

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования

«Тольяттинский государственный университет»

Институт математики, физики и информационных технологий

(наименование института полностью)

Кафедра «Прикладная математика и информатика»

(наименование)

01.04.02 Прикладная математика и информатика

(код и наименование направления подготовки)

Математическое моделирование

(направленность (профиль))

ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА

(МАГИСТЕРСКАЯ ДИССЕРТАЦИЯ)

на тему «Анализ подходов к моделированию систем эстафетной схемы»

Студент

Ф. Ф. Шодибекова

(И.О. Фамилия)

(личная подпись)

Научный
руководитель

д. ф.-м. н., профессор А.И. Сафронов

(ученая степень, звание, И.О. Фамилия)

Тольятти 2021

Содержание

Введение.....	3
1.Решение основной задачи внутренней баллистики классической схемы выстрела.....	7
1.1. Обыкновенные дифференциальные уравнения.....	7
1.2. Постановка основной задачи внутренней баллистики.....	15
1.3. Решение системы уравнений внутренней баллистики методом Рунге - Кутта.....	19
2.Газодинамический метод решения основной задачи внутренней баллистики.....	23
2.1. Понятие о разностных методах решения одномерных уравнений газодинамики.....	23
2.2 Решение основной задачи внутренней баллистики классических ствольных систем в случае камеры постоянного сечения.....	28
2.3_Влияние уширения камеры на баллистику выстрела.....	46
3. Газодинамические методы решения ОЗВБ ствольных систем в рамках односкоростной модели сплошной среды	51
3.1. Общие положения.....	51
3.2. Основные допущения. Система газодинамических уравнений.....	52
3.3. Начальные и граничные условия	53
3.4. Методы численного решения одномерных газодинамических задач внутренней баллистики.....	56
4. Баллистика систем эстафетной схемы выстрела.....	64
4.1. Относительные переменные	67
4.2. Численная схема решения задачи.....	70
4.3. Результаты численного исследования баллистических возможностей системы эстафетной схемы выстрела.....	73
Заключения.....	76
Список используемых источников.....	78

Введение

Актуальной задачей внутренней баллистики является улучшение тактико-технических характеристик существующих систем за счет, например, использования новых схем метания, и разработка новых систем. В основе разработки баллистических систем, в частности систем с новыми схемами выстрела лежит решение основной задачи внутренней баллистики (ОЗВБ). ОЗВБ может быть решена с использованием термодинамического подхода и при помощи современного газодинамического подхода.

При реализации новой эстафетной схемы метания возникают проблемы описания работы систем при последовательном воспламенении частей заряда, расчета параметров гетерогенной смеси при взаимодействии с выдвигающимися элементами схемы, например, разделительной перегородкой или перегородками. В полной мере при этом встает вопрос и проектирования используемых в системах метательных зарядов.

Важным при проектировании систем новых схем выстрела является и вопрос постепенного воспламенения полужарядов рассматриваемых схем.

Необходим глубокий анализ происходящих при этом явлений.

Важную роль при разработке численного алгоритма играют выбор независимых переменных, различные формы записи исходной системы уравнений (математически эквивалентные, но не равноценные при приближенном представлении), структура расчетных сеток и т. д. Все численные подходы в механике сплошной среды используют дискретное представление — ячейки, крупные частицы и др. Фактически при разработке алгоритмов численного счета проводится осреднение по объему ячейки и строятся конечно-разностные аналоги исходных дифференциальных уравнений. Установление адекватности такого представления исходной дифференциальной задаче — одно из важных звеньев вычислительного эксперимента.

Актуальность проблемы состоит в следующем: внутрибаллистические процессы проходящие в баллистических системах скрыты, актуально изучение процессов методами математического моделирования.

Цель исследования - разработка моделей, методов, алгоритмов для прогнозирования параметров баллистических систем.

Объектом исследования являются баллистические ствольные системы.

Предметом исследования диссертационной работы выступают методы и алгоритмы позволяющие прогнозировать функционирование установок перспективной схемы метания.

Гипотезой исследования является возможность существенного повышения скорости метания при применении предложенной эстафетной схемы метания по сравнению с классической схемой.

Для достижения поставленной цели требуется решить следующие **задачи:**

- Выбор точного метода для определения баллистических параметров классических систем при использовании термодинамической модели.
- Разработка математической модели предлагаемой схемы метания.
- Разработка модели односкоростной смеси для перспективной эстафетной схемы метания.

Методы исследования. Исследования проводятся с использованием метода математического моделирования и математического анализа.

Достоверность и обоснованность полученных результатов обеспечена использованием корректных математических моделей и апробированных алгоритмов решения баллистических задач.

На защиту выносятся:

- Анализ применения газодинамических и термодинамических моделей для решения основной задачи внутренней баллистики систем эстафетной схемы метания
- Математическая модель основной задачи внутренней баллистики для систем эстафетной схемы метания
- Программно-вычислительный комплекс, реализующий решение основной задачи внутренней баллистики для систем эстафетной схемы метания
- Результаты решения основной задачи внутренней баллистики для систем эстафетной схемы метания

1. Решение основной задачи внутренней баллистики классической схемы выстрела

1.1. Обыкновенные дифференциальные уравнения

1.1.1. Постановка задачи коши

При множестве задач моделирования различных процессов конкретная задача может ставиться в виде произвольного дифференциального уравнения произвольного порядка, либо в виде системы дифференциальных уравнений. Решение поставленной задачи можно проводить с учетом того, что произвольное дифференциальное уравнений p -то порядка

$$u^{(P)} = f(x, u, u', u'', \dots, u^{(P-1)}) \quad (1)$$

при помощи замены $u^{(k)} \equiv u_k(x)$ можно свести к системе p уравнений первого порядка:

$$u'_k(x) = u_{k+1}(x), 0 \leq k \leq p-2; \quad (2)$$

$$u'_{p-1} = f(x, u_0, u_1, \dots, u_{p-1}),$$

где $u_0(x) = u(x)$. Переход от (1) к (2), позволяет свести любую систему любого порядка к системе уравнений первого порядка. Далее можем работать с системой уравнений:

$$u'_k(x) = f_k(x, u_1, u_2, \dots, u_p), k = 1, 2, \dots, p, \quad (3)$$

В векторной форме уравнение принимает вид

$$u' = f(x, u), \quad (3')$$

$$u = (u_1, u_2, \dots, u_p), \quad f = (f_1, f_2, \dots, f_n).$$

При множестве решений системы уравнений (3), (3') единственное решение выделяется при наложении p дополнительных условий.

Обычно требуется решение системы уравнений (3) найти на отрезке $[x_0, X]$ (либо на отрезке $[X, x_0]$).

Известна классификация методов решения этих уравнений которые можно разделить на **точные, приближенные и численные**.

Точные методы обычно не удается использовать при решении сложных задач по уравнениям математической физики.

1.1.2. Метод Эйлера - Коши для решения задачи Коши

Используя метод Эйлера – Коши, например: *вычисляем вначале* $y_{i+1} = y_i + hf(x_i, y_i)$, $i = 0, 1, 2, \dots$ по обычному алгоритму Эйлера и обозначим это значение y_{i+1}^* , *в правую часть выражения*

$$y_{i+1} = y_i + h \frac{f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, y_{i+1}^*)}{2} + O(h^3), \quad i = 0, 1, 2, \dots,$$

получим для $i = 0, 1, 2, \dots$, $(y_0 = y(x_0), x_{i+1} = x_i + h)$:

$$y_{i+1}^* = y_i + hf(x_i, y_i),$$

$$y_{i+1} = y_i + h \frac{f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, y_{i+1}^*)}{2}, \quad i = 0, 1, 2, \dots \quad (1)$$

Метод Эйлера-Коши — метод второго порядка на всем интервале численного интегрирования.

Алгоритм реализован в виде подпрограммы (SUBROUTINE) EYLERK(N, X, Y, H, P, F):

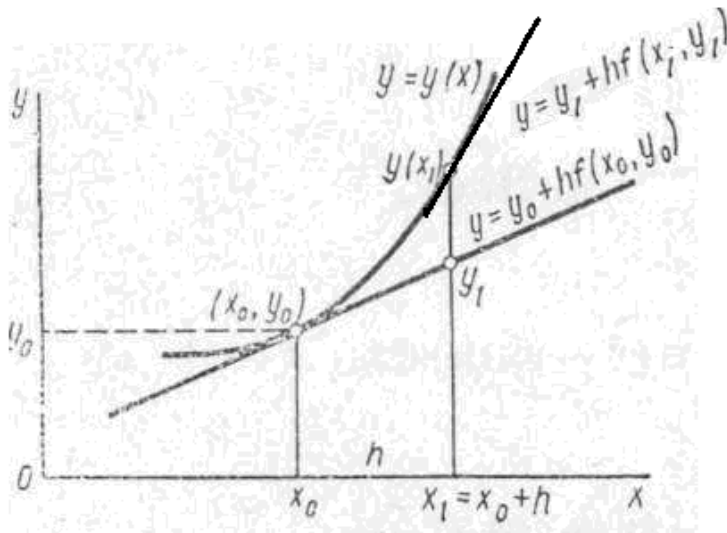


Рисунок 1.1. Схема метода Эйлера - Коши

Процедура метода Эйлера - Коши.

```

subroutine eylerk (v, x, v, n, p, f )
dimension f(1),y(1)
call p(x, v, f)
do 1 i=1,n
1 y1(i)=y(i)+h*f1(i)
call p(x, v, f)
do 1 i=1,n
2 y(i)=y(i) +h*(f1(i)+f(i))/2.0
x=x+h
return
end

```

Рисунок 1.2 - Реализация метода Эйлера – Коши

Необходимо провести вычисления методом Эйлера – Коши дифференциального уравнения и сравнить результаты решения с результатами решения методом Рунге - Кутта.

Выходные параметры: X — значение $x_0 + h$; Y — массив из N чисел, содержащий приближенное решение в точке $x_0 + h$

$(Y(I) = Y_1 \approx Y_1(x_0 + h), I=1, 2, \dots, N)$.

Контрольная задача Коши:

$$\frac{dy_1}{dx} = y_2, \quad \frac{dy_2}{dx} = e^{-xy_1}, \quad y_1(0)=0, y_2(0)=0$$

Решение методом Эйлера - Коши с шагом H = 0.1 на отрезке [0 , 3].

** Программа, реализующая решение задачи, имеет вид

```

DIMENSION Y(2),F(2)
EXTERNAL P
X=0.
Y(1)=0.
Y(2)=0.
DO 1 I=1,30
CALL EYLERK (2,X,Y,0.1,P,F)
PRINT 2, X,(J,Y(J),J=1,2)
1 CONTINUE
STOP
2 FORMAT(2X,' X=',E8.2,2(' Y(',I2,')=' ,E10.4))
END

```

Рисунок 1.3 - Программа метода Эйлера – Коши

Вычисления по программе метода Эйлера – Коши привели к следующим результатам!

Таблица 1. Результаты решения задачи методом Эйлера – Коши

X= 0.100	Y[1]= 0.005000	Y[2]= 0.100000
X= 0.200	Y[1]= 0.019998	Y[2]= 0.199900
X= 0.300	Y[1]= 0.044968	Y[2]= 0.299302
X= 0.400	Y[1]= 0.079831	Y[2]= 0.397521
X= 0.500	Y[1]= 0.124426	Y[2]= 0.493615
X= 0.600	Y[1]= 0.178486	Y[2]= 0.586437
X= 0.700	Y[1]= 0.241622	Y[2]= 0.674729
X= 0.800	Y[1]= 0.313316	Y[2]= 0.754220
X= 0.900	Y[1]= 0.392930	Y[2]= 0.832762
X= 1.000	Y[1]= 0.479717	Y[2]= 0.900440
X= 1.100	Y[1]= 0.572856	Y[2]= 0.959671
X= 1.200	Y[1]= 0.671485	Y[2]= 1.010255
X= 1.300	Y[1]= 0.774745	Y[2]= 1.052370
X= 1.400	Y[1]= 0.881809	Y[2]= 1.086569
X= 1.500	Y[1]= 0.991920	Y[2]= 1.113613

X= 1.600	Y[1]= 1.104411	Y[2]= 1.134461
X= 1.700	Y[1]= 1.218711	Y[2]= 1.150127
X= 1.800	Y[1]= 1.334354	Y[2]= 1.161604
X= 1.900	Y[1]= 1.450967	Y[2]= 1.169805
X= 2.000	Y[1]= 1.568265	Y[2]= 1.175521
...
...
...
X=3.000	Y[1]=2.752350	Y[2]= 1.186253

Сопоставление решения с точным решением

Для этого решим на отрезке $[0, 1]$ с шагом $0,1$ задачу Коши для уравнения первого порядка

$$\frac{dy}{dx} = y(1-x),$$

$$y(0)=1.$$

Точное решение уравнения: $y = \exp(x - 1/2x^2)$.

Построим таблицу для сравнения расчетных данных с точными.

Таблица 2. Сравнение расчетных данных

x	0	0.1	0.2	...	1
y Точное решение	1.0000	1.0997	1.1972	...	1.6487
y Мет.Эйлера-Коши	1.0000	1.1050	1.2089	...	1.7324

1.1.3. Реализация метода Рунге - Кутта

Одношаговый метод четвертого порядка - метод Рунге — Кутта:

$$\mathbf{y}_{i+1} = \mathbf{y}_i + (\mathbf{h} / 6) (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4), \quad k_1 = f(x_i, \mathbf{y}_i), \quad k_2 = f(x_i + \mathbf{h}/2; \mathbf{y}_i + \mathbf{h} k_1/2), \quad k_3 = f(x_i + \mathbf{h}/2; \mathbf{y}_i + \mathbf{h} k_2/2), \quad k_4 = f(x_i + \mathbf{h}; \mathbf{y}_i + \mathbf{h} k_3); \quad (1)$$

На одном шаге сетки погрешность метода равна Mh^5

Метод Рунге — Кутта легко применяется на нормальных системах дифференциальных уравнений

$$y'_k(x) = f_k(x, y_1, y_1, \dots, y_n), \quad 1 \leq k \leq n,$$

Блок-схема алгоритма Рунге— Кутта представлена на рисунке 1.4.

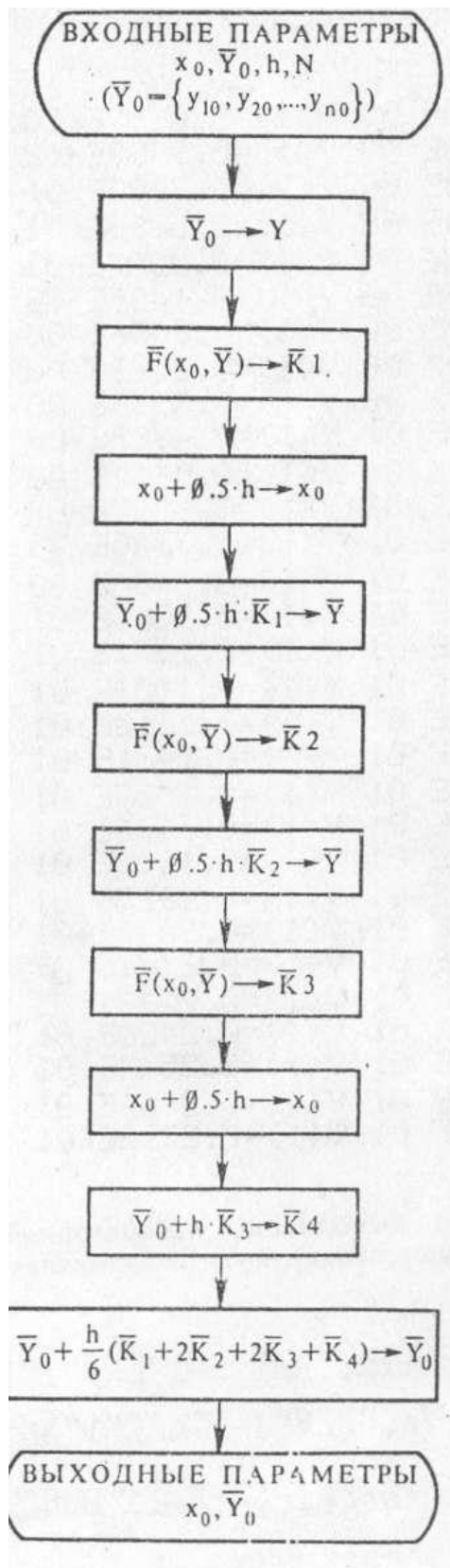


Рисунок 1.4 – Блок схема программы счета по методу Рунге - Кутты

Описанный алгоритм реализован в виде подпрограммы (SUBROUTINE) RGK (N, X, Y, H, P, F):

```

SUBROUTINE RGK(N,X,Y,H,P,F)
DIMENSION F(1), Y(1),Y1(10),FK(4,10)
CALL P(X,Y,F)
DO 1 I = 1,N
FK(1,I)=H*F(I)
      1      Y1(I)=Y(I)+0.5*FK(1,I)
      X=X+0.5*H
      CALL P(X, Y1, F)
DO 2 I = 1, N
FK(2, I) =H*F ( I)
2 Y1( I)=Y( I)+0.5*FK( 2, I)
CALL P(X, Y1, F)
DO 3 I=1,N
FK(3, I)=H* F ( I)
3 Y1( I)=Y( I)+0.5*FK( 3, I)
X=X+0.5*H
CALL P(X, Y1, F)
DO 4 I=1, N
FK(4, I)= H*F ( I)
4 Y(I)=Y(I)+0.1666667*( FK( 1, I) +2.* FK( 2, I)+ 2.*
* FK( 3, I)+ FK(4, I))
RETURN
END

```

Рисунок 1.5 – Подпрограмма счета методом Рунге - Кутта

Подпрограмма RGK предназначена для решения систем не выше десятого порядка.

Таблица 3. Сравнение расчетных данных

x	0	0.1	0.2	...	1
y Точное решение	1.0000	1.0997	1.1972	...	1.6487
y Мет.Эйлера-Коши	1.0000	1.1050	1.2089	...	1.7324
y Мет.Рунге-Кутта	1.0000	1.0997	1.1972	...	1.6487

1.2. Постановка основной задачи внутренней баллистики

Представляет интерес решение системы уравнений ОЗВБ в соответствии с обобщенным методом Дроздова [4].

Ниже используются следующие основные обозначения:

- 1) d — калибр канала — (диаметр канала по полям нарезов в дм).
- 2) S — площадь поперечного сечения канала · ствола с учетом нарезов в дм^2 .
- 3) L_{KH} — длина канала (расстояние от дна канала ствола до конца канала в дм).
- 4) W_0 — объем камеры в дм^3 .
- 5) q — вес снаряда в кг .
- 6) ω — вес порохового заряда в кг .
- 7) T_1 — температура горения пороха в $^\circ\text{K}$.
- 8) f — сила пороха в кгдмкг^{-1} .
- 9) α — коэфф. порох. газов в $\text{дм}^3 \text{кг}^{-1}$.
- 10) δ — удельный вес пороха в кг дм^{-3} .
- 11) u_x — скорость горения пороха при одной атмосфере в $\text{дмсек}^{-1} \text{дм}^2 \text{кг}^{-1}$.
- 12) $2e_x$ — начальный наименьший размер порохового зерна в мм .
- 13) $k, k\lambda$ — характеристики формы порохового зерна.
- 14) z — относительная толщина сгоревшего слоя зерна.
- 15) ψ — относительный вес или объем сгоревшего заряда.
- 16) σ — относительная поверхность горящего порохового зерна.
17. l — относительный путь снаряда в дм .
18. v — относительная скорость снаряда в м сек^{-1} .
19. p — среднее давление пороховых газов в данный момент времени
20. $p_{\text{сн}}, p_{\text{KH}}$ — давление у дна снаряда и у дна канала.
21. J_k — импульс давления пороховых газов в конце горения пороха.

22. Δ —плотность заряжения в $кг\ дм^{-3}$.

23. l_0 —приведенная длина камеры в $дм$.

24. $1 + \theta$ — показатель политропы.

Подстрочные индексы: 0 — для момента начала движения метаемого элемента.

m — для момента наибольшего давления. S — для момента распада порохового зерна. k — для конца горения пороха, d — для момента вылета метаемого элемента.

Допущения

Уравнения классической внутренней баллистики выводятся для осредненных значений давления p , температуры T и относительного количества сгоревшего заряда ψ , при этом осреднение T и ψ получается как следствие осреднения давления.

При выводе и интегрировании уравнений используются следующие основные допущения:

1. Отношение теплоемкостей постоянно и равно среднему значению для температур от T_1 до T_d .
2. Коэффициент фиктивности ϕ постоянен и равен среднему значению.
3. Воспламенение пороха мгновенное.
4. Сопротивление врезанию пояска в нарезы учитывается величиной μ называемой давлением форсирования
5. Теплоотдача стенкам орудия учитывается косвенно в силе пороха.
6. Сила пороха считается постоянной.
7. $u = u_1 p$.

Система уравнений

Система уравнений принимает следующий вид:

$$\frac{d\psi}{dt} = \sqrt{\kappa^2 + 4\kappa\lambda\psi} \frac{P}{I_K} \quad (1)$$

$$\frac{dV_{CH}}{dt} = \frac{S_{CH} P_{CH}}{q} \quad (2)$$

$$\frac{dl_{CH}}{dt} = V_{CH} \quad (3)$$

$$P[S_{CH}l_{CH} + W_{KM} - \alpha\omega\psi - \frac{\omega}{\delta}(1-\psi)] = \omega\psi f - \frac{\theta}{2}\varphi q V_{CH}^2 \quad (4)$$

$$P[S_{CH}l_{CH} + W_{KM} - \alpha\omega\psi - \frac{\omega}{\delta}(1-\psi)] = \omega\psi f$$

$$\varphi = a + b \frac{\omega}{q} \quad P = \varphi P_{CH} \quad (5)$$

Будем в дальнейшем использовать геометрический закон горения, тогда

$$\psi = \kappa z(1 - \lambda z) \quad (6)$$

Начальные условия

$$t = 0, P = P_\phi, T = T_V, V_{CH} = 0, l_{CH} = 0, \psi = \psi_0$$

В этой системе уравнений ε — полная работа, совершаемая газами; a — коэффициент, учитывающий потери энергии газа на трение ведущую пояску о боевые грани нарезов, вращение снаряда и откат орудия; b — коэффициент, учитывающий потери энергии газа на перемещение газо-пороховой смеси; этот коэффициент зависит от формы камеры и устройства заряда и является переменной величиной. Как указывалось выше, он принимается постоянной величиной; среднее значение этого коэффициента находится в пределах $1/3 - 1/6$.

Так как при $t = 0$ $l = 0$; $v = 0$; $p = p_0$, то из (1), (3) и (6) получаем

$$\psi_H = \frac{\frac{1}{\Delta} - \frac{1}{\rho_2}}{\frac{f}{P_\phi} + \alpha - \frac{1}{\rho_2}}; \quad z_H = \frac{2\psi_H}{\kappa_1(1 + \sigma_H)}; \quad \sigma_H = \sqrt{1 + 4\frac{\lambda_1}{\kappa_1}\psi_H}.$$

Необходимо проинтегрировать систему уравнений в процессе движения метаэлемента по каналу.

1.3 Решение системы уравнений внутренней баллистики методом Рунге - Кутта

Поставленная основная задача внутренней баллистики решалась методом Рунге – Кутта с 4-м порядком точности для баллистической системы калибра 76,2 мм.

В этом случае необходимо решать систему, в состав которой входят три обыкновенных дифференциальных уравнения.

$$\frac{d\psi}{dt} = \sqrt{\kappa^2 + 4\kappa\lambda\psi} \frac{P}{I_K} \quad (1)$$

$$\frac{dV_{CH}}{dt} = \frac{S_{CH} P_{CH}}{q} \quad (2)$$

$$\frac{dl_{CH}}{dt} = V_{CH} \quad (3)$$

$$P[S_{CH}l_{CH} + W_{KM} - \alpha\omega\psi - \frac{\omega}{\delta}(1-\psi)] = \omega\psi f - \frac{\theta}{2}\varphi q V_{CH} \quad (4)$$

$$P[S_{CH}l_{CH} + W_{KM} - \alpha\omega\psi - \frac{\omega}{\delta}(1-\psi)] = \omega\psi f$$

$$\varphi = a + b\frac{\omega}{q} \quad P = \varphi P_{CH} \quad (5)$$

При $t=0$ $l=0$; $v=0$; $p=p_0$

$$\psi_H = \frac{\frac{1}{\Delta} - \frac{1}{\rho_2}}{\frac{f}{P_\phi} + \alpha - \frac{1}{\rho_2}}; \quad z_H = \frac{2\psi_H}{\kappa_1(1+\sigma_H)}; \quad \sigma_H = \sqrt{1 + 4\frac{\lambda_1}{\kappa_1}\psi_H}$$

Рассмотренная программа метода Рунге – Кутта при этом выглядит следующим образом:

```
subroutine RGK(N,X,Y,H,P,F)
IMPLICIT REAL*8(A-H,O-Z)
dimension F(3),Y(3),Y1(10),FK(4,10)
CALL P(X,Y,F)
DO 1 I=1,N
FK(1,I)=H*F(I)
1 Y1(I)=Y(I)+0.5D-00*FK(1,I)
X=X+0.5D-00*H
CALL P(X,Y1,F)
DO 2 I=1,N
FK(2,I)=H*F(I)
2 Y1(I)=Y(I)+0.5D-00*FK(2,I)
CALL P(X,Y1,F)
DO 3 I=1,N
FK(3,I)=H*F(I)
3 Y1(I)=Y(I)+FK(3,I)
X=X+0.5D-00*H
CALL P(X,Y1,F)
DO 4 I=1,N
FK(4,I)=H*F(I)
4 Y(I)=Y(I)+1.D-00/6 .D-00*(FK(1,I)+2.D-00*FK(2,I)
*+2.D-00*FK(3,I)+FK(4,I))
RETURN
END
```

Рисунок 1.6 - Реализация метода Рунге – Кутта

Здесь рассмотрен блок программы при решении системы из трех обыкновенных дифференциальных уравнений.

Следующий программный блок содержит процедуру, описывающую интегрируемые уравнения.

```

subroutine p(x,y,f)
implicit real*8(a-h,o-z)
dimension F(3),Y(3)
common/block/akap,alam,ps,pc,aik,sch,q,om,fs,tet,fi,w1,del,al
c   write(1,*) aKap,alam,Ps,PC,AIK,SCH
f(1)=(akap**2.0+4.d-00*akap*alam*y(1))**0.5d-00*ps/aik
f(2)=sch*pc/q
f(3)=y(2)
if(y(1).ge.0.99d-00)f(1)=1.d-00
if(y(1).ge.0.99d-00)y(1)=1.d-00
ps=(om*y(1)*fs-tet/2.d-00*fi*q*y(2)**2.)/(sch*y(3)+w1-al*om*y(1)
--om/del*(1-y(1)))
pc=ps/fi
c   write (1,*) x,(j,y(j),j=1,3)
return
end

```

Рисунок 1.7 - Программная реализация интегрируемой системы уравнений методом Рунге – Кутта

1.3.1. Определение внутрибаллистических параметров системы калибра 76,2 мм классической схемы выстрела термодинамическим методом

На рисунке 1.8 Результаты расчета системы 76,2 мм методом Рунге – Кутта. Численно по методу Дроздова определены внутрибаллистические параметры системы 76,2 мм [21].

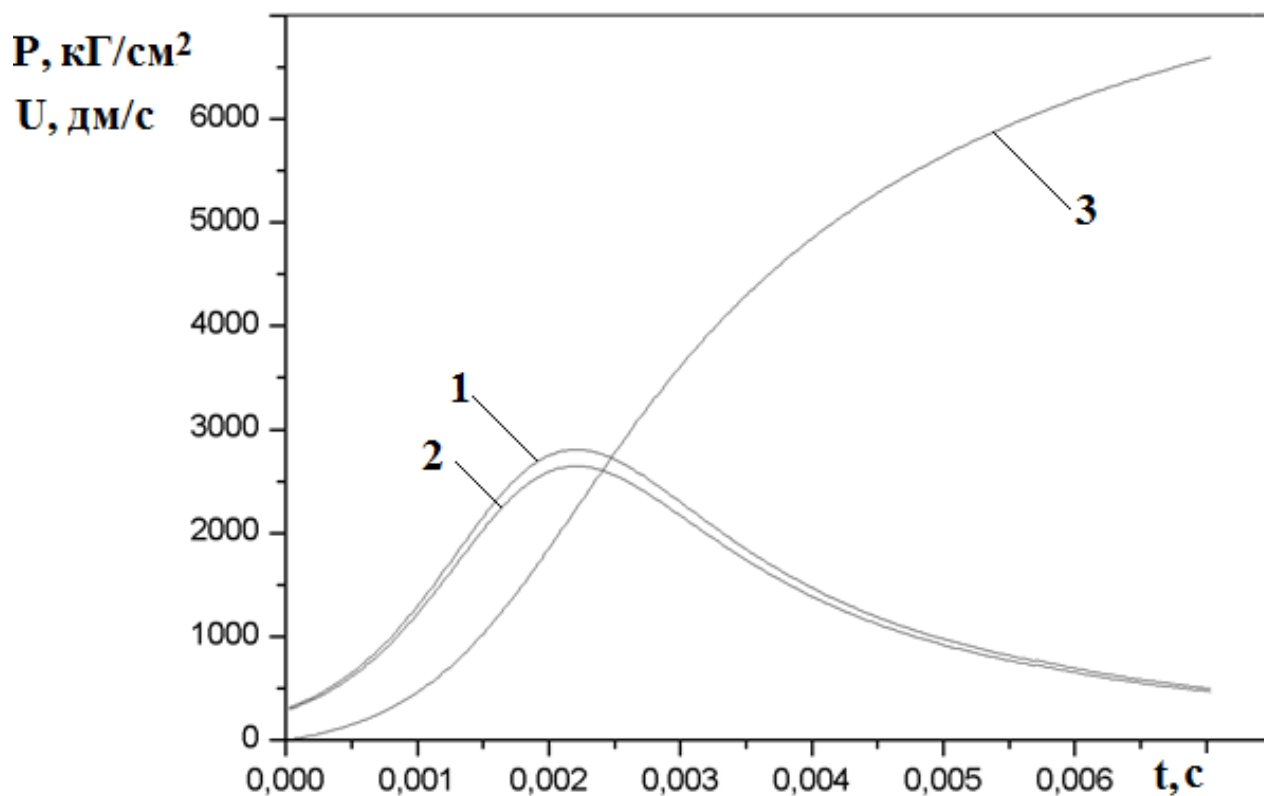


Рисунок 1.8 – Результаты расчета системы 76,2 мм: 1 – давление на дно канала; 2 - давление на снаряде; 3 - скорость снаряда

Результаты расчетов соответствуют расчетным данным приведенным в [2].

1.4. Выводы по разделу

1. Решена ОЗВБ с 4-м порядком точности методом Рунге-Кутты систем классической схемы выстрела термодинамическим методом.
2. В соответствии с использованным термодинамическим методом параметры внутрибаллистического процесса определялись по среднему давлению в канале системы калибра 76,2 мм.

2. Газодинамический метод решения основной задачи внутренней баллистики

2.1. Понятие о разностных методах решения одномерных уравнений газодинамики

В настоящем параграфе кратко изложены основные понятия из теории численных методов решения дифференциальных уравнений в частных производных.

Не имея возможности сколько ни будь полно охватить все аспекты и методы этой интенсивно развивающейся теории, ограничимся рассмотрением лишь некоторых принципиальных вопросов.

Начнём с простой задачи. В области

$$-\infty < x < \infty, \quad t \geq 0 \quad (2.1)$$

требуется найти функцию $V(x, t)$ удовлетворяющую при $t \geq 0$ дифференциальному уравнению

$$\frac{\partial V}{\partial t} + a \frac{\partial V}{\partial x} = F(x, t) \quad (2.2)$$

и принимающую при $\tau = 0$ заданные значения

$$V(x, 0) = \Phi(x) \quad (2.3)$$

Точное решение этой задачи дается формулой

$$V(x, t) = \Phi(x - at) + \int_0^t F(x - at + at', t') dt' \quad (2.4)$$

В данный момент эта задача интересует нас лишь как пример, на котором, несмотря на его элементарность, можно продемонстрировать многие существенные свойства численных методов интегрирования дифференциальных уравнений в частных производных.

Для реализации разностного метода решения задачи /2.1/ - /2.4./ необходимо заменить область непрерывного изменения аргументов /2.1./ расчетной сеткой /рис. 2.1./, т.е. дискретными точками с координатами

$$\begin{aligned} x_k &= Kh & ; & \quad K = 0; \pm 1; \pm 2; \dots \} \\ t^n &= n\tau & ; & \quad n = 0; 1; 2; \dots \} \end{aligned}$$

(2.5)

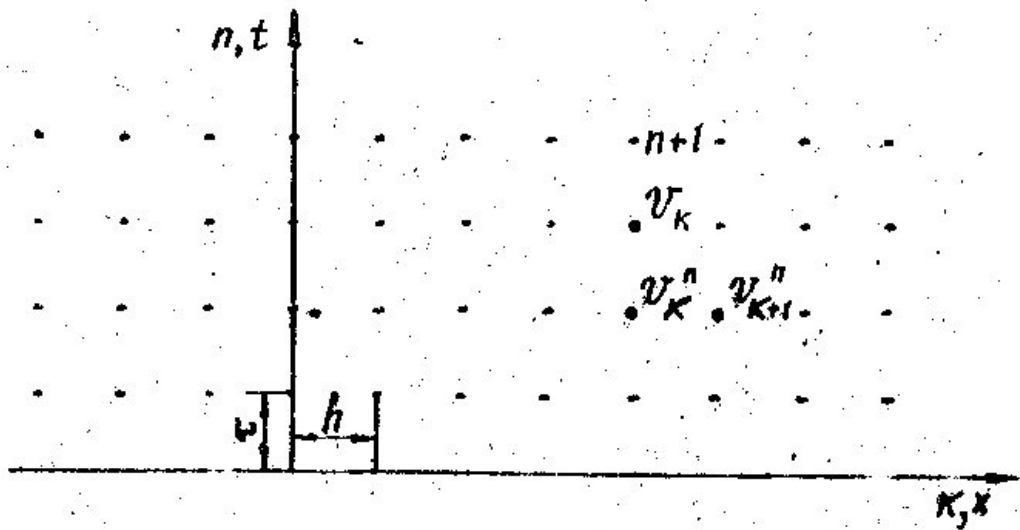


Рис. 2.1.

Далее, заменяя частные производные, входящие в /2. 2. /, разностными выражениями, напишем

$$\frac{u_k^{n+1} - u_k^n}{\tau} + a \frac{u_{k+1}^n - u_k^n}{h} = f_k^n \quad (2.6)$$

для каждой пары индексов k, n , т. е. для каждой точки расчетной сетки /2.5./ . Вместо условия /2. 3. / напишем

$$u_k^0 = Y^k \quad (2.7)$$

Итак, задачу /2. 1. /- /2. 3. / заменим разностной, численной задачей /2. 5./ - /2. 7. /. Исползованный способ замены не является единственным. Но для простоты рассуждения мы остановимся на этом. Разрешая /2. 6./, относительно u_k^{n+1} , получим

$$u_k^{n+1} = \left(1 + a \frac{\tau}{h}\right) u_k^n - a \frac{\tau}{h} u_{k+1}^n + \tau f_k^n \quad (2.8)$$

Если величины u_k^n для n -ого слоя точек известны, то /2. 8./ позволяет вычислить для следующего / $n+1$ / -го слоя точек. Поскольку u_k^0 известны, то находим по ним u_k^1 , затем u_k^2 и т. д.

Перейдем к выяснению основного вопроса – будет ли полученное численным методом решение u_k^n близко к точному решению исходной задачи $V(x, t)$. Очевидно, надеяться на это можно лишь при малых τ и h

Положим

$$u_k^n = V(x_k, t^n) + \delta u_k^n \quad (2.9)$$

и подставим это выражение в разностную формулу /2. 6. / .

Получим

$$\frac{\delta u_k^{n+1} - \delta u_k^n}{\tau} + a \frac{\delta u_{k+1}^n - \delta u_k^n}{h} = f_k^n - \left(\frac{V_k^{n+1} - V_k^n}{\tau} + a \frac{V_{k+1}^n - V_k^n}{h} \right). \quad /6.9 /$$

Здесь и далее V_k^n означает $V(x_k, t)$. Оценим правую часть /2. 9. / . Считая $V(x, t)$ гладкой функцией, при малых τ и h можно написать

$$\left. \begin{aligned} V_k^{n+1} &= V_k^n + \tau \left(\frac{\partial V^n}{\partial \tau_k} \right) + D(\tau^2) \\ V_{k+1}^n &= V_k^n + h \left(\frac{\partial V}{\partial x} \right) + D(h^2) \end{aligned} \right\} \quad (2.10)$$

откуда

$$\frac{V_k^{n+1} - V_k^n}{\tau} + a \frac{V_{k+1}^n - V_k^n}{h} = \left(\frac{\partial V}{\partial \tau} + a \frac{\partial V}{\partial x} \right) + D(\tau, h)$$

Так как $V(x, t)$ удовлетворяет /2. 2. / . $aF(x_k, t^n) = f_k^n$ то последнее равенство означает, что

$$\frac{V_k^{n+1} - V_k^n}{\tau} + a \frac{V_{k+1}^n - V_k^n}{h} = f_k^n - D(\tau, h)$$

Сравнивая /2. 1. / . с /2. 6. / . заключаем, что решение исходной задачи $V(x, t)$ удовлетворяет разностному уравнению /2. 6. / . с точностью до $D(\tau, h)$, т. е. аппроксимация имеет место .

Подставляя /2. 11. / в правую часть /2. 9. / , получим уравнение для определения δu

$$\frac{\delta u_k^{n+1} - \delta u_k^n}{\tau} + a \frac{\delta u_{k+1}^n - \delta u_k^n}{h} = D(\tau, h), \quad (2.12)$$

или

$$\delta u_k^{n+1} = \left(1 + a \frac{\tau}{h}\right) \delta u_k^n - a \frac{\tau}{h} \delta u_{k+1}^n + \tau D(\tau, h) \quad (2.13)$$

Рассмотрим сначала случай, когда a, τ, h удовлетворяет неравенствам

$$D \leq -a \frac{\tau}{h} \leq 1$$

В этом случае коэффициенты при δu_k^n и δu_{k+1}^n в правой части /2.13/ положительны, и можно написать

$$\begin{aligned} |\delta u_k^{n+1}| &\leq \left(1 + a \frac{\tau}{h}\right) |\delta u_k^n| + \left(-a \frac{\tau}{h}\right) |\delta u_{k+1}^n| + \tau D(\tau, h) \\ &\leq \max(|\delta u_k^n|, |\delta u_{k+1}^n|) + \tau D(\tau, h) \end{aligned}$$

Введем обозначения

$$\|\delta u^n\| = \max |\delta u_k^n| \quad (2.15)$$

Тогда предыдущее неравенство дает

$$\|\delta u^{n+1}\| \leq \|\delta u^n\| + \tau D(\tau, h) \quad (2.16)$$

т. е. максимальное отклонение δu за один шаг τ увеличивается не более чем на $\tau D(\tau, h)$. Соответственно, за N шагов это дает

$$\|\delta u^N\| \leq \|\delta u^0\| + N\tau D(\tau, h) \quad (2.17)$$

Зафиксируем любое конечное $t = N\tau$ и устремим τ, h к нулю, а $N \rightarrow \infty$. Поскольку $\delta u_k^0 = \Phi_k - Y_k = 0$ то из /2.17./ следует

$$\|\delta u(t)\| = D(\tau, h) \quad (2.18)$$

Итак, мы доказали, что если при стремлении τ, h к нулю условия /2.14./ выполнены, то решение разностной задачи /2.5./-2.7./ сходится к решению исходной задачи /2.1./-2.3./ можно доказать противоположенный случай, когда стремление τ, h нулю происходит таким образом, что хотя бы одно из условий нарушено, тогда в этом случае сходимости, вообще говоря, нет. Доказательство опустим.

Подчеркнем следующий существенный факт.

Разностная задача /2.5./-2.7./ аппроксимирует исходную дифференциальную задачу /2.1./-2.3./ вне зависимости от того, выполнены или нет условия /2.14./. Однако оказывается, что одной лишь аппроксимации недостаточно для сходимости u_k^n к точному решению

$V(x, t)$. Дополнительными условиями, обеспечивающими сходимость , являются в данной задаче условия / 2. 14. /. Невыполнение их может привести к любому отклонению u_k^n от $V(x, t)$.

Интересно выяснить, какой характер имеет решение u_k^n , получаемое при данных конечных τ, h и что с ним происходит при уменьшении τ, h .

Поступим следующим образом . Обратимся к формуле /2. 13. /, которая описывает процесс эволюции ошибки от слоя к слою. Наличие в правой части члена $\tau D(\tau, h)$ указывает на то, что порядок ошибки во всяком случае не меньше этой величины. Сама ошибка δu_k^n есть некоторая сложная функция от индекса K . Допустим, что ее можно представить в виде суммы, одно из слагаемых которой имеет вид $\varepsilon(-1^k)$

где ε имеет порядок $\tau D(\tau, h)$. Проследим за развитием только этой компоненты ошибки, т. е. положим

$$\delta u_k^n = \varepsilon(-1^k) \quad (2.19)$$

и найдем $\delta u_k^{n+1}, \delta u_k^{n+2}, \dots$. При этом, идеализируя задачу, не будем учитывать вклад, создаваемый членом $\tau D(\tau, h)$ на следующих шагах. Получим

$$\delta u_k^{n+1} = \left(1 + a \frac{\tau}{h}\right) \varepsilon(-1^k) - a \frac{\tau}{h} \varepsilon(-1^k) = \left(1 + 2a \frac{\tau}{h}\right) \varepsilon(-1^k),$$

т. е. функция вида /2. 19./ переходит на следующем слое в себя , приобретая множитель $1 + 2a \frac{\tau}{h}$

Очевидно, через N слоев она приобретает множитель $\left(1 + 2a \frac{\tau}{h}\right)^N$, т. е.

$$\delta u_k^{n+N} = \left(1 + 2a \frac{\tau}{h}\right)^N \varepsilon(-1^k)$$

и, следовательно, развитие рассматриваемой компоненты ошибки определяется величиной $1 + 2a \frac{\tau}{h}$. Если

$$\left|1 + 2a \frac{\tau}{h}\right| < 1, \quad (2.21)$$

Описанным эффект получил название неустойчивости .

Нетрудно заметить, что /2. 21. / является все тем же условием /2. 14. / .

Следовательно, отсутствие сходимости и неустойчивости имеют одну и ту же

причину. Используя / 2.20. / для конечного отрезка $t = \tau N$, получим, что в случае нарушения условия /2.21./, при $(\tau, h) \rightarrow D$

$$|\partial u_k^{n+1}| = \left| 1 + 2a \frac{\tau}{h} \right|^{\frac{t}{x}} \tau D(\tau, h)$$

Расчет по неустойчивой разностной схеме не только не дает решения близкого к точному, но вообще невозможен. При этом уменьшение τ и h только ухудшает положение.

2.2. Решение основной задачи внутренней баллистики классических ствольных систем в случае каморы постоянного сечения

При обычных классических подходах к решению основной задачи внутренней баллистики /ОЗВБ/ движение газопороховой смеси учитывается с помощью коэффициентов фиктивности, которые определяются, исходя из априорных допущений / независимость плотности от пространственной координаты, и как следствие, линейное распределение скорости/. Определенные таким образом значения коэффициентов фиктивности приводят к удовлетворительному согласованию с опытом лишь при сравнительно малых относительных весах заряда ω/q . Нахождение точных значений коэффициентов фиктивности, входящих в уравнение движения снаряда и уравнение Резаля как функции пути или времени движения снаряда, в рамках классической внутренней баллистики невозможно, для этого необходимо изучить движение самих пороховых газов, то есть рассматривать ОЗВБ с точки зрения газодинамики, учитывая постепенность горения заряда и движения частиц пороха. При этом газодинамическом подходе, естественно, исключается необходимость использования коэффициентов фиктивности. Кроме того, точность решения при строгом походе не зависит от относительного веса заряда.

Будем рассматривать решение основной задачи внутренней баллистики при следующих допущениях.

1. Пренебрегаем воспламенительным периодом так, что горение всего заряда начинается одновременно. Движение снаряда начинается тогда, когда давление в заснарядном пространстве достигает величины ρ_0 . До момента начала движения снаряда пороховые газы неподвижны, а давление одинаково в любом сечении заснарядного пространства. Пороховые газы и зерна пороха распределены по длине каморы равномерно.

2.Заряд состоит из одинаковых зерен пороха , причем пороховые зерна движутся с той же скоростью что и окружающие их газы /гипотеза односкоростной смеси/.

3.Трением газов о стенки канала ствола и теплоотдачей пренебрегаем. Течение газов рассматривается как одномерное.

4.Для зерен пороха справедлив обычный геометрический закон горения. Связь между Ψ и z определяется уравнением

$$\Psi = xz(1 + \lambda z + \mu z^2)$$

5.Площадь поперечного сечения канала ствола постоянна и равна площади поперечного сечения каморы.

6.Силы сопротивления движению снаряда учитывается приближенно введением давления форсирования.

7.Ствол закреплен неподвижно

Будем рассматривать ОЗВБ в переменных Лагранжа. Начало координат находится у дна каморы. Время отсчитывается от начала движения снаряда. Расстояние рассматриваемого слоя от начала координат в момент времени $t=0$ обозначим через a / Лагранжева координата / Текущее расстояние рассматриваемого слоя от начала координат – через x . Обозначим через ρ_0 плотность смеси пороховых газов и несгоревших частиц пороха в данном элементарном слое .Согласно допущению /2/ суммарный вес сгоревшего и несгоревшего пороха , заключенного между, двумя сечениями, во время движения будет постоянен и равен

$$\rho_0 g S da$$

Где ρ_0 - суммарная плотность смеси начальный момент.

Тогда в переменных Лагранжа, уравнения движения и неразрывности запишутся:

$$\rho_0 \frac{\partial \vartheta}{\partial t} = \frac{\partial \rho}{\partial a} = 0; \quad (2.22)$$

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial a} + \frac{\rho_0}{\rho^2} \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad (2.23)$$

Уравнения /2. 22. /-/2 . 23 /. связывают три функции двух переменных. Для получения недостающей зависимости рассмотрим уравнение энергетического баланса элементарного слоя.

В рассматриваемом слое в данный момент времени энергия находится в трех формах:

1/ в виде кинетической энергии движущегося вещества

$$\frac{\vartheta^2}{2} \rho_0 S da;$$

2/ в виде потенциальной энергии несгоревшего пороха

$$(1 - \Psi) \Pi \rho_0 S da,$$

Где $\Pi = \frac{f}{R-1}$ - потенциальная энергии единицы массы твердого пороха :

3/ в виде внутренней энергии пороховых газов

$$\frac{f}{R-1} \varepsilon \rho_0 S da$$

Где ε - пропорционального внутренней энергии ,приходящейся на единицу массы всего вещества, заключенного в данном слое.

Так как притока энергии извне нет, а все виды энергии внутри выделенного объема учтены, то изменение полной энергии за элементарный промежуток времени сложное с работой совершенной за время над выделенными слоем, равно нулю, т.е .

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{\vartheta^2}{2} + \Pi(1 - \Psi) + \frac{\varepsilon}{R-1} \right] \rho_0 S da dt + \frac{\partial(\vartheta \rho)}{\partial a} S da dt = 0,$$

Или

$$\frac{1}{R-1} \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \frac{\rho}{\rho_0} \frac{\partial \vartheta}{\partial a} = \Pi \frac{\partial \Psi}{\partial t} \quad (2.24)$$

Установим зависимость между плотностью газопороховой смеси ρ и плотностью газов. Объем элементарного слоя, заключенного между поверхностями, в текущий момент времени равен

$$\frac{\rho_0 S da}{\rho}$$

Объем твердого пороха, заключенного в выделенном слое, определится по формуле

$$\frac{(1 - \Psi)\rho_0 S da}{\delta^1}$$

Где δ^1 - массовая плотность твердого пороха, а собственный объем молекул газа можно рассчитать как

$$\rho_0 \Psi S da$$

Обозначим

$$\frac{1}{\rho} - \frac{(1 - \Psi)}{\delta^1} - \Psi = \frac{\Psi}{v}$$

Где v - плотность газа относительно свободного объема;

- коэффциентом единицы массы пороховых газов.

Под свободным объемом понимается объем, получающийся при вычитании из объема фактически газом, объема самих молекул газа.

Преобразуем уравнения (2.22.)-(2.24.) полагая, что внутренняя энергия элементарного слоя, если θ выражать ее через давление и свободный объем, равна

$$\frac{1}{R - 1} \rho \frac{\Psi}{v} S \rho_0 da \quad (2.25)$$

Используя (2.25.) и учитывая уравнения движения и неразрывности, а также связь между ρ и $\frac{\Psi}{v}$, уравнение (2.23.) запишем его в следующем виде

$$\frac{1}{R - 1} \frac{\Psi}{v} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{R}{R - 1} \rho \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\Psi}{v} \right) = \left[\Pi - \left(a - \frac{1}{\delta^1} \right) \rho \right] = \frac{\partial \Psi}{\partial t} \quad (2.26)$$

Введём энтропийную функцию с помощью равенства

$$\Phi = \rho \left(\frac{\Psi}{v} \right)^R \quad (2.27.)$$

А скорость звука выразим через зависимость

$$C = \sqrt{\frac{R\rho}{\rho^2} \left(\left(\frac{\Psi}{v} \right)^{-1} \right)} \quad (2.28.)$$

Наряду со скоростью звука удобно ввести величину, аналогичную скорости звука

$$C' = \sqrt{R\rho \left(\frac{\Psi}{v} \right)} \quad (2.29.)$$

При помощи (2.29.) исключим ρ и $\frac{\Psi}{v}$ из уравнения(2.23.) и (2.26.), т.е.

$$\frac{\partial v}{\partial a} + \frac{C'^2 \rho_0}{R\rho^2} \frac{\partial \rho}{\partial t} - \frac{2C' \rho_0}{R\rho} \frac{\partial C'}{\partial t} = \left(a - \frac{1}{\delta^1} \right) \rho_0 \frac{\partial \Psi}{\partial t};$$

$$\frac{2}{R-1} C \frac{\partial C'}{\partial t} - \frac{C'^2}{R\rho} \frac{\partial \rho}{\partial t} = \left[\Pi - \left(a - \frac{1}{\delta^1} \right) \rho \right] \frac{\partial \Psi}{\partial t}$$

Исключая из уравнений $\frac{\partial C'}{\partial t}$ и присоединяя (2.22.), получим систему двух дифференциальных уравнений в частотных производных первого порядка относительно двух функций v и ρ , т.е.

$$\rho_0 \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial \rho}{\partial a} = 0 \quad (2.30)$$

$$\frac{\partial v}{\partial a} + \rho_0 \frac{c'^2}{R^2 \rho^2} \frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{\rho_0}{R\rho} \left[(R-1)\Pi + \left(a' - \frac{1}{\delta'} \right) \rho \right] \frac{\partial \Psi}{\partial t} \quad (2.31)$$

Уравнение энергии (2.26.) на основании (2.27.) примет вид:

$$\frac{\partial \ln \Phi}{\partial t} = (R-1) \left[\Pi - \left(a' - \frac{1}{\delta'} \right) \rho \right] \frac{v}{\Psi} A \sigma(\Psi) \quad (2.32)$$

Где $\Phi = \frac{C'^{2R}}{R^R \rho^{R-1}}$

Присоединяя к (2.30.) и (2.32.) уравнения горения пороха

$$\frac{\partial \Psi}{\partial t} = A \sigma(\Psi) \rho \quad (2.33)$$

Где $A = \frac{S_0}{\Lambda_0}$ - начальная удельная поверхность пороха ;

$$\delta(\Psi) = \frac{S^0}{S_0} - \text{относительная поверхность пороха.}$$

Приходим к системе четырёх дифференциальных уравнений в частных производных относительно v, ρ, Φ, Ψ , решение которой вместе с начальными и граничными позволяют решать основную задачу внутренней баллистики в газодинамической постановке.

Сформулируем начальные и граничные условия.

В момент $t=0$ для всех $(0 \leq a \leq l_0)$, где l_0 - длина каморы,

$$v = 0; p = p; \Psi = \Psi_0 = \frac{\frac{1}{\Delta} - \frac{1}{\delta'}}{\frac{1}{\rho_0} + a' - \frac{1}{\delta'}}; \quad \Phi = \Phi_0 \quad (2.34)$$

2. При $a = 0$ и любом t

$$v = 0 \quad (2.35)$$

3. При $a = l_0$ и любом t имеем уравнение движения снаряда, т.к. скорость газового слоя, прилегающего к дну снаряда равна скорости снаряда, т.е.

$$\frac{\varphi_1 q}{g} \frac{\partial v}{\partial t} = S_p \quad (2.36)$$

Где q - вес снаряда;

φ_1 - коэффициент, учитывающий различные силы сопротивления /в нашем случае $\varphi_1=1/$.

Численное решение задачи целесообразно проводить в относительных переменных, так как рассчитав в относительных переменных один пример, можно фактически получить решение для целой группы примеров при самых разнообразных начальных условиях, отвечающих одинаковым значением параметров подобия.

Введем следующие относительные переменные:

$$\bar{a} = \frac{l}{l_0}, \quad T = \frac{C'_0 t}{l_0(1 - a'p_0)}; \quad \bar{v} = \frac{v}{C'_0}; \quad \bar{p} = \frac{p}{p_m}$$

За единицу измерения длины взята длина l_0 ; за единицу измерения давления и скорости - p_m, C'_0 ; времени - $\frac{l_0(1-a'p_0)}{c'_0}$.

В данном случае p_0 и C'_0 те значения которые они имели если бы произошло полное сгорание заряда в объёме камеры т.е.

$$\rho_m = \frac{f\Delta}{1-a'\Delta}; \quad C'_0 = \sqrt{Rgt}; \quad \rho_0 = \frac{\Delta}{\delta}$$

В относительных переменных системах /2.30./-/2.33./ примет вид

$$\left\{ \begin{array}{l} R \frac{\partial v}{\partial T} + \frac{\partial \rho}{\partial \bar{a}} = 0 \\ R \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{a}} + \frac{C'^2}{\bar{\rho}^2} \frac{\partial v}{\partial T} = [1 + D\bar{\rho}] \gamma \sigma(\Psi); \\ \frac{\partial \ln \Phi}{\partial T} = \gamma [1 - (R-1)D\bar{\rho}] \sigma(\Psi) \frac{\bar{p}}{C'^2}; \\ \frac{\partial \Psi}{\partial T} = \gamma \sigma(\Psi) \bar{p}; \\ \bar{\Phi} = \frac{\bar{C}'^2}{\bar{\rho}^{R-1}} \end{array} \right.$$

/2.37./

Безразмерный параметры γ и D определяются равенствами :

$$\gamma = x u_1 \sqrt{\frac{f}{Rg} \Delta \frac{R_0}{e_1}}; \quad D = \frac{p_0(a' - \frac{1}{\delta^1})}{1 - a'p_0}$$

Необходимо заметить, что параметр γ связан с параметром Дроздова Н.Ф. зависимостью

$$\frac{1}{\gamma^2} = B \frac{R}{x^2} \frac{\varphi q}{\omega},$$

где $B = \frac{e_1 S^2 \sigma}{u_1^2 f \omega \varphi q}$ - параметр Дроздова Н.Ф.

Обратимся к рассмотрению начальных и граничных условий в относительных переменных.

1. При $T = 0$ на участке $0 \leq \bar{a} \leq 1$

$$\bar{v} = 0; \Psi = \Psi_0; \rho = \rho_0 = \frac{\Psi_0}{D_1 - \Psi_0 D}; \bar{\Phi} = \bar{\Phi}_0 = \Psi_0 (D_1 \Psi_0 D^{R-1}) \quad (2.38)$$

где $D_1 = \frac{1 - \frac{\rho_0}{\delta^1}}{1 - a' \rho_0}$ - безразмерный параметр.

2. При $\bar{a} = 1$ и любом значении $T > 0$

$$\bar{v} = 0 \quad /2.39./$$

3. При $\bar{a} = 1$ и любом значении

$$\frac{\partial \bar{v}}{\partial T} = \frac{\omega}{Rq} \bar{\rho}, \quad (2.40)$$

Где $\omega = Sl_0 \rho_0 g$ - вес заряда

Таким образом для того чтобы решение двух задач в относительных переменных совпали, необходимо и достаточно чтобы совпали значения:

$$R; \Psi_0; D; \sigma(\Psi); \gamma; D_1; \frac{\omega}{q}.$$

При рассмотрении ОЗВБ как газодинамической задачи, параметр $\frac{\omega}{q}$ в отличие от классической внутренней баллистике характеризуется неравномерностью распределения плотности газа пороховой смеси в каждый момент времени.

Рассмотрим частный случай порохового заряда с постоянной поверхностью горения $\sigma(\Psi) = 1$ и $a' = \frac{1}{\delta^1}$. В этом случае решение задачи при сформулированных допущениях зависит от четырёх параметров: $R, \gamma, \Psi_0, \frac{\omega}{q}$.

Границы изменения параметров таковы, что:

$$1 < R < 1.25; \quad 0 < \frac{\omega}{q}, \infty; \quad 0 \leq \Psi_0 \leq 1; \quad 0 < \gamma < \gamma_0(z_0)$$

Предельное значение γ_* определяется из условий полного сгорания пороха в слое, прилегающем к дну канала, т.е.

$$\gamma_* = 2(1 - \sqrt{z_0})$$

Рассмотрим некоторые результаты расчёта ОЗВБ в газодинамической постановке и сравним их с результатами расчета этого же примера по методу Дроздова Н.Ф. Расчёт производился по разностной схеме при следующих значениях параметров: $R = 1,20$; $\Psi_0 = 0,023$; $\gamma = 0,71$; $\frac{\omega}{q} = 0,3$;

Кроме того, было принято, что $\sigma(\psi) = 1$; $a' = \frac{1}{\delta_1}$; $D = 0$; $D_1 = 1$

На рис.2.2 изображены кривые давления на дно канала ствола и снаряда, полученные газодинамическим методом, а также кривая среднего давления ρ_d , вычисленная по методу Дроздова Н.Ф. при $\frac{\omega}{q} = 0,3$.

Давление у дна канала ствола/равное в начале давлению на дно снаряда/ растёт сначала гораздо быстрее последнего. Физически это объясняется тем что порох первое время/пока первое возмущение, возникшее у дна снаряда не успело распространиться до дна канала/горит в условиях постоянного объёма, а нарастание давления у дна снаряда замедляется убыстряющимся расширением. Начиная с некоторого момента, разность между давлением на дно канала и снаряда начинает уменьшаться, так как порох у дна канала начинает гореть в условиях одновременного расширения. Причем, начиная с некоторого времени плотность газопороховой смеси у дна канала уменьшается более резко, чем у дна снаряда. Кривая среднего давления ρ_d первое время идет ниже, полученной по схеме Лакса, кривой давления у дна канала, так как кривая рассчитана при допущении о равномерном распределении плотности газопороховой смеси.

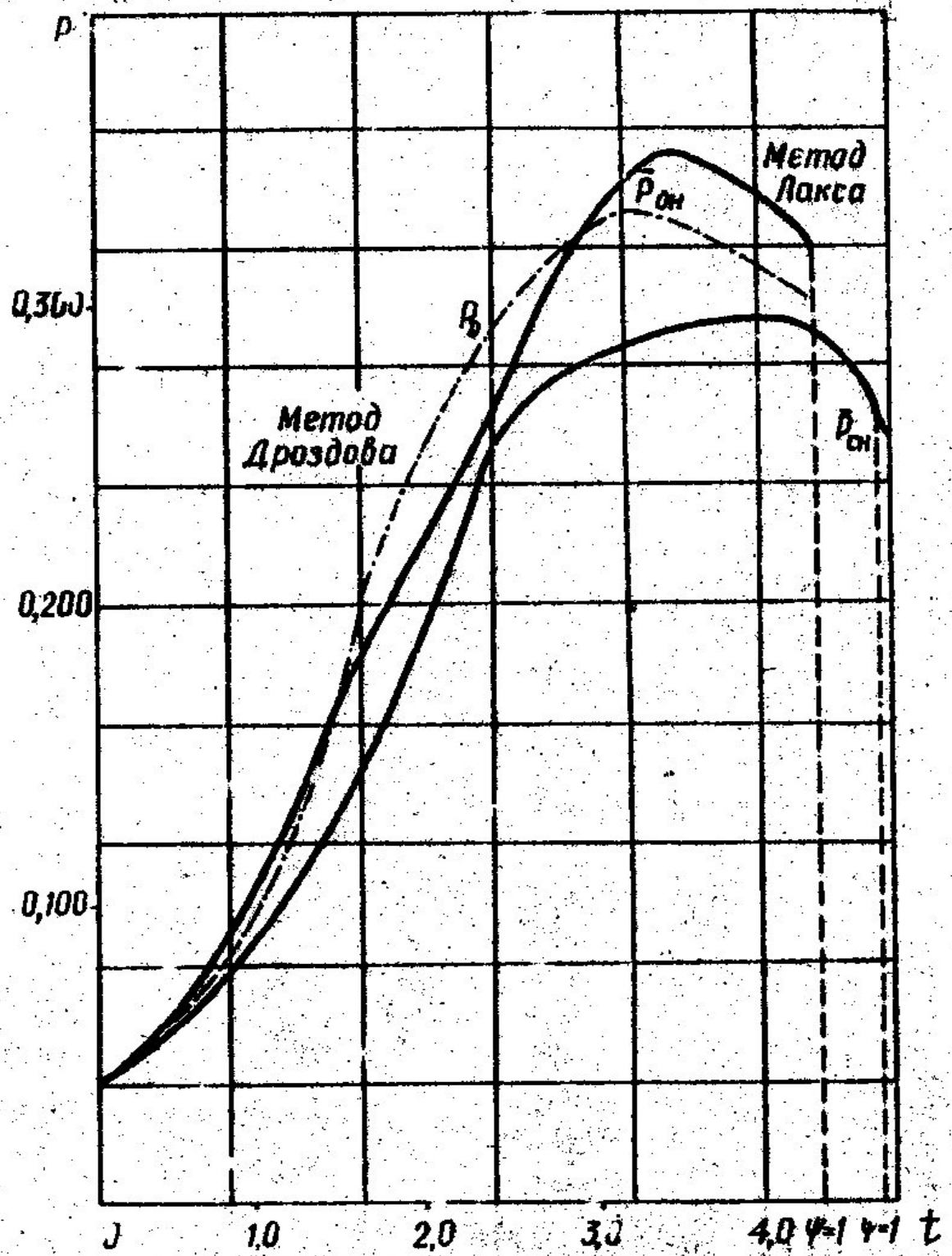


Рис.2.2. Зависимости $\bar{\rho}_{сн}$ и $\bar{\rho}_{он}$, рассчитанные газодинамическим методом и зависимость рассчитанная по методу Дроздова.

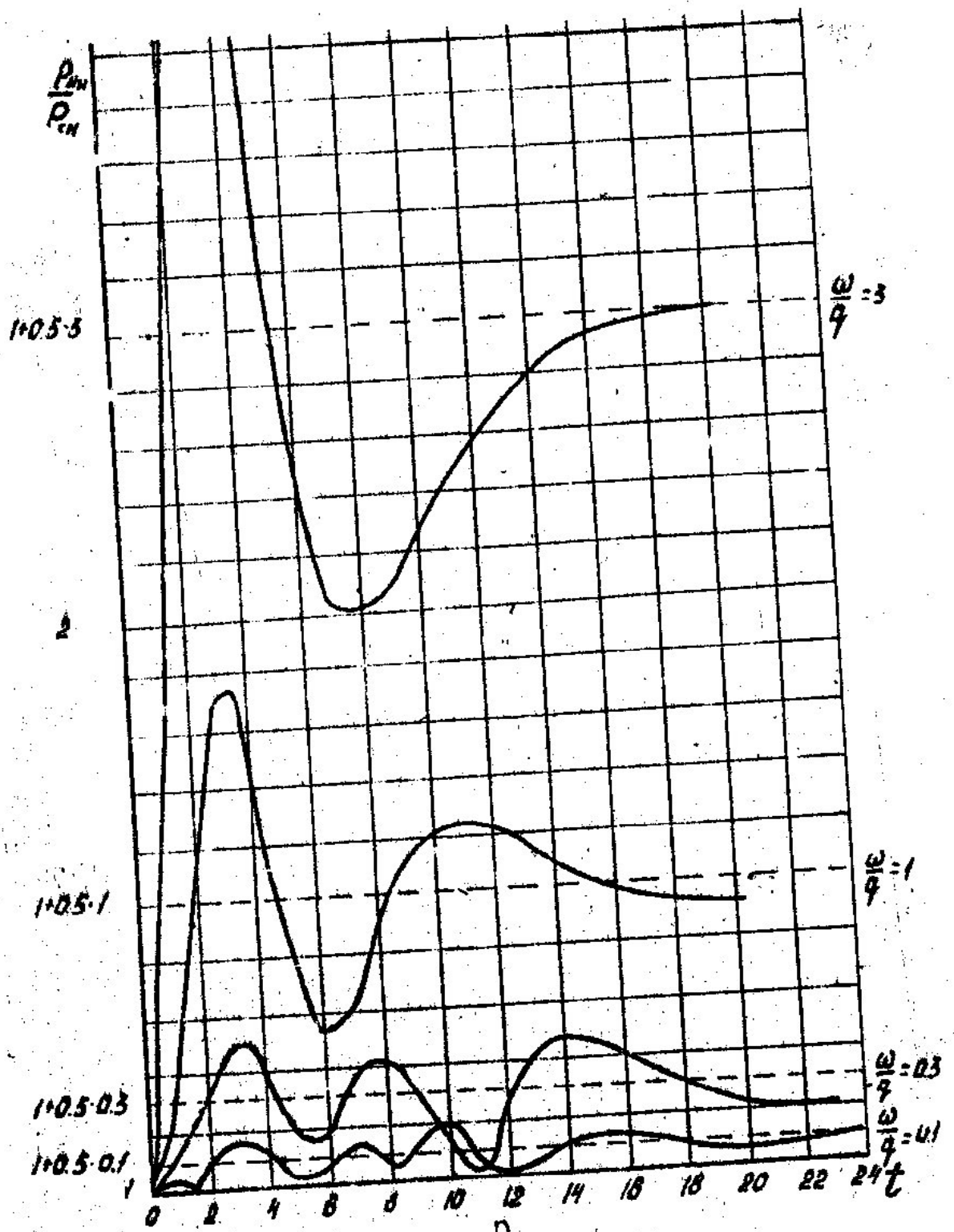


Рис.2.3. Зависимости $\frac{\rho_{KH}}{\rho_{CH}} = f(t)$ при $\frac{\omega}{q} = var.$

В действительности в начальный момент времени расширяются только ближайшие к снаряду слои газа. Превышение ρ_d над давлением у дна канала/ в некоторый момент времени/ объясняется тем, что при классическом подходе к решению ОЗВБ величина b , которая учитывает работу на перемещение газопороховой смеси, является величиной постоянной и равной $1/3$. В действительности, как будет показано далее, значение b в начале движения равно 0 , а затем колеблется около значения $1/3$, довольно значительно отклоняясь от него.

На рис.2.2. показаны кривые $\frac{\rho_{кн}}{\rho_{сн}}$ в зависимости от времени при различных $\frac{\omega}{q}$. Видно, что чем больше $\frac{\omega}{q}$ тем значительнее колебания около классического значения, определяемого формулой

$$\frac{\rho_{кн}}{\rho_{сн}} = 1 + b_1 \frac{\omega}{q} \quad (2.41)$$

Где $b_1 = 0.5$ – коэффициент Пиобера.

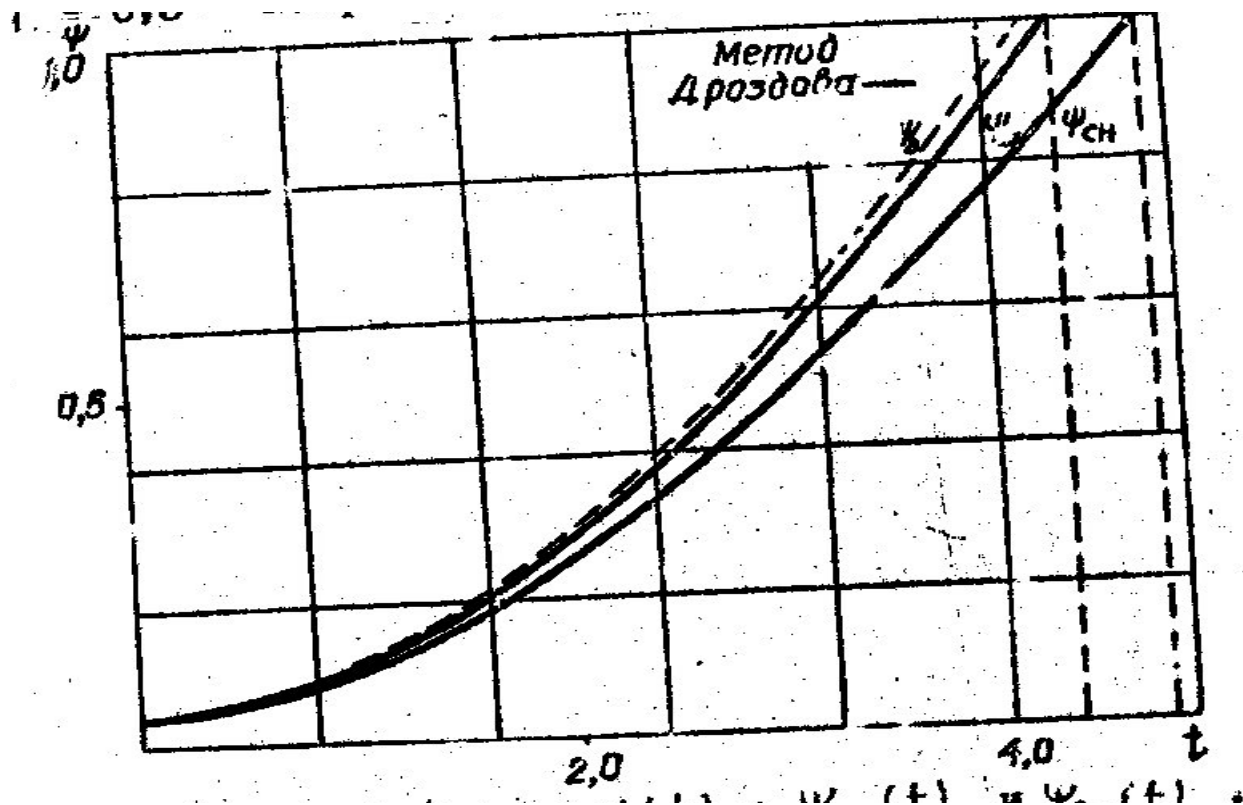


Рис.2.4. Зависимости: $\Psi_d(t)$; $\Psi_{кн}(t)$ и $\Psi_{сн}(t)$

На рис. 2.4 изображены относительная сгоревшая часть заряда у дна канала $\Psi_{\text{кн}}$, снаряда $\Psi_{\text{сн}}$ / среднее значение $\Psi_{\text{д}}$ / вычисленные по методу Дроздова Н.Ф. / в зависимости от времени. Известно, что $\Psi_{\text{кн}} > \Psi_{\text{сн}}$, а разность между $\Psi_{\text{кн}}$ и $\Psi_{\text{сн}}$ монотонно возрастает и достигает к концу горения 13% при $\frac{\omega}{q} = 0.3$. Разница во времени окончания горения пороха у дна канала ствола и снаряда довольно значительна. Особенно велика эта разница в значениях относительного пути, пройденного снарядом к моменту окончания горения пороха у дна канала и снаряда.

Разность между (l_k) и $l_k/\text{сн}$ составляет 20% от всего пути, пройденного снарядом за время горения пороха. Кривая $\Psi_{\text{д}}$ идёт выше, чем $\Psi_{\text{кн}}$, т.е. $\rho_{\text{д}} > \rho_{\text{кн}}$. Затем разность между $\Psi_{\text{д}}$ и $\Psi_{\text{кн}}$ начинается уменьшаться $\rho_{\text{кн}} > \rho_{\text{д}}$ см.рис.2.2./

На рис.2.5 дано распределение относительной скорости по слоям газа $v/v_{\text{сн}}$ в различные моменты времени при $\frac{\omega}{q} = 0,3 - 30$. Видно, что кривые $v/v_{\text{сн}}$ отклоняются от линейного закона распределения в разные стороны тем резче, чем больше значения $\frac{\omega}{q}$.

В уравнение Резаля, являющееся выражением закона сохранения энергии для системы заряд-снаряд, кинетическая энергия снаряда входит с некоторым множителем Y . Коэффициент фиктивности Y учитывает кинетическую энергию заряда, которую считают пропорциональной кинетической энергии снаряда. Общее выражение для Y .

$$Y = K + b \frac{\omega}{q}$$

Где b - величина учитывающая работу, на перемещение газопороховой смеси

$$\frac{\omega}{q} = 0.3$$

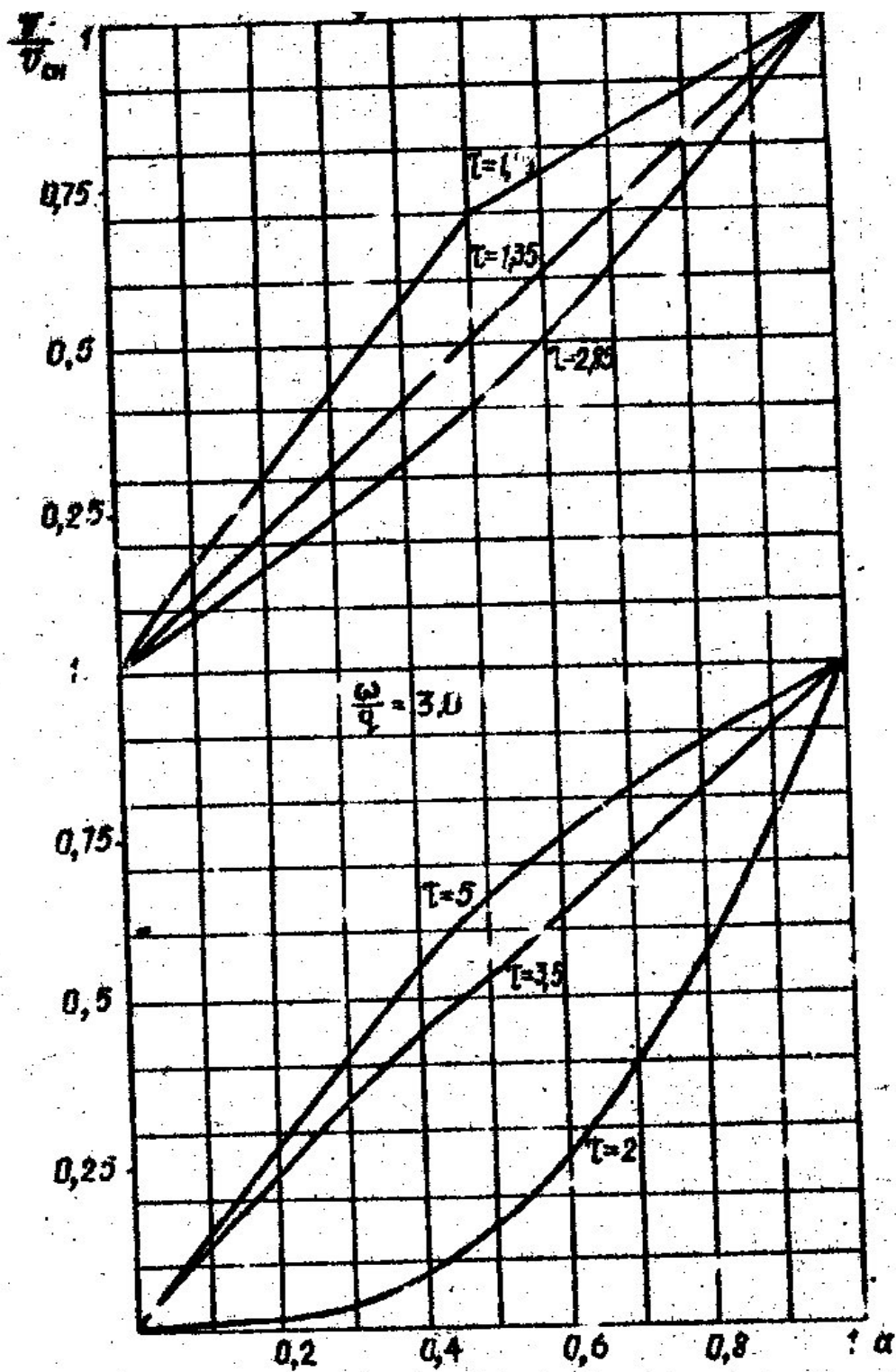


Рис.2.5. Зависимость $\frac{v}{v_{ch}} / \alpha /$, где α - расстояние, рассматриваемого слоя от начала координат в момент времени $t = 0$.

В классической теории, как ранее отмечалось, ν принимают обычно равным $1/3$. С целью получения более общего выражения для расчёта ' b ' проведём анализ соотношений затрачиваемых энергий.

Пусть кинетическая энергия элементарного выделенного слоя газопороховой смеси равна

$$\frac{v^2}{2} \rho_0 S da$$

Полная кинетическая энергия заряда выразится формулой

$$E_\omega = \int_0^{l_0} \rho_0 S \frac{v^2}{2} da$$

Кинетическая энергия снаряда в данный момент будет

$$E_q = \frac{q v_{\text{сн}}}{g} \frac{v_{\text{сн}}}{2}$$

где $v_{\text{сн}}$ - скорость снаряда.

Тогда отношение кинетической энергии заряда к кинетической энергии снаряда определится выражением

$$\frac{E_\omega}{E_q} = \frac{\rho_0 S}{q v_{\text{сн}}^2} \int_0^{l_0} v^2 da,$$

Или в относительных переменных

$$\frac{E_\omega}{E_q} = \frac{\omega}{q} \int_0^1 \left(\frac{v}{v_{\text{сн}}} \right) da$$

Где

$$\int_0^1 \left(\frac{v}{v_{\text{сн}}}\right) da = t$$

В том случае, когда скорость изменяется по линейному закону $v = v_{\text{сн}}$ и $b = \frac{1}{3}$ т.е. равно своему классическому значению независимо от распределения плотности в данный момент. Чем больше кривая $\frac{v}{v_{\text{сн}}}$ отклоняется от линейного закона в ту или другую сторону, тем больше мгновенные значения b будут отличаться от $1/3$. На рис. 2.6 изображена зависимость b от $v_{\text{сн}}$ при различных значениях ω/q . Из рис.2.6. видно что отклонения b от $1/3$ в большую сторону выражены более резко, чем отклонения в меньшую сторону. Отсюда следует, что на второстепенные работы затрачивается больше энергии, чем это получается по классическим формулам внутренней баллистики.

Необходимо заметить, что при газодинамическом расчёте, зная распределения давления в каждый момент времени, можно определить среднее давление в функции времени или пути снаряда.

Результаты сравнения газодинамического и классического методов решения ОЗВБ при одном и том же пройденном пути снаряда для различных ω/q Представлены в табл. 2.1.

По результатам таблицы 2.1. построен график зависимостей дульной скорости и максимального значения среднего давления как функции ω/q при газодинамическом и классическом расчёте. Из графика видно что дульная скорость при расчете классическим методом /метод Дроздова Н.Ф./отличается от газодинамического как в меньшую, так и в большую сторону в зависимости от ω/q . тот факт объясняется зависимостью величины b , учитывающей работу на перемещение газопороховой смеси, от скорости снаряда при различных ω/q /рис. 2.6./.

В результате сравнения было выяснено, что при одном и том же пройденном пути снаряда в случае $\omega/q = 3,0$ разница по дульной скорости составляет 4% по среднему значению максимального давления -12% /рис 2.7/

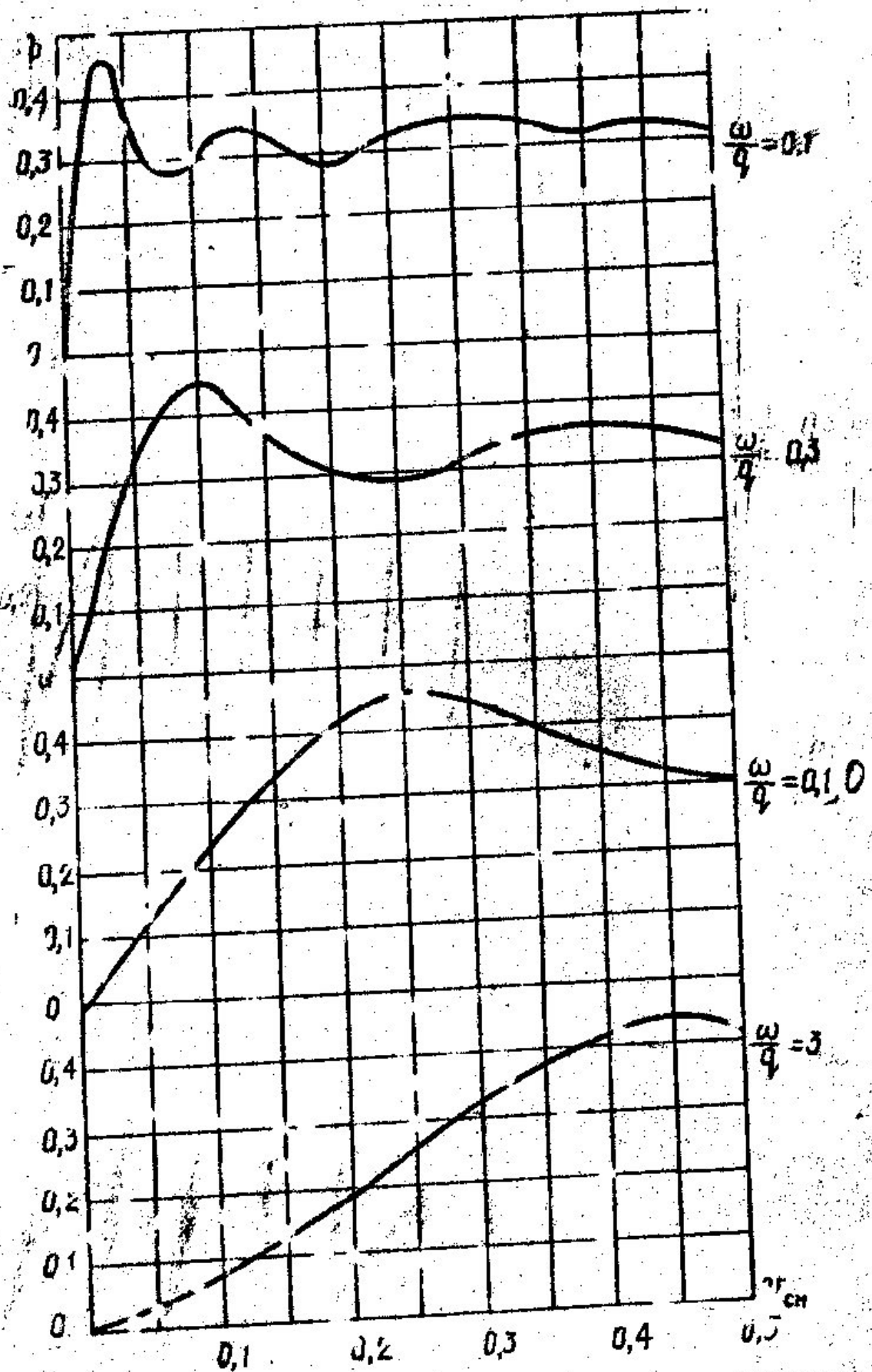


Рисунок 2.6. Зависимость b ($v_{сн}$) при различных ω/q

$\gamma = 0,71$ ω/q		$\frac{(\rho_{KM})}{\text{КГ}} / \text{СМ}^2$	l_m, ∂_m	$t \dots, \text{сек}$	$\frac{(\rho_{CH})}{\text{КГ}} / \text{СМ}^2$	l_m, ∂_m
1	2	3	4	5	6	7
0,3	газодинамический метод расчета	13184	2,582	$0,323 \cdot 10^{-2}$	11793	2,785
	классический метод	13003	2,677	$0,331 \cdot 10^{-2}$	11307	2,677
1,54	газодинамический метод расчета	3531	4,7	$0,287 \cdot 10^{-2}$	2474	7,020
	классический метод	3922	7,196	$0,331 \cdot 10^{-2}$	2216	7,196
2	газодинамический метод расчета	0004	3,88	$0,254 \cdot 10^{-2}$	1910	7,80
	классический метод	3406	6,918	$0,314 \cdot 10^{-2}$	1703	6,918
3	газодинамический метод расчета	2662	3,940	$0,234 \cdot 10^{-2}$	1250	11,53
	классический метод	2863	6,95	$0,298 \cdot 10^{-2}$	1145	6,95

Если проводить сравнение двух методов расчета в процессе горения при одной и той же относительной части сгоревшего заряда / $\Psi = 0,87$ /, то разность по скорости снаряда в случае $\frac{\omega}{q} = 3$, составляет 8%.

Из результатов помещенных в табл. 2.1. можно заметить что при классическом подходе $(\Psi_{cp}) > (\Psi_{cp})$, рассчитанной в результате газодинамического метода. Следовательно при классическом подходе довольно рано переходят к расчёту второго периода, что даёт при одном и том же весе заряда завышенные значения скорости снаряда по сравнению с газодинамическим методом. Разность между относительной сгоревшей части заряда у дна канала / Ψ_{KH} / и у дна снаряда / Ψ_{CH} / по времени / в случае $\frac{\omega}{q} = 3,0$ / при одном и том же пройденном пути снаряда составляет 50%. В связи с этим методика расчёта конечного импульса J_k при больших $\frac{\omega}{q}$, основанная на термодинамических предпосылках оказывается неточной.

Известное соотношение /2.41./ предполагает наличие одновременного достижения максимального значения давления у дна канала и снаряда по

времени независимо от $\frac{\omega}{q}$. Газодинамический расчет показывает, что разность достижения $p_{\text{кн}}$ и $\rho_{\text{сн}}$. По времени составляет 20% при $\frac{\omega}{q} = 3,0$. По относительному пути снаряда – 40%

2.3. Влияние уширения камеры на баллистику выстрела

Рассмотрим случай когда объем занимаемый газопороховой смесью до начала движения снаряда, представляет некоторое тело вращения, площадь поперечного сечения которого на участке $0 \leq x \leq l_{\text{км}}$ изменяется по закону

$$S = S(x).$$

В сечении $x = x_2$ камера сопрягается с каналом ствола, площадь поперечного сечения которого равна S_1 .

При тех же основных допущениях которые были сформулированы ранее и с учетом уширения камеры, основная система уравнений в переменных Эйлера имеет вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + v \frac{\partial \rho}{\partial x} + \rho \frac{\partial v}{\partial x} &= -\rho v \frac{d \ln x}{dx}; \\ \frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial x} &= 0; \\ S \frac{\partial(\rho E)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left[\rho u S \left(E + \frac{P}{\rho} \right) \right] &= S \Pi \rho \left(\frac{\partial \Psi}{\partial t} + v \frac{\partial \Psi}{\partial x} \right) \\ \frac{\partial \Psi}{\partial t} + v \frac{\partial \Psi}{\partial x} &= (x_1 + 2x_1 \lambda_1 z) \frac{P}{J_k}, \end{aligned}$$

(2.42)

Где

$$E = \frac{P}{R-1} \left(\frac{1}{\rho} - \frac{1-\Psi}{\delta^1} - a' \Psi \right) + \frac{v^2}{2};$$

$\Pi = \frac{f}{R-1}$ - потенциал пороха;

ρ - плотность газопороховой смеси.

На участке переменного сечения /рис. 2.8./ изменение радиуса происходит по закону

$$r = r_0 + a(x - x_1)$$

где
$$a = \frac{r_1 - r_0}{x_2 - x_1}$$

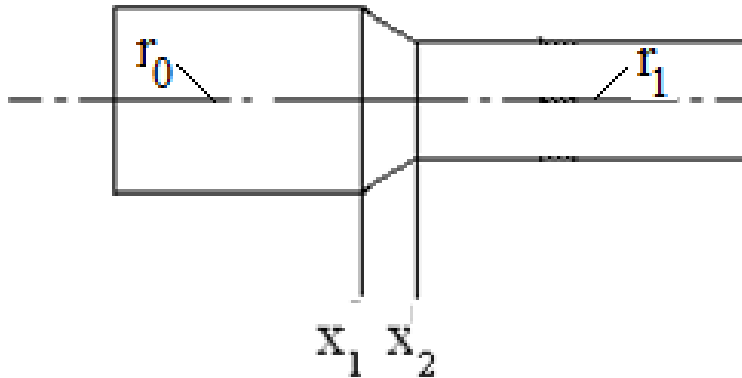


Рис. 2.8. Зарядная камера с уширением,

При $x = x_1$ имеем $r = r_0$; при $x = x_2$, $r = r_1$.

Сформулируем начальные и граничные условия:

1. При $t=0$ и для всех $0 \leq x \leq L_{\text{КМ}}$

$$v = 0, \rho = \rho_0; \rho = \Delta; \Psi = \Psi_0 = \frac{\frac{1}{\Delta} - \frac{1}{\delta^1}}{\frac{f}{\rho_0} + a' - \frac{1}{\delta^1}} \quad (2.43)$$

2. При $x=0$ и для любого $t \geq 0$

$$v = 0 \quad (2.44)$$

3. При $x = x_{\text{сн}}$ и для любого $t > 0$

$$\frac{q}{g} \frac{dv}{dt} = S_1 \rho \quad (2.45)$$

Величина z_0 находится из уравнения

$$\Psi(z_0) = x_1 z_0 + x_1 \lambda_1 z_0^2 \quad (2.42)$$

Итак, имеем систему четырех уравнений /2.42/ относительно $v; P; \rho; \Psi$, которые вместе с начальными и граничными условиями позволяют принципиально решать основную задачу внутренней баллистики классических систем с учетом уширения камеры.

Переходя в уравнениях /2.42/ к относительным переменным получим:

наличие времени τ указывает на безразмерность параметров

$$\frac{\partial \rho}{\partial \tau} + v \frac{\partial \rho}{\partial x} + \rho \frac{\partial v}{\partial x} = -\rho v \frac{S'}{S};$$

$$\frac{\partial v}{\partial \tau} + v \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial x} = 0;$$

$$S \frac{\partial(\rho E)}{\partial \tau} + \frac{\partial}{\partial x} \left[\rho v S \left(E + \frac{D}{\rho} \right) \right] = S \Pi \rho \left(\frac{\partial \Psi}{\partial \tau} + v \frac{\partial \Psi}{\partial x} \right); /2.47/$$

$$\frac{\partial \Psi}{\partial \tau} + v \frac{\partial \Psi}{\partial x} = (x_1 + 2x_1 \lambda_1 z) A \rho$$

Где $S' = \frac{dS}{dx}$; $A = \frac{c_0 \Delta L_{\text{км}}}{J_k}$ - безразмерный параметр.

$$\begin{aligned} \text{При } \tau = 0, \quad 0 \leq x \leq 1 \\ v = 0; \quad \rho = 1; \quad \rho = \rho_0; \quad \Psi = \Psi_0 \end{aligned} \quad (2.48)$$

$$\text{При } x = 0, \quad \tau \geq 0 \quad (2.49)$$

$$\text{При } x = x_{\text{сн}}, \quad \tau > 0$$

$$\frac{dv}{d\tau} = B_P \quad (2.50)$$

Где $B = \frac{S_1 L_{\text{км}} \Delta}{q}$ - безразмерный параметр; который в случае каморы постоянного сечения имеет вид $B = \frac{\omega}{q}$.

Система уравнений /2.47./ вместе с условиями /2.48./-/2.50./ решается разностной схемой Лакса.

Для исследования влияния уширения каморы на баллистику выстрела была взята конкретная система с коэффициентом уширения $\chi = \frac{l_0}{L_{\text{км}}} = 1; 2; 4$, где l_0 приведённая длина каморы.

В случае каморы переменного сечения / равновеликой по объёму цилиндрической каморе /при прочих равных условиях элементарное возмущение достигает дна канала раньше, чем в случае цилиндрической каморы, и чем раньше тем меньше по сравнению $L_{\text{км}}$ с l_0 . Следовательно при увеличении коэффициента расширения максимальное давление у дна канала и у дна снаряда будет уменьшаться /рис. 2.9./. Причём наиболее интенсивное падение давления у дна канала и снаряда происходит при переходе от $\chi = 1$ к $\chi = 2$.

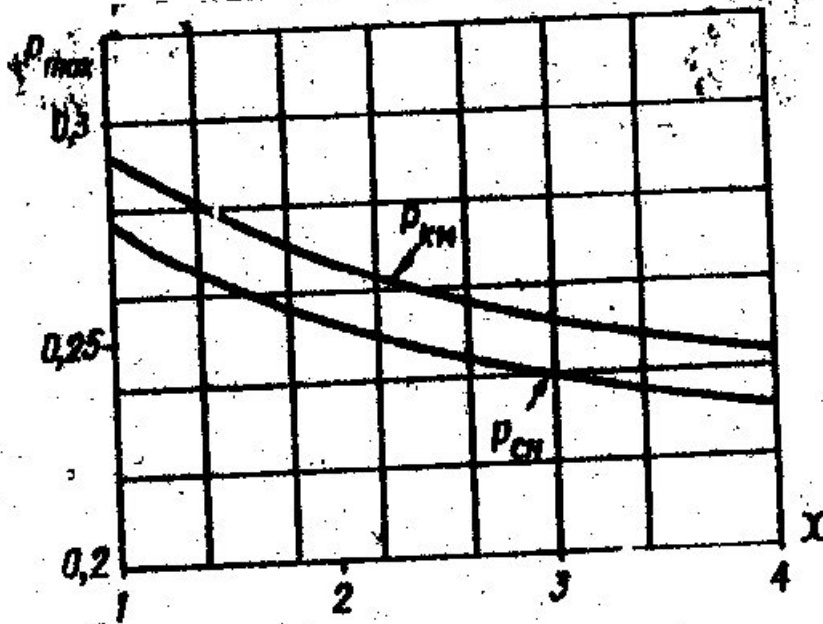


Рис. 2.9. Зависимость ρ_{\max} от уширения камеры χ .

Если сравнить обе системы / $\chi = 1$ с $\chi = 2$ / при одинаковых значениях Ψ_{cp} , то можно заметить, что скорость снаряда и путь снаряда увеличиваются с увеличением уширения камеры и тем больше, чем больше $\frac{\omega}{q}$.

Однако, надо заметить, что одинаковые значения соответствуют разным моментам времени. Увеличение уширения камеры вызывает замедление горения заряда, а конец горения заметно сдвигается к дульному срезу (рис.2.10.).

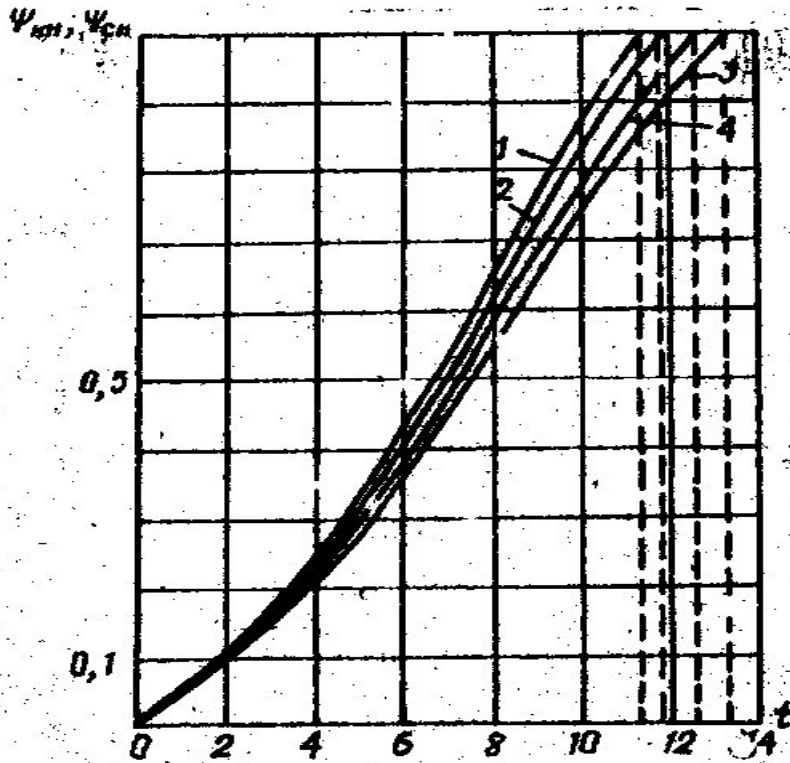


Рис 2.10. Зависимости $\Psi_{\text{кн}}$ и $\Psi_{\text{сн}}$ от времени при различных коэффициентах уширения:

- 1) при $\chi = 1$; 2) при $\chi = 2$
- 3) при $\chi = 3$; 4) при $\chi = 4$

Так как уширение камеры вызывает ослабление элементарных возмущений, возникающих у дна снаряда в процессе их перемещения, то падение давления у дна канала в случае камеры переменного сечения будет происходить менее интенсивно, чем в случае $\chi = 1$. Кроме того, первое оторванное возмущение раньше достигает дна снаряда в случае камеры с $\chi > 1$, чем в случае $\chi = 1$. Все эти обстоятельства сводятся к тому, что число максимумов и минимумов кривой $\frac{P_{\text{кн}}}{P_{\text{сн}}}(v)$ рис. 2.11 возрастает в случае $\chi = 1$, а сама кривая приближается к некоторому среднему значению.

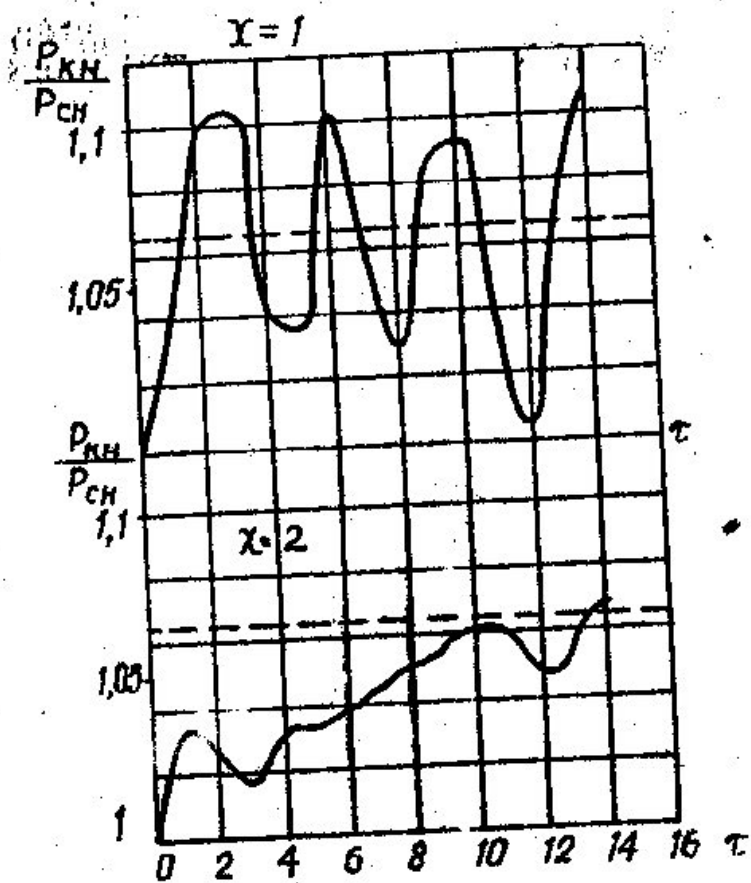


Рис.2.11. Зависимости $\frac{P_{KH}}{P_{CH}}(\tau)$ при $\chi=1, \chi=2$

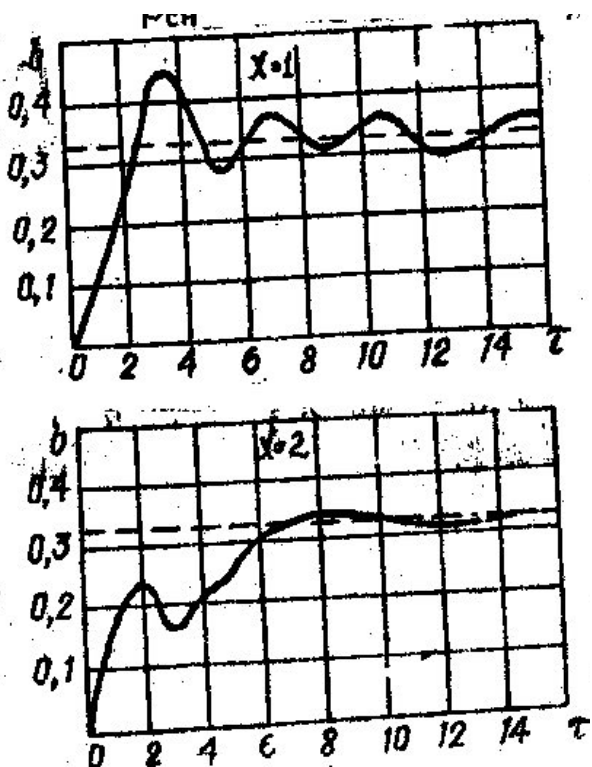


Рис.2.12. Зависимости $b(\tau)$ при $\chi=1, \chi=2$

На рис. 2.12 показаны зависимости коэффициента $b(\tau)$, учитывающие потери кинетической энергии пороховых газов при разных коэффициентах уширения ($\chi=1, 2$). На рисунке видно, что с увеличением коэффициента уширения величина работы на перемещение заряда будет уменьшаться.

Анализ показывает, что и дульная скорость снаряда также уменьшается при увеличении уширения камеры. Такой результат на первый взгляд кажется парадоксальным, т.к. было показано, что с увеличением χ уменьшается работа на перемещение заряда. Однако при этом не следует забывать, что в случае камеры с $\chi>1$ порох горит медленнее по сравнению с $\chi=1$, следовательно возрастает путь, пройденный снарядом к концу горения заряда. Таким образом, хотя внутренняя энергия пороховых газов в момент конца горения больше при $\chi>1$ (вследствие уменьшения второстепенных работ), но эта большая внутренняя энергия к моменту вылета снаряда будет использоваться менее полно, т.к. снаряду остается пройти меньший путь. На рис. 2.13 показана зависимость дульной скорости как функции относительного пути снаряда при различных χ . Наиболее интенсивное падение скорости наблюдается при изменении коэффициента уширения от 1 до 3. На рис. 2.14 изображены зависимости распределения давления и скорости по заснарядному пространству в различные моменты времени в случае $\chi=4$.

Рассмотрим вопрос о влиянии уширения камеры на дульную скорость при условии постоянства максимума давления у дна камеры, т.е. в случае $(P_{кн})_{\max} = \text{const}$

Постоянство максимума достигается путем изменения импульса давления

$$J_k = \frac{e_1}{u_1}.$$

Сравнивая результаты проведенных расчетов при $\chi>1$ с решением ОЗВБ в случае камеры постоянного сечения, можно отметить следующее: давление на дно канала падает тем медленнее, чем больше уширение камеры.

Скорость снаряда, наоборот, растет быстрее. Это явление продолжается до тех пор, пока первая отраженная волна догонит снаряд. В дальнейшем падение давления на дно снаряда происходит более интенсивно, а прирост скорости уменьшается и может оказаться в итоге, что скорость снаряда при

равных значениях $\frac{\omega}{q}$ будет больше в случае камеры постоянного сечения (рис.2.15).

Полученные результаты можно объяснить следующим образом. С увеличением $\frac{\omega}{q}$ и уширения камеры нестационарность потока увеличивается. Однако в случае камеры переменного сечения при равных значениях объёма и $\frac{\omega}{q}$ первое элементарное возмущение достигает дна канала раньше, чем в случае цилиндрической камеры. Так как отраженные от дна канала возмущения оказывают нивелирующее влияние на движение газопороховой смеси, т.е. сглаживают нестационарность потока, то при наличии уширения камеры сглаживание нестационарности потока начнется раньше. В итоге общий эффект влияния уширения камеры зависит от взаимодействия этих двух факторов. При больших значениях $\frac{\omega}{q}$ определяющую роль играет нестационарность процесса. В этом случае имеется дополнительное увеличение скорости снаряда (рис. 2.16).

Итак, уширение камеры при $(P_{кн})_{\max} = \text{const}$ может оказать не только положительное, но и отрицательное влияние. С одной стороны уширение камеры увеличивает нестационарность потока, а с другой – уменьшает время действия этой нестационарности.

2.4. Выводы по разделу

1. Проведен анализ преимущества использования газодинамического подхода по сравнению с термодинамическим подходом при решении ОЗВБ баллистических систем.

3. Газодинамические методы решения ОЗВБ ствольных систем в рамках односкоростной модели сплошной среды

3.1. Общие положения

В связи с появлением артиллерийских систем большого могущества, с большими относительными массами заряда (ω/q) и высокими начальными скоростями снаряда стал необходим учет распределения параметров односкоростной смеси по заснарядному пространству. Это привело к созданию и развитию отличных от термодинамических методов решения ОЗВБ. При решении ОЗВБ в термодинамической постановке основным допущением является осреднение плотности и температуры по заснарядному пространству и, следовательно, линейное распределение скорости. Однако такие проблемные вопросы, как влияние формы камеры на баллистику выстрела, учет теплопотерь, отставание пороховых зерен от газа; не могли быть изучены без рассмотрения динамики движения газопороховой смеси по заснарядному пространству, Таким образом, возникло второе направление во внутренней баллистике - газодинамическое.

Впервые ОЗВБ в газодинамической постановке была решена С. А. Бетехтиным и А. П. Гришиным в рамках гипотезы газопороховой смеси методом характеристик. Современный уровень развития вычислительной математики и ЭВМ позволяет решать задачи внутренней баллистики с достаточной точностью, не прибегая к методу характеристик. Кроме того, применение соответствующих разностных схем, допускающих сквозной счет через разрывы газодинамических параметров, дает возможность наиболее просто исследовать разрывные движения среды, а также решать самые сложные задачи внутренней баллистики.

Разностные методы при решении ОЗВБ в газодинамической постановке впервые использованы в работах В. М. Ушакова с применением схемы Лакса [2] и модифицированной схемы совместного эйлераво-лагранжева метода

СЭЛ [3].

Проводилось сравнение метода характеристик с разностной схемой Лакса-Вендроффа и Мак-Кормака [4]. Численное исследование сходимости метода характеристик показало, что значения баллистических параметров при $N \geq 100$ (N - число расчетных узлов в их временном слое) практически могут быть приняты в качестве точного решения. Сравнение трех конечно-разностных методов с методом характеристик показало, что для решения газодинамических задач в рамках гипотезы газопороховой смеси метод СЭЛ более точен и дает стабильные результаты в широком диапазоне изменения числа Куранта-Фрндрихса-Леви [5].

В настоящей главе предлагается физическая модель внутрикамерного процесса в рамках односкоростной модели течения газопороховой смеси и на основе методов газовой динамики дается ее математическое описание.

3.2. Основные допущения. Система газодинамических уравнений

Система газодинамических уравнений, описывающая внутрикамерные процессы в одномерном односкоростном приближении, впервые получена С. А. Бетехтиным. Физическая модель выстрела рассматривалась им при следующих основных допущениях:

- движение пороховых газов и несгоревших пороховых элементов отдельно не рассматривается, пороховые элементы движутся с той же скоростью, что и окружающие их газы;
- движение односкоростной смеси одномерно;
- все пороховые элементы заряда воспламеняются одновременно и мгновенно, все они одинаковы по размерам, форме и физико-химическим характеристикам, горение происходит параллельными слоями со скоростью, одинаковой по всем направлениям;
- силы трения и теплоотдача к стенкам орудия не учитываются;
- уравнение состояния пороховых газов отличается от уравнения

- состояния идеального газа за счет учёта собственного объема молекул введением коволюма, постоянного в течение всего процесса выстрела;
- состав пороховых газов, сила пороха f , удельная газовая постоянная R и коэффициент адиабаты k принимаются постоянными значениями;
 - ствол при выстреле неподвижен;
 - прорывы пороховых газов через различные зазоры не учитываются.

Согласно принятым допущениям, газодинамическая система уравнений в переменных Эйлера, описывающая внутрикамерный процесс, примет вид [6]:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial p S}{\partial t} + \frac{\partial \rho u S}{\partial x} &= 0 \\
 \frac{\partial \rho u S}{\partial t} + \frac{\partial \rho u^2 S}{\partial x} + S \frac{\partial p}{\partial x} &= 0 \\
 \frac{\partial p \varepsilon S}{\partial t} + \frac{\partial p \varepsilon u S}{\partial x} + p \frac{\partial S u}{\partial x} &= S \Pi \rho \left(\frac{\partial \psi}{\partial t} + u \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) \\
 \frac{\partial \psi}{\partial t} + u \frac{\partial \psi}{\partial x} &= \sqrt{\chi^2 + 4 \chi \lambda \psi} \frac{p}{I_k} \\
 \psi &= \chi z (1 + \lambda z) \\
 \varepsilon &= \frac{p}{k-1} \left(\frac{1}{\rho} - \frac{1-\psi}{\delta} - \alpha \psi \right)
 \end{aligned} \tag{3.1}$$

где v - скорость газопороховой смеси.

3.3. НАЧАЛЬНЫЕ И ГРАНИЧНЫЕ УСЛОВИЯ

Сформулируем начальные и граничные условия:

- При $t = 0$, $0 \leq x \leq L_{\text{KM}}$

$$v = 0, p = p_H, \tilde{p} = \Delta, \psi = \psi_H = \frac{\frac{\delta}{\Delta} - 1}{\frac{f\delta}{p_H} + \alpha\delta - 1} \quad (3.2)$$

- При $x = 0$,
 $t \geq 0$

$$v = 0 \quad (3.3)$$

- При $x = x_{CH}, t \geq 0$

$$q \frac{dv_{CH}}{dt} = Sp_{CH}, v = v_{CH} \quad (3.4)$$

Итак, имеем систему уравнений (3.1) относительно неизвестных v, p, \tilde{p}, ψ , которая вместе с начальными и граничными условиями (3.2)-(3.4) позволяет решать основную задачу внутренней баллистики на основе газодинамического подхода в рамках гипотезы газопороховой смеси.

В условиях артиллерийского выстрела при скоростях снаряда $V_d < 2000$ м/с влияние противодавления воздушного столба незначительно. Для систем со скоростями $V_d \geq 2000$ м/с учет сопротивления воздушного столба необходим, так как впереди снаряда образуется ударная волна, давление в которой в 10- 100 раз превышает атмосферное, что вносит поправку к значению v_d на 5-7 %. При этом возникающая впереди снаряда волна сжатия сильно влияет на среду за срезом ствола в период последствия. Информация о состоянии воздуха впереди снаряда также необходима при исследовании работы механических устройств, устанавливаемых в дульной части ствола (дульного тормоза, дульного ускорителя, газоотводного устройства).

Решение ОЗББ в заснарядном пространстве осуществляется одновременно с решением задачи о сжатии воздуха быстро движущимся

снарядом в стволе орудия с постановкой граничных условий на дульном срезе. Уравнение движения снаряда (3.4) в данном случае имеет вид

$$q \frac{dv_{\text{сн}}}{dt} = S(p_{\text{сн}} - p_{\text{пр}}) \quad (3.5)$$

где $p_{\text{пр}}$ - давление сжатого воздуха перед снарядом.

С учетом противодействия и продольной силы реакции сопротивления уравнение движения снаряда (3.4) примет вид

$$q \frac{dv_{\text{сн}}}{dt} = S(p_{\text{сн}} - p_{\text{пр}}) - F, \quad (3.6)$$

где F - сила трения снаряда о ствол.

Движение начинается при условии $S(p_{\text{сн}} - p_{\text{пр}}) - F = 0$, т. е. с ускорением, равным нулю, тогда как при обычном подходе ускорение снаряда в момент начала движения изменяется скачком от нуля до Sp/q .

Противодавление $p_{\text{пр}}$ с достаточной точностью определяется из решения задачи о движении поршня в трубе с постоянной скоростью как давление за отошедшей ударной волной [7]:

$$p_{\text{пр}} = p_{\text{н}} \left(1 + \frac{k(k+1)}{4} \frac{v_{\text{сн}}^2}{c_{\text{в}}^2} + \frac{kv_{\text{сн}}}{c_{\text{в}}} \sqrt{1 + \frac{(k+1)^2 v_{\text{сн}}^2}{16c_{\text{в}}^2}} \right) \quad (3.7)$$

где $p_{\text{н}}$ - начальное давление воздуха в стволе; $c_{\text{в}} = \sqrt{\kappa_{\text{в}} p_{\text{н}} / \rho_{\text{в}}}$ скорость звука в воздухе; $\kappa_{\text{в}}$, $\rho_{\text{в}}$, - показатель адиабаты и плотность воздуха впереди ударной волны соответственно.

Учет влияния силы трения на характеристики выстрела представляет собой сложную проблему, в которой должны рассматриваться такие процессы, как разогрев, плавление поверхности контакта, частичный унос материала. Этому вопросу посвящено много работ. Известны зависимости [8, 9], аппроксимирующие экспериментальные результаты, учитывающие

влияние давления и скорости скольжения на силу трения. Однако они получены для конкретных контактных пар и в определенном диапазоне скоростей, а поэтому не универсальны.

Математические модели взаимодействия снаряда с нарезами ствола и контактное трение рассмотрены в работах [10-12]. В ряде случаев трением между снарядом и стволом можно пренебречь [13].

3.4. Методы численного решения одномерных газодинамических задач внутренней баллистики

3.4.1. Общие сведения

Дифференциальные уравнения (1.1), описывающие внутрикамерные процессы в рамках гипотезы газопороховой смеси.

Необходимость в единообразной схеме, формулы которой были бы одинаковы в различных точках сетки независимо от наличия особенностей, привела к созданию однородных разностных схем (схем сквозного счета) расчета систем гиперболического типа. Методы сквозного счета позволяют рассчитывать течения с заранее не известными ударными волнами и разрывами другого типа без усложнения вычислительного алгоритма. Обратим внимание на некоторые общие свойства таких методов и требования, предъявляемые к ним [14].

В идеальной разностной схеме должна отсутствовать дисперсия и аппроксимационная (схемная) вязкость, т. е. искажение формы возмущений с разными длинами волн. Существенная дисперсия схемы является одной из основных причин появления нефизических осцилляций в окрестностях разрывов. При этом скорость и форма реальных возмущений будут искажаться. В то же время большая схемная вязкость приводит к сглаживанию больших градиентов, сильному "размазыванию" разрывов. Схемы первого порядка точности вследствие схемной вязкости могут сильно "размазывать" разрывы, особенно контактные. Схемы более высоких порядков обычно не обладают свойствами монотонности. При их использовании в зонах быстрого изменения параметров появляются нефизические осцилляции. В этом случае такие схемы становятся неэффективны при изучении нестационарных течений, взаимодействия разрывов различного типа и т. п. Проблема выбора метода расчета и разностной схемы многоплановая и непростая. При этом возникает ряд конкурирующих аспектов [15]:

- желание использовать схемы сквозного счета без специального

выделения особенностей различного типа;

- получение достаточной точности;
- обеспечение того, чтобы схема и алгоритм решения допускали присоединение к основной системе уравнений дополнительных уравнений и членов (в правой части), описывающих протекание тех или иных сопутствующих процессов без существенной перестройки схемы и алгоритма;
- приемлемое время вычислений на ЭВМ.

Далее будут рассмотрены некоторые наиболее употребительные разностные однородные схемы в целях выбора подхода и построения схем сквозного счета для системы уравнений (1.1).

3.4.2. Выбор конечно-разностного метода и некоторые особенности расчета внутрикамерных процессов

Система уравнений, описывающих процесс выстрела в рамках односкоростного приближения (газопороховой смеси), является системой уравнений гиперболического типа. Детальный учет особенностей течения в этом случае можно проводить методом характеристик. Однако этот метод, наиболее точный при решении ОЗВБ, практически не пригоден для решения усложненных задач внутренней баллистики из-за необходимости выделения всех разрывов, возникающих в области течения. Более подробно недостатки и достоинства метода характеристик изложены в работе [16]. Несмотря на ограниченность этого метода, его роль очень велика для построения решения тестовых задач.

Уже сама физическая постановка задач, а также нелинейности дифференциальных уравнений приводят к тому, что задача, как правило, не имеет гладких решений, а содержит разнообразные особенности, характер которых различен в зависимости от области изменения переменных (x, t) . При решении таких задач возможны два подхода. В первом выделяется расчет особенностей известной структуры и особо рассматривается счет в областях гладкости. Для систем гиперболического типа исторически первоначально возникли и широко развивались именно такие конечно-разностные методы. Однако по мере их развития и автоматизации вычислений возник ряд технических трудностей. Для того чтобы обойти эти трудности, Нейман и Рихтмайер предложили схему с введением искусственной вязкости для "размазывания разрывов на скачках, а использование ячеек конечного размера приводит к "размазыванию" разрывов производных (метод "сквозного" счета). По существу, отсюда и возникла постановка задачи об обобщенном решении

уравнений газовой динамики (возможно, даже и с разрывными параметрами), удовлетворяющем основным законам сохранения - массы, импульса и энергии.

Наиболее важными выходными данными внутрибаллистического расчета артиллерийских систем являются скорость снаряда и эпюра максимальных давлений. На наш взгляд, эти параметры можно довольно надежно получить путем расчета по "сквозной" конечно-разностной схеме. При проведении расчетов с помощью таких разностных схем разрывное решение заменяется непрерывным, но быстро меняющимся в зоне скачка. Сглаживающее влияние на разрывы в таких схемах оказывает искусственная и аппроксимационная вязкость. К схемам с аппроксимационной вязкостью из наиболее широко применяемых относятся схемы, построенные на основе методов Лакса [2], Годунова [17], Куропатенко [18], которые при фиксированной сетке не содержат произвольных параметров. Наиболее просты в реализации схемы, основанные на методе Лакса. Суть метода состоит в особом способе аппроксимации производных по времени, в результате чего разностная схема условно аппроксимирует исходную систему уравнений. Аппроксимационная вязкость такой схемы содержит члены со вторыми производными по пространственной переменной. Наилучшие результаты получаются, если брать шаг по времени как можно больше (в пределах условия устойчивости), а шаг по пространству возможно меньше. Поскольку члены с аппроксимационной вязкостью входят в каждый разностный аналог уравнений газодинамики, то разностные схемы типа Лакса "размазывают" и контактные границы. При этом "размазывание" возрастает с уменьшением шага по времени.

Широкое распространение при решении систем квазилинейных дифференциальных уравнений гиперболического типа получили схемы, основанные на двухшаговой процедуре метода Лакса-Вендроффа [4, 19,20]. В соответствии с этим методом из разностных аналогов системы дифференциальных уравнений, записанных в недивергентной форме, сначала находятся вспомогательные величины на промежуточном слое. Затем вспомогательные величины используются в разностных аналогах интегральных законов сохранения. Для подавления осцилляции при расчете вспомогательных величин либо добавляются члены типа искусственной вязкости, либо меняется уровень промежуточного слоя, что приводит к появлению необходимой величины аппроксимационной вязкости.

Достаточно широкое распространение получили конечноразностные схемы, основанные на методах СЭЛ (совместный эйлерово-лагранжев метод) [3] и Мак-Кормака [4]. Разностная схема метода СЭЛ была специально

разработана для расчета нестационарных гидродинамических задач и обладает вторым порядком точности на гладких решениях. Для выделения ударных волн вводится искусственная вязкость, которая входит составляющей в давление и "размазывает" ударную волну на фиксированное число ячеек таким образом, что значения газодинамических параметров меняются непрерывно при переходе через скачок и удовлетворяют условиям Ренкина-Гюгонио.

К настоящему времени не существует универсального метода, который был бы одинаково эффективен для всех задач газовой динамики. Эффективность метода определяется его точностью, затратами ресурсов ЭВМ, простотой алгоритма и т. д. Чтобы оценить применимость того или иного конечно-разностного метода, необходимо провести путем численного эксперимента исследование сходимости методов, сравнение по затратам ресурсов ЭВМ и по точности на модельной (тестовой) задаче, которая по возможности включала бы все основные особенности процесса, подлежащего дальнейшему изучению. Таким образом, тест должен принадлежать к тому же классу, что и задачи, которые предстоит решать выбранным методом. В качестве теста может служить либо аналитическое решение, либо решение, полученное методом характеристик (как наиболее точным численным методом решения систем гиперболического типа). По результатам сравнения можно будет рекомендовать тот или иной конечно-разностный метод для решения задач внутренней баллистики в рамках односкоростной модели сплошной среды. Следует, однако, иметь в виду, что выбранный наиболее точный разностный метод для одного класса задач внутренней баллистики (например, где разрывные течения отсутствуют) может оказаться мало пригодным при решении задач другого типа (там, где разрывы присутствуют). Это относится и к переходу от односкоростной модели сплошной среды к двухскоростной. В таких случаях необходимо провести дополнительные эксперименты по сходимости того или иного конечно-разностного метода на тестах другого типа.

Сравнение следует проводить при оптимальных для каждого метода значения чисел Куранта, т. е. установить сходимость разностного оператора того или иного конечно-разностного метода к оператору дифференциальному. Для исследования сходимости просчитывается несколько вариантов с различными шагами по пространственной и временной координате. В качестве характерных величин, по которым проводится сравнение, например, могут быть выбраны максимальные значения давлений у дна камеры и снаряда, а также дульная скорость

снаряда. Экстраполяция характерных величин $(p_{сн})_{мв}$, $(p_{сн})_m$ на нулевой шаг (при $\Delta x \rightarrow 0$) приводит при различных числах Куранта к одному значению, которое принимается за точное значение, соответствующее исходной дифференциальной задаче.

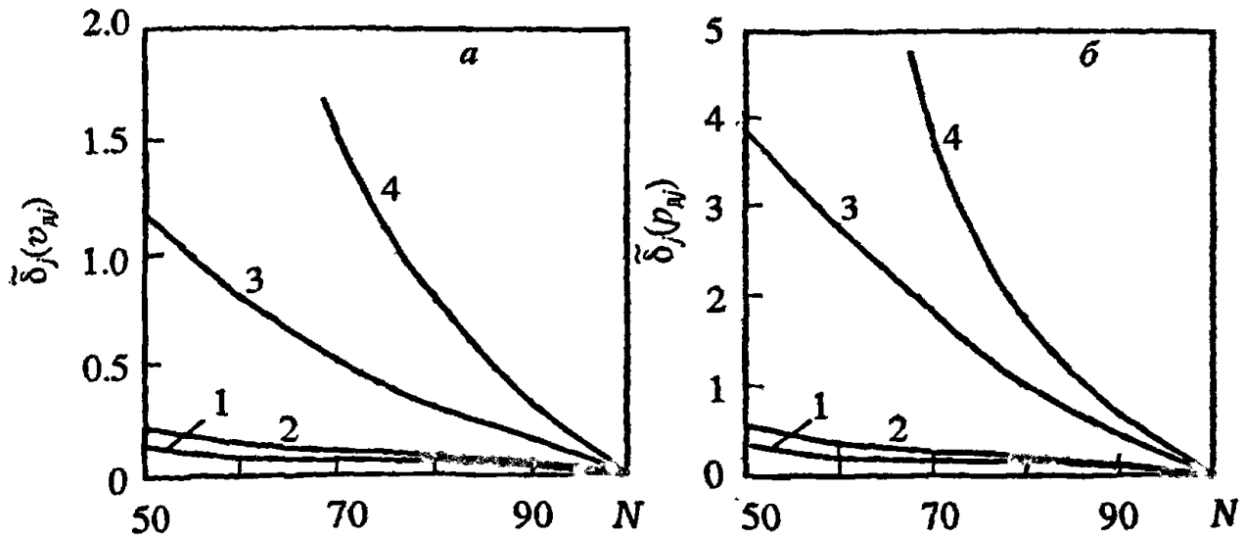


Рис.3.1. Зависимость модулей относительных ошибок дульной скорости (а) и давления (б) у дна снаряда от числа интервалов разбиения по пространственной координате:

1-метод характеристик; 2-метод СЭЛ; 3- метод Лакса –Вендроффа; 4-метод Лакса

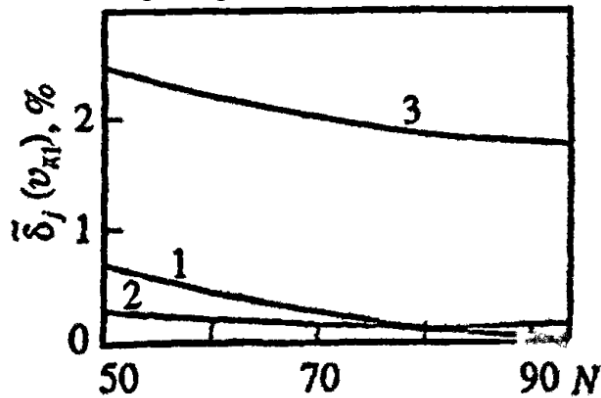


Рис.3.2. Зависимость модуля относительной ошибки $\bar{\delta}_j(v_{дi})$ и N : 1-метод характеристик; 2-метод СЭЛ; 3- метод Лакса –Вендроффа

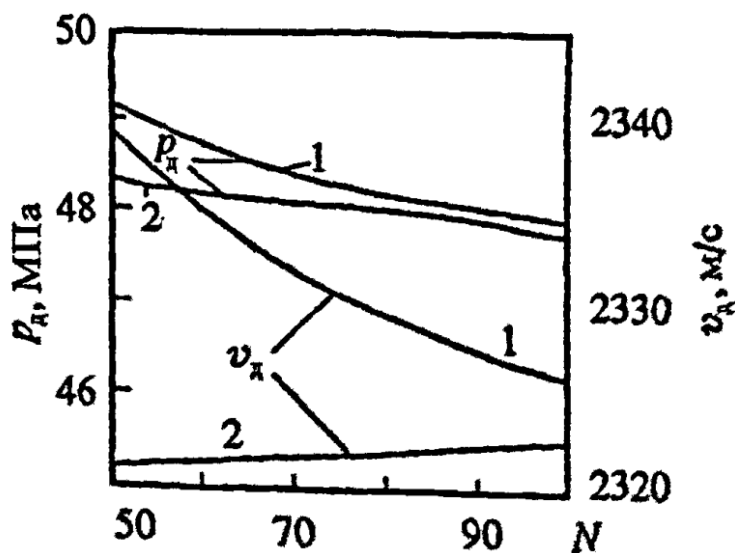


Рис.3.3. Зависимость v_d и p_d от числа интервалов разбиения: 1-метод характеристик; 2-метод СЭЛ

В качестве примера на рис. 3.4 для одного из типичных для ОЗВБ сочетаний исходных параметров приведены модули относительных ошибок дульной скорости $\delta_j(v_{dj})$ и давления на снаряд в момент вылета $\delta_j(P_{dj})$ в зависимости от числа разбиений N по пространственной координате. За базу для сравнения в данном случае были выбраны значения соответствующих параметров, рассчитанные тем или иным методом при $N = 100$. Параметры v_d , p_d , рассчитанные различными методами при $N \rightarrow \infty$, стремятся каждый к своему пределу. Результаты, полученные методом Лакса и Лакса-Вендроффа, сильно зависят от N , что вынуждает при использовании этих методов брать большое число интервалов N . Как показано в работе [6], значения баллистических параметров, полученных методом характеристик при $N \geq 100$) могут быть приняты в качестве точного решения. Рис. 3.5 отражает зависимость модуля относительной ошибки $\delta_j = \frac{v_{dj} - v_{d1}}{v_{d1}}$

в функции N , где v_{d1} - значение дульной скорости, рассчитанное методом характеристик при $N = 100$. Зависимости v_d и p_d от N , рассчитанные методом характеристик и методом СЭЛ, представлены на рис. 3.6. Из рис. 3.5 следует, что параметры газопороховой смеси, рассчитанные по методу СЭЛ, уже при $N = 50$ достигают стационарного значения (практически не меняются при $N \rightarrow \infty$). Сравнение свидетельствует в пользу конечно-разностного метода СЭЛ. Логично предположить, что этот результат справедлив и в случае двухскоростной модели сплошной среды.

Тестирования метода СЭЛ на разрывном решении системы уравнений, описывающих двухскоростные движения двухфазной смеси, показывает правомерность такого предположения.

Одним из важных в техническом отношении моментов расчета является выбор и построение расчетной сетки. Последняя существенно сказывается как на точности решения, так и на объеме вычислений.

Основные требования, предъявляемые к сеткам при расчете задач внутренней баллистики, можно сформулировать следующим образом:

- ячейки по возможности не должны сильно отличаться от прямоугольных;
- желательно, чтобы сетка не содержала ячейки, сильно различающиеся по размерам;
- сетка должна отражать специфические особенности течения, сгущаясь в области больших градиентов параметров.

В заключение следует отметить, что применение того или иного типа сетки в зависимости от задачи может существенно повысить точность вычислений без заметного увеличения времени счета. В каждом типе задач, связанных с движением газопороховой смеси, выбор расчетной сетки должен проводиться в соответствии с целями численного исследования. Общий рецепт по выбору некой оптимальной сетки, пригодной для всех практических случаев, отсутствует.

3.4.3. Определение внутрибаллистических параметров системы калибра 76,2 мм классической схемы выстрела газодинамическим методом

На рисунке 3.4 представлены расчетные параметры внутренней баллистики системы 76,2 мм полученные газодинамическим методом по односкоростной модели с использованием разностной схемы СЭЛ.

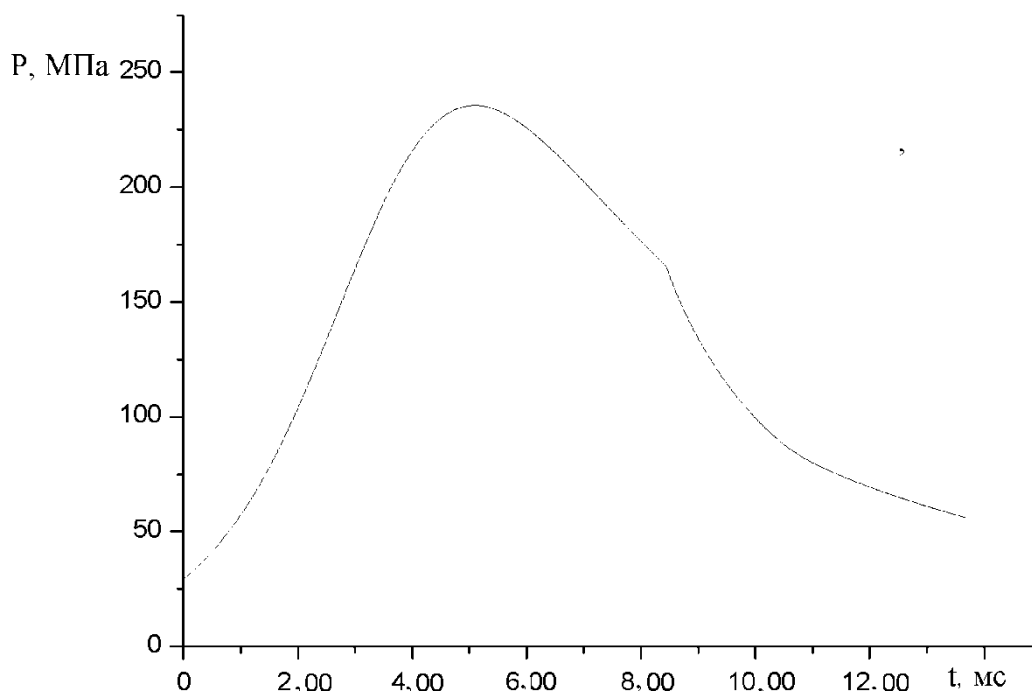


Рисунок 3.4. Зависимость давления на дно канала системы от времени

Из сравнения с результатами расчета той же системы калибра 76,2 мм классической схемы выстрела термодинамическим методом представленными на рис. 3.4 видна большая разница в качественном поведении кривой давления на дно канала системы. Участок с более резким спадом давления объясняется окончанием горения заряда, чего нет в графиках на рис. 3.4. Важно, что баллистика системы 76,2 мм вычисленная газодинамическим методом по модели односкоростной среды определена из расчета параметров в каждой расчетной точке заснарядного пространства с расчетным шагом h . При термодинамическом методе расчет проводится с представлением всей области заснарядного пространства как одной единой расчетной ячейки.

Принципиальное отличие газодинамического метода от термодинамического заключается в возможности моделирования волнообразного характера течения сплошной среды в заснарядном пространстве. При моделировании процессов в эстафетной схеме выстрела взаимодействие волн давления носит принципиальный характер. Поэтому использование газодинамического подхода при моделировании систем эстафетной схемы выстрела носит обязательный характер.

3.5. Выводы по разделу

1. Решена ОЗВБ с использованием газодинамического подхода для модели односкоростной среды.
2. Из рассмотрения возможностей численных методов решения ОЗВБ в газодинамической постановке выбран метод СЭЛ, для использования в качестве основного расчетного метода.
3. Получены параметры внутренней баллистики системы 76,2 мм газодинамическим методом.
4. Проведено сопоставление полученных результатов расчетов при применении газодинамического и термодинамического методов.
5. Сделан вывод об обязательном использовании газодинамического метода при моделировании работы систем эстафетной схемы выстрела.

4. Баллистика систем эстафетной схемы выстрела

Из результатов исследований следует, что прямую задачу внутренней баллистики для систем эстафетной схемы метания необходимо решать именно с использованием газодинамического подхода. Будем использовать модель односкоростной среды [21-29].

Решение основной задачи внутренней баллистики для систем эстафетной схемы метания (рисунок 4.1) проводится при следующих основных допущениях, используемых в модели:

- заряды состоят из зерен мелкого иницирующего состава, причем зерна движутся с той же скоростью, что и окружающие их газы;
- поверхность каждого из зарядов охватывается пламенем мгновенно в соответствующий зажиганию момент времени;
- трением газа о стенки камеры, ствола и теплоотдачей пренебрегаем;
- движение сборки (перегородка, дополнительный заряд, метаемый элемент) начинается после достижения давления форсирования в основной камере;
- для зерен справедлив обычный геометрический закон горения;
- истечение газа в область сборки не учитывается.

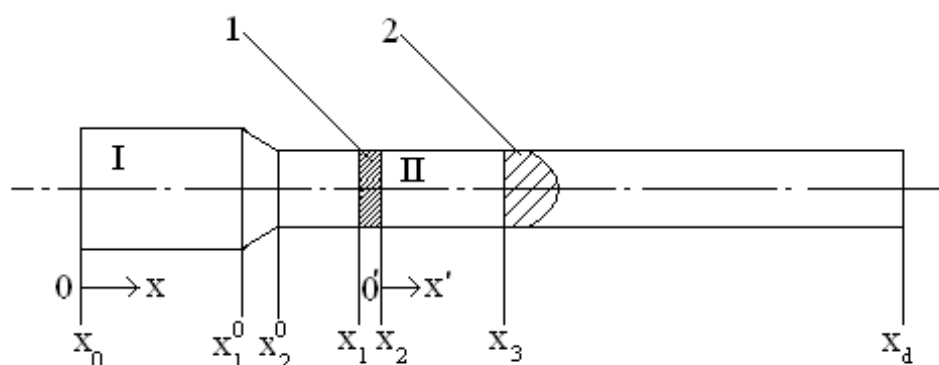


Рисунок 4.1. I, II – области, где располагаются части заряда; 1 – перегородка; 2 – метаемый элемент; I – камера основного заряда; II – область дополнительного заряда.

Обозначая новые параметры со штрихом, имеем:

$$x' = x - \int_0^t v d\tau - x_0, \quad u' = u - v, \quad t' = t,$$

В этом случае дифференциальные операторы по независимым переменным будут выглядеть

$$\frac{\partial}{\partial x'} = \frac{\partial}{\partial x}, \quad \frac{\partial}{\partial t'} = \frac{\partial}{\partial t} - v \frac{\partial}{\partial x}$$

При этом система уравнений во II области, будет иметь вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial p S}{\partial t} + \frac{\partial \rho u S}{\partial x} &= 0 \\ \frac{\partial \rho u S}{\partial t} + \frac{\partial \rho u^2 S}{\partial x} + S \frac{\partial p}{\partial x} &= -\rho S \frac{dv}{dt} \\ \frac{\partial p \varepsilon S}{\partial t} + \frac{\partial p \varepsilon u S}{\partial x} + p v \frac{\partial S}{\partial x} + p \frac{\partial S u}{\partial x} &= S \Pi \rho \left(\frac{\partial \psi}{\partial t} + u \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) \\ \frac{\partial \psi}{\partial t} + u \frac{\partial \psi}{\partial x} &= \sqrt{\chi^2 + 4 \chi \lambda \psi} \frac{p}{I_k} \\ \psi &= \chi z (1 + \lambda z) \\ \varepsilon &= \frac{p}{k-1} \left(\frac{1}{\rho} - \frac{1-\psi}{\delta} - \alpha \psi \right) \end{aligned}$$

Эта система используется для расчета в обеих областях. Как частный случай из нее можно легко получить уравнения в инерциальной системе координат для определения параметров в области I.

Начальные условия для области I определяются с учётом достижения давления форсирования сборки в начальный момент времени. Начальные условия в области II определяются для условия достижения заданного времени задержки зажигания движущегося дополнительного заряда. Предполагается, что в этот момент времени в области II достигается заданное начальное давление.

Граничные условия

1. При $x=0, t \geq 0; u=0$.

2. При $x=x_1, t \geq 0$

$$\frac{du_1}{dt} = \begin{cases} \frac{S}{Q} \left(p_1 - \frac{f_{CB}}{S} \right), \text{если } \frac{p_1 - p_2}{Q_\Gamma} \geq \frac{p_3}{q} \\ \frac{S(p_1 - p_2)}{Q_\Gamma}, \text{если } \frac{p_1 - p_2}{Q_\Gamma} < \frac{p_3}{q} \end{cases}$$

$$\frac{dv}{dt} = \frac{du_1}{dt}$$

3. При $x=x_2, t \geq 0; u_2=0$

4. При $x=x_3, t \geq 0$

$$\frac{du_3}{dt} = \begin{cases} 0, & \text{если } \frac{p_1 - p_2}{Q_\Gamma} \geq \frac{p_3}{q} \\ \left\{ \frac{S(p_3 - f_{CB}/S)}{q} \right\} - \frac{dv}{dt}, & \text{если } \frac{p_1 - p_2}{Q_\Gamma} < \frac{p_3}{q} \end{cases}$$

$$f_{CB} = \left(p_{BH} + \frac{k+1}{2} \rho_{BH} u^2 \right) S \quad -$$

по формуле прямого скачка.

4.1. Относительные переменные

Система уравнений приводится к относительным переменным. В качестве масштабных величин выбраны: $L_{KM} = x_1, t_0 = L_{KM}/c_0$,

$$P_0 = \frac{f_I \Delta_I}{1 - \alpha_I \Delta}, \quad c_0^2 = \frac{p_0}{\Delta}, \quad \Delta = \frac{\omega_I}{w_I}, \quad \text{если } u \frac{\omega_I}{w_I} \geq \frac{\omega_{II}}{w_{II}}$$

$$P_0 = \frac{f_{II} \Delta}{1 - \alpha_{II} \Delta}, \quad c_0^2 = \frac{p_0}{\Delta}, \quad \Delta = \frac{\omega_{II}}{w_{II}}, \quad \text{если } u \frac{\omega_I}{w_I} < \frac{\omega_{II}}{w_{II}}.$$

Здесь x_1 -начальная координата положения поршня; ω_I, ω_{II} - массы составов в областях; w_I, w_{II} - объёмы областей; L_{KM} -масштаб длины; t_0 - масштаб

времени; p_0 - масштаб давления; c_0 - масштаб скорости. Относительные переменные:

$$\tau = \frac{t}{t_0}, \quad \bar{u} = \frac{u}{c_0}, \quad \bar{x} = \frac{x}{L_{KM}}, \quad \bar{p} = \frac{p}{p_0}, \quad \bar{\rho} = \frac{\rho}{\Delta}, \quad \bar{\varepsilon} = \frac{\varepsilon}{c_0^2}.$$

Для простоты введем следующие замены:

$$\rho S \rightarrow \rho, \quad \rho u S \rightarrow M, \quad \rho \varepsilon S \rightarrow \varepsilon.$$

Переходя к относительным переменным, с учетом замен, получим:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial \tau} + \frac{\partial \rho u}{\partial x} &= 0 \\ \frac{\partial M}{\partial \tau} + \frac{\partial M u}{\partial x} + S \frac{\partial \rho}{\partial x} &= -\rho \frac{d\nu}{d\tau} \\ \frac{\partial \varepsilon}{\partial \tau} + \frac{\partial \varepsilon u}{\partial x} + p \frac{\partial S u}{\partial x} &= \rho \Pi \left(\frac{\partial \psi}{\partial \tau} + u \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) - p \nu \frac{dS}{dx} \\ \frac{\partial \psi}{\partial \tau} + u \frac{\partial \psi}{\partial x} &= \sqrt{\chi^2 + 4\chi\lambda\psi} A \\ \psi &= xz(1 + \lambda z) \\ \varepsilon &= \frac{p\rho}{\theta} \left(\frac{S}{\rho} - \frac{1-\psi}{\delta} - \alpha\psi \right) \end{aligned} \tag{4.1}$$

где $\theta = k-1$, $A = \frac{\Delta L_{KM} c_0}{I_k}$.

Входные и граничные условия.

1. При $\tau=0$, $0 \leq x \leq 1$

$$u_1 = 0, \quad \rho_1 = \Delta_1 S, \quad p_1 = p_\Phi, \quad \psi_1 = \frac{\frac{1}{\Delta_1} - \frac{1}{\delta_1}}{\frac{f_1}{p_1} + \alpha_1 - \frac{1}{\delta_1}}.$$

2. При $\tau=0$, $x_2 \leq x \leq x_3$

$$u_{II} = 0, \quad \rho_{II} = \Delta_{II} S, \quad p_{II} = p_a, \quad \psi_{II} = 0. \quad (4.2)$$

3. При $\tau = \tau_3$, $x_2 \leq x \leq x_3$

$$u_{II} = 0, \quad \rho_{II} = \Delta_{II} S, \quad M_{II} = \rho_{II} u_{II}, \quad p_{II} = p_B, \quad \psi_{II} = \frac{\frac{1}{\Delta_{II}} - \frac{1}{\delta_{II}}}{\frac{f_{II}}{p_{II}} + \alpha_{II} - \frac{1}{\delta_{II}}}.$$

4. При $x=0$, $\tau \geq 0$; $u=0$.

5. При $x=x_1$, $\tau \geq 0$,

$$\frac{du_1}{d\tau} = \begin{cases} \frac{B}{Q} \left(Sp_1 - \frac{f_{CB}}{S_{KM}} \right), & \text{если } \frac{p_1 - p_2}{Q_\Gamma} \geq \frac{p_3}{q} \\ \frac{B}{Q_\Gamma} (S(p_1 - p_2)), & \text{если } \frac{p_1 - p_2}{Q_\Gamma} < \frac{p_3}{q} \end{cases}$$

$$\frac{d\nu}{d\tau} = \frac{du_1}{d\tau}$$

6. При $x=x_2$, $\tau \geq 0$; $u_2=0$.

7. При $x=x_3$, $\tau \geq 0$,

$$\frac{du_3}{d\tau} = \begin{cases} 0, & \text{если } \frac{p_1 - p_2}{Q_\Gamma} \geq \frac{p_3}{q} \\ \frac{B}{q} \left(p_3 - \frac{f_{CB}}{S_{KM}} \right) - \frac{d\nu}{d\tau}, & \text{если } \frac{p_1 - p_2}{Q_\Gamma} < \frac{p_3}{q} \end{cases},$$

$$B = S_{KM} \Delta L_{KM},$$

f_{CB} – сопротивление воздушного столба.

Величины $\frac{B}{Q}$, $\frac{B}{Q_\Gamma}$, $\frac{B}{q}$ – безразмерные.

Система решается методом СЭЛ (совместный Эйлера-Лагранжевый метод) [3].

4.2. Схема решения задачи

Для решения поставленной задачи выбран модифицированный метод СЭЛ.

Введём соотношения:

$$\begin{aligned}
 f(x_{k+1/2}, \tau_n) &= f_{k+1/2}^n, \\
 g(x_k, \tau_{n+1/2}) &= g_k^{n+1/2}, \\
 q(x_{k+1/2}, \tau_{n+1/2}) &= q_{k+1/2}^{n+1/2}, \\
 (fu)_{k+1/2}^{n+1/2} &= \begin{cases} f_{k+1/2}^n (u)_{k+1}^{n+1/2}, & \text{если } u_{k+1}^{n+1/2} \geq 0 \\ f_{k+3/2}^n (u)_{k+1}^{n+1/2}, & \text{если } u_{k+1}^{n+1/2} < 0, \end{cases} \\
 [\nabla fu]_{k+1/2}^{n+1/2} &= \frac{(fu)_{k+1}^{n+1/2} - (fu)_k^{n+1/2}}{h}.
 \end{aligned}$$

С учетом введенных соотношений конечно-разностные уравнения, соответствующие уравнениям системы (4.1), принимают вид:

$$M_k^{n+1/2} = M_k^{n-1/2} - \tau \{ [\nabla M u]_k^{n-1/2} + \rho_{k-1/2}^n \left(\frac{\Delta V}{\Delta \tau} \right)_K^{n+1/2} - \frac{S_{K+1/2} + S_{K-1/2}}{2} \left(\frac{\Delta P}{\Delta X} \right)_K^N \},$$

$$u_k^{n+1/2} = \frac{2M_K^{n+1/2}}{\rho_{K+1/2}^n + \rho_{K-1/2}^n},$$

$$\rho_{k-1/2}^{n+1} = \rho_{k-1/2}^n - \tau \{ [\nabla \rho u]_{k-1/2}^{n+1/2} \},$$

$$\Psi_{k-1/2}^{n+1} = \Psi_{k-1/2}^n - \tau \{ u_k^{n+1/2} \cdot \left(\frac{\Delta \Psi}{\Delta x} \right)_K^n - (\kappa + 2\kappa \lambda z_{k-1/2}^n) P_{k-1/2}^n A \},$$

$$z_{k-1/2}^n = \frac{\sqrt{\kappa^2 + 4\kappa\lambda\Psi_{K-1/2}^n - \kappa}}{2\kappa\lambda},$$

$$\varepsilon_{K-1/2}^{n+1} = \varepsilon_{K-1/2}^n - \tau \left\{ [\nabla \varepsilon u]_{k-1/2}^{n-1/2} + P_{k-1/2}^n [\nabla S u]_{K-1/2}^{N+1/2} + P_{K-1/2}^n V_K^{n-1/2} \cdot \left(\frac{\Delta S}{\Delta X} \right) - \rho_{K-1/2}^n \Pi \left(\frac{\Delta \Psi}{\Delta X} \right)_{K-1/2}^N \right\},$$

$$P_{k-1/2}^{n+1} = \frac{\varepsilon_{K-1/2}^{n+1} \theta}{\rho_{K-1/2}^{n+1} \left(\frac{S_{K-1/2}}{\rho_{K-1/2}^{n+1}} - \frac{1 - \Psi_{K-1/2}^{n+1}}{\delta} - \alpha \Psi_{K-1/2}^{n+1} \right)};$$

Формализация на границах

$$\frac{d\rho}{d\tau} + \rho \frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

$$\frac{dx}{d\tau} = u, \quad M = \rho u, \quad \psi = xz(1 + \lambda z)$$

$$\frac{d\varepsilon}{d\tau} + (\varepsilon + pS) \frac{\partial u}{\partial x} = \rho \Pi \frac{d\psi}{d\tau}$$

$$\frac{d\psi}{d\tau} = AP(\kappa + 2\kappa\lambda z)$$

$$p = \frac{\varepsilon \theta}{\rho \left(\frac{S}{\rho} - \frac{1 - \psi}{\delta} - \alpha \psi \right)}$$

(4.3)

Уравнения в разностном виде:

$$x_{\Gamma}^{n+1/2} = x_{\Gamma}^{n-1/2} + \tau \cdot (u_{\Gamma}^{n+1/2} - u_{\Gamma}^{n-1/2}) / 2,$$

$$x_{\Gamma}^{n+1} = x_{\Gamma}^n + \tau \cdot u_{\Gamma}^{n+1/2},$$

$$\rho_{\Gamma}^{n+1} = \rho_{\Gamma}^n - \tau \cdot \rho_{\Gamma}^n \cdot \frac{(u_{\Gamma}^{n+1/2} - u_K^{n+1/2})}{(x_{\Gamma}^{n+1/2} - x_K^{n+1/2})},$$

$$\begin{aligned}
M_{\Gamma}^{n+1/2} &= u_{\Gamma}^{n+1/2} \cdot \rho_{\Gamma}^{n+1}, \\
z_{\Gamma}^n &= \frac{\sqrt{\kappa^2 + 4\kappa\lambda\psi_{\Gamma}^n - \kappa}}{2\kappa\lambda}, \\
\varepsilon_{\Gamma}^{n+1} &= \varepsilon_{\Gamma}^n - \tau \cdot \left\{ (\varepsilon_{\Gamma}^n + s \cdot P_{\Gamma}^n) \frac{(u_{\Gamma}^{n+1/2} - u_K^{n+1/2})}{(x_{\Gamma}^{n+1/2} - x_K^{n+1/2})} - \rho_{\Gamma}^n \cdot \text{ПА} P_{\Gamma}^n (\kappa + 2\kappa\lambda z_{\Gamma}^n) \right\}, \\
\psi_{\Gamma}^{n+1} &= \psi_{\Gamma}^n + \tau \cdot (\kappa + 2\kappa\lambda z_{\Gamma}^n) \cdot P_{\Gamma}^n \cdot A, \\
P_{\Gamma}^{n+1} &= \frac{\varepsilon_{\Gamma}^{n+1} \cdot \mathcal{G}}{\rho_{\Gamma}^{n+1} \left(\frac{s_{\Gamma}}{\rho_{\Gamma}^{n+1}} - \frac{1 - \psi_{\Gamma}^{n+1}}{\delta} - \alpha \cdot \psi_{\Gamma}^{n+1} \right)};
\end{aligned}$$

Уравнения (4.3) будут использоваться на границах, $\Gamma=1,3$.

Уравнения движения на границах в разностном виде. На границе ($x = x_l$)

$$u_1^{n+1/2} = u_1^{n-1/2} + \tau \cdot \begin{cases} \frac{B}{Q} \left(S p_1^n - \frac{f_{CB}}{S_K} \right), & \text{ес' ли } \frac{p_1^n - p_2^n}{Q_{\Gamma}} \geq \frac{p_3^n}{q} \\ \frac{B}{Q_{\Gamma}} (S(p_1^n - p_2^n)), & \text{ес' ли } \frac{p_1^n - p_2^n}{Q_{\Gamma}} < \frac{p_3^n}{q} \end{cases} \quad (1.4)$$

На границе ($x = x_2$) $u_2^{n+1/2} = 0$.

На границе ($x = x_3$)

$$\begin{aligned}
u_3^{n+1/2} &= u_3^{n-1/2} + \tau \cdot \begin{cases} 0, & \text{ес' ли } \frac{p_1^n - p_2^n}{Q_{\Gamma}} \geq \frac{p_3^n}{q} \\ \frac{B}{q} \left(S p_3^n - \frac{f_{CB}}{S_K} \right) - \frac{dV^n}{d\tau}, & \text{ес' ли } \frac{p_1^n - p_2^n}{Q_{\Gamma}} < \frac{p_3^n}{q} \end{cases} \\
f_{CB}^n &= p_{\text{вн}} + \frac{\rho_{\text{вн}} \cdot (k_{\text{в}} + 1)}{2} \cdot (u_{\Gamma}^n)^2
\end{aligned}$$

Параметры в точках $x_{\kappa+1}^{n+1/2}$ и $x_{\kappa+3/2}^{n+1}$ интерполируются между точками

$x_K^{n+1/2}$ и $x_\Gamma^{n+1/2}$, $x_{K+1/2}^{n+1}$ и x_Γ^{n+1} :

$$u_{K+1}^{n+1/2} = u_K^{n+1/2} + \frac{(x_{K+1}^{n+1/2} - x_K^{n+1/2})}{(x_\Gamma^{n+1/2} - x_K^{n+1/2})} (u_\Gamma^{n+1/2} - u_K^{n+1/2}),$$

и т.д.

$$P_{K+3/2}^{n+1} = P_{K+1/2}^{n+1} + \frac{(x_{K+1}^{n+1/2} - x_K^{n+1/2})}{(x_\Gamma^{n+1/2} - x_K^{n+1/2})} (P_\Gamma^{n+1} - P_{K+1/2}^{n+1}).$$

После воспламенения в момент времени $\tau = \tau_3$ вычисления параметров односкоростной смеси проводятся во II-ой области.

4.3. Результаты численного исследования баллистических возможностей системы эстафетной схемы выстрела

Представляет большой интерес применить модель односкоростной среды для подбора параметров систем эстафетного выстрела с двумя камерами подгона. В этом случае на моделируемой системе калибра 42 мм могут быть теоретически получены максимальные скорости метания снаряда с $Cq = 3 \text{ дм}^3/\text{кг}$ при заданных ограничениях давлений $P=1000 \text{ МПа}$, $V= 3482 \text{ м/с}$.

На рис. 4.2 показаны зависимости давлений на границах рассматриваемых областей и скоростей от координат движущихся в процессе выстрела поршней и метаемого элемента. Пунктиром обозначены параметры давлений на левых границах расчетных областей.

Таким образом, показана теоретическая возможность достижения на обычной пушке при использовании схемы эстафетного выстрела скоростей свыше 3400 м/с при метании относительно тяжелого снаряда.

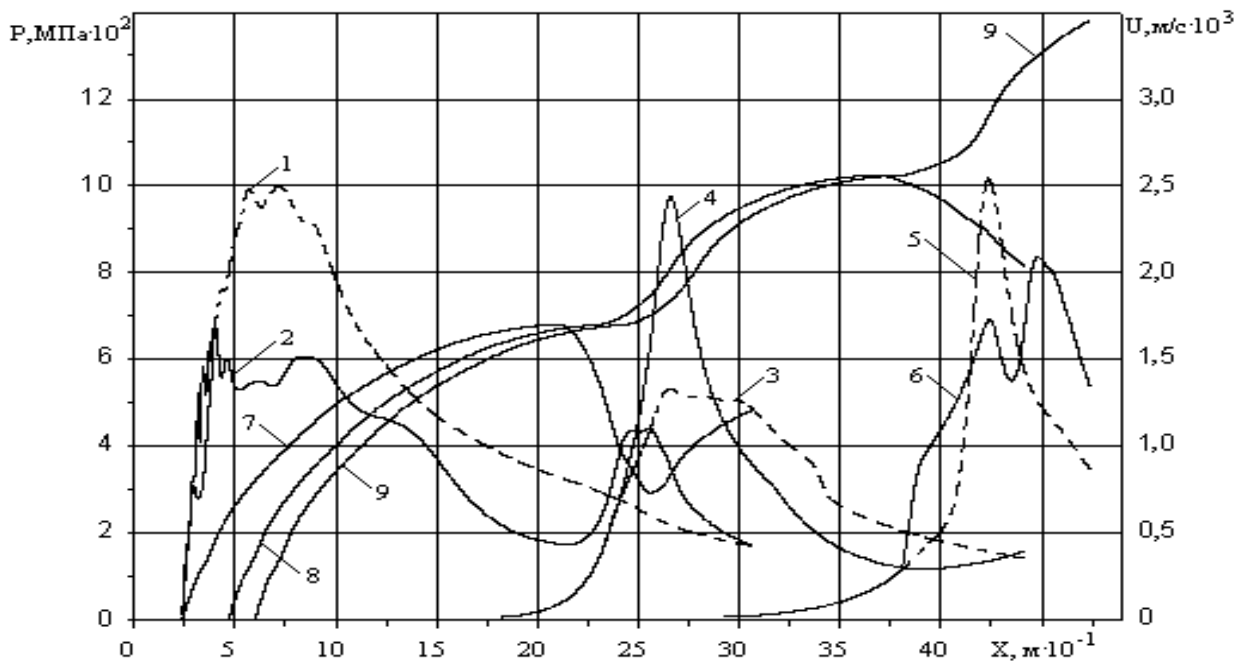


Рисунок 4.2. 1,2,3,4,5,6 - давления на границах областей в системе; 7,8 - скорости перегородок (двух); 9 - скорость снаряда.

Для системы калибра 42 мм классической схемы выстрела при заданных ограничениях на максимальное давление на дно канала расчетная скорость $V_d = 2532$ v/c метания элемента с $C_q = 3$ по модели односкоростной среды.

Таким образом, выигрыш в скорости при использовании эстафетной схемы выстрела составил, примерно, 27%. Для относительно тяжелых метаемых элементов такой выигрыш является значительной величиной.

4.4. Выводы по разделу

1. Рассмотрена ОЗВБ с использованием газодинамического подхода для моделирования систем эстафетной схемы метания.
2. При решении задачи определения баллистических параметров системы эстафетной схемы метания использована разностная схема СЭЛ.
3. Получены расчетные параметры внутренней баллистики системы калибра 42 мм эстафетной схемы метания.
4. Полученные расчетные скорости при использовании эстафетной схемы метания на системе калибра 42 мм с разделением заряда на 3 части для относительно тяжелых снарядов с $C_q = 3$ превышают получаемые скорости при классической схеме, примерно, на 27%.

Заключение

В заключении можно отметить, что все заданные цели диссертации были выполнены. В ходе работы была рассмотрена термодинамическая модель с помощью которой была решена ОЗВБ для системы калибра 76,2 мм. Для решения системы уравнений в обыкновенных производных был выбран метод Рунге – Кутты 4-го порядка точности. В результате расчета были определены параметры рассматриваемой системы.

Для оценки применимости газодинамического подхода была отлажена программа решения ОЗВБ односкоростной модели. При этом для решения задачи был выбран метод 2-го порядка точности СЭЛ. Сопоставление термодинамического и газодинамического подходов показало, что при термодинамическом подходе используются априори предполагаемые распределения параметров по длине канала системы. Использование новой эстафетной схемы предполагает численное определение распределения параметров (заранее не известного). По этому, использование термодинамического подхода для решения ОЗВБ эстафетной схемы в корне неправомерно.

Далее, для изучения баллистических возможностей эстафетной схемы метания была применена модель гетерогенной среды, на основе газодинамического подхода. Система уравнений модели гетерогенной среды решалась методом Годунова С.К. В результате исследования баллистических возможностей системы эстафетной схемы метания изучена баллистика системы эстафетной схемы с двумя разделительными элементами (т.е. разделением заряда на три части). Расчетным путем получена баллистика системы калибра 42 мм эстафетной схемы метания. Для относительно тяжелых снарядов с $C_q = 3$ получены скорости примерно на 27% более высокие, чем при классической схеме при одинаковых ограничениях на максимальные давления.

Список используемых источников

1. Броуд Г., Энстром Дж. Внутренняя баллистика, появление вспышки и дымового облака // Расчеты взрывов на ЭВМ. М., 1976. С. 160-187.
2. Газодинамические основы внутренней баллистики / С. А. Бетехтин, А.М. Веницкий, М. С. Горохов и др. М.: Оборонгиз, 1957.384 с.
3. Годунов С.К. Разностный метод численного расчета разрывных решений уравнений гидродинамики // Матем. сб.1959. Т.47, №3. С.271-306.
4. Дроздов Н.Ф. Решение основной задачи внутренней баллистики для зарядов просты, составных. Изд. Артакадемии, Москва, 1950.
5. Дягтерев М.Е. Высокоскоростной патрон с разделенным пороховым зарядом «Искра-М». Российский оружейный журнал «Калашников» Оружие, боеприпасы, снаряжение, №3, Санкт- Петербург: ООО «Азимут» 2011, с.11
6. Дягтерев М.Е. Высокоскоростные пулевые патроны «Искра-М» для гладкого ствола». Российский оружейный журнал «Калашников» Оружие, боеприпасы, снаряжение, №4, Санкт- Петербург: ООО «Азимут» 2014, с.62-67.
7. Зыков В.А., Кислин М.А., Сысков С.П. Патрон для гладкоствольных ружей, патент на изобретение RU 2512815, 28.12.2012.
8. Иоселевич В. А. и др. О влиянии трения на движение поршня под действием продуктов горения // ПМТФ. 1978. №5. С. 73-80
9. Куропатенко В.Ф. О разностных методах для уравнений гидродинамики // Тр. Матем. ин-на АН СССР. 1966. Т.74.
10. Кислин М.А. Патрон для гладкоствольных ружей, патент на изобретение RU 2512815, 18.10.2005.
11. Кислин М.А. Патрон для гладкоствольных ружей, патент на полезную модель RU 102103, 04.10.2010.
12. Кислин М.А., Маликов А.А. Патрон для гладкоствольных ружей, патент на полезную модель RU 152680, 10.06.2015.
13. Нох В.Ф. СЭЛ – совместный эйлерово – лагранжево метод для расчета нестационарных двумерных задач // Вычислительные методы в гидродинамике. М., 1967. С.128-189.

14. Норейка Р.М. Стрелковое тестирование нового серийного высокоскоростного патрона «Искра-М» Новосибирского механического завода. Российский оружейный журнал «Калашников». Оружие, боеприпасы, снаряжение, №10, Санкт-Петербург: ООО «Азимут» 2014. С.54- 57.
15. Рихтмайер Р., Мортон К. Разностные методы решения краевых задач. М.: Мир, 1972. 418с.
16. Ромашкевич Ю.И. Сравнение двух методов расчета двумерных нестационарных течений газа// Журн. вычисл. мат. физ.1978. №1
17. Рождественский Б.Л., Яненко Н.Н. Системы квазилинейных уравнений. М.: Наука, 1968. 592с.
18. Станюкович К. П. Неустановившиеся движения сплошной среды. М.: Наука, 1971. 854 с.
19. Салтанов Г.А. Неравновесные и нестационарные процессы в газодинамике однофазных и двухфазных сред. М., Наука, 1979. 286с.
20. Сафронов А.И. Внутренняя баллистика ствольной системы с присоединенной камерой подгона [Текст] / А.И.Сафронов, А.Ю. Крайнов // Вестник ТГПУ.—2004. Вып.6(43). С. 67-70.
21. Сафронов А.И., Кузмичев А.Б., Шодибекова Ф.Ф. Автоматизация моделирования баллистических систем//Материалы VII Международной научно-практической конференции (школы-семинара) молодых ученых «Прикладная математика и информатика: современные исследования в области естественных и технических наук», Тольятти. 2021. С.- 5.
22. Хартман В.Ф., Стирвус П.П Давление ведущего пояска 155-мм снаряда и силы врезания при движении по начальному участку ствола // Воснаряда техника и эконмика : РЖ.1974. №2.
23. Хоскин Н., Лембурн Б.Расчет общих одномерных нестационарных задач с помощью метода характеристик // Численные методы в механике жидкостей. М., 1973.
24. Экспериментальное и теоретическое исследование внутренней баллистики выстрела с разделением порохового заряда / А.Н. Вандакуров [и др.] // Материалы IX всероссийской конференции «Фундаментальные и прикладные проблемы современной механики», Томск: 2016. С. 161-162.

25. Яушев И.К. О численном расчете нестационарных течений газа в одномерном приближении в каналах со скачком площади сечения // Изв. СО АН СССР. Сер. техн. наук. 1967. Т.2, №8.
26. Bicen A. F. Subconic single – phase Flow in a gun simulator// AIAA J.1988.V.25, N 1.P.47-51
27. Lax P. Weak solution of nonlinear hyperbolic equation and their numerical computation // Comm, on pur and apl math. 1954. V.7,N 1.
28. Mac – Cormak R. W. The effect of viscosity in hypervelocity impact Cratering // AIAA Paper. Cincinnati, 1969. N. 69.354 p.
29. Pilches I.O ., Wineholt E. Analisis of the friction behavior at Higt Sliding velocities and projective steel // Ballistic Research Lab. Rept. 1955. Jan. 1977.
30. Stalts I. Development of dynamic bore friction modell for guns and mortars and its conceptual application to earty-roun and gum erosion inaccuracies // Australion Defense Standard Labs. 1974. Rept. 573.