МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«Тольяттинский государственный университет»

Институт математики, физики и информационных технологий
(наименование института полностью)

Кафедра «Высшая математика и математическое образование»
(наименование)

44.04.01 Педагогическое образование
(код и наименование направления подготовки)

Математическое образование
(направленность (профиль))

ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА (МАГИСТЕРСКАЯ ДИССЕРТАЦИЯ)

на тему «Обобщающие уроки по теме «Параллельность и перпендикулярность плоскостей» как форма систематизации знаний обучающихся общеобразовательной школы»

Студент	Е.А. Кузякина	
	(И.О. Фамилия)	(личная подпись)
Научный руководитель	д-р пед. наук, профессор С.Н. Дорофеев	
	(ученая степень, звание, И.О. Фамилия)	

Тольятти 2021

Оглавление

Введение

Актуальность и научная значимость настоящего исследования. Тема о параллельности и перпендикулярности плоскостей в школьном курсе геометрии старших классов является одной из основных и традиционных тем. Она является обобщением и систематизацией знаний обучающихся, полученных ими ранее в курсе геометрии основной школы о параллельности и перпендикулярности прямых на плоскости.

Понятия «параллельность» и «перпендикулярность» лежат в основе других тем «Многогранники», «Преобразования пространства», используются при решении геометрических задач базового и профильного уровней, включенных в содержание итоговой аттестации по математике в 9 и 11 классах общеобразовательной школы.

Обобщающие уроки по этой теме позволяют добиться наибольшей эффективности при усваивании материала по стереометрии и предоставляют определенные возможности для систематизации знаний учащихся.

Именно этим, в первую очередь, обусловлена актуальность данной темы.

В теории и методике обучения геометрии тема о параллельности и перпендикулярности плоскостей и систематизация знаний учащихся по стереометрии занимают важное место.

В настоящее время система образования придерживается личностно-ориентированного подхода. Уровневая дифференциация при проведении обобщающих уроков является эффективным средством, обеспечивающим такой подход, и играет важную роль в становления старшеклассников, особенно, при выборе своего профессионального будущего.

Актуальность темы данной работы обусловлена еще и необходимостью постоянного совершенствования программ, методического обеспечения и их учебного содержания, учитывая необходимость систематизации знаний по стереометрии.

Еще один аспект актуальности обусловлен тем, что при сдаче экзаменов в форме тестирования, решение стереометрических задач вызывает у большинства выпускников определенные трудности.

Именно поэтому повышается актуальность полноценного и детального изучения темы о параллельности и перпендикулярности плоскостей, что невозможно сделать без индивидуального подхода к систематизации знаний учащихся.

Из всего вышеизложенного можно сделать вывод, что *актуальность темы исследования* обусловлена создавшимся к настоящему времени **противоречием** между необходимостью повышения качества геометрических знаний и умений их применения на практике при решении задач и недостаточным вниманием к обобщающим урокам геометрии при традиционном обучении в общеобразовательной школе.

Перечисленные противоречия дали возможность сформулировать **проблему диссертационного исследования**: выявление возможностей обобщающих уроков геометрии в систематизации и обобщения на примере темы «Параллельность и перпендикулярность плоскостей».

Объект исследования: процесс обучения математике в старших классах общеобразовательной школы.

Предметом исследования являются методические особенности организации обобщающих уроков как формы систематизации знаний учащихся старших классов при изучении темы о параллельности и перпендикулярности плоскостей.

Цель исследования: выявить возможности обобщающих уроков геометрии в 10-11 классах как формы систематизации геометрических знаний и умений на примере темы «Параллельность и перпендикулярность плоскостей».

Гипотеза исследования основана на предположении о том, что использование определенной системы задач и технологии уровневой дифференциации на обобщающих уроках по теме «Параллельность и перпендикулярность» будут способствовать повышению качества знаний обучающихся по стереометрии.

Для достижения поставленной цели необходимо решить следующие **задачи исследования:**

1. Проанализировать понятие, виды и особенности обобщающего урока математики (геометрии).

2. Определить содержание и методику проведения обобщающих уроков по теме «Параллельность и перпендикулярность плоскостей» в курсе геометрии старших классов.

3. Рассмотреть современные технологии обучения математике, позволяющие осуществить систематизацию знаний учащихся с помощью обобщающих уроков по геометрии.

4. Определить основные цели и задачи обучения теме «Параллельность и перпендикулярность плоскостей» в курсе геометрии старших классов.

5. Проанализировать содержание теоретического материала темы «Параллельность и перпендикулярность плоскостей» в курсе геометрии общеобразовательной школы.

6. Разобрать систему знаний учащихся посредством типовых задач по стереометрии на обобщающих уроках по теме «Параллельность и перпендикулярность плоскостей».

7. Использовать нестандартные задачи для систематизации и обобщения знаний на уроках по теме «Параллельность и перпендикулярность плоскостей».

8. Провести педагогическую апробацию обобщающихся уроков по теме «Параллельность и перпендикулярность плоскостей» и описать педагогический эксперимент.

Теоретико-методологическую основу исследования составили работы В.А. Гусева [22] , В.И. Мишина [37], В.А. Далингера [36], С.Г. Манвелова [35].

Базовыми для настоящего исследования явились работы В.В. Орлова [41], О.В. Шереметьевой [72], М.Ю. Хевсовской [68].

Методы исследования, использованные для решения поставленных задач: исследование психолого-педагогической, научной и учебно-методической литературы; изучение, мониторинг и обобщение школьной практики; анализ собственного опыта работы в школе; наблюдение за учащимися; тестирование школьников; анализ результатов опытно-экспериментальной работы.

Основные этапы исследования:

1 этап (2018/19 уч.г.): анализ ранее написанных исследований по теме диссертации, анализ школьных учебников, нормативных документов (стандартов, программ), анализ опыта работы школы по данной теме;

2 этап (2019/20 уч.г.) определение теоретической базы исследования по теме диссертации;

3 этап (2019/20 уч.г.): определение методических аспектов исследования, разработка типовых и нестандартных задач по теме «Параллельность и перпендикулярность плоскостей»;

4 этап (2020/21 уч.г.): оформление диссертации, корректировка прежде представленных материалов, детализация аппарата исследования, описание экспериментальной работы, формулирование выводов.

Опытно-экспериментальная база исследования: Московская область, Орехово-Зуевский район, г. Ликино-Дулёво, МОУ Ликино-Дулёвская гимназия.

Новизна исследования заключается в том, что в нем предложены методические рекомендации по применению обобщающих уроков при изучении темы «Перпендикулярность и параллельность плоскостей» в 10 классах с углубленным изучением математики.

Теоретическая значимость исследования состоит в том, что в нем:

− сформулированы теоретические основы обобщающих уроков по стереометрии, проанализированы понятие, виды и особенности обобщающего урока математики.

Практическая значимость исследования состоит в том, что предложенная система задач по теме данной работы может быть непосредственно применена на практике для старшеклассников в процессе обучения стереометрии.

Достоверность результатов и выводов, приобретенных в период проведения исследования, гарантировалось: комплексом теоретических и практических методов исследования, исследованием педагогической практики и личным опытом работы в общеобразовательной школе.

Личное участие автора в организации и проведении исследования состоит в решении поставленных в исследовании задач и оформлении всей ВКР.

Апробация и внедрение результатов работы велись в течение всего исследования. *Экспериментальная проверка* представленных методических рекомендаций была выполнена в период производственной (научно-исследовательской) и преддипломной практик на базе кафедры «Высшая математика и математическое образование» Тольяттинского государственного университета, а также в период работы преподавателем математики на базе МОУ Ликино-Дулёвской гимназии (Московская область, г. Ликино-Дулёво).

Теоретические выводы и практические результаты исследования обсуждались на заседаниях методических объединений учителей математики МОУ Ликино-Дулёвской гимназии (Московская область, г. Ликино-Дулёво), были представлены на педагогическом совете в рамках обмена опытом среди учителей школы.

На защиту выносятся:

1. Методические рекомендации по систематизации знаний обучающихся по теме «Параллельность и перпендикулярность плоскостей» в курсе геометрии общеобразовательной школы.

2. Система упражнений по теме «Параллельность и перпендикулярность плоскостей» для обучающихся 10-х классов.

Структура магистерской диссертации. Работа состоит из введения, двух глав, заключения, содержит 25 рисунков, 6 таблиц, списка используемой литературы (80 источников). Основной текст работы изложен на 72 страницах.

Глава 1 Теоретические основы организации обобщающих уроков по математике в общеобразовательной школе

1.1 Понятие, виды и особенности обобщающего урока математики

С позиции логики «обобщение - это построение (выведение) универсальных и экзистенциальных утверждений: а) в системах дедуктивной логики - на основе постулируемых правил построения таких утверждений (правил вывода для кванторов общности и существования) – так называемое обобщение переменных; б) в системах индуктивной логики на основе опытных (экспериментальных) данных («данных эмпирических свидетельств»)– так называемое индуктивные обобщения»[20].С познавательно-оценочной (и методической) точки зрения обобщение - это «одно из важнейших средств научного познания, процедура перехода на более высокий уровень абстракции на основе выявления (в рассматриваемой области предметов) общих для этих предметов признаков: свойств, отношений, тенденций развития и т.п.»[66].

В философском энциклопедическом словаре обобщение устанавливается как «мыслительный переход:

1. От отдельных актов, событий к отождествлению их в мыслях (Предмет -> Мысль). 2. От одной мысли к другой (Мысль -> Мысль)»[66].

Д.П. Горский говорит нам о том, что «обобщение это мыслительная операции, переход от мысли об индивидуальном, к мысли об общем, от мысли об общем к мыслям о более общем; переход от отдельных фактов, предметов и явлений к отождествлению их в мыслях и образованию о них общих понятий и суждений»[20].

В литературе психолого-педагогического характера существуют разнообразные комбинации к установлению понятия «обобщение».

С.Л. Рубинштейн высказывается о мышлении, пишет, что «всякое мышление совершается в обобщениях. Оно всегда идет от единичного к общему и от общего к единичному. Мышление - это движение мысли, раскрывающее связь, которая ведет от отдельного к общему и от общего к отдельному. Мышление - это опосредованное - основанное на раскрытии связей, отношений, опосредований - и обобщенное познание объективной реальности» [54, С. 310].

В психологической теории Л.С. Выготского «обобщение - отдельный способ отражения действительности в сознании индивида» [17].

В психологическом словаре, своей редакцией В.В. Давыдова, определение обобщения дается следующим образом: «Обобщение - одна из основных характеристик познавательных процессов, состоящая в выделении и фиксации относительно устойчивых, инвариантных свойств предметов и их отношений» [52].

При рассмотрении педагогического энциклопедического словаря можно разыскать в нем определение «обобщение» в следующей трактовке «переход на более высокую ступень абстракции путем выявления общих признаков (свойств, отношений, тенденций развития и т.п.) предметов рассматриваемой области; влечет за собой появление новых научных понятий, законов, теорий. Обобщение обеспечивает мышлению учащихся определенность и последовательность» [44].

«Осмысление непосредственно перерастает в процесс обобщения знаний, в ходе которого обобщаются и объединяются общие существенные черты предметов и явлений действительности, изучаемых в соответствующий период обучения»[43, с. 147] - высказывается Ю.К. Бабанский.

При преподавании математики популярным считается определение обобщения, даваемое через множества. Д. Пойя [48] и Ю.М. Колягин [38] вводят обобщение как переход от имеющегося множества предметов к рассмотрению более «ёмкого» множества, содержащего уже имеющегося множества.

В учебниках согласно методологии обучения математики понятие обобщения нередко встречается только как «операции умственного исследования обобщенных основных свойств, которые принадлежат только данному классу предметов или отношений» [37].

Обобщение как перевод от понятий и теорем к более общим раскрывают работы М.С. Бернштейна [9], К.С. Богушевского [11], Д.И. Розенфельда [53], А.Г. Мордковича [39] и других.

Я.П. Понарин [49], Р.Г. Хазанкин [26] и другие анализируют обобщение как переход от основных задач к более трудным.

В работах Л.М. Фридмана [67], П.М. Эрдниева [75] и других понятие обобщение представлено в виде механизма при составлении всевозможных модификаций.

А.И. Островский [42], Е.С. Канин [29], Г.В. Дорофеев [23] и другие рассматривают обобщение приемов решения задач.

В.А. Далингер [36] в своем труде описывает «обобщение как средство систематизации математических знаний и умений».

Г.И. Саранцев в книге «Общая методика преподавания математики» рассматривает «обобщение как эвристический прием открытия новых фактов»[58]. Геннадий Иванович рассматривает обобщение, как форму перехода от отдельного к общему, основная цель которого представляет собой выделение общих основных свойств, которые принадлежат определенному классу объектов.

В.Г. Болтянский [12], Ю.М. Колягин [38], Д. Пойа [48], Г.И. Саранцев [58] и другие говорят о необходимости проведения обобщения в преподавании математики. Эти ученые утверждают, что знания будут являться формальными, если за данными знаниями не будет стоять систематизация и обобщение мыслей учащихся.

П.М. Эрдниев дает понятие обобщения, как помощь в обучении при самостоятельном расширении и углублении знаний которые уже должны быть сформированы у учеников, так как «обобщение связано с преобразованием мыслей, с умственным экспериментированием; с развитием интуиции и перебором различных образов при отыскании общего знания. Обобщение есть одно из самых важных средств самообучения, автодидактики»[75]. П.М. Эрдниев выделяет способность обобщать, так как данная способность обобщать является неотъемлемой частью творческого мышления, так как «этим путем мысль человека выходит за пределы известного, пролагая путь к неизвестному» [75, с. 61].

Благодаря обобщению формируется креативность обучающихся; совершается «развитие интереса при решении задач у учащихся»[61], «формирование и развития умения анализировать информацию, что имеет большое значение в формировании мыслительных процессов учащихся; развитие умения видеть за теоретическими обозначениями практические связи при решении задач»[34].

Задачи могут расцениваться как цель, так и средство при обучении математике. Согласно данной причине следует применять способ обобщения в процессе обучения учащихся решению задач, потому что разные виды обобщения могут содействовать выводу общего метода решения нестандартных задач из решений ключевых задач, выступать как один из методов решения задач. При составлении нестандартных задач обобщение представляет собой средство разновидности ключевых задачи.

Обобщение играет наиглавнейшую роль в процессе обучения математики. Из-за обобщения знаний у учащихся развиваются и углубляются их восприятие окружающего мира, а так же происходит приведение в систему этих знаний. Обобщение содействует формированию и развитию мотивации к изучению математики. Обобщение содействует углублению внутрипредметных взаимосвязей, формирует творческое мышление и познавательный интерес в процессе обучения, что является немаловажной стороной мыслительной деятельности учащихся. Необходимо использовать потенциал обобщения в процессе осуществления преподавания применения алгоритмов при решении математических задач. При решении задач обобщение может выполняться как метод решения, а также, помочь в выводе метода решения задачи, а так же удобно использовать обобщение при составлении новых задач.

Не используя уроки обобщения и систематизации знаний, которые в другой методической литературе могут называться уроками обобщающего повторения, процесс овладения учащимися учебного материала не будет завершен.

На этих уроках делается акцент на главные и существенные понятия, законы и закономерности, основные теории и основные идеи, а также устанавливают причинно-следственные связи в отношении между главными явлениями, процессами, событиями, охватывают широкие категории понятий и их систематизацию и общие закономерности.

Подчеркивают некоторые виды обобщающих уроков:

Урок-лекция. Конструкция лекции обуславливается в первую очередь подбором темы, цели и задач предложенного урока.

Данный вид урока строится с учетом: взаимодействия всех этапов урока; его организации, постановки цели урока и актуализации знаний и умений школьников, сообщения знаний учителем и усвоение их учащимися, постановки домашнего задания.

Возможно создать урок-лекцию согласно нижеследующего плана:

1. Постановка проблемной ситуации при установке темы, определение цели и задач урока-лекции.

2. Разрешение проблемной ситуации при осуществлении запланированного плана урока-лекции.

3. Подчеркивание основных знаний и умений и их оформление.

4.Восстановление обучающимися основных знаний и умений по моделям, записям и так далее.

5.Использование приобретенных познаний.

6.Систематизация и обобщение изученного материала.

7.Создание домашнего задания, постановкой вопросов с целью самопроверки, информировании о перечне предложенной литературы и перечня задач из учебника.

Урок-дискуссия. Урок-конференция. Фундаментом уроков –дискуссий является разбор и анализ конфликтных вопросов, проблем, других подходов при обосновании суждений, решение заданий и т.д.

В случае если, урок строиться на разговоре минимум двух разных точек зрения на одну проблему, то это называется уроком-дискуссией.

Уроки-дискуссии могут быть типовыми, когда конфликтные вопросы решаются в процессе групповой работы, и массовые, когда в споре принимают участие все обучающиеся класса.

Необходимо сказать, что дискуссия является кроме того одним из основных структурных элементов урока-диспута, суда, конференции, заседания ученого совета и так далее.

Урок - консультация. При проведении урока-консультации проводится организованная работа не только по устранению уязвимых мест в компетенциях обучающихся, их обобщения и систематизации учебного материала, но и по формированию умений обучающихся.

В процессе урока-консультации преподаватель получит возможность узнать обучающихся с наилучшей стороны, дополнить данные о динамике их продвижения, обнаружить отличающихся любопытством и пассивных обучающихся, содействовать тем, кто ощущает трудности и прийти им на помощь.

Помощь оказывается с помощью использования индивидуальных и групповых форм работы, где помощниками могут быть консультанты из учащихся класса, которые хорошо поняли теоретические и практические вопросы по изучаемой теме.

Урок-семинар. Семинары содействуют формированию способствующих познанию и экспериментальных умений обучающихся, продвижению культуры общения.

В начале семинарского урока учитель, с помощью вступительного слова, сообщает задачи данного семинара, порядок их проведения.

Учитель указывает на то, на что следует обратить внимание в первую очередь, что обязательно нужно кратко записать в тетрадь в виде опорного конспекта, дает указания для проведения семинарского урока.

После озвучивания цели на урок, наступает необходимость рассмотрение вопросов, которые были вынесены на семинарское занятие.

Представление вопросов, ранее выданных учителем, происходит в разных формах: развернутой беседы, сообщений, дискуссии, чтения первоисточников с определенными комментариями, рефератов, докладов и т.д.

После этого учитель вносит поправки или дополняет рассказ учащегося, отвечает на их вопросы и комментирует их выступления.

Подводя итого урока, учитель подчеркивает различные точки зрения выступивших школьников, оценивает их содержание, форму докладов, указывая при этом их неточности и способы их дальнейшего исправления.

Проведение семинаров является одной из форм лекционно-семинарской системы концепции обучения, расширяющей область их использования.

Процедура обобщения и систематизации знаний объясняется следующей очередностью операций: от получения, понимания и обобщения частных факторов к формированию понятий, их групп и классов, от понятий – к пониманию наиболее сложной системы знаний, освоение основными теориями и главными идеями осваиваемого предмета.

Вследствие этого, на уроке обобщения и систематизации знаний выделяют следующие структурные компоненты:

1. Постановка цели урока и мотивация учебной деятельности учащихся.

2. Воспроизведение и корректировка основных знаний учащихся.

3. Повторение и анализ основных фактов, событий, явлений.

4. Обобщение и систематизация понятий, усвоение системы знаний и их использование для объяснения новых фактов и выполнения практических заданий.

5. Усвоение основных идей и теорий на основе крупной систематизации знаний.

6. Подведение итогов урока.

Отличительными особенностями обобщающих уроков математики могут являться:

1. Высокий уровень знаний, умений и навыков учащихся, развитие у них ценностных установок, формирование мировоззрения, развитие креативных способностей.

2. Рациональная организация работы всех обучающихся и усвоение ими большого объема учебного материала за небольшой промежуток времени.

3. Наличие на уроках заданий, реализация которых позволяет переходить от частного обобщения к более широким обобщениям, что способствует выявлению основ изучаемых процессов.

4. Наличие проблемных вопросов, направленных на создание поисковых ситуаций и заданий, требующих сопоставления, сравнения, обобщения.

5. Сочетание работы над выводами с развитием умений и навыков учебной деятельности, формирование образных и понятийных обобщений.

6. Создание творческой атмосферы и доверительной обстановки на уроке, которые обеспечивают усвоение материала обучающимися на более углубленном уровне.

1.2 Содержание и методика проведения обобщающих уроков по теме «Параллельность и перпендикулярность плоскостей» в курсе геометрии

В ФГОС тема «Параллельность и перпендикулярность плоскостей» рассматривается в курсе геометрии, причем данный курс рассматривается в двух уровнях: базовом и профильном. В данной теме на двух уровнях рассматриваются признаки и свойства параллельных и перпендикулярных плоскостей, а также расстояние между параллельными плоскостями.

Требования к уровню подготовки на базовом и профильном уровне имеют ряд сходств:

1) использовать при решении стереометрических задач планиметрические факты и методы;
2) проводить доказательные рассуждения в ходе решения задач;
3) использовать приобретенные знания и умения в практической деятельности и повседневной жизни для:

− исследования (моделирования) несложных практических ситуаций на основе изученных формул и свойств фигур;

− вычисления объемов и площадей поверхностей пространственных тел при решении практических задач, используя при необходимости справочники и вычислительные устройства.

На базовом уровне ученика учат описывать взаимное расположение прямых и плоскостей в пространстве, аргументировать свои суждения об этом расположении; анализировать в простейших случаях взаимное расположение объектов в пространстве.

На профильном уровне ученик должен уметь самостоятельно изображать геометрические фигуры и тела, выполнять чертеж по условию задачи; применять координатно-векторный метод для вычисления отношений, расстояний и углов.

Что на профильном, что и на базовом уровне в теме «Параллельность и перпендикулярность плоскостей» преподаватель вводит основные понятия по теме и формулу для нахождения расстояния между двумя параллельными плоскостями.

Учебник Атанесяна Л.С., Бутусова В.Ф. и других “Геометрия,10-11 класс” дает возможность изучать данную тему как на базовом(1,5 часов в неделю), так и на углубленном (2 часа в неделю) уровнях.

Параллельность плоскостей, как на базовом, так и на углубленном уровне, коллектив авторов рассматривает в параграфе 3 первой главы. Данный параграф делится на два пункта:

1. Параллельные плоскости.
2. Свойства параллельных плоскостей.

В результате освоения данной темы учащиеся на базовом уровне научиться формулировать определение параллельных плоскостей и учится формулировать и доказывать утверждения о признаке и свойствах параллельных плоскостей.

Учащиеся после прохождения данной темы на базовом уровне должны решать задачи, используя данные учителем утверждения на вычисления и доказательство, связанные на параллельность плоскостей.

Все результаты освоения данной темы на базовом уровне совпадают с результатами освоения на углубленном уровне.

Перпендикулярность плоскостей, также, как и параллельность на базовом и углубленном уровне, рассматривается в пункте 2.3 второй главы, в двух пунктах:

1) двугранный угол;

2) признак перпендикулярности двух плоскостей.

После изучения данной темы учащийся может объяснить, какая фигура называется двугранном углом и как его измерить; доказывать, что любой линейный угол в двугранном угле равен любому имеющемуся линейному углу в данном двугранном угле; формулировать понятие взаимно перпендикулярных плоскостей, формулировать и доказывать теорему о признаке перпендикулярности двух плоскостей.

Результаты освоения данной темы на базовом и углубленном уровне одинаковы.

После изучения темы «Параллельности и перпендикулярности плоскостей» на обобщающих уроках учителю целесообразно провести комплексное повторение предоставленной темы.

В первую очередь, следует провести комплексное повторение теоретического материала, который может быть представлен в виде карточек.

В карточках даны теоретические вопросы данной темы.

Карточки выдаются ученикам за одну-две недели до обобщающих уроков для усвоения тем.

Затем, учитель может провести математический диктант на основные определения и свойств параллельных и перпендикулярных плоскостей.

Математический диктант включает в себя вопросы, представленные в карточках, но требующие краткого ответа.

После анализа результатов математического диктанта, следует совместно с учащимися рассмотреть задачи, вызывающие у них затруднения при решении по данной теме, или предложить для решения задачи более высокого уровня.

Повторив теоретический и практический материал, дать ученикам контрольную работу по теме "Параллельность и перпендикулярность плоскостей".

В завершении обобщающих уроков преподаватель устраивает зачет по данной теме.

В зачет учитель может ввести как теоретический материал, так и задачи по теме (требующие элементарных доказательств и вычислений).

1.3 Современные технологии обучения математике для систематизации знаний учащихся с помощью обобщающих уроков по геометрии

Технология-комплекс методов и инструментов для достижения желаемого результата; в широком смысле — использование научного знания для решения практических задач.

Для воплощения на практике требований, которые выдвигает федерального государственного образовательного стандарта, все чаще становятся актуальными следующие образовательные технологии:

−Здоровьесберегающие технологии.

−Информационно – коммуникационная технология.

− Проектная технология.

−Технологии уровневой дифференциации.

−Игровые технологии.

−Технология развития критического мышления.

−Технология интегрированного обучения.

−Групповые технологии.

−Технология развивающего обучения.

−Технология проблемного обучения.

−Модульная технология.

−Технология мастерских.

−Кейс–технология.

−Педагогика сотрудничества.

−Традиционные технологии (классно-урочная система).

Охарактеризуем наиболее распространенные из них.

Информационно – коммуникационная технология. Информационные технологии могут применяться на любых этапах организации урока математики:

1. Частичная замена материалов учебника на дополнительный материал.

2. Использование компьютеризированных программ для отработки учебного материала.

3. Выполнение домашней работы и творческих заданий.

4. Применение ПК для вычислительных расчетов, построения чертежей.

5. Использование программного оборудования, моделирующих эксперименты и практические работы.

6. Использование видеоигровых и увлекательных программ по математике.

7. Использование информационно-справочных программ.

При использовании информационно-коммуникативных технологий появляются новые методы обучения, а также их формы.

Компьютерные технологии на уроке математики позволяют: полноценно, лаконично и наглядно представить изучаемый материал; проводить разностороннюю проверку знаний школьников, экономить время; учитывать различные системы восприятия обучающихся, имеющие определенный уровень готовности восприятия материала; направлены на повышение мотивации обучающихся к изучению математики; активизации их познавательной деятельности.

Кроме того, использование информационно-коммуникативных технологий помогает учителям в их профессиональной деятельности для:

- постановки каждому учащемуся определённых задач в зависимости от его способностей, уровня мотивации и уровня подготовки;

–решения общеобразовательных, воспитательных и развивающих задач уроков;

–частичного освобождения от контролирующих функций;

−формирования у обучающихся навыков самостоятельного овладения знаниями и умениями;

− применения цифровых средств учебного назначения различных типов, активизирующих учебную работу школьников;

−развитие навыков поиска, сбора и обработки информации в сети Интернет.

Технологии уровневой дифференциации. Уровневая дифференциация - это организация учебной деятельности учащихся по группам, участники которых близкие по способностям, интересам, навыкам и умениям в освоении учебного материала, а подчас по психологическим обстоятельствам.

Некоторые способы уровневой дифференциации на уроках.

1. Дифференциация по объему учебного материала.
2. Дифференциация по уровню сложности.
3. Дифференциация образовательных заданий по уровню творчества.
4. Дифференциация работы по характеру помощи обучающимся.
5. Дифференциация работы по степени самостоятельности учащихся.

Игровые технологии. Различают определенные виды математических игр: кроссворды, викторины, шарады, ребусы, загадки, соревнования, головоломки; путешествия. На данных уроках их используют не более 10-15 минут, они направлены на расширение теоретических знаний школьников, развитие логического мышления, их познавательных способностей, партнерства и коллективизма, самооценки; повышение мотивации учебной деятельности, формирование волевых качеств, а также закрепление изучаемого учебного материала.

Технология интегрированного обучения. Интеграция выступает в роли объединение элементов в целое, но не механическое, а взаимопроникновение, взаимодействие.

Задачами интегрированных уроков являются:

-содействие энергичному, а также сознательному изучению учащимися учебного материала;

- формирование логического мышления;

-предоставление возможности применять в процессе преподавания инновационные интерактивные методики;

-позволяют просто и непредвзято оценивать достижения учащихся.

На уроке интегрированного обучения обучающиеся могут получить глубокие и разносторонние знания, использовать информацию из разного рода источников, совершенно по-другому осознавая события, явления.

Интегрированные уроки можно осуществлять в течение всего учебного года, используя большое количество приемов. Возможно осуществление уроков в рамках целой темы.

Групповые технологии. Групповая технология - это такая технология обучения, при которой ведущей формой учебно-познавательной деятельности обучающихся представляет собой групповая работа. При групповой форме работы класс делится на команды с целью решения поставленных образовательных задач, каждая команда получает определенное задание (или однотипные, или дифференцированные) и реализует его решение коллективно под непосредственным руководством лидера команды или преподавателя.

Цель технологии группового обучения - создать условия для формирования познавательной самостоятельности обучающихся, их коммуникативных умений и умственных способностей с помощью взаимодействия в процессе осуществления группового задания для самостоятельной работы.

Групповая работа содействует более прочному и глубокому усвоению информации, развитию индивидуальных способностей, развитию самостоятельного креативного мышления.

Кейс-технология. Цель технологии - оказать помощь каждому обучающемуся определить собственный уникальный путь освоения знания, который ему более всего необходим.

Кейс-технология - новая образовательная технология, в суть которой находится оценка некоторой проблемной ситуации. Данная технология совмещает в себе одновременно и ролевые игры, и метод проектов, и ситуативный анализ. Кейс-технология - инструмент, который позволяет применить теоретические знания к решению реальных задач. С помощью такого метода обучающиеся имеют возможность проявить и усовершенствовать аналитические и оценочные навыки, научиться работать в подвижном коллективе, находить очень оптимальное решение поставленной проблемы.

Выводы по первой главе

Проанализируем основные выводы по теме проводимого исследования, которые получились из содержания материала первой главе.

1. В исследовании рассмотрены различные подходы к определению понятия «обобщающий урок».

2. Рассмотрены содержание и методика проведения обобщающих уроков по теме «Параллельность и перпендикулярность плоскостей». Приведены требования к уровню подготовки на базовом и углубленном уровне.

3. Были рассмотрены современные технологии обучения математике для систематизации знаний, такие как: кейс-технология, групповые технологии, игровые технологии, технологии уровневой дифференциации, информационно – коммуникационная технология.

Глава 2 Методические аспекты систематизации знаний учащихся с помощью обобщающих уроков по теме «Параллельность и перпендикулярность плоскостей»»

2.1 Основные цели и задачи обучения теме «Параллельность и перпендикулярность плоскостей» в курсе геометрии старших классов

В федеральном государственном образовательном стандарте тема «Параллельность и перпендикулярность плоскостей» рассматривается в курсе геометрии, причем данный курс рассматривается на двух уровнях: базовом и профильном.

В этой теме всех уровнях рассматриваются признаки и свойства параллельных и перпендикулярных плоскостей, а также расстояние между параллельными плоскостями.

Преподаватель в процессе изучения темы «Параллельность и перпендикулярность плоскостей» ставит перед собой цели:

1. Образовательные цели:

–исследовать все случаи взаиморасположения плоскостей в пространстве;

–определить понятие перпендикулярности и параллельности плоскостей;

–исследовать признаки перпендикулярности и параллельности плоскостей;

–исследовать свойства перпендикулярности и параллельности плоскостей;

–сформировать умения и навыки разбираться в чертежах пространственных изображений геометрических фигур к задачам;

–отработать все способы при решении задач.

2. Развивающие цели:

–совершенствовать трехмерное изображение фигур обучающимися при решении геометрических задач на построение, геометрическое понимание, заинтересованность к дисциплине, познавательную динамичность обучающихся, математическую речь, память, внимание;

–учить обучающихся самостоятельно обучаться математике;

–развитие у обучающихся умений сопоставлять, анализировать, выделять главное, обобщать, формулировать выводы.

3.Воспитательные цели:

–развивать у обучающихся серьезный подход к учебному труду, волю;

–развивать эмоциональную культуру, а также культуру общения;

–обучить без помощи других производить оценку собственного вклада в работу;

–обучить выполнять работу в коллективе;

–воспитание познавательной активности, умений самостоятельно добывать знания.

Задачами, при изучении данной темы, являются:

1. Обучающие задачи:

–организовать работу обучающихся по систематизации познаний ключевых теоретических вопросов этой темы;

–зафиксировать и расширить знания и умения обучающихся для применения ими аксиом стереометрии, следствия из этих аксиом, теоремы о перпендикулярности и параллельности плоскостей.

2. Развивающие задачи:

–обеспечить обстановку для формирования познавательной деятельности обучающихся, познавательного увлечения к предмету;

–сформировать навыки самостоятельной активности обучающихся;

–сформировать способности самоконтроля;

–сформировать действенность обучающихся;

–сформировать учебно-познавательные действия, коммуникативные, экспериментальные умения обучающихся, способность исследовать и определять взаимосвязь между компонентами темы.

3. Воспитывающие задачи:

–обеспечить условия успешности обучающегося на уроке;

–воспитывать культуру интеллектуального труда; умение проводить самоанализ, рефлексию;

–сформировать способность критиковать и вносить поправки в ответы одноклассников;

–воспитывать способность критически относиться к итогу своей работы;

–обеспечить гуманистический характер преподавания.

2.2 Анализ содержания теоретического материала темы «Параллельность и перпендикулярность плоскостей» в курсе геометрии общеобразовательной школы

Исследуем Таблицы 1-3, в которых представлены учебники по геометрии для учащихся 10-11 классов общеобразовательных школ различных авторов Атанасян Л.С., Бутузов В.Ф., С.Б. Кадомцев и др. [8], Александров А.Д., Вернер А.Л., Рыжик В.И. [5], Погорелов А.В.[46] с целью анализа материала по теме исследования «Обобщающие уроки по теме «Параллельность и перпендикулярность плоскостей» как форма систематизации знаний обучающихся общеобразовательной школы».

Математическое содержание темы «Параллельность и перпендикулярность плоскостей» в выбранных учебниках, практически одинаково из-за того, что данная тема является классической для изучения в общеобразовательной школе и первоначально входила в содержание школьного образования по геометрии. Разница заключается в порядке изложения основополагающих фактов как внутри данной темы, так и самих тем в частности.

Таблица 1 – Тема "Параллельность двух плоскостей"

Атанасян Л.С. и др.	**Александров А.Д. и др**	**Погорелов А.В.**
Определение понятия "Параллельность двух плоскостей"		
"Две плоскости называются параллельными, если они не пересекаются"[8]	"Две плоскости не имеют общих точек. Такие плоскости называются параллельными."[5]	"Две плоскости называются параллельными, если они не пересекаются, то есть не имеют общих точек."[46]
Последовательность рассматриваемого материала		
«определение параллельности плоскостей, признак параллельности двух плоскостей(теорема с доказательством), свойства параллельных плоскостей» [8].	«определение параллельных плоскостей, теорема о параллельных плоскостях» [5].	«определение о параллельности плоскостей, свойства параллельных плоскостей» [46].
Определение понятия "Перпендикулярность двух плоскостей"		
"Две пересекающиеся плоскости называются перпендикулярными (взаимно перпендикулярными), если угол между ними равен 90^0"[8]	"Пусть две плоскости α и β пересекаются по прямой с. Возьмем любую их общую точку О. Проведем через т.О в плоскостях α и β прямые а и b, перпендикулярные прямой с. Если $a \perp b$, то плоскости α и β называются взаимно перпендикулярными."[5]	"Две плоскости называются перпендикулярными, если третья плоскость, перпендикулярная прямой пересечения этих плоскостей, пересекает их по перпендикулярным прямым."[46]
Последовательность рассматриваемого материала		
«определение перпендикулярных плоскостей, признак перпендикулярности двух плоскостей, следствие из признака перпендикулярности двух плоскостей» [8]	«свойства взаимно перпендикулярных плоскостей, признак перпендикулярности плоскостей» [5]	«определение перпендикулярности плоскостей, теорема о признаке перпендикулярности двух плоскостей» [46]

Таблица 2 – Тема «Свойства параллельности плоскостей»

Атанасян Л.С. и др.	**Александров А.Д. и др**	**Погорелов А.В.**
Свойства параллельности плоскостей		
«Если две параллельные плоскости пересечены третьей, то линии пересечения плоскостей параллельны»[8, С.21]	«Две плоскости, параллельные третьей плоскости, параллельны»[5, С.81].	«Если две параллельные плоскости пересекаются третьей, то прямые пересечения параллельны»[46, С.17].
«Отрезки параллельных прямых, заключенных между параллельными плоскостями, равны» [8, С.21].	«Через каждую точку, не лежащую в данной плоскости, проходит плоскость, параллельная данной, и притом только одна» [5, С.81]	«Отрезки параллельных прямых, заключенные между двумя параллельными плоскостями, равны»[46, С.17].
Свойства перпендикулярности плоскостей		
«Если прямая лежит в одной из двух взаимно перпендикулярных плоскостей и перпендикулярна линии их пересечения, то эта прямая перпендикулярна другой плоскости» [8].	«Прямая, лежащая в одной из двух взаимно перпендикулярных плоскостей и перпендикулярная их общей прямой, перпендикулярна другой плоскости» [5, С.75].	«Если две пересекающиеся прямые параллельны соответственно двум перпендикулярным прямым, то они тоже перпендикулярны»[46,С. 25].
«Если прямая, проведенная через точку одной из двух перпендикулярных плоскостей, перпендикулярна другой плоскости, то она лежит в первой из них»[8].	«Прямая, имеющая общую точку с одной из двух взаимно перпендикулярных плоскостей и перпендикулярная другой плоскости, лежат в первой из них» [5, С.75].	
«Если две плоскости, перпендикулярные третей плоскости пересекаются, то прямая их пересечения перпендикулярна третьей плоскости»[8].		

Таблица 3 – Тема «Признаки параллельности плоскостей»

Атанасян Л.С. и др.	**Александров А.Д. и др.**	**Погорелов А.В.**
Признаки параллельности плоскостей		
«Если две пересекающиеся прямые одной плоскости соответственно параллельны двум прямым другой плоскости, то эти плоскости параллельны» [8, С.20].	«Если две пересекающиеся прямые лежащие в одной плоскости, соответственно параллельны двум прямым, лежащим в другой плоскости, то эти плоскости параллельны»[5, С.85].	«Если две пересекающиеся прямые одной плоскости соответственно параллельны двум прямым другой плоскости, то эти плоскости параллельны»[46].
Признаки перпендикулярности плоскостей		
«Если одна из двух плоскостей проходит через прямую, перпендикулярную к другой плоскости, то такие плоскости перпендикулярны» [8, С.49].	«Если плоскость проходит через перпендикуляр к другой плоскости, то эти плоскости взаимно перпендикулярны»[5, С.76].	«Если плоскость проходит через прямую, перпендикулярную другой плоскости, то эти плоскости перпендикулярны» [46, С.33].

Если взять учебники Погорелова А. В. [46], Александрова А. Д. и др. [5], Атанасяна Л.С. и др. [8] в начале разбирается тема «Параллельность прямых и плоскостей», а потом «Перпендикулярность прямых и плоскостей». В учебнике Александрова А.Д. и др. параллельность и перпендикулярность в пространстве изучается в одной главе, и часть теорем о параллельности доказываются с помощью перпендикулярности, и наоборот.

Принцип построения изложения материала для изучения в учебниках Погорелова А. В. [46], Александров А. Д. и др. [5], Атанасяна Л. С. [8] почти одинаков, хотя в учебнике Атанасяна Л.С. [8] изучается лемма о перпендикулярности двух параллельных прямых третьей, которая в будущем необходима для доказательства признака перпендикулярности прямой и плоскости, и рассматривается частный случай: отыскиваемая прямая проходит через точку пересечения двух прямых, которым она будет перпендикулярна.

В учебниках Александрова А. Д. и др.[5] и Атанасяна Л. С., и др.[8] определения перпендикуляра, наклонной и ее проекции на плоскость определены конструктивно, однако в учебнике Погорелова А. В. [46], данные определения определяются через род и видовые отличия. В учебнике Александрова А.Д., и др. [5] свойства проекций и наклонных вводится в виде теорем. В виде задач, свойства проекций и наклонных, вводятся в учебнике Атанасяна Л. С. [8].

Только в учебнике Александрова А.Д. [1] представлены два определения признаков перпендикулярности прямой и плоскости, и таким же способом два признака перпендикулярности прямой и плоскости.

Изучение теоретического материала, имеющего отношение к двугранным углам в учебнике Погорелова А. В. [46] вынесено в изучение темы «Многогранники», которая проходится в одиннадцатом классе. В учебнике Александрова А.Д. [5] в отдельную главу выделяется нахождение расстояний и углов. Однако, в учебниках Погорелова А. В. [46], Атанасяна Л.С. [8] расстояния между объектами вводятся схематично.

В данной главе только Атанасян Л. С., и др. [8] вводит определение и рассматривает свойства прямоугольного параллелепипеда.

В рассмотренных учебниках на основе аксиоматического метода идет изложение темы «Перпендикулярность плоскостей».

В учебнике Атанасян Л.С.[8] и др. «Геометрия 10-11» теме «Параллельность прямых и плоскостей» отведена целая глава и она полностью преподается в десятом классе. Характерный признак изложения данного материала представляется в том, что уже в первой главе дается рассмотрение тетраэдра и параллелепипеда, а так же определяются их основные свойства. Вследствие ознакомления учащихся с тетраэдром и параллелепипедом, дается возможность отрабатывать понятия параллельности прямых и плоскостей на имеющихся фигурах.

Выделяемый пункт предоставляет возможность представить создание на чертеже сечений тетраэдра и параллелепипеда, что является основоположным для решения геометрических задач, а так же и для развития пространственных представлений учащихся.

В рамках изучаемой темы учащимся дается возможность познакомиться с параллельным конструированием и его свойствами, которое применяется при изображении пространственных фигур на чертеже.

«Параллельность прямых и плоскостей» в учебнике Погорелова А.В.[46] «Геометрия 7-11» отводится один параграф и проходится в 10-м классе.

Однако, следует отметить, что оба автора начинают изучать стереометрию с темы «Параллельные прямые в пространстве». Целый пункт Погорелов А.В.[46] отводит на изучение признака параллельности прямой и плоскости. В учебнике Л. С. Атанасяна [8] рассматривается тема «Тетраэдр и параллелепипед», а в учебнике Погорелова А.В.[46] отводится целый пункт на тему «Изображение пространственных фигур на плоскости» (данную тему Л.С. Атанасян[8] вводит в приложении).

Теме «Параллельность прямых и плоскостей» в учебнике А.Д. Александров[5] и др. «Геометрия 10-11» теме выделяется один параграф и она изучается в десятом классе.

В этом параграфе излагаются два признака параллельности плоскостей, хотя в учебнике Л.С. Атанасяна [8] «Геометрия 10 -11», где выделяется один признак параллельности плоскостей.

Исследуем задачный материал в учебниках Погорелова А.В., Александрова А.Д., Атанасяна Л.С. по теме исследования (таблица 4).

Таблица 4 - Анализ задачного материала

Атанасян Л.С. и др.	**Александров А.Д. и др.**	**Погорелов А.В.**
Параллельность плоскостей		
§3 п.10-11	§11 п. 11.1-11.3 §12 п. 12.2	§2 п. 10-12
Перпендикулярность плоскостей		
§3 п.23	§10 п. 10.2-10.3	§3 п.20
Задачи на нахождение искомого		
Параллельность плоскостей		
№48,49,63	№11.9(3), 11.10(а), 11.12	№32
Перпендикулярность плоскостей		
№168, 170-174, 176, 182, 184, 187-190, 192-195	№ 10.2, 10.24	№56,57,59-62
Задачи на доказательство или объяснение		
Параллельность плоскостей		
№50-62,64-65	№11.1-11.6, 11.9(2), 11.10(б), 11.11(2), 11.13, 12.9-12.12	№18-19, 21-25, 27-31,33-36
Перпендикулярность плоскостей		
№166-167, 169, 175, 177-181,183,185-186,191	№10.3,10.18, 10.21	№55,58
Задачи на преобразование или построение		
Параллельность плоскостей		
	№11.7,11.8,11.9(1),11.11(1)	№20,26
Перпендикулярность плоскостей		
№196	№10.1, 10.19, 10.20, 10.22, 10.23	№54

Во всех рассмотренных учебниках авторы отводят теме большую роль для решения задач на практике. В практике наблюдаются такие основополагающие положения для решения стереометрических задач, в виде:

–сведение задач к планиметрическим, то есть применения метода проекций;

–по возможности вовлечение планиметрического аналога стереометрической задачи.

Авторы предлагают большое количество задач на доказательство свойств, признаков и определений. В задачах на вычисления элементов необходимо, как правило, найти или длину отрезка (т.е. расстояние между точками плоскостей), или величину угла между плоскостями.

Большой фрагмент задачного материала в этих учебниках предполагает проработку основных понятий и утверждений.

По конструкции, в основном распространены прямые задачи, задачи обучающего и исследовательского типа находятся почти в одинаковом количестве во всех рассмотренных учебниках, значительно меньше проблемных задач.

Сравнительный анализ задачного материала доказал, что все три учебника являются учебниками-задачниками.

2.3 Систематизации знаний учащихся посредством типовых задач по стереометрии на обобщающих уроках по теме «Параллельность и перпендикулярность плоскостей»

Задачи считаются одним из ключевых средств, которые используются при обучении математике для формирования знаний, умений и навыков учащихся. Посредством решения задач реализуется как образовательная, так и воспитательная и развивающая цели.

Система задач, представленная в данной работе, соответствует следующим требованиям:

1. Система задач включает в себя все главные типы задач по теме «Параллельность и перпендикулярность плоскостей».

2. Система задач ориентирована на развития умения использовать тот или иной метод решения задачи вовсевозможных ситуациях.

3. Система задач включает в себя достаточное количество заданий для понимания этой темы.

4. Система задач включает в себя задачи по возрастанию трудности (то есть, от простых к сложным). Данную систему задач можно использовать при подготовке к ЕГЭ.

5. Система задач включает задачи, разнообразные по форме, содержанию и методам решения.

С целью формирования данной системы задач применялись следующие учебники, методические пособия, задачники по геометрии для общеобразовательных учреждений следующих авторов: Л.С. Атанасяна, Е.В. Потоскуева и Л.И. Звавича, Александрова А.Д. и Вернера А.Л., Погорелова А.В.

Система задач на тему «Параллельность плоскостей»

Задача 1. «Плоскости a и b пересекаются, точка A не принадлежит ни a, ни b. Докажите, что любая плоскость, проходящая через A, пересекает, по крайней мере, одну из плоскостейаи b» [8].

Решение: Так как плоскости a и b пересекаются, то они не параллельны и не совпадают друг с другом. Предположим, что плоскость b будет параллельна плоскости в которой находится точка A, тогда зная, что a и β пересекаются, плоскость которой принадлежит A будет пересекать плоскость α. Аналогичные рассуждения возможно выполнить и для плоскости α.

Задача 2.«Плоскости a и b параллельны. Прямая a пересекает плоскости a и b соответственно в точках A и B, а параллельная ей прямая b - соответственно в точках A_1 и B_1. Докажите, что отрезки AB и A_1B_1 равны» [5].

Решение: прямая a пересекает плоскости a и b соответственно в точках A и B. Причем, и прямая b пересекает плоскости a и b - в точках A_1 и B_1. В свою очередь, прямая *a* параллельна b и плоскости a и b параллельны.

Зная, что расстояние меж параллельными плоскостями константа, следует, что a и b равны.

Задача 3. «Плоскости aи b параллельны. В плоскости a лежит четырехугольник ABCD. Через его вершины проведены параллельные прямые, пересекающие bв точках соответственно A_1, B_1, C_1, D_1. Докажите, что $A_1B_1C_1D_1$-четырехугольник, равный данному» [50].

Решение: используя свойство параллельных плоскостей очевидно, что $AB \parallel A_1B_1$, $BC \parallel B_1C_1$, $CD \parallel C_1D_1$, $AD \parallel A_1D_1$. Таким образом, ABA_1B_1, BCB_1C_1, CDC_1D_1, ADA_1D_1 параллелограммы (противолежащие стороны попарно параллельны).

Используя свойство параллелограмма: у параллелограмма противоположные стороны равны, то $AB=A_1B_1$, $BC=B_1C_1$, $CD=C_1D_1$, $AD=A_1D_1$.

Учитывая вышеизложенное, четырехугольник $ABCD = A_1B_1C_1D_1$.

Задача 4. «Три прямые a,b и c проходят через одну точку, пересекают данную плоскость в точках A,B и C, а параллельную ей плоскость в точках A_1, B_1 и C_1. Докажите подобие треугольников ABC и $A_1B_1C_1$» [46].

Решение: предположим, что AO = a, BO = b, CO = c.

Будем рассматривать треугольники AOC и A_1OC_1, AOB и A_1OB_1, BOC и B_1OC_1 (рисунок 1).

В связи с тем, что плоскость a и b параллельны, то рассматриваемые треугольники подобны.

Благодаря данному подобию получаем следующие отношения:

OB1:OB = A1B1:AB = OA1:OA;

B1C1:BC = OB1:OB = OC1:OC;

OC1:OC = OA1:OA = A1C1:AC.

Из данных пропорций следует:

A_1B_1:AB = A_1C1:AC = B1C1:BC.

Следовательно, по признаку подобия треугольников ABC подобен $A_1B_1C_1$.

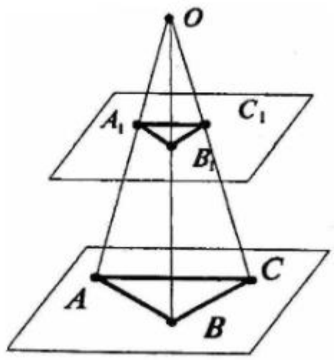

Рисунок 1 − к задаче 4

Задача 5. «В тетраэдре PABC проведено сечение $A_1B_1P_1$, параллельное грани ABP. Определите взаимное расположение меридиан PE и P_1E_1 треугольников соответственно ABP и $A_1B_1P_1$» [8].

Задача 6. «Постройте сечение треугольной пирамиды PABC плоскостью, которая проходит через внутреннюю точку K основания ABC и параллельна грани PAB» [46].

Решение: сечение треугольника пирамиды PABC проходит через точку K проходит через стороны APC, CPB, ABC пирамиды и будет параллельной APB (рисунок 2). Прямые пересечения с гранями параллельны соответствующим ребрам грани APB данной пирамиды. Построение начнем с нижнего основания пирамиды через данную точку K. Получим по одной точке на ребрах AC и CB. Далее, проводим из получившихся точек прямые параллельные AP и BP.

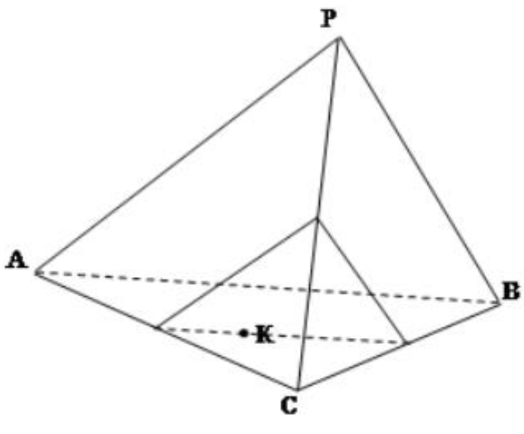

Рисунок 2−к задаче 6

Задача 7. «Построить сечение пятиугольной пирамиды PABCDE плоскостью, которая проходит через внутреннюю точку M основания ABCDE параллельно грани PAB» [50].

Решение: из-за того, что прямые, по которым две параллельные плоскости пересечены третьей плоскостью являются параллельными, а плоскость а II грани PAB, то:

а) прямая пересечения плоскости а с плоскостью ABC II AB;

б) прямая пересечения плоскости с гранью PAE II AP;

в) прямая пересечения с плоскостью грани PBC II PB;

г) прямая пересечения плоскости а с плоскостью PADIIPA, следовательно выполнимо: 1) через точку M прямую KF∥AB, KBC, FAE; 2) прямую FH∥ PA, HPE; 3) прямую KR ∥ PB, RPC; 4) прямую ML ∥ AP, LPD. Пятиугольник HLRKF – сечение которое нам необходимо (рисунок 3).

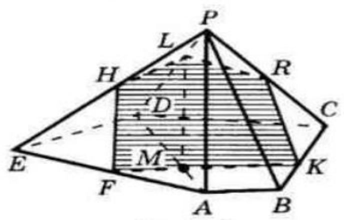

Рисунок 3–к задаче 7

Задача 8. «Точка A, B и C лежат в плоскости и не лежат на одной прямой. Равные и параллельные отрезки AA_1, BB_1 и CC_1 расположены по одну сторону от плоскости. Докажите, что $(A_1B_1C_1) \parallel (ABC)$» [50].

Решение: сделаем по имеющимся данным чертеж (рисунок 4). Так как, $BB_1 \parallel CC_1$и равны между собой, то BB_1CC_1 – параллелограмм. $AA_1 \parallel BB_1$и они равны, тоAA_1BB_1 - параллелограмм. $AA_1 \parallel CC_1$и равны, то AA_1CC_1 параллелограмм. Из теоремы о параллельности плоскостей следует, что $(A_1B_1C_1) \parallel (ABC)$.

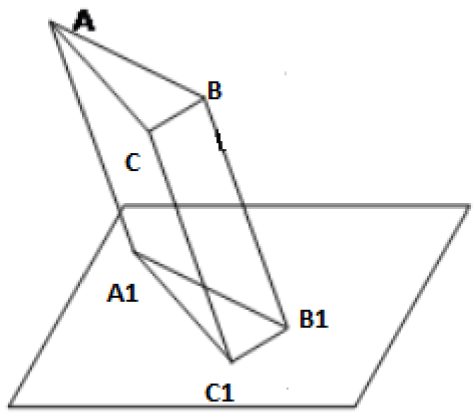

Рисунок 4–к задаче 8

Задача 9. «Докажите, что противоположные грани параллелепипеда параллельны (т.е. лежат в параллельных плоскостях)» [8].

Решение: Так как ABCD и $A_1B_1C_1D_1$ являются параллелограммами, то AB II CD и AA1 II DD1 (рисунок 5). Прямая AB пересекается с прямой AA_1 и они обе лежат на одной грани, то CD II AB и D_1D II AA_1, причем CD и D_1D находящихся на другой грани и так же пересекаются.

Следовательно, из признака параллельности плоскостей имеем, что грани ABB_1A_1 II DCC1D1.

Аналогично можно доказать параллельность оставшихся граней.

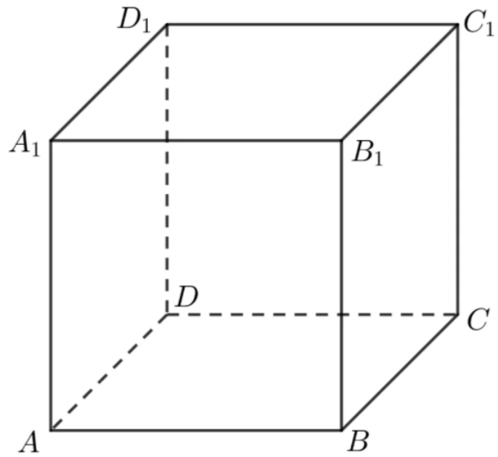

Рисунок 5–к задаче 9

Задача 10. «Точка B не лежит в плоскости треугольника ADC, точки M, N и P – середины отрезков BA, BC и BD соответственно. А) Докажите, что плоскости MNP и ADC параллельны. Б) Найдите площадь треугольника MNP, если площадь треугольника ADC равна 48 см^2» [8].

Решение: в рассматриваемой плоскости ABC, MN является средней линией треугольника ABC (рисунок 6). Следовательно, AC∥MNи MN=AC:2. Аналогично доказывается, что CD ∥ PN, PN=DC:2, MP=AD:2.

А) В связи с тем, что AC∥MN и CD∥PN следует AC и CD – пересекающиеся прямые в плоскости ACD и прямые MN и NPв плоскости MNP, причем AC и CD параллельны MN и NP соответственно. Следовательно, плоскости ACD и MNP также будут параллельны друг другу.

Б) В связи с тем, что MN=AC:2, PN=DC:2, MP=AD:2, можно сказать SΔACD подобен SΔMNP. Коэффициент подобия n=1:2, следовательно $S_{\Delta MNP}=S_{\Delta ACD}*n^2=S_{\Delta ACD}:4=12$ см^2.

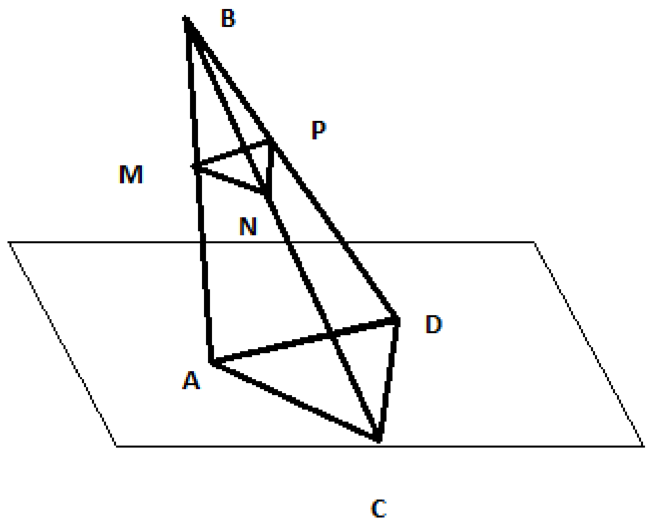

Рисунок 6–к задаче 10

Задача 11. «Три отрезка A_1A_2, B_1B_2 и C_1C_2, не лежащие в одной плоскости, имеют общую середину. Докажите, что плоскости $A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_2$ параллельны» [8].

Решение: так как отрезки A_1A_2, B_1B_2 и C_1C_2имеют общую середину, то $A_1O=A_2O$, $B_1O=B_2O$ и $C_1O=C_2O$ (рисунок 7). В связи с тем, что прямые A_1A_2 и

C_1C_2проходят через плоскость и притом только одну, обозначим данную плоскость $A_1A_2C_1C_2$. Рассмотрим данную плоскость. $A_1A_2C_1C_2$является четырехугольником диагонали которого соответственно A_1A_2и C_1C_2 с точкой пересечения в центре О. Данная точка Оделит диагонали пополам (по свойству параллелограмма). Стороны A_1C_1 и A_2C_2 у параллелограмма равны и параллельны, следовательно, $A_1C_1 \parallel A_2C_2$. Аналогичные рассуждения доказывают, что $A_1B_1 \parallel A_2B_2$.Из вышесказанного следует, что A_1B_1 и A_1C_1 пересекаются в плоскости $A_1B_1C_1$ и параллельны прямым A_2B_2 и A_2C_2, лежащих в плоскости $A_2B_2C_2$, то плоскости $A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_2$ являются параллельными.

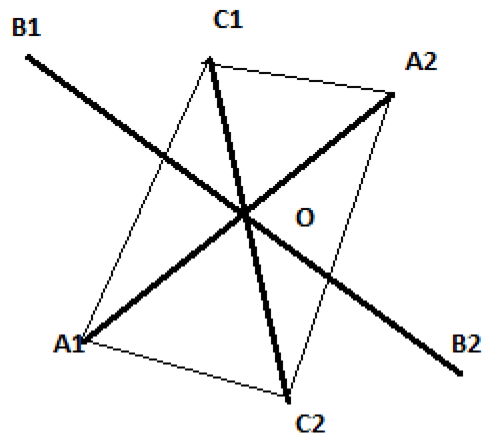

Рисунок 7 – к задаче 11

Задача 12. «Докажите, что в параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ плоскость A_1DB параллельна плоскости D_1CB_1» [8].

Решение: Так как $ABCDA_1B_1C_1D_1$ - параллелепипедом (что следует из условия задачи), то $AA_1 \parallel BB_1 \parallel CC_1 \parallel DD_1$; $BB_1= DD_1$ (рисунок 8).

Будем рассматривать четырехугольник BB_1D_1D. В четырехугольнике BB_1D_1D стороны BB_1 и D_1D – параллельны и равны. Следовательно, четырехугольник BB_1D_1D является параллелограммом, тогда $B_1D_1 \parallel B D$.

Рассмотрим CB_1A_1D: $A_1B_1 \parallel DC$ и $A_1B_1=DC$, следовательно, CB_1A_1D является параллелограммом и $CB_1=A_1D_1$.

$A_1DB \parallel D_1CB_1$ по свойству двух пересекающихся прямых одной плоскости и двух прямых другой плоскости.

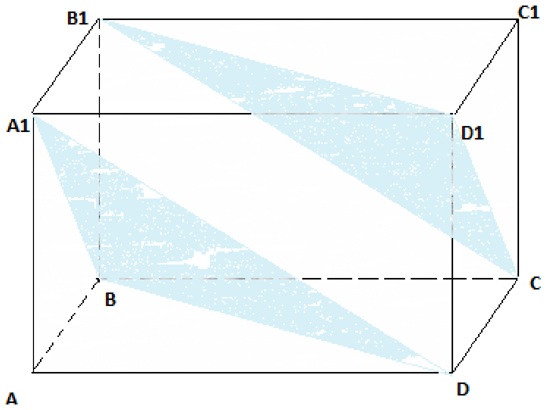

Рисунок 8–к задаче 12

Задача 13. «В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ проведите параллельные сечения, одно из которых проходит через прямую AC, а другое - через прямую BC_1. Найдите отношение площадей этих сечений» [46].

Решение:ACявляется диагональю ABCD, AD_1 - диагональю AA_1DD_1, D_1C - диагональю DCC_1D_1, A_1B - диагональю ABA_1B_1, A_1C_1 – диагональю $A_1B_1C_1D_1$, BC_1 - диагональю BB_1C_1C (рисунок 9). Так как стороны куба равны, то и диагонали равны. Используя формулу Герона найдем площади треугольников ACD_1и BC_1A_1. Данные площади будут равны, следовательно, и отношения площадей искомых сечений будет равно 1.

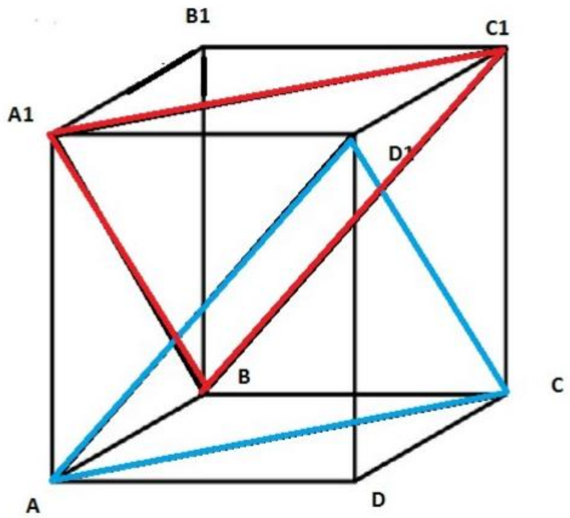

Рисунок 9 – к задаче 13

Задача 14. «Прямая DF пересекает параллельные плоскости , и соответственно в точках D, E и F, при этом DF=3, EF=9. Прямая EG пересекает плоскости и соответственно в точках G и H, при этом EG=12. Найдите длину отрезка GH» [8].

Задача 15. «Даны плоскость и не принадлежащая ей точка A. Докажите, что все прямые пространства, проходящие через точку A и параллельные плоскости, лежат в одной плоскости. Как эта плоскость расположена относительно плоскости?» [5].

Задача 16. «Плоскости, и попарно параллельны, прямые a и b скрещиваются. Прямая a пересекает плоскости, и соответственно в точках A, B и C; прямая b – соответственно в точках A_1, B_1 и C_1. Докажите, что AB:BC = A_1B_1:B_1C_1» [50].

Задача 17. «Точка O –центр основания ABCD правильной четырехугольной пирамиды PABCD. Постройте сечение этой пирамиды плоскостью, проходящей: а) через O параллельно грани PAB; б) через середину отрезка OB параллельно диагонали AC основания и ребру PD; в) через середину отрезка PO параллельно основанию пирамиды. В каждом случае определите вид сечения и найдите его площадь, если BC=12, PB=10» [50].

Задача 18. «Параллельные плоскости и пересекают сторону AB угла BAC соответственно в точках P и H, а сторону AC этого угла – соответственно в точках Q и K. Найдите: а) AH и AK, если PH=2PA, PH=12 см, AQ=5 см; б)HK и AH, если PQ =18см, AP=24 см, AH=32PH» [50].

Задача 19. «Плоскости и пересекаются по прямой c. Через точки A и B, расположенные вне этих плоскостей, проводятся параллельно плоскости и параллельные между собой прямые AC и BD (C∈α, D∈α), а также – параллельно плоскости и параллельные между собой прямые AE и BF (E∈b, F∈b). Докажите: а) плоскости ACE и BDF параллельны; б) плоскости ACE и BDF пересекают плоскости и по параллельным прямым» [5].

Задача 20. «Дан правильный тетраэдр PABC; O – центроид грани ABC, точка K – середина отрезка PO. Постройте сечение тетраэдра плоскостью, которая проходит через точку K и параллельна: а) грани ABC; б) грани PBC. Найдите площади получившихся сечений, если ребро тетраэдра равно 8» [46].

Задача 21. «На трех попарно параллельных прямых, не лежащих в одной плоскости, выбраны три равных отрезка AA_1, BB_1 и CC_1 так, что точки A_1, B_1 и C_1 оказались по одну сторону от плоскости ABC. Докажите, что: а) плоскость ABC параллельна плоскости $A_1B_1C_1$; б) $B_1A_1C_1$=BAC; в) прямая пересечения плоскостей B_1AC и DF_1C_1 параллельна плоскостям ABC и ACC_1; г) прямая, проходящая через точку пересечения медиан треугольника ABC и $A_1B_1C_1$, параллельна прямым AA_1, BB_1 и CC_1» [8].

Задача 22. «На трех лучах, исходящих из точки E и не лежащих в одной плоскости, взяты отрезки AA_1, BB_1, CC_1 такие, что $EA: EA_1=EB: EB_1=EC:EC_1=1:5$. Докажите, что: а) плоскость ABC параллельна плоскости $A_1B_1C_1$; б) $A_1B_1C_1$=ABC; в) прямая пересечения плоскостей AB_1C_1 и A_1BC параллельна плоскостям $A_1B_1C_1$ и BC_1C; г) прямая, проходящая через точки пересечения медиан треугольников ABC и $A_1B_1C_1$, содержит точку E» [8].

Задача 23. «В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ все ребра равны a. Точка M лежит на ребре AB, причем AM:MB =3:1, точка N – середина B_1C_1. А) Постройте сечение призмы плоскостью, проходящей через точку M параллельно плоскости A_1BC. Б) Найдите периметр сечения. В) Найдите площадь сечения. Г) В каком отношении плоскость сечения дели отрезок AN, считая от A?» [46].

Задача 24. «В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ точка M – середина ребра A_1B_1, точка N – середина ребра B_1C_1, точка K- середина ребра AD, точка P – середина ребра DC, точка L- середина ребра C_1C, O – точка пересечения диагоналей квадрата ABCD. Точка A_1 - середина отрезка AQ. Заполните Таблицу 5, выбрав (обведя в кружок) необходимое расположение указанных плоскостей:

А – параллельны, Б- пересекаются, В – совпадают, Г – невозможно определить» [46].

Таблица 5 – Ответы к задаче №24

№	Плоскости	Взаимное расположение
1	$A_1B_1C_1$ и ADC	А
2	MPK и BB_1D	Б
3	MNK и MNP	Б
4	D_1KP и BMN	Г
5	QBO и MKP	Г
6	QB_1D_1 и A_1DO	А
7	MNK и PLN	Б
8	B_1KP и DMN	Б
9	A_1DC_1 и AB_1C	В
10	QBD и MOB	А
11	A_1C_1C и MKP	Б
12	QC_1D_1 и A_1B_1D	А

Задача 25. «На рисунках 27-34 (рисунок 10) точки M, P и R расположены либо на ребрах, либо на гранях куба. Пользуясь свойствами параллельных прямых и плоскостей, постройте сечения этого куба плоскостью MPR в каждом из заданных расположений точек M, P и R» [50].

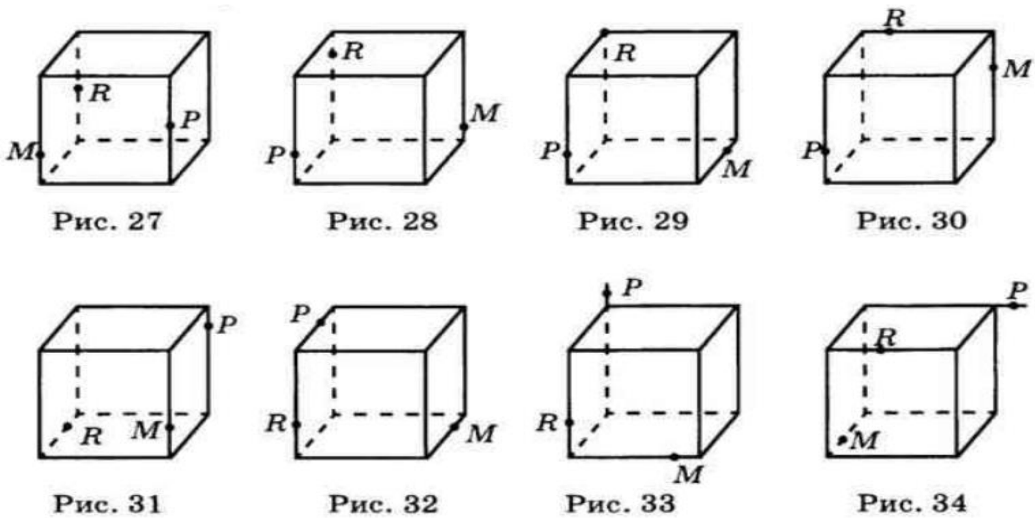

Рисунок 10 − к задаче 13

Решение представлено на рисунке 11**:**

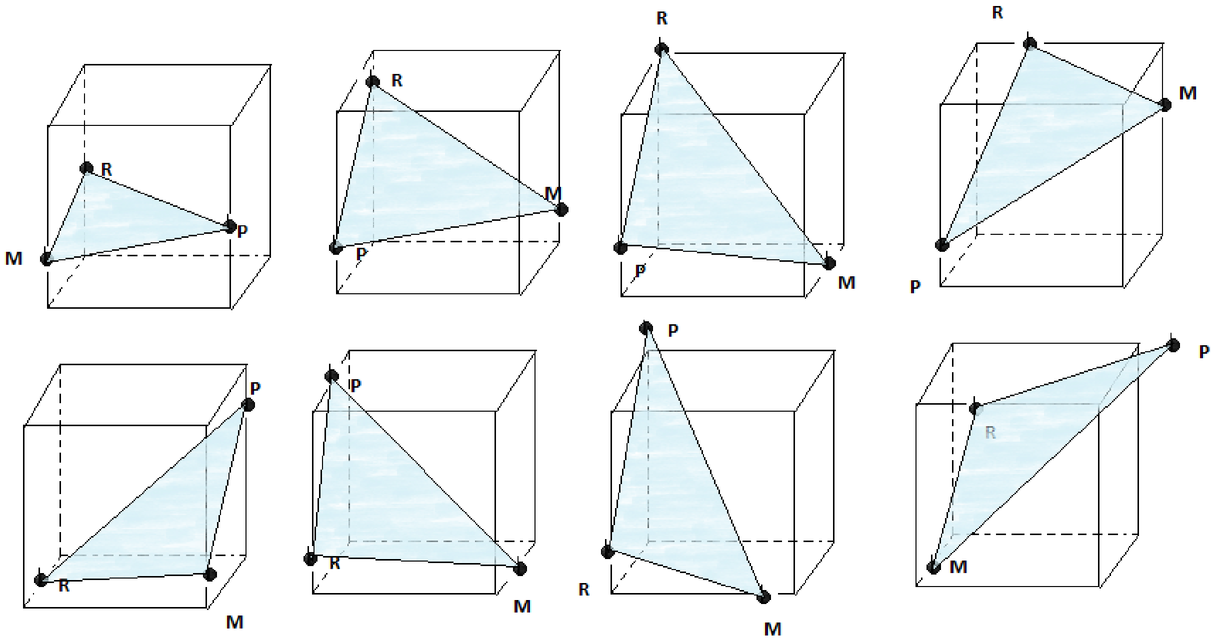

Рисунок 11 – к задаче 25

Система задач на тему «Перпендикулярность плоскостей»

Задача 26. «Докажите, что смежные грани куба взаимно перпендикулярны» [46].

Задача 27. «Докажите, что в кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ взаимно перпендикулярны: а) плоскости сечений ACC_1A_1 и BDD_1B_1; б) плоскости A_1BC_1 и BB_1D_1» [50].

Задача 28. «В правильном тетраэдре PABC точка K – середина ребра BC, точка D – середина ребра AP. Докажите, что взаимно перпендикулярны плоскости: а) AKP и BCP; б) AKP и BCD» [5].

Задача 29. «Взаимно перпендикулярные плоскости a и b пересекаются по прямой с. Любая ли прямая плоскости α, перпендикулярная к прямой с, перпендикулярна плоскости b? Ответ обоснуйте» [8].

Решение: начертим в плоскости a прямую AC, которая будет перпендикулярна прямой с, к тому же точка C принадлежит с. В плоскости b через точку C проведем прямую CB, которая будет перпендикулярна прямой с. Из-за того, что CA перпендикулярно с, CB перпендикулярно с, то угол ACB – является линейным углом между плоскостями a и b. Так как, по условию задачи a перпендикулярен b, то угол ACB равен 90^0 следовательно, CA перпендикулярен CB. Из вышесказанного можно сделать вывод, что CA перпендикулярна к прямым c и CB находящихся в плоскости b следовательно ,CA перпендикулярен b.

Задача 30. «Плоскости a и b взаимно перпендикулярны. Через некоторую точку плоскости a проведена прямая, перпендикулярная плоскости b. Докажите, что эта прямая лежит в плоскости α» [8].

Задача 31. «Даны прямая a и плоскость α. Докажите, что все прямые, перпендикулярные плоскости a и пересекающие прямую a, лежат в одной плоскости, перпендикулярной плоскости a» [8].

Решение: изобразим в любом месте на прямой аточку A. Проведем через точкуAпрямую b, причем bперпендикулярена. Плоскость b, которая образовалась с помощью прямых a и b, пересекает прямую a по прямой c и b перпендикулярен c. В свою очередь плоскостиа перпендикулярноb: bперпендикулярноa и b принадлежит b. Всякая прямая перпендикулярная a должна быть параллельной b. Так как данная прямая будет пересекать a, то будет лежать в плоскости b (рисунок 12).

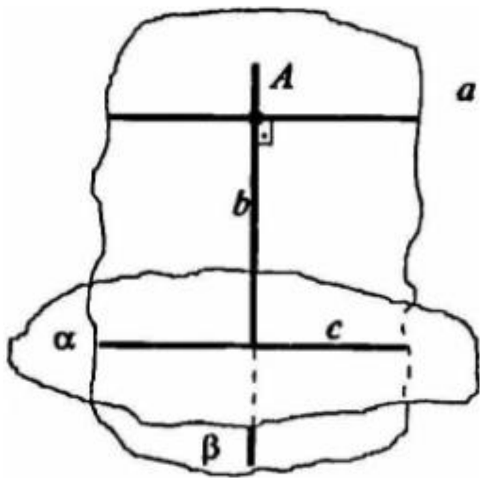

Рисунок 12 – к задаче 31

Задача 32. «Можно ли через данную точку провести три попарно перпендикулярные плоскости? Ответ обоснуйте и выполните рисунок» [8].

Решение: да, возможно. Например, вершина параллелограмма. Плоскости ABA1B1перпендикулярно AA1D1D, ABCD перпендикулярно AA_1D_1D, ABCD перпендикулярно$ABA_1B_{1.}$(рисунок 13).

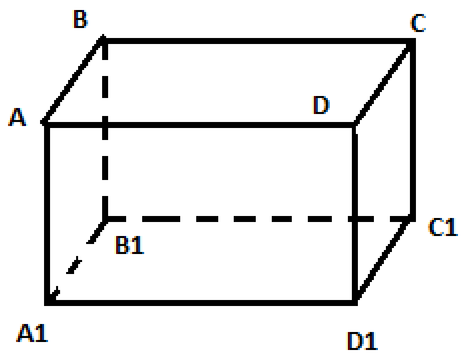

Рисунок 13 – к задаче 32

Задача 33. «Плоскости a и b взаимно перпендикулярны. Прямая p пересекает плоскости a и b в точках соответственно A и B, образуя при этом с каждой из плоскостей углы, равные. Найдите длину отрезка, концами которого являются проекции точек A и B на линию пересечения данных плоскостей, если длина отрезка AB равна a» [5].

Задача 34. «Концы A и B отрезка AB, длина которого равна 102 см, принадлежит перпендикулярным плоскостям соответственно a и b. Углы между прямой AB и плоскостями a и b равны соответственно 30° и 45°. Найдите расстояния от концов отрезка AB до линии пересечения плоскостей a и b» [50].

Решение: рассмотрим ΔABC. Угол ABC равен 30°, следовательно, AC=AB:2= 102:2 = 51 см (рисунок 14).

Рассмотрим ΔABD.

Угол BAD равен углу DBA, и оба данных угла равны 45°.

Используя теорему Пифагора: $AB^2=AD^2+BD^2$.

Так как ΔABD равнобедренный, то AD=BD, то $AB^2=2*BD^2$; $102^2=2*BD^2$; BD=корень из(102^2:2) =51* корень из(2)см.

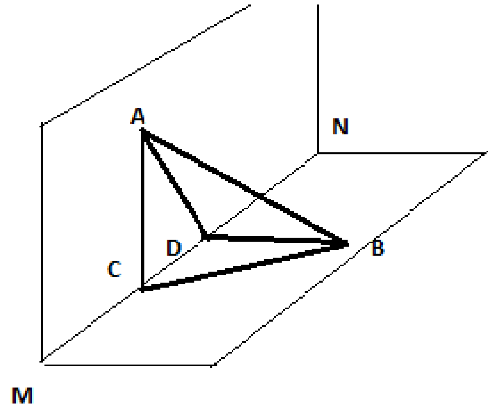

Рисунок 14–к задаче 34

Задача 35. «Плоскости равностороннего треугольника ABC и квадрата BCDE перпендикулярны. Найдите расстояние от точки A до стороны DE, если AB=4 см» [46].

Решение: прямая BC является общей для квадрата BCDE и равностороннего треугольник ABC (рисунок 15).

Так как треугольник ABC – равносторонний AC=BC=AB=4 см, то и EB = ED = DC = BC = 4 см.

Сделаем дополнительное построение в треугольнике ABC: проведем высоту AH.

Найдем длину AH: AH=AB* sin 60^0= 2 корень из(3).

Из точки H проведем перпендикуляр к прямой ED.HM ⊥ ED и HM ⊥ AM, следовательно треугольник MAH - прямоугольный.

Используя теорему Пифагора: MA=корень из(MH2 + AH2) = корень из 28 = 2 корень из (7) см.

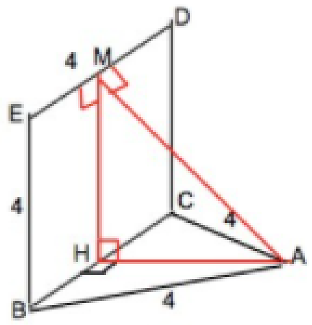

Рисунок 15 – к задаче 35

Задача 36. «Через середины сторон AB и BC треугольника ABC проведены плоскости a и b, перпендикулярные этим сторонам. Точка M принадлежит прямой пересечения плоскостей a и b. Докажите, что точка M одинаково удалена от вершин треугольника ABC» [8].

Задача 37. «Прямоугольники ABCD и ABMK лежат во взаимно перпендикулярных плоскостях. Верно ли, что: а) AC перпендикулярен AK; б) AM перпендикулярен AD; в) AC перпендикулярен AM?» [50].

Задача 38. «В треугольной пирамиде MABC боковые грани MAC и MBC взаимно перпендикулярны и перпендикулярны основанию пирамиды, которым служит равнобедренный треугольник ACB. Через вершину C проведена плоскостьа, перпендикулярная плоскости грани MAB и параллельная AB. Найдите периметр и площадь фигуры, получившейся при пересечении пирамиды и плоскости, если MC= 10 см, AB= 20 см» [46].

Задача 39. «Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Докажите взаимную перпендикулярность следующих пар плоскостей: а) ABC_1 и $A_1B_1D_1$; б) ABC_1 и A_1B_1D» [46].

Решение: а) Так как $ABCDA_1B_1C_1D_1$ - куб (по условию задачи), то A1D1 перпендикулярно AD1, A_1D перпендикулярно AB, A_1D перпендикулярно плоскости ABC_1D_1. Из данных свойств куба следует, что ABC1D1 перпендикулярно DA1B1C (рисунок 16).

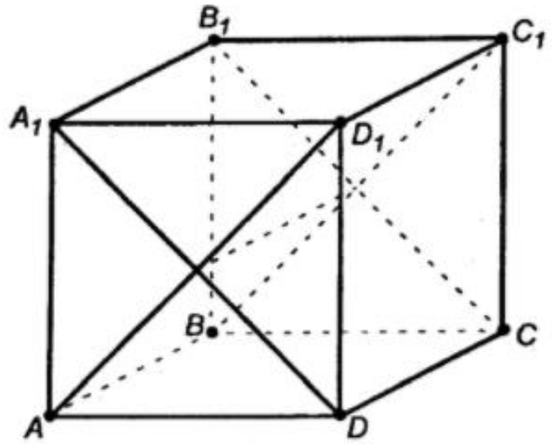

Рисунок 16 – к задаче 39

б) Так как $ABCDA_1B_1C_1D_1$ - куб (по условию задачи), то по его свойству ABC1 перпендикулярно B1C1C, и A_1B_1D перпендикулярно B_1C_1C. Будем рассматривать BB_1C_1C находящейся в плоскости (B_1C_1C): благодаря тому, что $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – является квадратом, то его диагонали – перпендикулярны, хотя данные диагонали также образуют стороны линейного угла между плоскостями ABC1 и A1B1D, следовательно ABC1 перпендикулярно A1B1D (рисунок 17).

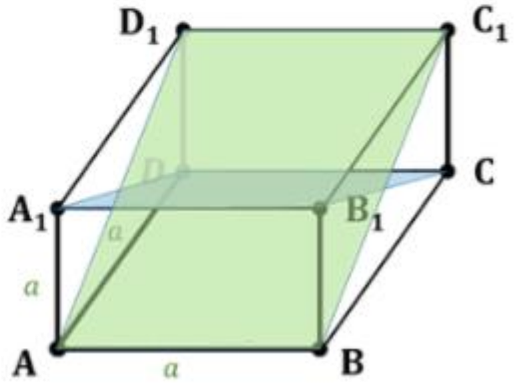

Рисунок 17–к задаче 39

Задача 40. «Равносторонние треугольники ABC и ABD (рисунок 18) расположены в перпендикулярных плоскостях. Найдите угол между: а) прямой CD и плоскостью ABC; б) плоскостями ACD и BCD» [5].

Решение: а) сделаем дополнительный рисунок. Проведем CH перпендикулярно AB в ΔABC. В связи с тем, что DH перпендикулярно AB (по условию), следует треугольник ABC равен треугольнику ABD. CH=DH=AB * корень из (3):2. Из треугольника CBP (где угол H равен 90°) следует, что: CD = корень из ((AB*корень из (3):2)^2 +(AB*корень из (3):2)^2)= = AB*корень из (3):2)^2 = AB * корень из (6):2. Угол DCH равен arcsin((AB * корень из (3):2):(AB * корень из (6):2) =45° (рисунок 19).

б) AH перпендикуляр CD в треугольнике ACD, следовательноAH-медиана (так как AC=AD). BH перпендикуляр CD в треугольнике BCD, следовательно BH-медиана (так как BD=BC). Треугольник ACD равен треугольникуBCD, следовательно, AH =HB. CB= AB * корень из (6):2. AC=AD=AB; AH=корень (AB^2 – ($6AB^2$):16) = AB* корень из(10):4.

Из треугольникаAHB, используя теорему косинусов $AB^2=AH^2+HB^2$- 2*AH*HB*cos(уголAHB).

AB^2=(5:8)AB^2+(5:8)AB^2-(5:4)AB^2*cos(уголAHB)

cos(уголAHB)= 1 : 5.

УголAHB=arccos(1:5).

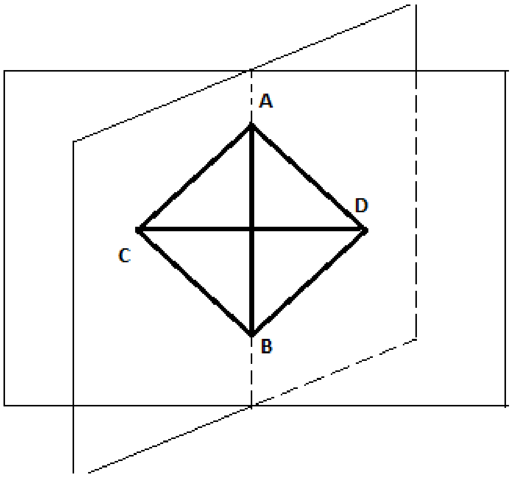

Рисунок 18–к задаче 40

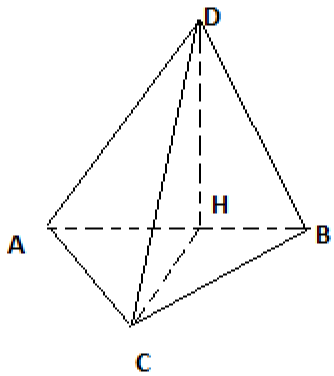

Рисунок 19 – к задаче 40

Задача 41. «Изобразите куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ и постройте его сечение плоскостью, проходящей через: а) ребро BB_1 перпендикулярно плоскости ACC_1; б) ребро AB перпендикулярно плоскости CDA_1; в) ребро BC перпендикулярно плоскостям AB_1C_1» [8].

Решение: а) рисунок 20. б) рисунок 21. в) рисунок 22.

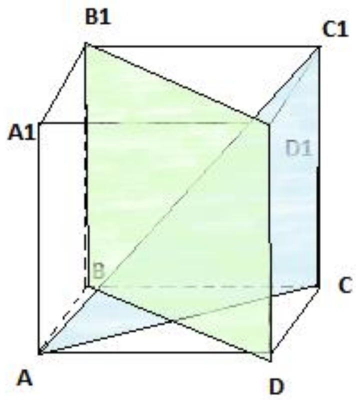

Рисунок 20 - к задаче 41

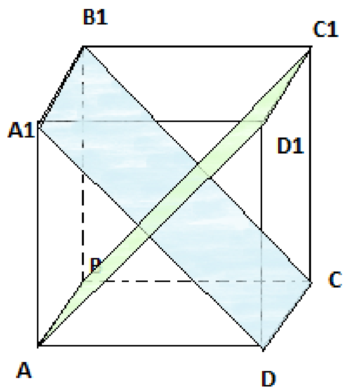

Рисунок 21–к задаче 41

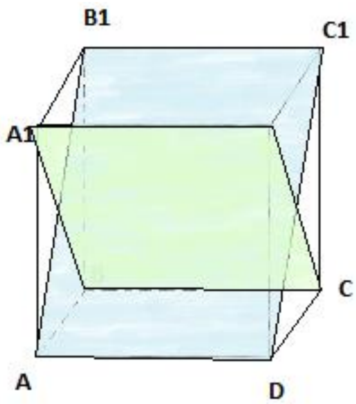

Рисунок 22 – к задаче 41

Из проведенного исследования задачного материала, представленного в рассматриваемых учебных пособиях, напрашивается вывод: основная часть представленных задач, это задачи на доказательства и вычисления, оставшаяся часть задач относятся к задачам на дополнительные построения, введение дополнительной переменной.

2.4 Использование нестандартных задач для систематизации и обобщения знаний на уроках по теме «Параллельность и перпендикулярность плоскостей»

Задача - неотделимая основная часть в курсе геометрии, соответственно и в изучении стереометрии. Задача является не только главной формой для отработки теоретического материала по теме, изученного учениками на уроке и дома, но и помогает осознанно подойти к процессу обучения, установить взаимосвязь с другими предметами, формированию пространственных представлений обучающихся, организации обучающихся к практической деятельности.

Одним из основных особенностей для решения задач считается их обобщенность, позволяющая решать задачи в изменяющихся ситуациях деятельности. Процесс обобщения знаний о способах решения нестандартных задач обязан быть понятным и управляемым. Необходимо разработать стратегии, указания в помощь обучающимся для познания ими умениями по решению задач. При этом обучение решению задач должно строиться таким образом, чтобы развивать креативные способности, самостоятельность мышления обучающихся.

У Л.М. Фридмана, Е.Н. Турецкого в книге «Как научиться решать задачи» определение нестандартной задачи выглядит следующим образом: «Нестандартные задачи - это такие, для которых в курсе математики не имеется общих правил и положений, определяющих точную программу их решения» [67].

Значимость нестандартных задач обусловлено тем, что они дают возможность:

1. Овладению знаний по программе на высоком уровне, так как ход решения данных задач не связан с использованием стандартных правил и

приемов, а требует применение всех знаний по теме, учит к поиску своеобразных, нешаблонных способов решения;

2. Способ проявления математических и общеинтеллектуальных способностей обучающихся, формирование уровня обученности и обучаемости, совершенствование математического мышления, создание познавательных интересов;

3. Исследование способности и умения самостоятельно учиться.

Нестандартные задачи при их решении:

–учат учащихся применять самостоятельно разработанные методы и алгоритмы решения задач, а не готовые, то есть позволяют овладевать мастерством отыскивать уникальные методы решения данных задач;

–выявляют влияние на развитие догадливости учащихся;

–мешают выработке штампов при решении задач, разрушают ошибочные сходства в знаниях и умениях учащихся, предполагают никак не освоение алгоритмическими способами, а нахождение ранее неизвестных связей в знаниях, к перенесению знаний в новые обстоятельства, к овладению различными приемами умственной деятельности учащихся.

Нестандартным задачам присущи ключевые методы решения:

1. Арифметический метод.
2. Алгебраический метод.
3. Метод перебора.
4. Метод рассуждений.
5. Практический метод.

Каждая нестандартная задача необыкновенна, а также неповторима при своем решении. Благодаря этому методика обучения поисковой деятельности при решении нестандартных задач не обязана формировать умения для решения нестандартных задач, а только отрабатывает определённые умения:

–понимать задачу;

–выделять основные слова;

–выявлять условие и вопрос задачи;

–известные и неизвестные величины в задаче;

–осуществлять исследование текста задачи, результатом которого будет является выбор арифметического действия или логической операции для решения данной задачи;

–фиксировать процесс решения и ответ данной задачи;

–осуществлять вспомогательную работу над данной задачей;

–выбирать нужную информацию, содержащуюся в тексте задачи, в результате её решения, классифицировать данную информацию, соотнося с уже имеющимися знаниями.

Рассмотрим несколько нестандартных задач по теме «Параллельность и перпендикулярность плоскостей».

Задача 42. Дана правильная треугольная призма $ABCA_1B_1C_1$, все ребра которой равны 1. Докажите, что плоскости ACB_1 и BA_1C_1 не параллельны (рисунок 23).

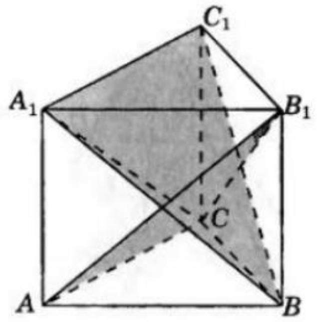

Рисунок 23 – к задаче 42

1) Координаты A(0,0,0), B_1(1,0,1), C(0,5; $\frac{\sqrt{3}}{2}$;0), найдем уравнение плоскости (AB_1C). Имеем: $\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix} = 0;$

$$\begin{vmatrix} x-0 & y-0 & z-0 \\ 1-0 & 0-0 & 1-0 \\ 0{,}5-0 & \frac{\sqrt{3}}{2}-0 & 0-0 \end{vmatrix} = 0; \begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 0 & 1 \\ 0{,}5 & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Уравнение плоскости: $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)x - 0{,}5y - \frac{\sqrt{3}}{2}z = 0$, то есть $\sqrt{3}x - y - \sqrt{3}z = 0$.

Координаты вектора нормали: $\vec{n}(\sqrt{3}; -1; -\sqrt{3})$.

2) Координаты A_1(0,0,1), B(1,0,0), C1((1:2),$\frac{\sqrt{3}}{2}$,1); найдем уравнение плоскости (A_1BC_1). Имеем: $\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix} = 0;$

$$\begin{vmatrix} x-0 & y-0 & z-1 \\ 1-0 & 0-0 & 0-1 \\ 0{,}5-0 & \frac{\sqrt{3}}{2}-0 & 1-1 \end{vmatrix} = 0; \begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 0 & -1 \\ 0{,}5 & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Уравнение плоскости: $\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)x - 0{,}5y - \frac{\sqrt{3}}{2}z + \frac{\sqrt{3}}{2} = 0$, то есть $\sqrt{3}x + y +$ $+\sqrt{3}\,z - \sqrt{3} = 0$.

Координаты вектора нормали: $\vec{m}(\sqrt{3}; 1; \sqrt{3})$, $\vec{n}(\sqrt{3}; -1; -\sqrt{3})$.

2) Найдем косинус угла между плоскостями (AB_1C) и (A_1BC_1):

cos a = $\frac{|\vec{m}\cdot\vec{n}|}{|\vec{m}|\cdot|\vec{n}|}$ = 1:7. Ответ: cos a = 1:7.

Задача 43. В правильной четырехугольной пирамиде SABCD точка S – вершина. Точка M – середина ребра SA, точка K- середина ребра SC. Найти угол между плоскостями BMK и ABC, если AB=8; SC=10 (рисунок 24).

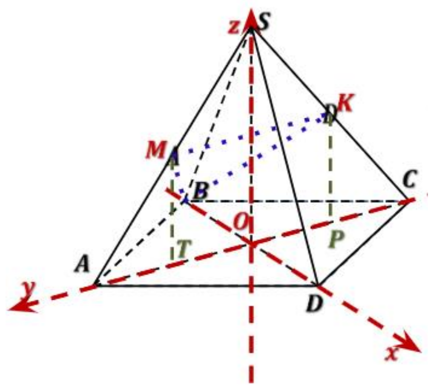

Рисунок 24 − к задаче 43

1) O(0;0;0); AB = 8; AC = $8\sqrt{2}$); AO = OC = BO = OD = $4\sqrt{2}$); $B(-4\sqrt{2};\ 0;\ 0)$; OP = OT = (1:4)*AC = $2\sqrt{2}$) ($\sqrt{2}$); KP = MT = $\sqrt{KC^2 - PC^2} =$ $\sqrt{5^2 - (2\sqrt{2})^2} = \sqrt{25-8} = \sqrt{17}$;

M(0; $2\sqrt{2}$; $\sqrt{17}$)); K(0; -$2\sqrt{2}$; $\sqrt{17}$); O(0;0;0); B(-$4\sqrt{2}$; 0; 0);

(MBK): $a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$; $\begin{cases} a_1 * 0 + b_1 * 2\sqrt{2} + c_1 * \sqrt{17} + d_1 = 0, \\ a_1 * 0 - b_1 * 2\sqrt{2} + c_1 * \sqrt{17} + d_1 = 0, \\ a_1 * (-4\sqrt{2}) + b_1 * 0 + c_1 * 0 + d_1 = 0; \end{cases}$

$$\begin{cases} b_1 * 2\sqrt{2} + c_1 * \sqrt{17} + d_1 = 0, \\ -b_1 * 2\sqrt{2} + c_1 * \sqrt{17} + d_1 = 0, \\ a_1 * (-4\sqrt{2}) + d_1 = 0; \end{cases} \qquad \begin{cases} 4\sqrt{2} * b_1 = 0, \\ d_1 = 4\sqrt{2} * a_1; \end{cases}$$

$$\begin{cases} b_1 = 0, \\ d_1 = 4\sqrt{2} * a_1, \\ b_1 * 2\sqrt{2} + c_1 * \sqrt{17} + d_1 = 0; \end{cases} \qquad \begin{cases} b_1 = 0, \\ d_1 = 4\sqrt{2} * a_1, \\ 0 * 2\sqrt{2} + c_1 * \sqrt{17} + d_1 = 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} b_1 = 0, \\ d_1 = 4\sqrt{2} * a_1, \\ c_1 = -\frac{4\sqrt{2} * a_1}{\sqrt{17}}; \end{cases} \qquad \overrightarrow{n_1}\{a_1; b_1; c_1\} = \overrightarrow{n_1}\left\{a_1; 0; -\frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{17}}a_1\right\}; \quad \overrightarrow{n_1}\left\{1; 0; -\frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{17}}\right\}.$$

1) $\overrightarrow{n_2}\{a_2; b_2; c_2\} = \overrightarrow{n_2}\{0; 0; 1\}$; $\overrightarrow{n_1}\{1; 0; -\frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{17}}\}$, $\overrightarrow{n_2}\{0; 0; 1\}$.

$$\cos\alpha = \frac{|\overrightarrow{n_1} * \overrightarrow{n_2}|}{|\overrightarrow{n_1}| * |\overrightarrow{n_2}|} = \frac{\left|1*0+0*0-\frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{17}}*1\right|}{\sqrt{1^2+0^2+(-\frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{17}})^2}*\sqrt{0^2+0^2+1^2}} = \frac{\frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{17}}}{\sqrt{1+\frac{32}{17}}} = \frac{\frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{17}}}{\frac{7}{\sqrt{17}}} = \frac{4\sqrt{2}}{7}.$$

Ответ: $\varphi = arccos\frac{4\sqrt{2}}{7}$.

2.5 Апробация обобщающих уроков по теме «Параллельность и перпендикулярность плоскостей» и описание педагогического эксперимента

Апробация обобщающих уроков по теме «Параллельность и перпендикулярность плоскостей» проводилась в 10 классе МОУ Ликино-Дулёвская гимназия.

Во время педагогической практики были проведены обобщающе-повторительные уроки, на которых обучающиеся готовились к контрольной работе и обобщали свои знания теоретического материала по теме «Параллельность и перпендикулярность плоскостей».

После первого обобщающего урока была предложена домашняя работа на основе которой произведен анализ полученных результатов (в начале следующего урока). При выполнении домашней работы обучающиеся не справились с определенными заданиями. Например, в заданиях: на нахождения искомого значения, на построение чертежа.

После обсуждения ключевых ошибок на уроке, учащимся была предоставлена возможность решить аналогичные задачи, с которыми учащиеся справились лучше, так как к ним пришло понимание собственных ошибок.

В конце данной темы учащиеся 10 класса написали контрольную работу, почти все написали на положительные оценки (Таблица 6).

Таблица 6 – Анализ выполнения учащимися домашних и контрольной работ.

№	ФИО	Сентябрь, октябрь			
		Д/з №1	Д/з №2	Д/з №3	Итоговая контрольная работа
1		3	4	4	4
2		2	3	3	3
3		3	3	4	4
4		4	5	5	5
5		2	3	4	4
6		2	2	2	3
7		2	4	5	5
8		3	3	4	5
9		5	5	5	5
10		4	5	5	5
11		2	2	3	3
12		2	3	4	4
13		4	4	5	5
14		5	4	4	4
15		3	4	4	4
16		2	4	4	4
17		4	5	5	5

Диаграмма, представленная ниже (рисунок 25), построена следующим образом: проанализированы оценки учащихся которые ходили на элективный курс, где разбирались задачи повышенной сложности, по геометрии и оценки учащихся, кто не посещал данный курс. Результат выполнения контрольной работы учащимися посещающими элективный курс по геометрии выше, чем у обучающихся, которые данный курс не посещали.

На основании полученных результатов можно сделать вывод: цель магистерской работы достигнута.

Рисунок 25 – результаты домашней и контрольной работ

Данное исследование демонстрирует, то что задачи, включающие компоненты параллельности и перпендикулярности плоскостей содействовали развитию у учеников точного понимания свойств и признаков параллельности и перпендикулярности плоскостей.

Наилучшая совокупность различных форм организации обобщения материала по теме «Параллельность и перпендикулярность плоскостей» содействует в полной мере формированию знаний учащихся.

В процессе исследования обобщающих уроков по теме «Параллельность и перпендикулярность плоскостей»:

1. Рассмотрены ключевые методы и приемы решения задач на параллельность и перпендикулярность плоскостей;
2. Проанализированы контрольно-измерительные материалы, задачи, которые используются для составления ЕГЭ профильного уровня;
3. Проведено исследование методических материалов по теме.

Апробация системы задач на обобщение и систематизацию знаний по теме проводилась во время педагогической практики в 10 класса общеобразовательной школы МОУ Ликино-Дулёвской гимназии.

Выводы по второй главе

В результате исследования методических аспектов систематизации знаний учащихся с помощью обобщающих уроков по теме «Параллельность и перпендикулярность плоскостей» в общеобразовательной школе можно сделать непротиворечащие выводы:

1. С целью формирования теоретических знаний и их применения на практике недостаточно работы с одной математической задачей. Необходима конкретная система математических задач на отработку теоретического материала, обеспечивающая овладение учебного материала на хорошем уровне. В данной работе была разработана система задач по теме «Параллельность и перпендикулярность плоскостей».
2. В работе рассмотрены основные цели и задачи обучения по теме «Параллельность и перпендикулярность плоскостей».
3. В работе представлен анализ содержания теоретического материала по теме «Параллельность и перпендикулярность плоскостей».
4. Проведен педагогический эксперимент.

Заключение

Сформулируем основные выводы и полученные результаты проведенного исследования:

1. Выявлены цели и задачи обучения теме «Параллельность и перпендикулярность плоскостей». В результате изучения темы, учащиеся должны изучить возможные случаи взаимного расположения плоскостей в пространстве; знать понятие параллельности и перпендикулярности плоскостей; уметь применять признаки параллельности и перпендикулярности плоскостей; уметь работать со свойствами параллельности и перпендикулярности плоскостей; уметь читать и строить чертежи пространственных конфигураций, фигур к задачам; уметь решать задачи.
2. Были рассмотрены и определены основные требования к знаниям, умениям, навыкам по теме «Параллельность и перпендикулярность плоскостей» в курсе геометрии общеобразовательной школы на основании Федерального государственного образовательного стандарта среднего (полного) общего образования.
3. Выполнен анализ программы и школьных учебников по теме «Параллельность и перпендикулярность плоскостей». Методика преподавания темы «Параллельность и перпендикулярность плоскостей» в каждом из учебников имеет свои сильные и слабые стороны. Выбор учебника во многом зависит от целей и задач обучения. В учебнике Л.С. Атанасяна теоретическая часть представлена достаточно кратко и компактно. В связи с этим, усвоение новых знаний для учеников не должно представлять трудности. Основное внимание в учебнике уделено практической части. В курсе А.Д. Александрова тема «Параллельность и перпендикулярность плоскостей» теоретически освещена наиболее полно, подробно и целостно. Соответственно, и требования к учащимся выше: учебник рассчитан на более

углубленное изучение математики. Учебник А.В. Погорелова отличается от двух предыдущих интересным подходом к освоению теории: в нее встроены задачи с решениями. Благодаря этому, учащиеся не только получают знания, но и развивают логическое и творческое мышления.

4. Проанализированы диссертационные работы, опубликованные ранее по теме исследования, изучен опыт работы учителей математики по теме «Параллельность и перпендикулярность плоскостей».

5. Составлен набор задач для учащихся 10 класса, содержащая в себе задачи большинства видов по теме «Параллельность и перпендикулярность плоскостей».

Все вышесказанное дает основание полагать, что задачи, которые были поставлены в начале исследования, были полностью решены, а также цель исследования достигнута.

Список используемой литературы

1. Федеральный закон «Об образовании в Российской Федерации». – М.: Омега-Л, 2014. – 134 с.

2. Стандарт среднего полного (общего) образования по математике. Базовый уровень, http://www.school.edu.ru/dokedu.asp?obno=19 814

3. Стандарт среднего полного (общего) образования по математике. Профильный уровень, http://www.school.edu.ru/dokedu.asp7obn 0=19812

4. Азевич А.И. Задачи по геометрии. 10-11 классы: дидактические материалы и контрольные работы. — М.: Школьная Пресса, 2005. — 144 с.

5. Александров А.Д., Вернер А.Л., Рыжик В.И. Геометрия: учеб.для 10 кл. школ с углубл. изучением математики. — 4-е изд., дораб. М.: Рос. акад. наук, Рос. акад. образов., изд-во «Просвещение», 2006; — 270 с.

6. Александров А.Д., Вернер А.Л., Рыжик В.И. Геометрия : учеб. для 10-11 кл. общеобразоват. учреждений. -4-е изд. -М.: Рос. акад. наук, Рос. акад-. образования, изд-во «Просвещение», 2006. 240 с.

7. Александров А.Д., Вернер А.Л., Рыжик В.И.',. Евстафьева Л.П. Геометрия, 10-11: кн. для учителя. -М.: Просвещение, 2005. 128 с.

8. Атанасян Л.С., Бутузов В.Ф., С.Б. Кадомцев и др. Геометрия 10-11: учеб.дляобщеобразоват. учреждений: базовый и профильный уровни. — М.: Просвещение, 2009. 255 с.

9. Бернштейн, М.С. Задачи на доказательство в курсе геометрии/ М.С. Бернштейн // Математика в школе. -1941. - №4. - С. 19-30.

10. Бескин Н.М. Методика геометрии: учебник для пед. ин-тов. — М.-JL: Учпедгиз, 1947.-276 с.

11. Богушевский, К.С. Из писем и заметок читателей / К.С. Богушевкий // Математика в школе. -1952. - №5. - С. 60-72.

12. Болтянский, В.Г. Анализ - поиск решения задач / В.Г. Болтянский // Математика в школе. - 1974. - №1. - С. 34 - 40

13. Боровкова О.А. «Живая геометрия» в действии // Математика в школе. 2007. - № 4. - С. 37-43.

14. Булычев В. Проект ИСО и новые образовательные ресурсы в школьном курсе геометрии // Математика / Еженед. учебно-метод. прилож. к газете «Первое сентября». —2008. № 15. - С. 8-13.

15. Васильева Г.Н. Методические аспекты деятельностного подхода при обучении математике в средней школе./Г.Н. Васильева. – Пермь, 2009. – 136 с.

16. Веселовский С.Б., Рябчинская В.Д. Геометрия: дидактические материалы по геометрии для 10 класса. — М.: Просвещение, 2008. — 96 с.

17. Выготский, Л.С. Избранные педагогические исследования/ Л.С. Выготский, Л.С. - М.:Изд-во АПНРСФСР, 1956. - 519 с

18. Геометрия. 10-11 классы: программы общеобразовательных учреждений / Сост.: Т.А. Бурмистрова. -М.: Просвещение, 2010. 38 с.

19. Глазков Ю.А., Юдина И.И., Бутузов В.Ф. Геометрия. Рабочая тетрадь 10 класс: пособие для учащихся общеобразовательных учреждений. М.: Просвещение, 2013. - 97 с.

20. Горский, Д.П. Краткий словарь по логике/ Д.П. Горский, А.А. Ивин, А.Л. Никифоров; Под ред. Д.П. Горского. - М.: Просвещение, 1991. - 208 с.

21. Гуревич С.В. Методика построения чертежа к геометрической задаче при изучении геометрии, основанном на идеях фузионизма: дис. . канд. пед. наук: 13.00.02.-М., 1997. 174 с.

22. Гусев В.А. Психолого-педагогические основы обучения математике. М.: ООО «Изд-во «Вербум- М», «Издательский центр «Академия», 2003. — 432 с.

23. Дорофеев Г.В. Обобщение метода интервалов / Г.В. Дорофеев // Математика в школе. - 1969. - №3.-С. 39-44.

24. Евстафьева Л.П. Геометрия: дидактические материалы для 10-11 кл. ~ М.: Просвещение, 2004. 78 с.

25. Ермак Е.А. Развитие пространственного мышления при изучении геометрии: Учебное пособие. Псков: Псковский государственный университет, 2014. 48с.

26. Зильберберг, Н.И. Урок математики: подготовка и проведение: кн. для учителя / Н.И. Зильберберг. - М.: Просвещение; Учеб. лит., 1995. - 178 с.

27. Калинин А.Ю., Терешин Д.А. Стереометрия 10: экспериментальный учебник для школ с углублённым изучением математики М.: МФТИ, 2005. -256 с.

28. Калинин А.Ю., Терешин Д.А. Стереометрия 11: экспериментальный учебник для школ с углублённым изучением математики М.: МФТИ, 2005. -336 с.

29. Канин, Е.С. Заключительный этап решения учебных задач/ Е.С. Канин, Ф.Ф. Нагибин // Преподавание алгебры и геометрии в школе / сост. О.А. Боковнев. - М., 1982. - С. 131-139.

30. Каплунович И.Я. Развитие пространственного мышления школьников в процессе обучения математике. Н.Новгород: НРЦРО, 1996. — 99 с.

31. Киселев А.П. Элементарная геометрия. Книга для учителя. М: Издательство Editorial URSS, 2016, 288 с.

32. Костицын В.Н. Практические занятия стереометрии. -М.: Издательство «Экзамен», 2004. — 160 с.

33. Литвиненко В.Н. Задачи на развитие пространственных представлений: кн. для учителя. — М., Просвещение, 1991. 127 с.

34. Маланюк, М.П., Гапюк, Я.Ф. Упражнения обобщающего характера в курсе алгебры 6 класса/ М.П. Маланюк, Я.Ф. Гапюк // Математика в школе. - 1984. - №2. - С. 25 - 27.

35. Манвелов С.Г. Конструирование современного урока математики: Книга для учителя. М.: Просвещение, 2002. - 175 с.

36. Методика обобщающих повторений при обучении математике: пособие для учителей и студентов / В.А. Далингер. - Омск: изд-во ОГПИ. 1992. - 88 с.

37. Методика преподавания математики в средней школе: частная методика / А.Я. Блох, В.А. Гусев и др.; Сост. В.И. Мишин. М.: Просвещение, 1987. — 416 с.

38. Методика преподавания математики в средней школе. Общая методика: учеб.пособие для студентов физ. - мат. фак. пед. ин-тов / В.А. Оганесян, Ю.М. Колягин, Г.Л. Луканкин, В.Я. Саннинский. - М.: Просвещение. 1980. - 368 с.

39. Мордкович, А.Г. Беседы с учителями математики: Концептуал. методика. Рекомендации, советы, замечания. Обучение через задачи / А.Г. Мордкович. - М.: Школа-Пресс, 1995. - 272 с.

40. Ольбинский И.Б. Методика обучения учащихся старших классов рефлексивному исследованию математических задач: дис. канд. пед. наук: 13.00.02. — Москва, 2002.-222 с.

41. Орлов В.В. Организация самостоятельного поиска решения стереометрических задач с помощью опорных конструкций: дисс. . канд. пед. наук: 13.00.02.-Л., 1990.-171 с.

42. Островский, А.И. Геометрия помогает арифметике/ А И. Островский, Б. А Кордемский. - М: Физматгиз, 1960. -168 с.

43. Педагогика: учеб.пособие для студентов пед. ин-ов / Ю.К. Бабанский, В.А. Сластенин, Н.А. Сорокин; под ред. Ю.К. Бабанского. 2 - е изд., доп. и перераб. - М.: Просвещение, 1988. - 479 с.

44. Педагогический энциклопедический словарь/ гл. ред. Б.М. Бим - Бад. - М: Большая Российская энциклопедия, 2002. - 528 с.

45. Перельман Я.И. Как сделать изучение геометрии интересным и жизненным? // Математика в школе, 2016. № 1. С. 25–30.

46. Погорелов А.В. Геометрия. 10-11 классы: учеб.для общеобразоват. организаций: базовый и профил. уровни. – М.:Просвещение, 2014. 175с.

47. Поздняков С.Н. Информационная среда как новый фактор обучения математике / Всероссийская конференция «Математическое образование на рубеже веков». М.: МЦНМО, 2000. - С. 208-211.

48. Пойа, Д. Как решать задачу: пер. с англ. / Д. Пойа. - М.: Учпедгиз, 1959. - 216 с.

49. Понарин, Я.П. Геометрия: учебное пособие / Я.П. Понарин. - Ростов-на-Дону: Феникс, 1997. - 512 с.

50. Потоскуев Е.В., Звавич Л.И. Геометрия. 10 кл.: задачник для общеобразовательных учебных заведений с углубл. и профильным изучением математики. — М.: Дрофа, 2003. — 256 с.

51. Потоскуев Е.В., Звавич Л.И. Геометрия. 11 кл.: задачник для общеобразовательных учебных заведений с углубл. и профильным изучением математики. — М.: Дрофа, 2003. 240 с.

52. Психологический словарь / под ред. В.В. Давыдова, А.В. Запорожца, Б.Ф. Ломова; науч. - исслед. ин-т общей и педагогической психологии АПН СССР. - М.: Педагогика, 1983. - 448 с.

53. Розенфельд, Д.И. Об ознакомлении учащихся с методом обобщения /Д.И. Розенфельд // Математика в школе. - 1965. - №1. - С. 41-43

54. Рубинштейн, С.Л. Основы общей психологии / С.Л Рубинштейн. - СПб.: Питер Ком, 1998 - 688 с.

55. Рыжик В.И. Геометрия: дидакт. материалы для 10 кл. общеобразовательных учреждений. 10-е изд. - М.: Просвещение, 2008. -128 с.

56. Рыжик В.И. Геометрия: дидакт. материалы для 11 кл. общеобразовательных учреждений. — 10-е изд. — М.: Просвещение, 2008. — 128 с.

57. Саакян С.М., Бутузов В.Ф. Изучение геометрии в 10-11 классах: кн. для учителя. 4-е изд., дораб. - М.: Просвещение, 2010. - 248 с.

58. Саранцев, Г.И. Общая методика преподавания математики: учеб.пособие для студентов мат. спец. пед. вузов и университетов / Г.И. Саранцев. - Саранск: Тип. «Крас. Окт.», 1999. - 208 с.41. Философский энциклопедический словарь.Т4.-М.:Современная энциклопедия, 1983. - 446 с.

59. Саранцев Г.И. Составление геометрических задач на заданных чертежах // Математика в школе. 1993. - №6. - С. 14-16.

60. Саранцев Г.И. Упражнения в обучении математике. 2-е изд., дораб. - М.: Просвещение, 2005. - 255 с.

61. Семенов, Е.Е. Об одном приеме обучения учащихся обобщению и конкретизации/ Е.Е. Семенов // Математика в школе. - 1976. - №2. - С. 55 - 57.

62. Смирнова И.М. Геометрия. 10-11 классы: учебник для учащихся общеобразовательных учреждений (базовый уровень). — М.: Мнемозина, 2010.-223 с.

63. Смирнова И.М. Научно-методические основы преподавания геометрии в условиях профильной дифференциации обучения: дисс. докт.пед. наук: 13.00.02. Москва, 1994. 364 с.

64. Смирнова И.М., Смирнов В.А. Изображение пространственных фигур. Элективный курс. 10-11 классы :учеб.пособие для общеобразоват. учреждений М.: Мнемозина, 2007. - 64 с.

65. Стратилатов П.В. Сборник задач по геометрии для 9-10 классов: пособие для учителя. М.: Просвещение, 1986. - 48 с.

66. Философская энциклопедия.Т4.-М.:Современная энциклопедия, 1967. - 519 с.

67. Фридман Л.М. Как научиться решать задачи. М.: Московский психолого-соц. ин-т; Воронеж: Изд-во НПО «МОДЭК», 1999. - 240 с.

68. Хевсокова М.Ю. Методика обучения геометрическим преобразованиям пространства учащихся старшей школы в условиях профильной дифференциации: дис. канд. пед. наук: 13.00.02. - Москва, 2011.- 238 с.

69. Ходеева Т.В. Методика изучения многогранников в средней школе на основе фузионистской концепции: дис. канд. пед. наук: 13.00.02. — Москва, 2001.-220 с.

70. Черняева А.Р. Реализации деятельностного подхода в процессе формирования пространственного мышления учащихся при обучении построению сечений многогранников: дис. канд. пед. наук: 13.00.02. — Москва, 2004.-155 с.

71. Цукарь А.Я. Развитие пространственного воображения: задания для учащихся. СПб.: Изд-во СОЮЗ, 2000. - 144 с.

72. Шереметьева О.В. Обучение решению стереометрических задач с учетом взаимосвязи образного и логического компонентов мышления: дис. . канд. пед. наук: 13.00.02. -М., 1997. 126 с.

73. Шлыков В.В., Валаханович Т.В; Геометрия. Стереометрия: шк. учеб: пособие. Мн.: ООО «Асар», 2003. - 240 с.

74. Щепин О.Н. Наглядно-конструктивный подход к изучению стереометрии в, старших классах средней школы: дис. . канд. пед. наук: 13.00.02.-М., 1999.-126 с.

75. Эрдниев, П.М. Укрупнение дидактическихедениц в обучении метематике: кн. для учителя / П.М. Эрдниев, Б.П. Эрдниев. - М.:

76. Ismail S.F.Z.H., Shahrill M., Mundia L. Factors Contributing to Effective Mathematics Teaching in SecondariveMathematy School in Brunei Darussalam [Электронныйресурс] // Procedia - Social and Behavioral Sciences.

2015.- p. 474-481. URL: https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1877042815024295 .

77. Libeskind S. Euclidean and Transformational Geometry: A Deductive Inquiry. – Jones & Bartlett Publishers, 2007. – 371 p.

78. Mullis, I.V.S., Martin, M.O., Goh S., Cotter K. TIMSS 2015 encyclopedia: Education policy and curriculum in mathematics and science. 2016. URL :http://timssand-pirls.bc.edu/timss2015/encyclopedia.

79. Ubuz, B. 10th and 11th grade students' errors and misconceptions on basic geometric concepts. Hacettepe University Journal of Education, 1999. - 104 p.

80. Ulusoy, F. The role of learners' example spaces ın example generatıon and determınatıon of two parallel and perpendıcular lıne segments. In Csíkos, C., Rausch. 2016.