МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Тольяттинский государственный университет»

Институт математики, физики и информационных технологий
(наименование института полностью)

Кафедра «Прикладная математика и информатика»
(наименование)

02.03.03 Математическое обеспечение и администрирование информационных систем
(код и наименование направления подготовки, специальности)

Мобильные и сетевые технологии
(направленность (профиль) / специализация)

ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА
(БАКАЛАВРСКАЯ РАБОТА)

на тему Применение математического моделирования для формирования транспортных потоков

Студент Л.О. Герасимов
(И.О. Фамилия) (личная подпись)

Руководитель доц., канд. физ.-мат. наук, О.В. Лелонд
(ученая степень, звание, И.О. Фамилия)

Консультант М.В. Дайнеко
(ученая степень, звание, И.О. Фамилия)

Тольятти 2021

Аннотация

В выпускной квалификационной работе рассматривается вопрос математического моделирования транспортных потоков. Тема работы – "Применение математического моделирования для формирования транспортных потоков".

Работа содержит 41 страницу текстового документа, 7 иллюстраций, 2 таблицы, 40 используемых источников, включая 12 на иностранном языке.

ДОРОЖНАЯ СЕТЬ, ТРАНСПОРТНЫЙ ПОТОК, МОДЕЛИРОВАНИЕ, НЕПАРАМЕТРИЧЕСКАЯ ОЦЕНКА.

Объектом исследования данной работы является дорожная сеть.

Цель исследования: разработка математической модели транспортных путей с последующей разработкой программного обеспечения, позволяющим создать «тепловую» карту центра города, визуально отображающую количество проезжающего автотранспорта и расчет местоположения для наиболее выгодного размещения новых камер видеонаблюдения для сбора статистики о проезжающих автомобилях.

Работа состоит из следующих ключевых частей: введение; первая глава, в которой раскрывается значимость математического моделирования и изучаются основные типы транспортных моделей, а также приводится историческая справка о развитии данного направления математики; вторая глава, в которой создается новая математическая модель и программное обеспечение на её основе; третья глава, в которой проводится тестирование ПО и оценка точности модели.

В результате данной работы проведено детальное изучение моделирования транспортной сети, изучена литература по данной теме, рассмотрены методы непараметрической оценки, на их основе построена математическая, был предложен новый метод поиска критических точек на дорожном графе.

ABSTRACT

The present graduation work is devoted to mathematical modeling and traffic flows. The topic of the research is *Applying mathematical modeling to form traffic flows*.

The graduation work consists of an introduction, 7 figures, 2 tables and the list of 40 references including 12 foreign sources.

The object of the graduation work is a road network.

The goal of the investigation is to develop a mathematical model of transport routes with the subsequent development of software allowing us to create a heat map of the city center, visually displaying the number of passing vehicles and identifying the location for the most advantageous installation of new CCTV cameras to collect statistics on passing cars.

The work can be divided into several logically connected parts.

The first chapter reveals the importance of mathematical modeling and studies the main types of traffic models, as well as presents a historical background on the development of this mathematics subarea.

The second chapter of the research creates a new mathematical model and develops the corresponding software.

The third chapter of the investigation tests the designed and developed software, as well as assesses the accuracy of the model.

In conclusion, it should be highlighted that the result of the work is a detailed study of the transport network modeling. To achieve the set goal, the references on the topic have been reviewed, the nonparametric estimator methods have been considered, a mathematical model with high accuracy of estimating the number of vehicles on the roads has been proposed, a new method for finding critical points on the road graph has been suggested. Nevertheless, more experimental data are required to get more reliable and precise results.

Содержание

Введение

Транспортные системы относятся к числу ресурсов, которые необходимы для экономического и социального благополучия, а также безопасности нации. Эффективность любой транспортной системы заключается в ее способности перемещать людей, товары (и информацию) и оборудование (гражданское и военное) из одного места в другое надежным и экономически эффективным способом; гибкость и эффективность транспортной системы в значительной степени способствуют жизнеспособности и конкурентоспособности экономики страны. В случае бедствий, таких поскольку землетрясения, оползни, приближающиеся ураганы, циклоны и цунами, неадекватные транспортные системы могут иметь катастрофические последствия.

В последние годы транспортные системы по всему миру сталкиваются с беспрецедентными проблемами в каждом из трех видов транспортировки товаров, оборудования и людей по суше, воздуху и морю. Многие проблемы, с которыми сталкиваются морские и воздушные виды транспорта, локализованы в терминалах (т. е. в аэропортах или морских портах), хотя нельзя свести к минимуму проблемы, связанные с природными стихиями. С другой стороны, проблемы заторов в наземном виде транспорта распределены по автомагистралям и местным улицам в городских и пригородных районах страны, и не ограничивается только входами или выходами в сети проезжей части.

Заторы, наряду с сопутствующим снижением безопасности дорожного движения, являются наиболее серьезной проблемой, стоящей перед сетью наземного транспорта; это серьезно затрудняет мобильность транспортных средств на существующих сетях автомобильных дорог. Снижение пропускной способности, снижение безопасности, увеличение выбросов и расхода топлива, а также увеличение времени в пути, приводящее к потере производительности, являются некоторыми из сопутствующих вредных последствий заторов. За последнее десятилетие средняя задержка в поездках и Индекс загруженности дорог только в России увеличился на 20%. Ничто не указывает на то, что последствия заторов в других частях мира могут быть иными. Значительные человеческие жертвы, потери топлива и ущерб окружающей среде являются следствием заторов. Кроме того, экономический ущерб от перегруженности из-за связанных с этим потерь производительности в России оценивается в миллиарды рублей в год и разумно ожидать потерь аналогичной величины в Европе, а также сопоставимых потерь в странах Азии и остальном мире. Заторы ухудшаются качество жизни и является одной из главных проблем в городских районах страны.

Решение проблемы повышения мобильности транспортных средств на существующих перегруженных автострадах имеет международный масштаб, поскольку спрос на поездки растет во всем мире с каждым годом. Только США ежегодно тратят на транспортные услуги 1 триллион долларов – значительную долю своего валового внутреннего продукта. Широко распространено мнение, что достижения в области транспортных технологий позволят транспортной системе соответствовать беспрецедентным стандартам эффективности, надежности, своевременности, безопасности и воздействия на окружающую среду и, следовательно, также принесут значительную пользу экономике за счет улучшения эффективность транспортной системы.

Заторы возникают в результате превышения пропускной способности магистрали. Поэтому разумный подход к решению проблемы заторов предполагает сочетание стратегий, которые влияют на спрос на трафик и эксплуатационные возможности без ущерба для безопасности дорожного движения. Одна из стратегий направлена на сокращение спроса на трафик или его распространение в пространстве и времени. Традиционный метод строительства новых дорог или расширения существующих объектов для увеличения эксплуатационной мощности является не только дорогостоящим предложением, особенно в хорошо развитых городских районах, но и вызывает серьезные экологические, политические и социальные/институциональные проблемы. Другая стратегия предусматривает повышение безопасности и эксплуатационных возможностей автомобильных дорог путем сбора и обработки хранимой и оперативной информации за счет использования последних достижений в области электроники, телекоммуникаций, вычислительной техники и технологий обработки информации.

Целью данной работы является разработка программного обеспечения, позволяющего создать "тепловую" карту центра города, визуально отображающую количество проезжающих автомобилей и рассчитывающую местоположение для наиболее выгодного размещения новых камер видеонаблюдения для сбора статистики.

1 Моделирование транспортных потоков

1.1 Актуальность применения математического моделирования

Транспортные проблемы современных городов хорошо известны и достаточно актуальны. Для решения этих проблем необходима корректная математическая модель, которая сможет осуществлять комплексный анализ дорожно-транспортной инфраструктуры с учётом текущей ситуации, а также давать детальный прогноз на всю транспортную сеть. На моделях транспортных потоков основаны важнейшие алгоритмы, широко используемые для создания системы управления трафиком в транспортной сети. Такие модели должны иметь высокую точность и достаточно сложны. Так, на простейшем перекрестке может быть до двенадцати направлений движения. На участке дороги с десятью такими перекрестками количество направлений становится на порядок больше, и необходимо минимизировать задержки на каждом из этих направлений при изменяющихся внешних условиях. Таким образом, в разрабатываемой модели нужно учесть множество факторов: периодически обновляемые данные о текущем состоянии дорожной ситуации, алгоритмы работы светофоров, правила движения по полосам на перекрёстке и даже временные зависимости распределения потоков на перекрёстках. Кроме того, дорожные условия в виде резко меняющихся погодно-климатических параметров, ДТП, некачественного дорожного покрытия, ремонтных работ усложняют процесс моделирования транспортных потоков.

Все более актуальной в развитых странах становится проблема заторов. Чаще всего они возникают в крупных городах, где находится большая часть личного автотранспорта жителей, а также на ключевых трассах и транспортных коридорах, которые оказываются наиболее загруженными грузовыми и пассажирскими перевозками.

Методологической основой для разработки мер, направленных на решение вышеперечисленных проблем, и принятия научно обоснованных решений по их реализации является математическое моделирование транспортной системы. Такие модели позволяют:

– оценивать эффективность запланированных мероприятий по производственным и экономическим показателям;
– выявить возможные негативные последствия их реализации;
– вести научно обоснованную разработку программы их реализации.

С дальнейшим развитием транспортной системы России, расширением и улучшением связности дорожной сети, возрастанием роли мультимодальных перевозок, внедрением интеллектуальных транспортных систем и обострением текущей проблемы перегруженности дорожных сетей крупных транспортных коридоров и крупных городов, потребность в использовании транспортных моделей будет расти [3].

Математическое моделирование является неотъемлемой частью комплексного анализа транспортной сети. Невозможно делать только инженерные расчеты без проведения математического эксперимента. Одной только экспертной оценки может быть недостаточно. Например, если стоит задача рассчитать разгрузку участка дороги, вам нужно знать, сколько автомобилей повернет направо на определенном перекрестке. Не было наблюдений за этим перекрестком – нет данных для расчетов. Более того, транспортный поток постоянно подстраивается под управляющие воздействия. Эффект рассчитанной разгрузки через некоторое время исчезает из-за перераспределения транспортного потока. Так, объем трафика обычно уменьшается на следующий день после каких-либо колебаний или случайных факторов, послуживших причиной для пробки. Поэтому моделирование необходимо в связи со следующими свойствами транспортной системы:

– компенсация увеличения пропускной способности при развитии сети увеличением спроса и перераспределением его в новых условиях;

– непредсказуемость поведения каждого водителя – выбор маршрута, стиль вождения и т.д.;
– влияние случайных факторов (ДТП, погода и т.д.) и колебаний, связанных с временами года, выходными и праздничными днями и т.д.

Моделирование автомобильного движения — это широкая тема, охватывающая различные аспекты, такие как: планирование перевозок, транспортные потоки, управление движением - модели, описывающие постоянное движение транспортных средств, велосипедистов, пешеходов в различных временных и пространственных масштабах. Хотя они рассматривают проблемы с разных точек зрения и фокусируются на разных подходах, все они связаны друг с другом.

Следует подчеркнуть различие между моделированием транспортных потоков и планированием перевозок, поскольку эти два предмета относятся к более широкой области моделирования транспортных потоков и могут быть легко спутаны из-за их тесной взаимосвязи.

Следуя Трейберу, можно различать семейства моделей по трем аспектам: временному, объективному (планирование перевозок исследует связь между инфраструктурой и спросом, в то время как при моделировании транспортных потоков инфраструктура фиксирована, а спрос задан извне), субъективному (моделирование транспортных потоков ориентировано на поведение водителей на дороге, в то время как планирование перевозок учитывает решения более высокого уровня, т. е. выбор видов деятельности, направлений, видов транспорта и маршрутов).

Эта работа посвящена в основном динамике транспортных потоков, однако также необходимо было поработать над назначением трафика, поскольку его можно рассматривать как интерфейс между результатами планирования перевозок и входными данными моделей транспортных потоков.

1.2 Виды моделей транспортных потоков

1.2.1 Гидродинамические модели транспортного потока

Транспортный поток можно рассматривать как поток одномерной сжимаемой жидкости, предполагая, что поток сохраняется и существует взаимно однозначная зависимость между скоростью и плотностью транспортного потока.

Первое предположение выражается уравнением непрерывности. Во-вторых, это функциональная зависимость между скоростью и плотностью движения, которая объясняет снижение скорости транспортного средства с увеличением плотности движения. Это интуитивно правильное предположение теоретически может привести к отрицательной плотности или скорости. Очевидно, что одно значение плотности может соответствовать нескольким значениям скорости. Поэтому для второго предположения среднее потребление в каждый момент времени должно соответствовать равновесному значению для данной плотности автомобилей на дороге. Равновесная ситуация является чисто теоретическим предположением и может наблюдаться только на участках дорог без перекрестков. Поэтому некоторые исследователи отвергли непрерывные модели, а некоторые считают их слишком грубыми.

1.2.2 Модели следования за лидером

За исключением случаев очень низкой интенсивности, любой автомобиль ограничен в движении автомобилем, едущим впереди него (рисунок 1).

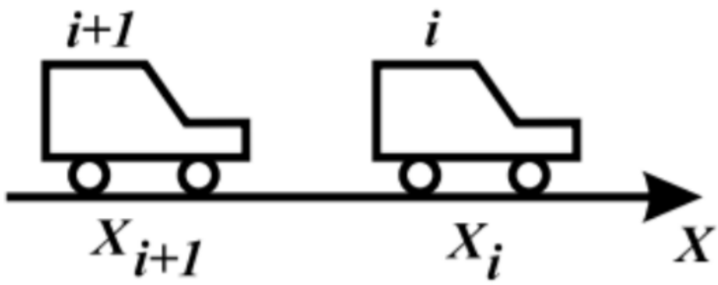

Рисунок 1 – Графическое представление модели следования за лидером

Первоначально предполагалось, что каждый водитель согласует свою скорость со скоростью впереди идущего автомобиля:

$$x(t) = \frac{1}{\tau}\left(x_i(t) - x_{i+i}(t)\right), \#(1)$$

где τ – время согласования скоростей.

«Эта модель не описывает свойства нестабильности, ударных волн и заторов. Позже был предложен ряд изменений. Например, в левую часть уравнения (1) добавляется задержка t=1,3 c, описывает время реакции водителя на изменение скорости ведущего транспортного средства. Коэффициент 1 / τ интерпретируется как коэффициент чувствительности α, который характеризует скорость реакции водителя. Тогда (1) можно записать в виде дифференциально-разностного уравнения:

$$x_i(t + t_d) = \alpha\left(x_i(t) - x_{i+1}(t)\right) \#(2)$$

При α = const условие неустойчивости уравнения (2) имеет вид $td\tau$>12. Наличие нестабильности позволяет моделировать ударные волны и кластеры, но предположение о постоянной чувствительности не позволяет воспроизвести фундаментальную диаграмму. Более адекватная модель получается с учетом увеличения чувствительности по мере уменьшения расстояния до ведущего транспортного средства».

Микроскопическая модель следования за лидером основана на психофизиологической модели Видемана. Модель Видемана использует случайные числа для создания неоднородного потока транспортных средств. Текущее состояние отдельных транспортных средств основано на реакции водителя в контексте режимов пространственного взаимодействия транспортных средств. Эти режимы в модели Видемана определяются через пороговые значения, которые их разделяют. Пороговые значения, в свою очередь, зависят от скорости транспортного средства и расстояния между последовательными транспортными средствами. Модель Видемана содержит режимы: свободное движение, приближение, критическая ситуация, следование.

Каждый из четырех режимов использует различные правила для определения ускорения. При изменении режимов работы модели меняются и правила ускорения. На рисунке 2 показаны режимы модели Видемана и пороговые значения между ними.

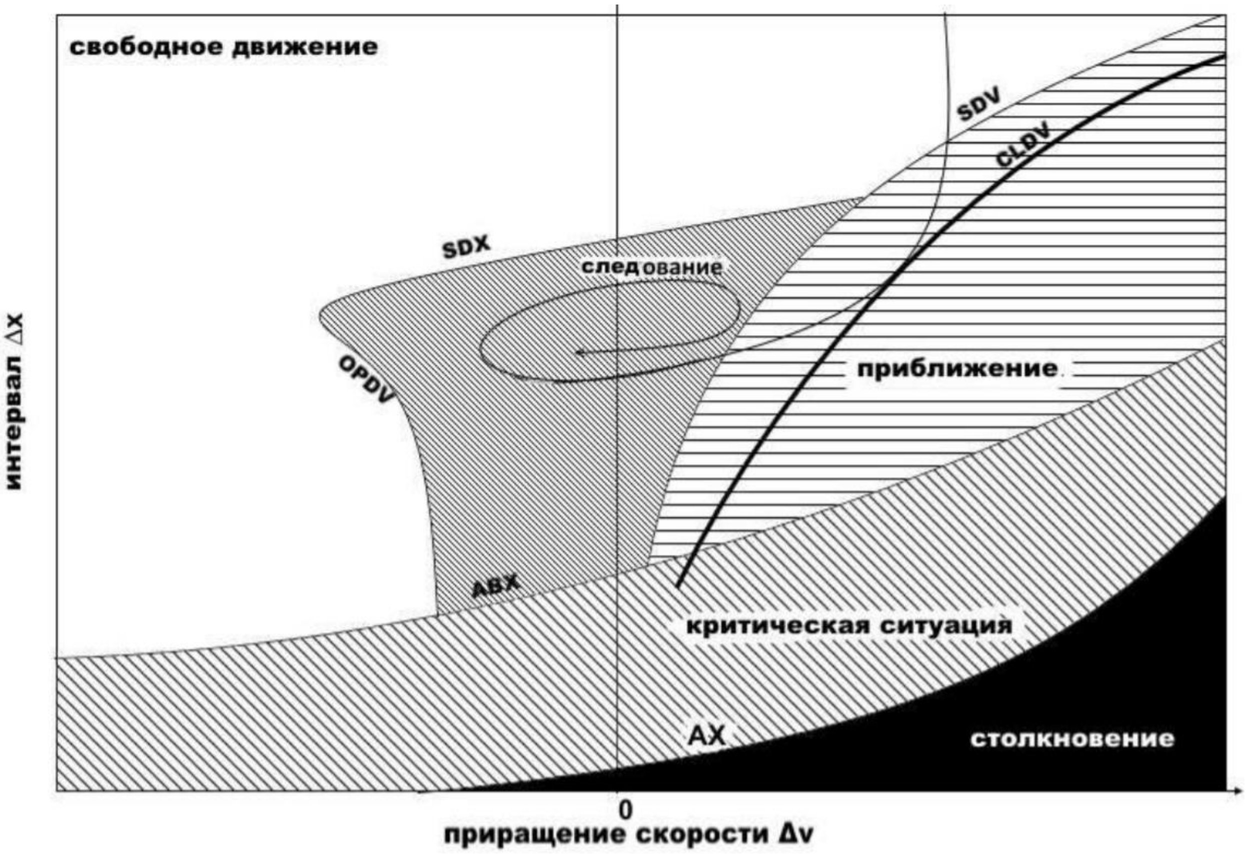

Рисунок 2 – Режимы модели Видемана

Эта модель стала эталонной. Одним из его преимуществ является то, что изменение стиля вождения с годами и модернизация автомобиля правильно отображаются в этой модели [1].

1.2.3 Клеточные автоматы

Применение концепции клеточного автомата фон Неймана к моделированию транспортных потоков было впервые предложено М. Кремером и Д. Людвигом в 1986 году. Активное развитие началось с работ Нагеля и Шрекенберга. В настоящее время существует обширная коллекция публикаций по клеточным автоматам.

Поскольку К. Нагель и М. Шрекенберг предложили применение теории клеточных автоматов фон Неймана (КА) для моделирования транспортных потоков в 1992 г., многие ученые выбрали этот подход в своих исследованиях из-за его простоты и гибкости.

Основными преимуществами микроскопических моделей, к которым относятся модели клеточных автоматов, являются следующие особенности: учет движения каждого транспортного средства в отдельности, возможность моделирования разреженного потока, возможность описания поведения различных водителей. В статье рассматривается оригинальная многополосная модель, основанная на одномерной модели КА Нагеля-Шрекенберга. В созданной модели алгоритм поступательного движения по дороге дополнен правилами смены полосы движения, а также некоторыми правилами, описывающими различные стратегии водителя. Современные компьютерные системы позволяют проводить крупномасштабное моделирование дорожных сетей больших городов.

Модели транспортных потоков, основанные на теории клеточных автоматов, полностью дискретны. Дорога разделена на равные ячейки, каждая ячейка может содержать автомобиль или быть пустой. Расстояние вдоль и поперек дороги измеряется количеством ячеек. Временные шаги обычно равная 1 секунде, скорость транспортного средства – это количество ячеек, которое транспортное средство может преодолеть за один временной шаг. На каждом временном шаге обновление состояния ячейки выполняется по определенным логическим правилам.

Формулировка оригинальной модели Нагеля-Шрекенберга выглядит следующим образом. Пусть x_n и v_n – координата и скорость n-го автомобиля, d_n = x_n+1−x_n – дистанция до лидирующего автомобиля. Скорость может принимать одно из v_{max} + 1 допустимых целочисленных значений v_n= 0, 1, 2, ..., v_{max}. На каждом шаге t → t+1 состояние всех автомобилей в системе обновляется в соответствии со следующими правилами:

1. Ускорение. Если $v_n < v_{max}$, то скорость n-го автомобиля увеличивается на единицу, если $v_n = v_{max}$, то скорость не изменяется:

$$v_n \to\to \min(v_n + 1, v_{max})\ \#(3)$$

2. Торможение. Если $d \le v_n$, то скорость n-го автомобиля уменьшается до $d_n - 1$:

$$v_n \to \min(v_n, d_n - 1)\ \#(4)$$

3. Случайные возмущения. Если $v_n > 0$, то скорость n-го автомобиля может быть уменьшена на единицу с вероятностью p; скорость не изменяется, если $v_n = 0$:

$$v_n \to \max(v_n - 1, 0)\ \#(5)$$

4. Движение. Каждый автомобиль продвигается вперед на количество ячеек, соответствующее его новой скорости после выполнения шагов 1-3:

$$x_n \to x_n + v_n\ \#(6)$$

Первый шаг (3) отражает общее желание всех водителей ехать как можно быстрее. Второй (4) гарантирует отсутствие столкновений с впереди идущими транспортными средствами. На третьем этапе (5) вводится элемент стохастичности, учитывающий случайность поведения водителя.

1.2.4 Менее распространенные виды моделей

Существуют гибридные модели, способные сочетать оба подхода, позволяют рассматривать различные звенья дорожной сети с различным уровнем детализации. Переключаясь с более общего макроскопического на микроскопический вид, можно моделировать зону особого интереса с повышенной точностью, сохраняя при этом ресурсы во внешних областях. Такие подходы в последнее время активно исследуются.

Гибридные модели явно используют преимущества макроскопических и микроскопических моделей, применяя их в отдельных областях.

Также существуют мезоскопические модели. В отличие от предыдущих, мезоскопические модели разделяют преимущества двух моделей, частично объединяя их.

Транспортный поток описывается агрегированными величинами, как и в макроскопических моделях, однако существует понятие транспортных средств, специфичное для микроскопического формализма. Транспортные средства частично автономны. Они не взаимодействуют друг с другом, но все ведут себя в соответствии с местными обстоятельствами, то есть сохраняют среднюю скорость на дороге, которую они занимают. В частности, ряд автомобилей может находиться в том же положении, что и их местоположение, используется только для указания того, находится ли транспортное средство все еще в пределах размеров дороги (в противном случае его следует перенести на следующий участок).

В то же время каждый автомобиль хранит информацию о своем происхождении, пункте назначения и оптимальном маршруте между ними. Это позволяет эффективно реагировать на условия на дорогах, такие как препятствия и заторы, путем динамического изменения маршрута.

Кроме того, описанные псевдо-транспортные средства могут перевозить произвольное заданное количество трафика и, следовательно, представлять собой множество автомобилей. Сократив количество транспортных средств, сделав их «тяжелее», можно значительно повысить производительность моделирования, сохраняя при этом результаты действительными.

Модель передачи клеток является примером макроскопической модели. Дорожная сеть делится на однородные участки. Потоки между ними управляются путем применения метода спроса и предложения, т. е. потоки между соседними ячейками ограничены либо спросом на восходящую дорогу, либо предложением на нисходящую дорогу. Найдя согласованные притоки и оттоки, плотность на участке дороги выводится по схеме Годунова. Наконец, суммарные потоки по всей ячейке получаются на основе фундаментальной диаграммы (статическое соотношение между плотностью и суммарным потоком).

Существует тонкая проблема, с которой приходится сталкиваться при попытке получить макроскопическое описание трафика из микроскопического описания. Микроскопические модели имеют дело с управлением/решениями, принимаемыми на уровне транспортного средства, и специфичны для данного транспортного средства. Такое описание называется лагранжевым описанием, поскольку оно специфично для материальной частицы (в данном случае транспортного средства) в механике. Макроскопические модели имеют дело с участками, которые являются фиксированными участками проезжей части. Одно и то же транспортное средство не может находиться в одной и той же секции. Такое описание называется эйлеровым описанием, поскольку оно специфично для фиксированной точки или набора точек в пространстве. Поскольку один и тот же набор транспортных средств обычно не занимает один и тот же участок дороги, агрегирование микроскопических моделей должно выполняться для другого набора транспортных средств, которые занимают один и тот же участок дороги.

Когда транспортные средства въезжают на автомагистраль и выезжают с нее, возникают практические проблемы при приближении совокупного управляющего уравнения для скорости транспортных средств, присутствующих на участке автомагистрали, к пределу набора динамических систем – предел рассчитывается в предположении, что транспортные средства не въезжают или выезжают из коллекции и сохраняют одинаковый порядок на всем протяжении. Приближение временной эволюции совокупной скорости к предельной хорошо только в том случае, если сходимость коллекции к предельной динамической системе достаточно быстрая. В случае транспортных средств с автоматическим управлением ошибки расстояния довольно быстро уменьшаются в пространстве (примерно в пяти транспортных средствах от исходного транспортного средства, которое подвержено помехам).

Выводы

В первой главе рассмотрена роль математического моделирования транспортных путей в современном мире в крупных городах и мегаполисах. Приведен обзор трудов ученых различных стран по созданию, изучению и развитию математических моделей. Были выявлены следующие факторы, говорящие об актуальности выбранной темы:

– компенсация увеличения пропускной способности при развитии сети увеличением спроса и перераспределением его в новых условиях;
– непредсказуемость поведения каждого водителя на дороге;
– влияние случайных факторов.

Были описаны цели и задачи математического моделирования, а также методы моделирования транспортных путей с их характерными особенностями.

Методы математического моделирования с точки зрения математического аппарата, делятся на детерминированные, стохастические, модели-аналоги, статические, динамические, гравитационные и энтропийные модели модель конкурирующих возможностей Страуффера и другие модели.

2 Разработка программного обеспечения

2.1 Исходные данные

Объектом исследования является дорожная сеть Центрального района г. Красноярска. Данный город был выбран в качестве объекта исследования по той причине, что в нем установлено наибольшее количество камер видеонаблюдения со свободным доступом к ним, а также возможностью получения записи видеоматериалов за определенный период. В то же время в выбранном районе города существует достаточное количество перекрестков транспортных путей для того, чтобы построить и испытать математическую модель на практике.

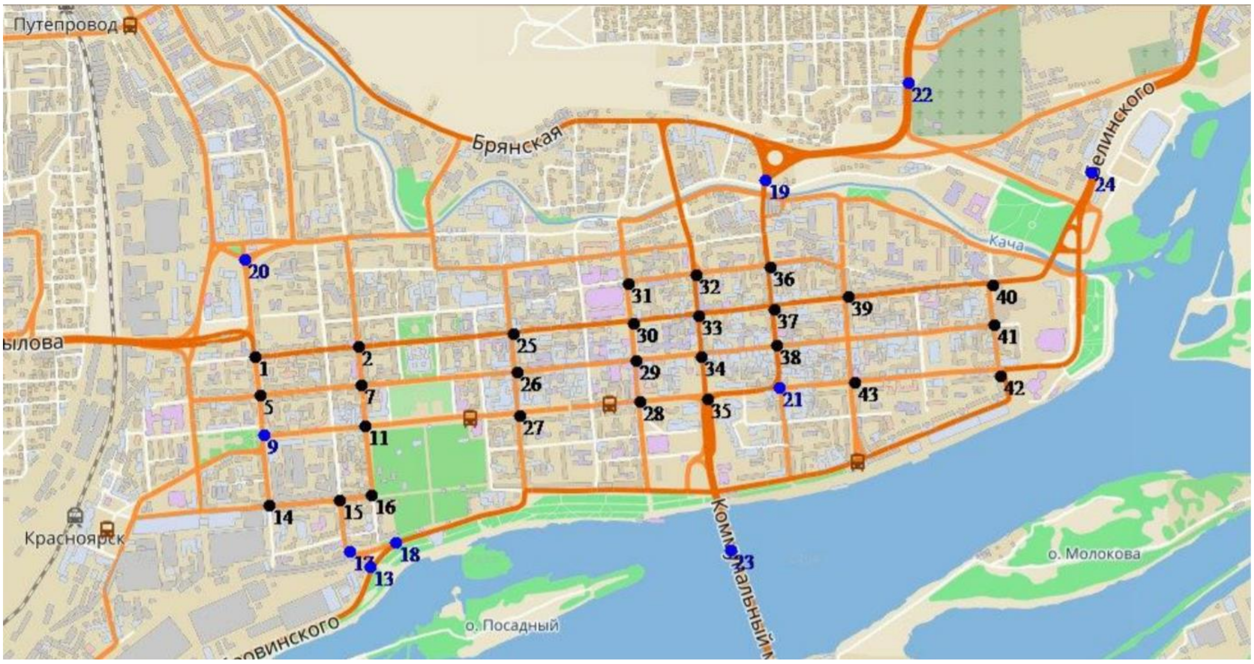

Рисунок 3 – Центральный район города с обозначенными перекрестками

Требуется разработать программное обеспечение, позволяющее строить оперативную модель загруженности дорожной сети, получая в качестве исходных данных статистику, собранную с камер дорожного видеонаблюдения, расположенных в пределах исследуемого участка города.

Для сбора статистики были записаны видеоматериалы с видеокамер (перекрестки, оборудованные камерами, отображены синим цветом на рисунке 3) в период с 8:00 до 9:00 5 мая 2021г. Данный период времени был выбран как один из наиболее хорошо показывающих загруженность дорог, так как в это время многие люди едут на работу и учебу Позже они были обработаны с помощью ПО, использующее библиотеку компьютерного зрения OpenCV, с помощью чего была получена статистика о проехавшем транспорте в данных перекрестках. На рисунке 4 показана работы программы, производящей подсчет проезжающих автомобилей по одному из перекрестков города. Данная камера отмечена числом 13 на рисунке 3 и направлена на пересечение улиц Декабристов и Дубровинского.

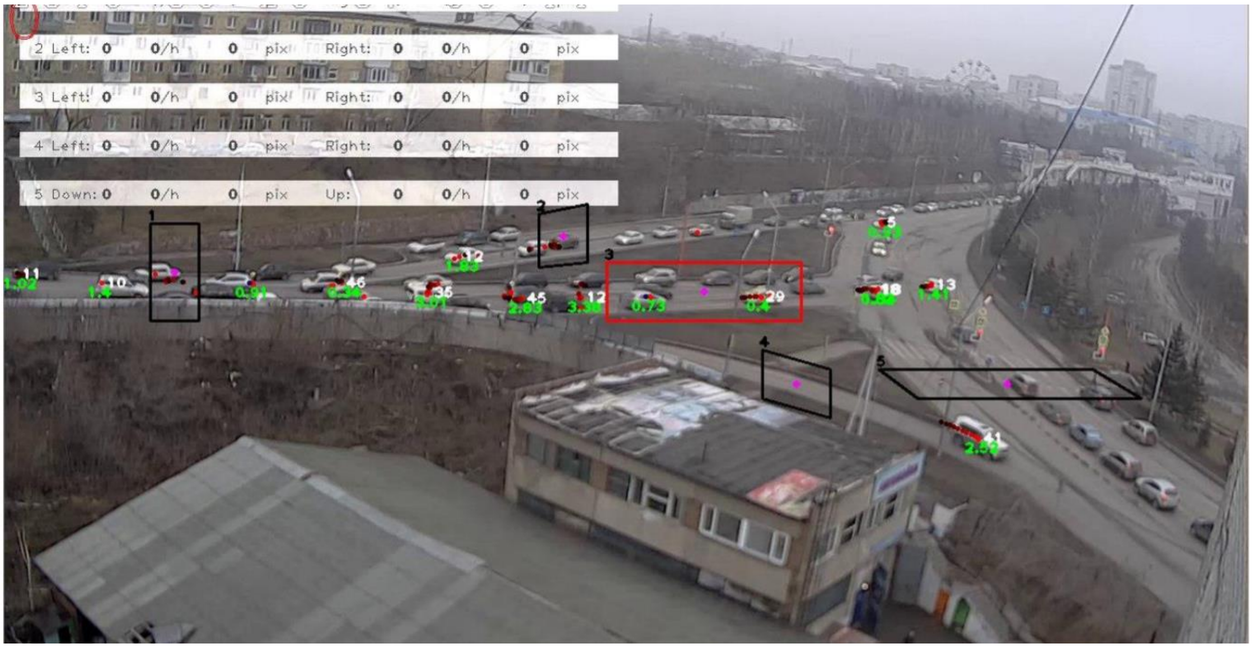

Рисунок 4 – Анализ видеоматериалов

Вся собранная статистика была записана в базу данных, архитектура которой представлена на рисунке 5.

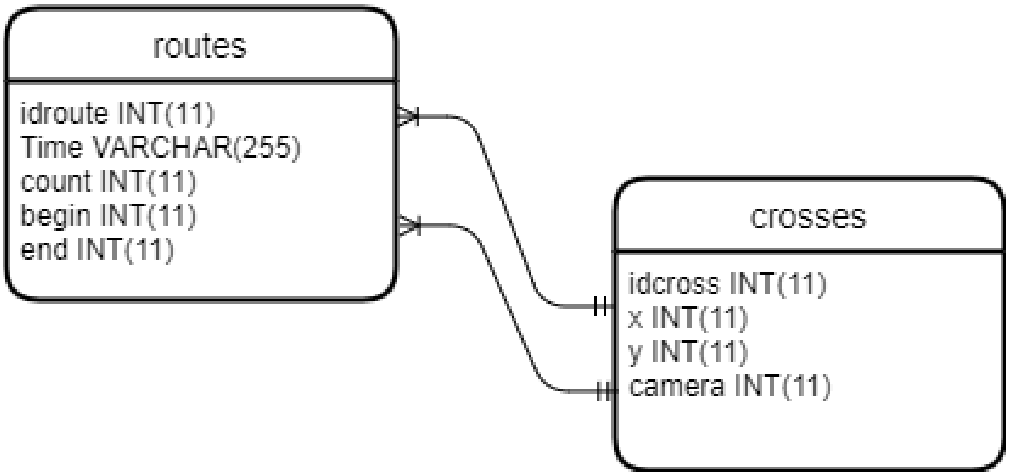

Рисунок 5 – архитектура базы данных

Где таблица crosses вмещает себя географические координаты перекрестков, а таблица routes количество проехавшего транспорта от одного перекрестка к другому.

Для оценки количества транспорта в перекрестках, не оборудованных камерами, был использован метод непараметрической оценки.

2.2 Непараметрическая оценка

Если для построения параметрической модели, нет достаточных априорных сведений качественного характера, например, линейности или нелинейности, однозначности либо неоднозначности и др., то задача идентификации состоит в оценивании функции на основе выборки. Непараметрические методы моделирования предполагает отсутствие этапа выбора параметрического класса функций.

С точки зрения математической статистики, поставленная задача представляет собой задачу оценивания случайной величины Y по наблюдаемым входным значениям x случайной величины X, т. е. в построении модели.

Рассматриваем объект, имеющий случайный вход (либо несколько входов) U и выход X. Связь между случайными величинами U и X характеризуют условные характеристики, например, условная плотность распределения вероятности *p(x | u),* условное математическое ожидание (регрессия) *M{X | u}*, условная энтропия *H{X | u}*. Наиболее полной характеристикой является условная плотность распределения вероятности *p(x | u).* Зная ее, можно вычислить любые другие условные характеристики объекта.

Построим регрессионную модель, используя оценки Розенблатта-Парзена. Для этого рассмотрим условную плотность распределения вероятности, которая выражается через безусловные плотности из формулы умножения плотностей

$$p(u, x) = p(x|u)p(u) \text{ или } p(x|u) = p(u, x)p(u) \#(7)$$

где *p(u,x)* – совместная плотность распределения вероятности u, x;

p(x | u) – условная плотность распределения вероятности;

p(u) – плотность распределения вероятности u.

Необходимо по выборке объемом s входов u_i и выходов - $x_i i$=1, 2, …, s входа U и выхода X объекта найти оценку условной плотности вероятности. Подставляем оценки Розенблатта-Парзена в (7) и получаем искомую оценку уловной плотности распределения вероятности:

$$p_s(x|u) = \frac{\frac{1}{s}\sum_{i=1}^{s} \frac{1}{c_{s_u}} \Phi\left(\frac{u - u_i}{c_{s_u}}\right) \frac{1}{c_{s_x}} \Phi\left(\frac{\mathrm{x} - x_i}{c_{s_x}}\right)}{\frac{1}{s}\sum_{i=1}^{s} \frac{1}{c_{s_u}} \Phi\left(\frac{u - u_i}{c_{s_u}}\right)} = \#$$

$$= \sum_{i=1}^{s} \omega\left(\frac{u - u_i}{c_{s_u}}\right) \frac{1}{c_{s_x}} \Phi\left(\frac{\mathrm{x} - x_i}{c_{s_x}}\right) \#(8)$$

где $p_s(x \mid u)$ – оценка уловной плотности распределения вероятности;

Ф(z) – колоколообразная функция;

c_s – параметры размытости.

Колоколообразная функция

$$\omega\left(\frac{u-u_i}{c_{s_u}}\right)=\frac{\Phi\left(\frac{u-u_i}{c_{s_u}}\right)}{\sum_{j=1}^{s}\Phi\left(\frac{u-u_j}{c_{s_u}}\right)} \#(9)$$

по форме повторяет ядро Ф(·) и отличается от него на нормирующий множитель:

$$\frac{1}{\sum_{j=1}^{s}\Phi\left(\frac{u-u_j}{c_{s_u}}\right)}. \#(10)$$

За счет этой нормировки

$$\sum_{i=1}^{s}\omega\left(\frac{u-u_i}{c_{s_u}}\right)=1. \#(11)$$

Так как "колоколообразные" ядра *Ф(·)* неотрицательны, то и весовые функции *ω(·)* неотрицательны. Следовательно, оценка $p_s(u \mid x)$ является выпуклой комбинацией дельта-образных функций $Cs_x^{-1}\Phi((x-x_i)Cs_x^{-1})$. Это свойство может нам помочь при анализе этой оценки и других порождаемых ею оценок.

Для объекта с несколькими входами $(u_1, \ldots, u_m) \equiv u$ и одним выходом x оценка плотности вероятности, построенная по выборке $u_{1i}, \ldots, u_{mi}, x_i$, $i=\overline{1,s}$ на базе оценок Розенблатта-Парзена, принимает вид

$$p_s(x|u) = \sum_{i=1}^{s} \omega\left(\frac{u_i - u_{1i}}{c_{s_{u1}}}, \dots, \frac{u_m - u_{mi}}{c_{s_{um}}}\right)\frac{1}{c_{s_x}}\Phi\left(\frac{x - x_i}{c_{s_x}}\right), \#(12)$$

где

$$\omega\left(\frac{u_i - u_{1i}}{c_{s_{u1}}}, \dots, \frac{u_m - u_{mi}}{c_{s_{um}}}\right) = \frac{\prod_{l=1}^{m}\Phi\left(\frac{u_l - u_{li}}{c_{s_l}}\right)}{\sum_{j=1}^{s}\prod_{l=1}^{m}\Phi\left(\frac{u_l - u_{lj}}{c_{s_l}}\right)}, \#(13)$$

где m – размерность вектора U.

Если оценка $p_s(x \mid u)$ используется при расчете соответствующих условных характеристик (например, условных моментов) путем интегрирования по переменной y, то вместо дельта-образной функции по y целесообразно брать дельта-функцию:

$$p_s(x|u) = \sum_{i=1}^{s} \omega\left(\frac{u - u_i}{c_{s_u}}\right)\delta(x - x_i) \ \#(14)$$

где $\delta(x - x_i)$ – дельта-образная функция по x.

При этом интегрирование существенно упрощается и не появляется смещение, пропорциональное коэффициенту размытости c_{s_x}.

По определению условного математического ожидания регрессионную модель можно представить:

$$x_s(u) = M\{X|u\} = \int\limits_{\Omega(x)} xp(x|u)dx = \frac{\int_{\Omega(x)} xp(x,u)dx}{p(x)}. \#(15)$$

Используя вышеприведенные оценки, получим:

$$x_s(u) = \frac{\int_{\Omega(x)} x \frac{1}{s c_{s_x} c_{s_u}} \sum_{i=1}^{s} \Phi\left(\frac{u - u_i}{c_{s_u}}\right) \Phi\left(\frac{\mathrm{x} - x_i}{c_{s_x}}\right) dx}{\frac{1}{s c_{s_x}} \sum_{i=1}^{s} \Phi\left(\frac{u - u_i}{c_{s_u}}\right)} =$$

$$= \frac{\sum_{i=1}^{s} x_i \Phi\left(\frac{u - u_i}{c_{s_u}}\right)}{\sum_{i=1}^{s} \Phi\left(\frac{u - u_i}{c_{s_u}}\right)} \#(16)$$

при условии, что

$$\int\limits_{\Omega(x)} x \frac{1}{s c_{s_x}} \Phi\left(\frac{\mathrm{x} - x_i}{c_{s_x}}\right) dx = x_i\,. \#(17)$$

Таким образом, регрессионную модель получим в виде:

$$x_s(u) = \frac{\sum_{i=1}^{s} x_i \Phi\left(\frac{u - u_i}{c_{s_u}}\right)}{\sum_{i=1}^{s} \Phi\left(\frac{u - u_i}{c_{s_u}}\right)}\,. \#(18)$$

Многомерный аналог в случае, когда входные переменные $\bar{u} = (u^1, u^2, \dots, u^k)$ – вектора, регрессионная модель будет иметь вид:

$$x_s(\bar{u}) = \frac{\sum_{i=1}^{s} x_i \prod_{j=1}^{k} \Phi\left(\frac{u^j - u_i^j}{c_{s_u}}\right)}{\sum_{i=1}^{s} \prod_{j=1}^{k} \Phi\left(\frac{u^j - u_i^j}{c_{s_u}}\right)}\,. \#(19)$$

Значение параметров размытости c_s оказывает существенное влияние на качество работы регрессионных моделей при использовании выборок конечного объема s. Поэтому параметры размытости должны удовлетворять условиям сходимости:

1. $\Phi\left(\frac{u-u_i}{c_s}\right) = \Phi\left(-\frac{u-u_i}{c_s}\right)$,
2. $0 \le \Phi\left(\frac{u-u_i}{c_s}\right) < \infty$,
3. $\lim_{s\to\infty} \frac{1}{c_s}\Phi\left(\frac{u-u_i}{c_s}\right) = \delta(u-u_i)$,
4. $\frac{1}{c_s}\int_{-\infty}^{\infty} \Phi\left(\frac{u-u_i}{c_s}\right) du = 1$,
5. $\lim_{s\to\infty} \prod_{l=1}^{k} c_s^l = 0$,
6. $\lim_{s\to\infty} s\prod_{l=1}^{k} c_s^l = \infty$.

2.2.1 Настройка параметров непараметрической модели

Смысл параметра размытости c_s заключается в ширине захвата колоколообразной функцией выборочных значений, а это определяет, будет ли значение участвовать в оценке. Опишем способы подстройки и последующего выбора параметра размытости.

Задавшись критерием оптимальности, необходимо минимизировать его по искомому параметру, т.е.

$$\rho_{\text{отн}} \to \min_{c_s} \quad \#(20)$$

Для поиска минимума, представляется возможным путь прямого перебора параметров c_s , задав их значения в виде сетки, однако этот процесс занимает достаточно большое количество времени, и его использование становится непозволительной роскошью в задачах большой размерности. Использование методов глобальной оптимизации значительно упрощает задачу. Выбор методов достаточно широк, от классических градиентных до интеллектуальных, например, генетический алгоритм. Опять же, с ростом размерности задачи время оптимизации так же растет. Необходим некоторый иной способ выбора параметра c_s, позволяющий снизить время счета. Попробуем синтезировать данный алгоритм.

Известно, что любую задачу можно свести в единичный куб, не нарушая при этом технологический регламент. Способ нормировки значений можно использовать следующий

$$z_i = \frac{u_{max} - u_i}{u_{max} - u_{min}} \#(21)$$

где u_{max} – максимальное,

u_{min} – минимальное значение в выборке;

u_i – значение координаты, подлежащей нормировке;

z_i – значение после нормировки.

Таким образом, каждая из координат значений выборки окажется в интервале [0,1]. При этом максимальное значение окажется нулем, а минимальное – единицей. Теперь параметр размытости можно брать в скалярном виде.

2.3 Использования метода непараметрического моделирования

Для оценки количества проезжающего транспорта в точках, которые не оборудованы видеокамерами, была предложена следующая формула:

$$x_s = \frac{\sum_{i=1}^{s} x_i \cdot \Phi_1\left(\frac{u_s^1 - u_i^1}{c_1}\right)\Phi_1\left(\frac{u_s^2 - u_i^2}{c_2}\right)\Phi_2\left(\frac{t_s - t_i}{c_3}\right)}{\sum_{i=1}^{s} x_i \cdot \Phi_1\left(\frac{u_s^1 - u_i^1}{c_1}\right)\Phi_1\left(\frac{u_s^2 - u_i^2}{c_2}\right)\Phi_2\left(\frac{t_s - t_i}{c_3}\right)} \#(22)$$

где x_i – измерение в i-той точке;

u_i^1 – широта i-го измерения;

u_i^2 – долгота i-го измерения;

t_i – время i-го измерения;

Φ_1 – колоколообразное ядро Гаусса;

Φ_2 – треугольное ядро;

c_n – параметр размытости;

x_s – оценка в точке s;

u_s^1– широта в точке s;

u_s^2 – долгота в точке s;

t_s – время в точке s.

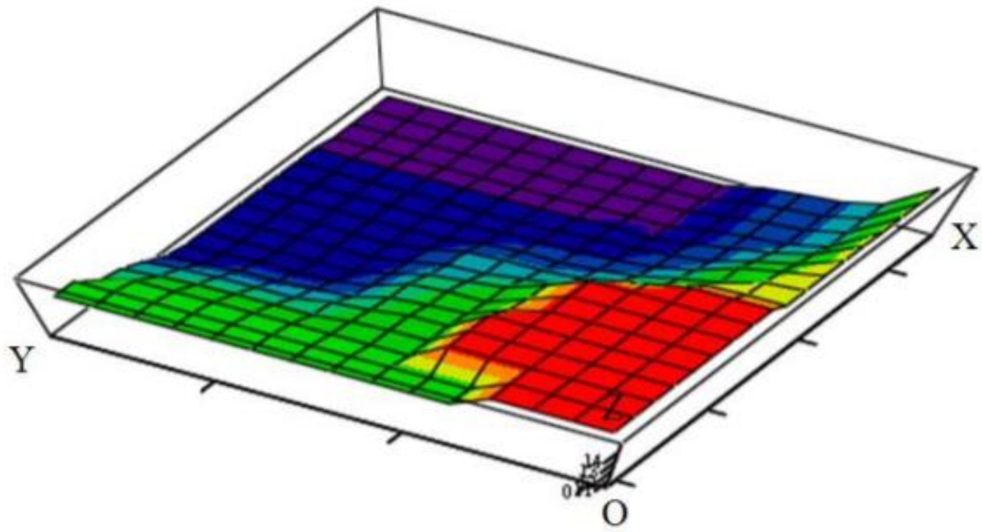

Рисунок 6 – Проверка метода

На Рисунке 6 представлена проверка предложенного метода в среде компьютерной алгебры MathCad. Ось OY – долгота, ось OX – широта, а ось OZ – количество проезжающего транспорта. Данное изображение отображает дорожную ситуацию в течение одной минуты.

2.4 Создание программного продукта

Для написания программы был выбран язык программирования C# и СУБД MySQL. Программа должна позволять пользователю выбрать временной промежуток длительностью одна минута, оценку интенсивности движения за который следует отобразить на экране.

Данные, которые используются для оценки должны загружаться из базы данных в режиме реального времени.

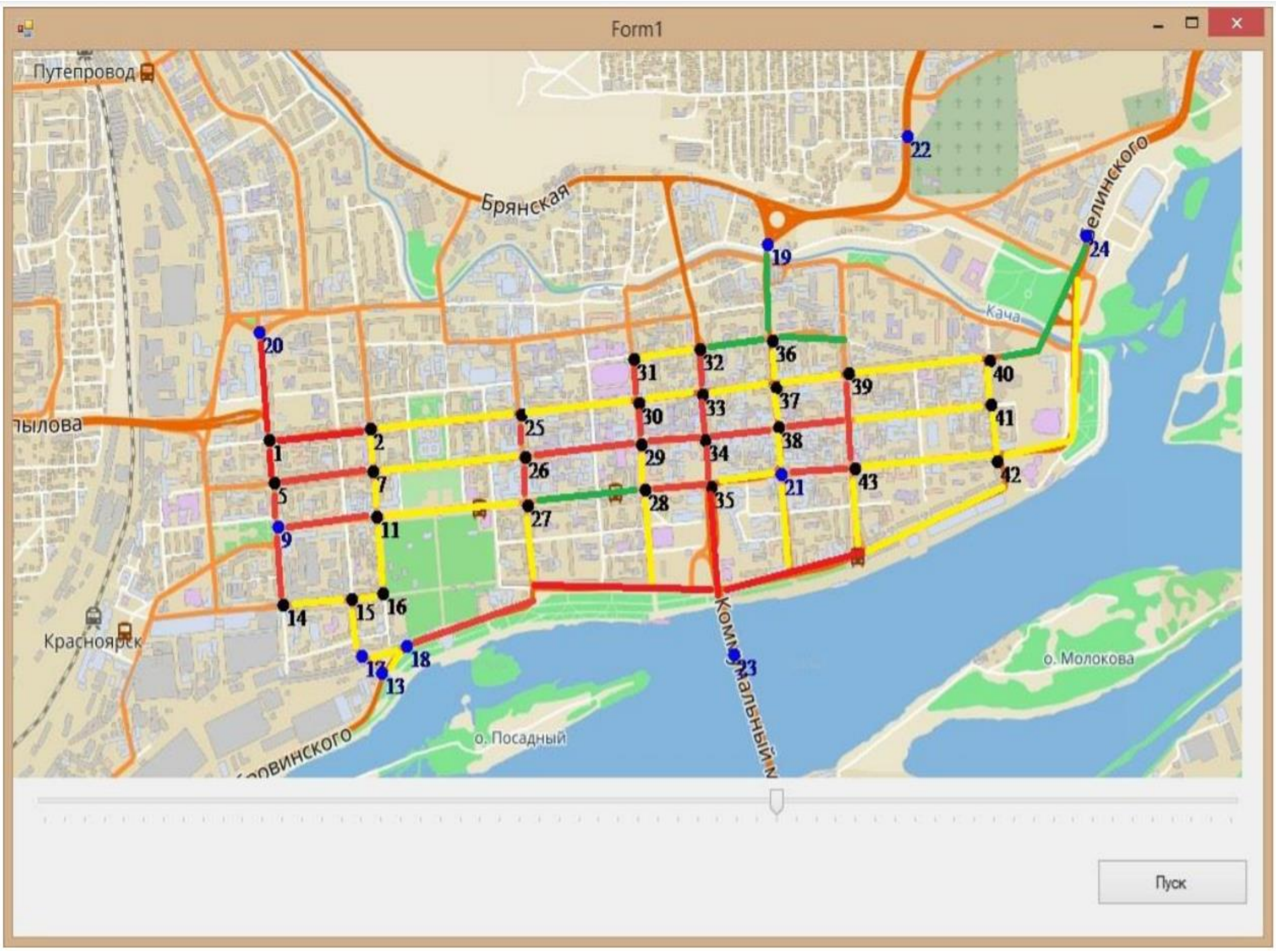

Рисунок 7 – Иллюстрация работы программы

На рисунке 7 изображен интерфейс готового программного продукта. Перед пользователем отображается карта и активная кнопка «Пуск». При нажатии на кнопку «Пуск», на карте отображаются обозначенные перекрестки и становится активна полоса прокрутки времени. Результаты оценки отображаются в графическом виде, в виде проградуированного от зеленого до красного цвета дорог. Наводя курсор мыши на участок дороги, всплывает окно с численным результатом оценки. При использовании пользователем полосы прокрутки времени изображение изменяется.

Выводы

В данном разделе была получена регрессионная модель с использованием оценки Розенблатта-Парзена, которую можно представить в виде формулы (18) и (19) для многомерного случая входного параметра U. Данная модель позволяет вычислить приблизительную плотность потока на заданном транспортном пути.

Для оценки количества проезжающего транспорта в точках, которые не оборудованы видеокамерами, был использован метод непараметрического моделирования, результат которого представлен формулой 22.

На основе полученной математической модели было создано программного обеспечение, позволяющее в реальном времени получать оценку интенсивности движения.

3 Апробация программы и результат исследования

3.1 Апробация программного продукта

Для проверки работы программы внутри исследуемой территории было записано тридцать минут видеоматериала, изучен и сравнен с оценкой в этой точке, которую дал предложенный метод.

Ниже представлена таблица, с истинными значениями количества и проезжающего транспорта и его оценкой.

Таблица 1 – Сравнение результатов

Время	Количество проехавшего транспорта	Оценка количества проехавшего транспорта
8:01	23	20
8:02	25	21
8:03	25	21
8:04	19	16
8:05	17	20
8:06	26	22
8:07	23	20
8:08	13	10
8:09	22	20
8:10	14	13
8:11	21	17
8:12	30	28
8:13	14	15
8:14	22	20
8:15	22	22
8:16	22	23
8:17	24	21
8:18	21	19

Таблица 1 – Продолжение

Время	Количество проехавшего транспорта	Оценка количества проехавшего транспорта
8:19	8	1
8:20	23	22
8:21	24	20
8:22	20	21
8:23	20	20
8:24	31	28
8:25	24	23
8:26	19	11
8:27	20	21
8:28	22	19
8:29	21	18
8:30	33	30

Графическое отображение сравнения объекта и модели представлено на рисунке 8:

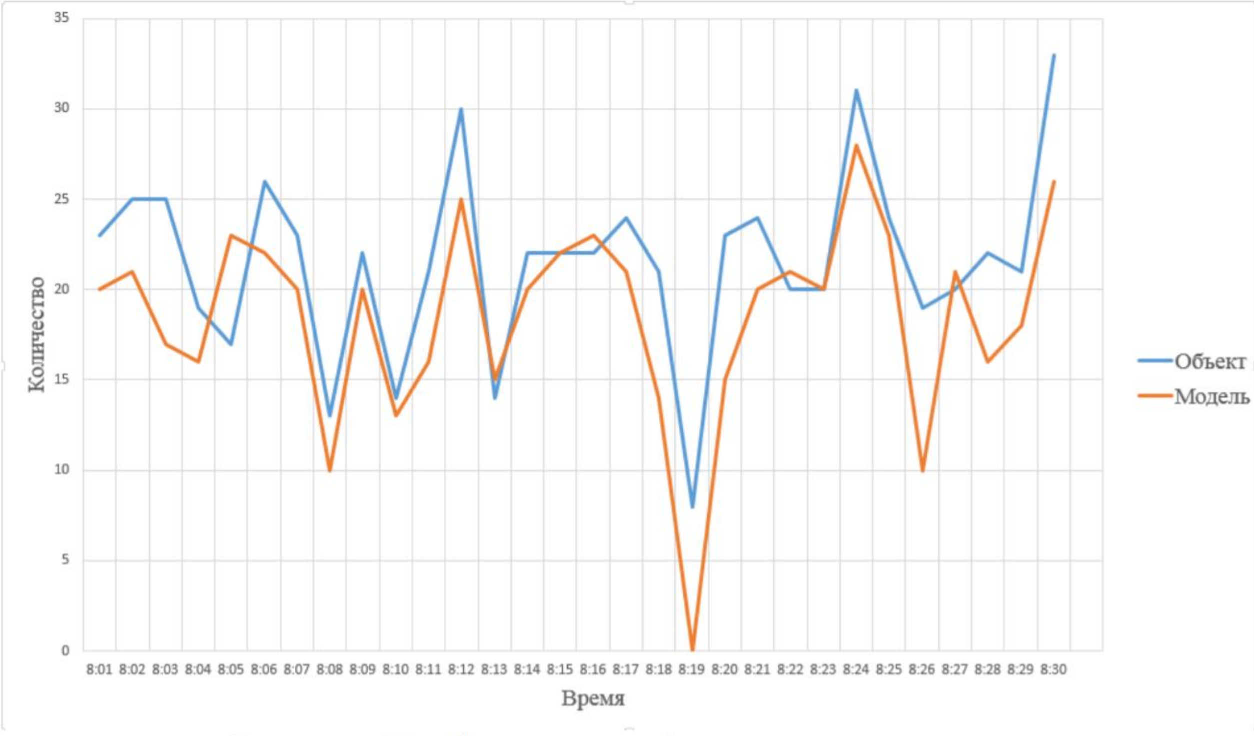

Рисунок 8 – Сравнение объекта и модели

Для расчета относительной ошибки моделирования воспользуемся формулой:

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{s}\sum_{i=1}^{s}\frac{(x_i - x_s)^2}{\frac{1}{s-1}\sum_{i=1}^{s}(m - x_i)^2}}, \#(23)$$

где x_s – значение объекта,

x_i – значение оценки.

В выбранном перекрестке, в изученный временной промежуток относительная ошибка моделирования составила σ = 0,5.

3.2 Метод расчета новых точек наблюдения

Дорожная сеть (см. рисунок 2) представляет собой слабо-связный ориентированный граф. Поэтому удаленность определенного перекрестка от перекрестка с камерой не очевидна, т.к. имеются дороги с односторонним движением.

Чтобы найти самые удаленные от камер видеонаблюдения перекрестки, было решено найти пути, с которыми достижим любой наблюдаемый перекресток ненаблюдаемым перекрестком.

Таблица 2 – Данные о достижимости перекрестков

Номер перекрестка	Длина пути
1	1
2	2
5	1
7	2
11	2
14	1
15	1
16	1
25	3
26	3
27	3
31	5
30	4
29	3
28	2
32	2
33	3
34	2
35	1
36	1
37	2

Таблица 2 – Продолжение

Номер перекрестка	Длина пути
38	1
39	3
40	3
41	2
42	1
43	3

Среди этих путей выберем максимальные, и посмотрим в каких из этих перекрестков оценка количества транспорта максимальна за изученный промежуток времени.

Таким образом мы выберем самый удаленный от камер видеонаблюдения перекрёсток, в котором высокая интенсивность движения.

Заданным требованиям лучше всех отвечает перекресток №31 (пересечение улиц имени Перенсона и Марковского).

Выводы

Для более точной настройки параметров предложенного метода непараметрического моделирования требуется выборка большей мощности.

Для апробации предложенного метода расчета новых точек наблюдения необходимо провести эксперимент.

Заключение

В первой главе рассмотрена роль математического моделирования транспортных путей в современном мире в крупных городах и мегаполисах. Приведен обзор трудов ученых различных стран по созданию, изучению и развитию математических моделей. Были выявлены следующие факторы, говорящие об актуальности выбранной темы:

- компенсация увеличения пропускной способности при развитии сети увеличением спроса и перераспределением его в новых условиях;
- непредсказуемость поведения каждого водителя на дороге;
- влияние случайных факторов.

Были описаны цели и задачи математического моделирования, а также методы моделирования транспортных путей с их характерными особенностями.

Методы математического моделирования с точки зрения математического аппарата, делятся на детерминированные, стохастические, модели-аналоги, статические, динамические, гравитационные и энтропийные модели модель конкурирующих возможностей Страуффера и другие модели.

Во второй главе была получена регрессионная модель с использованием оценки Розенблатта-Парзена, которую можно представить в виде формулы (18) и (19) для многомерного случая входного параметра U. Данная модель позволяет вычислить приблизительную плотность потока на заданном транспортном пути.

Для оценки количества проезжающего транспорта в точках, которые не оборудованы видеокамерами, был использован метод непараметрического моделирования, результат которого представлен формулой 22.

На основе полученной математической модели было создано программного обеспечение, позволяющее в реальном времени получать оценку интенсивности движения.

В третьей главе было выяснено, что для более точной настройки параметров предложенного метода непараметрического моделирования требуется выборка большей мощности.

Для апробации предложенного метода расчета новых точек наблюдения необходимо провести эксперимент.

В ходе данной дипломной работы были изучен методы и способы моделирования транспортных потоков и робастного непараметрического оценивания. Так же было разработано ПО для построения оперативной модели дорожной сети Центрального района г. Красноярск. Был предложен метод расчета нахождения критических точек, наблюдения в которых, улучшит моделирование.

Список используемой литературы

1. Бекмагамбетов М. М. Анализ современных программных средств транспортного моделирования / М. М. Бекмагамбетов, д.т.н., проф., А.В. Кочетков, д.т.н., проф. // Журнал Автомобильных Инженеров. – 2012. – №6. – С. 25-34.

2. В. И. Швецов. Математическое моделирование транспортных потоков. / В. И. Швецов, канд. физ.-мат. наук. – М.: Институт системного анализа РАН, 2003. – 52 с.

3. Васильева, Е. В. Нелинейные транспортные задачи на сетях / Е. В. Васильева, Б. Ю. Левит, В. Н. Лившиц. – М: Финансы и статистика, 1981. – 104 с.

4. Вильсон, А. Дж. Энтропийные методы моделирования сложных систем / А. Дж. Вильсон. – М: Наука, 1978. – 248 с.

5. Дубелир, Г. Д. Городские улицы и мостовые / Г. Д. Дубелир. – Киев, 1912. – 407 с.

6. Ермаков, В.В. Математическое моделирование многополосных транспортных потоков /В.В. Ермаков, С.Г. Журавлев // Третья международная научная конференция «Математическое моделирование и дифференциальные уравнения»: сборник статей Третьей международной конференции. Брест, 17 – 22 сентября 2012 г. – Минск: БГУ, 2012. – С. 133-145.

7. Математическое моделирование автотранспортных потоков / Н. Н. Смирнов [и др.]. – Москва: Изд-во МГУ им. Ломоносова, 1999. – 316 с.

8. Математическое моделирование автотранспортных потоков / Н. Н. Смирнов [и др.]. – Москва: Изд-во МГУ им. Ломоносова, 1999. – 316 с.

9. Медведев, А. В. Теория непараметрических систем. Моделирование / А. В. Медведев // Вестник СибГАУ им. акад. М.Ф. Решетнева. – 2010. – №4. – С. 4-9.

10. Медведев, А. В. Теория непараметрических систем. Процессы / А. В. Медведев // Вестник СибГАУ им. акад. М.Ф. Решетнева. – 2010. – №3. – С. 4-9.
11. Моделирование транспортных потоков [Электронный ресурс]. – Режим доступа: http://ptv-vision.ru/produkty.
12. Рубан, А. И. Методы анализа данных: Учеб. пособие. 2-е изд., исправл. и доп. / А. И. Рубан. – Красноярск: ИПЦ КГТУ, 2004. – 319 с.
13. Семенов, В. В. Исторический анализ моделирования транспортных процессов и транспортной инфраструктуры /В. В. Семенов, А. В. Ермаков // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша. – 2015. – №3. – С. 2-37.
14. Семенов, В. В. Математическое моделирование динамики транспортных потоков мегаполиса // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша. – 2004. – №34. – С 1-38.
15. Транспортное моделирование: Методологические основы, программные средства и практические рекомендации / М-во трансп. Российской Федерации, Науч.-исслед. ин-т автомобильного трансп. (ОАО "НИИАТ"); [подгот.: В. В. Донченко и др.]. – М.: Автополис-плюс, 2008. – 111 с.
16. Трофименко, Ю.В. Транспортное планирование: формирование эффективных транспортных систем крупных городов / Ю. В. Трофименко, М. Р. Якимов – М.: Логос, 2013.
17. Хейт, Ф. Математическая теория транспортных потоков / Ф. Хейт. – М.: Мир, 1966. – 286 с.
18. Хейт, Ф. Математическая теория транспортных потоков / Ф. Хейт. – Москва: Мир, 1966. – 286 с.
19. Швецов, В. И. Математическое моделирование транспортных потоков / В. И. Швецов // Автоматика и телемеханика. – 2003. – №11. – С. 3-46.
20. Шепета А.А. Совершенствование организации дорожного движения на участках УДС Железнодорожного района г. Красноярска (ул Маерчака, ул. Железнодорожников): ВКР: 190700.62 / Сиб. фед. ун-т. К., 2015. 120 с.

21. Якимов, М. Р. Транспортное планирование: практические рекомендации по созданию транспортных моделей городов в программном комплексе PTV Vision VISUM: монография / М.Р. Якимов, Ю.А. Попов. – М.: Логос, 2014. – 200 с.
22. Якимов, М. Р. Транспортное планирование: создание транспортных моделей городов: монография / М.Р. Якимов. – М.: Логос, 2013. – 188 с.
23. Alberti E., Belli G. Contributions to the Boltzmann-like approach for traffic flow—A model for concentration dependent driving programs // Transpn. Res. 1978. V. 12. P. 33–42.
24. Chechina A. A., Churbanova N. G., Trapeznikova M. A. Cellular automata in application to traffic flow simulation / Keldysh Institute of Applied Mathematics RAS, 4 Miusskaya Square, Moscow, Russia. 2018.
25. Elibrary – Научная электронная библиотека [Электронный ресурс]: Поиск. – Режим доступа: http://elibrary.ru.
26. Fotheringham, A.S. Modelling hierarchical destination choice // Envir. & Plan. A. 1986. V. 18. P. 401 – 418.
27. Greenshields, B. D. A study of traffic capacity// Highway Res. Board Proc. 1934. Vol. 14.
28. Greenshields, B. D. The photographic method of studying traffic behavior // Highway Res. Board Proc. 1933.
29. Helbing, D. Gas-kinetic derivation of Navier-Stokes-like traffic equations // Phys. Rev. E. 1996. Vol.53. № 3. P.2366 – 2381.
30. Kühne R. D. Phys. Bl. 1991. P. 201.
31. Kühne, R. D., Beckschulte, R. In Proceedings of 12th International Symposium on the Theory of Traffic Flow and Transportation / edited by C.F. Daganzo. Amsterdam: Elsevier, 1993. P. 367.
32. Ligthill, M. J., Whitham, F. R. S. On kinetic waves II. A theory of traffic flow on crowded roads // Proc. of the Royal Society Ser. A. 1995. – Vol. 229. – No. 1178. – P. 317-345.

33. Musha, T., Higuchi, H. The 1/f fluctuation of traffic current on an expressway // Journal of Applied Physics. 1978. № 15.
34. Olstam, J. J. Comparison of Car-following models / J. J. Olstam, A. Tapani // Swedish National Road and Transpost Research Institute. – 2004. – 45 c.
35. Payne, H. J. Models of Freeway Traffic and Control // Mathematical Models of Public Systems. La Jolla: Simulation Council. CA. 1971. Vol.1. P. 51.
36. Pipes, L. A An operational analysis of traffic dynamics // J. Appl. Phys. 1953. V. 24. P. 274 – 281.
37. Prigogine, I., Herman R. Kinetic theory of vehicular traffic. – New York: Elsevier, 1971.
38. Rödiger, M. Chaotische Lösungennichtlinearer Wellengleichungenmit Anwendungen in der Verkehrsfkub theorie: Master Thesis. University of Münster, 1990.
39. Sheffi, Y. Urban Transportation Networks: User Equilibrium Analisys and Mathematical Algorithms, MTI, 1985.
40. Sick, B. Dynamishe Effekte be in ichtlinearer Wellengleichungenmit Anwendungen in der Verkehrsfkub theorie: Master Thesis. University of Ulm, 1989.
Stouffer, S. A. Intervening opportunities: a theory relating mobility and distance // Amer. Sociolog. Rev. 1940. V. 5. P. 845 – 867.