МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Тольяттинский государственный университет»

Институт математики, физики и информационных технологий
(наименование института полностью)

Кафедра «Высшая математика и математическое образование»
(наименование)

44.04.01 Педагогическое образование
(код и наименование направления подготовки)

Математическое образование
(направленность (профиль))

ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА (МАГИСТЕРСКАЯ ДИССЕРТАЦИЯ)

на тему «Методика обучения решению комбинаторных задач в курсе математики общеобразовательной школы»

Студент	Л.А. Донченко (И.О. Фамилия)	(личная подпись)
Научный руководитель	канд. пед. наук, доцент В.В. Липилина (ученая степень, звание, И.О. Фамилия)	

Тольятти 2021

Оглавление

Введение

Актуальность и научная значимость настоящего исследования. Обучение решению комбинаторных задач посвящены практически все ступени образовательного процесса в курсе математики средней школы, начиная с бесформульных примеров в начальной школе и заканчивая элементами теории вероятности и математической статистики в выпускных классах общеобразовательных учебных заведений. Поэтому, эта тема позволяет привить учащимся математическую культуру и способность к логическому мышлению начиная с самой начальной школы, развивает научный стиль мышления, развивает способности к их анализу.

Однако, существуют известные сложности, которые испытывают учащиеся при решении комбинаторных задач, связанные с необходимостью самостоятельно выделять и классифицировать различные элементы и множества в целом, и совершать операции с ними по правилам комбинаторики. Это указывает на необходимость улучшения методологических подходов к процессу изучения элементов комбинаторики в курсе математики, что является обязательным для успешного окончания общеобразовательной школы.

Личностно-ориентированный и деятельностные подходы, которых в настоящее время придерживается вся система образования, невозможен без персональной учебно-познавательной деятельности школьников. Комбинаторика, как раздел математики, изучаемый практически на протяжении всего школьного курса, является инструментом, который помогает формировать у учащихся вероятностное мышление, и вызывает у них интерес к другим естественнонаучным предметам. Ведь подавляющее большинство современных наук, физико-математических, химико-биологических, социально-экономических, основано на положениях стохастики.

Анализ базовой и дополнительной учебной литературы в целом показывает, что изучению комбинаторики стоит отвести больше времени, учитывая значимость данной темы. При этом, объем представлений о методах решения комбинаторных задач ограничивается достаточно узким спектром практических проблем и вопросов.

Именно этим, в первую очередь, обусловлена особая *актуальность и научная значимость* рассматриваемой в работе темы.

На текущий момент можно выделить несколько групп научных работ, посвященных проблеме методики обучения решению задач по рассматриваемой теме:

- изучение комбинаторики в средней школе как одного из методов решения широкого круга практических задач в математике и смежных дисциплинах;

- исследование способностей к усваиванию материала в условиях профильной дифференциации;

- обучение решению задач в старших классах школы с использованием различных компьютерных программ;

- обучение старшеклассников вероятностно-логическому мышлению посредством решения задач.

Вопросы изучения темы «Комбинаторика» в школе активно затрагивались в различных диссертационных работах. Отметим исследования авторов Л.М. Кабеховой [34], А.П. Шиховой [81], Е.Е. Белокуровой [6], Л.В. Евдокимовой [29], посвященные методикам построения единого курса комбинаторики и элементов теории вероятности, приложениям комбинаторики, особенностям комбинаторных рассуждений и формированию комбинаторного мышления.

Несмотря на достаточно подробное изучение вопросов методики преподавания комбинаторики и решения комбинаторных задач в общеобразовательной школе, поиск эффективных, универсальных способов обучения сохраняет свою актуальность.

Проблема исследования представляется в определении методических особенностей обучения решению комбинаторных задач в курсе алгебры общеобразовательной школы.

В качестве **объекта** исследования по теме данной работы выбран процесс обучения математике в общеобразовательной школе.

Предметом исследования является методика обучения решению комбинаторных задач в курсе математики общеобразовательной школы.

Целью данной работы является исследование и систематизация методических подходов к обучению учащихся общеобразовательных школ решению различных типов комбинаторных задач.

Для этого необходимо следующее:

- провести анализ научно-практических работ по проблематике данной работы,

- изучить нормативную базу, регулирующую методику преподавания комбинаторики и теории вероятностей в старших классах средней школы и в других довузовских учебных заведениях;

- проанализировать типичные ошибки учащихся и основные затруднения в процессе восприятия элементов комбинаторики, а также при решении комбинаторных задач и задач, использующих комбинаторику в качестве инструмента,

- проанализировать с профессиональной педагогической точки зрения комплекс задач, используемых в преподавании комбинаторики в качестве раздела математики как базового, так и профильного и элективного предмета в общеобразовательных школах разного уровня,

- сравнить учебно-методическую литературу, используемую для преподавания в средней школе и экзаменационных материалов за прошедшие годы по тематике данной работы,

- показать практическую значимость приведенных в работе результатов и выводов.

Гипотеза исследования основана на том, что детальное и акцентированное изложение материала комбинаторики, с помощью анализа учебных пособий, научно-педагогических работ по проблематике данной работы, а также, посредством анализа типичных затруднений у учащихся, позволяет обеспечить положительный результат в улучшении знаний, умений и навыков при решении заданий, как по рассматриваемой теме, так и по вероятностным задачам и элементам статистики.

Для достижения целей, поставленных в данной работе, должны быть решены следующие **задачи**:

1. Сравнить учебно-методические пособия и проверочные материалы результатов обучения, используемые в образовательном процессе;

2. Изучить специализированные научно-исследовательские работы, посвященные теме работы;

3. Изучить конкретный практический опыт преподавания комбинаторики в старших классах школ разного уровня с учетом уровневой дифференциации учащихся;

4. Обобщить и провести анализ типовых сложностей и ошибок, с которыми сталкиваются учащиеся при решении комбинаторных и вероятностных задач;

5. Классифицировать комбинаторные задачи школьного курса математики с точки зрения формирования универсальных учебных действий у обучающихся;

6. Сделать анализ состояния методических рекомендаций, лежащих в основе процесса преподавания старшеклассникам элементов комбинаторики и разработать методические рекомендации по обучению решению комбинаторных задач;

7. Разработать элективный курс "Комбинаторные задачи повышенной трудности" для учащихся старших классов.

8. Представить результаты педагогического эксперимента.

Теоретическую и методологическую основу данного исследования составляют работы С.М. Никольского, А.В. Шевкина[58], Н.Я. Виленкина, А.Н. Виленкина [18], Ш.А. Алимова, Ю.М. Колягина, М.В Ткачевой, Н.Е. Федоровой, М.И. Шабунина [4], А.Г. Мордковича [50].

Базовыми для настоящей работы являются основные требования к знаниям, умениям учащихся, ФГОС и анализ содержания теоретического и задачного материала по комбинаторике и ее приложениям в курсе алгебры и начал математического анализа общеобразовательной школы [73], [74].

Методы исследования, использованные для решения поставленных задач: изучение и систематизация научно-исследовательской и учебно-педагогической литературы; наблюдение, анализ и педагогический эксперимент; статистическая обработка данных.

Основные этапы исследования:

1 этап (2018/19 уч.г.): анализ ранее выполненных исследований по теме диссертации, анализ школьных учебников, нормативных документов (стандартов, программ), анализ опыта работы педагогов по данной теме;

2 этап (2019/20 уч.г.): определение теоретических основ исследования по теме диссертации;

3 этап (2019/20 уч.г.): определение методических основ исследования, разработка элективного курса для обучающихся старших классов;

4этап (2020/21 уч.г.): оформление диссертации, корректировка ранее представленных материалов, уточнение аппарата исследования, описание результатов экспериментальной работы, формулирование выводов.

Опытно-экспериментальная база исследования: Казахстан, Костанайская область, Карабалыкский район, ГУ «Тогузакская средняя школа отдела образования акимата Карабалыкского района». В эксперименте принимали участие учащиеся старших классов.

Новизна проведенного исследования заключается в том, что в нем определены и обоснованы методические особенности обучения решению комбинаторных задач в курсе математики старших классов общеобразовательных учебных заведений.

Теоретическая значимость исследования состоит в том, что в нем сформулированы теоретические основы обучения комбинаторике, проанализированы соответствующие требования к подготовке учащихся; проанализирована методика обучения решению комбинаторных и вероятностных задач.

Практическая значимость исследования определяется тем, что проведен анализ задачного материала по комбинаторике, элементам теории вероятностей и математической статистики, включая задания ЕГЭ; предложен соответствующий элективный курс.

Для результатов исследования **достоверность и обоснованность** обусловлена: применением теоретических и практических способов исследования; анализом учебно-педагогической практики; практической апробацией экспериментальной программы элективного курса.

Апробация и внедрение результатов работы велись в течение всего исследования. Его результаты докладывались на:

− V Международной научной конференции «Актуальные проблемы педагогики и психологии на современном этапе» (Волгоград, НИЦ «Абсолют», 30 октября 2020 г.);

− III Республиканской научно-практической конференции «Образование в Казахстане: традиции, опыт, инновации» (Нур-Султан, 22.04.2020 г.).

Экспериментальная проверка предлагаемых методических рекомендаций была осуществлена в период производственной практики (научно-исследовательской работы) и преддипломной практики на базе кафедры высшей математики и математического образования Тольяттинского государственного университета, а также в период работы учителем математики на базе ГУ «Тогузакская средняя школа отдела образования акимата Карабалыкского района» (Казахстан, Костанайская область, Карабалыкский район, с. Тогузак).

Теоретические выводы и практические результаты исследования представлены в двух публикациях [43], [44].

Результаты исследования обсуждались на заседаниях методических объединений учителей математики ГУ «Тогузакская средняя школа отдела образования акимата Карабалыкского района» (Казахстан, Костанайская область, Карабалыкский район, с. Тогузак), были представлены на педагогическом совете в рамках обмена опытом среди учителей школы.

На защиту выносятся:

1. Классификация комбинаторных задач с точки зрения формирования универсальных учебных действий у обучающихся

2. Методические рекомендации по обучению решению комбинаторных задач.

3. Элективный курс по теме «Комбинаторные задачи повышенной трудности» для учащихся старших классов.

Структура магистерской диссертации. Представляемая работа состоит из введения, 2-х глав и заключения, содержит 6 рисунков и 8 таблиц. Основной текст работы изложен на 82 страницах. Список используемой литературы включает 88 наименований.

Глава 1 Теоретические основы обучения решению комбинаторных задач в курсе математики общеобразовательной школы

1.1 Анализ особенностей обучения решению комбинаторных задач по различным учебным пособиям

Комбинаторика изучается, начиная уже со ступени основного общего образования, хотя, отдельного специального раздела в курсе математики для задач комбинаторного характера не предусмотрено.

Для анализа содержания теоретического материала по теме комбинаторных задач были выбрано несколько учебников из федерального перечня учебников, рекомендуемых при реализации обязательной части основной образовательной программы.

1. «Алгебра. 7 класс», Ю. М. Колягин, М. В. Ткачев, Н. Е. Федорова, М.И. Шабунин

В учебнике Алгебры за 7 класс авторов Ю.М. Колягина, М.В. Ткачевой, Н.Е. Федоровой, М.И. Шабунина [36] в главе VIII приведен материал по элементам комбинаторики. Подчеркивается, что есть немало задач, в которых требуется комбинировать различные элементы, составлять наборы и вести их подсчеты. Такие задачи называют комбинаторными и раздел математики – комбинаторикой.

В учебнике приведены основные типы комбинаторных задач, а также способы их решения. В первом параграфе главы (параграф 38) рассмотрены задачи на различные комбинации трех тел. Особо подчеркнуто различия в задачах, когда важен порядок следования элементов. Далее, на основе разобранных примеров, вводятся понятия сочетаний, размещений и перестановок.

Для учащихся, интересующихся математикой, приведены исторические комбинаторные задачи с магическими и латинскими квадратами.

В следующем параграфе рассматривается таблица вариантов и правило комбинаторного произведения. В качестве дополнительного материала приведены задачи с анаграммами. В параграфе 40 приведены примеры на подсчет вариантов с помощью наглядных схем-графов. Для интересующихся математикой приведена знаменитая задача о кенигсберских мостах, которая была решена Л.Эйлером и которая легла в основу теории графов.

В результате усваивания материала, учащиеся получают представление:

- о комбинаторике,
- о способах организованного перебора,
- о средствах подсчета комбинаций,
- о графах,
- о комбинаторном правиле произведения.

2.«Алгебра. 9 класс», Ш. А. Алимов, Ю. М. Колягин, Ю. В. Сидоров и др.

Материал в главе V учебника [3] «Случайные события» является продолжением изложенного в учебнике Алгебры за 7 класс авторского коллектива Ю.М. Колягина, М.В. Ткачевой, Н.Е. Федоровой, М.И. Шабунина[36].

В параграфе 22 вводятся понятия событий, невозможных, достоверных, равновозможных. В параграфе 23 рассматривается вероятность событий на основе классического определения вероятности.

Параграф 24 посвящен решению вероятностных задач с помощью комбинаторики. Используются правила произведения, понятия перестановки, размещения, сочетания, которые учащиеся изучали в 7 классе. Также используются: графы, схемы, таблицы.

Рассмотрено большое количество вероятностных задач, для решения которых используются элементы комбинаторики.

3. «Алгебра, учебник для 9-го класса с углубленным изучением математики», Виленкин Н. Я., Сурвилло Г. С., Симонов А. С., Кудрявцев А. Н.

В учебнике [14], в главе XII, в первом параграфе вводятся основные понятия комбинаторики. Дается определение комбинаторики следующим образом:

Во многих практических задачах речь идет о комбинациях объектов и область математики, в которой изучают такие задачи называется комбинаторикой.

Далее рассматривается два закона, которые используются во многих комбинаторных задачах:

- правило суммы,
- правило произведений.

Даны элементарные понятия теории множеств, объединений и пересечений. Далее, последовательно даны определения:

- размещений и факториала,
- перестановок,
- сочетаний.

Все определения подробно сопровождаются необходимыми примерами, которые иллюстрируют различные случаи применения понятий комбинаторики.

4. «Алгебра. 9 класс, ч.1», Мордкович А. Г., Семенов П. В.

В учебнике [49] вводятся следующие комбинаторные понятия:

- факториал,
- общий ряд данных и ряд данных конкретного измерения,
- варианта ряда данных, ее кратность, частота,
- многоугольники распределения.

Приведены основные методы решения простейших комбинаторных задач:

- перебор вариантов,
- построение дерева вариантов,
- правило умножения.

Доказаны теоремы:

- о числе перестановок множестваn элементов: $P_n = n!$
- о вероятности суммы несовместимых событий,
- о вероятности противоположного события.

Изложение элементов комбинаторики вводится с помощью метода организованного перебора вариантов. Предлагаются оформления задач в различных формах.

Затем приводится правило умножения и ряд интуитивно понятных примеров. При решении задач используются как таблицы, так и дерево вариантов. После этого, вводится понятие факториала и доказывается соответствующая формула.

Завершается глава учебника элементами математической статистики и теории вероятностей.

5. «Математика, учебник для 6 класса», «Алгебра, учебники для7-9 классов» Дорофеев Г.В., Шарыгин И.Ф., Суворова С.Б. и др.

В учебнике [27] для6 класса в седьмом разделе вводятся некоторые элементы комбинаторики: логика перебора, правило умножения, сравнение шансов.

Размещения и сочетания вводятся лишь в восьмом классе с пометкой «для тех, кому интересно» [28].

В учебнике за 9 класс также присутствует лишь один параграф, посвященный вероятности и комбинаторике.

6. «Алгебра, учебник для9 класса»С.М. Никольского, М.К. Потапова, Н.Н. Решетникова, А.В. Шевкина.

В этом учебнике[57] параграф 13 полностью посвящен комбинаторике. Рассмотрены основные комбинаторные правила, задачи на перебор вариантов, перестановки, размещения, сочетания.

В качестве дополнительного материала предлагаются темы«Бином Ньютона» и «Треугольник Паскаля».

В последующем, в 9 и 10 классе, введенные элементы комбинаторики используются при изучении других разделов стохастики.

Проанализируем изучение темы «Комбинаторные задачи» на примере еще ряда учебных пособий (Таблица 1).

Таблица 1 − Анализ темы «Комбинаторные задачи» в учебных пособиях

Название	Теоретический аспект	Практический аспект
Алгебра и начала математического анализа. 10-11 классы: базовый и углубленный уровни / Ш. А. Алимов, Ю.М. Колягин, М.В. Ткачева [4]	В данном учебнике раздел «Комбинаторика» включает 16 задач на правило произведения, 13 задач на перестановку, размещениям посвящено 8 задач, 12 задач – сочетаниям, 5 задач – биному Ньютона. В конце главы также имеются упражнения на обобщение и систематизацию знаний.	В учебнике для самостоятельной работы учащихся предложено большое количество задач разной сложности, требующих «творческого подхода»: 1. «Сколькими способами из колоды в 36 карт можно вытащить две карты: А) черной масти, Б) червовой масти.» 2. «Найти член разложения бинома $\left(\sqrt[3]{x}+\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^{15}$ содержащий $x^{\frac{1}{3}}$»
Алгебра и начала математического анализа. 11 класс: базовый и профильный уровни / Ю. М. Колягин, М. В. Ткачева, Н. Е. Федорова, М. И. Шабунин; под ред. А. Б. Жижченко [37].	Учебник содержит теоретический материал по всем разделам алгебры и начал анализа в соответствие с положениями ФГОС среднего общего образования. В рамках Главы 5: «Комбинаторика» вначале рассматривается математическая индукция, затем, пошагово вводятся основные понятия комбинаторики, правило произведения, размещения и сочетания без повторений, сочетания с повторениями, а также бином Ньютона. Подробно, с учетом уровневой дифференциации, рассматривается все подразделы этой темы и ряд комбинаторных задач. В данном учебнике наиболее полно рассмотрена тема комбинаторных задач.	Практический материал содержит большое количество подробно разобранных задач, в том числе, задачи, которые предлагаются на тестированиях. Пример задачи: «В продажу поступили мячи 7 различных цветов. Сколькими способами можно купить 3 мяча?»

Продолжение таблицы 1

Сборник задач по математике для поступающих во ВТУЗы/ под ред. М.И. Сканави. [67]	Классический задачник, который в полной мере заслужил свою репутацию и в котором в компактном виде представлены все основные формулы комбинаторики. Разобраны практически все типы примеров, иллюстрирующие основы комбинаторики. Много внимания уделено биному Ньютона, задачам на применение правил комбинаторики. Отдельное место уделено задачам по тематике смежных с комбинаторикой тем.	В сборнике в подробном виде представлены задачи различной категорий сложности. Пример задачи повышенной сложности: «Найти наибольшее слагаемое разложения: $\left(\sqrt{5}+\sqrt{2}\right)^{20}$»
Алгебра и начала математического анализа. 10-11 классы. В 2-ч частях. Ч.1. Учебник для учащихся общеобразовательных учреждений (базовый уровень)/Мордкович А.Г. [51].	Один из самых популярных учебников, который сосредоточен на базовом уровне общеобразовательного стандарта. В рамках Главы 9: «Элементы математической статистики, комбинаторики и теории вероятности» пошагово вводятся основные понятия комбинаторики, сочетания и размещения, а также бином Ньютона. В учебнике расписано количество часов, которое предлагается уделить различным темам алгебры и начал анализа. При тематическом планировании предлагается уделить понятиям комбинаторики, биному и элементам теории вероятности, использующим комбинаторику, по 2 часа. В учебнике предлагается на сочетания и размещения 20 задач, на бином Ньютона 7 задач. Изучение этих разделов предполагается в 11-м классе.	К учебнику прилагается отдельный задачник, в котором представлены задачи трех уровней сложности. Составлены в соответствии с требованиями и программами тестов. Приведем типовой пример. Вычислите: $\frac{7!+8!}{5!+6!}$

Продолжение таблицы 1

Алгебра и начала математического анализа. 10 класс. В 2-ч частях. Ч.1. Учебник для учащихся общеобразовательных учреждений (профильный уровень)/Мордкович А.Г. [52]	В этом учебнике, который сосредоточен на профильном уровне общеобразовательного стандарта, в рамках Главы 8: «Комбинаторики и вероятность» пошагово вводятся основные понятия комбинаторики, правила умножения, перестановки и факториалы, сочетания и размещения, биномиальные коэффициенты. В учебнике расписано количество часов, которое предлагается уделить различным темам алгебры и начал анализа. При тематическом планировании предлагается уделить понятиям комбинаторики, биному и элементам теории вероятности, использующим комбинаторику, от 7 до 14 часов. В учебнике предлагается на правило умножения, перестановки и факториалы 24 задания, на выбор нескольких элементов. биномиальные коэффициенты 30 заданий. Изучение этих разделов предполагается в 10-м классе, на завершающем этапе обучения.	К учебнику прилагается отдельный задачник, в котором представлены задачи трех уровней сложности. Составлены в соответствии с требованиями и программами тестов. Приведем типовой пример. «Сколькими нулями оканчивается число: А) 10! Б) 15! В) 26! Г) 100!»

Тема комбинаторных задач не является центральной в процессе обучения алгебре и началам анализа, чем и обусловлена недостаточность внимания к методике ее преподавания в научно-педагогической литературе.

В методиках последнего времени находят отражения современные требования к уровню образования, равно как профильная и уровневая дифференциация (Таблица 2).

Таблица 2 − Анализ темы «Комбинаторные задачи» в научно-педагогической литературе

Название	Теоретический аспект	Практический аспект
Виленкин Н.Я., Виленкин А.Н., Виленкин П.А. Комбинаторика [18]	Одна из фундаментальных работ, в которой детально, шаг за шагом, рассматривается методика введения основных понятий комбинаторики. Изложены основные правила и проблемы комбинаторики. Сформулированы методы решения комбинаторных задач, рассказано о рекуррентных соотношениях и производящих функциях. Представленный материал вполне доступен как для хороших учащихся базового уровня, так и для профильного образования. В пособии содержится более 400 упражнений, что позволяет, начиная с первых занятий, организовать обучение с учетом уровневой дифференциации групп учащихся.	В практическом плане, в работе рассмотрены решения большого количества упражнений. Один из таких примеров: «В кондитерском магазине продавались пирожные четырех видов. Сколькими способами можно купить семь пирожных.»
Васильев Н., Гутенмахер В., Комбинаторика - многочлены - вероятность. [12].	В данной статье рассмотрено применение комбинаторики к задачам с многочленами и к элементарным вероятностным задачам. В стандартных учебниках не очень много внимания уделяется подобным задачам, что и обуславливает актуальность затронутой темы. В статье предложен алгоритм решения таких задач.	С практической стороны в статье разобран ряд нестандартных задач и наих основе составлены самостоятельные упражнения. Сколькими способами можно расставить на шахматной доске восемь ладей так, чтобы они не били друг друга? «Сколькими способами можно составить ожерелье из одной черной, двух белых, трех красных и пяти голубых бусинок?» Сколько членов получится после умножения: $(a+b+c+d)\cdot$ $\cdot(x+y+z)\cdot(u+v)$

Продолжение таблицы 2

Левин А., Что такое комбинаторика [46].	В данной работе сделан акцент на месте, которое занимает комбинаторика в алгебре, ее роли и изучаемых проблемах. Рассмотрены задачи о многозначности понятий в комбинаторике, о «растождествление» и перестановках с повторениями.	Разобран целый ряд нестандартных комбинаторных задач: «Сколько различных подмножеств имеется у n-элементного множества?» «Сколько существует в n-буквенном алфавите m-буквенных слов, состоящих из различных букв?» «Сколько 7-буквенных слов можно составить из букв К,К,Л,Л,О,О,О?»
Электронный ресурс infourok.ru [83]	На сайте представлен научный проект "Комбинаторика-это интересно!" Помимо стандартной информации по базовым понятиям комбинаторики представлен материал следующей тематики: - комбинаторика в различных областях жизнедеятельности человека, - комбинаторика в литературе - комбинаторика на шахматной доске и в играх - комбинаторика и кубик Рубика - старинные задачи	Рассмотрен ряд задач, носящих наглядный характер. Пример задачи. «Из 100 туристов, отправляющихся в заграничное путешествие, немецким языком владеют 30 человек, английским - 28, французским - 42. Английским и немецким одновременно владеют 8 человек, английским и французским - 10, немецким и французским - 5, всеми тремя языками - 3. Сколько, туристов не владеют ни одним языком?»

Анализируя введение понятий комбинаторики у различных авторов, следует отметить, что лишь в учебных пособиях под редакциями Никольского С.М. и Виленкина Н.Я. имеются соответствующие отдельные разделы и вводится самостоятельное определение всех основных элементов комбинаторики. В учебнике Виленкина Н.Я. для 11 класса повторяются в более систематизированном виде, чем в учебнике за 9 класс, теоретические основы комбинаторики и в максимально доступной для учащихся форме.

В учебниках коллектива авторов Алимова Ш.А., Колягина Ю.М. и др. элементы комбинаторики вводятся в 7 классе и затем, в старших классах, они используются в прикладных целях при изучении материала по теории вероятностей и статистике. Аналогично, в учебниках Мордковича А.Г. и Дорофеева Г.В., элементы комбинаторики рассматриваются лишь контексте изучаемых тем стохастики.

Представляется, что такие подходы не позволяют в полной мере и в систематизированном виде представить учащимся все необходимые элементы комбинаторики. Это, в свою очередь, затрудняет усвоение учащимися других разделов стохастики.

Затруднения, с которыми сталкиваются учащиеся при изучении комбинаторики и вероятностных задач проанализированы в целом ряде научно-педагогических работ Селютина В.Д. [64], В.В. Фирсова [75], Курындиной К.Н. [45]. В целом, авторы исследований приходят к заключению, что для обучения стохастике учащиеся должны иметь предварительную готовность к этому, посредством новых идей и представлений, отличающихся от закономерностей детерминированных разделов математики.

Работа Баландиной И. [5] посвящена проблемам внедрения стохастической линии в школьный курс, к которым, в первую очередь, относится методическая неподготовленность учителей и отсутствие единой методики и школьных учебников.

Вопросам роли и места вероятностно-статистической линии в курсе математики основной и средней общеобразовательной школы посвящены работы Селютина В.Д. [65], который исследовал принципы прикладной направленности, интегративности, межнаучности и перманентности.

В контексте развития интеллектуальной компетентности и математического мышления проблему изучения стохастики затрагивали Виленкин Н.Я., Ивашов-Мусатов О.С. и Шварцбурд С.И.[19].

Стоит выделить работу Б.А. Кордемского «Математика изучает случайности»[42], в которой содержатся задачи, основанные на реальных сюжетах, условие и решение которых моделируется благодаря комбинаторике и теории вероятности.

В работе раскрываются подходы к реализации ФГОС по различным разделам математики и, в том числе, вероятностно-статистической линии. Приведена технология проектирования задач и различные варианты многоуровневых систем задач.

Отдельно остановимся на инновационном учебно-методическом комплексе «Вероятность и статистика в школьном курсе математики» (ИУМК Бунимовича Е.А., Булычева В.А.[11]). В рамках данного ИУМК комбинаторике посвящено 12 занятий, 5 из них – в 9 классе и остальные в начале 10 класса.

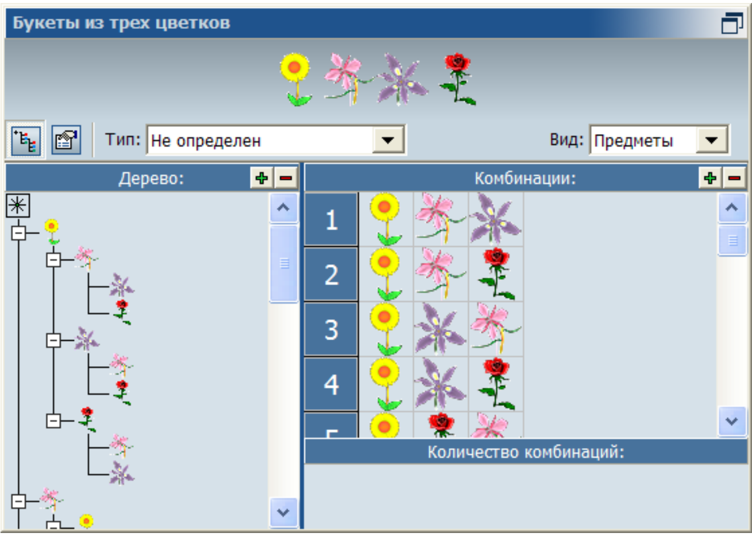


Рисунок 1 - Виртуальная лаборатория ИУМК

В отличие от других учебных пособий, здесь на первом этапе делается особый акцент на составлении комбинаторных комбинаций.

Значительную роль в достижении успеха приобучения в рамках данного ИУМК играют виртуальные лаборатории, которые позволяют наглядно конструировать комбинации (рисунок 1).

С помощью специально созданного калькулятора учащиеся имеют возможность наглядно проводить комбинаторные вычисления при изучении последующих разделов данной темы (рисунок 2).

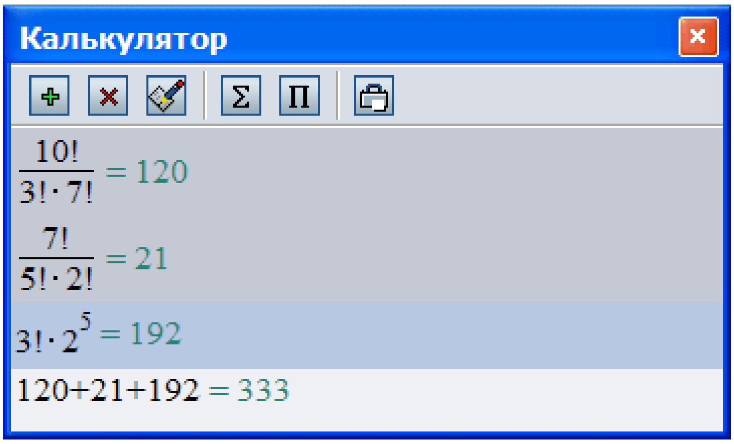


Рисунок 2 - Калькулятор ИУМК

В соответствии с ФГОС программа развития универсальных учебных действий (УУД) направлена в том числе,

- на «повышение эффективности освоения» программы, усвоения знаний и УУД

- на формирование опыта применения полученных знаний «для достижения практико-ориентированных результатов образования»

- на обеспечение способности использования УУД в «учебной, познавательной и социальной практике»

- на формирование навыков по «организации учебного сотрудничества с педагогами и сверстниками»

Следует отметить, что ИУМК Бунимовича Е.А., Булычева В.А. в полной мере соответствуют задачам ФГОС по развитию УУД.

1.2 Характеристика основных методов и приемов, используемых при обучении теме «Комбинаторика»

Обучению решения комбинаторных задач посвящены практически все ступени образовательного процесса в курсе математики средней школы, начиная с бесформульных примеров в начальной школе и заканчивая элементами теории вероятности и математической статистики в выпускных классах общеобразовательных учебных заведений. Поэтому, эта тема позволяет привить учащимся математическую культуру и способность к логическому мышлению начиная с самой начальной школы. Комбинаторика учит абстрактному восприятию различных предметов и объектов, развивает способности к их анализу. С комбинаторными задачами сталкиваются не только в математике и информатике, но и в физике, лингвистике, химии, биологии, да и специалисты различных других профильных ориентаций.

Однако, существуют известные сложности, которые испытывают учащиеся при решении комбинаторных задач, связанные с необходимостью самостоятельно выделять и классифицировать различные элементы и множества в целом, и совершать операции с ними по правилам комбинаторики. Это указывает на необходимость улучшения методологических подходов к процессу изучения элементов комбинаторики в курсе математики, что является обязательным для успешного окончания общеобразовательной школы. Основные методы и приемы, используемые при преподавании темы «Комбинаторика», непосредственно вытекают из анализа рассматриваемой схемы введения понятий комбинаторики и последовательного изложения следующего основного материала:

1. Элементы теории множеств. Конечные множества, операции с множествами.

2. Выборки. Характер выборки с повторениями и без повторений.

3. Основные правила комбинаторики. Сумма и произведение в комбинаторике.

4. Проблемы, решаемые в комбинаторике.

5. Соединения в комбинаторике. Факториал и размещения.

6. Перестановки и сочетания.

7. Раскладки и разбиения.

8. Основные формулы комбинаторики.

9. Бином Ньютона. Рекуррентные соотношения.

10. Комбинаторные соединения и характер выборки. Классификация соединений.

11. Возможное и невозможное в комбинаторике.

11. Алгоритмы решения комбинаторных задач. «Простые» и «сложные» задачи.

12. Элементы теории вероятности. Случайные события.

13. Вероятностные задачи. Применение комбинаторики для решения задач теории вероятности.

Вводная часть из первых четырех пунктов, и последующий раздел, посвященный соединениям в комбинаторике, носят как теоретический, так и практический характер, и их следует излагать для обучения учащихся в базовом курсе алгебры и при углубленном изучении. Методы и приемы, используемые для этого, предполагают изложение данного материала в максимально доступной и, возможно, занимательной форме.

Поэтому, на начальном этапе, дается общий обзор из теории множеств. В настоящее время множества не изучаются как самостоятельный раздел в базовом курсе алгебры, и важно в сжатом виде донести до учащихся основные элементы теории множеств, а также, понятия выборки и основные виды и характеристики используемых выборок.

Затем, учащиеся переходят к изучению основных правил комбинаторики, в том числе к изучению понятия суммы и произведения.

Приведем основные определения для элементов комбинаторики по учебнику алгебры для 9 класса под редакцией Никольского С.М. [57]:

«Перестановкой из n элементов называют какое-либо расположение этих элементов в определенном порядке».

«Размещение из n элементов по k называют любой упорядоченный набор из k элементов, составленный из данных n элементов.»

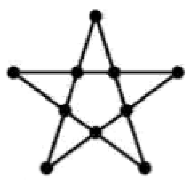
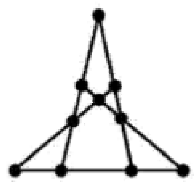
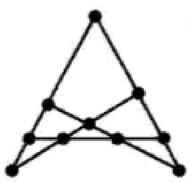
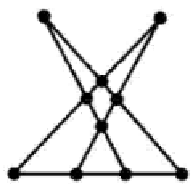
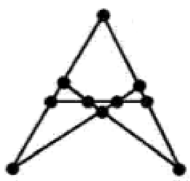
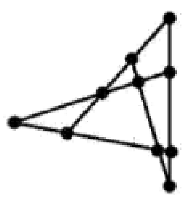
«Сочетание из n элементов по k называют любую группу из k элементов составленную из данных n элементов».

«Правило умножения. Если имеется m способов выбрать элемент a и n способов выбрать элемент b, то пару (a, b) можно выбрать $m \cdot n$ способами».

«Правило сложения. Если имеется m способов выбрать элемент a и n способов выбрать элемент b, то выбрать один элемент или a, или b можно $m + n$ способами».

Методы и приемы решения комбинаторных задач в полной мере характеризуются несколькими основными проблемами, для решения которых предназначена комбинаторика (Таблица 3).

Таблица 3 − Основные проблемы комбинаторики

№	Проблема	Пример задания	Результат
1	Найти такую конфигурацию элементов, которая обладает заданными свойствами	Расположить 10 точек на пяти отрезках та, что на каждый отрезок придется по четыре точки.	 
2	Найти общее возможное число конфигураций, удовлетворяющих данному свойству, описать способы поиска и сформулировать алгоритм	Показать (в дополнение к предыдущему заданию) все возможные способы взаимного расположения 10 точек и 5 отрезков, когда на каждый отрезок приходится по четыре точки.	   

Продолжение таблицы 3

3	Проанализировать и доказать существование конфигурации с заданными свойствами или ее невозможность	Найти все двузначные числа $\overline{ab}$, которые в сумме с числом, записанным в обратном порядке $\overline{ba}$, дают полный квадрат.	По условию задачи: $\overline{ab} = 10a + b, \quad \overline{ba} = 10b + a$ Помимо этого, сумма $\overline{ab} + \overline{ba} = 11(b + a)$ является полным квадратом. Это возможно лишь если $a + b = 11$ Возможный набор чисел: $29; 38;\ 47;\ 56; 65;\ 74;\ 83; 92$
		Найти все двузначные числа $\overline{ab}$, которые в сумме с числом, записанным в обратном порядке $\overline{ba}$, дают число, кратное 20.	Исходя из решения предыдущей задачи видно, что: $\overline{ab} + \overline{ba} = 11(b + a)$ Полученное число может делиться на 20 лишь в том случае, если $a + b = 20k$ что невозможно, т.к. максимальное значение цифр aиb равно 9.
4	Из всех решений комбинаторной задачи выбрать оптимальное по тому или иному критерию	Классической является задача коммивояжёра – одна из самых известных исторических задач, в которой надо оптимизировать маршрут, проходящий через данные n городов, чтобы затратить минимально возможное время.	Частные решения задачи для ограниченного числа городов вполне могут быть рассмотрены и на базовом уровне. Общего решения данной задачи до сих пор пока не существует и даже компьютерные решения путем перебора уже при числе городов более нескольких десятков занимали бы огромное количество лет.

Важными разделами при изучении комбинаторики являются вопросы по пунктам 5-6. Предполагается, что этот материал также изучаются учащимися в рамках базового курса алгебры и при углубленном изучении математики.

При изложении материала обязательно следует использовать примеры, методы и приемы решения которых носят общий характер для широкого круга задач.

Полезным будет рассмотрение следующих задач на комбинаторное правило умножения, на подсчет числа перестановок, числа сочетаний и размещений, иллюстрирующих различные возможности комбинаторики.

Полезным будет рассмотрение следующих задач, составленных на основе задач по теории вероятности, представленных в задачнике [9]. Составлены задачи на комбинаторное правило умножения, на подсчет числа перестановок, числа сочетаний и размещений, иллюстрирующих различные возможности комбинаторики.

Задача №1.

В первой группе 15 студентов, среди которых восемь студенток. Во второй группе двенадцать студентов, среди которых семь студенток. Сколькими способами можно отобрать команду из 1 мальчика из первой группы и 6 девочек из второй группы.

Решение

$N = C_{15-8}^{1} \cdot C_7^6 = 7 \cdot 6 = 42$

Ответ: 42

Задача №2.

В цехе работают шесть мужчин и четыре женщины. Сколькими способами можно наудачу по табельным номерам отобрать четыре человек, так чтобы среди них было по крайней мере три женщины.

Решение

$N = C_6^1 \cdot C_4^3 + C_6^0 \cdot C_4^4 = 6 \cdot 4 + 1 \cdot 1 = 25$

Ответ: 25

Задача №3.

Куб, все грани которого окрашены, распилен на тысячу кубиков одинакового размера, которые затем тщательно перемешаны. Сколькими способами можно извлечь два кубика: один – с тремя окрашенными гранями, другой – без окрашенных граней.

Решение

У куба 6 граней. На каждой грани расположено 10·10=100 квадратов, которые являются основаниями маленьких кубиков.

С тремя окрашенными гранями 8 кубиков, они расположены в 8–ми вершинах куба.

Кубики, имеющие 2 окрашенные грани, находятся на ребрах куба и не совпадают с вершинами. Следовательно, 10–2=8 кубиков имеют по две окрашенные грани. У куба 12 ребер, следовательно, всего таких кубиков 12·8=96 штук.

Одну окрашенную грань имеют кубики, которые лежат на грани, но не лежат на ребре. Таких кубиков на одной грани 100– 8·4–4=64. На 6 гранях лежат 64·6= 384 кубика с одной окрашенной гранью.

Таким образом, кубиков с неокрашенными гранями:

$$1000–384–96–8=512$$

Искомое количество равно:

$$N = 8 \cdot 512 = 496$$

Ответ: 496

Задача №4.

В коробке пять одинаковых изделий, причем два из них окрашены. Наудачу извлечены два изделия. Каким количеством способов это можно сделать, чтобы хотя бы одно из изделий было окрашенным?

Решение

$N = C_5^2 - C_3^2 = 10 - 3 = 7$

или иначе:$N = C_2^1 \cdot C_3^2 + C_2^2 = 2 \cdot 3 + 1 = 7$

Ответ: 7

Задача № 5.

Участники жеребьевки тянут жетоны с номерами от 1 до 100. Сколькими способами можно извлечь два жетона, так чтобы номер одного из них делился на 5, а второго на 7.

Решение

Количество жетонов с номерами, которые делятся на 5 равно 20:

5,10,15,20,25,30,35,40,45,50,55,60,65,70,75,80,85,90,95,100

Количество жетонов с номерами, которые делятся на 7 равно 14:

7,14,21,28,35,42,49,56,63,70,77,84,91,98

Количество жетонов с номерами, которые делятся и на 7 и на 5 равно 2:

35,70

Количество лишних комбинаций с числами 35,70 равно 3, и, соответственно, искомое в задаче количество равно:

$$N = 20 \cdot 14 - 3 = 277$$

Ответ: 277

Задача № 6.

Сколькими способами из колоды в 36 карт можно извлечь три карты так, чтобы среди них оказалось два туза.

Решение

$N = C_4^2 \cdot C_{36-4}^1 = 6 \cdot 32 = 192$

Ответ: 192

Задача №7.

Сколькими способами из колоды в 36 карт можно извлечь пять карт так, чтобы среди них оказалось два туза и одна десятка.

Решение

$N = C_4^2 \cdot C_4^1 \cdot C_{36-8}^2 = 6 \cdot 4 \cdot \dfrac{27 \cdot 28}{2} = 9072$

Ответ: 9072

Задача № 8.

Сколько существует номеров телефона состоящих из шести цифр?

Решение

Полагая, первая цифра телефонного номера не может равняться нулю, записываем:

$N = 9 \cdot 10^5 = 900000$

Ответ: 900000

Задача № 9.

Набирая номер телефона, абонент забыл последние три цифры, но помнил, что среди них есть 1 и 3. Сколько существует таких вариантов телефонных номеров?

Решение

$N = 2 \cdot C_3^2 \cdot 10 = 60$

Ответ: 60

Задача №10.

В ящике имеется 19 деталей, среди которых 10 окрашенных. В каком количестве случаев из трех извлеченных сборщиком деталей две будут окрашены.

Решение

$N = C_{10}^{2} \cdot C_{19-10}^{1} = 45 \cdot 9 = 405$

Ответ: 405

Задача № 11.

Студент знает 10 вопросов из 15 возможных. На экзамене задают три вопроса. Сколькими способами можно скомпоновать вопросы так, чтобы студент смог ответить на 2 вопроса из трех?

Решение

$$N = C_{10}^{2} \cdot C_{15-10}^{1} + C_{10}^{3} = 45 \cdot 5 + \frac{8 \cdot 9 \cdot 10}{6} = 345$$

Ответ: 345

Задача № 12.

На складе имеется 15 кинескопов, причем, 9 из них изготовлено в Москве. Сколькими способами можно выбрать четыре кинескопа так, чтобы два из них было московских.

Решение

Кинескопов, изготовленных не в Москве равно 15-9=6. Соответственно, получаем:

$N = C_{9}^{2} \cdot C_{6}^{2} = 36 \cdot 15 = 540$

Ответ: 540

Задача № 13.

Брошены три игральные кости. Сколько существует вариантов выпадения на каждой из них цифр 2 или 5?

Решение

$N = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$

Ответ: 8

Задача № 14.

Сколько имеется пятизначных чисел, все цифры которых различны?

Решение

Первая цифра может принимать 9 значений (кроме 0), вторая – тоже 9 значений (любую из 10 цифр за исключением цифры на первом месте). Продолжая аналогичные рассуждения, получаем:

$N = 9 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 = 27216.$ *Ответ: 27216*

Задача № 15.

Брошены одновременно три игральные кости. Сколько существует различных комбинаций выброшенных очков?

Решение. В данном случае мы имеем дело с сочетаниями с повторениями, когда очки могут повторяться, и порядок кубиков не важен:

$N = \bar{C}_6^3 = C_{6+3-1}^3 = \frac{6 \cdot 7 \cdot 8}{6} = 56.$ *Ответ: 56*

Из изложенного видно, что в методике обучения решению комбинаторных задач ключевым является объяснение учащимся особенностей комбинаторики и «творческих элементов» при решении задач. Предлагается для этого использовать прикладные элементы и конкретные примеры, имеющие наглядный характер.

1.3 Особенности профильной дифференциации при обучении решению комбинаторных задач

Отметим, что содержание материала по комбинаторике на базовом и профильном (углубленном) уровне различаются глубиной и объемом изучения материала, а также, практическими навыками, приобретаемыми учащимися.

Как следствие, предъявляются разные требования и к знаниям по элементам теории вероятности и математической статистики (Таблица 4).

Таблица 4 − Требования к знаниям учащихся по комбинаторике

	Базовый уровень	Профильный (углубленный) уровень
Цель обучения	Целью обучения в целом является формирование: математического, логического мышления; навыков использования знаний для решения практических задач; представлений о математике как универсальном языке науки для описания реальных процессов и явлений. Целью на базовом уровне также является: - создание у учащихся понимания того, что математика является инструментом для изучения окружающего мира, - формирование навыков по работе с учебным материалом и корректной формулировке мыслей, - развитие интуиции, способностей к построению логических связей, к доказательству утверждений, использованию терминологии и математической символики, - сформированность представлений о процессах и явлениях, имеющих вероятностный характер, о статистических закономерностях в реальном мире, об основных понятиях элементарной теории вероятностей; умений находить и оценивать вероятности наступления событий в простейших практических ситуациях и основные характеристики случайных величин.	В дополнение к базовому уровню, на профильном уровне обучения: - формируется понимание в необходимости проведения доказательств и дедуктивно-логических обоснований при проведении математических преобразований, - формируется логика основных понятий по главным разделам курса математики, основных аксиом, теорем, формул и навыки их применять, - вырабатываются умения по проведению доказательств и нахождению решений нестандартных задач и нахождению нестандартных решений для задач повышенной сложности, - формируются умения моделировать реальные ситуации, исследовать построенные модели, интерпретировать полученный результат, - владение умениями составления вероятностных моделей по условию задачи и вычисления вероятности наступления событий, в том числе, с применением формул комбинаторики и основных теорем теории вероятностей.
Требования к знаниям учащихся	- умение вычислять факториалы, находить перестановки, сочетания: $n!, \quad A_n^m, \quad C_n^m$ - умение решать простейшие комбинаторные задачи, и, как следствие, - умение находить и оценивать вероятность наступления событий в простейших ситуациях: $P = \frac{C_n^k}{C_n^m}, \quad k < m < n$	В дополнение к умениям базового уровня: иметь представление о множествах и выборках, знать основные правила и проблемы комбинаторики, уметь решать сложные комбинаторные задачи, знать основные формулы комбинаторики, бином Ньютона, рекуррентные соотношения, представлять алгоритмы решения комбинаторных задач, и, как следствие, составлять вероятностные модели, знать и уметь применять основные теоремы теории вероятностей.

Дифференциация обучения в российской средней школе берет свое начало с середины 18-го века, когда стали создаваться гимназии, учебные заведения (училища) различной направленности: гражданские, военные, для будущих ученых, купеческие. В 19-м веке дифференциации нашла реальное воплощение при создании четырехступенчатой образовательной системы: приходские и уездные училища (аналоги современных начальных и средних классов), классические и реальные гимназии (соответствующие современным старшим классам в довузовских учебных заведениях) и университеты (современные ВУЗы).

В педагогике стала проводиться мысль о необходимости учета возрастных особенностей при дифференциации обучения. Уже в это время закладывается понимание ведущей роли образования в развитии и воспитании учащихся. Началось деление отдельных учебных классов на группы в зависимости от личной успеваемости по математике, что, по сути, уже являлось уровневой и впоследствии профильной дифференциацией. Начиная с конца 19-го века стали появляться научно-педагогические работы, в которых рассматривается учебно-познавательная деятельность школьников, изучение их мотивации, дифференцированный подход к обучению. Все эти проблемы являются весьма актуальными и в современной школе.

В первой половине 20-го веке профильная дифференциация нашла свое место в школе в форме факультативных занятий по различным предметам. Позднее, стали создаваться целые классы по принципу объединения учащихся, заинтересованных в одних и тех же направлениях: физико-математические, химико-биологические, гуманитарные, лингвистические.

Уже в это время проявились различные подходы к дифференциации. В общепринятой практике, занятия по отдельным предметам носили углубленный характер, в то время, как по остальным предметам ничем не отличались от занятий в базовых классах. Однако, некоторые исследователи считали, что следует изменить содержание непрофильных предметов, приспособив их под необходимость углубленного изучения других, основных предметов.

Позднее профильная дифференциация привела к появлению специализированных школы, и уже с начала 90-х годов прошлого столетия изучение вопросов дифференциации становится одним из самых важных аспектов педагогической науки. Факультативы, элективные курсы, профилирование становятся неотъемлемое частью учебных планов.

При этом, все еще продолжаются дискуссии о целесообразности изменения количества часов преподавания по непрофильным предметам. Многие исследователи считают, что профильная дифференциация требует переосмысления методических основ преподавания, создания новых пособий и учебных материалов, ориентированных на различных по уровню учащихся. Данный подход находит свою реализацию по мере развития современных теоретических основ и реального опыта преподавания.

Современные концепции разделяют дифференциацию на уровневую (или внутреннюю) и профильную (или внешнюю) .

Уровневая дифференциация применяется в классах, в которых учащиеся подобраны случайным образом и когда происходит внутреннее деление на группы, исходя из различных критериев по усмотрению преподавателя или принятых в данном учебном заведении. Такое деление позволяет учитывать индивидуальную мотивацию учащихся к учебно-познавательной деятельности, подбирать темп и объем изучения материала, методы и формы преподавания.

Само деление на группы является отчасти условным, и учащиеся при удовлетворении определенным критериям ассоциируются с соответствующей этим критериям группой.

Стоит заметить, что такое деление направлено не только на «подтягивание» отстающих школьников, но и на получение дополнительных знаний «продвинутыми» учащимися.

Профильная дифференциация предусматривает создание отдельных классов или целых учебных заведений, полностью ориентированных на углубленное изучение отдельных предметов.

Создаются такие классы и школы исходя из выбора будущей профессии, склонностей и интересов учащихся. Часто предусматривается гибкий подход к выбору предметов, кружков, элективных курсов, факультативов.

В соответствие с современными концепциями, профильная дифференциация предполагает достижение учащимися одной и той же конечной цели, в рамках единой программы и с использованием одних и тех же пособий, но которые зависят от конечной цели выбранной профильной ориентации.

При этом, установленный минимальный объем знаний по конкретному предмету, согласно выбранного профиля обучения по государственному стандарту, должен быть достигнут [73].

При профильной дифференциации, независимо от степени восприятия материала учащимися, обязательным является уровень, установленный для учреждения образования данной категории. Этот уровень берется за основу при определении сложности материала для других групп учащихся.

Существуют различные подходы к понятию дифференциации:

− В некоторых работах приоритет отдается психологическим особенностям учащихся и на этой основе происходит выделение групп учащихся.

− Существует подход, учитывающий индивидуальности учащихся, когда происходит группировка исходя из некоторых личностных интересов и предпочтений, что делает возможным реализовать раздельное обучение

− Понимается такой принцип обучения, когда учащиеся овладевают некоторой базовой суммой знаний по широкому спектру изучаемых предметов, делая дополнительно акцент по тем курсам, которые соответствуют индивидуальным запросам конкретного школьника.

Исходя из изложенного, можно вычленить различные аспекты профильной дифференциации (рисунок 3):

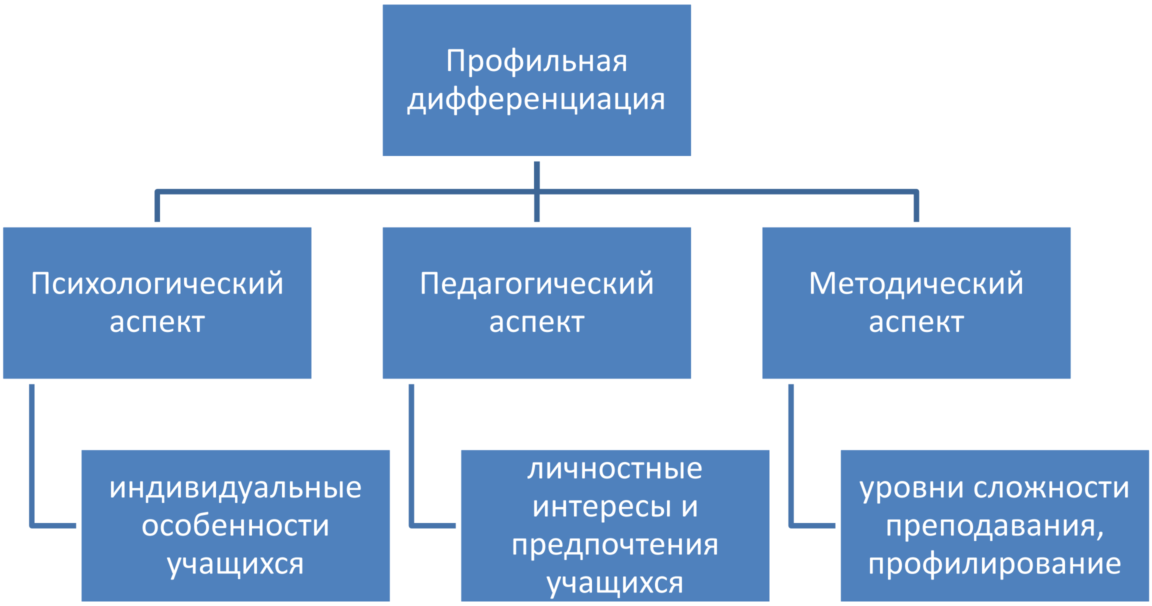


Рисунок 3 - Аспекты дифференциации обучения

Стоит отметить, что до сих пор сохраняется некоторая терминологическая недоговоренность применительно к «дифференциации». Вызвано это близостью понятий «индивидуализация», «индивидуальный подход» и «профильная дифференциация».

Все же, представляется правильным провести четкое различие между ними :

– дифференциация, преимущественно, предполагает разделение и адаптацию учебных планов применительно к различным группам учащихся, учитывая их профильную ориентацию, для получения предусмотренных программами знаний;

– под индивидуализацией понимается выбор таких способов и методов преподавания, которые учитывают персональные особенности учащихся, способность к усваиванию материал, уровень полученных ранее знаний.

Приведем в таблице общепринятые значения соответствующих понятий (Таблица 5).

Таблица 5 – Значения понятий

Понятие	Определение
Индивидуальный подход	Персональное внимание к каждому учащемуся, к его индивидуальности, в процессе обучения во время классных занятий, проведений факультативов, на элективных курсах.
Индивидуализация обучения	Такая форма реализации процесса обучения, когда при проведении занятий в классе, становится возможным индивидуальный подход к учащимся.
Дифференциация образования	Создание различных учебных программ, предназначенных для факультативных занятий в старших классах средней школы, для спецшкол, для классов с углублённым изучением предмета.
Дифференцированный подход	Деление учащихся на различные группы, например, по степени заинтересованности в предмете, успеваемости, скорости восприятия нового материала и т.д.
Дифференциация обучения	Означает практическую реализацию дифференцированного подхода в ходе учебного процесса при обучении предмета в рамках стандартной программы.

Учитывая изложенное выше, выделяют различные целевые компоненты дифференциации (рисунок 4): социальная, дидактическая, психолого-педагогическая.

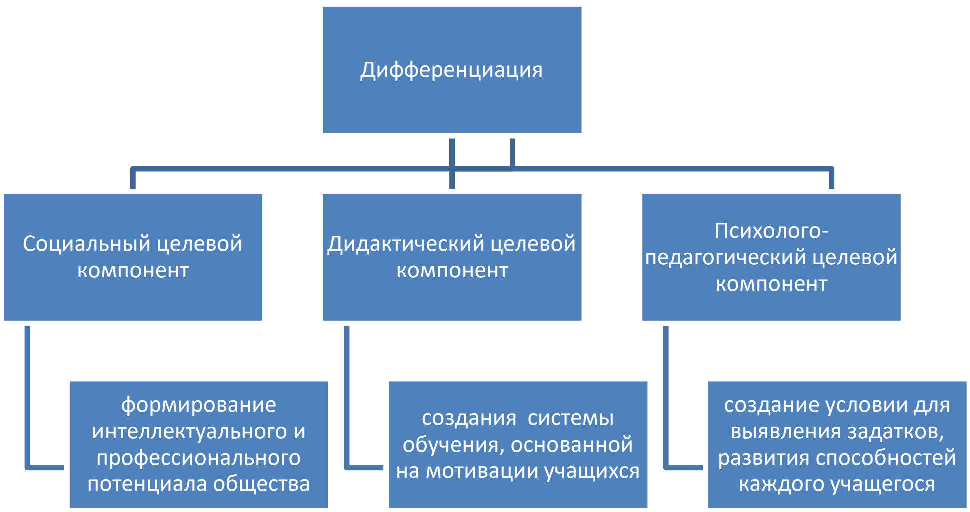


Рисунок 4 - Целевые компоненты дифференциации

В старших классах учащиеся получат право самостоятельно определять уровень сложности и степень усваивания материала, но исходя из установленного минимума для данного профильного образования. Учащиеся определяют умения и навыки, которые будут приобретаться, а также, типы задач, которые будут ими изучены.

Можно выделить несколько видов дифференциации, нашедшей распространение на практике.

Технология дифференциации на основе обязательных результатов основана на двух стандартах (В.В. Фирсов) [76]:

– базовый уровень, предназначенный для всех учащихся, и которого должен достичь каждый из них,

– профильный уровень, который предназначен для учащихся, интересующихся предметом и способным к его углубленному изучению.

Между этими двумя уровнями есть пространство для учебно-познавательной деятельности учащихся, что позволяет стимулировать переход с одного уровня на другой и обеспечить обучение на максимально доступном конкретному школьнику уровне.

В данной концепции под базовым уровнем понимается фактическая сумма знаний, реально усвоенная учащимися. Сам этот уровень формулируется в виде результатов, которые можно проверить и проконтролировать.

Обязательность для всех учащихся знаний базового уровня означает реальную выполнимость поставленных задач, ее доступность абсолютному большинству школьников и их осведомленность о стоящих перед ними требованиях.

В основе данной технологии лежит мотивация учащихся и признание за ними права на выбор уровня обучения, когда преподаватель выполняет, в первую очередь, стимулирующую роль.

Концепция для учащегося состоит в принципе получения такой суммы знаний, которую он в состоянии усвоить.

В связи с этим, данная профильная дифференциация обучения предполагает:

– существование базового обязательного уровня подготовки в курсе средней школы, которого обязан достичь каждый учащийся,

– базовый уровень является основой для дифференциации в данном классе и соответствующей индивидуализации требований к учащимся,

– базовый уровень безусловно должен быть реально выполним для всех учащихся в классе,

– система требуемых от учащегося результатов, должна быть открытой и заранее известной школьникам,

– повышенный, профильный уровень является мотивирующим для индивидуального развития школьников и получения глубоких знаний по изучаемому предмету.

Особенность данной технологии дифференциации состоит в ее связи с системой оценки и контроля над результатами, достигнутыми учащимися в ходе учебного процесса. Здесь, в отличие от общепринятого способа «вычитания» из максимально возможного результата, используется метод «сложения», когда за основу берется минимальный, базовый уровень знаний, обязательный для каждого учащегося, и оценивается то, что достигнуто сверх этого уровня.

Еще одна технология дифференциации Н.П. Гузик [24] подразумевает «комбинированную систему обучения», которая помимо собственно дифференцированного обучения предполагает специальные уроки развивающей направленности по изучаемой теме.

Изучаемая тема предполагает пять типов занятий, последовательно идущих друг за другом:

– теоретические уроки по изложению основ изучаемой темы, аналогичные лекциям,

– смешанные занятия аналогичные семинарам, с углубленной проработкой учебного материала и с самостоятельной работой учащихся,

– обобщающие уроки, систематизирующие полученные знания,

– занятия с межпредметным уклоном, носящие тематический характер,

– уроки, носящие практический характер.

Как правило, выделяют три типа профильных дифференцированных программ, различной степени сложности.

Дифференцированные программы предназначены для двух целей: получение учащимися соответствующего уровня знаний, умений и навыков; воспитание самостоятельности учащихся путем решения задач по образцам, с минимальной помощью от преподавателя.

Каждая из трех программ имеет свой базовый минимум, и они следуют друг за другом сохраняя логику и последовательность изложения всей темы в целом.

Первая программа представляет собой стандарт для базового обучения. Выполняя эту программу, ученик получает конкретные знания по предмету, понимание того, что необходимо изучить еще и какие сделать выводы. Эту программу осиливают все учащиеся перед тем, как перейти к программе следующего уровня.

На следующем уровне учащиеся овладевают теми общими и специфическими приемами учебно-познавательной деятельности, которые необходимы для решения задач, использующих основные положение изучаемой темы. В эту программу вводятся дополнительные сведения, которые расширяют материал первого уровня, увеличивают объем знаний по изучаемой теме, помогает глубже усвоить основной материал.

Третья программа позволяет учащимся перейти на уровень творческого применения знаний. Эта программа предусматривает свободное владение фактическим материалом, приемами учебной работы и познавательной деятельности. Она позволяет учащимся осознать суть проблем, которые можно решить на основе уже полученных знаний, дает логическое обоснование темы, открывающие возможности для осознанного и творческого применения.

Выбор количества программ для изучения каждого из предметов предоставляется самому школьнику. Тем самым, обеспечивается базовый минимум и, одновременно, открываются возможности для развития творческой индивидуальности каждого учащегося.

Применение профильной дифференциации дает возможность:

– оказывать необходимую помощь учащимся при осваивании учебного материала,

– осуществлять мониторинг знаний, выявлять пробелы, «подтягивать» отстающих школьников,

– быть организатором учебно-познавательного процесса, переосмыслив подготовку к самим занятиям и процессу их проведения,

– выявлять недостатки авторских программ по уровням преподавания.

Ученик может:

– в полной мере получить необходимый минимум знаний, зародить и развивать интерес к изучению того или иного предмета, в зависимости от выбранного профиля образования,

– ощущать себя в атмосфере комфорта рядом с учащимися такой же профильной ориентации,

– в удобной для себя форме изучать материал,

– устранять пробелы в собственной подготовке,

– повысить интерес к учебно-познавательной деятельности.

Представляется, что в целях дифференциации и преследуя цель повышения мотивации, а также исходя из личностно-ориентированного подхода на занятиях, включая индивидуальную работу при изучении предмета, является целесообразным использование многоуровневых задач, предполагающих этапы решения различной сложности, исходя из выбранной профильной ориентации.

Выводы по первой главе

Изложение материала с соблюдением баланса теоретических и практических сторон – это процесс, подталкивающий учащегося к самостоятельной работе по изучению темы и к развитию мышления для поиска требуемого решения прикладных задач.

Представляется важным детальное изложение материала, преподаваемого по теме комбинаторики, в котором следует делать акцент на такие элементы, которые имеют прямое прикладное значения для решения задач вероятностного характера не только в математике, но и в других предметах естественнонаучной направленности.

Подталкивание учащегося к выбору наиболее рационального способа решения является главным фактором для развития навыков логического мышления. Реальный опыт показывает, что регулярное использование комбинаторных задач в практике преподавания алгебры и начал анализа даёт значительный эффект в целом для развития вероятностно-логического мышления у старшеклассников.

Глава 2 Практическая реализация методики обучения решению комбинаторных задач

2.1 Обучение основным элементам комбинаторики и решению типовых комбинаторных задач

Для практической реализации методики обучения решению самых важных комбинаторных задач представляется наиболее интересной использование технологии обучения математике, разработанной Р.Г. Хазанкиным [77].

Цель технологии: развитие индивидуальных способностей учащихся и их увлечение математикой с помощью ключевых задач, которые формируются применительно к каждой из изучаемых тем.

Прогнозируемый результат: успешное усвоение материала всеми группами учащихся.

Для достижения целей данной технологии основным моментом являются ключевые задачи по каждой из изучаемых тем. Эти задачи обеспечивают успешное обучение на уровне стандарта всеми группами учащихся. Основана технология на разработанной системе из восьми типов занятий.

В рамках данной технологии важную роль играет отбор самих ключевых задач. При отборе задачного материала предполагается руководствоваться следующими положениями:

- с помощью данных задач можно изучить все основные положения рассматриваемой темы;

- задач не должно ограниченное количество, как и предусмотрено самой технологией;

- задачи должны быть среднего уровня сложности, так чтобы у учащихся с низкой мотивацией появился интерес к теме и занятиям, а у «продвинутых» учащихся - интерес к дальнейшему углубленному изучению темы;

- задачи должны содержать различные подходы, предполагающие исследование, в том числе, и теоретические положения рассматриваемой темы;

- процесс решения задач не должен быть слишком длинным, чтобы постоянно поддерживать интерес учащихся.

Отметим, что всякая типология задач является условной и зависит от многих обстоятельств. Так, например, одну и ту же задачу бывает можно решить и арифметическим, и алгебраическим, и геометрическим методом, а текст задачи может быть представлен разными способами представления. А отнесение задачи к тому или иному виду по степени проблемности во многом зависит от того, кто решает эту задачу. Несмотря на это, различные типологии позволяют учителю более осознанно подходить к отбору задач в зависимости от целей обучения.

Важную роль в курсе математики играют сюжетные задачи. Фактически, при их решении впервые реализуется одна из важных задач курса математики — обучение методу моделирования (моделирование в школьном курсе математики кратко можно охарактеризовать как описание реальных процессов на языке математики). Среди сюжетных задач (необязательно математических) высокий уровень проблемности имеют задачи образного характера, которые можно отнести к эвристическим. Их решение требует целостного восприятия ситуации, описываемой в задаче, и опирается на образ. Поэтому в них очень трудно выделить данные (что дано в задаче) и обобщенный способ решения, что связано с субъективностью образа.

В школьном курсе математики порядок изучения задач устанавливается с учетом логики формирования математических понятий курса и сложности самих задач.

Сложность — объективная характеристика задачи и зависит:

- от количества связей;

- характера связей;

- формулировки задачи (формулировка на естественном или искусственном языке, использование понятий и терминов из разных предметных областей);

- конструкции текста (логическая и грамматическая структура текста, например, задачи, имеющей структуру УЗ, воспринимается легче, чем текст, в котором заключение предваряет условие — ЗУ или условие и заключение разнесены в тексте — УЗУ, ЗУЗ).

Решение задачи всегда предполагает встречу объекта (задачи) и субъекта («решателя»), поэтому процесс решения задачи включает и субъективный компонент, что выражается таким критерием, как трудность задачи. Трудность — субъективная характеристика задачи, зависит от субъектного опыта ребенка, который включает: знания предметных областей, в том числе математические знания; учебные умения; интеллектуальные умения, связанные с качествами мышления, типологическими свойствами; жизненные представления, которые отражают то привычное, с чем сталкивался ребенок в жизни.

Приведем, для примера, несколько задач по теме «Соединения в комбинаторике».

Вначале, приведем несколько задач, предполагающих использование знаний и навыков, полученных учащимися на предыдущих ступенях образовательного процесса.

Задача №16.

В мешке 5 красных, 16 зеленых и 14 желтых шаров. Сколькими способами можно достать два шара одного цвета? Сколькими способами можно достать два шара разных цветов?

Решение

Заметим, что в подавляющем большинстве учащиеся уже сталкивались с подобными задачами, быть может, в упрощенной форме, На данной ступени стоит систематизировать подходы к их решению в форме определенного алгоритма.

а) Два красных шара можно достать:

$$\frac{5 \cdot 4}{2} = 10 \textit{ способами,}$$

два зеленых:

$$\frac{16 \cdot 15}{2} = 120 \textit{ способами,}$$

и два желтых:

$$\frac{14 \cdot 13}{2} = 91 \textit{ способом.}$$

В итоге получаем: $C = 10 + 120 + 91 = 221$

б) Количество способов, которыми можно достать шары указанных цветов равно:

- 1 красный и 1 зеленый: $5 \cdot 16 = 80$
- 1 красный и 1 желтый: $5 \cdot 14 = 70$
- 1 зеленый и 1 желтый: $16 \cdot 14 = 224$

Тогда искомое значение равно: $C = 80 + 70 + 224 = 374$

Задача №17.

Сколькими способами три почтальона могут распределить работу по доставке 17 писем?

Решение

При всей простоте задачи, она вызывает затруднение, обусловленное необходимость заменить распределение «семнадцати среди троих» на выбор «из троих для семнадцати». После понимания этого, решение становится очевидным. Каждое из писем можно распределить среди трех почтальонов тремя способами. Тогда общее количество способов равно:

$$\mathrm{C} = \underbrace{3 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 3}_{17 \text{ раз}} = 3^{17}$$

Более громоздкой, но иллюстрирующей возможности перебора вариантов является следующая задача.

Задача №18. В мешочке находятся 60 пронумерованных бочонков (от 1 до 60 включительно). Сколько существует вариантов извлечь последовательно два бочонка, вначале один бочонок и затем второй?

Решение

Для решения задачи можно составить таблицу 60×60, в ячейках которой стоят два числа, первое из которых означает число, нанесенные на первый бочонок, и второе число – нанесенное на второй бочонок (Таблица 6). Очевидно, что в шестидесяти диагональных ячейках таблицы чисел нет.

Таблица 6 − Всевозможные результаты при последовательном выборе

Боч.1 \ Боч.2	1	2	3	4	…	59	60
1	-	1-2	1-3	1-4	…	1-59	1-60
2	2-1	-	2-3	2-4	…	2-59	2-60
3	3-1	3-2	-	3-4	…	3-59	3-60
4	4-1	4-2	4-3	-	…	4-59	4-60
…	…	…	…	…	…	…	…
59	59-1	59-2	59-3	59-4	…	-	59-60
60	60-1	60-2	60-3	60-4	…	60-59	-

В таблице представлены всевозможные результаты при последовательном выборе двух бочонков и их общее количество равно:

$$60 \times 60 - 60 = 3540$$

Рассмотрим еще несколько ключевых задач, которые являются полезными при изучении более сложных тем, изучаемых в разделе комбинаторики.

Безусловно, будет полезным и решение алгебраических уравнений с элементами комбинаторики.

Задача № 19.

Решите уравнения и неравенства:

1. $A_{x+1}^{x-2} = (x+1)P_{x-1}$

2. $A_{x+1}^{x} \cdot A_{x+1}^{x-1} < 60$

3. $A_{x+1}^{2} \cdot C_{x+1}^{x} = 48$

Решение

1. $A_{x+1}^{x-2} = (x+1)P_{x-1}$

$$\frac{(x+1)!}{\big(x+1-(x-2)\big)!} = (x+1)\cdot(x-1)! \Rightarrow (x+1)! = 3!\cdot(x+1)\cdot(x-1)! \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (x+1)\cdot x! = 6\cdot(x+1)\cdot(x-1)! \Rightarrow \frac{x!}{(x-1)!} = 6 \Rightarrow x = 6$$

Получаем решение:

$$x = 6$$

2. $A_{x+1}^{x} \cdot A_{x+1}^{x-1} < 60$

$$\frac{(x+1)!}{(x+1-x)!}\cdot\frac{(x+1)!}{\big(x+1-(x-1)\big)!} < 60 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (x+1)!\cdot\frac{(x+1)!}{2} < 60 \Rightarrow \big((x+1)!\big)^2 < 120 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (x+1)! \leq 10$$

Получаем решение:

$$x = 1\, или x = 2$$

3. $A_{x+1}^{2} \cdot C_{x+1}^{x} = 48$

$$A_{x+1}^{2} \cdot C_{x+1}^{x} = \frac{(x+1)!}{(x+1-2!)}\cdot\frac{(x+1)!}{x!\,(x+1-x)!} = 48$$

$$\frac{(x+1)!\cdot(x+1)!}{x!\,(x-1)!} = 48 \Rightarrow (x+1)\cdot x\cdot(x+1) = 48 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^3 + 2x^2 + x - 48 = 0$$

Используем разложение на множители для полинома третьей степени известное из алгебры:

$$(x-3)(x^2+5x+16) = 0$$

и получаем ответ единственный ответ на множестве действительных чисел:

$$x = 3$$

Далее, приведем, для примера, несколько задач по теме «Соединения в комбинаторике».

Задача № 20.

Из класса в 8 учащихся в течение 2 дней выбирают группы из 2 человек для дежурства. Сколько существует вариантов выбора, так чтобы группы в первый и во второй день не совпадали?

Решение

Здесь учащимся следует отойти от стандартного применения способов подсчета вариантов выбора двоих из восьми для обоих дней.

Ключевой вопрос: сколько вариантов выбора нас устраивает во второй день? После того, как учащиеся придут к числу:

$$C_8^2 - 1 = 27$$

несложно получить ответ всей задачи:

$$N = C_8^2 \cdot (C_8^2 - 1) = 756$$

В продолжение, предлагается рассмотреть следующую задачу, которая является логическим продолжением рассмотренной.

Задача № 21.

Из группы в 8 учащихся в течение четырех недель выбирают группы по двое для дежурства. Сколько существует вариантов выбора так, чтобы эти группы никогда не совпадали?

Решение

В этой задаче необходимо обобщить результаты по итогам решения предыдущей. В первый день группу из двух учащихся можно выбрать C_8^2 способами:

$$C_8^2 = 28$$

Обращаем внимание, что количество различных способов выбора равно 28 и так получилось, что это число совпадает с количеством дней в четыре недели по условию задачи. Это означает, что за 28 дней будут использованы всевозможные способы выбора.

Очевидно, что искомый результат будет равен числу перестановок этих 28 способов. Получаем ответ:

$$N = 28!$$

Далее, будет интересным решить эту же задачу, если несколько поменять условие.

Задача № 22.

Из группы в 8 учащихся в течение 25 дней выбирают группы по двое учащихся для дежурства.

Сколько существует вариантов выбора так, чтобы эти группы никогда не совпадали?

Решение

Очевидно, что в этом случае задача сводится к выбору 25 вариантов из общего количества в 28 вариантов. Причем, последовательность выбора этих 25 групп дежурных из двоих учащихся имеет значение. Таким образом, это число определяется количеством размещений из 28 по 25 и искомое количество вариантов равно:

$$N = A_{28}^{25} = \frac{28!}{3!} = 28 \cdot 27 \cdot 26 \cdot \ldots \cdot 4$$

Здесь важно показать учащимся существование другого способа рассуждений, приводящего к точно такому же результату.

В второй задаче указывалось, что число вариантов для второго дня равно 27. Продолжая аналогичные рассуждения, подсчитываем число вариантов для всех последующих дней:

- для третьего дня $(C_8^2 - 2)$

- для четвертого дня $(C_8^2 - 3)$

……………………………….

- для двадцать пятого дня $(C_8^2 - 24)$

Тогда общее число вариантов равно:

$$N = C_8^2 \cdot (C_8^2 - 1) \cdot (C_8^2 - 2) \cdots (C_8^2 - 24) =$$

$$= 28 \cdot (28-1) \cdot (28-2) \cdots (28-24) = 28 \cdot 27 \cdot 26 \cdots 4 = \frac{28!}{3!}$$

и ответ совпадает с полученным ранее.

Приведенные задачи демонстрируют применение всех основных комбинаторных элементов и позволяют проиллюстрировать возможности комбинаторики для решения нестандартных задач.

Данные задачи соответствуют указанному выше принципу отбора ключевых задач и могут служить своего рода «каркасом» для подбора заданий для групповой и самостоятельной работы учащихся.

2.2. Реализация методики обучения решению задач комбинаторики применительно к некоторым видам вероятностных задач

Безусловно, одним из практических применений знаний комбинаторики в общеобразовательном курсе математики являются задачи вероятностного характера.

Перед тем, как учащиеся приступят к решению таких задач, предполагается наличие определенных теоретических знаний. Преимущественно, это основные понятия стохастики:

– эксперимент, носящий случайный характер,

– события, их математическое представление,

– операции с событиями,

– математическое определение вероятности, аксиомы теории вероятностей и следствия из них,

– подходы к вычислению вероятности, в том числе, геометрические, статистические,

– теоремы об операциях с вероятностями, такими как, сумма и произведение.

Для актуализации указанных знаний, возможно, использовать тематику заданий, предложенных ранее в пункте 1.3.

Задача № 23.

В коробке пять одинаковых изделий, причем, два - окрашены. Какова вероятность, что два извлеченных из коробки изделия окрашены?

При работе с этой задачей учащиеся определяют:

– стохастический эксперимент: извлечение изделий,

– рассматриваемое событие: вид окраса изделий,

– событие, которое оценивается: оба изделия окрашены,

– исходы, которые возможны в результате стохастического эксперимента: нет окрашенных изделий, лишь одно окрашено или оба окрашены,

– исход, который является благоприятным по условию задачи: оба изделия окрашены,

– какое определение вероятности следует использовать? Для однократного эксперимента с одним событием используется классическое определение.

Задача № 24.

Студент знает 10 вопросов из 15 возможных. На экзамене задают три вопроса. Какова вероятность, что студент ответит хотя бы на два вопроса?

В данном случае, учащиеся определяют:

– стохастический эксперимент: выбор вопросов,

– рассматриваемое событие: знание ответов на вопросы,

– событие, которое оценивается: количество верных ответов больше или равно двум,

– исходы, которые возможны в результате стохастического эксперимента: количество верных ответов равно 0; 1; 2 или 3,

– исход, который является благоприятным по условию задачи: количество верных ответов 2 или 3.

Здесь также рассматривается один эксперимент и для одного события вновь следует использовать классическое определение вероятности.

Далее, проиллюстрируем применение некоторых формул комбинаторики, которые необходимы для решения отдельных вероятностных задач.

Одним из важных понятий комбинаторики является число размещений. Введем это понятие на простом примере.

Пусть дано некоторое множество E из n различных элементов и ящик с $k \leq n$ ячейками.

Заполнив элементами множества E ячейки ящика получаем размещение из nэлементов по k ячейкам или «размещение изnпо k».

Одно размещение, при этом, отличается от другого размещения тем, что оно состоит из различного набора элементов, либо, по порядку их расположения.

Количество различных размещений изnпо k обозначаетсяA_n^k.

Чтобы отличить их от размещений с повторениями, приведем определения:

Определение 1. Размещениями без повторений A_n^k называют упорядоченные k – элементные подмножества n – элементного множества, содержащие различные элементы.

Определение 2. Размещениями с повторениями A_n^k называют всевозможные упорядоченные k – элементные подмножества n – элементного множества.

Количество различных размещений с повторениями из n по k обозначается $\bar{A}_n^k$.

Число размещений без повторений вычисляется по формуле:

$$A_n{}^k = \frac{n!}{(n-k)!} = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)$$

При $n = k$ получаем:

$$A_n{}^n = n!$$

и размещение совпадает с перестановкой.

Число размещений с повторениями определяется равенством:

$$\bar{A}_n^{\ k} = n^k$$

Оба эти соотношения являются логичным следствием правила комбинаторного произведения.

При решении комбинаторных задач следует понимать, когда используются размещения.

Условно, можно предложить такой алгоритм.

1. Если важен порядок расположения элементов множества, то это размещение.

2. Если порядок следования элементов множества важен, то это также размещение.

3. Если есть комбинации элементов и они отличаются составом, то это размещение в случае, когда порядок важен.

Заметим, что если элементы повторяются, то это размещение с повторениями $\bar{A}_n^{\ k}$, а если не повторяются, то $A_n^{\ k}$.

Проиллюстрируем применение размещений для решения вероятностных задач.

Задача № 25.

Дано три флажка (a, b, c) различного цвета. Какова вероятность составить сигнал(b, c)при последовательном выборе флажков наудачу?

Решение

Предлагаем учащимся найти общее количество возможных вариантов, которое определяется числом размещений

$$A_3^{\ 2} = \frac{3!}{(3-2)!} = 6$$

и можно представить как

$$(ab, ac, bc, ba, ca, cb)$$

После этого несложно записать искомую вероятность:

$$P = \frac{1}{6}$$

Задача № 26.

Проводится лотерея по семизначным номерам телефонов. Какова вероятность, что будет выбран конкретный номер телефона?

Решение

Здесь надо разъяснить учащимся, что задача сводится к размещениям с повторением.

Вновь подсчитываем общее число возможных вариантов.

Первым номером телефона могут быть цифры от 1 до 9.

Остальные шесть разрядов могут занимать любые цифры от 0 до 9 включительно и

$$\bar{A}_{10}{}^{6} = 10^6 = 1000000$$

Тогда искомое количество равно:

$$C = 9 \cdot 10^6 = 9 \cdot 1000000 = 9000000$$

Соответственно, вероятность равна:

$$P = \frac{1}{9\ 000\ 000}$$

Приведем еще задачи на размещение.

Задача № 27.

Расписание занятий одного дня содержит 5 дисциплин. Всего изучается 10 дисциплин. Какова вероятность, что расписание наугад выбранного дня будет желаемым (единственный вариант)

Решение

При всей кажущейся сложности в постановке задачи, учащиеся должны, следуя алгоритму в анализе задачи, прийти к выводу, что вновь имеем дело с размещениями без повторений.

$$A_{10}{}^{5} = \frac{10!}{5!} = 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 = 30240$$

Искомая вероятность равна:

$$P = \frac{1}{A_{10}{}^{5}} = \frac{1}{30240}$$

Задача № 28.

Садовнику нужно посадить малину, смородину и крыжовник на трех разных участках по отдельности. Всего у него есть 7 участков. Какова вероятность, что на первом участке будет малина, на третьем – крыжовник, на седьмом – смородина. Все возможные варианты равнозначны.

Решение

При всей кажущейся сложности в постановке задачи, учащиеся должны, следуя алгоритму анализа задачи, прийти к выводу, что вновь имеем дело с размещениями без повторений. Вычисляем:

$$A_7{}^4 = \frac{7!}{4!} = 5 \cdot 6 \cdot 7 = 210$$

Искомая вероятность равна:

$$P = \frac{1}{A_7{}^4} = \frac{1}{210}$$

Далее, рассмотрим вероятностные задачи на другие формулы комбинаторики.

Задача № 29.

У студента 4 книги по высшей математики, 5 книг по физике и 2 книги по философии. Какова вероятность выбора двух разных книг? Какова вероятность выбора двух книг по одному предмету?

Решение

Общее количество возможных способов выбора 2 книг из общего числа в 11 книг равно:

$$C_{11}{}^2 = \frac{11!}{9! \cdot 2!} = 55$$

а) Одну книгу по высшей математике можно выбрать

$$C_4^1 = 4 \textit{ способами,}$$

по физике: $C_5^1 = 5$ способами,

по философии: $C_2^1 = 2$ способами.

Общее количество способов равно:

$$C = C_4^1 \cdot C_5^1 + C_4^1 \cdot C_2^1 + C_5^1 \cdot C_2^1 = 4 \cdot 5 + 4 \cdot 2 + 5 \cdot 2 = 38$$

Вероятность в этом случае равна:

$$P = \frac{38}{55}$$

б) Две книги по высшей математике можно выбрать:

$$C_4^2 = \frac{4!}{2!2!} = 6 \text{ способами,}$$

по физике:

$$C_5^2 = \frac{5!}{2!3!} = 10 \text{ способами,}$$

и по философии:$C_2^2 = 1$ способом.

Искомое число способов равно:

$$C = C_4^2 + C_5^2 + C_2^2 = 6 + 10 + 1 = 17$$

Тогда, в данном случае:

$$P = \frac{17}{55}$$

Задача № 30.

Три почтальона должны разнести 31 письмо. Они наугад вытаскивают некоторое количество писем. Какова вероятность, что одному из них достанется 10 писем, другому -15, а кому-то – 6 писем?

Решение

Здесь учащиеся используют различные формулы для подсчета общего и благоприятного числа исходов.

Каждое из писем можно распределить среди трех почтальонов тремя способами. Тогда общее количество способов равно:

$$n = \underbrace{3 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 3}_{31\, раз} = 3^{31}$$

Благоприятное число исходов равно: $m = 3! = 6$

Тогда, искомая вероятность равна:

$$P = \frac{m}{n} = \frac{6}{3^{31}}.$$

2.3 Элективный курс «Комбинаторные задачи повышенной трудности» для учащихся старших классов

В целом, элективные курсы являются достаточно эффективным способом для достижения целей индивидуального самоопределения учащихся в их профессионально-личностном развитии.

Учащиеся свободны в выборе направленности элективных курсов, поэтому, эти курсы не являются повторением основного учебного курса. Элективные курсы предназначены для:

- стимулирования учебно-познавательной деятельности учащихся,
- развития их умственных возможностей,
- обучения алгоритмам универсальных учебных действий,
- формирования представлений о современных технологиях лучшего восприятия материала.

Помимо этого, с помощью предметных элективных курсов учащиеся:

- могут определиться со своей будущей специализацией и выбором вида профессиональной деятельности во взрослой жизни,
- продолжают получать знания в дополнение к основному курсу по выбранному направлению.

Конечно же, ключевым способом при обучении с помощью элективных курсов является самообразование.

За редким исключением учащиеся ответственно подходят к подготовке к занятиям, что обусловлено самостоятельным выбором тематики элективного курса.

Все это позволяет сделать вывод о том, что элективные курсы дают возможность поддержать на высоком уровне изучение математики, как профильного предмета, и, помимо этого, они используются еще и для внутрипрофильной дифференциации учащихся.

Обучение с помощью элективных курсов требует разнообразных форм и методов обучения. При их выборе следует учитывать особенности структуры и содержания курса, равно как и общий уровень развития учащихся, их базовой подготовки, а естественный познавательный интерес к различным подразделам программы.

Приведем некоторые основные формы организации занятий элективного курса. К ним относятся:

- лекционные занятия,
- занятия в форме свободного обсуждения,
- дискуссии и полемика,
- соревнования групп учащихся, игры,
- индивидуальные занятия-консультации,
- практические занятия, посвященные решению задач,
- групповая и индивидуальная учебно-познавательная исследовательская деятельность,
- дистанционная поддержка,
- контрольные и зачетные занятия.

Дифференциация в обучении учащихся осуществляется путем подбора задач, состоящих из различных уровней сложности.

По завершении программы элективного курса учащиеся могут представить индивидуальные творческие работы по их выбору или иные работы в форме проектной деятельности, как каждым учащимся, так и группой учащихся.

Само содержание элективных курсов по математике и, в том числе, по теме «Комбинаторика» обычно предполагает наличие некоторых компонентов:

- исторический материал, которому уделяется больше внимания, чем в основном учебном курсе по данному предмету,
- акцент на практическую работу, когда учащиеся самостоятельно

ведут конспекты и получают навыки самостоятельной работы,

- индивидуальная и групповая работа с дополнительной литературой,
- использование компьютерных программ, интернет технологий, когда это необходимо, для решения поставленных задач,
- выступления перед группой, которые носят публичный характер и дают учащимся очень важный навык изложения материала в классе/аудитории.

Задачи, отбираемые для элективного курса, как правило, удовлетворяют нескольким *принципам*:

1. Принцип преемственности, когда новые задачи можно решить с помощью уже полученных знаний и навыков, а также используя взаимосвязь основного и элективного курсов.
2. Принцип связи теории с практикой, когда задачи являются логическим продолжением полученных теоретических знаний, одновременно являясь средством полноценного восприятия нового материала.
3. Принцип полноты, при котором в цепочках задач отражаются математические идеи, а также присутствуют примеры, носящие межпредметный характер.
4. Принцип контрастности, по которому задачи должны быть как с положительными, так и с отрицательными ответами, а также когда подбираются задачи, использующие различные виды знаний и не повторяясь.
5. Система задач должна предусматривать обучение эвристическим приемам, благодаря чему овладение методами научного познания происходит в процессе решения задач. В исследованиях по методике преподавания математики среди эвристических приемов наиболее часто встречаются:
   - аналогия,
   - индукция,
   - прием элементарных задач,
   - прием моделирования и другие.

6. Принцип формирования исследовательских умений, под которыми понимают вид учебно-познавательной деятельности, предполагающий выполнение учебных заданий с помощью самостоятельного творческого поиска новых знаний.

В учебные исследования можно выделить следующие достаточно важные этапы:

– постановка проблемы,

– выдвижение гипотез,

– доказательство или опровержение гипотез.

Таким образом, элективные курсы позволяют развивать и формировать у учащихся:

– культуру логического мышления,

– разносторонние интересы,

– потребность в учебно-познавательной деятельности,

– умение самостоятельно восполнять знания,

– общую математическую культуру,

– приобщают школьников к самостоятельной учебно-познавательной исследовательской деятельности,

– дают возможность познакомиться с некоторыми современными достижениями науки.

Помимо этого, они помогают раскрыться внутреннему потенциалу учеников, а также создают условия для их самореализации и развития. Элективные занятия дают шанс наиболее успешно применять индивидуальный подход к каждому школьнику, учитывая его способности, и более полно удовлетворить познавательные и жизненные интересы учащихся.

В процессе разработки программы элективного курса по теме «Комбинаторные задачи повышенной трудности» необходимо:

– определить цель курса и функцию курса в рамках изучаемого основного учебного курса по алгебре,

– установить отличия в содержании элективного курса от содержания основного курса алгебры,

– распределить программу курса по темам с выделением необходимого количества часов по каждой из них,

– гарантировать наличие для учащихся конкретного курса по геометрии различных учебно-методических материалов,

– выделить основные виды учебно-познавательной деятельности учащихся, определить степень их самостоятельности,

– определить критерии успешного прохождения элективного курса по геометрии,

– подготовить контрольные задачи и вопросы для проведения промежуточного зачета.

Исходя из этого, при проведении занятий преподаватели должны:

– придать курсу как привлекательное название, так и привлекательные формы проведения и достигаемые цели,

– избегать дублирования основной программы по геометрии,

– включать принципиально новые, нестандартные для учащегося знания, вызывающие у него познавательный интерес,

– заложить в программу элективного курса быстрый и эффективный путь получения знаний, используя уже пройденный материал,

– обеспечить синхронность содержания элективных курсов с установленными государственными стандартами образования.

– делать акцент на личностно-деятельностный подход в обучении, смещать акценты на формирование умений через активную самостоятельную деятельность учащихся.

Несмотря на то, что задачи комбинаторного характера изучаются практически на всех ступенях образовательного процесса в курсе математики начальной и средней школы, существуют известные сложности, которые испытывают учащиеся при решении комбинаторных задач. Обусловлено это необходимостью самостоятельно выделять и классифицировать различные элементы и множества в целом, и совершать операции с ними по правилам комбинаторики.

Учитывая значимость комбинаторики практически для всех предметов естественнонаучной направленности, представляется значимым изучение материала в рамках элективного курса «Комбинаторные задачи повышенной трудности». Представляется целесообразным проведение занятий в первой половине 11-го года обучения, после того, как учащиеся получат основные базовые знания по алгебре и началам анализа.

Предлагается элективный курс из 9 занятий со следующим примерным тематическим планированием (Таблица 7).

Таблица 7 − Примерное тематическое планирование

№ занятия	Тема
1	Элементы теории множеств. Конечные множества, операции с множествами. Выборки.
2	Основные правила комбинаторики. Сумма и произведение в комбинаторике. Проблемы комбинаторики.
3	Соединения в комбинаторике. Факториал и размещения. Перестановки и сочетания.
4	Промежуточное занятие. Вопросы и ответы по пройденному материалу, консультации, разбор задач.
5	Раскладки и разбиения. Основные формулы комбинаторики. Бином Ньютона. Рекуррентные соотношения.
6	Комбинаторные соединения и характер выборки. Классификация соединений. Возможное и невозможное.
7	Алгоритмы решения комбинаторных задач. «Простые» и «сложные» задачи.
8	Вероятностные задачи. Основные определения. Применение комбинаторики для решения задач теории вероятности.
9	Зачетное занятие. Контрольная в письменной форме.

Программное содержание на занятиях по данному элективному курсу предлагается сконструировать по следующему алгоритму:

– обобщение первоначальных знаний,

– изучение нового материала, которое, как правило, выходит за рамки школьного курса,

– организация практической учебно-познавательной деятельности учащихся по применению полученных знаний.

Цель данного элективного курса:

– углублении и расширение представлений и знаний обучающихся об элементах комбинаторики; изучение и приобретение навыков по решению комбинаторных задач и вероятностных задач с применением правил комбинаторики.

Для того, чтобы достичь поставленной цели, в процессе обучения следует решать следующие задачи:

– обобщить и систематизировать знания учащихся по планиметрии и стереометрии;

– обучить использованию различных методов решения геометрических задач;

– развивать интерес школьников к геометрии и математики в целом;

– обучить учеников применению аппарата алгебры к решению геометрических задач.

В качестве примера приведем конспект части занятия посвященный биному Ньютона.

Цели занятия:

1.Обучающая:

- формирование различных приёмов мыслительной деятельности;

- включение новой информации в структуру прежних знаний;

- решение задач практического содержания.

2. Воспитательная:

- привитие интереса к предмету;

- формирование уверенности в своих знаниях;

- сформировать потребность в знании через показ значимости предмета как метода научного познания.

3. Развивающая:

- умение использовать теорию к решению практических задач;

- развивать способность к анализу и обобщению;

- развивать познавательный интерес к предмету и расширять кругозор.

Методы, используемые на занятиях:

- объяснительно-иллюстративный,

- продуктивный.

Дидактический материал:

- школьные принадлежности,

- доска, маркеры (разноцветные мелки),

- проектор, презентация «Бином Ньютона».

План занятия по теме «Бином Ньютона»:

- Организационный момент (1 мин).

- Подготовительный этап и изучение нового материала (10 мин).

- Решение задач (10 мин).

Задачи на бином Ньютона считаются более сложными по сравнению с другими комбинаторными задачами. В экзаменационных вариантах по математике они, как правило, требуют развернутого решения.

Такие задачи обычно вызывают значительные затруднения у очень многих выпускников, хотя, в большинстве случаев, их решение требует лишь последовательного выполнения арифметических действий, аккуратности и определённых вычислительных навыков.

Изучение нового материала

Число всех k – элементных подмножеств n – элементного множества будем обозначать

$$\binom{n}{k} \text{ или } C_n^k$$

Символ C_n^k называется биномиальным коэффициентом, исходя из следующей формулы для -й степени бинома $(x + a)$.

$$(x + a)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k a^{n-k}$$

Чтобы убедится в истинности этой формулы, достаточно заметить, что коэффициент при$x^k a^{n-k}$ равен числу способов которыми из n сомножителей $(x+a)$ можно выбрать k сомножителей.

С числами C_n^k связано функциональное тождество, называемое формулой бинома Ньютона. Формулы элементарной математики можно записать в виде:

$$(a+b)^2 = C_2^0 a^2 + C_2^1 ab + C_2^2 b^2$$

$$(a+b)^3 = C_3^0 a^3 + C_3^1 a^2 b + C_3^2 ab^2 + C_3^3 b^3$$

Иначе, получаем общую закономерность, которую называют биномом Ньютона:

$$(a+b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b + C_n^2 a^{n-2} b^2 + \cdots + C_n^n b^n$$

Здесь:

$$C_n^0, C_n^1, C_n^2, \dots C_n^n$$

являются биномиальными коэффициентами (рисунок 6).

Если $a = b = 1$, получаем формулу суммы биномиальных коэффициентов:

$$(1+1)^n = C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \cdots + C_n^n = 2^n$$

Если $a = 1, b = -1$ то

$$C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 - \cdots + (-1)^n C_n^n = 0$$

Заметим, что:

$$C_n^k = C_n^{n-k}$$

$$C_n^k = C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^k$$

Для лучшего восприятия можно воспользоваться треугольником Паскаля (рисунок 5) [9].

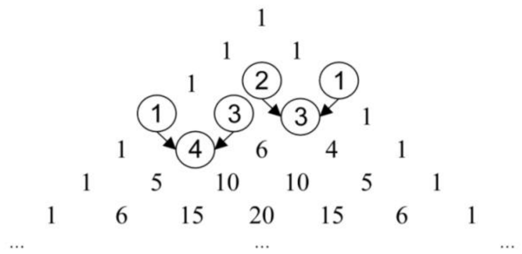


Рисунок 5 - Треугольник Паскаля

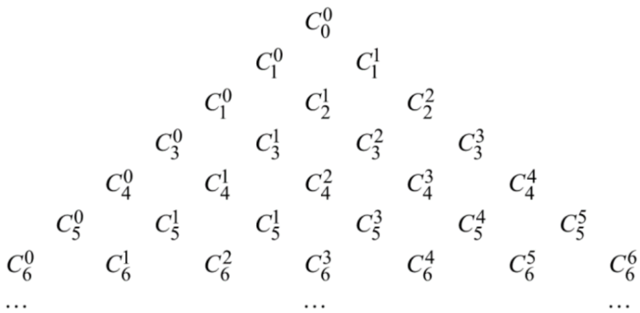


Рисунок 6 - Биномиальные коэффициенты

Приведем несколько задач, которые могут считаться ключевыми при рассмотрении данной темы [3-5].

Задача № 31.

Найти коэффициент при:

- x^5в разложении $(1+x)^7$

- x^{17}в разложении $(1+x^5)^7$

Решение

Используя Бином Ньютона:

$(1+x)^7 = {C_7}^0 + {C_7}^1 x + {C_7}^2 x^2 + {C_7}^3 x^3 + {C_7}^4 x^4 + {C_7}^5 x^5 + {C_7}^6 x^6 + {C_7}^7 x^7$

коэффициент при x^5 равен:

$${C_7}^5 = \frac{7!}{5!\,(7-5)!} = 21$$

В разложении $(1+x^5)^7$ степени переменной x будут кратны 5, поэтому, коэффициент при x^{17} равен нулю.

Задача № 32.

Отношение четвертого слагаемого к третьему слагаемому разложения $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+3\right)^n$ равно $3\sqrt{2}$. Найти n.

Решение

Третье и четвертое слагаемые равны:

$$C_n{}^2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2\cdot 3^{n-2}, \qquad C_n{}^3\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^3\cdot 3^{n-3}$$

По условию:

$$\frac{C_n{}^3\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^3\cdot 3^{n-3}}{C_n{}^2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2\cdot 3^{n-2}}=\frac{\frac{n!}{(n-3)!3!}\cdot\frac{1}{2\sqrt{2}}\cdot 3^{n-3}}{\frac{n!}{(n-2)!2!}\cdot\frac{1}{2}\cdot 3^{n-2}}=\frac{(n-2!)!}{(n-3)!\cdot 3}\cdot\frac{1}{3\sqrt{2}}=3\sqrt{2}$$

$$\frac{n-2}{9\sqrt{2}}=3\sqrt{2}, \quad n=56$$

Получаем: $n=56$

Задача № 33.

Найти номер наибольшего члена разложения

$$\left(\frac{9}{10}+\frac{1}{10}\right)^{100}$$

Решение

Запишем выражение для члена разложения:

$$C_n{}^k\cdot\left(\frac{9}{10}\right)^k\cdot\left(\frac{1}{10}\right)^{n-k}=C_n{}^k\cdot\frac{9^k}{10^n}=\frac{100!}{10^n}\cdot\frac{9^k}{k!\,(100-k)!}$$

Обозначим:

$$a_k=\frac{9^k}{k!\,(100-k)!}, \qquad a_{k+1}=\frac{9^{k+1}}{(k+1)!\,\big(100-(k+1)\big)!}$$

Тогда:

$$\frac{a_{k+1}}{a_k}=\frac{9}{k+1}\cdot(100-k)$$

и

$$\frac{900-9k}{k+1}>1\ при k<\frac{899}{10}$$

Таким образом,

$$a_{89} > a_{88} и a_{89} < a_{90}$$

и искомый номер равен 89.

Представляется, что данный элективный курс нацелен на достижение высокой эффективности в изучении основных комбинаторных элементов учащимися и развитию их познавательного интереса к другим разделам математики, включая теорию вероятностей и элементы математической статистики.

2.4 Педагогический эксперимент и его результаты

Для того, чтобы апробировать экспериментальную программу, был предварительно проведен с помощью анкетирования констатирующий этап экспериментальной работы в целях выявления степени понимания школьниками теоретических основ для решения комбинаторных задач повышенной трудности.

Программа и соответствующая технология проведения занятий была рассчитана на 18 часов (2 часа в неделю) для учащихся старших классов (в данном случае, 11 класса). Апробация экспериментальной программы «Комбинаторные задачи повышенной трудности» осуществлялась на базе ГУ «Тогузакская средняя школа отдела образования акимата Карабалыкского района»(Казахстан, Костанайская область, Карабалыкский район, с.Тогузак). Ответственной за апробацию была назначена Кропотова Лариса Александровна, учитель алгебры и геометрии.

В апробации были задействованы учащиеся 11 класса, изъявившие желание получить базовые и дополнительные знания в рамках экспериментальной программы «Комбинаторные задачи повышенной трудности».

В основу курса были взяты учебники по алгебре и началам математического анализа для 10 и 11 класса авторского коллектива С.М.

Никольского, М.К. Потапова, Н.Н. Решетникова, А.В. Шевкина [58]. В данных учебниках приведены все основные разделы, необходимые для усвоения данной темы, а также необходимые начальные знания, как для учащихся базовой школы, так и для профильных школ или для классов с углубленным изучением математики.

Для преподавателей, участвующих в апробации, предоставляется информация о дополнительном материале, который был использован при составлении экспериментальной программы. Это и теоретический материал и пособия, в которых представлены задачи по изучаемой теме.

В Таблице 8 представлен фактический план занятий по экспериментальной программе «Комбинаторные задачи повышенной трудности».

В рамках программы было проведено девять занятий по 2 академических часа каждое.

Таблица 8 − План занятий по экспериментальной программе «Комбинаторные задачи повышенной трудности»

№ занятия	Тема	Количество часов
1	Элементы теории множеств. Конечные множества, операции с множествами. Выборки.	2
2	Основные правила комбинаторики. Сумма и произведение в комбинаторике. Проблемы комбинаторики.	2
3	Соединения в комбинаторике. Факториал и размещения. Перестановки и сочетания.	2
4	Промежуточное занятие. Вопросы и ответы по пройденному материалу, консультации, разбор задач.	2
5	Раскладки и разбиения. Основные формулы комбинаторики. Бином Ньютона. Рекуррентные соотношения.	2
6	Комбинаторные соединения и характер выборки. Классификация соединений. Возможное и невозможное.	2

Продолжение таблицы 8

№ занятия	Тема	Количество часов
7	Алгоритмы решения комбинаторных задач. «Простые» и «сложные» задачи.	2
8	Вероятностные задачи. Основные определения. Применение комбинаторики для решения задач теории вероятности.	2
9	Зачетное занятие. Контрольная работа в письменной форме.	2

Первая часть в каждом занятии была посвящена теоретическому материалу и проводилась в лекционной форме. Вторая часть проводится в форме практического занятия и посвящена анализу предыдущего домашнего задания, а также решению типовых задач в рамках нового материала текущего занятия.

На констатирующем этапе экспериментальной работы преподавателям по завершении курса занятий с помощью анкетирования были заданы следующие вопросы:

– Какие темы Вам представляются наиболее сложными для учащихся?

– Наблюдается ли Вы повышение интереса у обучающихся по ходу занятий?

– Считаете ли Вы обоснованным разделение тем с учетом уровневой дифференциации учащихся?

– Как следует перераспределить темы между занятиями для лучшего усвоения учащимися?

– Насколько следует изменить комплекс задач для домашних заданий?

– Какие общие рекомендации по улучшению элективного курса Вы можете дать?

В целом, преподаватели отметили живой интерес учащихся (около 80%) к обобщающим занятиям в рамках данной программы. Наиболее сложными оказались темы №5 и №8, уровень правильного решения задач по эти темам оказался не очень высоким (примерно 60%). В целом, преподаватели, по итогам оценки домашних и самостоятельных работ посчитали целесообразным учет уровневой дифференциации при составлении заданий и изложении материала.

Учащимся, по завершении обучения на констатирующем этапе экспериментальной работы были заданы следующие вопросы:

– Были ли лекционные занятия интересны для Вас?

– Что на практических занятиях Вам давалось более легко?

– Какой материал вызвал у Вас наибольшее затруднения?

– Какой материал оказался наиболее интересным? Что было для Вас более «скучным»? По какой причине?

– При решении какого типа задач можно применить полученные во время курса знания?

– Считаете ли Вы полезным для себя полезными умения и навыки, полученные во время посещения занятий?

В целом, учащиеся посчитали курс интересным и познавательным для себя (около 80%). Как и преподаватели, учащиеся испытывали затруднения в изучении тем №5 и №8 (примерно 50%).

Целью поискового этапа проведенного исследования состояла в апробации конкретного теоретического материала и ряда типовых задач в рамках экспериментальной программы. В результате данного этапа экспериментального исследования была разработана система задач и домашних заданий по теме «Комбинаторные задачи повышенной трудности» для учащихся 11 классов в рамках углубленной программы общеобразовательной школы.

Выводы по второй главе

1. Изложенные выше подходы к системе комбинаторных задач позволяют сделать выводы о получаемых учащимися ценностных ориентирах. Это: формирование умения к логическим рассуждениям; освоение

эвристических приемов; формирование интеллектуальных умений, в том числе, выбор стратегии решения задач, анализ и сопоставление данных; развитие учебно-познавательной активности и ее индивидуализация; формирование способностей выявлять закономерности; привлечение учащихся к групповой деятельности и обмену своими предложениями в ходе свободного общения на занятиях.

2. Можно выделить следующие универсальные учебные действия, которые усваивают учащиеся:

- познавательные - анализ текста и постановка задачи и выработка оптимального пути решения, установка причинно-следственных связей, формулировка проблемы и способа ее решения;
- коммуникативные - групповая работа учащихся;
- регулятивные - определение целей и их корректировка в ходе решения задач.

3. Предложенная программа элективного курса по теме «Комбинаторные задачи повышенной трудности» являются важным инструментом формирования предметных компетенций учащихся и предопределения их профессиональной ориентации в будущем.

Для творческой познавательной активности нужно проводить нестандартные уроки, и применять на каждом занятии интересных математических упражнений.

Приведены многообразные виды математических упражнений, которые необходимо разбирать с учащимися на уроках регулярно.

Рассмотрен план занятия по теме «Бином Ньютона», приведены конкретные упражнения.

Для успешного усвоения понятий при изучении новой темы предполагается применять объяснительно-иллюстративный и конкретно-индуктивный методы.

Заключение

Проведенное исследование в рамках данной работы позволяет представить следующие результаты:

1. Представлена характеристика основных методов и приемов, используемых при обучении теме «Комбинаторика» в курсе математики общеобразовательной школы.

2. Проведен анализ особенностей обучения решению комбинаторных задач по различным учебникам, а также, учебным пособиям и научно-педагогическим работам, посвященным рассматриваемой теме.

3. Изучены особенности профильной дифференциации при обучении комбинаторике.

Представлены требования к знаниям учащихся по элементам теории вероятности и математической статистики на базовом и профильном уровнях.

Изложены различные подходы к технологии дифференциации обучения в педагогической практике.

4. Для практической реализации методики обучения решению самых важных комбинаторных задач рассмотрена их классификация и предложена технология обучения математике, основанная на ключевых задачах.

Рассмотрен принцип отбора ключевых задач и предложены такие задачи по основной теме соединений в комбинаторике.

5. Рассмотрены принципы проектирования элективных курсов и требования к системам задач, предлагаемых для обучения.

Сформулированы цели и задачи элективного курса, а также, формы организации и проведения занятий.

В качестве примера приведен конспект занятия по одной из тем комбинаторики.

6. Предложен элективный курс для проведения в первой половине 11-го года обучения, который предполагает изучение всех основных типов комбинаторных задач, включая задания прикладного характера, основанные на

применении знаний комбинаторики к широкому круга проблем теории вероятностей.

7. Представлен анализ педагогического эксперимента по апробации предлагаемой экспериментальной программы «Комбинаторные задачи повышенной трудности» в рамках элективного курса.

Программа элективного курса включает задачи, концепцию по решению задач и описание способов его реализации (технологию).

Проект обладает свойством воспроизводимости.

По результатам проведённого педагогического эксперимента можно сказать следующее:

- изучение вероятностных задач необходимо предварять пропедевтической работой;
- изучение собственно материала по теме комбинаторных задач необходимо продолжать и вне пройденной темы, то есть доводить умения до навыка использования полученных знаний для практического решения задач, в том числе, по теории вероятности и элементам математической статистики.

В целом, реализация разработанного проекта показала его эффективность.

Практическая значимость исследования определяется тем, что проведен анализ задачного материала по комбинаторике, элементам теории вероятностей и математической статистики, включая задания ЕГЭ; предложен соответствующий элективный курс, который может быть использован в практической работе учителями математики.

В работе рассмотрены различные методы и способы развития творческой активности и учебно-познавательной деятельности старшеклассников на занятиях математики.

Все поставленные задачи разрешены, и цель данной работы достигнута.

Список используемой литературы

1. Александров П.С., Колмогоров А.Н. Алгебра: Пособие для учащихся средней школы.— М.: Наука, 1992.
2. Алимов Ш.А. Алгебра. 7 класс: учебник для общеобразовательных учреждений / Ш.А. Алимов [и др.]. – М.: Просвещение, 2012. – С. 249–272.
3. Алимов Ш.А. Алгебра. 9 класс: учебник для общеобразовательных учреждений / Ш. А. Алимов, Ю. М. Колягин, Ю. В. Сидоров. – М.: Просвещение, 2011. – С. 123–138. Pdf файл учебника приложен в дополнительных материалах.
4. Алимов Ш.А., Колягин Ю.М., Ткачева М.В. и др. Алгебра и начала математического анализа. 10-11 классы: базовый и углубленный уровни /-М. : Просвещение, 2016 г.
5. Баландина И. Стохастическая линия в средней школе: Начнем с анализа. / Издательский дом «Первое сентября». Учебно-методический журнал "Математика. - №14 (676). 16-31.07.2009.
6. Белокурова Е.Е. Методика обучения младших школьников проведению комбинаторных рассуждений при решении задач: автореф. дис. канд. пед. наук.- Спб, 1993. – 17 с.
7. Бендукидзе А. Треугольник Паскаля / Бендукидзе А. // Квант. – 1982. – №10 – С. 42–47.
8. Блох А.Я. , Гусев В.А. и др.; сост. В.И. Мишин. Методика преподавания математики в средней школе: частная методика / М.: Просвещение, 1987. — 416 с.
9. Блягоз З. У. Задачник по теории вероятностей и математической статистике [Электронный ресурс]: учебное пособие/ З.У. Блягоз. – СПб.: Лань, 2018. – Режим доступа: https://e.lanbook.com/book/103060.
10. Брадис В.М. Методика преподавания математики в средней школе.— М.: Учпедгиз, 1984.

11. Бунимовича Е.А., Булычева В.А. Вероятность и статистика в школьном курсе математики. - ИУМК. Москва-Калуга, 2008.
12. Васильев Н., Гутенмахер В., Комбинаторика – многочлены – вероятность / Васильев Н., Гутенмахер В. // Квант. – 1986. – №1 – С. 19–23.
13. Вергелес Г.И. Возможности межпредметных связей в формировании учебной деятельности современного школьника. [Текст]: Г. И. Вергелес / межвузовский сборник научных трудов. – Л: Ленинградский пед. Университет имени А. И. Герцена. – 1987. – С. 51-58.
14. Виленкин Н. Я. Алгебра: учебник для учащихся 9 класса с углубленным изучением математики / Н. Я. Виленкин [и др.] / под ред. Н. Я. Виленкина. - М.: Просвещение, 2006. – С. 295–307.
15. Виленкин Н. Я. и др. Современные основы школьного курса математики.— М.: Просвещение, 1995.
16. Виленкин Н.Я. Комбинаторика. – М.: Наука, 1969. – с. 328.
17. Виленкин Н.Я. Комбинаторика / Н. Я. Виленкин // Квант. – 1986. – №1. – С. 20–23.
18. Виленкин Н.Я., Виленкин А.Н., Виленкин П.А. Комбинаторика – М.: ФИМА, МЦНМО, 2006. — 400 с.
19. Виленкин Н.Я., Ивашов-Мусатов О.С. и. Шварцбурд С.И. Программы для школ (классов) с углублённым изучением математики. 10-11 класс. - М: Дрофа, 2002.
20. Виноградова Е. П. Опыт включения комбинаторных задач в школьный курс математики. [Электронный ресурс] // Учебные материалы по психологии и педагогике: https://superinf.ru/view_helpstud.php?id=1987
21. Волошинова А. Интернет-ресурсы для учителя математики // Математика / Еженед. учебно-метод. прилож. к газете «Первое сентября». -2008.-№ 15.-С. 17-18.
22. Глейзер Г.И. История математики в школе: IX—X классы: Пособие для учителей.— М.: Просвещение, 1983.

23. Груденов Я. И. Изучение определений, аксиом, теорем.— М.: Просвещение, 1991.
24. Гузик Н.П. "Педагогика Н. Гузика" // Первое сентября. – 2000. - № 55.
25. Гусев В.А. Психолого-педагогические основы обучения математике. М.: ООО «Изд-во «Вербум- М», «Издательский центр «Академия», 2003. — 432 с.
26. Денищева Л.О., Краснянская К.А. Профильный экзамен по математике // Оценка качества образования. - 2007. - №1 - с. 41-47.
27. Дорофеев Г.В., Шарыгин И.Ф., Суворова С.Б. Математика. Учебник для 6 кл. общеобразовательных учреждений/ - М.: Просвещение, 2018.
28. Дорофеев Г.В., Шарыгин И.Ф., Суворова С.Б. и др. Алгебра, учебники для 7-9 классов общеобразовательных учреждений. - М.: Просвещение, 2014.
29. Евдокимова Л.В. Формирование комбинаторного мышления у младших школьников и подростков: автореф. дис. канд. пед. наук. - М., 2006. - 19 с.
30. Захарова А. Е. Элементы теории вероятностей, комбинаторики и статистики в основной школе: учебно-методическое пособие / Захарова А. Е., Высочанская Ю. М. - М.: БИНОМ. Лаборатория знаний. – 2011.
31. Иванов Ю. Сколько вариантов? / Иванов Ю. // Квант. – 1980. – № 11. – С. 34–37.
32. Иванов Ю. Сколько вариантов? / Иванов Ю. // Квант. – 1980. – № 12. – С. 37–39.
33. Иванюк М.Е., Липилина В.В., Максютин А.А. Проблемы реализации ФГОС при обучении математике в основной и старшей общеобразовательной школе. / Коллектив авторов – Самара: изд-во ООО «Порто-принт», 2014 – 330с.
34. Кабехова Л.М. Методика построения единого курса "Начала теории вероятностей с элементами комбинаторики" для 9 класса средней школы: автореф. дис. канд. пед. наук. - Л., 1971. - 21 с.

35. Колмогоров А.Н. и др. Алгебра и начала анализа: Учебное пособие для 9 и 10 классов средней школы / под ред. А.Н. Колмогорова./ -М.: Просвещение. 2005.
36. Колягин Ю.М., Ткачева М.В., Федорова Н.Е., Шабунин М.И. Алгебра. Учебник для 7 кл. общеобразовательных учреждений/ - М.: Просвещение, 2012.
37. Колягин Ю.М., Ткачева М.В. , Федорова Н.Е., Шабунин М.И. Алгебра и начала математического анализа. 11 класс: базовый и профильный уровни / под ред. А.Б. Жижченко. - М.: Просвещение, 2010
38. Колягин Ю. М. Задачи в обучении математике.— М.: Просвещение, 1997.— Ч. I.
39. Колягин Ю. М. Задачи в обучении математике.— М.: Просвещение, 1997.— Ч. II.
40. Колягин Ю. М. и др. Методика преподавания математики в средней школе: Общая методика.— М.: Просвещение, 1995.
41. Колягин Ю. М. и др. Методика преподавания математики в средней школе: Частные методики.— М.: Просвещение, 1997.
42. Кордемский Б. А. Математика изучает случайности. Пособие для учащихся./ -М.: Просвещение, 1975.
43. Кропотова Л.А. О практической апробации экспериментальной программы «Комбинаторные задачи повышенной трудности»: Актуальные проблемы педагогики и психологии на современном этапе.- Волгоград: НИЦ «Абсолют», 2020. - С. 27-35.
44. Кропотова Л.А. Технология обучения М.Б. Воловича, Р.Г. Хазанкина, А.А. Окунева: «Образование в Казахстане: традиции, опыт, инновации»/ под ред. С.В. Баезова, Нур-Султан: ИП SEVIBA, 2020. - С. 20-27.
45. Курындина К.Н. Формирование статистических представлений у учащихся в условиях взаимодействия школьных предметов / автореф. дисс. канд. пед. наук: 13.00.02 / Курындина Ксения Николаевна. - М, 1980. -24 с.

46. Левин А. Что такое комбинаторика //Журнал «Квант», 1999, №5.
47. Манвелов С.Г. Конструирование современного урока математики: Книга для учителя. М.: Просвещение, 2002. - 175 с.
48. Мешойрер Р. Комбинаторные доказательства формулы Ньютона / Р. Мешойрер // Квант. – 1978. – № 9. – С. 45–46.
49. Мордкович А. Г., Алгебра. 9 класс : учебник для общеобразовательных учреждений. В 2 ч. Ч. 1 / А. Г. Мордкович, П. В. Семенов. – М. : Мнемозина, 2010. – С. 173–216.
50. Мордкович А.Г. События. Вероятности. Статистическая обработка данных Текст.: дополнительные параграфы к курсу алгебры 7-9 классов общеобразовательных учреждений / А.Г. Мордкович, П.В. Семёнов. М.: Мнемозина, 2003. - 112 с.
51. Мордкович А.Г. Алгебра и начала математического анализа. 10-11 классы. В 2-ч частях. Ч.1. Учебник для учащихся общеобразовательных учреждений (базовый уровень)/ - М.: Мнемозина, 2013.
52. Мордкович А.Г. Алгебра и начала математического анализа. 10-11 классы. В 2-ч частях. Ч.1. Учебник для учащихся общеобразовательных учреждений (профильный уровень)/ - М.: Мнемозина, 2009.
53. Мордкович А.Г., Денищева Л.О., Мишустина Т.Н., Тульчинская Е.Е. Алгебра и начала анализа.10-11 кл.: В двух частях. Ч.2: Задачник для общеобразовательных учреждений / под ред.А.Г. Мордковича. - 5-е изд. - М.: Мнемозина, 2014. - 432 с.
54. Мордкович А.Г., Смышляев В.К. Алгебра и начала анализа: Пробный учебник для 9-10 классов средней школы.— М.: Просвещение, 2001.
55. Никифорова М.А. Новые компьютерные технологии // Математика / Учебно-методическое приложение к газете «Первое сентября». 2004 - № 2931.
56. Никифорова М.А. Преподавание математики и новые компьютерные технологии // Математика в школе. — 2005. — № 7. — С. 72-80

57. Никольский С.М., Потапов М.К., Решетников Н.Н., Шевкин А.В. Алгебра. Учебник для 9 класса общеобразовательных учреждений/ - М.: Просвещение, 2014 г.
58. Никольский С.М., Потапов М.К., Решетников Н.Н., Шевкин А.В. Алгебра и начала анализа. Учебник для 10 класса общеобразовательных учреждений. - М.: Просвещение, 2014. - 464 с.
59. Никольский С.М., Потапов М.К., Решетников Н.Н., Шевкин А.В. Алгебра: Пособие для самообразования. - М.: Наука, 1994.
60. Педагогическая энциклопедия: В 2 томах / Под ред. И.А. Каирова, Ф.Н. Петрова. – М.: Советская энциклопедия.
61. Пойя Д. Математика и правдоподобные рассуждения./ - М.: Просвещение. 1997.
62. Саакян С.М., Дудницин Ю.П. Примерное планирование учебного материала по математике в 10-11 классах // Математика в школе. - 2004. - №7 - с.2-9.
63. Саранцев Г.И. Упражнения в обучении математике. 2-е изд., дораб. - М.: Просвещение, 2005. - 255 с.
64. Селютин В.Д. Методика формирования готовности учителя к обучению школьников стохастике / В.Д. Селютин. Орёл: ОГУ, 2001.-164 с.
65. Селютин В. Д. О подготовке учителей к обучению школьников стохастике // Математика в школе. – №4. – 2003.
66. Сергиенко Ю. Е. Изучение комбинаторики в старшей школе // Молодой ученый. — 2018. — №43. — С. 87-89.
67. Сканави М.И. Сборник задач по математике для поступающих во втузы / под ред. Сканави М.И., 6-е изд. – М.: 2013. - 608 с.
68. Стандарт среднего полного (общего) образования по математике. Базовый уровень, http://www.school.edu.ru/dokedu.asp?obno=19 814.
69. Стандарт среднего полного (общего) образования по математике. Профильный уровень, http://www.school.edu.ru/dokedu.asp7obn 0=19812.

70. Столяр А. А. Методы обучения математике. - Минск: Вышейшая школа, 1996.
71. Унт Э.И. Индивидуализация и дифференциация обучения. – М.: Педагогика, 1990. – 192 с.
72. Федеральный закон «Об образовании в Российской Федерации». – М.: Омега-Л, 2014. – 134 с.
73. Федеральный компонент государственного стандарта общего образования. Ч. II. Среднее (полное) общее образование. М-во образования Рос. Федерации.- М., 2012.
74. Федеральный государственный образовательный стандарт [Электронный ресурс]. URL: https://fgos.ru.
75. Фирсов В.В. Некоторые проблемы обучения теории вероятностей как прикладной дисциплины: дис. канд. пед. наук. - 1974.
76. Фирсов В.В. Дифференциация обучения на основе обязательных результатов обучения. /- М., 1994
77. Халамайзер, А.Я. Из опыта работы Хазанкина Р.Г. // Математика в школе. – 1987. – № 4 – С. 16-21.
78. Хохлова Т.Н. Прикладная направленность обучения математике: Т.Н. Хохлова // 1 сентября: Математика. – 2004. - № 3. – С 25-29.
79. Шварц Д.А. Задачник по комбинаторике – М.: Высшая Школа Экономики, 2010. — 73 с.
80. Ширшов А., Об одной комбинаторной задаче / А. Ширшов // Квант. – 1979. – № 9. – С. 19–32.
81. Шихова А.П. Обучение комбинаторике и ее приложениям в средней школе: автореф. дис. канд. пед. наук.- М., 1978.-20 с.
82. Элективные курсы в профильном обучении : Образовательная область Математика/ Министерство образования РФ; Национальный фонд подготовки кадров. – М.; Вита-Пресс, 2004. - 96 с.
83. https://infourok.ru/kombinatorikaeto-interesnonauchniy-proekt-sekciya-matematika-816469.html.

84. K.A. Stroud, Dexter J. Booth. Foundation Mathematics / Palgrave Macmillan, London – 2009 – p. 320.
85. Joanne Lockwood, Richard Aufmann. Introductory and Intermediate Algebra: An Applied Approach / Brooks Cole – 2013 – p. 293.
86. Matt Parker. The Maths Book: Big Ideas Simply Explained / DK – 2019 – p. 307.
87. Cognitive levels and approaches taken by students failing written examinations in mathematics. - Teaching Mathematics and Its Applications, 2013.
88. Maggie Pickering. (2009). Cooperative Grouping Working on Mathematics [Electronic version]. Action Research Projects. Paper 46.