu_i, i = \overline{1, N}\}]$,

Получается эффективное множество, которое в случае безрискового актива будет иметь форму луча на системе координат, которая изображена на рисунке 2.

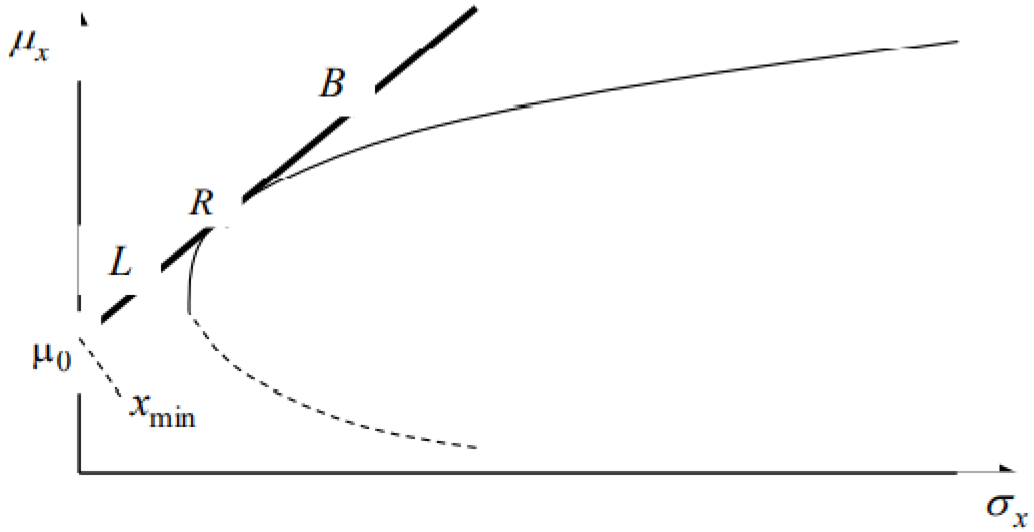

Рисунок 2 – Эффективное множество в случае наличия безрискового портфеля

2. Если эффективный инвестиционный портфель будет определяться с заранее учтённым отношением инвестора к риску, то задача оптимизации будет следующая:

$$2\tau(x_0\,\mu_o + \mu^T x) - x^T V x \to max$$

$$x_0 + e^T x = 1$$

В данном случае $\tau \geq 0$ определяет сдержанность участника рынка к риску. Для того чтобы решить задачу находим из системы $N + 2$ линейных уравнений с $N + 2$ неизвестными:

$$2\tau\mu_0 + \lambda = 0,$$

$$2\tau\mu - 2Vx + \lambda e = 0, \qquad (24)$$

$$x_0 + e^T x = 1,$$

λ - множитель Лагранжа

Решение:

$$x = \tau * V^{-1}(\mu - \mu_0 e), \qquad x_0 = 1 - \tau * e^r V^{-1}(\mu - \mu_0 e\ )$$

Соответственно, вид эффективного портфеля:

$$(x_0, x_1, \dots, x_N)^T = x_{min} + \tau(z_0 + z)$$

Где $x_{min} = (1,0,\dots,0)^r \in R^{N+1}$ – портфель с минимальной дисперсией, для которого $\tau = 0$;

$z_0 = -e^T V^{-1} * (\mu - \mu_0 e)$

$$\sigma_x^2 = x^T V x == \tau^2 * V^{-1}\left(\mu - \mu_0 e\right)^T V V^{-1}\left(\mu - \mu_0 e\right)$$
$$= \tau^2 * V^{-1}\left(\mu - \mu_0 e\right)^T \left(\mu - \mu_0 e\right) = \tau^2 d^2,$$
$$d^2 = V^{-1}\left(\mu - \mu_0 e\right)^T \left(\mu - \mu_0 e\right)$$

Таким образом, $\sigma_x = \tau d$

$$\mu_x = \mu_x x_0 + \mu^T x = \mu_0\left(1 - \tau * e^\tau V^{-1}(\mu - \mu_0 e)\right) + \mu^T \tau * V^{-1}(\mu - \mu_0 e)$$
$$= \tau * V^{-1}(\mu - \mu_0 e)^T (\mu - \mu_0 e) + \mu_0 = \tau^2 d^2 + \mu_0$$

В итоге получается $\mu_x = \tau d^2 + \mu_0 = d\sigma_x + \mu_0$, т.е. всё сводим к лучу начало уравнения которого находиться в точке $(0, \mu_0\ )$, что явлется полным соответствием ожидаемого инвестиционного портфелю с минимальной дисперсией $x_{min} = (1, 0, \dots, 0)$. Как можно заметить на рисунке 1 луч касается эффективного множества, не имеющего безопасного актива.

Переменная R которая является точкой касания соответствует портфелю, состоящему только из рисковых активов. Любая точка L слева от R характеризует портфель, для которого $x_0 > 0$, т.е. когда инвестор делает вложения в безопасный актив. Для любой точки B справа от R $x_0 < 0$, т.е. инвестор заимствует безрисковый актив

$x_0 < 0.$

2.3.2 Модель Марковица при наличии второстепенных ограничений

« Пусть, инвестор решил сформировать инвестиционный портфель из N рисковых активов с вектором доли $x = (x_i)_{i=1}^N$, вектором ожидаемых доходностей $\mu = (\mu_i)_{i=1}^N$ $(\exists \neq j: \mu_i \neq \mu_j,\ i,j = \overline{1,N})$ и положительно определённой матрицей ковариаций $V = \left(V_{ij}\right)_{i,j=1}^N$. При этом допускаются дополнительные линейные ограничения на эффективное или достижимое множество, к примеру, запрет на осуществление трейда $x_i \geq 0, i = \overline{1,N}$ или обязательного условия покупки одних активов за счёт продажи других: $\sum_{k\in K} x_k = 0$ где $K \in \{1, \dots, N\}$ и т.д.

Оптимизационную задачу в случае наличия дополнительных линейных ограничений имеет следующий вид:

$$2\tau\mu^T x - x^T V x \to \max(x) \quad (25)$$

$$Ax \leq b$$

A – матрица [M,N], b – вектор $[M, 1]$,определящие ограничения на достижимое или эффективное множество.

Функция Лагранжа:

$$L(x, \lambda) = 2\tau\mu^T x - x^T V x - \lambda^T (Ax - b)$$

где $\lambda^T = (\lambda_1, \dots, \lambda_M)$ – вектор множителей Лангранжа. По теореме Куна-Таккера решение задачи (25) должно соответствовать системе:

$$2\tau\mu - Vx - A^T\lambda = 0$$

$$\lambda^T (Ax - b) = 0$$

$$\lambda_i \geq 0\ \forall i = \overline{1,M}$$

Решением данной системы является кусочно-непрерывная функция $x^*(\tau)$, имеющая разрывы в некоторых точках $\tau_1, \tau_2, \ldots$, в которых не выполняются ограничения задачи оптимизации. Следовательно, эффективное множество на рисунке 3 в системе координат (σ_x, μ_x) будет также кусочно-непрерывным» [21]

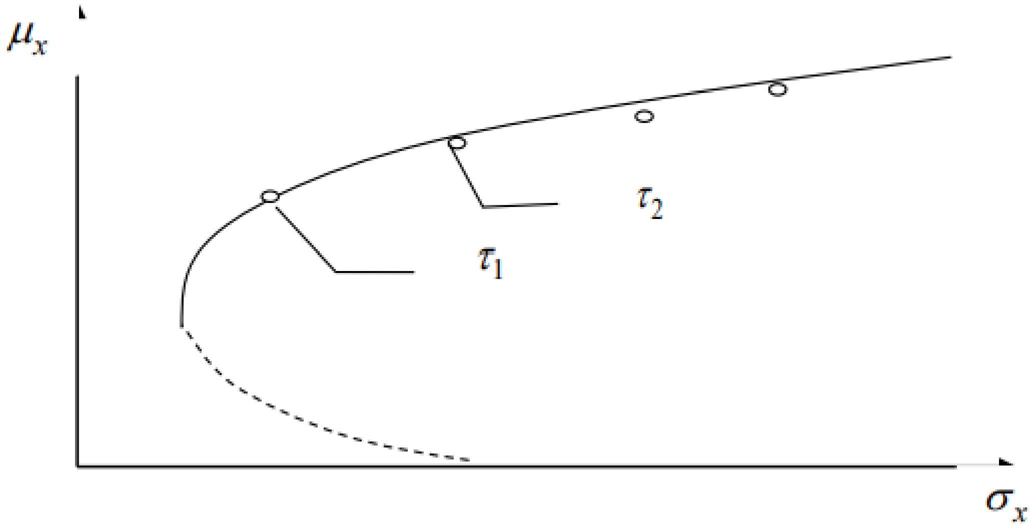

Рисунок 3 – Множество эффективности при имении второстепенных линейных ограничений

Выводы и результаты по второму разделу

В данном разделе был проведён анализ существующих математических методов построения портфеля инвестиций. Рассматриваются примеры аналитического решения задачи Марковица.

3 Программная реализация и анализ

3.1 Генерация ценных бумаг

Здесь содержится общая идея оптимизации инвестиционного портфеля методом Марковица. Программная реализация выполнена на языке Python в среде google colabotary. В дальнейшем будет описано как провести ребалансировку оптимальным способом на основе модели Марковица.

Также на рисунке 4 изображена блок-схема программной реализации

Рисунок 4 – блок схема программной реализации

Пусть имеется 4 акции, каждая с набором доходности длиной 1000. Для этого используется `numpy.random.randn', чтобы смоделировать доходности из нормального распределения. Реализация представлена на рисунке 5.

```
[ ] np.random.seed(int(time.time()))

    ## Количество акций
    n_assets = 4

    ## Количество наблюдений
    n_obs = 1000

    return_vec = np.random.randn(n_assets, n_obs)
```

Рисунок 5 – Генерация 4 акций

Используем преобразование акций в pandas DataFrame. Реализация преобразования изображена на рисунке 6.

```
[107] assets = np.array([return_vec[i].cumsum()+1000 for i in range(len(return_vec))]).T
      table = pd.DataFrame(assets, columns = stocks)
      table.head()
```

	A	B	C	D
0	998.914369	999.251173	998.225776	999.549401
1	999.911715	999.818767	997.024399	1000.158992
2	1000.194693	1000.536918	998.120656	1001.332736
3	998.688399	999.537537	998.981693	1002.204551
4	998.109798	1000.012435	997.461326	1004.109274

Рисунок 6 – Преобразования в pandas DataFrame

Выведем графики стоимости акций.

На рисунке 7-8 изображены реализация и сам график стоимости акций.

```
table.plot(figsize=(10, 5))
plt.grid(True, linestyle='--')
plt.legend(labelspacing=0.8)
plt.tight_layout();
```

Рисунок 7 – Вывод графика стоимости акций

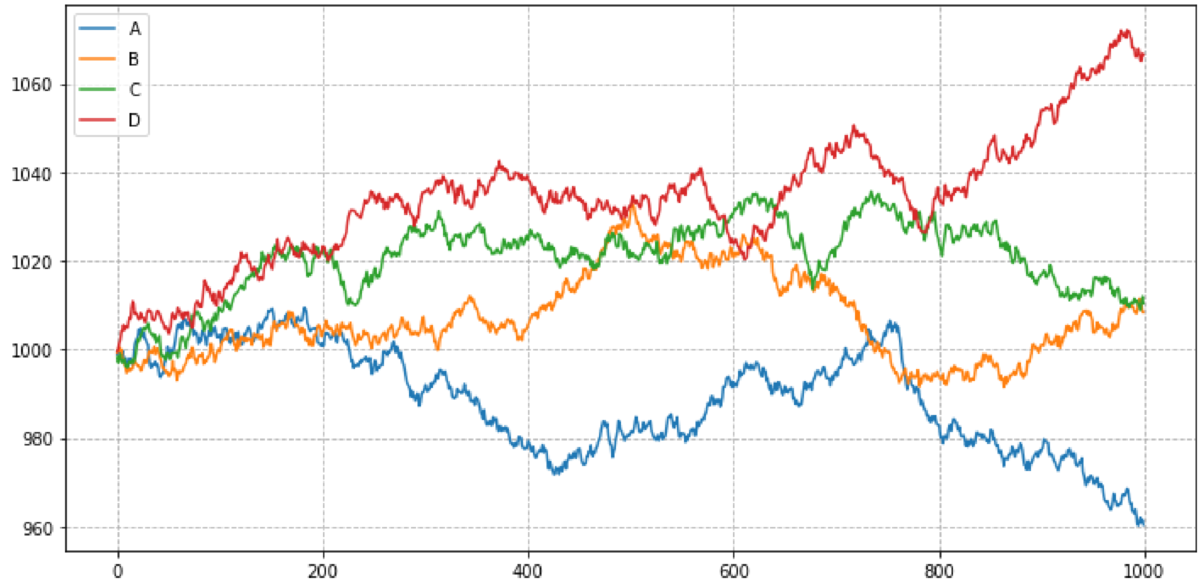

Рисунок 8 – График стоимости акций

3.2 Описание двух моделей

Моделирование совокупности инвестиционных портфелей графически представляется в форме «пули», верхняя линия которой является эффективной границей. Точки, лежащие на ней, представляют собой портфели с наименьшим уровнем риска для заданной доходности. Остальные точки, находящиеся правее соответствуют большему риску при том же показатели ожидаемой доходности. Построение эффективной границы предполагает нахождение двух крайних точек (минимального риска и максимальной доходности с учетом показателя риска). Для этого используем Scipy's optimize function как альтернативу перебору всех возможных вариантов сформированных портфелей. Scipy's optimize function сходна с функцией 'Поиск решения' в Excel, выполняет те же функции, при указании того, что нужно оптимизировать и какие при этом есть ограничения (constraints) и границы (bounds).

Ниже приведены функции для получения портфеля с наибольшим коэффициентом Шарпа. Данный показатель отражает во сколько раз уровень доходности выше уровня риска. Он указывает на стабильность прибыли, при этом отображая и ее количественную характеристику. Поскольку в Scipy's optimize function отсутствует «максимизация» в качестве целевой функции должно быть выбрано то, что следует минимизировать. Поэтому "neg_sharpe_ratio" вычисляет отрицательный коэффициент Шарпа. В функции "max_sharpe_ratio" сначала определяются аргументы (они не должны включать, те значения, которые будут изменяться в ходе оптимизации, в частности доли акций -"weights"). Поскольку доли акций в портфеле суммарно не должны превышать 1 (нельзя превысить бюджет более чем на 100 %) то: constraints = ({'type': 'eq', 'fun': lambda x: np.sum(x) - 1}) Данное ограничение говорит о том, что сумма x должна быть равна 1.

Для лучшего понимания можно рассматривать данное условие как перенос 1 в левую сторону равенства: 'np.sum(x) == 1' has become 'np.sum(x)-1'

Границы задают другое ограничения для долей акции – они должны лежать в интервале от 0 до 1. Ведь нельзя задать отрицательное распределение ровно, как и превысить 100% показатель.

```python
def portfolio_annualised_performance(weights, mean_returns, cov_matrix):
    returns = np.sum(mean_returns*weights ) * num_periods_annually
    std = np.sqrt(np.dot(weights.T, np.dot(cov_matrix, weights))) * np.sqrt(num_periods_annually)
    return std, returns
```

```python
def neg_sharpe_ratio(weights, mean_returns, cov_matrix, risk_free_rate):
    p_var, p_ret = portfolio_annualised_performance(weights, mean_returns, cov_matrix)
    return -(p_ret - risk_free_rate) / p_var
```

```python
def max_sharpe_ratio(mean_returns, cov_matrix, risk_free_rate):
    num_assets = len(mean_returns)
    args = (mean_returns, cov_matrix, risk_free_rate)
    constraints = ({'type': 'eq', 'fun': lambda x: np.sum(x) - 1})
    bound = (0.0,1.0)
    bounds = tuple(bound for asset in range(num_assets))

    result = sco.minimize(neg_sharpe_ratio, num_assets*[1./num_assets,], args=args,
                        method='SLSQP', bounds=bounds, constraints=constraints)
    return result
```

Рисунок 9 – Модель Шарпа

Также можно определить оптимизирующую функцию для расчета минимального показателя риска. На этот раз минимизируем целевую функцию – риск (min_variance), используя разные показатели долей акций. "Constraints" и "bounds" такие же, как и выше.

```python
def portfolio_volatility(weights, mean_returns, cov_matrix):
    return portfolio_annualised_performance(weights, mean_returns, cov_matrix)[0]
```

```python
def min_variance(mean_returns, cov_matrix):
    num_assets = len(mean_returns)
    args = (mean_returns, cov_matrix)
    constraints = ({'type': 'eq', 'fun': lambda x: np.sum(x) - 1})
    bound = (0.0,1.0)
    bounds = tuple(bound for asset in range(num_assets))

    result = sco.minimize(portfolio_volatility, num_assets*[1./num_assets,], args=args,
                        method='SLSQP', bounds=bounds, constraints=constraints)

    return result
```

Рисунок 10 – Функция для расчёта минимального риска

Как уже упоминалось выше эффективная граница — это линия, которая отражает, где находятся эффективные портфели для заданного уровня риска. Ниже приведены функции для ее вычисления. Первая - "efficient_return" вычисляет самый эффективный портфель для заданного риска, а вторая -

"efficient_frontier" принимает диапазон целевых доходностей и вычисляет эффективный портфель для каждой из них.

```
def efficient_return(mean_returns, cov_matrix, target):
    num_assets = len(mean_returns)
    args = (mean_returns, cov_matrix)

    def portfolio_return(weights):
        return portfolio_annualised_performance(weights, mean_returns, cov_matrix)[1]

    constraints = ({'type': 'eq', 'fun': lambda x: portfolio_return(x) - target},
                   {'type': 'eq', 'fun': lambda x: np.sum(x) - 1})
    bounds = tuple((0,1) for asset in range(num_assets))
    result = sco.minimize(portfolio_volatility, num_assets*[1./num_assets,], args=args,
                          method='SLSQP', bounds=bounds, constraints=constraints)
    return result
```

```
def efficient_frontier(mean_returns, cov_matrix, returns_range):
    efficients = []
    for ret in returns_range:
        efficients.append(efficient_return(mean_returns, cov_matrix, ret))
    return efficients
```

Рисунок 11 – Листинг функции для вычисления границы эффективности

3.2 Построение границы эффективности

Построим портфель с максимальным коэффициентом Шарпа и минимальным риском, а также отразим все случайно сгенерированные портфели. При этом мы не выбираем оптимальные портфели из случайно сгенерированных, а вычисляем их, используя Scipy's 'minimize' function. Приведенная ниже функция также строит границу эффективности.

```
def random_portfolios(num_portfolios, mean_returns, cov_matrix, risk_free_rate):
    results = np.zeros((3,num_portfolios))
    weights_record = []
    for i in range(num_portfolios):
        weights = np.random.random(len(stocks))
        weights /= np.sum(weights)
        weights_record.append(weights)
        portfolio_std_dev, portfolio_return = portfolio_annualised_performance(weights, mean_returns, cov_matrix)
        results[0,i] = portfolio_std_dev
        results[1,i] = portfolio_return
        results[2,i] = (portfolio_return - risk_free_rate) / portfolio_std_dev
    return results, weights_record
```

Рисунок 12 – функция для построения границы эффективности

```
num_portfolios = 25000 # Кол-во расчитываемых портфелей (итераций)
risk_free_rate = 0.00 # Безрисковая процентная ставка
num_periods_annually = 252 # Количество операционных дней в году
```

```
returns = table.pct_change()
mean_returns = returns.mean()
cov_matrix = returns.cov()
```

Рисунок 13 – количество операций

Оптимизируем. Ищем портфель с максимальным коэффициентом шарпа (max_sharpe) и минимальным риском (min_vol)

```
max_sharpe = max_sharpe_ratio(mean_returns, cov_matrix, risk_free_rate)
min_vol = min_variance(mean_returns, cov_matrix)
```

```
sdp, rp = portfolio_annualised_performance(max_sharpe['x'], mean_returns, cov_matrix)
max_sharpe_allocation = pd.DataFrame(max_sharpe.x,index=table.columns,columns=['allocation'])
max_sharpe_allocation.allocation = [round(i*100,2)for i in max_sharpe_allocation.allocation]
max_sharpe_allocation = max_sharpe_allocation.T
```

```
sdp_min, rp_min = portfolio_annualised_performance(min_vol['x'], mean_returns, cov_matrix)
min_vol_allocation = pd.DataFrame(min_vol.x,index=table.columns,columns=['allocation'])
min_vol_allocation.allocation = [round(i*100,2)for i in min_vol_allocation.allocation]
min_vol_allocation = min_vol_allocation.T
```

Рисунок 14 – Оптимизация портфеля с помощью Шарпа

Находим (оптимизируем) эффективную границу портфелей

```
target = np.linspace(rp_min, 0.017, 20)
efficient_portfolios = efficient_frontier(mean_returns, cov_matrix, target)
```

Рисунок 15 – оптимизация эффективной границы портфеля

Преобразуем оптимизированные параметры для нормального отображения при использовании print

Генерируем (метод Монте Карло) num_portfolios случайных портфелей для отрисовки их на графике

Граница эффективности для портфелей с различным распределением долей 4 акций. Красная звезда: Максимальный коэффициент Шарпа; Зеленая звезда: Минимальный риск; Черные метки и линия: Граница эффективности.

```
print("-"*80)
print("Распределение долей акций в портфеле с максимальным коэффициентом Шарпа:n")
print("Годовая доходность:", round(rp,3))
print("Годовой риск:", round(sdp,3))
print("Коэффициент Шарпа", round((rp - risk_free_rate)/sdp, 3))
print("\n")
print(max_sharpe_allocation)
print("-"*80)
print("Распределение долей акций в портфеле с наименьшим показателем риска:\n")
print("Годовая доходность:", round(rp_min,3))
print("Годовой риск:", round(sdp_min,3))
print("Коэффициент Шарпа:", round((rp_min - risk_free_rate)/sdp_min, 3))
print("\n")
print(min_vol_allocation)

plt.figure(figsize=(10, 7))
plt.scatter(results[0,:],results[1,:],c=results[2,:],cmap='YlGnBu', marker='o', s=10, alpha=0.3)
plt.colorbar(label='Коэффициент Шарпа')
plt.scatter(sdp,rp,marker='*',color='r',s=500, label='Максимальный коэф-т Шарпа')
plt.scatter(sdp_min,rp_min,marker='*',color='g',s=500, label='Минимальный риск')

plt.plot([p['fun'] for p in efficient_portfolios], target, 'k-x', label='граница эффективности')
plt.title('Оптимизация портфеля на основе построения эффективной границы')
plt.xlabel('Риск(стандартное отклонение)')
plt.ylabel('Доходность')
plt.grid(True, linestyle='--')
plt.legend(labelspacing=0.8)

plt.tight_layout();
```

```
--------------------------------------------------------------------------------
Распределение долей акций в портфеле с максимальным коэффициентом Шарпа:n
Годовая доходность: 0.013
Годовой риск: 0.011
Коэффициент Шарпа 1.121


              A     B      C      D
allocation  0.0  13.9  13.58  72.52
--------------------------------------------------------------------------------
Распределение долей акций в портфеле с наименьшим показателем риска:

Годовая доходность: 0.003
Годовой риск: 0.007
Коэффициент Шарпа: 0.413


               A     B     C     D
allocation  25.0  25.0  25.0  25.0
```

Рисунок 16 - Результаты алгоритма

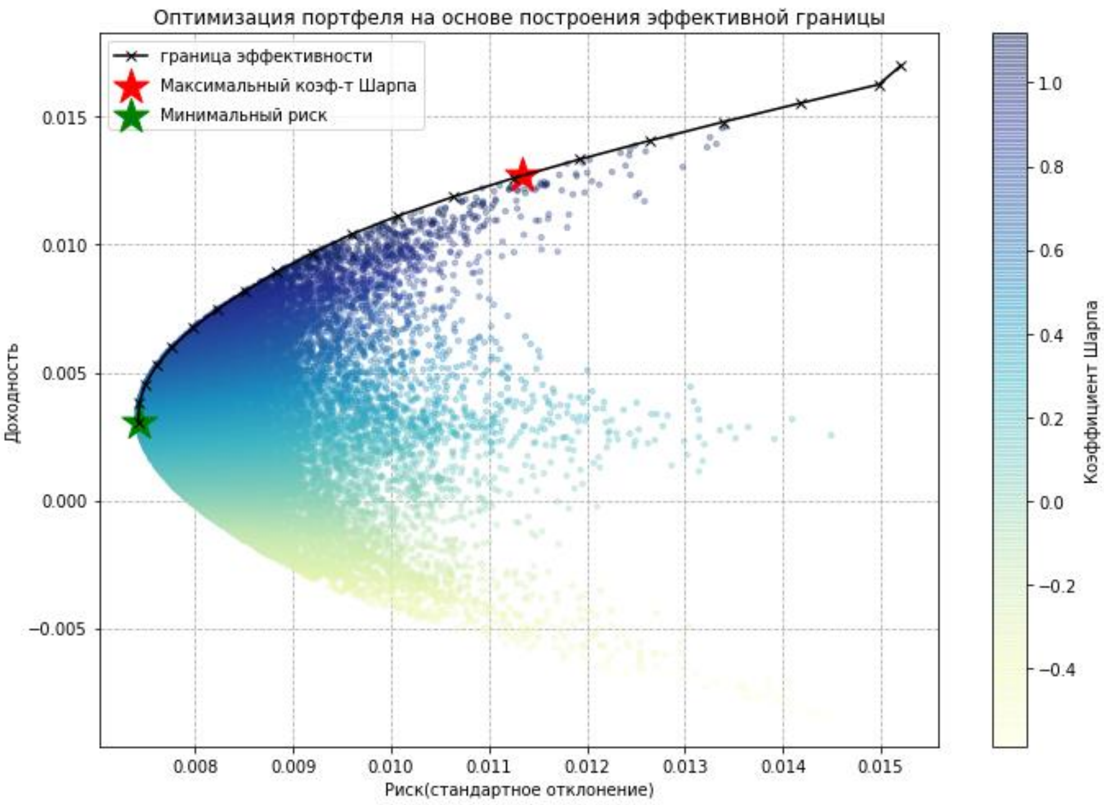

Рисунок 17 – График на котором изображён коэффициент Шарпа

Вместо построения графика каждого случайно сгенерированного портфеля мы можем построить график каждой отдельной акции на графике с соответствующими значениями годовой доходности и годового риска. Что наглядно демонстрирует то, как диверсификация снижает риск за счет оптимизации распределения.

```
max_sharpe = max_sharpe_ratio(mean_returns, cov_matrix, risk_free_rate)
sdp, rp = portfolio_annualised_performance(max_sharpe['x'], mean_returns, cov_matrix)
max_sharpe_allocation = pd.DataFrame(max_sharpe.x,index=table.columns,columns=['allocation'])
max_sharpe_allocation.allocation = [round(i*100,2)for i in max_sharpe_allocation.allocation]
max_sharpe_allocation = max_sharpe_allocation.T

min_vol = min_variance(mean_returns, cov_matrix)
sdp_min, rp_min = portfolio_annualised_performance(min_vol['x'], mean_returns, cov_matrix)
min_vol_allocation = pd.DataFrame(min_vol.x,index=table.columns,columns=['allocation'])
min_vol_allocation.allocation = [round(i*100,2)for i in min_vol_allocation.allocation]
min_vol_allocation = min_vol_allocation.T

an_vol = np.std(returns) * np.sqrt(num_periods_annually)
an_rt = mean_returns * num_periods_annually
```

```
target = np.linspace(rp_min, 0.017, 20)
efficient_portfolios = efficient_frontier(mean_returns, cov_matrix, target)
```

Рисунок 18 – Функция диверсификации

На рисунке 19-20 изображена программная реализация построения графика каждой отдельной акции на графике с соответствующими значениями годовой доходности и годового риска.

```
print("-"*80)
print("Распределение долей акций в портфеле с максимальным коэффициентом Шарпа\n")
print("Годовая доходность:", round(rp,2))
print("Годовой риск:", round(sdp,2))
print("Коэффициент Шарпа:", round((rp - risk_free_rate)/sdp, 3))
print("\n")
print(max_sharpe_allocation)
print("-"*80)
print("Распределение долей акций в портфеле с наименьшим показателем риска:\n")
print("Годовая доходность:", round(rp_min,2))
print("Годовой риск:", round(sdp_min,2))
print("Коэффициент Шарпа:", round((rp_min - risk_free_rate)/sdp_min, 3))
print("\n")
print(min_vol_allocation)
print("-"*80)

print("Показатели доходности и риска каждой отдельной акции\n")
for i, txt in enumerate(table.columns):
    print(txt,":","годовая доходность:",round(an_rt[i],2),", годовой риск:",round(an_vol[i],2))
print("-"*80)

plt.subplots(figsize=(10, 7))
plt.scatter(an_vol,an_rt,marker='o',s=200)
```

Рисунок 19 – построение графика

```
for i, txt in enumerate(table.columns):
    plt.annotate(txt, (an_vol[i],an_rt[i]), xytext=(10,0), textcoords='offset points')

plt.scatter(sdp,rp,marker='*',color='r',s=500, label='Максимальный коэф-т Шарпа')
plt.scatter(sdp_min,rp_min,marker='*',color='g',s=500, label='Минимальный риск')

plt.plot([p['fun'] for p in efficient_portfolios], target, 'k-x', label='граница эффективности')
plt.title('Оптимизация портфеля и показатели отдельный акций')
plt.xlabel('Риск(стандартное отклонение)')
plt.ylabel('Доходность')
plt.legend(labelspacing=0.8)
plt.grid(True, linestyle='--')

plt.xlim(0.006, 0.02)
plt.ylim(-0.015, 0.02)

plt.tight_layout();
```

Рисунок 20 – построение границы эффективности коэффициента Шарпа

На рисунке 21 изображена показатели по портфелю. На рисунке 22 изображён сам график эффективности.

```
Распределение долей акций в портфеле с максимальным коэффициентом Шарпа

Годовая доходность: 0.01
Годовой риск: 0.01
Коэффициент Шарпа: 1.121


              A     B      C      D
allocation  0.0  13.9  13.58  72.52
--------------------------------------------------------------------------------
Распределение долей акций в портфеле с наименьшим показателем риска:

Годовая доходность: 0.0
Годовой риск: 0.01
Коэффициент Шарпа: 0.413


               A     B     C     D
allocation  25.0  25.0  25.0  25.0
--------------------------------------------------------------------------------
Показатели доходности и риска каждой отдельной акции

A : годовая доходность: -0.01 , годовой риск: 0.02
B : годовая доходность: 0.0 , годовой риск: 0.02
C : годовая доходность: 0.0 , годовой риск: 0.02
D : годовая доходность: 0.02 , годовой риск: 0.02
--------------------------------------------------------------------------------
```

Рисунок 21 – результат алгоритма

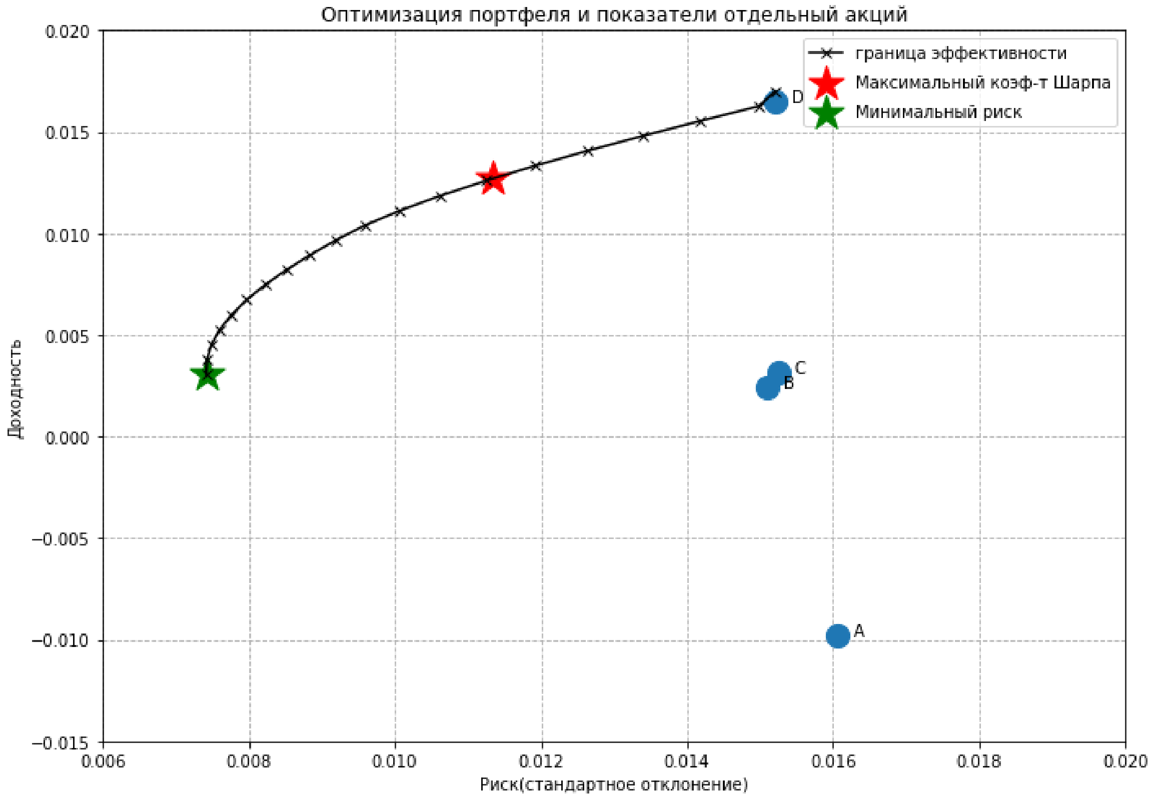

Рисунок 22 – график эффективности

Как видно из графика акция с наименьшим уровнем риска - B, но оптимизируя портфель может быть достигнут меньший риск, с тем же показателем доходности, что и B.

```
ind = np.arange(n_assets)
width = 0.35
```

```
plt.figure(figsize=(8,6))
plt.bar(ind, max_sharpe['x'], width, color='r', alpha=0.75)
plt.bar(ind + width, min_vol['x'], width, color='b', alpha=0.75)

plt.xticks(ind, stocks)
plt.ylabel('Распределение акций в портфеле')
plt.title('Сравнение сотавов портфелей')
plt.legend(('Максимальный коэф-т Шарпа', 'Минимальный Риск'))
plt.grid(b=True, linestyle='--')

plt.tight_layout()
```

Рисунок 23 – построение графика распределяющая акции

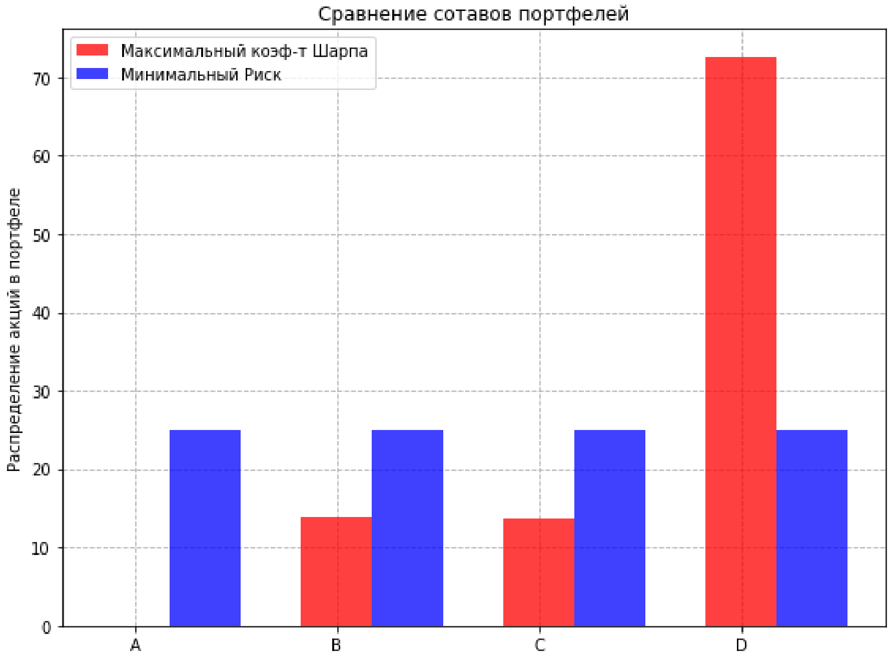

Рисунок 24 - Доли акций в портфеле с различными целями (максимизация доходности/минимизация риска)

Выводы и результаты по третьей главе

В разделе была разработана программная реализация решения задач, а также проведено тестирование. В заключении представлены результаты и выводы по проделанной работе.

Заключение

В ходе выполнения выпускной квалификационной работы были изучены готовые решения алгоритмов задачи Марковица. После чего, был разработан алгоритм решения задачи оптимизации инвестиционного портфеля. Разработанный алгоритм требует минимальные системные требования для успешного выполнения задач. Кроме того, для разработанного алгоритма, требуется малое количество времени, что является успешным результатом поставленной цели.

Для достижения поставленной цели были выполнены следующие задачи:

1. проанализирована портфельная теория Марковица и Шарпа(CAPM);
2. был разработан алгоритм для решения задачи оптимизации инвестиционного портфеля на основе двух моделей, Марковица и Шарпа(CAPM);
3. на основе выполненного алгоритма выполнена программная реализация. В программной реализации были сгенерированы несколько активов в виде ценных бумаг и на основе этих данных была решена задача по оптимизации;
4. проведено тестирование алгоритма, который показал нужный результат;

Результатом работы являются разработанный алгоритм и программа

Всё это позволяет сделать выводы, что цели и задачи данной работы успешно достигнуты, что также подтверждает практическую значимость проекта.

Список используемой литературы и источников

1. Беннинга Ш. Основы финансов с примерами в Excel. — М.: ООО «И. Д. Вильямс», 2014. — С. 399–410.
2. Винс Р. Математика управления капиталом. Методы анализа риска для трейдеров и портфельных менеджеров: Пер. с англ. – М.: Альпина Паблишер, 2001. – 400 с.
3. Гитман Л., Джонк М. Основы инвестирования. — М.: Дело, 1997. — С.800-802.
4. Зайченко Ю.П. Исследование операций. 2-изд. Киев: Изд-во «Вища школа», 1979.
5. Зенкевич Н.А., Марченко И.В. Экономико-математические методы. Рабочая тетрадь №2. СПб.: изд-во МБИ, 2005.
6. Красс М.С., Чупрынов Б.П. Основы математики и ее приложения в экономическом образовании. М.: Дело, 2003.
7. Кремер Н.Ш. Теория вероятностей и математическая статистика / Н.Ш. Кремер. – 3-е изд., М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2009.- 551 с. – (Серия «Золотой фонд российских учебников»). — ISBN 978-5-238-01270-4.
8. Кремер Н.Ш. Эконометрика: учебник и практикум для академического бакалавриата / Н.Ш. Кремер, Б.А. Путко: под ред. Н.Ш. Кремера – 4-е изд., М.:Издательство Юрайт. 2019.- 308 с. – (Серия: Бакалавр. Академический курс). — ISBN 978-5-534-08710-9.
9. Кремер Н.Ш., Путко Б.А.,Тришин И.М.,Фридман М.Н. Исследование операций в экономике. М.: Банки и биржи, ЮНИТИ, 1997 г.
10. Ланкастер К. Математическая экономика. М.: Советское радио, 1972.
11. Мадера А.Г. Математическая модель оптимального инвестиционного портфеля // Успехи современного естествознания. – 2012. – № 12 – С. 109-112

12. Мертенс А. Инвестиции. Киев: Киевское акционерное агентство, 1997.

13. Рынок ценных бумаг: Учебник для вузов / Под ред. В.А. Галанова, А.И. Басова; Рос. экон. акад. им. Г.В. Плеханова. 2-е изд., перераб. и доп. – М.: Финансы и статистика, 2004. – 448 с

14. Сосина Н.А. Оценка эффективности инвестиций на основе функции риска// Научное обозрение. - 2015. - №5. - С. 207-210. ISSN 1815-4972.

15. Таха Х.А. Введение в исследование операций. 7-е изд. М.: Изд. дом «Вильямс», 2005.

16. Хазанова Л.Э. Математическое моделирование в экономике. М.: Изд-во БЕК, 1998.

17. Cook T. & Russel R.A. Introduction to Management Science. Englewood Cliffs (New Jersey), Prentice Hall, Inc. 1989.

18. Markowits H. Portfolio Selection. // Journal of Finance. — 1952. — Vol.7, No. 1. — P. 71–91.

19. Sharpe W. A Simplified Model for Portfolio Analysis. // Management Science. — Jan., 1963. — Vol. 9, No. 2. — P. 277–293.

20. Winston W.L. Introduction to Mathematical Programming: Applications and Algorithms. Boston (Mass.): PWS-KENT Publ., 1991.

21. Winston W.L. Operations Research: Applications and Algorithms Boston (Mass.): PWS-KENT Publ., 1990