МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Тольяттинский государственный университет»

Институт Математики, физики и информационных технологий
(наименование института полностью)

Кафедра «Прикладная математика и информатика»
(наименование кафедры полностью)

01.03.02 Прикладная математика и информатика
(код и наименование направления подготовки, специальности)

Математическое и компьютерное моделирование
(направленность (профиль))

ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА (БАКАЛАВРСКАЯ РАБОТА)

на тему «Сведение задачи формирования портфеля облигаций с заданным значением дюрации и наименьшим показателем выпуклости к задаче линейного программирования»

Студент	А.А. Мокеев (И.О. Фамилия)	(личная подпись)
Руководитель	канд. техн. наук, доцент, Н.А. Сосина (ученая степень, звание, И.О. Фамилия)	
Консультант	М. В. Дайнеко (ученая степень, звание, И.О. Фамилия)	

Тольятти 2021

АННОТАЦИЯ

Тема выпускной квалификационной работы: «Сведение задачи формирования портфеля облигаций с заданным значением дюрации и наименьшим показателем выпуклости к задаче линейного программирования»

Работа была выполнена студентом Тольяттинского Государственного Университета, института математики, физики и информационных технологий, группы ПМИп-1702а, Мокеевым Алексеем Андреевичем.

Выпускная квалификационная работа посвящена реализации алгоритма формирования иммунизированного портфеля облигаций.

Цель работы – Определение качественного состава портфеля для осуществления иммунизации портфеля.

Объект исследования –линейная модель портфеля облигаций с заданным значением дюрации и наименьшим показателем выпуклости.

Предмет исследования – показатели портфельного риска: дюрация и выпуклость.

Задачи работы:

- Изучить математические методы анализа инвестиций;
- Изучить математические методы формирования портфеля;
- Изучить математические методы уменьшения портфельных рисков;
- Решить задачу формирования портфеля облигаций с заданным значением дюрации и наименьшим показателем выпуклости, с последующим сведением ее к задаче линейного программирования;
- Реализовать программный модуль, алгоритма, который формирует иммунизированный портфель облигаций с заданным значением дюрации и наименьшим показателем выпуклости при помощи встроенной функции линейного программирования.

Актуальность работы заключается в решении проблемы формирования портфеля облигаций, с иммунитетом от изменения процентных ставок на рынке.

Бакалаврская работа содержит пояснительную записку объемом 62 страницы, включая 14 иллюстраций, 2 таблицы, список литературы из 25 наименований, включая 6 зарубежных и 1 приложение.

Структура работы включает в себя введение, 3 главы, заключение, список литературы и приложение.

В первой главе рассматриваются и изучаются математические методы анализа инвестиций, формирования портфеля и уменьшения портфельных рисков с помощью иммунизации портфеля от изменения процентных ставок.

Во второй главе решается задача формирования портфеля облигаций с заданным значением дюрации и наименьшим показателем выпуклости, с последующим сведением ее к задаче линейного программирования, а также приводится пример иммунизации портфеля.

В третьей главе реализуется программный модуль, алгоритма, который формирует иммунизированный портфель облигаций с заданным значением дюрации и наименьшим показателем выпуклости при помощи встроенной функции линейного программирования в программе Matlab.

Результатом работы является программа сведения задачи формирования портфеля облигаций с заданным значением дюрации и наименьшим показателем выпуклости к задаче линейного программирования и формирования иммунизированного портфеля облигаций.

ABSTRACT

This graduation work: "Reducing the problem of forming a portfolio of bonds with a given duration value and the smallest convexity index to a linear programming problem"

The key issue of the graduation work is devoted to the implementation of the algorithm for the formation of an immunized bond portfolio.

The aim of the work is to give some information about - Determination of the qualitative composition of the portfolio for the implementation of portfolio immunization.

The object of the graduation work of the research is the problem of solving and constructing an immunized portfolio of bonds with a given duration and the least convexity.

The subject of the graduation work of the research is the formation of an immunized bond portfolio.

We work touches upon:

• Study mathematical methods of portfolio formation;

• Develop an algorithm to build an immunized bond portfolio

• Give an example of building an immunized bond portfolio;

• Perform a software implementation of an algorithm that forms an immunized bond portfolio with a given duration value and the smallest convexity index for a linear programming problem.

The relevance of the work lies in solving the problem of forming a bond portfolio, with immunity from changes in interest rates in the market.

The first chapter discusses and studies mathematical methods for analyzing investment, portfolio formation and reduction of portfolio risks through portfolio immunization from the change in interest rates.

In the second chapter, the task of forming a bond portfolio with a given duration value and the smallest bulge indicator, followed by the information of the linear programming task, and is also given an example of the portfolio immunization.

The third chapter implements a software module, an algorithm that generates an immunized bond portfolio with a specified duration value and the smallest convexity indicator using the built-in linear programming function in the MATLAB program.

The result of the work is a program for reducing the problem of forming a bond portfolio with a given duration value and the smallest convexity index to the problem of linear programming and forming an immunized bond portfolio.

Оглавление

Введение

Современная экономика устроена так, что не может существовать без математического моделирования, на основе которого с помощью математических методов осуществляется прогнозирование.

В работе решается задача формирования портфеля облигаций с заданным значением дюрации и наименьшим показателем выпуклости, с последующим сведением ее к задаче линейного программирования.

Облигаций на фондовом рынке продается очень много. И из всего этого количества нужно выбрать те, которые будут приносить наибольшую прибыль при наименьшем риске.

В первой главе работы оценивается риск инвестиций. В качестве оценки риска рассматриваются дюрация и выпуклость, меры риска первого и второго порядков соответственно. С заданным значением дюрации и наименьшим показателем выпуклости формируется портфель облигаций. В последствии задача формирования портфеля сводится к задаче линейного программирования. Кроме того, в первой главе рассматриваются математические методы уменьшения портфельного риска за счет иммунизации. Иммунизированный портфель, защищен от изменения процентных ставок на рынке

Актуальность работы заключается в том, что использование математических методов формирования портфеля с оптимальными значениями дюрации и выпуклости, позволит осуществить правильный выбор портфельных инвестиций.

Предметом исследования является формирование диверсифицированного портфеля облигаций.

Объект исследования – показатели портфельного риска: дюрация и выпуклость.

Задачи выпускной квалификационной работы:

- Изучить математические методы анализа инвестиций
- Изучить математические методы формирования портфеля

- Изучить математические методы уменьшения портфельных рисков
- Решить задачу формирования портфеля облигаций с заданным значением дюрации и наименьшим показателем выпуклости, с последующим сведением ее к задаче линейного программирования
- Реализовать программный модуль, алгоритма, который формирует иммунизированный портфель облигаций с заданным значением дюрации и наименьшим показателем выпуклости при помощи встроенной функции линейного программирования.

Итогом выпускной квалификационной работы станет программный модуль, написанный в программе Matlab r2019, формирующий портфель облигаций с заданным значением дюрации и наименьшим показателем выпуклости к задаче линейного программирования.

Глава 1. Изучение математических методов формирования портфеля

1.1 Математические методы анализа инвестиций

Если мы зарабатываем каждый месяц по 30000 рублей. То на эту зарплату мы сможем купить меньше, чем в прошлом году и, тем более несколько лет назад.

Так, если верить сайту global-finances.ru (http://global-finances.ru/inflyatsiya-v-rossii-po-godam/), в 2020 году инфляция составила 4,9%, а в 2015 году на 12,9%. Так за последние десять лет деньги, которые просто копились без вложений стали дешевле на 72,27%.

Одним из способов накопить деньги без их постоянной потери является вложение денег, то есть инвестиции. Наименее рисковые вложения - депозит в банке и инвестирование в облигации.

Одним из видов облигаций являются облигации федерального займа (ОФЗ). ОФЗ и депозит в банке несут в себе примерно одинаковый риск и одинаковую прибыль, однако есть несколько факторов, почему стоит инвестировать именно в облигации. В отличие от банковского депозита с брокерского счета, деньги можно снять в любой момент, не потеряв в прибыли

Банковский депозит убирает диверсификацию и предлагает страхование только 1.4 миллиона рублей. То есть, если банк обанкротиться, то выплата составит не больше 1.4 миллиона, даже если было вложено 10 миллионов. ОФЗ не подлежат страховке, но выплата не произойдет только если у страны нет денег. А если нет денег у страны, то у банка в этот момент их нет тем более.

Есть возможность купить более доходные облигации, но это будут облигации компаний, что является более рискованным вложением.

Можно открыть ИИС (индивидуальный инвестиционный счет) и получать по 13% налогового вычета на сумму до 400 тысяч рублей.

Взяв во внимание вышеперечисленное, перед инвестором встает задача в сохранении накопленных средств. В этом ему поможет формирование портфеля облигаций, обладающего свойством сохранения накопленной финансовой суммы не смотря на инфляцию.

1.2 Математические методы анализа облигаций

Самый простой способ рассчитать доходность облигаций-разделить рыночную цену облигации на ее номинальную стоимость, то есть вычислить ставку купона (K).

$$K = \frac{P}{N} 100\%, \tag{1}$$

где P – рыночная цена облигации (цена покупки),

N – номинал облигации (сумма, которую эмитент занимал).

Для анализа облигаций мы должны:

- определить полную доходность облигации,
- определить внутреннею стоимость облигации,
- оценить риск вложения.

Рассмотрим каждый из пунктов поподробнее

1.2.1. Вычисление полной доходности облигаций

Общий доход от облигации складывается из:

- купонного дохода;
- изменения рыночной цены облигации, т.е разницы между ценой покупки и ценой продажи облигации;
- дохода от реинвестиции поступления от купонов.

Так как существует несколько типов облигаций с различными способами выплаты, то существует и несколько способов измерения доходности облигации.

Мы будем рассматривать методы определения полной доходности, учитывающие первые два элемента доходности. Показатель полной доходности измеряет реальную финансовую эффективность облигации для инвесторов и обычно определяется в виде годовой ставки сложных процентов.

Это ставка называется внутренней доходностью облигации или доходность к погашению, формула (2).

$$P = \frac{C_1}{(1+r)^1} + \frac{C_2}{(1+r)^2} + \frac{C_3}{(1+r)^3} + \cdots + \frac{C_n}{(1+r)^t} = \sum_{t=1}^{n} \frac{C_n}{(1+r)^t}, \quad (2)$$

C_n- выплачивается вместе с номиналом

Из формулы (2) можно найти внутреннюю доходность облигации YTM r. Так как значения купонов равны, то примерное значение YTM:

$$YTM = \frac{C + \frac{N-P}{t}}{\frac{N+P}{2}} \quad (3)$$

N – номинал облигации.

Цель формулы (2) - определить доходность облигации (или другой ценной бумаги с фиксированным активом) в соответствии с ее последней рыночной ценой.

Чтобы вычислить истинный YTM, аналитик или инвестор должен использовать метод проб и ошибок. Это делается с помощью различных ставок, которые подставляются в слот текущего значения формулы. Истинный YTM определяется, как только цена совпадает с фактической текущей рыночной ценой ценной бумаги.

1.2.2 Методы оценивания доходности облигаций

Одна из целей финансового анализа ценных бумаг – найти те из них, которые недооценены рынком.

Это можно сделать двумя способами.

Сравнить значение ставки доходности к погашению облигации со значением “справедливой” по мнению инвестора. Облигация недооценена, если доходность выше справедливой. Облигация переоценена, если доходность ниже справедливой. Недооценённые облигации покупают. Переоценённые облигации продают.

Оценка истинной стоимости облигации с рыночной заключается в следующем: если рыночная цена ниже истинной стоимости, то облигация недооценена и наоборот.

Рассмотрим первый вариант. Рассчитаем доходность к погашению:

$$P = \frac{C_1}{(1+y)^1} + \frac{C_2}{(1+y)^2} + \frac{C_3}{(1+y)^3} + \cdots + \frac{C_n}{(1+y)^n} = \sum_{t=1}^{n} \frac{C_t}{(1+y)^t} \quad (4)$$

C1 – купон первого периода

Cn – nый купон и номинал самой облигации

Выясним чему равен y ли YTM, затем рассчитаем внутренняя стоимость облигации:

$$V = \frac{C_1}{(1+y^*)^1} + \frac{C_2}{(1+y^*)^2} + \frac{C_3}{(1+y^*)^3} + \cdots + \frac{C_n}{(1+y^*)^n} = \\ = \sum_{t=1}^{n} \frac{C_t}{(1+y^*)^t} \quad (5)$$

По аналогии найдем y^*.

Сравним полученные показатели.

Если $y > y^*$, то данная облигация недооценена.

Если $y < y^*$ то облигация переоценена на рынке.

Если $y = y^*$, то облигация оценена рынком справедливо.

Данную модель называют базовой моделью оценивания облигации.

Сравниваем стоимость с доходностью (NPV)

$$NPV = V - P = \sum_{t=1}^{n} \frac{С_t}{(1 + y^*)^t} - P \quad . \quad (6)$$

Если NVP > 0, то облигация недооценена рынком; если NVP < 0, то переоценена. Если $y > y^*$, то любая облигация будет иметь NVP > 0 и наоборот.

1.3 Основные риски инвестирования, связанного с вложением в облигации

Риск - неотъемлемая часть инвестирования. Как правило, инвесторы должны идти на больший риск, чтобы достичь большей доходности, однако принятие на себя дополнительного риска не всегда приводит к большей доходности.

«Чаще всего риски связаны со сроком облигации. Чем больше срок, тем выше риск. Однако просто срок облигации, т. е. период времени от ее приобретения до погашения, не учитывает особенность распределения доходов во времени у разных видов облигаций - так называемый профиль доходов, поэтому существуют такие показатели, как средний срок и дюрация.

Показатель – средний срок, учитывает сроки выплат всех видов облигаций в виде взвешенной среднеарифметической величины. В качестве весов берутся размеры платежей. Таким образом, чем больше сумма платежа, тем большее влияние на средний срок оказывает срок выплаты этого платежа» [2]

$$T = \frac{C\sum_{t=1}^{n} t + nN}{nC + 1} \tag{7}$$

Средний срок T < n , если купонная ставка g > 0 .

1.4 Математические методы оценки риска инвестирования. Дюрация и выпуклость

Дюрация - это мера чувствительности цены облигации или другого долгового инструмента к изменению процентных ставок. Дюрацию облигации легко спутать с ее сроком или временем до погашения, потому что некоторые типы измерений дюрации также рассчитываются в годах. Однако срок действия облигации является линейной мерой лет до погашения основного долга; он не меняется в зависимости от условий процентной ставки. Дюрация, с другой стороны, не линейна и ускоряется по мере уменьшения времени до окончания срока облигации.

Формула дюрации:

$$D = \frac{\sum_i \mathrm{C}_i \, t_i v^{t_i}}{\sum_i \mathrm{C}_i \, v^{t_i}} \quad , \tag{8}$$

C_i - поступления по облигации,

t_i – время поступлений.

На дюрацию влияют два фактора: время до погашения, ставка купона.

Время до погашения.

Рассмотрим пример. Имеется две облигации, обе дают доходность 7% и стоят 1000 рублей, однако имеют разные сроки погашения. У первой конечный срок через год, а у второй через 10 лет. Соответственно первая облигация имеет меньшую дюрацию и риск.

Ставка купона.

Рассмотрим пример. Есть две одинаковые облигации, кроме их ставок. Соответственно та, у которой ставка выше – окупит себя быстрее, чем вторая и быстрее выйдет в прибыль.

Данная дюрация называется дюрация Маколея и она показывает за какое время (в годах) облигация окупит себя с учетом ставки дисконтирования.

Есть второй вид – модифицирования дюрация (MD):

$$MD = \frac{D}{(1+y)} \quad . \tag{9}$$

Модифицирования дюрация позволяет оценить на сколько измениться цена облигации при изменении доходности и наоборот. Поскольку это производная, то она будет прямой линией. В этом ее большой плюс.

Посмотрим, как получилась данная формула:

Это формула показывает, как изменяется цена облигации при изменении ставки доходности. Возьмем формулу цены:

$$P(y) = \sum_{i=1}^{n} \frac{C_i}{(1+y)^{t_i}} \tag{10}$$

и изменим ставку доходности на величину k, тогда:

$$P(y+k) = \sum_{i=1}^{n} \frac{C_i}{(1+y+k)^{t_i}} \quad . \tag{11}$$

Относительное приращение стоимости облигации при изменении процентных ставок на величину k равно:

$$\frac{P(y+k)-P(y)}{P(y)} = \frac{\sum_{t=1}^{n} \frac{\text{C}_t}{(1+y+k)^t} - \sum_{t=1}^{n} \frac{\text{C}_t}{(1+y)^t}}{\sum_{t=1}^{n} \frac{\text{C}_t}{(1+y+k)^t}}. \qquad (12)$$

Считая k достаточно малым по абсолютной величине, получим по формуле Тейлора:

$$P(y+k) - P(y) \approx P'(y) \cdot k \qquad (13)$$

Или, если раскладывать до второго порядка:

$$P(y+k) - P(y) \approx P'(y) \cdot k + \frac{1}{2} P''(y) \cdot k^2 \qquad (14)$$

Стоит учитывать, что члены второго порядка изменения цены будут не существенными при работе с небольшими суммами денег.

Раскроем производные и получим:

$$P'(y) = -\frac{1}{(1+y)} \sum_{i=1}^{n} t_i \frac{\text{C}_i}{(1+y)^{t_i}} = D \qquad (15)$$

$$P''(y) = -\frac{1}{(1+y)^2} \sum_{i=1}^{n} t_i^2 + t_i \frac{\text{C}_i}{(1+y)^{t_i}} \qquad (16)$$

Тогда получается, что:

$$\frac{P'(y)}{P(y)} = -\frac{D}{1+y} \qquad (17)$$

Также введем новое понятие – выпуклость.

Если мы возьмем доходности и по формулам (10) и (11) посчитаем цену, то увидим, что реальная кривая доходности выглядит иначе чем прямая. Если мы оцениваем сдвиг дюрации на небольшую величину, ошибка будет не велика, но если мы оцениваем на большую величину, то расход будет существенный.

Чтобы устранить этот эффект используют выпуклость (кривизну), которая является второй производной от величины расчета цены облигации

Если дюрация – мера риска первого порядка, то при одинаковой дюрации облигации нужен еще какой-то параметр – мера риска второго порядка. Им и будет выпуклость. Чем больше колебание цен на рынке, тем больше выпуклость, поэтому стоит выбрать бумагу с наименьшей выпуклостью как менее рискованную.

Так как выпуклость производная второго порядка, то ее формула берётся из второй производной по аналогии с дюрацией:

$$P''(y) = -\frac{1}{(1+y)^2}\sum_{i=1}^{n} t_i^2 + t_i \frac{C_i}{(1+y)^{t_i}} = \sum_{i=1}^{n} \cancel{t_i(} \frac{Conv}{(1+y)^2} \quad . \tag{18}$$

Тогда выпуклость будет равна:

$$Conv = \sum_{i=1}^{n} t_i^2 + t_i \frac{C_i}{P(y)} = \sum_{i=1}^{n} t_i(t_i + 1)\frac{C_i}{P(y)} \quad . \tag{19}$$

Подставим формулу выпуклости (19) и дюрации в формулу (14):

$$P'(y) \cdot k + \frac{1}{2}P''(y) \cdot k^2 \approx -D\frac{k}{1+y} + \frac{1}{2}Conv\left(\frac{k}{1+y}\right)^2 \quad . \tag{20}$$

«Так как чувствительность цены облигации к изменению процентных ставок характеризуется величиной $\frac{P(y+k)-P(y)}{P(y)}$ то можно сделать вывод, что дюрация показывает, как цена облигации измениться с изменением процентых ставок. А значит если увеличивается дюрация, то увеличивается риск. Следовательно, дюрация является показателем риска облигации.

А так как выпуклость в этой формуле делает показания более точными, то ей не следует пренебрегать» [1].

Также стоит заметить, чем большее выпуклость, тем больше она влияет на получившиеся изменение стоимости облигации, тем меньше влияние дюрации. Из этого следует, что выпуклость показывает на сколько точно дюрация будет измерять относительное приращение стоимости облигации при изменении процентных ставок.

1.5 Математические методы уменьшения рисков. Иммунизация

Существует еще одно свойство облигации, которое поможет нам снизить риски с помощью дюрации.

Иммунизация является способом уменьшения рисков, минимизируя влияние процентных ставок на чистую стоимость с течением времени.

Используя этот метод, инвестор может гарантировать максимально низкое влияние ставок на стоимость своего портфеля.

Например, нас устраивает доходность по инвестиции

Мы вкладываем сумму (950р) на срок 4,29 года. И после вложение, цена на облигацию упала, то есть выросла доходность.

Тогда мы можем посчитать доход инвестора от покупки такой облигации на срок равный дюрации:

$$FV_0 = Price_0 \times (1 + y_0)^D = 950 \times (1 + 0{,}929)^{4{,}29} = 1391{,}29 \qquad (21)$$

Что происходит в дальнейшем

Представим, что мы купили облигацию, и цена на нее упала. В моменте мы потеряем 950-828р = 122р

Но тогда мы реинвестируем купоны под ставку 12.89 т.е доходность вырастет доходность на 3.6%

Посчитаем, сколько мы заработаем на этом.

$$FV_1 = Price_1 \times (1 + y_1)^D = 950 \times (1 + 0{,}1289)^{4{,}29} = 1392{,}54 \qquad (22)$$

Т.е не важно, что мы проиграли в моменте, потому что за счет реинвестиции мы заберем тот же доход за 4,29 года

Посчитаем, что будет если доходность упадет на 3.6%

$$FV_2 = Price_2 \times (1 + y_2)^D = 950 \times (1 + 0{,}0569)^{4{,}29} = 1392{,}57 \qquad (23)$$

Цена облигации	Изменение процентной ставки	Новая доходность к погашению	Дюрация	Сумма полученная инвестором с учетом реинвестиций купонов
680	9,0%	18,29%		1399,046158
702	8,1%	17,39%		1397,584921
725	7,2%	16,49%		1396,273621
749	6,3%	15,59%		1395,113056
774	5,4%	14,69%		1394,104071
800	4,5%	13,79%		1393,247553
828	3,6%	12,89%		1392,544433
856	2,7%	11,99%		1391,995695
886	1,8%	11,09%		1391,602367
917	0,9%	10,19%		1391,365532
950	0,0%	9,29%	4,292385027	1391,286326
985	-0,9%	8,39%		1391,365939
1021	-1,8%	7,49%		1391,605619
1058	-2,7%	6,59%		1392,006674
1098	-3,6%	5,69%		1392,570475
1140	-4,5%	4,79%		1393,298457
1184	-5,4%	3,89%		1394,192121
1230	-6,3%	2,99%		1395,25304
1278	-7,2%	2,09%		1396,482858
1329	-8,1%	1,19%		1397,883296
1382	-9,0%	0,29%		1399,456153

Рисунок 1 - Таблица иммунизации

Если мы построим график, то увидим, что наша доходность(точка) является минимальной точкой на графике. Этот эффект составляет основополагающую идею надежных инвестицией.

Рисунок 2 - График иммунизации

График показывает нам, что вложив сумму в облигации на срок равный дюрации мы защищены от изменения ставок. Это и является главной целью инвестора.

1.6 Математическая модель портфеля облигаций

До этого рассматривались формулы для измерения доходности в отдельные облигации и сопутствующие с этим риски.

Теперь рассмотрим, как на основе этих данных будет формироваться портфель.

Портфель – все сделанные инвестиции. Туда могут входить ценные бумаги, недвижимость, сырьевые материалы, а также денежные средства и их эквиваленты.

Чтобы уменьшить риски вложений в портфеле, инвестиции принято диверсифицировать, то есть вкладывать в как можно больше различных отраслей, рынков или даже стран.

Например, можно купить облигации федерального займа в Европе, России и Америке. Акции компаний из IT-сферы, медицины, аграрной промышленности и т.д. Недвижимость в нескольких развивающихся странах. Это и будет диверсификацией, то есть мы распределим риски так, что стоимость наших инвестиций где-то будет падать, в тоже время где-то будет расти.

Допустим, у нас портфель состоящий из облигаций без кредитного риска. Но всегда существует процентный риск, который будет влиять на стоимость портфеля.

Рассчитаем члены потока платежей используя формулу:

$$R_i = \sum_{j=1}^{m} \frac{V_j}{P_j} C_j^i \tag{24}$$

Где:

$\frac{V_j}{P_j}$ — отношение суммы затраченной инвестором на цену в момент времени t=0

C_j^i- платеж по облигации в момент времени t_i

Есть две характеристики, для вычисления доходности портфеля:

Средневзвешенная портфеля:

$$y_{\text{ср}} = \sum_{j=1}^{m} x_j \, y_j \quad , \tag{25}$$

где:

$$x_j = \frac{V_j}{V} \tag{26}$$

является долей облигации вида j в портфеле.

y_j- их внутренняя доходность.

Внутренняя ставка доходности $y_{\text{р}}$ вычисляется из формулы:

$$V = \frac{R_1}{(1+r_{\text{р}})^{t_1}} + \ldots + \frac{R_n}{\left(1+r_{\text{р}}\right)^{t_n}} \; . \qquad (27)$$

Обе характеристики имеют недостатки. Средневзвешенная портфеля несет мало информации о потенциальной доходности, а внутренняя ставка доходности предполагает, что если одна облигация в портфеле держится 30 лет и все купоны реинвестируются по ставке $y_{\text{р}}$, то также делается со всем портфелем, чего почти не случается.

1.7 Формирования портфеля облигаций с заданным значением дюрации и наименьшим показателем выпуклости

Рассмотрим формулу дюрации и докажем, что дюрация и выпуклость портфеля являются средневзвешенными дюрацией и выпуклостью отдельных облигаций.

Согласно определению дюрации:

$$D_p = \frac{1}{V}\sum_{i=1}^{n} t_i \frac{R_i}{(1+r)^{t_i}} \; , \qquad (28),$$

где

$$R_i = \sum_{j=1}^{m} \frac{V_j}{P_j} C_j^i \; , \qquad (29)$$

то получим:

$$D_p = \frac{1}{V}\sum_{i=1}^{n} t_i \frac{R_i}{(1+r)^{t_i}} =$$

$$= \frac{1}{V}\sum_{i=1}^{n} t_i \frac{\sum_{j=1}^{m} \frac{V_j}{P_j} C_j^i}{(1+r)^{t_i}} =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \frac{V_j}{V}\left(\frac{1}{P_j}\sum_{i=1}^{n} t_i \frac{C_j^i}{(1+r)^{t_i}}\right) =$$

$$= \sum_{j=1}^{m} D_j x_j \tag{30}$$

где

$$x_j = \frac{V_j}{V} \tag{31}$$

– показывает долю облигаций j-го вида в портфеле

Таким же образом посчитаем выпуклость:

$$\frac{1}{V}\sum_{i=1}^{n} t_i(t_i+1) \frac{R_i}{(1+r)^{t_i}} =$$

$$= \frac{1}{V}\sum_{i=1}^{n} t_i(t_i+1) \frac{\sum_{j=1}^{m} \frac{V_j}{P_j} C_j^i}{(1+r)^{t_i}} =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \frac{V_j}{V}\left(\frac{1}{P_j}\sum_{i=1}^{n} t_i\,(t_i+1) \frac{C_j^i}{(1+r)^{t_i}}\right) = \sum_{j=1}^{m} \mathrm{C}onv_j x_j \tag{32}$$

Итого у нас получились следующие формулы:

$$D_p = \sum_{j=1}^{m} D_j x_j \tag{33}$$

$$Conv_p = \sum_{j=1}^{m} C_j x_j \tag{34}$$

Которые доказывают, что дюрация, как и выпуклость являются средневзвешенными дюрацией и выпуклостью отдельных облигаций.

При этом

$$minD_j < D_p < maxD_j \tag{35}$$

$$minConv_j < Conv_p < maxConv_j \tag{36}$$

Это означает, что дюрация и выпуклость портфеля являются средневзвешенными всех облигаций в портфеле

1.8 Сведение задачи формирования портфеля облигаций с заданным значением дюрации и наименьшим показателем выпуклости к задаче линейного программирования.

Так как показатели дюрации и выпуклость портфеля являются средневзвешенными облигаций из которых они состоят.

Из этого следует система, в которой можно задать значение дюраций и по нему составить портфель:

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{m} D_j x_j = D \\ \sum_{j=1}^{m} x_j = 1 \end{cases} \quad (37)$$

Если $D = D_z$, где $z \in \{1,2,3,\dots,m\}$, то следующие значения будут является набором решений

$$x_1 = 0, x_2 = 0, \dots, x_k = 1, x_{k+1} = 0, \dots, x_m = 0$$

В этом случае портфель облигаций будет состоять из облигаций одного и того же вида с заданным значением дюрации. Что удовлетворяет условию решения системы.

Рассмотрим другой вариант:

$$x_1 = 0, x_2 = 0, \dots, x_k = \frac{D_{k+1} - D}{D_{k+1} - D_k}, x_{k+1} = \frac{D - D_k}{D_{k+1} - D_k}, \dots, x_m = 0$$

Соответственно у нас будут два типа облигаций с разной долей в портфеле. Доля облигации будет зависеть от дюрации этого типа. Чем больше разность между дюрации облигации и заданной дюрацией, тем меньше ее доля в портфеле.

Как отмечено выше, выпуклость показывает на сколько большое влияние оказывает дюрация оказывает при расчете риска (см главу 1.5). Соответственно чем меньше выпуклость, тем лучше дюрация оценивает чувствительность портфеля к изменению цены.

Тогда мы получаем следующую задачу линейного программирования, смысл которой заключается в нахождении заданного числа дюрации портфеля, при наименьшем показателе выпуклости портфеля:

$$f = \sum_{j=1}^{m} Conv_j x_j \to min$$

$$
\begin{cases}
\sum_{j=1}^{m} D_j x_j = D \\
\sum_{j=1}^{m} x_j = 1
\end{cases}
\quad (38)
$$

«Действительно, для разрешимости задачи линейного программирования необходимо и достаточно, чтобы множество допустимых решений задачи было не пусто, а целевая функция ограничена снизу на множестве допустимых решений задачи. Если число D удовлетворяет двойному неравенству,

$$
minD_j < D_p < maxD_j \quad (39)
$$

то множество допустимых решений задачи не пусто.

Это поможет нам составить задачу по иммунизации всего портфеля облигаций. Для этого необходимо, чтобы дюрация портфеля была равна временному горизонту портфеля. Если временной горизонт портфеля равен Q, тогда для решения задачи необходимо решить задачу линейного программирования» [1]:

$$
f = \sum_{j=1}^{m} Conv_j x_j \rightarrow min
$$

$$
\begin{cases}
\sum_{j=1}^{m} D_j x_j = T \\
\sum_{j=1}^{m} x_j = 1
\end{cases}
\quad (40)
$$

После решения этой задачи у нас будет иммунизированный портфель, то есть стоимость портфеля V увеличиться как минимум на $V(1+y)^T$, и он будет защищен от изменения процентных ставок на рынке.

1.9 Управление портфелем облигаций в стратегии иммунизации

Если инвестору необходимо обладать суммой V через T лет, то он должен вкладывать сбережения в облигации, которые будут через T лет стоить X не зависимо от изменений процентной ставки. То есть он должен собрать портфель из облигаций, дюрация которых будет составлять T. Но в период t = [0;T] дюрация потоков может изменяться. Поэтому портфель требуется корректировать с продолжительностью времени.

Чтобы достичь этой цели необходимо купить портфель из m видов облигаций на сумму V и чтобы его дюрация совпадала с инвестиционным периодом T. При этом, чтобы увеличить влияние дюрации мы должны выбрать облигации с наименьшим показателем выпуклости.

$$f = \sum_{j=1}^{m} Conv_j x_j \rightarrow min$$
$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{m} D_j x_j = T \\ \sum_{j=1}^{m} x_j = 1 \end{cases} \quad (41)$$

при этом $x_j \geq 0, j = 1,2,3 \dots, m$

По одному из свойств портфеля если

$$minD_j < T < maxD_j \quad , \quad (42)$$

то система (41) имеет решение.

В момент времени $t = t_0$ будет собран портфель Π_0 планируемая стоимость которого будет равняться:

$$V_0 = V(1+y)^T \tag{43}$$

Допустим после формирования портфеля процентные ставки изменились, но согласно свойству иммунизации:

$$V(y_1) \geq V(y) \tag{44}$$

Значит наш портфель будет иммунизирован до момента времени t_1, то есть до следующего года.

В момент времени t_1,через год нужно пересобрать портфель так, чтобы дюрация составляла Т-1, чтобы портфель оставался иммунизирован. Так как дюрация облигаций зависит от времени, оставшегося до погашения, и нового уровня доходности.

В этот же момент поступает первый платеж, и инвестор располагает денежной суммой R_1^0 и портфелем стоимостью:

$$\mathrm{V} = \sum_{i=2}^{n} \frac{R_i^0}{(1+r)^{t_i - t_1}}\ . \tag{45}$$

Теперь нужно сформировать новый портфель который удовлетворяет следующей условиям:

Найти такой показатель дюрации, который будет равен периоду $T - t_1$, при наименьшем значении выпуклости.

$$f = \sum_{j=1}^{m} Conv_j x_j \rightarrow min$$

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{m} D_j x_j = T - t_1 \\ \sum_{j=1}^{m} x_j = 1 \end{cases} \tag{46}$$

, часть облигаций из портфеля придется продать и часть докупить. Также мы реинвестируем первый поступивший к нам платеж R_1^0. При этом планируемая стоимость инвестиции не меняется. И портфель останется иммунизированным до момента времени t_2 даже при изменении ставок

Через два года дюрация должна составлять Т-2 и т.д.

Если в какой-то момент времени нельзя сформировать портфель с требуемой дюрацией, то имеющийся портфель продается, а все вырученные средства инвестируются под действующую на данный момент процентную ставку до окончания срока Т.

К концу периода накопленная стоимость будет составлять $V(1+y)^T$ и цель инвестора будет достигнута.

Итого, в первой главе были рассмотрены и изучены математические методы анализа инвестиций, формирования портфеля и уменьшения портфельных рисков с помощью иммунизации портфеля от изменения процентных ставок. А также было рассмотрено сведение задачи формирование портфеля облигаций с заданным значением дюрации и наименьшим значением выпуклости к задачи линейного программирования и как это можно использовать.

Глава 2. Разработка и пример алгоритма для построения иммунизированного портфеля облигаций

2.1 Математическое моделирование решения задачи формирования портфеля облигаций с заданным значением дюрации и наименьшим показателем выпуклости

Разберем метод линейного программирования для решения задачи формирования портфеля облигаций с заданным значением дюрации и наименьшим показателем выпуклости.

Линейное программирование-это метод оптимизации, позволяющий максимизировать (или минимизировать) целевую функцию:

$$f = c_1x_1 + \cdots + c_nx_n,$$

в данной математической модели с набором требований, представленных в виде линейных соотношений подчиняется набору ограничений, выраженных в виде неравенств:

$$a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n \leq b_1$$
$$a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n \leq b_m$$
$$\text{При } x_i \geq 0$$

a_i, b_i и c_i являются константами, определяемыми возможностями, потребностями, затратами. Основное предположение при применении этого метода состоит в том, что различные отношения между спросом и доступностью линейны; то есть ни один из x_i не возведен в степень, отличную от 1. Для того чтобы получить решение этой задачи, необходимо найти решение системы линейных неравенств (то есть множества n значений переменных x_i что одновременно удовлетворяет всем неравенствам). Затем целевая функция вычисляется путем подстановки значений x_i в равенство, определяющее f.

2.2 Алгоритм формирования иммунизированного портфеля облигаций с заданным значением дюрации и наименьшим показателем выпуклости с помощью линейного программирования

Сведем задачу формирования портфеля облигаций с заданным значением дюрации и наименьшим показателем выпуклости к задаче ЛП и сформируем портфель на основании формул 36, 37 и 38.

Нам даны облигации двух видов, характеристики которых, в момент времени t=0, приведены в таблице 1:

Таблица 1 – Характеристики облигаций.

Вид облигации A_j	Номинал облигации N, д.е	Купонная ставка g	Кол-во купонных выплат в год p	Срок до погашения T
A_1	100	11%	1	2
A_2	100	13%	1	4

Инвестор формирует портфель облигаций стоимостью 1000 д.е. с инвестиционным горизонтом 3 года. Рассчитать стратегию иммунизации этого портфеля для следующего изменения процентных ставок: 9% годовых сразу после формирования портфеля, 8 % годовых – непосредственно после момента t = 1.

Таблица 2 - Характеристики портфеля.

Сумма инвестиции (д.е.)	V	1000 д.е
Срок инвестиции (годы)	T	3 года
Рыночная ставка для всех сроков в момент 0	r	8%
Рыночная ставка для всех сроков сразу после 0	r_1	9%
Рыночная ставка для всех сроков сразу после 1	r_2	8%

Шаг 1. Формирование иммунизированного портфеля облигаций.

Рыночная ставка r в момент формирования портфеля облигаций равна 8%.

Вычислим цену по формуле (4), дюрацию по формуле (8) и выпуклость облигаций по формуле (19) A_1 и A_2.

Для A_1:

$$P_1^0 = \frac{C_1}{(1+y)^1} + \frac{C_2}{(1+y)^2} + \frac{C_3}{(1+y)^3} + \cdots + \frac{C_n}{(1+y)^n} = \frac{11}{1{,}08^1} + \frac{111}{1{,}08^2} = \\ = 105{,}35$$

$$D_1^0 = \sum t_i \frac{C_i}{P(y)} = \frac{1 \cdot 11}{105{,}35} + 2 \cdot \frac{111}{105{,}35} = 1{,}90$$

$$Conv_1^0 = \sum t_i(t_i + 1) \frac{C_i}{P(y)} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 11}{105{,}35} + \frac{2 \cdot 3 \cdot 11}{105{,}35} = 5{,}61$$

Для A_2:

$$P_2^0 = \frac{\text{C}_1}{(1+y)^1} + \frac{\text{C}_2}{(1+y)^2} + \frac{\text{C}_3}{(1+y)^3} + \dots + \frac{\text{C}_n}{(1+y)^n} =$$

$$= \frac{10}{1{,}08^1} + \frac{10}{1{,}08^2} + \frac{10}{1{,}08^3} + \frac{110}{1{,}08^4} = 116{,}56$$

$$D_2^0 = \sum t_i \frac{C_i}{P(y)} = \frac{1 \cdot 10}{116{,}56} + \frac{2 \cdot 10}{116{,}56} + \frac{3 \cdot 10}{116{,}56} + \frac{4 \cdot 110}{116{,}56} = 3{,}41$$

$$Conv_2^0 = \sum t_i(t_i+1) \frac{C_i}{P(y)} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 10}{116{,}56} + \frac{2 \cdot 3 \cdot 10}{116{,}56} + \frac{3 \cdot 4 \cdot 10}{116{,}56} + \frac{4 \cdot 5 \cdot 110}{116{,}56} =$$

$$= 16{,}09$$

Шаг 2. На основании главы 1.8 сформируем портфель дюрация которого равна 3 годам, для этого решим задачу ЛП:

Используя формулу (36):

$$f = 5{,}61x_1 + 16{,}09x_2 \rightarrow min$$

$$\begin{cases} 1{,}9x_1 + 3{,}41x_2 = 3, \\ x_1 + x_2 = 1 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Так как решение будет найдено если условие из формулы (37) выполнено, то проверим это условие

$$minD_j < D < maxD_j$$

Или в нашем случае:

$$1{,}9 < 3 < 3{,}41$$

То из главы 1.8 мы знаем решение:

$$x_1 = 0, x_2 = 0, \dots, x_k = \frac{D_{k+1} - D}{D_{k+1} - D_k}, x_{k+1} = \frac{D - D_k}{D_{k+1} - D_k}, \dots, x_m = 0$$

Тогда:

$$x_1^0 = \frac{3{,}41 - 3}{3{,}41 - 1{,}9} = 0{,}2715 - \text{доля в портфеле первого вида облигаций}$$

$$x_2^0 = \frac{3 - 1{,}9}{3{,}41 - 1{,}9} = 0{,}7285 - \text{ доля в портфеле второго вида облигаций}$$

Таким образом сформированный портфель будет выглядеть так:

$$\Pi_0 = \Pi(V_1^0, V_2^0).$$

Его стоимость будет равно 1000 д.е, а сумма инвестиций (по формуле 32) будет равна:

$$V_1^0 = x_1^0 V = 271{,}5 \text{ д. е},$$

$$V_2^0 = x_2^0 V = 728{,}5 \text{ д. е.}$$

Дюрация портфеля совпадает с его инвестиционным горизонтом и равна 3 годам, так как мы решили задачу линейного программирования с таким условием.

Шаг 3. Вычислим поток платежей (по формуле 29).

$$R_1 = \frac{271{,}5}{105{,}35} \cdot 11 + \frac{728{,}5}{116{,}56} \cdot 13 = 109{,}598$$

$$R_2 = \frac{271,5}{105,35} \cdot 110 + \frac{728,5}{116,56} \cdot 13 = 367,311$$

$$R_3 = \frac{728,5}{116,56} \cdot 13 = 81,25$$

$$R_4 = \frac{728,5}{116,56} \cdot 113 = 706,25$$

Шаг 4. Проверка иммунизации портфеля.

Сразу после формирования портфеля процентные ставки выросли на один процент и стали равны 9%. Проверим, иммунизирован ли портфель.

Планируемая стоимость инвестиции равна:

$$V^0 = 1000 * 1,08 = 1259,712$$

Фактическая стоимость (по формуле 5) инвестиции равна:

$$V^{*0} = 109,598 * (1,09)^2 + 367,311 * 1,09 + 81,25 +$$
$$+ \frac{706,25}{1,09} = 1259,767$$

Так как

$$V^{*0} > V^0$$

То портфель Π_0- иммунизирован от изменения процентных ставок до переформирования портфеля

Шаг 5. Проверить совпадает ли дюрация с горизонтом инвестирования после поступления первого платежа.

После первого срока поступает первый платеж. Стоимость инвестиции в портфель в этот момент равна:

$$V^0 = 109{,}598 + \frac{367{,}311}{1{,}09} + \frac{81{,}25}{(1{,}09)^2} + \frac{706{,}25}{(1{,}09)^3} = 1060{,}335$$

Эта стоимость складывается из первого платежа $R_1 = 109{,}598$ и портфеля стоимостью:

$$\frac{367{,}311}{1{,}09} + \frac{81{,}25}{(1{,}09)^2} + \frac{706{,}25}{(1{,}09)^3} = 950{,}737$$

Посчитаем дюрацию облигаций после первой выплаты (по формуле 15):

$$D_1^1 = \sum t_i \frac{C_i(0)}{P(y)} = \frac{102{,}7778}{102{,}7778} = 1$$

$$D_2^1 = \sum t_i \frac{C_i}{P(y)} = \frac{1 \cdot 13}{105{,}35} + \frac{2 \cdot 13}{105{,}35} + \frac{3 \cdot 113}{105{,}35} = 2{,}69$$

Дюрация портфеля (по формуле 31) будет равна:

$$D_p = 0{,}2715 * 1 + 0{,}7285 * 2{,}69 = 2{,}23$$

Инвестиционный горизонт в данный момент равен 2.

Так как инвестиционный горизонт не совпадает с дюрацией портфеля, то для его иммунизации портфель необходимо сформировать заново.

Шаг 6. Сформировать новый портфель (если дюрация и инвестиционный горизонт не равны)

Заново пересчитаем выпуклость и цену

$$P_1^1 = \frac{111}{1{,}09^1} = 102{,}7778$$

$$P_2^1 = \frac{13}{1{,}09^1} + \frac{13}{1{,}09^2} + \frac{113}{1{,}09^3} = 112{,}55$$

$$Conv_1^1 = \sum t_i(t_i + 1)\frac{C_i}{P(y)} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 11}{102{,}7778} = 2$$

$$Conv_2^1 = \sum t_i(t_i + 1)\frac{C_i}{P(y)} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 13}{112{,}55} + \frac{2 \cdot 3 \cdot 13}{112{,}55} + \frac{3 \cdot 4 \cdot 113}{112{,}55} = 10{,}34$$

Составим и решим задачу линейного программирования

$$f = 2x_1 + 10{,}34 \rightarrow min$$

$$\begin{cases} x_1 + 2{,}69x_2 = 2, \\ x_1 + x_2 = 1 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Так как

$$minD_j < \ 2 < maxD_j$$

Тогда:

$$x_1^1 = \frac{2{,}69 - 2}{2{,}69 - 1} = 0{,}408 - \text{доля в портфеле первого вида облигаций}$$

$$x_2^1 = \frac{2-1}{2{,}69-1} = 0{,}592 - \text{ доля в портфеле второго вида облигаций}$$

Таким образом сформированный портфель будет выглядеть так:

$$\Pi_1 = \Pi(V_1^1, V_2^1)$$

Его стоимость будет равно 1060,335 д.е, а сумма инвестиций будет равна:

$$V_1^1 = x_1^1 V = 432{,}617 \text{ д.е}$$

$$V_2^1 = x_2^1 V = 627{,}718 \text{ д.е}$$

Дюрация портфеля совпадает с его инвестиционным горизонтом и равна 2 годам.

Шаг 7. Посчитаем поток платежей в данный момент времени.

$$R_1 = \frac{102{,}7778}{432{,}617} \cdot 111 + \frac{112{,}55}{627{,}718} \cdot 13 = 539{,}73$$

$$R_2 = \frac{112{,}55}{627{,}718} \cdot 13 = 72{,}504$$

$$R_3 = \frac{112{,}55}{627{,}718} \cdot 113 = 630{,}228$$

Шаг 8. Проверка иммунизации портфеля.

Сразу после формирования портфеля процентные ставки выросли на один процент и стали равны 9%. Проверим, иммунизирован ли портфель.

Планируемая стоимость инвестиции равна:

$$V^1 = 1060{,}335 * (1{,}09)^2 = 1259{,}784$$

Фактическая стоимость инвестиции равна:

$$V^{*1} = 539{,}73 * 1{,}08 + 72{,}504 + \frac{630{,}228}{1{,}08} = 1259{,}827$$

Так как

$$V^{*1} > V^1$$

То портфель Π_1- иммунизирован от изменения процентных ставок до переформирования портфеля

Стоит заметить, что при переформировании портфеля мы учитываем реинвестицию полученного платежа за первый период.

Обозначим денежные суммы затраченные на реинвестицию как v_i и e_i. Тогда облигаций первого вида куплено:

$$\frac{V_1^1}{P_1^1} - \frac{V_1^0}{P_1^0} = \frac{432{,}617}{102{,}7778} - \frac{271{,}5}{105{,}35} = 1{,}632$$

На сумму $v_1 = 1{,}632 * 105{,}35 = 171{,}9312$

Облигаций второго вида продано:

$$\frac{V_2^0}{P_2^0} - \frac{V_2^1}{P_2^1} = \frac{728{,}5}{116{,}56} - \frac{627{,}718}{112{,}55} = 0{,}67$$

На сумму $e_2 = 0{,}67 * 112{,}55 = 75{,}4085$

Поступивший платеж равен R_1^0=109,598. Тогда:

$$v_1 = R_1^0 + e_2$$

- затраты равны поступлениям. Следовательно, переформирование портфеля облигаций в момент t =1 происходит следующим образом. На поступивший платеж R_1^0 и выручку от продажи части облигаций одного вида покупаются облигации другого вида.

От портфеля Π_1 поступает платеж R_1^1 = 539,73 д.е. Облигация A_1 погашена. На рынке действует ставка r = 0,04.

Дюрация портфеля Π_1 в момент t = 2 равна 1 D_1 = 1,89 – дюрации облигаций A_2 , оставшихся в портфеле.

Инвестиционный горизонт портфеля Π_1 в момент t = 2 равен 1 году. Так как дюрация портфеля не совпадает с его инвестиционным горизонтом, портфель необходимо переформировать.

Однако из облигаций A_2 нельзя сформировать портфель с дюрацией, равной 1 году. Портфель продается.

Стоимость инвестиции в портфель Π_1 в момент t = 2:

$$V^1 = 1060{,}335 * (1{,}09)^2 = 1259{,}784$$

Фактическая стоимость инвестиции равна:

$$V^{*1} = 582{,}9084 + \frac{72{,}504}{1{,}08} + \frac{583{,}54}{1{,}08^2} = 1166{,}507 \text{ д. е}$$

В момент t = 2 инвестор располагает суммой 582,9084 д.е. и облигациями вида A_2 стоимостью

$$\frac{72{,}504}{1{,}08} + \frac{583{,}54}{1{,}08^2} = 615{,}907 \text{ д. е}$$

После продажи облигаций вся вырученная сумма инвестируется на 1 год (например, вкладывается на банковский счет) под действующую ставку 8% годовых. Через год можно получить сумму

$$1166{,}507(1 + 0{,}08) = 1259{,}827.$$

Таким образом, в результате осуществления стратегии иммунизации инвестор через 3 года получит сумму 1259,827 д.е., которая больше планируемой с самого начала суммы, равной 1259,712 д.е.

Итого, в данной главе была решена задача формирования портфеля облигаций с заданным значением дюрации и наименьшим показателем выпуклости, с последующим сведением ее к задаче линейного программирования, а также был приведен пример иммунизации портфеля.

Глава 3. Программная реализация

В этой главе будет создан алгоритм и написан программный код для решения задачи формирования портфеля облигаций с заданным значением дюрации и наименьшим показателем выпуклости.

Программная реализация будет выполнена в программе Matlab r2019.

Перед программной реализацией построим блок-схему программы.

Общий алгоритм изображен на рисунках 3 и 4 и основан на алгоритме из главы 2.

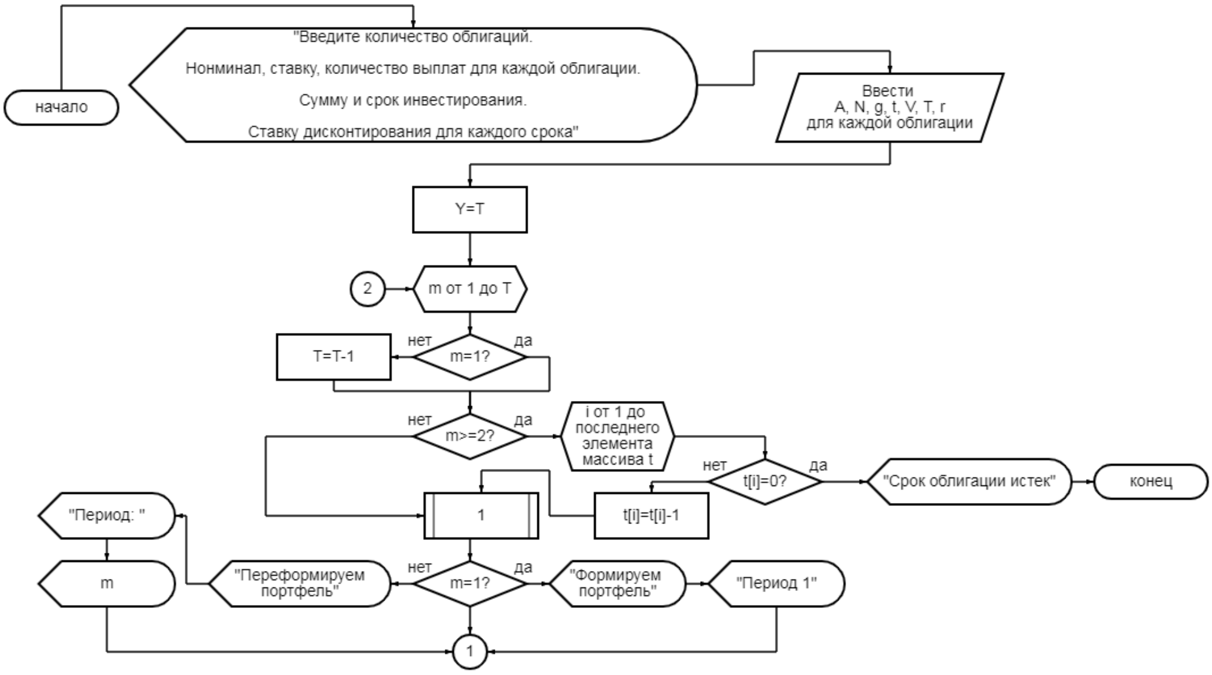


Рисунок 3 – Первая часть блок-схемы

На рисунке 3:

A – Количество облигации;

N – Номинал облигации;

g – Купонная ставка облигации;

t – Срок выплаты облигации;

V – Сумма инвестиций;

T – Срок инвестирования;

r – Ставка дискретизации на каждый год инвестирования.

В этой части блок-схемы мы вводим выше изложенные переменные, затем ведем еще две переменные:

Y – Константа равная сроку инвестирования;

m – переменная которая равна периоду инвестирования.

При первом проходе цикла программа будет формировать портфель облигаций, на основе веденных данных. При последующий проходах портфель будет переформировываться.

Проверяется условие, если срок погашения облигаций не равен нулю, то программа продолжает работу, иначе выводит соответствующую ошибку.

Также есть подпрограмма номер 1 в которой вычисляются количество, период и размеры выплат, кроме последней, для каждой облигации. Подробнее на рисунке 5

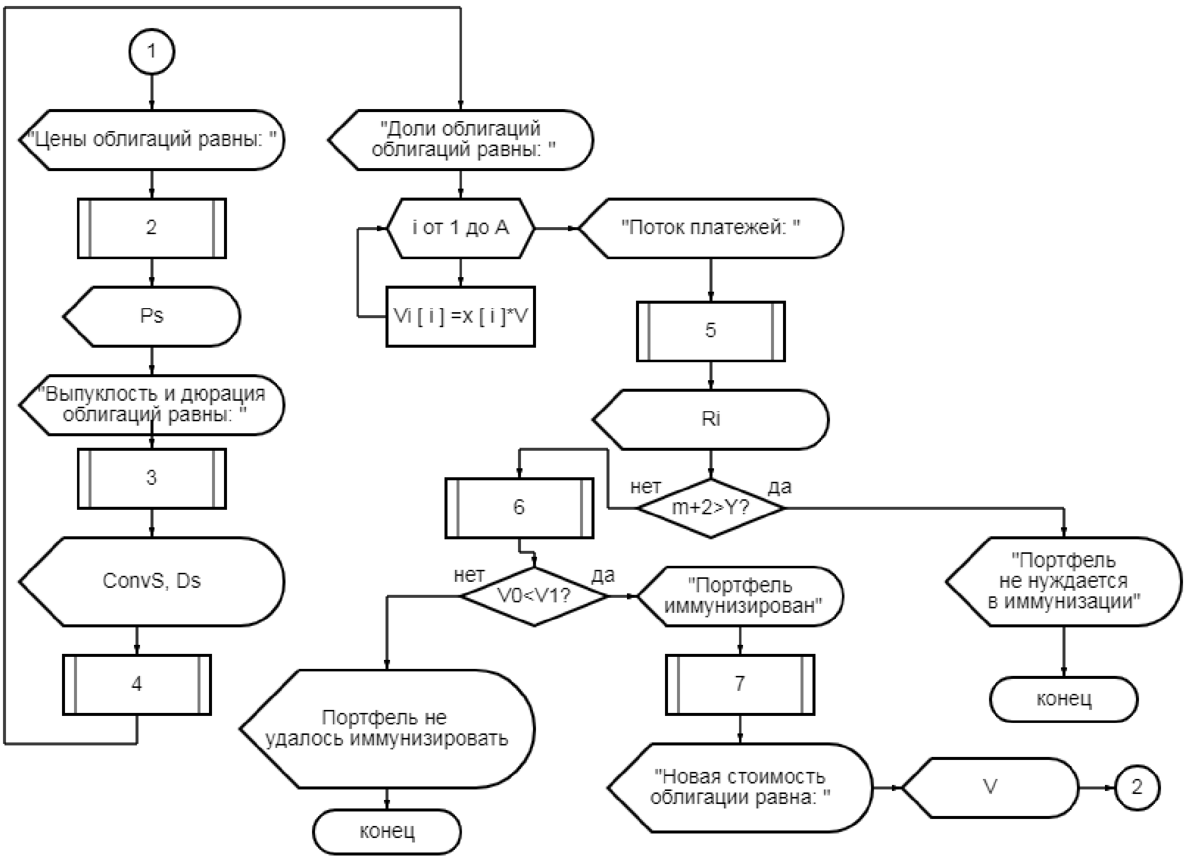


Рисунок 4 – Вторая часть блок-схемы

На рисунке 4:

Ps – Массив с ценой всех облигации в данный момент времени;

ConvS – Массив с выпуклостью всех облигаций в данный момент времени;

Ds - Массив с дюрацией всех облигаций в данный момент времени;

Vi - Массив с долей всех облигаций в данный момент времени;

Ri – Сумма платежей в данный момент времени;

V0 – Стоимость облигации в данный момент времени без изменения ставки дискретизации;

V1 – Стоимость облигации в данный момент времени с изменением ставки дискретизации;

V – Стоимость облигации в следующий момент времени.

Во второй части добавляются подпрограммы для:

2 – Расчета цены каждой облигации. Подробнее на рисунке 6;

3 – Расчеты дюрации и выпуклости каждой облигации. Подробнее на рисунке 7;

4 – Решения задачи линейного программирования. Подробнее на рисунке 8;

5 – Расчета потока платежей. Подробнее на рисунке 9;

6 – Расчета переменных V0 и V1. Подробнее на рисунке 10;

7 – Расчета переменной V. Подробнее на рисунке 11.

А также рассчитываются доли облигаций в портфеле по формуле 41.

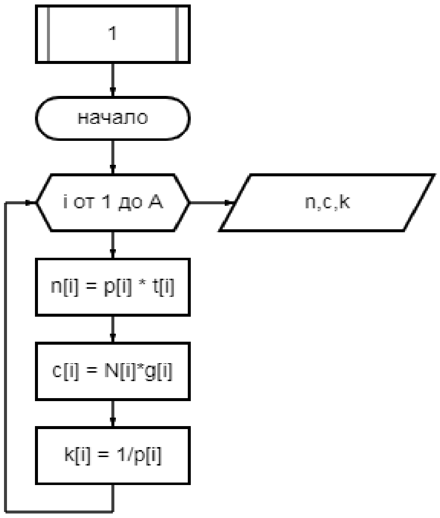


Рисунок 5 – Подпрограмма 1

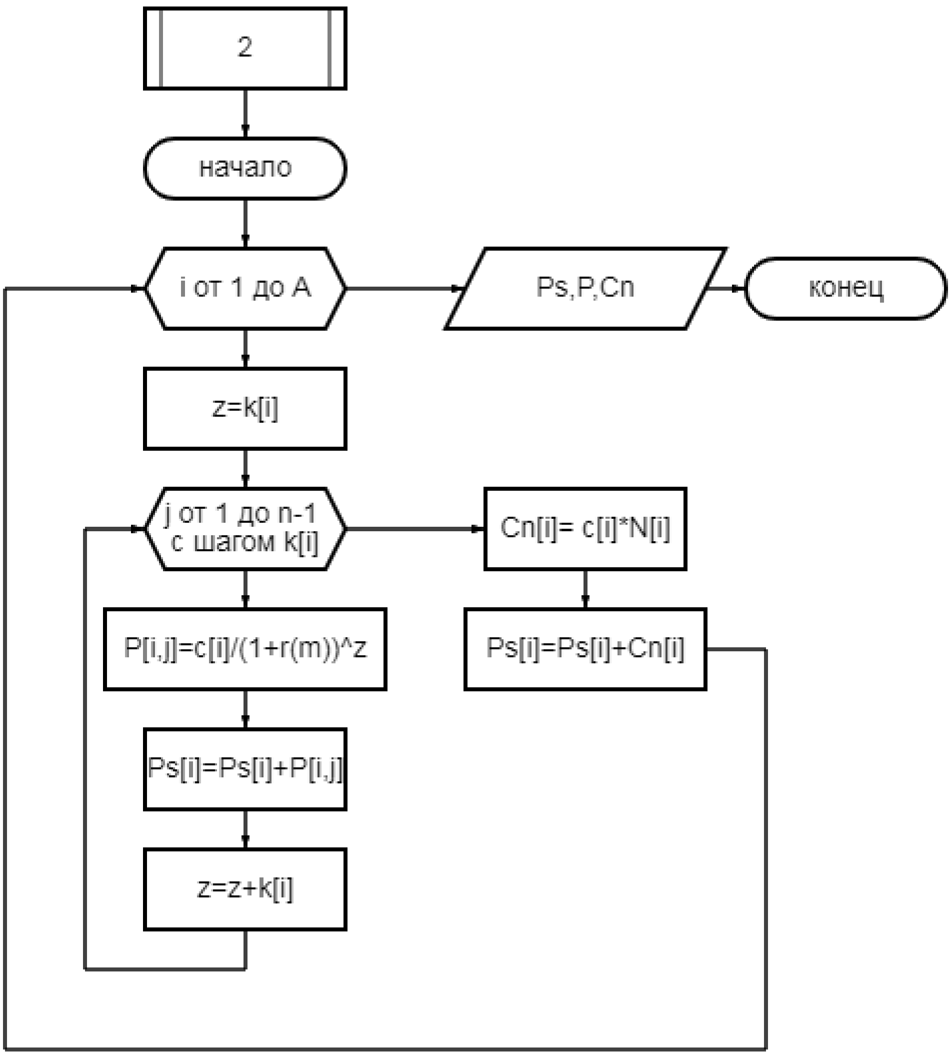


Рисунок 6 – Подпрограмма 2

В подпрограмме 2 и в следующих появляется переменная z изначально равная периоду выплаты. Нужна она для накопления степени с каждым шагом цикла. На каждом j-ом шаге цикла вычисляется j-ый член и суммируется с предыдущим членом для подсчета суммы цены по формуле 14.

После прохождения цикла, отдельно считается последний член суммы, так как для его расчета требуется к выплате прибавить номинал.

Перед завершением подпрограммы выводятся каждый член суммы цены и цена.

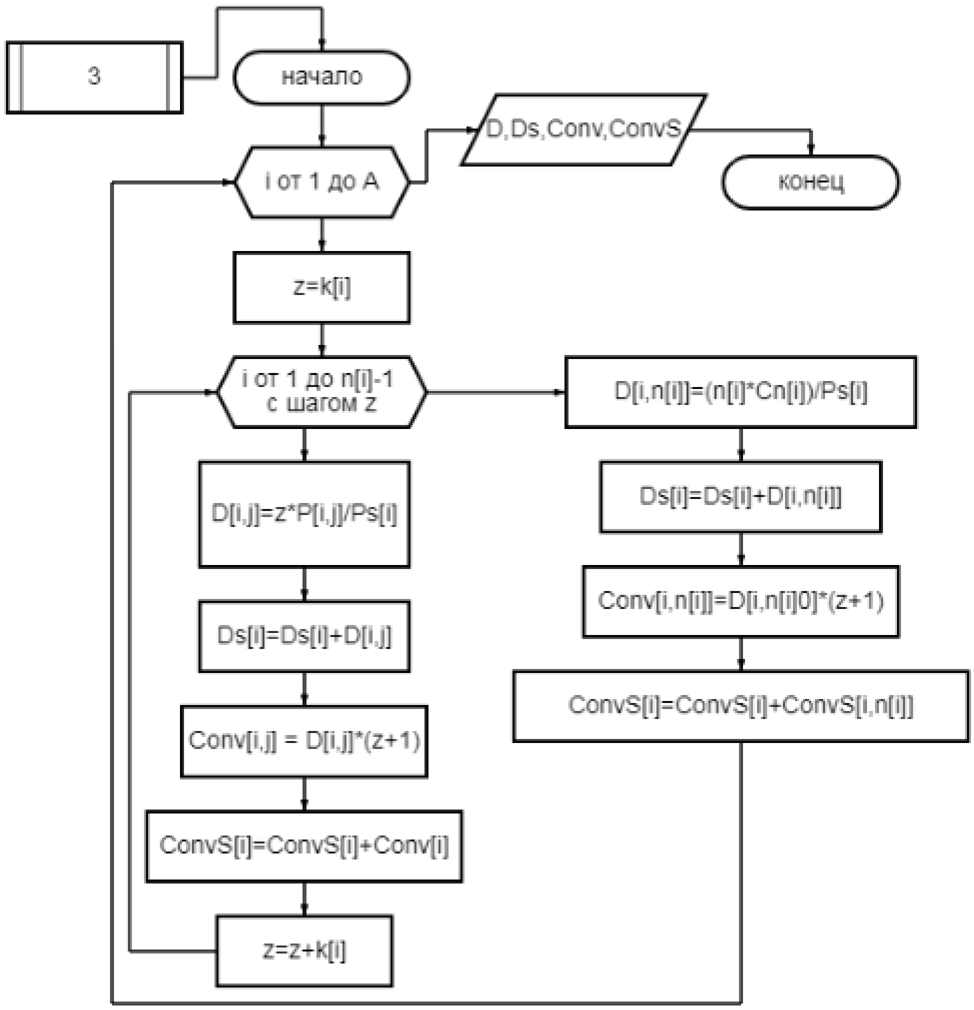


Рисунок 7 - Подпрограмма 3

В подпрограмме 3 цикл выполняется схожим образом с подпрограммой 2, но рассчитывает дюрацию по формуле 18 и выпуклость по формуле 29.

Перед завершением подпрограммы выводятся каждый член суммы дюрации и выпуклости, дюрация и выпулкость.

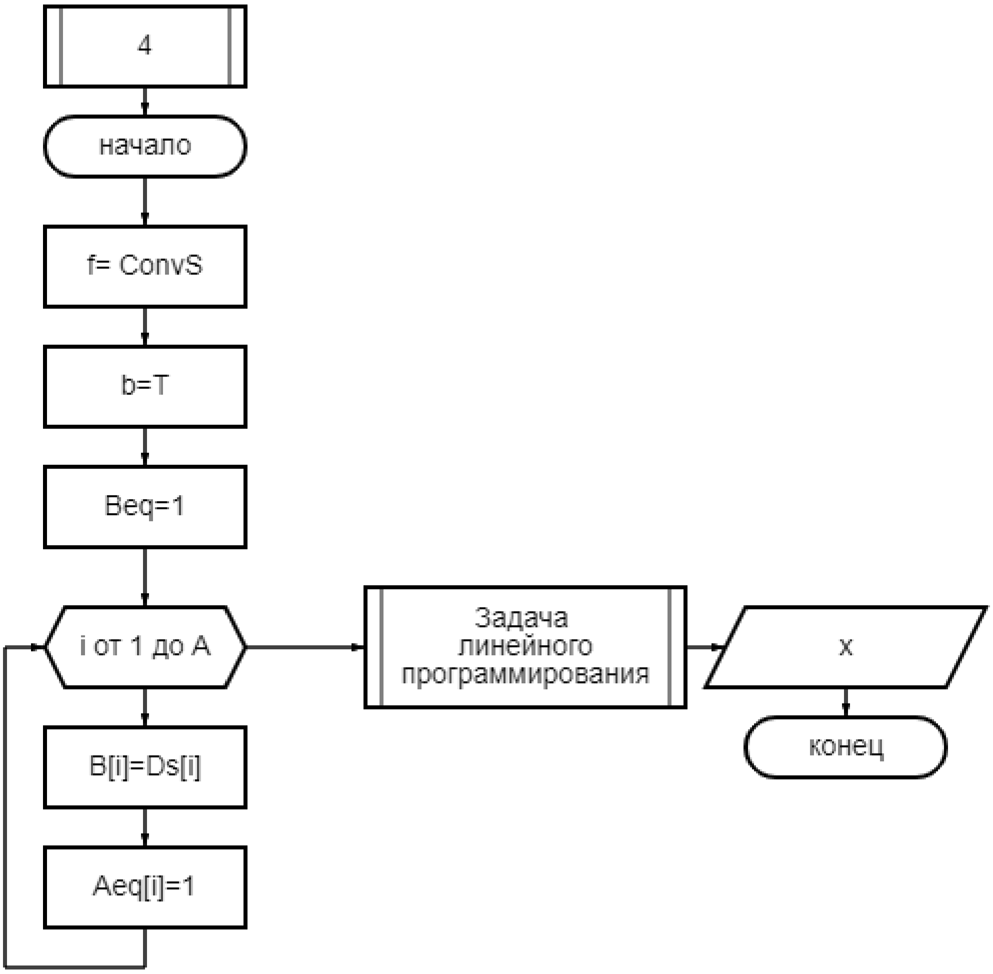


Рисунок 8 - Подпрограмма 4

В подпрограмме 4 для решения задачи линейного программирования задаются переменные по формуле 47:

f – представляет собой матрицу размерностью [A;1] каждый i-ой элемент, которой, равняется выпуклости i-ый облигации;

B – вектор, каждый i-ый элемент, которого, равняется дюрации i-ой облигации;

b – сумма уравнения

Aeq – вектор для условия:

$$x_1 + x_2 = 1$$

Beq – переменная которая равна сумме элементов из условия.

Затем решается задача линейного программирования и выводятся значения x для каждой облигации

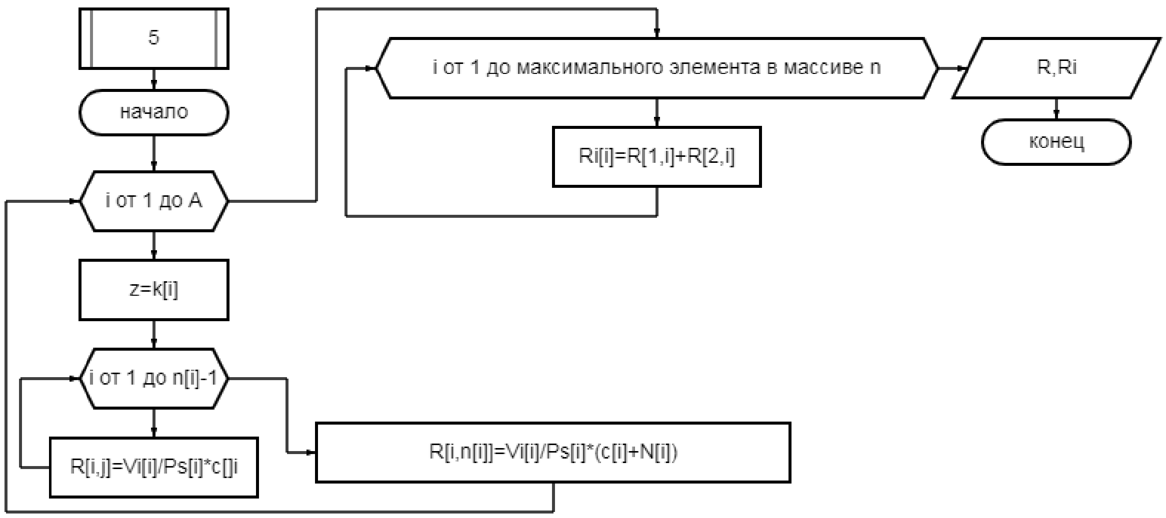


Рисунок 9 - Подпрограмма 5

В подпрограмме 5 рассчитывается поток платежей по формуле 39. Сначала рассчитывается каждая выплата, потом выплаты суммируются по периодам.

Перед завершением подпрограмма выводит вектор со всеми выплатами и вектор с суммой выплат за каждый период.

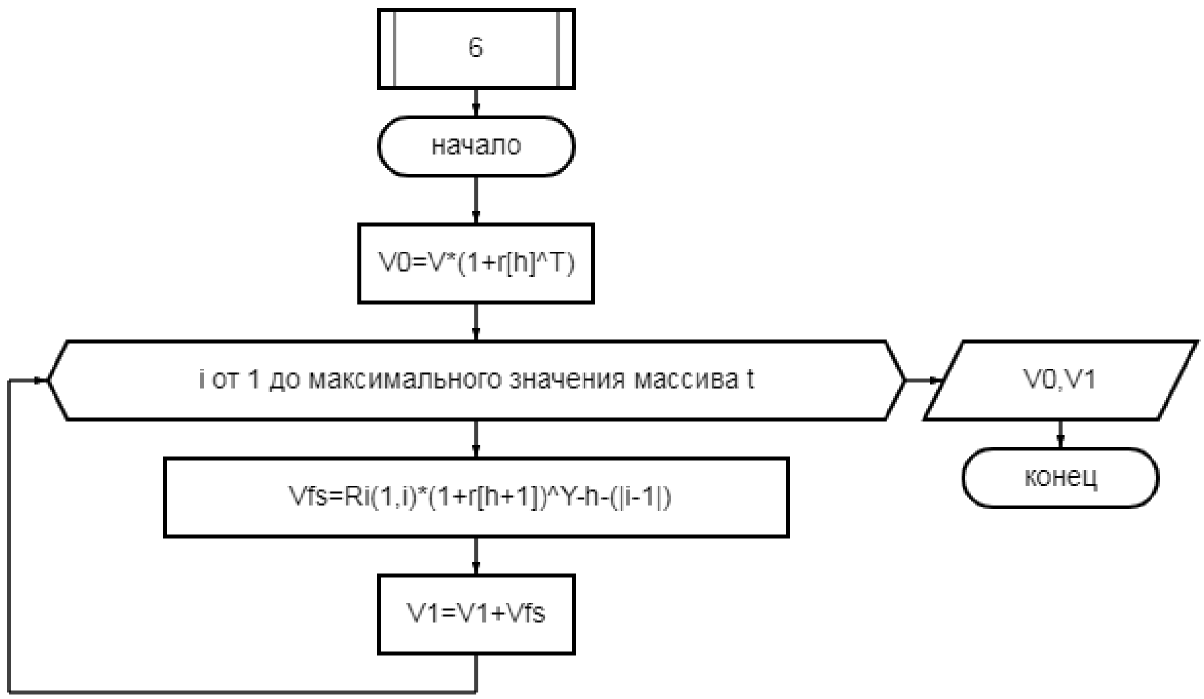


Рисунок 10 - Подпрограмма 6

В подпрограмме 6 рассчитываются переменные V0 и V1 по формуле 15. Они же и выводятся перед завершением.

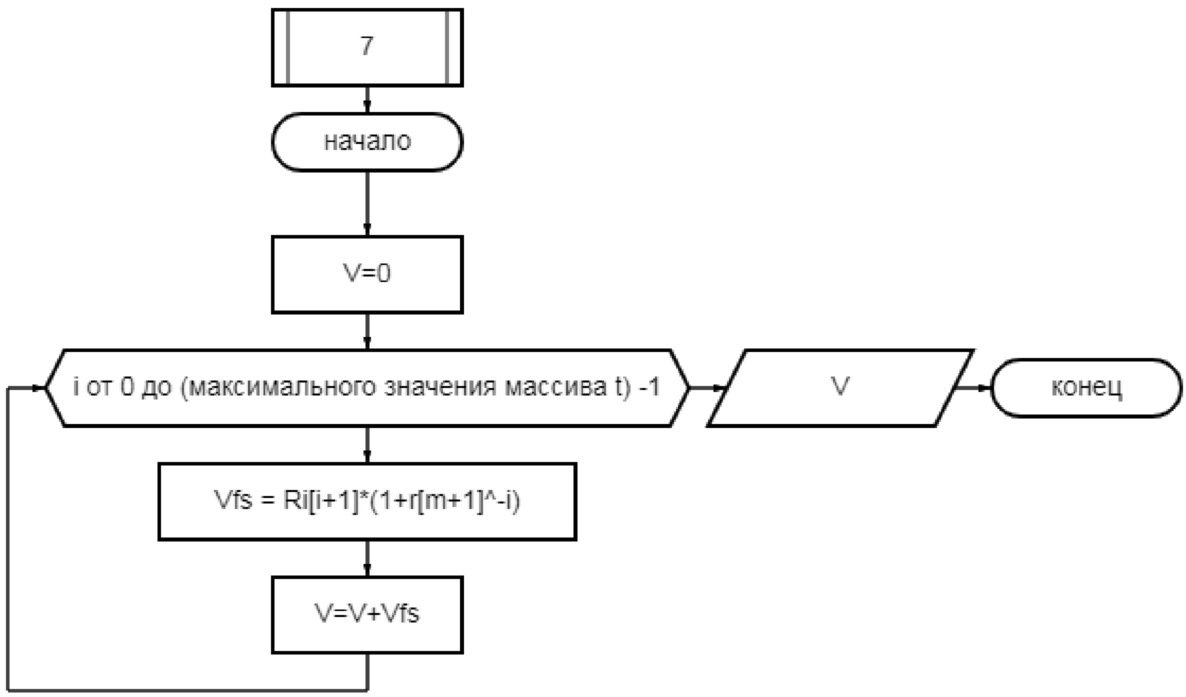
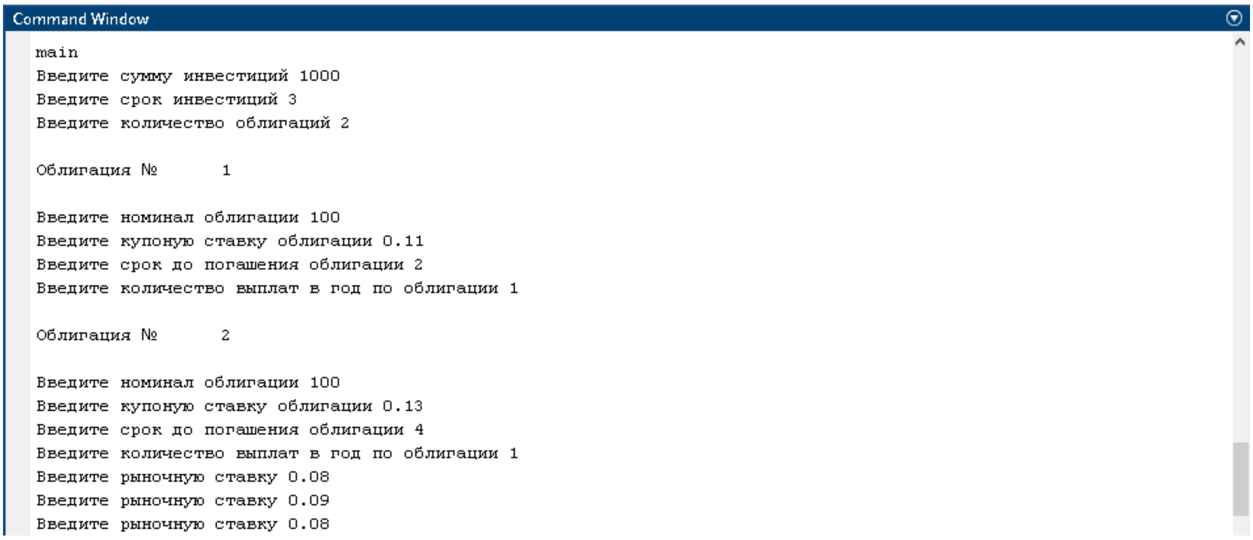


Рисунок 11 - Подпрограмма 7

Затем рассчитывается новая стоимость облигации с учетом первой выплаты и изменения ставки дисконтирования в следующем периоде.

В приложении 1 представлен реализованный код программы в среде программирования Matlab2019R.

Для проверки его работоспособности введем значения из примера во второй главе.



```
Command Window
main
Введите сумму инвестиций 1000
Введите срок инвестиций 3
Введите количество облигаций 2

Облигация №      1

Введите номинал облигации 100
Введите купоную ставку облигации 0.11
Введите срок до погашения облигации 2
Введите количество выплат в год по облигации 1

Облигация №      2

Введите номинал облигации 100
Введите купоную ставку облигации 0.13
Введите срок до погашения облигации 4
Введите количество выплат в год по облигации 1
Введите рыночную ставку 0.08
Введите рыночную ставку 0.09
Введите рыночную ставку 0.08
```

Рисунок 12 – Ввод значений в Matlab 2019R

```
Формируем портфель:
Период:       1

Цена облигаций равны
  105.3498   116.5606

Дюрация облигаций равны:
    1.9033     3.4104

Выпуклость облигаций равны:
    5.6133    14.8711


Optimal solution found.

Доли облигаций равны:
  272.3247   727.6753

Поток платежей:
  109.5921   368.0878    81.1576   705.4466

Портфель иммунизирован
```

Рисунок 13 – Первый цикл (период)

```
Новая стоимость облигаций равна:
   1.0603e+03

Переформируем портфель:
Период:      2

Цена облигаций равны
  101.8349  110.1252

Дюрация облигаций равны:
    1.0000    2.6840

Выпуклость облигаций равны:
    2.0000    9.9413


Optimal solution found.

Доли облигаций равны:
  430.6958  629.6345

Поток платежей:
  543.7852   74.3268  646.0712

Портфель не нуждается в иммунизации
```

Рисунок 14 – Второй и последний цикл (период)

И как мы видим на рисунке 13 и 14, программа выдает такие же значения как в примере во второй главе, следовательно, программа работает верно.

Итого, в этой главе был реализован программный модуль, алгоритма, который формирует иммунизированный портфель облигаций с заданным значением дюрации и наименьшим показателем выпуклости при помощи встроенной функции линейного программирования в программе Matlab.

Заключение

Тема бакалаврской работы была посвящена проблеме создания портфеля облигаций, который будет защищен от изменения процентных ставок и будет сохранять инвестированные в него деньги с учетом инфляции.

В ходе выполнения ВКР была изучена тема выпускной квалификационной работы. Кроме того, был разработан алгоритм, который формирует иммунизированный портфель облигаций с заданным значением дюрации и наименьшим показателем выпуклости.

Для работы разработанного алгоритма понадобиться только Matlab r2019 или более поздние версии.

Для достижения поставленной цели были выполнены следующие задачи:

- Изучены математические методы анализа инвестиций;
- Изучены математические методы формирования портфеля;
- Изучены математические методы уменьшения портфельных рисков;
- Решена задача формирования портфеля облигаций с заданным значением дюрации и наименьшим показателем выпуклости, с последующим сведением ее к задаче линейного программирования;
- Реализован программный модуль, алгоритма, который формирует иммунизированный портфель облигаций с заданным значением дюрации и наименьшим показателем выпуклости при помощи встроенной функции линейного программирования.

Результатом работы являются разработанный алгоритм, который решает задачу иммунизации портфеля с помощью сведения задачи формирования портфеля облигаций с заданным значением дюрации и наименьшим значением выпуклости к задачи линейного программирования с последующим решением и реализация этого алгоритма в Matlab.

Всё это позволяет сделать выводы, что задачи данной работы успешно решены, что также подтверждает практическую значимость проекта.

СПИСОК ИСПОЛЬЗУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Кремер Н.Ш. Теория вероятностей и математическая статистика / Н.Ш. Кремер. – 3-е изд., М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2009.- 551 с. – (Серия «Золотой фонд российских учебников»). — ISBN 978-5-238-01270-4.
2. Кремер Н.Ш. Эконометрика: учебник и практикум для академического бакалавриата / Н.Ш. Кремер, Б.А. Путко: под ред. Н.Ш. Кремера – 4-е изд., М.:Издательство Юрайт. 2019.- 308 с. – (Серия: Бакалавр. Академический курс). — ISBN 978-5-534-08710-9.
3. Мадера А.Г. Математическая модель оптимального инвестиционного портфеля // Успехи современного естествознания. – 2012. – № 12 – С. 109-112
4. Сосина Н.А. Оценка эффективности инвестиций на основе функции риска// Научное обозрение. - 2015. - №5. - С. 207-210. ISSN 1815-4972.
5. Markowits H. Portfolio Selection. // Journal of Finance. — 1952. — Vol.7, No. 1. — P. 71–91.
6. Мельников А.В., Попова Н.В., Скорнякова В.С. Математические методы финансового анализа/ Под научной редакцией Мельникова А.В. – М.:АНКИЛ, 2006.–440с. [Электронный ресурс]. – Режим доступа: / https://etextbook.files.wordpress.com/2011/06/d187d0b0d181d182d18c1.pdf
7. Бочаров, П.П. Финансовая математика [Электронный ресурс] : учебник / П.П. Бочаров, Ю.Ф. Касимов. — Электрон. дан. — М. : Физматлит, 2007. — 575 с. — Режим доступа: http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1_id=2116
8. Капитоненко, В.В. Задачи и тесты по финансовой математике: учебное пособие [Электронный ресурс] : учебное пособие. — Электрон. дан. — М. : Финансы и статистика, 2011. — 368 с. — Режим доступа: http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1_id=28354.
9. Чусавитина, Г.Н. Основы финансовой математики [Электронный ресурс] : учебное пособие. — Электрон. дан. — М. : ФЛИНТА, 2014. — 175 с. —

Режим доступа: http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1_id=51868 — Загл. с экрана.

10.Гитман Л., Джонк М. Основы инвестирования. — М.: Дело, 1997. — С.800-802.

11. Таха Х.А. Введение в исследование операций. 7-е изд. М.: Изд. дом «Вильямс», 2005.

12. Зайченко Ю.П. Исследование операций. 2-изд. Киев: Изд-во «Вища школа», 1979.

13. Ланкастер К. Математическая экономика. М.: Советское радио, 1972.

14. Мертенс А. Инвестиции. Киев: Киевское акционерное агентство, 1997.

15. Красс М.С., Чупрынов Б.П. Основы математики и ее приложения в экономическом образовании. М.: Дело, 2003.

16. Кремер Н.Ш., Путко Б.А.,Тришин И.М.,Фридман М.Н. Исследование операций в экономике. М.: Банки и биржи, ЮНИТИ, 1997 г.

17. Зенкевич Н.А., Марченко И.В. Экономико-математические методы. Рабочая тетрадь №2. СПб.: изд-во МБИ, 2005.

18. Хазанова Л.Э. Математическое моделирование в экономике. М.: Изд-во БЕК, 1998.

19. А.А Мицель. Математические методы финансового анализа. Учебное пособие. Томский государственный университет систем управления и радиоэлектроники. 2019.

20. Cook T. & Russel R.A. Introduction to Management Science. Englewood Cliffs (New Jersey), Prentice Hall, Inc. 1989.

21. Winston W.L. Introduction to Mathematical Programming: Applications and Algorithms. Boston (Mass.): PWS-KENT Publ., 1991.

22. Winston W.L. Operations Research: Applications and Algorithms Boston (Mass.): PWS-KENT Publ., 1990

23. Tupper, Jeff. «Reliable Two-Dimensional Graphing Methods for Mathematical Formulae with Two Free Variables», [Электронный ресурс]: Режим доступа: http://www.dgp.toronto.edu/people/mooncake/papers.ы

24. Bailey, D. H.; Borwein, J. M.; Calkin, N. J.; Girgensohn, R.; Luke, D. R.; and Moll, V. H. «Experimental Mathematics in Action». Natick, MA: A. K. Peters, p. 289, 2006.

25. Comba, J.; Stolfi, J. «Affine Arithmetic and its Applications to Computer Graphics. In anais do VI Simp’osio Brasileiro de Compta, c’ao Gr’afica e Processamento de Imagens». (SIBGRAPI ’93), p. 9-18, 1993.

Приложение А

Код программы Matlab

```
clear all
A=2;
N=[100;100];
g=[0.11;0.13];
t=[2;4] ;
p=[1;1];
r=[0.08;0.09;0.08];
V=1000;
T=3;
Y=T;
for m=1:T
    if m==1
        T=T;
    else
     T=T-1;
    end
    if m>=2
    for i=1:length(t)
        if t(i)==0
            fprintf('Срок облигации истек')
            return
        else
            t(i)=t(i)-1;
        end
    end
    end
[P,D,Conv,R,n,c,k]=Dop(A,p,t,N,g);
```

```
if m==1
```



```
disp('Формируем портфель:')
 fprintf('Период: ');
    disp(m);
else
    disp('Переформируем портфель:')
    fprintf('Период: ');
    disp(m);
end
%Считаем цену
disp('Цена облигаций равны')
[P,Ps,Cn] = Price(N,A,k,r,c,n,m);
disp(Ps)

%Считаем дюрацию и выпуклость
disp('Дюрация облигаций равны: ')
[D,Ds,Conv,ConvS]=DaC(Ps,P,A,k,Cn,n);
disp(Ds)
disp('Выпуклость облигаций равны: ')
disp(ConvS)

%Решаем задачу ЛП
[x]=LP(A,ConvS,T,Ds);

%Расчитаем доли в портфеле
disp('Доли облигаций равны: ')
Vi=zeros(1,A);
for i=1:A
```

```
   Vi(i)=V*x(i);
```



```
end
disp(Vi)
%Поток платежей
disp('Поток платежей: ')
[R,Ri]= NewRi(Vi,Ps,N,A,k,c,n,m);
disp(Ri)

%Проверка иммунизации
if m+2>Y
    disp('Портфель не нуждается в иммнуизации')
    return
end
[V0,V1]=Proverka(r,Ri,V,m,T,t,Y);
if V0<V1
   disp('Портфель иммунизирован')
   [V]=NewV(Ri,r,m,t);
   disp('Новая стоимость облигаций равна: ')
else
    disp('Портфель не иммунизирован')
    return
end
end
```

Функция Dop

```
function [P,D,Conv,R,n,c,k]=Dop(A,p,t,N,g)
n=zeros(1,A);
```

```
c=zeros(1,A);
```



```
k=zeros(1,A);
for i=1:A
    n(i)=p(i)*t(i);
    c(i)=N(i)*g(i);
    k(i)=1/p(i);
end
P=zeros(A,n(i)-1);
D=zeros(A,n(i)-1);
Conv=zeros(A,n(i)-1);
R=zeros(A,n(i)-1);
```

Функция Price

```
function [P,Ps,Cn]=Price(N,A,k,r,c,n,m)
Ps=zeros(1,A);
Cn=zeros(1,A);
for i=1:A
z=k(i);
 for j=1:z:n(i)-1
q=(1+r(m))^z;
P(i,j) = c(i)/q;
Ps(i)=Ps(i)+P(i,j);
z=z+k(i);
end
Cn(i)= (c(i)+N(i))/(1+r(m)).^n(i);
Ps(i)=Ps(i)+Cn(i);
End
```

Функция DaC

```
function [D,Ds,Conv,ConvS]=DaC(Ps,P,A,k,Cn,n)
Ds=zeros(1,A);
ConvS=zeros(1,A);
for i=1:A
z=k(i);
 for j=1:z:n(i)-1
D(i,j) = z*P(i,j)/Ps(i);
Ds(i)=Ds(i)+D(i,j);
Conv(i,j)=D(i,j)*(z+1);
ConvS(i)= ConvS(i)+Conv(i);
z=z+k(i);
end
D(i,n(i))= n(i)*Cn(i)/Ps(i);
Ds(i)=Ds(i)+D(i,n(i));
Conv(i,n(i))= D(i,n(i))*(n(i)+1);
ConvS(i)=ConvS(i)+Conv(i,n(i));
End
```

Функция NewRi

```
function [R,Ri]= NewRi(Vi,Ps,N,A,k,c,n,m)
Ri=zeros(1,max(n));
for i=1:A
z=k(i);
 for j=1:n(i)-1
```

```
     R(i,j)=Vi(i)/Ps(i)*c(i);
```



```
 end
 R(i,n(i))= Vi(i)/Ps(i)*(c(i)+N(i));
end
for i=1:max(n)
  Ri(i)= R(1,i)+R(2,i);
End
```

Функция NewV

```
function [V]=NewV(Ri,r,m,t)
Vfs=zeros(1,max(t));
V=0;
for i=0:max(t)-1
    q=-i;
    Vfs=Ri(i+1)*(1+r(m+1))^q;
    V=V+Vfs;
End
```

Функция Proverka

```
function [V0,V1]=Proverka(r,Ri,V,h,T,t,Y)
V0=V*(1+r(h))^T;
Vfs=zeros(1,max(t));
V1=0;
for i=1:max(t)
    q=Y-h-abs(i-1);
    Vfs=Ri(1,i)*(1+r(h+1))^q;
```

V1=V1+Vfs;

End

Функция LP

```
function[x]=LP(A,ConvS,T,Ds)
%Задачем параметры для задачи ЛП
f=zeros(A);
B=zeros(1,A);
b=zeros(1,A);
lb=zeros(A,1);
for i=1:A
f= ConvS';
B(i)=-1*Ds(i);
b =-1*T;
Aeq(i)=1;
Beq =1;
end

[x]=linprog(f,B,b,Aeq,Beq,lb,[]);
```