МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«Тольяттинский государственный университет»

Институт математики, физики и информационных технологий
(наименование института полностью)

Кафедра «Высшая математика и математическое образование»
(наименование)

44.04.01 Педагогическое образование
(код и наименование направления подготовки)

Математическое образование
(направленность (профиль))

ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА (МАГИСТЕРСКАЯ ДИССЕРТАЦИЯ)

на тему «Технология обучения последовательностям и прогрессиям в курсе алгебры общеобразовательной школы»

Студент	И.Н. Морозов (И.О. Фамилия)	 (личная подпись)
Научный руководитель	д-р пед. наук, профессор Р.А. Утеева (ученая степень, звание, И.О. Фамилия)	

Тольятти 2021

Оглавление

Введение

Актуальность и научная значимость настоящего исследования. В настоящее время происходит процесс внедрения в общеобразовательную школу Федеральных государственных образовательных стандартов основного и среднего (полного) общего образования (Стандарт). Поэтому одной из задач, стоящей перед учителем, в том числе, математики, является организация достижения учащимися личностных, предметных и метапредметных результатов на различных этапах процесса обучения.

В Концепции развития математического образования в Российской Федерации одной из задач обозначена «задача обеспечения отсутствия пробелов в базовых знаниях для каждого обучающегося» [20].

Эта задача может быть решена за счет применения учителем в процессе обучения математике различных технологий и методик.

Тема «Последовательности и прогрессии» является одной из базовых тем школьного курса алгебры. Понятия «последовательность» и «прогрессия» напрямую связаны с одним из важнейших понятий в математике, понятием функции. В курсе алгебры общеобразовательной школы изучаются числовые последовательности, составляющие класс числовых функций, возникшие задолго до создания учения о функции и являющиеся объектом самостоятельного изучения. Арифметическая и геометрическая прогрессии являются составляющей числовых последовательностей и являются предметом изучения в школьном курсе математики.

Изучение числовых последовательностей играет важную роль не только в школьном курсе алгебры. Данная тема имеет теоретическую (теория рядов, функция, теория множеств) и прикладную (природа, техника, экономика) направленность.

Одна из методических проблем, относящаяся к теме «Последовательности и прогрессии» связана с тем, что она изучается в курсе алгебры 9 класса.

В тоже время, задания по теме «Числовая последовательность. Арифметическая и геометрическая прогрессии» предлагаются на государственной итоговой аттестации не только в основной школе в форме ОГЭ (9 класс), но ив старшей −ЕГЭ (11 класс), а также на вступительных экзаменах в вузы. Все это приводит к необходимости поиска эффективных методик и технологий обучения теме с целью формирования прочных базовых знаний у каждого выпускника школы.

В соответствии с современной стратегией образования, эффективность изучения прогрессий в школьном курсе математики зависит от многих факторов, в частности, от проектирования и использования педагогических технологий, что будет способствовать достижению планируемых результатов изучения алгебры.

Вопросы разработки, систематизации, методологии реализаций педагогических технологий рассматривалась в работах В.П. Беспалько [7], Г.К. Селевко [46], С.А. Смирнова [51] и других.

Проблемы обучения математике на основе технологии В.М. Монахова Раскрыты в ряде диссертационных исследований, выполненных под его руководством. Например, в диссертации М.В. Черных построена «теоретическая модель, состоящая из последовательности технологических процедур проектирования и конструирования учебного процесса, учитывающего методические особенности курса "Алгебра-8"; разработаны авторские технологические карты, которые представляют собой условный проект учебного процесса на весь учебный год» [68].

В диссертации О.А. Косино спроектирован учебный процесс по курсу алгебры 7-9 классов на основе «интеграции педагогических и информационных технологий, а также атлас технологических карт, проектирование электронной поддержки учебно-методического сопровождения курса «Алгебра» [21].

Вопросы дифференцированного обучения отражены в диссертации Л.А. Болотюк. В данной работе разработана «методика обучения уровневой дифференциации решения текстовых задач при подготовке к письменному экзамену по алгебре за курс основной школы» [9].

Таким образом, **актуальность** темы исследования обусловлена сложившимися к настоящему времени *противоречиями между*:

– требованиями к обязательным результатам освоения программы среднего (полного) общего образования по математике и недостаточным уровнем знаний и умений обучающихся по результатам выполнения итоговых заданий по прогрессиям и последовательностям;

–существующей возможностью использования различных технологий обучения и недостаточной разработанностью соответствующих им методик реализации при обучении алгебре в общеобразовательной школе

Проблема диссертационного исследования: какая методика соответствует гарантированным результатам обучения теме «Последовательности и прогрессии» в курсе алгебры общеобразовательной школы при реализации выбранной технологии В.М. Монахова?

Объект исследования: процесс обучения алгебре в 9-10 классах общеобразовательной школы.

Предмет исследования: методика уровневой дифференциации обучения математике как основа реализации технологии В.М. Монахова обучения теме «Последовательности и прогрессии».

Цель исследования заключается в обосновании и разработке методики уровневой дифференциации как основы реализации технологии В.М. Монахова при обучения математике теме «Последовательности и прогрессии» в курсе алгебры общеобразовательной школы.

Гипотеза исследования: технология В.М. Монахова при обучении последовательностям и прогрессиям в курсе алгебры общеобразовательной школы будет способствовать достижению результатов обучающихся на базовом и профильном уровнях, если основу ее реализация составит методика уровневой дифференциации обучения математике.

Цель, объект, предмет и гипотеза определили **задачи исследования**:

1. Выделить различные подходы к определению понятия «технология обучения математике».

2. Проанализировать особенности технологии обучения математике В.М. Монахова.

3.Раскрыть сущность методики уровневой дифференциации обучения математике как основы реализации технологии В.М. Монахова.

4. Выделить основные цели и задачи обучения теме «Последовательности и прогрессии» в курсе алгебры общеобразовательной школы.

5. Спроектировать содержания темы «Арифметическая и геометрическая прогрессии» в рамках технологии В.М. Монахова.

6. Разработать элективный курс «Задачи на прогрессии» как дополнение содержания базового уровня в 9-10 классах.

7. Разработать систему задач по теме для подготовки учащихся к итоговой аттестации (ОГЭ и ЕГЭ).

8. Провести констатирующий и поисковый этапы педагогического эксперимента.

Теоретико-методологические основы исследования:

– нормативные документы, относящиеся к математическому образованию в Российской Федерации [20,65];

– исследования в области применения различных педагогических технологий (В.М. Монахов [31], С.А. Смирнов [51], Г.К. Селевко [46], В.В. Пионтковский [42], Е.В. Бахусова [4]).

– исследования в области школьного математического образования (Ю.М. Колягин [17], А.Г. Мордкович [32], С.М. Никольский [37]).

Базовыми для настоящего исследования явились также работы В.М. Брадиса [10], Б.П. Беспалько [7], Р.А. Утеевой [63].

Методы исследования: анализ содержания научно-методической литературы, школьных учебников алгебры по теме «Последовательности и прогрессии», учебно-методических пособий, школьных программ; анкетирование, тестирование учащихся, беседа с учителями и учащимися; проведение, анализ и обработка данных эксперимента.

Основные этапы исследования:

1 семестр (2018-2019 уч.г.): анализ ранее выполненных исследований по теме диссертации, анализ школьных учебников, нормативных документов (стандартов, программ), анализ опыта работы школы по данной теме.

2 семестр (2019-2020 уч.г.): определение теоретических проектирования технологий обучения математике в общеобразовательной школе.

3 семестр (2019-2020 уч.г.): определение методических основ проектирования технологии В.М. Монахова по теме «Последовательности и прогрессии».

4 семестр (2020-2021 уч.г.): разработка элективного курса «Задачи на прогрессии».

5 семестр (2020-2021 уч.г.): оформление диссертации, корректировка ранее представленных материалов, уточнение аппарата исследования, описание результатов экспериментальной работы, формулирование выводов.

Опытно-экспериментальная база исследования: НИЛ «Школа математического развития и образования -5+» ФГБОУ ВО «Тольяттинский государственный университет».

Научная новизна исследования заключается в том, что в нем обоснована методика уровневой дифференциации обучения математике как основа реализации технологии В.М. Монахова на примере темы «Последовательности и прогрессии».

Теоретическая значимость исследования состоит в том, что в нем спроектировано содержание и методика обучения теме «Последовательности и прогрессии» в рамках технологии В.М. Монахова.

Эти результаты дополняют представления учителей математики и магистров математического образования о сущности понятий «методика обучения» и «технология обучения».

Практическая значимость исследования определяется тем, что в нем разработаны:

– методика уровневой дифференциации обучения теме «Последовательности и прогрессии» в курсе алгебры общеобразовательной школы как основа реализации технологии В.М. Монахова;

– элективный курс «Задачи на прогрессии», дополняющий базовый уровень темы.

Достоверность и обоснованность результатов и выводов, полученных в ходе проведенного исследования, следуют из их согласованности с результатами ранее проведенных исследований.

Личное участие автора в организации и проведении исследования состоит в самостоятельном решении поставленных задач, в том числе: проектировании содержания темы «Арифметическая и геометрическая прогрессии» в рамках технологии В.М. Монахова, разработке элективного курса и подборе системы олимпиадных задач для ее апробации с обучающимися 9-10 классов математической школы при ТГУ.

Апробация результатов проводилась в период производственной (научно-исследовательской работы) и преддипломной практик на базе кафедры «Высшая математика и математическое образование» Тольяттинского государственного университета, а также на:

– Всероссийской студенческой научно-практической конференции «Молодёжь. Наука. Общество» (диплом за 3 место, г. Тольятти, декабрь, 2020 г.);

− Региональной научно-практической конференции студентов и аспирантов вузов Могилевской области «Молодая наука – 2021» (апрель 2021 г., Могилевский государственный университет имени А.А. Кулешова).

Они также отражены в 3-х публикациях [33, 34, 35].

На защиту выносятся:

1. Методика уровневой дифференциации обучения теме «Последовательности и прогрессии» как основа реализации технологии В.М. Монахова в курсе алгебры основной школы.

2. Элективный курс «Задачи на прогрессии» как дополнение базового уровняв старших классах.

3. Олимпиадные задачи по теме в рамках дополнительного математического образования школьников.

Структура магистерской диссертации. Работа состоит из введения, двух глав и заключения, содержит 7 таблиц, 1 рисунок, список используемой литературы (75 источников). Основной текст работы изложен на 83 страницах.

Глава 1 Теоретические основы проектирования технологий обучения математике в общеобразовательной школе

1.1 Понятие технологии обучения математике

Понятие «технология» возникло на основе развития технического прогресса, то есть было связано с созданием некой технической среды, комплекса автоматизированных средств. Слово «технология» происходит от греческих словτέχνη– искусство, мастерство и λόγος– наука, учение, то есть в буквальном смысле означает «учение о мастерстве» [16].

В Советском энциклопедическом словаре приводится следующее определение: «Технология – совокупность методов обработки, изготовления, изменения состояния, свойств, формы сырья, материала или полуфабриката, осуществляемых в процессе производства продукции» [52, с. 1330].

Позже, технология понималась как «обучение с помощью технических средств» [16].

Наряду с понятием «технология», в педагогической литературе используются понятия: педагогическая технология, образовательная технология, технология обучения. Первоначально, различий между данными понятиями не делали. На сегодняшний день, самым широким считается понятие «педагогическая технология», оно охватывает процессы обучения и воспитания.

История развития понятия «педагогическая технология» идёт ещё со времён великого педагога-дидакта Я.А. Коменского (1592 – 1670). Он не определял педагогическую технологию, но в его идеях прослеживается технологизация учебного процесса. Стремился отыскать такой порядок обучения, который приводил бы к положительному результату. А для достижения гарантированного результата, необходимы: 1) чётко сформулированная цель; 2) определённые средства обучения; 3) конкретные правила пользования этими средствами, которые гарантированно приводили бы к достижению цели [19, 22].

Впервые термин «педагогическая технология» встречается «в 20-ых годах XX века в работах по рефлексологии (направление в психологии) И.П. Павлова, В.М. Бехтерева, А.А. Ухтомского, С.Т. Шацкого» [6, с. 59]. А.С. Макаренко рассматривал другое понятие «педагогическая техника», которое в Педагогической энциклопедии определялось как«совокупность приемов и средств, направленных на четкую и эффективную организацию учебных занятий» [40, с. 223].

В 50-ых годах XX века введено понятие «технология образования»: «научное описание педагогического процесса, который неизбежно бы вёл к запланированному результату» [51, с. 292].

В 60-ыхгодах «определились два направления толкования понятия «педагогическая технология»: в первом случае оно трактовалось как «технологические средства в обучении», а во втором - «технологии обучения» или «технология учебного процесса». А. Ламсдейн, Д. Финн (США) считали, что основная цель педагогической технологии заключается в разработке системы планирования, реализации и оценивании педагогической деятельности» [40, с. 224].

Вплоть до конца 80-ых годов XX века понятия «педагогическая технология» и «технология обучения» использовали как синонимы.

В 1979 г. педагогическая технология определялась как «комплексный, интегрированный процесс, включающий идеи, средства и способы организации деятельности для анализа проблем и управления решением проблем, охватывающих все аспекты усвоения знаний» [40, с. 226].

В 90-ые годы XX века, педагогическая технология трактуется так: «максимальное использование в обучении возможностей технических средств, либо управление процессом обучения, т.е. целенаправленное конструирование целей обучения в соответствии с целями проектирования всего хода процесса обучения, проверку и оценку эффективности выбранных форм, методов, средств, оценку текущих результатов, коррекционные мероприятия» [40, с. 227].

Приведем различные трактовки понятия педагогической технологии.

Б.Т. Лихачев определяет педагогическую технологию, как «совокупность психолого-педагогических установок, определяющих специальный набор и компоновку форм, методов, приемов и способов воспитательных средств» [4, с. 104]. П.И. Пидкасистый под педагогической технологией понимает «направление в дидактике, область научных исследований по выявлению принципов и разработке оптимальных систем, по конструированию воспроизводимых дидактических процессов с заранее заданными характеристиками» [41, с. 181].

По мнению В.П. Беспалько, «педагогическая технология означает систематичное и последовательное воплощение на практике заранее спланированного учебно-воспитательного процесса» [7].

С точки зрения В.С. Безруковой, «педагогическая технология – это последовательное и непрерывное движение взаимосвязанных между собой компонентов, этапов, состояний педагогического процесса и действий его участников» [5. с. 89]. В.Д. Симоненко под педагогической технологией понимает «систематический метод планирования, применения и оценивания всего процесса обучения и усвоения знаний путем учета человеческих и технических ресурсов, и взаимодействия между ними для достижения более эффективной формы образования» [48].

В.А. Сластенин отмечает, что «педагогическая технология – это последовательная взаимосвязанная система действий педагога, направленная на решение педагогических задач; планомерное и последовательное воплощение на практике заранее спроектированного педагогического процесса; строго научное проектирование и точное воспроизведение гарантирующих успех педагогических действий» [50, с. 330].

В.М. Монахов определяет педагогическую технологию, как «продуманную во всех деталях модель совместной педагогической деятельности по проектированию, организации и проведению учебного процесса с безусловным обеспечением комфортных условий для учащихся и учителей» [31].

Из всех вышеперечисленных подходов к определению педагогической технологии будем придерживаться наиболее близким к нашему пониманию технологии обучения, а именно, рассмотрение педагогической технологии как процедуры деятельности участников педагогического процесса (учителя и учащихся).

Анализ различных подходов к определению педагогической технологии позволяет сделать вывод о том, что любая педагогическая технология требует от учителя учета особенностей обучающихся класса, специфики изучаемой темы, подбора соответствующей методики для ее успешной реализации на практике.

1.2 Технология обучения математике В.М. Монахова

Одной из задач государственной образовательной политики в Концепции модернизации российского образования является достижение качества образования. Решению данной задачи способствует применение в обучении различных педагогических технологий.

Применение технологии для построения любого учебного процесса содержит два основных этапа – определение цели и содержания обучения. При этом отличительной особенностью технологии является «направленность на достижение поставленной цели и на этой основе коррекция учебного процесса, наличие оперативной обратной связи» [4, с. 112].

В.М. Монахов отмечает, что «использование педагогической технологии требует определенного концептуального подхода к образованию, поэтому желательно для сравнения разных технологий разработать по возможности универсальный методологический подход к их проектированию и экспертизе» [30, с. 28].

Модель построения учебного процесса по технологии В.М. Монахова состоит из пяти блоков: «Целеполагание», «Диагностика», «Коррекция», «Дозирование домашней работы», а также «Логическая структура» самого учебного процесса [30]. Все эти блоки отражаются в «Технологической карте изучения темы» и целостно отражают все аспекты учебного процесса. Технологическая карта позволяет сделать учебный процесс открытым и ясным для всех участников образовательной деятельности, в том числе и для родителя. Структура технологической карты представлена в таблице 1.

Таблица 1– Структура технологической карты по В.М. Монахову

<table>
<tr><td colspan="3">Логическая структура учебного процесса
Ц1Д1Ц2Д2Ц3Д3…
1234567891011…</td><td>Класс: _____
Предмет: _____
Учебник: _____
Учитель:_____</td></tr>
<tr><td>Целеполагание (микроцель)</td><td colspan="2">Диагностика (пример самостоятельной работы)</td><td>Коррекция</td></tr>
<tr><td>Ц1</td><td>Д1:</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>Ц2</td><td>Д2:</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>Ц3</td><td>Д3:</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>…</td><td>…</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td colspan="4">Дозирование домашней работы</td></tr>
<tr><td></td><td>«удовлетворительно»</td><td>«хорошо»</td><td>«отлично»</td></tr>
<tr><td>ДР1</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>ДР2</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>ДР3</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>…</td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

Логическая структура учебного процесса– это описание деятельности ученика на каждом уроке, определение поэтапного освоения материала раздела или темы от микроцели к микроцели.

В блоке «Целеполагание» указаны основные учебные задачи изучения темы. Для каждой микроцели (Ц1 – Цn) в блоке «Диагностика» указан образец самостоятельной работы диагностики (Дl – Дn). Как правила это после содержит 4 задачи: первые две задачи относятся к обязательному уровню изучения темы – уровень «стандарта». Третья задача предполагает умение применять усвоенную информацию для решения более трудных задач, её решение соответствует отметке «хорошо». Четвёртое задание оценивается на отметку «отлично» и предполагает умение применять полученные знания для решения трудных задач путем трансформации знаний. Важно то, что ученик самостоятельно выбирает уровень обучения предмету и тем самым решает проблему перегрузки в обучении.

Блок «Дозирование домашней работы» содержит систему дифференцированных упражнений для домашней работы учащихся, соответствующую каждой микроцели и разделен на три уровня сложности:

– «стандарт» включает задания, которые позволят успешно подготовиться к решению заданий 1 и 2 из блока «целеполагания»;

– «хорошо» - к заданию 3;

– «отлично» –к заданию 4.

Блок «коррекция» состоит из следующих разделов: «затруднения, типичные ошибки, система мер педагогического и методического характера для устранения ошибок» [4, с. 119].

Для обучающихся, такая технологическая карта служит стимулом к самообразованию, так как в таком виде становится возможным целостно видеть изучение темы, что позволяет сконструировать свою учебную и познавательную деятельность на основе своих возможностей и интересов.

Для учителя, технологическая карта позволяет более точно определить место и значение каждого урока в теме, выстроить целостную связь её изучения.

Рассмотрим подробнее проектирования учебного процесса в соответствии с технологией В.М. Монахова [30].

На первом, *подготовительном этапе*, учителю необходимо отобрать содержание изучения темы, определить цели, количество часов изучения, диагностические задания по теме.

Цель изучения темы предполагает разбивку на микроцели, должны быть понятны учащимся и могут быть сформулированы в форме «знать …; уметь …; понимать … и др.».

Далее, начинается *проектировочный этап*, на котором учитель разрабатывает карту-проект, технологическую и информационную карту урока (см. таблицу 1).

Карта проект содержит: 1) темы, изучаемые в рамках данного предмета и класса обучения; 2) учебный период изучения темы; 3) микроцели, сформулированные на подготовительном этапе. По сути, это тематическая программа на учебный год. Структура карты-проекта представлена в таблице 2.

Таблица 2 − Структура карты-проекта по технологии В.М. Монахова

Учебный период	**Темы**	**Микроцели**
с______ по _____	Технологическая карта №1. Тема: «________________»	Ц1: … Ц2: … Ц3: … …
с______ по _____	Технологическая карта №2. Тема: «________________»	Ц1: … Ц2: … Ц3: … …
с______ по _____	Технологическая карта №3. Тема: «________________»	Ц1: … Ц2: … Ц3: … …
И т.д.	И т.д.	И т.д.

Третий этап проектирования учебного процесса - этап *апробации проекта*. В реальном учебном процессе учитель апробирует разработанные материалы. Для открытости и доступности результатов, предполагается, что ТК должны быть у учащихся в свободном доступе.

Завершающий этап проектирования – коррекции проекта. На основе анализа проведённой работы учитель вносит коррективы в учебный проект, определяет оптимальный вариант последующей работа [4].

Таким образом, благодаря технологии проектирования учебного процесса академика В.М. Монахова, учитель может выстроить учебный процесс в системе. Эта технология позволяет всем обучающимся в должной степени усвоить учебный материал и снизить перегрузку, благодаря, дозированию домашней работы. Позволяет учащимся выбирать уровень усвоения темы и делать самооценку учебной деятельности, формировать положительную мотивацию к изучению темы.

1.3 Методика уровневой дифференциации обучения математике как основа реализации технологии В.М. Монахова

В научно-педагогической литературе существуют разные точки зрения на вопрос о соотношении понятий «технология обучения» и «методика обучения». В частности, отмечается, что технологии обучения являются основой методики обучения [53]. Другие авторы, наоборот, считают, что для реализации одной и той же технологии, могут быть применены разные методики обучения.

О том, что следует различать указанные понятия свидетельствует, например, название пособия для студентов под редакцией Н.Л. Стефановой и Н.С. Подходовой «Методика и технология обучения математике» [29].

Как показывает анализ научно-методической литературы и практика, технология обучения математике В.М. Монахова реализуется учителями с помощью разных методик.

В данном исследовании в качестве основы для реализации технологии В.М. Монахова выбрана методика уровневой дифференциации обучения математике Р.А. Утеевой [63].

«Под уровневой дифференциацией обучения математике будем понимать обучение учащихся одного и того же класса наследующих уровнях:

$У_1$: **базовый уровень** - определенный программой и учебником минимум знаний и умений, достижение которого обязательно учащимися всех типологических групп.

$У_2$: **продвинутый уровень** - некоторые, выходящие за рамки программы и учебника дополнительные сведения (знания) и формирование прочных умений по применению этих знаний в различных ситуациях (при решении задач разных типов и разной сложности), достижение которого обязательно учащимися типологических групп А и В.

$У_3$: **высокий уровень** - дополнительные сведения, углубляющие знания учащихся по теме и формирующие умения решать задачи повышенной сложности, достижение которого обязательно для учащихся группы А» [63].

В технологии В.М. Монахова указанные уровни могут быть реализованы в блоках: «Диагностика», «Коррекция», «Дозирование домашней работы» за счет соответствующих дифференцированных заданий.

«Под дифференцированным заданием понимается задание по теме, составленное с учетом особенностей каждой типологической группы» [63].

Предлагаемая методика уровневой дифференциации обучения Р.А. Утеевой наиболее полно соответствует технологии обучения В.М. Монахова.

Выводы по первой главе

Итак, в первой главе раскрыты теоретические основы проектирования технологий обучения математике в общеобразовательной школе.

1. Выделены различные подходы к определению понятия «технология обучения математике».

2. Определены особенности технологии обучения математике В.М. Монахова.

3. Раскрыта сущность методики уровневой дифференциации обучения математике как основы реализации технологии В.М. Монахова.

Глава 2 Содержание и методические особенности проектирования технологии обучения В.М. Монахова по теме «Последовательности и прогрессии в курсе алгебры общеобразовательной школы

2.1 Основные цели и задачи обучения числовым последовательностям и прогрессиям в курсе алгебры

Числовые последовательности и прогрессии изучаются в конце 9 класса в курсе алгебры. Согласно Примерной основной образовательной программе, при изучении теме «Последовательности и прогрессии» выпускник научится:

на базовом уровне:

–«оперировать понятиями: последовательность, арифметическая прогрессия, геометрическая прогрессия;

– решать задачи на прогрессии, в которых ответ может быть получен непосредственным подсчетом без применения формул» [44, с. 88];

на углубленном уровне:

– «свободно оперировать понятиями: последовательность, ограниченная последовательность, монотонно возрастающая (убывающая) последовательность, предел последовательности, арифметическая прогрессия, геометрическая прогрессия, характеристическое свойство арифметической (геометрической) прогрессии;

– использовать метод математической индукции для вывода формул, доказательства равенств и неравенств, решения задач на делимость;

– исследовать последовательности, заданные рекуррентно;

– решать комбинированные задачи на арифметическую и геометрическую прогрессии» [44, с. 108].

На основе анализа учебно-методической литературы к учебникам Г.В. Дорофеева [13], Ю.М. Колягина [17], А.Г. Мерзляка [28], С.М. Никольского [37], можно выделить следующие основные цели изучения темы «Последовательности и прогрессии».

При обучении на *базовом уровне*, учащиеся должны:

– овладеть понятиями числовая последовательность, арифметическая прогрессия, геометрическая прогрессия;

– знать способы задания последовательностей;

– изучить и научиться использовать свойства и формул n-го члена и суммы nпервых членов арифметической и геометрической прогрессий [43, 26, 18].

Помимо этого, при обучении на *углубленном уровне*, учащиеся должны освоить доказательства математических утверждений методом математической индукции. Это в свою очередь способствует достижению метапредметных результатов освоения основной образовательной программы.

Изучение прогрессий в школьном курсе алгебры неразрывно связаны с изучением основных линий развития алгебры.

Прогрессии связаны с линией тождественных преобразований, благодаря чему становится возможным записывать громоздкие многочлены определённого вида более сжато.

Например, сумма членов геометрической прогрессии $a + ab +$ $+ab^2+\ldots+ab^{n-1} = \frac{a(b^n-1)}{b-1}$.

Решение задач на прогрессии часто сводится к решению уравнений, то есть связано с линией уравнений.

Например, зная первый член арифметической прогрессии и сумму первых 7 членов этой прогрессии, можно вычислить седьмой член прогрессии, расписав формулу суммы этих семи членов.

Важной ролью изучения прогрессий является её связь с теорией пределов и рядов, изучаемые в курсе математического анализа [10].

В настоящее время в обучении школьников математике особенно актуальным является показ ее практического значения при решении проблемных ситуаций, встречающихся в жизни.

В ФГОС ООО указано, что предметные результаты освоения основной образовательной программы должны обеспечивать «развитие умений применять изученные понятия, методы для решения задач практического характера …» [65], так же наличием практической составляющей обусловлено содержание контрольных измерительных материалов Государственной итоговой аттестации, в частности ОГЭ по математике.

Всё вышеизложенное отражается в сборнике рабочих программ по алгебре автора Т.А. Бурмистровой [11].

В разделе «Планируемые результаты изучения курса алгебры в 7-9 классах» выделены следующие результаты изучения темы «Числовые последовательности»:

«выпускник научится:

1) понимать и использовать язык последовательностей (термины, символические обозначения);

2) применять формулы, связанные с арифметической и геометрической прогрессиями, и аппарат, сформированный при изучении других разделов курса, к решению задач, в том числе с контекстом из реальной жизни.

Выпускник получит возможность научиться:

3) решать комбинированные задачи с применением формул n-го члена и суммы первых n членов арифметической и геометрической прогрессий, применяя при этом аппарат уравнений и неравенств;

4) понимать арифметическую и геометрическую прогрессии как функции натурального аргумента; связывать арифметическую прогрессию с линейным ростом, геометрическую – с экспоненциальным ростом» [11, с. 16].

Таким образом, выделим следующие цели обучения теме «Последовательности и прогрессии»:

– *образовательная*: сформировать умения и навыки применения теоретических знаний по теме для решения задач, в том числе и прикладных;

– *развивающие:* развить умения самостоятельной работы, формировать интерес к решению задач;

– *воспитательные:* формировать ответственность, внимательность, умение анализировать; воспитать настойчивость и дисциплинированность.

2.2 Проектирование содержания темы «Арифметическая и геометрическая прогрессии» в рамках технологии В.М. Монахова

Теоретические аспекты технологии проектирования учебного процесса В.М. Монахова рассмотрены во втором параграфе диссертации. Отметим ещё раз, что данная технология имеет определенную структуру, должна содержать строгое количество уроков и микроцелей. Она должна быть составлена на основе действующей программы и соответствовать планируемым результатам обучение темы.

На подготовительном этапе разработки проектирования содержания темы «Арифметическая и геометрическая прогрессии» были изучены основные нормативные документы, проведён анализ содержания темы в действующих учебниках алгебры.

В учебниках алгебры разных авторов объем материала по теме «Последовательности и прогрессии» и его содержание имеют отличия. При этом прослеживается схожая структура построения программы.

Приведем анализ изложения теоретического материала по теме «Последовательности и прогрессии» в различных учебниках алгебры 9 класса.

Для анализа мы рассмотрим учебники из федерального перечня учебников, рекомендованных к использованию при реализации программ общего образования. Результаты анализа представлены в таблице 3.

Во всех учебниках изложения темы «Последовательности и прогрессии» начинается с рассмотрения следующих понятий: числовая последовательность, общий член последовательности.

Само понятие последовательности раскрывается на конкретных примерах. Так, например, в учебниках Г.В. Дорофеева [13], Ю.М. Колягина [17] и А.Г. Мерзляка [28] наглядно, на примере старинной задачи Л. Фибоначчи про размножение кроликов, демонстрируется возникновение последовательности чисел.

Таблица 3 − Анализ теоретического содержания темы «Последовательности и прогрессии» в учебниках 9 класса

Авторы учебников	**Содержание материала по теме «Последовательности и прогрессии»**
Ю.М. Колягин, М.В. Ткачёва, Н.Е. Фёдорова, М.И. Шабунин	«Числовая последовательность. Арифметическая прогрессия. Сумма первых *n* членов арифметической прогрессии. Геометрическая прогрессия. Сумма первых *n* членов геометрической прогрессии» [14].
С.М. Никольский, М.К. Потапов, Н.Н. Решетников, А.В. Шевкин	Понятие числовой последовательности. Свойства числовых последовательностей. Понятие арифметической прогрессии. Сумма первых п членов арифметической прогрессии. Понятие геометрической прогрессии. Сумма первых п членов геометрической прогрессии. Бесконечно убывающая геометрическая прогрессия. Метод математической индукции. Исторические сведения» [33].
Ю.Н. Макарычев, Н.Г. Миндюк, К.И. Нешкова, С.Б. Суворова	«Последовательности. Определение арифметической прогрессии. Формула *n*-го члена арифметической прогрессии. Формула суммы первых п членов арифметической прогрессии. Определение геометрической прогрессии. Формула *n*-го члена геометрической прогрессии. Формула суммы первых *n* членов геометрической прогрессии. Метод математической индукции» [21].
А.Г. Мордкович, П.В. Семенов	«Числовые последовательности. Арифметическая прогрессия. Геометрическая прогрессия» [32].
Г.В. Дорофеев, С.Б. Суворова, Е.А. Бунимович, Л.В. Кузнецова, С.С. Минаева	«Числовые последовательности. Арифметическая прогрессия. Сумма первых п членов арифметической прогрессии. Геометрическая прогрессия. Сумма первых п членов геометрической прогрессии. Простые и сложные проценты. Сумма квадратов первых п натуральных чисел. Треугольник Паскаля» [13].
А.Г. Мерзляк, В.Б. Полонский, М.С. Якир	«Числовые последовательности. Арифметическая прогрессия. Сумма *n* первых членов арифметической прогрессии. Геометрическая прогрессия» [28].

Рассмотрим более подробное содержание материала по теме «Последовательности и прогрессии» в учебнике «Алгебра. 9 класс» Ю.М. Колягина [17]. В §11 «Числовая последовательность», помимо понятия числовой последовательности, автор рассматривает способы задания числовой последовательности, изображение членов последовательности точками на координатной плоскости [17].

В следующем параграфе (§18 Арифметическая прогрессия), уже непосредственно вводится определение арифметической прогрессии и её разности, приводится ряд примеров арифметической прогрессии. В этом же параграфе рассматривается свойство каждого члена арифметической прогрессии, начиная со второго (характеристическое свойство), а так же, исходя из рекуррентного способа задания арифметической прогрессии, выводится формула n-го члена арифметической прогрессии [17].

Завершением изучения арифметической прогрессии служит §19 «Сумма n первых членов арифметической прогрессии» [4]. Здесь приводится соответствующая теорема и её доказательство, а также задачи с подробным решением на применение формулы суммы первых n членов арифметической прогрессии.

Следующие два параграфа посвящены геометрической прогрессии. Построение изложения материала такое же, как и в параграфе об арифметической прогрессии. Сразу даются определения геометрической прогрессии, знаменателя геометрической прогрессии, приведено свойство каждого члена геометрической прогрессии, формула n-го члена геометрической прогрессии и формула сложных процентов [17]. Затем на основе определения выводятся формулы n-го члена геометрической прогрессии и суммы членов конечной геометрической прогрессии, а в конце –рассматривается «характеристическое свойство геометрической прогрессии».

После каждого параграфа идут задачи на закрепление и отработку навыков, а в конце главы вопросы для самопроверки и упражнения ко всей главе.

По итогам изучения главы «Прогрессии» выводятся основные результаты: учащиеся изучили, что такое:

– «числовая последовательность;

– способы задания последовательности;

– арифметическая прогрессия;

– формула n-го члена арифметической прогрессии;

– сумма первых п членов арифметической прогрессии;

– свойство членов арифметической прогрессии;

– геометрическая прогрессия;

– формула n-го члена геометрической прогрессии;

– формула суммы первых n членов геометрической прогрессии;

– свойство членов геометрической прогрессии» [17, с. 115].

При этом, в результате изучения темы, учащиеся должны знать, как:

– «находить члены последовательности, заданной с помощью формулы n-го члена; рекуррентным способом;

– изображать члены последовательности на числовой оси; на координатной плоскости;

– находить n-й член арифметической прогрессии; геометрической прогрессии;

– находить сумму первых л членов арифметической прогрессии; геометрической прогрессии» [17, с. 115].

Как отмечалось, во всех учебниках авторы придерживаются одной структуры выстраивания параграфов и пунктов по указанной теме. Однако более подробно содержание темы «Последовательности и прогрессии» рассмотрено в учебниках А.Г. Мордковича [32] и Г.В. Дорофеева [13].

Так, А.Г. Мордкович включает в тему разные виды заданий последовательностей, такие как аналитическое, словесное, рекуррентное, причём на каждое задание последовательности выделяется отдельный пункт. В учебнике выделен пункт «прогрессии и банковские расчёты» [32]. Г.В. Дорофеев включает в тему понятие треугольника Паскаля и формулы бинома Ньютона [13]. В каждом учебнике данной теме уделяется отдельная глава.

Дополнительный материал прослеживается и в учебнике Ю.Н. Макарычева [25]. В качестве дополнения к теме «Последовательности и прогрессии» в учебнике рассматривается метод математической индукции для доказательства того, что некоторая последовательность может быть задана соответствующей формулой [25]. В остальном авторы учебников придерживаются одной структуры выстраивания параграфов и их содержания.

Теперь обратимся к содержанию задачного материала по теме «Последовательности и прогрессии».

Следует отметить, что учебный комплект А. Г. Мордковича [32] по алгебре для 9 класса разделен на две части - учебник и задачник. В учебниках Г.В. Дорофеева [13], Ю.М. Колягина [17] и А.Г. Мерзляка [28], Ю. Н. Макарычева [25] подборка задач располагается сразу после изложения теоретического материала в параграфах. Во всех учебниках указанных авторов весь задачный материал предоставлен согласно тому же логико-математическому изложению, что и теория.

В результате анализа задачного материала в учебниках алгебры 9 класса можно выделить следующие основные типы задач по теме «Последовательности и прогрессии»:

1. Задачи на понимание понятия член последовательности.

2. Задачи на нахождение члена последовательности и его номера.

3. Задачи на изображение членов последовательности.

4. Задачи на доказательство того, что последовательность является арифметической прогрессией.

5. Нахождение члена арифметической прогрессии, разности и номера члена прогрессии.

6. Задачи на составление формулы n-го члена арифметической прогрессии.

7. Нахождение суммы n первых членов арифметической прогрессии.

8. Нахождение члена геометрической прогрессии, знаменателя и номера члена прогрессии.

9. Задачи на доказательство того, что последовательность является геометрической прогрессией.

10. Задачи на составление формулы n-го члена геометрической прогрессии.

11. Нахождение суммы n первых членов геометрической прогрессии.

Рассмотрим на примере учебника Ю.М. Колягина [17] различные типы задач с решениями.

1. Задачи на нахождение члена последовательности и его номера.

Задача 1.

«Вычислить первые пять членов последовательности, которая задана формулой n-го члена: $a_n = 2n + 3$» [14, с. 81].

Решение: $a_1 = 2 \cdot 1 + 3 = 5, a_2 = 2 \cdot 2 + 3 = 7, a_3 = 2 \cdot 3 + 3 = 9,$ $a_4 = 2 \cdot 4 + 3 = 11,\ a_5 = 2 \cdot 5 + 3 = 13.$

Ответ: $a_1 = 5, a_2 = 7, a_3 = 9, a_4 = 11,\ a_5 = 13.$

Задача 2.

«Последовательность задана формулой $a_n = n^2 - 2n - 6$. Является ли членом этой последовательности число -3?» [14, с. 82].

Решение:

пусть $a_n = -3,$ тогда $-3 = n^2 - 2n - 6,$ откуда

$n^2 - 2n - 3 = 0$

$D = 4 - 4 \cdot 1 \cdot (-3) = 16$

$n_1 = \frac{2+4}{2} = 3; \quad n_2 = \frac{2-4}{2} = -1.$

Значение -1 не подходит, так как номер n число натуральное.

Ответ: да является, при $n = 3$.

2. Задачи на доказательство того, что последовательность является арифметической прогрессией.

Задача 3.

«Доказать, что последовательность, заданная формулой л-го члена, является арифметической прогрессией $a_n = 3 - 4n$» [17, с. 88].

Доказательство:

$a_n = 3 - 4n,$ тогда $a_{n+\mathbf{1}} = 3 - 4(n + 1) = 3 - 4n - 4 = -1 - 4n$

Найдём разность $d = a_{n+1} - a_n = -1 - 4n - (3 - 4n) =$

$= -1 - 4n - 3 + 4n = -4$ - не зависит от n.

Значит $a_n = 3 - 4n$ является арифметической прогрессией.

Что и требовалось доказать.

3. Нахождение члена арифметической прогрессии, разности и номера члена прогрессии.

Задача 4.

«Найти разность арифметической прогрессии, если $a_1 = 7, a_{16} = 67$» [17, с. 88].

Решение:

$a_n = a_1 + d(n - 1);$

$a_{16} = a_1 + d(16 - 1);$

$67 = 7 + 15d;$

$d = \frac{67-7}{15} = \frac{60}{15} = 4.$

Ответ: 4.

4. Задачи на составление формулы n-го члена арифметической прогрессии.

Задача 5.

«Записать формулу n-го члена арифметической прогрессии: 1, 6, 11, 16» [17, с. 88].

Решение:

$a_1 = 1, a_2 = 6;$

$d = a_2 - a_1 = 6 - 1 = 5;$

$a_n = a_1 + d(n - 1);$

$a_n = 1 + 5(n - 1) = 1 + 5n - 5 = -4 + 5n.$

Ответ: $a_n = -4 + 5n.$

5. Нахождение суммы n первых членов арифметической прогрессии

Задача 6.

«Найти сумму первых n членов арифметической прогрессии, если: $a_1 = 1, a_n = 20, n = 50$» [14, с. 93].

Решение:

Для вычисления S_{50} примени формулу:

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2}.$$

Тогда

$$S_{50} = \frac{(1 + 20) \cdot 50}{2} = 21 \cdot 25 = 525.$$

Ответ: $S_{50} = 525.$

6. Нахождение члена геометрической прогрессии, знаменателя и номера члена прогрессии.

Задача 7.

«Найти знаменатель геометрической прогрессии, если $b_1 = 2, b_5 = 162$» [17, с. 102].

Решение:

$b_n = b_1 q^{n-1};$

$b_5 = b_1 q^{5-1};$

$162 = 2q^4;$

$81 = q^4;$

$q = 3.$

Ответ: $q = 3$.

Задача 8.

«Найти номер подчёркнутого члена геометрической прогрессии $-1, 2, -4, 8, \dots, 128, \dots$» [17, с. 102].

Решение:

Последовательность $-1, 2, -4, 8, \dots, 128, \dots$ является геометрической прогрессией.

Имеем $b_n = b_1 q^{n-1}$.

$b_1 = -1, b_2 = 2.$ Тогда $q = \frac{b_2}{b_1} = \frac{2}{-1} = -2$.

$b_n = 128$, значит, $128 = -1 \cdot (-2)^{n-1}$;

$-128 = (-2)^{n-1}$;

$(-2)^7 = (-2)^{n-1}$;

$7 = n - 1$;

$n = 8$.

Ответ: $n = 8$.

7. Задачи на доказательство того, что последовательность является геометрической прогрессией.

Задача 9.

«Доказать, что последовательность, заданная формулой n-го члена, является геометрической прогрессией $b_n = 3 \cdot 2^n$» [17, с. 101].

Доказательство:

$$b_n = 3 \cdot 2^n.$$

$$\text{Тогда } b_{n+1} = 3 \cdot 2^{n+1}.$$

$q = \frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{\mathbf{3 \cdot 2^{n+1}}}{\mathbf{3 \cdot 2^n}} = 2$, данное значение не зависит от n, значит, последовательность заданная формулой $b_n = 3 \cdot 2^n$ является геометрической прогрессией.

Что и требовалось доказать.

8. Задачи на составление формулы n-го члена геометрической прогрессии.

Задача 10.

«Записать формулу *n*-го члена геометрической прогрессии: 4, 12, 36, …» [17, с. 102].

Решение:

Последовательность 4, 12, 36, … является геометрической последовательностью.

Значит $b_1 = 4, b_2 = 12$. Откуда $q = \frac{b_2}{b_1} = \frac{12}{4} = 3$.

В общем виде геометрическая прогрессия имеет вид $b_n = b_1 q^{n-1}$.

Значит для нашей прогрессии $b_n = 4 \cdot 3^{n-1}$ – формула *n*-го члена.

Ответ: $b_n = 4 \cdot 3^{n-1}$.

9. Нахождение суммы *n* первых членов геометрической прогрессии

Задача 11.

«Найти сумму первых семи членов геометрической прогрессии 5, 10, 20, …» [17, с. 108].

Решение:

Последовательность 5, 10, 20, … является геометрической прогрессией, значит $b_1 = 5, b_2 = 10$.

$$\text{Значит}, q = \frac{b_2}{b_1} = \frac{10}{2} = 2.$$

$b_n = b_1 q^{n-1}$, откуда $b_7 = 5 \cdot 2^{7-1} = 5 \cdot 2^6 = 5 \cdot 64 = 320$.

В общем виде $S_n = \frac{b_1(1-q^n)}{1-q}$.

$S_7 = \frac{5(1-2^7)}{1-2} = -5(1-128) = 5 \cdot 127 = 635$.

Ответ $:S_7 = 635$.

Содержание заданий из учебника Ю.М. Колягина в соответствии с основными типами задач приведено в таблице 4.

Таблица 4 − Основные типы задач по теме «Последовательности и прогрессии» в учебнике Ю.М. Колягина

Тип задачи	Обязательные упражнения	Дополнительные, более сложные упражнения	Трудные упражнения
Числовая последовательность			
1. Задачи на нахождение члена последовательности и его номера	163, 164, 165, 166, 233, 234, 235,	168, 169, 170, 247	171, 172
Арифметическая прогрессия			
2. Задачи на доказательство того, что последовательность является арифметической прогрессией	175, 237,		
3. Нахождение члена арифметической прогрессии, разности и номера члена прогрессии	173, 174, 176, 178, 179, 180, 181, 182, 183, 236, 238	187, 202, 203, 248, 249, 250, 251, 252, 254	206, 260, 261
4. Задачи на составление формулы n-го члена арифметической прогрессии	177, 184		
5. Нахождение суммы n первых членов арифметической прогрессии	192-198, 239, 240, 241	199-201	205
Геометрическая прогрессия			
6. Нахождение члена геометрической прогрессии, знаменателя и номера члена прогрессии	208, 209, 211, 213, 214, 224, 225, 226, 242, 244	215, 216, 217, 228, 255, 256, 257	221, 231, 232, 262, 263
7. Задачи на доказательство того, что последовательность является геометрической прогрессией	210		
8. Задачи на составление формулы n-го члена геометрической прогрессии	212, 243		
9. Нахождение суммы n первых членов геометрической прогрессии	222, 223, 227, 245, 246	228, 229	232

Помимо основных типов задач по теме, в учебниках встречаются так же и другие типы задач:

1. Упражнения на применение метода математической индукции [37].

2. Практические задачи на применение арифметической и геометрической прогрессии [13, 33, 28].

3. Задачи на простые и сложные проценты [13, 37, 32].

4. Задачи на комбинацию геометрической и арифметической прогрессии [37, 28].

5. Исследовать последовательность на сходимость, на монотонность, ограниченность [37].

6. Задачи на нахождение количества членов последовательности [13].

Разработка проекта учебного процесса при изучении темы должна содержать карту-проект учебного процесса, технологическую карту учебной темы (ТК) и информационную карту урока (ИКУ).

Остановимся подробнее на первых двух составляющих. Приведём пример карты-проекта учебного процесса для изучения темы «Арифметическая и геометрическая прогрессии» в курсе алгебры 9 класса (Таблица 5).

Данная разработка рассчитана на 15 часов и включает 4 микроцели.

Таблица 5 − Карта-проект по теме Арифметическая и геометрическая прогрессии» для 9 класса

Учебный период	**Тема**	**Микроцели**
15 ч	Арифметическая и геометрическая прогрессии	Ц1. Знать определение и основные свойства арифметической прогрессии; уметь решать задачи используя определения и формулу n-го члена арифметической прогрессии.
		Ц2. Знать формулу суммы nпервый членов арифметической прогрессии; уметь применять формулу суммы n первых членов арифметической прогрессии при решении задач.
		Ц3. Знать определение и основные свойства геометрической прогрессии; уметь решать задачи используя определения и формулу n-го члена геометрической прогрессии.
		Ц4. Знать формулу суммы nпервый членов геометрической прогрессии; уметь применять формулу суммы n первых членов геометрической прогрессии при решении задач.

Следующий этап заключается в построении технологической карты (ТК). Она состоит из следующих блоков: целеполагание, диагностика, коррекция, дозирование домашней работы.

Блок «Целеполагание» включает те микроцели, которые указаны в карте-проекте.

Блок «Диагностика» состоит из диагностических заданий для каждой микроцели. Причём для каждой микроцели приведены 4 задания, соответствующие уровню сложности. Задания 1 и 2 соответствуют минимальному уровню подготовки учащихся, и соответствует отметке «удовлетворительно» (уровень «стандарт»). Задание 3 соответствует отметке «хорошо» и является сложнее двух предыдущих заданий. Четвёртое задание оценивается на отметку «отлично».

Блок «Дозирование домашней работы» содержит систему упражнений для домашней работы учащихся, соответствующую каждой микроцели. Он разделен на три уровня сложности: «стандарт» включает задания, которые позволят успешно подготовиться к решению заданий 1 и 2 из блока «Целеполагание»; «хорошо» - к заданию 3; «отлично» - к заданию 4.

Блок «Коррекция» состоит из следующих разделов: «затруднения, типичные ошибки, система мер педагогического и методического характера для устранения ошибок» [4, с. 119].

Учащимся, в рамках изучения темы «Арифметическая и геометрическая прогрессии», помимо заданий, представленных в качестве подготовки к промежуточной диагностике, будет предложен список задач практического характера, встречающие на государственной итоговой аттестации. Данная система задач будет описана и представлена в параграфе 4.

Итак, можно сделать вывод о том, что использование карты-проектов и Технологической карты темы позволяет учителю организовать планирование учащимися собственной деятельности, достижение планируемых результатов изучения темы; коррекцию деятельности.

Технологическая карта по теме Арифметическая и геометрическая прогрессии» представлена в таблице 6.

Таблица 6 − Технологическая карта по теме Арифметическая и геометрическая прогрессии» для 9 класса по учебнику Ю.М. Колягина

Технологическая карта	**Тема: «Арифметическая и геометрическая прогрессии»**	© В.М. Монахов Класс: 9 Предмет: Алгебра Учебник: «Алгебра -9» Ю.М. Колягин Учитель: И.Н. Морозов

Логическая структура
Учебного процесса

Ц1				Д1	Ц2		Д2	Ц3			Д3	Ц4		Д4
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15

Целеполагание (микроцель)	**Диагностика (пример самостоятельной работы)**	**Коррекция**
Ц1 знать определение и основные свойства арифметической прогрессии; уметь решать задачи используя определения и формулу n-го члена арифметической прогрессии.	Д1 1.Зная первые члены арифметической прогрессии 6; 7,5; ..., найдите следующие за ними четыре члена. 2. В арифметической прогрессии (a_n)известны первый член и разность прогрессии: $a_1 = -3{,}6, d = 3$. Найдите: а) a_4;б) a_{30}. 3. Записать формулу n-го члена арифметической прогрессии $5; 5\frac{1}{2}; 6; 6\frac{1}{2}; ....$ 4. Записать формулу n-го члена арифметической прогрессии, если $a_3 = 28, a_6 = 43$.	Будьте внимательны с принятой символикой, повторите определение арифметической прогрессии, разности арифметической прогрессии, член прогрессии.
Ц2 знать формулу суммы nпервый членов арифметической прогрессии; уметь применять формулу суммы n первых членов арифметической прогрессии при решении задач.	Д2 1.Найти сумму n первых членов арифметической прогрессии, если: $a_1 = 3; a_n = 47, n = 10$. 2. Найти сумму n первых членов арифметической прогрессии, если: $-3; 4; 11; ...$, если $n = 13$. 3. Найти сумму первых шестнадцати членов арифметической прогрессии, если: $a_1 = 10, a_3 = 64$. 4. Найти сумму первых десяти членов арифметической прогрессии, если$a_4 + a_7 = 23$.	Не забывайте формулу n-го члена арифметической прогрессии, способ вычисления разности прогрессии по известным членам.

Продолжение таблицы 6

Ц3 знать определение и основные свойства геометрической прогрессии; уметь решать задачи используя определения и формулу n-го члена геометрической прогрессии.		Д3 1.Записать первые четыре члена геометрической прогрессии, если а) $b_1 = 7, q = 2$; б) $b_1 = 8, q = \frac{1}{2}$. 2. Найти n-й член геометрической прогрессии, если: $$b_1 = \frac{1}{5}, q = -2, n = 6$$ 3. Записать формулу n-го члена геометрической прогрессии $3; \frac{3}{2}; \frac{3}{4};$ .... 4. Найти первый член и знаменатель геометрической прогрессии, если: $b_1 + b_2 + b_3 = 10{,}5$ и $b_1 - b_4 = 31{,}5$.	Будьте внимательны с принятой символикой, повторите определение геометрической прогрессии, знаменателя геометрической прогрессии, член прогрессии.
Ц4 знать формулу суммы nпервый членов геометрической прогрессии; уметь применять формулу суммы n первых членов геометрической прогрессии при решении задач.		Д4 1.Найти сумму n первых членов геометрической прогрессии, если: $b_1 = 10; q = -\frac{1}{5}, n = 4$. 2. Найти сумму n первых членов геометрической прогрессии, если: $\frac{3}{5}; 3; 15;$ ..., если $n = 4$. 3. Найти сумму первых пяти членов геометрической прогрессии, если: $b_2 = 6, b_5 = 162$. 4. Найти сумму первых пяти членов геометрической прогрессии, если$S_3 = 52, q = \frac{1}{3}$.	Не забывайте формулу n-го члена геометрической прогрессии, способ вычисления знаменателя прогрессии по известным членам.
Дозирование домашней работы			
	«удовлетворительно»	«хорошо»	«отлично»
ДР1	№ 173-175	№ 181, 182	№ 183, 184
ДР2	№ 192, 240	№ 195, 196	№ 202, 203
ДР 3	№ 212, 242	№ 213, 243	№ 215, 244
ДР 4	№ 222	№ 223, 225	№ 229

2.3 Элективный курс «Задачи на прогрессии» как дополнение содержания базового уровняв 9 классах

Пояснительная записка

Программа элективного курса «Задачи на прогрессии» предназначена для учащихся 9 класса. Она направлена на углубление, обобщение знаний и умений обучающихся по теме «Последовательности и прогрессии», изучаемой в 9 класса на базовом уровне.

Программа элективного курса рассчитана на 17 академических часов (1 урок в неделю).

Содержание программы элективного курса построено таким образом, что учащиеся углубляют базовые знания, полученные на уроках алгебры, формируют умения решать задачи повышенной сложности, необходимые для сдачи ОГЭ и последующего изучения курса алгебры и начал математического анализа, сдачи ЕГЭ в 11 классе.

Цель: закрепление теоретических знаний по теме «Последовательности и прогрессии», выработка навыков и умений обучающихся при решении практических задач по теме.

Задачи курса:

– повторить и систематизировать знания о последовательностях и прогрессиях;

– рассмотреть различные типы задач на арифметическую и геометрическую прогрессии;

– рассмотреть задачи с практическим содержанием на вычисление и доказательства по теме;

– повысить уровень вычислительной культуры обучающихся.

Форма занятий:

Занятия курса организуются в нескольких формах:

– индивидуальной;

– групповой;

– фронтальной.

Особенности организации учебных занятий:

– в ходе прохождения программы курса проводятся устные опросы на знание основных определений, связанных с понятиями последовательности и прогрессии; основных формул по теме «Арифметическая и геометрическая прогрессии».

– в ходе курса учащимся предлагаются задачи различного уровня сложности. В частности, задачи с практическим содержанием;

– содержание программы нацелено на последовательное изучение тем, от простого к сложному.

Виды занятий:

– урок-лекция;

– урок-практикум;

– урок-семинар;

– итоговая контрольная работа.

Ожидаемые результаты прохождения программы элективного курса.

В результате изучения программы данного элективного курса учащиеся должны:

– знать исторические аспекты возникновения понятий последовательности и прогрессии;

– знать и уметь определять какие прогрессии называются арифметическими и геометрическими;

– уметь записывать краткое условие и решение задачи с помощью аппарата алгебры, на основе обозначений, которые приняты при изучении арифметической и геометрической прогрессий;

– знать свойства арифметической и геометрической прогрессий, формулы n-го члена и суммы n первых членов арифметической и геометрической прогрессий;

– знать методы решения задач на прогрессии;

– уметь решать задачи на вычисления и доказательства по теме «Последовательности и прогрессии» при решении задач геометрической и практической направленности;

– уметь приводить примеры последовательностей в различных областях знаний;

– применять знания по теме в практической деятельности и повседневной жизни.

Освоение элективного курса заканчивается итоговой контрольной работой и защитой учащимися своих творческих работ (проектов).

В данной программе представлены образцы контрольно-измерительных материалов ОГЭ 2021.

Проверкой усвоения программы она может считаться усвоенной учеником, если в каждой проверочной работе он решил не менее 50% предложенных задач. Учитель и ученик могут составить «таблицу успешности», куда заносятся результаты выполнения проверочных работ. Причем необходимо учитывать не только те задания, которые были правильно решены полностью, но и те, в которых школьник, верно усмотрел путь решения. Особо отмечаются оригинальные способы решения.

Вводное занятие (1 час). На первом занятии учащимся сообщаются цель, задачи элективного курса, примерное содержание курса (таблица 7), требования к итоговому отчету и итоговой аттестации. Проводится тестирование на определения уровня подготовленности к изучению курса с последующей проверкой.

Модуль 1. Понятия арифметической и геометрической прогрессий (4 часов). На занятиях данного модуля повторяются и систематизируются знания учащихся по теме «Арифметическая и геометрическая прогрессии», рассматриваются истерические аспекты, старинные задачи, связанные с прогрессиями.

Таблица 7 − Учебно-тематическое планирование элективного курса

№	Содержание темы	Кол-во часов
	Вводный урок	**1**
I.	**Понятия арифметической и геометрической прогрессий**	**4**
1	Исторические аспекты темы «Последовательности и прогрессии».	1
2	Исторические задачи на прогрессии	2
3	Связь арифметической и геометрической прогрессий	1
II	**Геометрические и нестандартные задачи на прогрессии**	**4**
1	Задачи по геометрии на применение формул прогрессий	2
2	Нестандартные задачи олимпиадного характера	2
III.	**Прогрессии в материалах ОГЭ и ЕГЭ**	**8**
1	Практические задачи на прогрессии в КИМах ОГЭ (проект 2021)	3
2	Применение прогрессий в задачах экономического содержания ЕГЭ	3
3	Итоговая контрольная работы	1
4	Анализ итоговой работы. Защита творческих работ	1

Модуль 2. Геометрические и нестандартные задачи на прогрессии (4 часа). Данный модуль посвящен рассмотрению различных нестандартных и геометрических задач на прогрессии и определению основных подходов к решению задач повышенной трудности и задач олимпиадного характера.

Модуль 3. Прогрессии в материалах ОГЭ и ЕГЭ (8 часов). В данном модуле разбираются задания на прогрессии, содержащиеся в КИМах ОГЭ и ЕГЭ. Данная тема должна помочь учащимся адекватно оценить собственные знания и умения.

На итоговых занятиях элективного курса (2 часа) учащимся для проверки усвоения знаний предлагается проверочная работа. Заключительным этапом является защита творческих работ, содержащих самостоятельно сконструированные задачи по различным темам изучаемого элективного курса.

Рассмотрим в качестве примера структуру и содержание занятий 10 – 12 по теме «Практические задачи на прогрессии в КИМах ОГЭ».

Основная цель данных занятий – рассмотреть основные типы задач КИМов ОГЭ 2021 на арифметическую и геометрическую прогрессии и научиться их решать.

План занятия 10. На 10 занятии учащимся предлагается рассмотреть различные типы практических задач ОГЭ на применение определения и формул арифметической прогрессии.

Для обсуждения предлагаются следующие вопросы:

1. Зная первый член арифметической прогрессии и разность прогрессии, как найти восьмой член прогрессии?
2. Как вычислить 10-ый член арифметической прогрессии, зная первый и второй члены?
3. Зная 7-ой член арифметической прогрессии и разность, как найти первый член прогрессии?
4. Зная два не соседних члена прогрессии, как найти разность?
5. Как вычислить сумму 25-ти членов прогрессии по её первому члену и разности?

Примеры задач с решением.

Задача 1. В процессе погашения кредита последовательность долгов Алексея в тысячах рублей за каждый месяц образует арифметическую прогрессию 163; 159; … . Найдите величину долга в девятом месяце. Ответ дайте в тысячах рублей.

Решение: Первый член прогрессии $a_1 = 163$; из определения арифметической прогрессии следует, что $d = 159 - 163 = -4$.

Тогда $a_9 = a_1 + (9-1)d = 163 + 8\cdot(-4) = 131$

Ответ: 131.

Задача 2. При проведении физического эксперимента последовательность температур (в °С), измеряемых каждый час, образует арифметическую прогрессию -90; -77;… . Найдите температуру при шестом измерении. Ответ дать в °С.

Решение: Первый член прогрессии $a_1 = -90$; из определения арифметической прогрессии следует, что $d = -77 - (-90) = 13$.

Тогда $a_6 = a_1 + (6-1)d = -90 + 5{\cdot}13 = -25$

Ответ: - 25.

Задача 3. Для постройки дома нужно вынуть 4380 куб. м грунта в установленный срок. В первый день строители вынули 90 куб. м, а в каждый последующий день вынимали на 50 куб. м больше, чем в предыдущий день. Определите, сколько кубометров грунта они вынули за седьмой день.

Решение: Первый член прогрессии $a_1 = 90$; по определению арифметической прогрессии получаем, что $d = 50$.

Тогда $a_7 = a_1 + (7-1)d = 90 + 6{\cdot}50 = 390$.

Ответ: 390.

Задача 4. На пришкольном участке юные биологи высаживают 750 кустов роз. В первый день дети высадили 15 кустов роз. Каждый последующий день они высаживали на 5 кустов больше, чем в предыдущий день. Сколько роз высажено юными биологами на пятый день?

Решение: Первый член прогрессии $a_1 = 15$; по определению арифметической прогрессии получаем, что $d = 5$.

Тогда $a_5 = a_1 + (5-1)d = 15 + 4{\cdot}5 = 35$.

Ответ: 35.

Задача 5. Турист, поднимаясь в гору, за пятый час поднялся на 60 м. Найдите, на сколько метров он поднялся за первый час, если за каждый последующий за ним час он поднимался на 40 м меньше, чем за предыдущий.

Решение: По условию задачи $a_5 = 60, d = -40$. Запишем равенство:

$$a_5 = a_1 + (5-1)d;\ 60 = a_1 + 4(-40); 60 = a_1 - 160;$$

$a_1 = 60 + 160\ = 220$.

Ответ: 220.

Задача 6. На хлебопекарне за шестой день месяца израсходовали 13 мешков муки. Найдите, сколько мешков муки израсходовали за первый день месяца, если за каждый последующий за ним день расходовали на 2 мешка муки больше, чем за предыдущий.

Решение: По условию задачи $a_6 = 13, d = 2$. Запишем равенство:

$$a_6 = a_1 + (6-1)d;\ 13 = a_1 + 5 \cdot 2; 13 = a_1 + 10;\ a_1 = 13 - 10\ = 3$$

Ответ: 3.

Задача 7. За первый час рабочий зарабатывает 100 рублей, а за каждый последующий за ним час на одно и то же число рублей больше, чем за предыдущий час. Найдите, сколько рублей зарабатывает рабочий за шестой час, если за 8 часов он зарабатывает 1360 рублей.

Решение: Первый член прогрессии $a_1 = 100$; так как за 8 часов рабочий заработал 1360 рублей, то по формуле суммы восьми членов прогрессии имеем:

$$S_8 = \frac{a_1 + a_8}{2} \cdot 8 = \frac{100 + 100 + \cdot 7d}{2} \cdot 8.$$

Тогда

$$\frac{100 + 100 + \cdot 7d}{2} \cdot 8 = 1360; (200 + 7d) \cdot 4 = 1360; 28d = 1360 - 800 = 20;$$

$$a_6 = a_1 + (6-1)d = 100 + 5 \cdot 20 = 200$$

Ответ: 200.

Задача 8. За первый час каменщик укладывает 115 кирпичей, а за последующий за ним час на одно и то же число кирпичей меньше, чем за предыдущий час. Найдите, сколько кирпичей укладывает каменщик за пятый час, если за 6 часов он укладывает 465 кирпичей.

Решение: Первый член прогрессии $a_1 = 115$; так как за 6 часов каменщик уложил 465 кирпичей, то по формуле суммы шести членов прогрессии имеем:

$$S_6 = \frac{a_1 + a_6}{2} \cdot 6 = \frac{115 + 115 + \cdot 5d}{2} \cdot 6.$$

Тогда

$$\frac{115+115+5d}{2}\cdot 6 = 465; (230+5d)\cdot 3 = 465; 15d = 465-690 = -225;$$

$$d = -15; a_5 = a_1 + (5-1)d = 115 + 4\cdot(-15) = 55$$

Ответ: 55.

Задача 9. На тренировках футбольной команды в течение 16 дней нападающий Андрей отрабатывал удары пенальти. Каждый день количество забитых им пенальти увеличивалось на одно и то же число. В первый день он забил 3 пенальти, а всего за 16 дней – 168. Сколько раз Андрей забил пенальти в 16-ый день отработки ударов?

Решение: Первый член прогрессии $a_1 = 3$; так как за 16 дней Андрей забил 168 пенальти, то по формуле суммы шестнадцати членов прогрессии имеем:

$S_{16} = \frac{a_1+a_{16}}{2}\cdot 16 = \frac{3+a_{16}}{2}\cdot 16.$

Тогда

$$(3+a_{16})\cdot 8 = 168;\ 3+a_{16} = 21; a_{16} = 21-3 = 18;$$

Ответ: 55.

Задача 10. На тренировках футбольной команды в течение 18 дней нападающий Валерий отрабатывал удары пенальти. Каждый день количество забитых им пенальти увеличивалось на одно и то же число. В первый день он забил 2 пенальти, а всего за. 18 дней – 342. Сколько раз Валерий забил пенальти в 18-ый день отработки ударов?

Решение: Первый член прогрессии $a_1 = 2$; так как за 18 дней Валерий забил 342 пенальти, то по формуле суммы восемнадцати членов прогрессии имеем:

$S_{18} = \frac{a_1+a_{18}}{2}\cdot 18 = \frac{2+a_{18}}{2}\cdot 18.$

Тогда

$(2+a_{18})\cdot 9 = 342;\ 2+a_{18} = 38; a_{18} = 38-2 = 36.$

Ответ: 36.

Задача 11. Информация зашифрована в виде последовательности чисел, в которой разность между последующим числом и предыдущим постоянна. Четвертое и пятое число хорошо видны и равны соответственно -24 и -37, а третье видно неотчетливо. Найдите третье число в этой шифровке.

Решение: Известно, что $a_4 = -24, a_5 = -37$.Составим уравнения:

$$-24 = a_1 + 3d, -37 = a_1 + 4d$$

Вычтем из второго уравнения первое, получим: $d = -13$

Подставим значение d в первое уравнение и найдем, что $a_1 = -24 - 3d = 15$

Вычислим $a_3 = a_1 + 2d = 15 - 26 = -11.$

Ответ: -11.

Задача 12. При восстановлении после травмы спортсмен Алексей пробегал каждый день на одно и то же число метров больше, чем в предыдущий день. На 4-ый день он пробежал 1850 м, а на 7-ой – 3200 м. Сколько всего метров пробежал Алексей за 7 дней?

Решение: Известно, что $\mathrm{a}_4 = 1850, \mathrm{a}_7 = 3200$.Составим уравнения:

$$1850 = \mathrm{a}_1 + 3\mathrm{d}, 3200 = \mathrm{a}_1 + 6\mathrm{d}$$

Вычтем из второго уравнения первое, получим: $3d = 1350, d = 450$

Подставим значение d в первое уравнение и найдем, что

$$a_1 = 1850 - 1350 = 500$$

Вычислим $S_7 = \frac{a_1+a_7}{2} \cdot 7 = \frac{500+500+6d}{2} \cdot 7 = (500 + 3 \cdot 450) \cdot 7 = 12950$

Ответ: 12950.

План занятия 11. На 11 занятии учащимся предлагается рассмотреть различные типы практических задач ОГЭ на применение определения и формул геометрической прогрессии

Для обсуждения предлагаются следующие вопросы:

1. Как найти 6-ой член геометрической прогрессии, зная первый член и знаменатель данной прогрессии?

2. Под каким номером будет член геометрической прогрессии после шестикратного деления первого члена?

3. По какой формуле можно вычислить средний член геометрической прогрессии по двум данным?

4. Зная сумму нескольких членов геометрической прогрессии и её знаменатель, как найти первый член этой прогрессии?

Примеры задач с решением

Задача 1. В конце 2013 года была образована компания «Ветер и Ко». Каждый год, начиная с 2014 года, ее уставной капитал увеличивался вчетверо по сравнению с предыдущим годом. Чему был равен уставной капитал в конце 2016 года, если в момент образования компании он составлял 35 тысяч рублей? Ответ дать в тысячах рублей.

Решение: Первый член прогрессии $b_1 = 35$; знаменатель прогрессии равен$q = 4$. По условию задачи, уставной капитал в 2014 году вырос вчетверо по сравнению с 2013 годом, в 2015- вчетверо по сравнению с 2014, в 2016 – вчетверо по сравнению с 2015,Тогда размер уставного капитала в конце 2016 года составит $b_4 = b_1 \cdot q^3 = 35 \cdot 4^3 = 2240$.

Ответ: 2240.

Задача 2. Информация зашифрована в виде последовательности положительных чисел, в которой отношение последующего числа к предыдущему постоянно. Четвертое и шестое число хорошо видны и равны соответственно 36 и 4, а пятое видно неотчетливо. Найдите пятое число в этой шифровке.

Решение: Известно, что $b_4 = 36, b_6 = 4$. Имеем соотношения: $\frac{b_6}{b_5} = \frac{b_5}{b_4} = q$; отсюда: $(b_5)^2 = b_6 b_4 = 36 \cdot 4; b_5 = 6 \cdot 2 = 12$.

Ответ: 12.

Задача 3. Информация зашифрована в виде последовательности чисел, в которой отношение последующего числа к предыдущему постоянно.

Шестое и седьмое число хорошо видны и равны соответственно -96 и 192, а пятое видно неотчетливо. Найдите пятое число в этой шифровке.

Решение: Известно, что $b_6 = -96, b_7 = 192$. Имеем соотношения: $\frac{b_7}{b_6} = q$; отсюда $q = -2$. Но $\frac{b_6}{b_5} = q$, откуда $b_5 = \frac{b_6}{q} = \frac{-96}{-2} = 48$.

Ответ: 48.

Задача 4. Игнат с папой долго и тщательно готовили снасти к рыбалке, и рыбалка удалась на славу: 28 рыб за 3 часа. Сколько рыб выловили папа с Игнатом за первый час рыбалки, если известно, что каждый последующий час они ловили в 2 раза больше рыб, чем в предыдущий?

Решение: Известно, что $S_3 = 28, q = 2$. Имеем уравнение:

$$S_3 = \frac{b_1(q^3 - 1)}{q - 1}; 28 = \frac{b_1 \cdot (2^3 - 1)}{2 - 1}; 28 = 7b_1; b_1 = 4.$$

Ответ: 4.

Задача 5. Несколько женщин собирали яблоки в саду. Первая собрала 50 яблок, каждая следующая собрала в 2 раза больше предыдущей. Сколько женщин работала в саду, если всего было собрано 1550 яблок?

Решение: Известно, что $b_1 = 50, q = 2, S_n = 1550$. Имеем уравнение:

$$S_n = \frac{b_1(q^n - 1)}{q - 1}; 1550 = \frac{50 \cdot (2^n - 1)}{2 - 1}; 1550 = 50 \cdot (2^n - 1); 31 = 2^n - 1;$$

$n = 5$.

Ответ: 5.

Задача 6. Несколько юношей соревнуются в количестве мячей, забитых в ворота. Первый юноша забил 5 мячей, а каждый следующий в 2 раза больше предыдущего. Сколько юношей участвовало в соревнованиях, если всего в ворота было забито 635 мячей?

Решение: Известно, что $b_1 = 5, q = 2, S_n = 635$. Имеем уравнение:

$$S_n = \frac{b_1(q^n - 1)}{q - 1}; 635 = \frac{5 \cdot (2^n - 1)}{2 - 1}; 635 = 5 \cdot (2^n - 1); 127 = 2^n - 1; n = 7.$$

Ответ: 7.

Задача 7. Олег Иванович положил в банк 150 000 рублей под 10% годовых (к сумме вклада, лежащей на счету в начале года, добавляется 10% от этой суммы в конце года). Сколько рублей будет на вкладе у Олега Ивановича через 3 года?

Решение: Известно, что $b_1 = 150000$. Через один год сумма вклада b_1 вырастет на 10% и станет равной $b_2 = b_1 + b_1 \cdot 0{,}1 = b_1(1 + 0{,}1) = b_1 \cdot 1{,}1$. Значит, $q = 1{,}1$. Тогда через 3 года сумма вклада будет равна

$b_4 = b_1 \cdot 1{,}1^3 = 150000 \cdot 1{,}1^3 = 199650.$

Ответ: 199650.

План занятия 12. На 12 занятии учащимся предлагается рассмотреть более сложные задачи ОГЭ на применении понятий арифметическая и геометрическая прогрессии.

Примеры задач с решением.

Задача 1. Индивидуальный предприниматель взял кредит в банке на 7 лет. Схема погашения кредита такова: в первый год предприниматель выплачивает банку 250 000 рублей, а за каждый последующий год – на одну и ту же сумму больше, чем в предыдущий год. За 7 лет индивидуальный предприниматель выплатил банку 3 115 000 рублей. Какую сумму в рублях выплатил предприниматель за первые 4 года?

Решение: Первый член прогрессии $a_1 = 250\ 000$; сумма выплат за 7 лет составила: $S_7 = 3\ 115\ 000$.

Имеем уравнение:

$3\ 115\ 000 = \frac{250000 + 250000 + \cdot 6d}{2} \cdot 7;\ 3\ 115\ 000 = (250000 + 3d) \cdot 7;$

$$21d = 3\ 115\ 000 - 1750000;\ 21d = 1365000;\ d = 65000.$$

Найдем сумму выплат банку за 4 года:

$$S_4 = \frac{250000 + 250000 + \cdot 3d}{2} \cdot 4 = (500000 + 195000) \cdot 2 = 1390000.$$

Ответ: 1 390 000.

Задача 2. Индивидуальный предприниматель взял кредит в банке на 10 лет. Схема погашения кредита такова: в первый год предприниматель выплачивает банку 200 000 рублей, а за каждый последующий год – на одну и ту же сумму больше, чем в предыдущий год. За первые 6 лет индивидуальный предприниматель выплатил банку 1 650 000 рублей. Какую сумму в рублях выплатил предприниматель за 10 лет?

Решение: Первый член прогрессии $a_1 = 200\,000$; сумма выплат за 6 лет составила: $S_6 = 1\,650\,000$.

Имеем уравнение:

$$1650000 = \frac{200000+200000+\cdot 5d}{2} \cdot 6;\ 1650000 = (400000 + 5d) \cdot 3;$$

$$15d = 1650000 - 1200000;\ 15d = 450000;\ d = 30000.$$

Найдем сумму выплат банку за 10 лет:

$$S_{10} = \frac{200000 + 200000 + 9d}{2} \cdot 10 = (400000 + 270000) \cdot 5 = 3\,350\,000$$

Ответ: 3 350 000.

Задача 3. Вкладчик 1 января сделал вклад на некоторую сумму под r % годовых (в середине каждого года ъ вклад увеличивается на r %). В конце второго года сумма вклада составляла 72 000 рублей, а в конце третьего – 86 400 рублей. Определите первоначальную сумму вклада в рублях.

Решение: В середине каждого года сумма вклада вырастает на величину$(1 + \mathrm{r}/100) = \mathrm{q}$. Из условия задачи имеем: $b_2 = 72000; b_3 = 86400$, т.е. $q = \frac{86400}{72000} = \frac{6}{5}$. Но $b_2 = b_1 \cdot q^2$. Отсюда $b_1 = \frac{72000}{(\frac{6}{5})^2} = \frac{72000 \cdot 25}{36} = 50000$.

Ответ: 50000.

Задача 4. Вкладчик 1 января сделал вклад на некоторую сумму под r % годовых (в середине каждого года вклад увеличивается на r %). В конце второго года сумма вклада составляла 125 000 рублей, а в конце третьего – 156 250 рублей. Определите первоначальную сумму вклада в рублях.

Решение: В середине каждого года сумма вклада вырастает на величину $(1 + \mathrm{r}/100) = \mathrm{q}$. Из условия задачи имеем:

$b_2 = 125000; b_3 = 156250$, т.е. $q = \frac{156250}{125000} = \frac{5}{4}$.

Но $b_2 = b_1 \cdot q^2$. Отсюда $b_1 = \frac{125000}{(\frac{5}{4})^2} = \frac{125000 \cdot 16}{25} = 80000.$

Ответ: 80000.

Тематика творческих работ учащихся

При выполнении индивидуальных творческих работ или групповых проектов могут быть использованы следующие темы, которые выдаются сразу после начала изучения программы элективного курса:

1. Замечательные последовательности
2. Числа Фибоначчи
3. Числа Каталана
4. Последовательности и прогрессии в природе, архитектуре и технике.

Рекомендуемая для учащихся литература: [38, 49, 67, 14, 2].

Кроме литературы, рекомендованной для учащихся, учитель может использовать дополнительный список литературы [14, 27, 39, 48, 59, 69].

2.4 Система задач по теме для подготовки учащихся к итоговой аттестации (ОГЭ и ЕГЭ)

Одной из составляющих обучения в средней и старшей школе является успешная сдача Государственной итоговой аттестации учащимися (в девятом классе ОГЭ и в 11 классе ЕГЭ), к которой учитель готовит на протяжении всего периода обучения. Задания на последовательности и прогрессии входят в содержание КИМ ОГЭ (номер 14 КИМ ОГЭ 2021 г.) и ЕГЭ профильного уровня (номер 11). В этих заданиях учащимся требуется продемонстрировать умения применять знания о последовательностях и прогрессиях в прикладных ситуациях [65].

На основе анализа контрольно-измерительных материалов для подготовки к ОГЭ и ЕГЭ представим систему задач на арифметическую и геометрическую прогрессии с практическим содержанием. В данном наборе задач, задания идут от простого к сложному, в соответствии с порядком изложения тем в школьных учебниках алгебры. Также представлены решения заданий каждого типа и комментарии учителю.

Система задач на тему «Арифметическая прогрессия»

1. Задачи на вычисление члена арифметической прогрессии

Задание 1. «При проведении химического опыта реагент равномерно охлаждали на 7,5 °Св минуту. Найдите температуру реагента (в градусах Цельсия) спустя 6 минут после начала проведения опыта, если начальная температура составляла – 8,7 °С» [70].

Комментарий. Обратить внимание, что спустя6 минут, значит требуется найти седьмой член прогрессии.

Задание 2. «Информация зашифрована в виде последовательности чисел, в которой разность между последующим числом и предыдущим постоянна. Четвертое и шестое число хорошо видны и равны соответственно 124 и 138, а пятое видно неотчетливо. Найдите пятое число в этой шифровке» [20].

Решение: известно, что $a_4 = 124, a_6 = 138$. Составим уравнения:

$$124 = a_1 + 3d, 138 = a_1 + 5d.$$

Вычтем из второго уравнения первое, получим: $2d = 14, d = 7$.

Подставим значение d в первое уравнение и найдем, что$a_1 = 124 - -21 = 103$. Вычислим $a_5 = a_1 + 4d = 103 + 28 = 131$.

Ответ: 131.

Задание 6. «В течение 20 банковских дней акции компании дорожали ежедневно на одну и ту же сумму. Сколько стоила акция компании в последний день этого периода, если в 9-й день акция стоила 888 рублей, а в 13-й день – 940 рублей?» [70].

Ответ: 1031.

Задание 7. Егор в течение двух недель усиленно готовился к экзамену в музыкальной школе и ежедневно играл «Лунную сонату» Л. Бетховена, увеличивая количество исполнений каждый день на одно и то же число. В третий день он исполнил сонату 8 раз, а в девятый – 26 раз. Сколько раз исполнил Егор это произведение в двенадцатый день усиленной подготовки? [70].

Ответ: 35.

2. Задачи на нахождение количества членов арифметической прогрессии (номера)

Задание 1. «Марат решил сделать садовую лестницу с таким расчетом, чтобы каждая из следующих ступенек была на 3 см короче предыдущей, а верхняя ступенька имела длину 35 см. Сколько ступенек должно быть в лестнице, чтобы пятая ступенька имела длину 50 см?» [70].

Решение: по условию задачи имеем: $a_5 = 50, d = -3, a_n = 35.$ Решим уравнение:$a_1 + 4d = 50, a_1 = 50 - 4d = 62$. Составим следующее уравнение:$a_n = 62 + (n-1)\cdot(-3); 35 = 62 - 3(n-1); n - 1 = 9;\ n = 10.$

Ответ: 10.

Задание 2. «Курс воздушных ванн начинают с 10 минут в первый день и увеличивают время этой процедуры в каждый следующий день на 5 минут. В какой по счёту день продолжительность процедуры достигнет 1 часа 5 минут?» [47].

Ответ: 12.

Задание 3. «Владимир Юрьевич поехал на курорт и собирается принимать грязевые ванны. Курс грязевых ванн начинают с 5 минут в первый день и увеличивают время этой процедуры в каждый следующий день на одинаковое число минут. Сколько дней следует принимать ванны в таком режиме, чтобы достичь их максимальной продолжительности, равной 1 час 35 минут в день, если продолжительность ванны в восьмой день в 5 раз больше, чем во второй?» [24].

Решение: по условию задачи имеем: $a_1 = 5, a_n = 60 + 35 = 95$; $a_8 = 4a_2$. Решим уравнение: $a_1 + 7d = 5(a_1 + d); 4a_1 = 2d; d = 10$. Составим следующее уравнение: $a_n = 5 + (n-1)\cdot 10; 95 = 5 + +10(n - -1); n - 1 = 9;\ n = 10$.

Ответ: 10.

Задание 3. «Марина Афанасьевна поехала в дом отдыха и собирается принимать воздушные ванны. Курс воздушных ванн начинают с 15 минут в первый день и увеличивают время этой процедуры в каждый следующий день на одинаковое число минут. Сколько дней следует принимать ванны в таком режиме, чтобы достичь их максимальной продолжительности, равной 2 часа 15 минут в день, если продолжительность ванны в восьмой день в 2 раз больше, чем в третий?» [47].

Ответ 25.

3. Задачи на нахождение суммы некоторых членов прогрессии

Задание 1. «При восстановлении после травмы спортсмен Алексей пробегал каждый день на одно и то же число метров больше, чем в предыдущий день. На 4-ый день он пробежал 1850 м, а на 7-ой – 3200 м. Сколько всего метров пробежал Алексей за 7 дней?» [70].

Решение: известно, что $a_4 = 1850, a_7 = 3200$.Составим уравнения:

$$1850 = a_1 + 3d, 3200 = a_1 + 6d.$$

Вычтем из второго уравнения первое, получим: $3d = 1350, d = 450$.

Подставим значение d в первое уравнение и найдем, что$a_1 = 1850 - -1350 = 500$. Вычислим $S_7 = \frac{a_1 + a_7}{2} \cdot 7 = \frac{500+500+6d}{2} \cdot 7 = (500 + 3 \cdot 450) \cdot 7 = = 12950$.

Ответ: 12950.

Задание 2. «В амфитеатре 20 рядов. В первом ряду 56 мест, а в каждом следующем – на 2 места меньше, чем в предыдущем. Сколько всего мест в амфитеатре?» [47].

Ответ: 740.

Комментарий. На 2 места меньше, значит разность равна -2.

Задание 3. В первую минуту гусеница проползла 12 см, а в каждую следующую минуту на одно и то же количество сантиметров меньше, чем в предыдущую. Известно, что за 7 минут гусеница проползла 63 см. Сколько сантиметров проползла гусеница в сумме за третью, четвертую и пятую минуты?» [47].

Решение: первый член прогрессии $a_1 = 12$; так как за 7 минут гусеница проползла 63 см, то по формуле суммы семи членов прогрессии имеем:

$$S_7 = \frac{a_1+a_7}{2} \cdot 7 = \frac{12+12+\cdot 6d}{2} \cdot 7.$$

Тогда $\frac{12+12+6d}{2} \cdot 7 = 63;$

$$(24+6d) \cdot 7 = 63 \cdot 2;$$

$$24+6d = 18;$$

$$6d = 18-24 = -6;$$

$$d = -1.$$

$a_3 + a_4 + a_5 = (a_1 + 2d) + (a_1 + 3d) + (a_1 + 4d) = 3a_1 + 9d = 36 -$
$-9 = 27.$

Ответ: 27.

Задание 4. Тимофей готовится к олимпиаде по математике. Ему нужно решить 243 задачи за 9 дней. В первый день он решил 15 задач, а в каждый последующий день Тимофей решает на одно и то же количество задач больше, чем за предыдущий день. Сколько задач решил Тимофей в сумме за пятый и шестой дни?» [47].

Ответ: 57.

4. Задачи на нахождение члена прогрессии или суммы, если известна также и сумма некоторых членов прогрессии

Задание 1. «За первый час рабочий зарабатывает 100 рублей, а за каждый последующий за ним час на одно и то же число рублей больше, чем за предыдущий час. Найдите, сколько рублей зарабатывает рабочий за шестой час, если за 8 часов он зарабатывает 1360 рублей» [24].

Решение: первый член прогрессии $a_1 = 100$; так как за 8 часов рабочий заработал 1360 рублей, то по формуле суммы восьми членов прогрессии имеем: $S_8 = \frac{a_1+a_8}{2} \cdot 8 = \frac{100+100+\cdot 7d}{2} \cdot 8$. Тогда $\frac{100+100+\cdot 7d}{2} \cdot 8 = 1360$;

$$(200 + 7d) \cdot 4 = 1360;$$

$$28d = 1360 - 800 = 20;$$

$$a_6 = a_1 + (6-1)d = 100 + 5 \cdot 20 = 200.$$

Ответ: 200.

Задание 2. «На тренировках футбольной команды в течение 16 дней нападающий Андрей отрабатывал удары пенальти. Каждый день количество забитых им пенальти увеличивалось на одно и то же число. В первый день он забил 3 пенальти, а всего за 16 дней – 168. Сколько раз Андрей забил пенальти в 16-ый день отработки ударов?» [70].

Ответ: 18.

Задание 3. «Туристы за первый день семидневного похода прошли 28 км, а за каждый следующий день – на одно и то же количество километров меньше, чем за предыдущий день. Известно, что за последние 4 дня туристы прошли 76 км. Сколько всего километров прошли туристы за 7 дней?» [24].

Решение: первый член прогрессии $a_1 = 28$; так как за последние 4 дня т.е. с четвертого по седьмой день, туристы прошли 76 км, то имеем:

$$a_4 + a_5 + a_6 + a_7 = (a_1 + 3d) + (a_1 + 4d) + (a_1 + 5d) + (a_1 + 6d) =$$

$$= 4a_1 + 18d = 112 + 18d = 76;\ 18d = 76 - 112 = -36; d = -2.$$

Вычислим количество пройденных туристами километров за второй и третий дни: $a_2 = 28 - 2 = 26; a_3 = 26 - 2 = 24$.

Следовательно, за 7 дней туристы прошли: $28 + 26 + 24 + 76 = 154.$

Ответ: 154.

Задание 4. «Индивидуальный предприниматель взял кредит в банке на 7 лет. Схема погашения кредита такова: в первый год предприниматель выплачивает банку 250 000 рублей, а за каждый последующий год – на одну и ту же сумму больше, чем в предыдущий год. За 7 лет индивидуальный предприниматель выплатил банку 3 115 000 рублей. Какую сумму в рублях выплатил предприниматель за первые 4 года?» [47].

Решение: первый член прогрессии $a_1 = 250\ 000$; сумма выплат за 7 лет составила $S_7 = 3\ 115\ 000$.

Имеем уравнение: $3\ 115\ 000 = \frac{250000+250000+\cdot 6d}{2} \cdot 7; 3\ 115\ 000 =$

$= (250000 + 3d) \cdot 7;$

$21d = 3\ 115\ 000 - 1750000;\ 21d = 1365000;\ d = 65000.$

Найдем сумму выплат банку за 4 года:

$$S_4 = \frac{250000 + 250000 + \cdot 3d}{2} \cdot 4 = (500000 + 195000) \cdot 2 = 1390000.$$

Ответ: 1 390 000.

Система задач на тему «Геометрическая прогрессия»

1. Задачи на вычисление члена геометрической прогрессии

Задание 1. «В конце 2015 года была образована компания «Рога и копыта, 21 век». Каждый год, начиная с 2016 года, ее уставной капитал увеличивался втрое по сравнению с предыдущим годом. Чему был равен уставной капитал в конце 2019 года, если в момент образования компании он составлял 20 тысяч рублей? Ответ дать в тысячах рублей» [47].

Решение: первый член прогрессии $b_1 = 20$; знаменатель прогрессии равен $q = 3$. По условию задачи, уставной капитал в 2016 году вырос втрое по сравнению с 2015 годом, в 2017- втрое по сравнению с 2016, в 2018 – втрое по сравнению с 2017, в 2019 – втрое по сравнению с 2018 годом.Тогда размер уставного капитала в конце 2019 года составит $b_5 = b_1 \cdot q^4 = 20 \cdot 3^4 =$ $= 1620.$

Ответ: 1620.

Задание 2. «Информация зашифрована в виде последовательности положительных чисел, в которой отношение последующего числа к предыдущему постоянно. Четвертое и шестое число хорошо видны и равны соответственно 36 и 4, а пятое видно неотчетливо. Найдите пятое число в этой шифровке» [70].

Решение: известно, что $b_4 = 36, b_6 = 4$. Имеем соотношения: $\frac{b_6}{b_5} = \frac{b_5}{b_4} =$ $= q$; отсюда$(b_5)^2 = b_6 b_4 = 36 \cdot 4; b_5 = 6 \cdot 2 = 12$.

Ответ: 12.

Задание 3. «Дарья Петровна положила в банк 100 000 рублей под 6% годовых (к сумме вклада, лежащей на счету в начале года, добавляется 6% от этой суммы в конце года). Сколько рублей будет на вкладе у Дарьи Петровны через 3 года?» [24].

Решение: известно, что $b_1 = 100000$. Через один год сумма вклада b_1 вырастет на 6% и станет равной $b_2 = b_1 + b_1 \cdot 0{,}06 = b_1(1 + 0{,}06) = b_1 \cdot 1{,}06$. Значит, $q = 1.06$. Тогда через 3 года сумма вклада будет равна

$b_4 = b_1 \cdot 1{,}06^3 = 100000 \cdot 1{,}06^3 = \frac{(100 \cdot 1.06)^3}{10} = \frac{(106)^3}{10}$.

Ответ: 119101,6.

Комментарий. С первого взгляда кажется, что это арифметическая прогрессия.

Задание 4. «Вкладчик 1 января сделал вклад на некоторую сумму под r% годовых (в середине каждого года вклад увеличивается на r%). В конце второго года сумма вклада составляла 72 000 рублей, а в конце третьего – 86 400 рублей. Определите первоначальную сумму вклада в рублях» [47].

Решение: в середине каждого года сумма вклада вырастает на величину$\left(1 + \frac{r}{100}\right) = q$. Из условия задачи имеем: $b_2 = 72000; b_3 = 86400$, т.е.$q =$ $= \frac{86400}{72000} = \frac{6}{5}$. Но $b_2 = b_1 \cdot q^2$. Отсюда $b_1 = \frac{72000}{(\frac{6}{5})^2} = \frac{72000 \cdot 25}{36} = 50000$.

Ответ: 50000.

3. Задачи на нахождение суммы некоторых членов прогрессии

Задание 1. «Ученице кондитера Арине поручили украшать торты. С каждым часом она делала это быстрее и увереннее, украшая в день в одно и то же число раз больше тортов, чем в предыдущий день. Известно, что во второй день Арина украсила 24 торта, а в четвертый – 54. Сколько тортов украсила Арина за 4 дня?» [24].

Решение: известно, что $b_2 = 24, b_4 = 54$. Имеем соотношения: $b_2 = b_1 \cdot q$;$b_4 = b_1 \cdot q^3$. Получили уравнения: 24= $b_1 \cdot q$;54= $b_1 \cdot q^3$. Разделим второе уравнение на первое: $\frac{54}{24} = q^2; q = \sqrt{\frac{54}{24}} = \sqrt{\frac{9}{4}} = \frac{3}{2}$.

Тогда из первого уравнения найдем: $b_1 = \frac{24}{\frac{3}{2}} = 16$.

По формуле суммы членов геометрической прогрессии получим, что

$$S_4 = \frac{b_1(q^4 - 1)}{q - 1} = \frac{16 \cdot (1{,}5^4 - 1)}{1{,}5 - 1} = \frac{16 \cdot ((\frac{3}{2})^4 - 1)}{\frac{1}{2}} =$$

$$= 2^4 \cdot \left(\left(\frac{3}{2}\right)^4 - 1\right) \cdot 2 = (3^4 - 2^4) \cdot 2 = (81 - 16) \cdot 2 = 130.$$

Ответ: 130.

Задание 2. «Василий наблюдал за своим приусадебным участком и выяснил, что каждый год на участке вырастало в 3 раза больше растений одуванчиков, чем в предыдущий. На 5-ый год наблюдений Василий насчитал на 216 растений одуванчиков больше, чем на 4-ый год. Сколько растений он насчитал всего за 5 лет?» [70].

Решение: из условия задачи имеем: $q = 3; b_5 - b_4 =$ 216, т.е. $b_4 \cdot q -$ $-b_4 = 216;$ $b_4 = 108.$ Но $b_4 = b_1 \cdot 3^3 = 108.$

Отсюда $b_1 = \frac{108}{27} = 4.$

Найдем сумму растений за 5 лет:

$$S_5 = \frac{b_1(q^5 - 1)}{q - 1} = \frac{4(3^5 - 1)}{3 - 1} = 2(243 - 1) = 484.$$

Ответ: 484.

2.5 Описание педагогического эксперимента

Первый – констатирующий этап эксперимента был проведён в феврале-марте 2020 года. В эксперименте участвовало 8 учителей математики.

В ходе данного этапа проводилось изучение опыта учителей, выявление и применение учителями образовательных технологий. Основными задачами данного этапа эксперимента являлись изучение опыта учителей, выявление различных видов технологий, получивших распространение в рамках практической деятельности учителей, приёмов и принципов работы при их реализации; изучение возможностей применения представленной в рамках диссертации технологии гарантированного обучения В.М. Монахова; выявление методических особенностей обучения теме «Последовательности и прогрессии» в современных условиях обучения математике.

Основными методами исследования были: анкетирование учителей, проводимого с помощью Google-сервиса (приложение); изучение опыта учителей математики по организации уроков с применение различных технологий обучения, изучение учебно-методических документов общеобразовательной школы.

Анкетирование учителей математики с целью выявления использования ими в своей деятельности разнообразных технологий обучения позволил сделать следующие выводы:

1. Практически все учителя не полностью или в недостаточной мере раскрыли понятие «технология обучения».

2. Большинство учителей математики (75%) затрудняются сказать, какие именно технологии применяют в обучении алгебре.

3. 50% учителей проводят дифференцированные домашние задания, 25% всегда используют и остальные совсем не используют.

4. При обучении теме «Последовательности и прогрессии» лишь 25% учителей дифференцирует домашние задания.

5. Все опрошенные учителя считают, что необходимо использовать различные виды и формы работы для улучшения качества усвоения учащимися учебного материала.

6. Никто из опрошенных учителей не знаком с технологией гарантированного обучения В.М. Монахова. Некоторые лишь слышали о такой технологии, но не знакомы с её содержанием.

7. Учителя высказались положительно к разработанным в диссертации технологическим картам, большинство из них готовы апробировать на практике их.

В ходе беседы с учителями было выявлено, что учащиеся хуже справляются с практическими задачами, когда необходимо построить математическую модель. А значит можно сделать вывод, что при обучении теме «Последовательности и прогрессии» учителю необходимо будет иначе выстроить свою работу по теме. Это связано с тем, что в содержании ОГЭ по математике в 2021 году произошли ряд изменений. И одно из них связано с тем, что задание на применение знаний по теме «Последовательности и прогрессии» (задание 14 в КИМ 2021 г.) носят практический характер. То есть для успешного решения учащимися данной задачи и возможности получение дополнительного балла на экзамене, учителю необходимо выбрать и реализовать наиболее эффективную технологии обучения темы.

Таким образом, можно сделать вывод, что учителя математики применяют в своей практике в определённой степени регулярности различные виды технологий и считают, что целенаправленное применение определённой технологии оказывает положительную динамику в мотивации учащихся, повышает качество усвоения материала.

Поисковый этап эксперимента проводился с учащимися 8-10 классов математической школы при ТГУ в 2020-21 уч. году. Его целью было определение уровня готовности обучающихся к выполнению олимпиадных задач по теме и выполнению индивидуальных домашних заданий.

Так как олимпиадные задачи на практике, в основном предлагаются учащимся, имеющим хорошие базовые знания и умения, то будем рассматривать цели дифференцированной работы с учащимися группы А и В (по типологии Р.А. Утеевой) [63]:

«1. Расширение и углубление знаний по математике, дальнейшее формирование умений решать задачи повышенной сложности, в том числе олимпиадные (эвристического типа).

2. Развитие устойчивого интереса к предмету математики и к решению олимпиадных задач.

3. Развитие умений самостоятельной работы с учебной и научно-популярной литературой по математике.

4. Формирование обобщенных приемов мыслительной деятельности».

Так как большинство олимпиадных задач носят нестандартный характер, для решения многих из них отсутствуют алгоритмы, то целесообразно выбрать такую технологию, которая была бы ориентирована на развивающее обучение решению математических задач.

В рамках поискового этапа эксперимента была выбрана технология развивающего обучения решению задач, основанная на концепции уровневой дифференциации обучения математике Р.А. Утеевой [63].

Основными принципами при реализации технологии развивающего обучения решению задач являются:

1. Целенаправленность и активность обучения учащихся типологических групп А и В (уровень знаний и умений которых выше базового).

2. Постепенное возрастание степени самостоятельности учащихся при решении олимпиадных задач.

«Под целенаправленным обучением учащихся каждой типологической группы понимается - выделение (формулирование) специфических целей дифференцированной работы учителя и их систематическая реализация в процессе обучения.

Под активным обучением учащихся будем понимать создание соответствующих условий для проявления познавательной активности каждой типологической группы» [63].

По мнению, Л.М.Фридмана: «Подлинная активность учащихся состоит не в беспрерывном поднятии рук и угадывании желаемого ответа. Она состоит в сосредоточенной настойчивой и целеустремленной работе мысли по осмыслению содержания учебного материала, по поиску путей решения задач, по анализу проведенной работы, по выявлению общих способов деятельности» [66, с. 101].

Основное внимание в данной технологии отводится обучению учащихся различным нестандартным приемам поиска решения задач.

Работа на занятиях ведется в основном в *групповой или индивидуальной форме* организации учебной деятельности.

Основные методы: наблюдение, анализ, обобщение синтез, конкретизация, доказательство.

«В Концепции развития математического образования в России (2013 г.) отмечено, что необходимо предоставить каждому учащемуся независимо от места и условий проживания возможность достижения соответствия любого уровня подготовки с учетом его индивидуальных потребностей и способностей**.** Большая роль в решении поставленной задачи отводится высшим учебным заведениям и реализуемым им программам дополнительного математического образования детей в рамках математической школы» [64].

На рисунке 1 представим основные компоненты технологии развивающего обучения решению задач для реализации темы «Олимпиадные задачи на последовательности» в рамках математической школы.

Рисунок 1 – Основные компоненты технологии развивающего обучения решению задач.

Проект рассчитан на 3 занятия (6 ч.).

На каждом занятии учащиеся решают олимпиадные задачи таким образом: сначала каждый учащийся самостоятельно работает над задачами по теме в течение определенного времени (20-30 минут), затем у доски учащиеся объясняют идею и ход решения.

Рассматривается различные способы решения (при наличии).

Обращается внимание на тот или иной прием в решении задачи.

Содержательный компонент технологии

1. Листок № 1. Задачи на последовательности

1. **Задача 1. «**Какое число нужно поставить вместо знака * в последовательности 7,17,37,77,*,317, …?» [45, №1.54].

Решение: Каждое следующее равно удвоенному предыдущему, сложенному с числом 3. Ответ: 157.

Задача 2. «Какое число нужно поставить вместо знака * в последовательности 17,23,13,11,*,15,…?» [45, №2.38].

Решение: каждое число, начиная со второго, равно сумме удвоенного числа и утроенного числа единиц предыдущего числа. Ответ: 5.

Задача 3. «Какое число нужно поставить вместо знака * в последовательности10,11,12,13.14,15,16,17,20,22,24,31,100,*,10000?» [45, №3.18].

Решение: число 16 записано сначала в 16-ричной системе счисления, потом в 15, потом в 14-ричной и т.д.

Задача 4. «Какое наибольшее количество чисел можно записать в строку так, чтобы сумма любых 17 последовательных их них была четна, а сумма 18 любых последовательных чисел была нечетна?» [45, №3.19].

Решение: Для того, чтобы сумма 17 чисел была четна, среди них должно оказаться хотя бы одно четное число. Так как сумма первых 18-ти чисел нечетная, то 18-е число нечетно, но сумма чисел со 2 по 18 четна, поэтому первое число должно иметь ту же четность, что и 18-е, т.е. быть нечетным. Аналогично, второе число будет нечетным. Итак, дойдем до четного числа. Ясно, что длина последовательности буде наибольшей, если из первых 17 ее членов четное число будет последним. В результате получаем последовательность из 33 членов, в которой среднее число четно, а остальные нечетны.

Задача 5 [45, №3.47]. Продолжите последовательность чисел:

1,11,21,1112,3112,211213,312213,212223,114213,…

Решение: каждое следующее число описывает состав предыдущего, 2-е указывает, что 1 число состоит из одной единицы, 3-е число – что второе состоит из двух единиц, 4-е-, что 3-е состоит из одной единицы и одной двойки и т.д.

Задача 6 [45, №3.76]. Если выписать цифры от 1 до 9 подряд 1,2,…, то сумма пар соседних чисел: 3,5,7,…,17 увеличивается в этой последовательности на 2. Расположите эти цифры в такой последовательности, чтобы суммы соседних чисел увеличивались на…

Решение: **0,5,1,6,2,7,3,8,4,9.**

Задача 7. «Числовая последовательность a_0, a_1, a_2, . . . такова, что при всех неотрицательных m и n (m≥n) выполняется соотношение $a_{m+n} + a_{m-n} = \frac{1}{2}*(a_{2m} + a_{2n})$. Найдите a_{1995}, если $a_1 = 1$» [1, №70, О. Мусин].

Задача 8. «Существует ли бесконечная периодическая последовательность, состоящая из букв a и b, такая, что при одновременной замене всех букв a на aba и букв b на bba она переходит в себя (возможно, со сдвигом)? (Последовательность называется периодической, если существует такое натуральное n, что для всякого i = 1, 2,... i-й член этой последовательности равен (i + n)-му.)» [1, №104, А. Белов].

Задача9. «Последовательность a_1, a_2,...,a_{2000} действительных чисел такова, что для любого натурального n, $1 \le n \le 2000$, выполняется равенство:

$a_1^3 + a_2^3 + ... + a_n^3 = (a_1 + a_2 + ... + a_n)^2$. Докажите, что все члены этой последовательности — целые числа.)» [1, №227, С. Тухвебер].

Задача 10. «Существует ли последовательность натуральных чисел, в которой каждое натуральное число встречается ровно один раз и при этом для любого k = 1, 2, 3, . . . сумма первых k членов последовательности делится на k?» [1, №483, А. Шаповалов].

Задача 11 «Неутомимые Фома и Ерёма строят последовательность. Сначала в последовательности одно натуральное число. Затем они по очереди выписывают следующие числа: Фома получает очередное число, прибавляя к предыдущему любую из его цифр, а Ерёма – вычитая из предыдущего любую из его цифр. Докажите, что какое-то число в этой последовательности повторится» [15, №98458, Авторы: С.А. Генкин].

Решение:

«Пусть первые два члена a_1 и a_2 последовательности меньше 10^m. Докажем, что тогда и все остальные члены меньше 10^m. Предположим противное и обозначим через n наименьший номер, при котором $a_n \geq 10^m$. Ясно, что этот член написан Фомой и $a_{n-1} \geq 10^m - 9$. Тем более, $a_{n-2} \geq 10^m - 9$, то есть все цифры числа a_{n-2}, кроме последней, – девятки. Но тогда Ерёма, вычитая из этого числа одну из его цифр, получит $a_{n-1} \leq 10^m - 10$. Противоречие. В силу бесконечности количества членов последовательности и конечности множества её значений, по крайней мере, один из её членов повторится бесконечное число раз» [15, №98458, Авторы: Генкин С.А.].

Задача 12. «Рассмотрим последовательность, первые два члена которой равны 1 и 2 соответственно, а каждый следующий член – это наименьшее натуральное число, которое еще не встретилось в последовательности и которое не взаимно просто с предыдущим членом последовательности. Докажите, что каждое натуральное число входит в эту последовательность» [15, №98602, Авторы: Лагариас Дж., Рейнс И., Слоан].

Решение: «1) Для данного числа n меньшие числа занимают в последовательности конечное число мест. Если после них встречается число m, не взаимно простое с n, и к этому моменту число n ещё не встретилось, то n будет написано сразу после m. Таким образом, чтобы гарантировать наличие в последовательности числа n, достаточно доказать, что в последовательности встретится бесконечное количество чисел, не взаимно простых с n. 2) Докажем, что для любого N в последовательности присутствует чётное число, большее N. Начиная с какого-то места все члены последовательности больше N. На этом "участке" последовательность не может все время убывать, поэтому на нём найдётся число k, за которым следует большее число m. Если одно из чисел k, m чётно, то все в порядке. В противном случае чётное число k + НОД(k, m), меньшее m и не взаимно простое с k, уже присутствует в последовательности. Итак, последовательность содержит бесконечное количество чётных чисел.

3) Из 1) и 2) следует, что в последовательности встречаются все чётные числа. Теперь из 1) следует, что в ней встречаются и все натуральные числа».

Задача 13. «Существует ли такая последовательность натуральных чисел, чтобы любое натуральное число 1, 2, 3, ... можно было представить единственным способом в виде разности двух чисел этой последовательности?» [15, №79286, Автор: Лифшиц А.].

Решение:

Объясним коротко, как её построить. Предположим, что мы построили конечную последовательность, обладающую следующими свойствами:

− все попарные разности между членами этой последовательности различны;

− числа 1, 2, ..., k можно представить в виде разности двух её членов.

− число $k + 1$ нельзя представить в виде разности двух её членов.

Пусть максимальный член этой последовательности равен M. "Допишем" теперь эту последовательность: добавим к ней числа $2M$ и $2M + k + 1$. Проверьте сами, что новая последовательность удовлетворяет свойствам 1, 2 (с заменой k на $k + i$, где i — некоторое натуральное число, зависящее от первоначально построенной последовательности, $i \geq 1$) и свойству 3 (с заменой числа $k + 1$ на число $k + i + 1$). Применяя описанное "дописывание", например, к числам 1, 2, получим бесконечную последовательность, удовлетворяющую условиям задачи. Такая последовательность существует.

Задача 14 [62, Турнир Ломоносова, 2017 г.]. «На доске в ряд в некотором порядке выписаны несколько степеней двойки. Для каждой пары соседних чисел Петя записал в тетрадку степень, в которую нужно возвести левое число, чтобы получилось правое. Первым в ряду на доске шло число 2, а последним

— число 1024. Вася утверждает, что этого достаточно, чтобы найти произведение всех чисел в тетрадке. Прав ли Вася?».

Ответ. Да, прав.

Решение:

Докажем, что произведение чисел в Петиной тетрадке равно 10.

Пусть на доске написаны числа

$$2,\ 2^{a_1},\ 2^{a_2},\ \ldots,\ 2^{a_n},\ 2^{10}.$$

Тогда в Петиной тетрадке будут написаны числа:

$$a_1,\ \frac{a_2}{a_1},\ \frac{a_3}{a_2},\ \ldots,\ \frac{10}{a_n}.$$

Каждое из ai встречается в этой последовательности один раз в числителе и один раз в знаменателе.

Следовательно, они все сократятся, и останется 10».

Задача 15. «В ряд посажены 2000 деревьев - дубы и баобабы. К каждому дереву прибита табличка, на которой указано количество дубов среди следующих деревьев: дерева, на котором висит табличка, и его соседей. Можно ли по числам на табличках определить, какие из деревьев - дубы?» [15, № 34892].

Решение:

«Рассмотрим две такие последовательности деревьев.

В первой последовательности на местах с номерами вида 3k и 3k+2, где k - целое, растут дубы, а на остальных - баобабы. Во второй на местах с номерами вида 3k и 3k+1, где k - целое, растут дубы, а на остальных - баобабы.

Тогда в обоих случаях на всех деревьях, кроме двух крайних, написано число 2, а на крайних - 1.

Следовательно, по такому набору чисел на табличках определить расположение дубов не удастся».

Задача 16. «По кругу в некотором порядке расставлены все натуральные числа от 1 до 1000 таким образом, что каждое из чисел является делителем суммы двух своих соседей. Известно, что рядом с числом k стоят два нечётных числа. Какой чётности может быть число k?» [15, №65193, Автор: Френкин Б.Р.].

Решение: «Заметим, что два чётных числа не могут стоять подряд, так как тогда следующее за ними число было бы чётным и т.д., то есть все числа на круге оказались бы чётными. Поскольку чётных чисел ровно половина, они чередуются с нечётными, поэтому k чётно».

Задача 17. «Существует ли такая бесконечная последовательность натуральных чисел, что для любого натурального k сумма любых k идущих подряд членов этой последовательности делится на $k + 1$?» [15, №65247].

Решение: Предположим, что такая последовательность нашлась.

Рассмотрим первые $2k - 1$ членов $a_1, a_2, ..., a_{2k-1}$ этой последовательности. Сумма $a_1 + a_2 + ... + a_{2k-1}$ делится на $2k$, а каждая из сумм $a_2 + a_3 + ... + a_k$ и $a_{k+1} + a_{k+2} + ... + a_{2k-1}$ делится на k. Отсюда следует, что a_1 делится на k при всех k. Это невозможно.

Задача 18. «По целому числу a построим последовательность $a_1 = a$, $a_2 = 1 + a_1$, $a_3 = 1 + a_1a_2$, $a_4 = 1 + a_1a_2a_3$, ... (каждое следующее число на 1 превосходит произведение всех предыдущих). Докажите, что разности ее соседних членов $a_{n+1} - a_n$ – квадраты целых чисел» [15, №65197, Автор: Креков Д.].

Решение: $a_{n+1} - a_n = 1 + a_1a_2...a_{n-1}a_n - a_n = 1 - a_n + (a_n - 1)a_n = (1 - a_n)^2$.

Задача 19 [1, Турнир городов, 2000г, Автор: Толпыго А.К.]. «Существует ли такая бесконечная последовательность, состоящая из а) действительных б) целых чисел, что сумма любых десяти подряд идущих чисел положительна, а сумма любых первых подряд идущих $10n + 1$ чисел отрицательна при любом натуральном n?»

«а) Положим $a_{10}n = 1 + 2^{-n}$ $(n > 0)$, $a_{10}n+1 = -1$ $(n > 0)$, а на остальные места последовательности поставим нули. Тогда среди любых десяти подряд идущих членов последовательности имеется восемь нулей, одна минус единица, и одно число, большее единицы. Значит, их сумма положительна. А сумма первых $10n + 1$ членов равна -2^{-n}.

б) Рассмотрим произвольную последовательность $\{ak\}$ целых чисел. Возьмём $n > |a1|$. Если сумма любых десяти идущих подряд членов положительна, то она не меньше 1. Поэтому сумма $a_2 + a_3 + ... + a_{10}n+1$ не меньше n. Значит, сумма $10n + 1$ первых членов положительна».

Задача 20. «Последовательность чисел строится по следующему закону: вслед за каждым числом стоит сумма цифр его квадрата, увеличенная на единицу. На первом месте стоит число 7, поэтому на втором месте стоит число 14 ($7^2 = 49$, 4+9+1 = 14). На третьем месте стоит число 17 и так далее. Какое число стоит на 2010-м месте?» [57, №42].

Задача 21 [61, 33 Турнир Городов]. «Саша пишет на доске последовательность натуральных чисел. Первое число $N > 1$ написано заранее. Новые натуральные числа он получает так: вычитает из последнего записанного числа или прибавляет к нему любой его делитель, больший 1. При любом ли натуральном $N > 1$ Саша сможет написать на доске в какой-то момент число 2011?»

Задача 22 [61, 33 Турнир городов, А. С. Бердников] «В бесконечной последовательности бумажных прямоугольников площадь n-го прямоугольника равна n^2 (для n = 1, 2, 3, . . .). Обязательно ли можно покрыть ими плоскость? Наложения допускаются».

Задача 23 [61, 33 Турнир городов, А. С. Бердников]. «Дана бесконечная последовательность бумажных квадратов. Обязательно ли можно покрыть ими плоскость (наложения допускаются), если известно, что для любого числа N найдутся квадраты суммарной площади больше N».

2. Листок № 2. Задачи на арифметическую прогрессию

Задача 1 [23, №8.1.5]. «Сумма четвертого и шестого членов арифметической прогрессии равна 14. Найти сумму первых девяти членов прогрессии».

Задача 2 [23, №8.1.13]». В арифметической прогрессии 20 членов. Сумма членов, стоящих на четных местах, равна 250, а на нечетных – 220. Найти десятый член прогрессии».

Задача 3. «Докажите, что в арифметической прогрессии с первым членом, равным 1, и разностью, равной 729, найдется бесконечно много членов, являющихся степенью числа 10» [1, №501, Л. Купцов].

Решение: Докажем, что для всех натуральных n число $10^{81n} - 1$ делится на 729. Действительно, $10^{81n} - 1 = (10^{81})^n - 1$ делится на $10^{81} - 1$, а $10^{81} - 1 = (10^9 - 1)(10^{72} + 10^{63} + ... + 1) = (10 - 1)(10^8 + 10^7 + ... + 1)(10^{72} + +10^{63} + +... +1)$.

Второй сомножитель и третий сомножитель – числа, в записи каждого из которых содержится по 9 единиц, поэтому они делятся на 9.

Следовательно, $10^{81} - 1$ делится на $9^3 = 729$.Что и требовалось доказать».

Задача 4 [3, №124]. Найти четырехзначное простое число, цифры которого образуют арифметическую прогрессию.

Задача 5 [23, №8.1.14]. Сумма третьего и седьмого членов арифметической прогрессии равна 24, а их произведение равно 128. Найти разность прогрессии.

Задача 6. «Какова наибольшая длина арифметической прогрессии из натуральных чисел $a_1, a_2..., a_n$, с разностью 2, обладающей свойством: a_k^2+1 — простое при всех k = 1, 2..., n?» [1, №281, Н. Агаханов].

Задача 7. «Существует ли такая бесконечная возрастающая арифметическая прогрессия $\{a_n\}$, $n \in N$ из натуральных чисел, что произведение $a_n;...; a_{n+9}$ делится на сумму $a_n+...+a_{n+9}$ при любом натуральном n?» [1, №375, В. Сендеров].

Решение:

«Предположим, что такая прогрессия существует. Тогда число $A_n = (2a_n)...(2a_{n+9})$ делится на $B_n = a_{n+4} = a_{n+5}$ при любом натуральном n. С другой стороны, обозначив через d разность прогрессии, имеем

$A_n = (B_n - 9d)(B_n - 7d)...(B_n - d)(B_n + d)...(B_n + 7d)(B_n + 9d).$

Значит, $A_n = B_nC_n + D$, где C_n – целое число, $D = -d^{10}(1\cdot3\cdot...\cdot7\cdot9)^2$. Из этого равенства ясно, что A_n не делится на B_n при $B_n > D$.

Противоречие». [1, №375, В. Сендеров].

Задача 8 [61, 37 Турнир Городов, Г. Жуков]. «Дана бесконечно возрастающая арифметическая прогрессия. Первые ее несколько членов сложили и сумму объявили первым членом новой последовательности, затем сложили следующие несколько членов исходной прогрессии и сумму объявили вторым членом новой последовательности, и так далее. Могла ли новая последовательность оказаться геометрической прогрессией?»

Задача 9 [62, 37 Турнир им. М. В. Ломоносова].Имеется бесконечная арифметическая прогрессия натуральных чисел с ненулевой разностью. Из каждого её члена извлекли квадратный корень и, если получилось нецелое число, округлили до ближайшего целого. Может ли быть, что все округления были в одну сторону?.

Задача 10. «Длины сторон некоторого треугольника и диаметр вписанной в него окружности являются четырьмя последовательными членами арифметической прогрессии. Найдите все такие треугольники» [1, №145, Я.Губин].

Задача 11. «Арифметическая прогрессия a1, a2, . . . , состоящая из натуральных чисел, такова, что при любом n произведение $a_n \cdot a_{n+31}$ делится на 2005. Можно ли утверждать, что все члены прогрессии делятся на 2005?» [1, №381, В.Сендеров].

3. Листок № 3. Задачи на геометрическую прогрессию

Задача 1 [23, №8.2.1]. Sn – сумма первых nчленов геометрической прогрессии. Найти знаменатель прогрессии, если при любом nвыполняется равенство: log3(Sn2+1)=n.

Задача 2 [23, №8.2.6]. «Сумма первых трех членов геометрической прогрессии равна 12, а сумма шести членов равна -84. Найти третий член прогрессии».

Задача 3 [3, №125]. Цифры трехзначного числа образуют арифметическую прогрессию. Если к нему прибавить 101, то получится число, цифры которого образуют геометрическую прогрессию. Найти трехзначное число.

Задача 4 [61, 37 Турнир Городов, Б. Френкин]. «Геометрическая прогрессия состоит из 37 натуральных чисел. Первый и последний члены прогрессии взаимно просты. Докажите, что 19-й член прогрессии является 18-й степенью натурального числа».

Задача 5. «Могут ли все числа 1, 2, 3, . . . , 100 быть членами 12 геометрических прогрессий?» [1, №489, А. Голованов].

Задача 6. «Последовательность $\{a_n\}$ строится следующим образом: $a_1 = p$ — простое число, имеющее ровно 300 ненулевых цифр, a_{n+1} — период десятичной дроби $1/a_n$, умноженный на 2. Найдите число a_{2003}» [1, №668, И. Богданов, А. Храбров].

Задача 7 [23, № 8.2.5]. Найти геометрическую прогрессию, если сумма первых трех членов равна 7, а их произведение равно8.

Задача 8. [23, № 8.2.7]. Частное от деления 4-го члена геометрической прогрессии на ее первый член равно 64, третий член прогрессии равен 8. Найти 1-й член прогрессии.

Задача 9 [23, №8.2.9]. В геометрической прогрессии сумма первых трех членов равна 9, а сумма первых шести членов равна – 63. Найдите сумму первых десяти членов этой прогрессии.

Задача 10 [23, №8.2.15]. Найти третий член геометрической прогрессии, если ее знаменатель равен 3, а сумма первых четырех членов равна – 40.

Организация контроля по результатам поискового этапа эксперимента была осуществлена в следующей форме: выполнение учащимися индивидуального домашнего задания по теме.

Приведем пример варианта ИДЗ по теме «Арифметическая и геометрическая прогрессия», выдаваемых учащимся сроком на одну неделю.

ВАРИАНТ 2.

«1. Сумма третьего и девятого членов арифметической прогрессии равна 6, а их произведение равно 135/16.Найти сумму первых 15 членов этой прогрессии. Ответ: 37 24 или 52,5.

2. Уравнение $x^2 + ax + в = 0$ имеет корни x_1 и x_2, а уравнение $y^2 + 3ay +$ + $2в + 2 = 0$ имеет корни y_1 и y_2. Числаx_1 y_1, x_2 и y_2 - последовательные члены арифметической прогрессии. Найти а, в, с. Ответ: (2,3), (-2,3).

3. Найти знаменатель бесконечно убывающей геометрической прогрессии, у которой каждый член в 4 раза больше суммы всех ее последующих членов. Ответ: 1/5.

4. Решить уравнение: $(x-1)/x + (x-2)/x + (x-3)/x + \ldots + 1/x = 3$, где x - целое положительное число. Ответ: 7.

5. Сумма трех чисел, образующих арифметическую прогрессию равна 2, а сумма квадратов этих же чисел равна 14/9. Найти эти числа.

Ответ:1/3, 2/3, 1.

6. Найти первый член и знаменатель геометрической прогрессии, если $a_4 - a_2 = -45/32$, $a_6 - a_4 = -45/512$. Ответ: 6, 1 /4 или -6, -1/4.

7. Корни уравнения $x^4 - 10x^2 + a = 0$ составляют арифметическую прогрессию. Найти а. Ответ: 9.

8. Четыре числа a,в,c и d являются членами геометрической прогрессии. Доказать, что $(a-c)^2 + (b-c)^2 + (b-d)^2 = (a-d)^2$.

9. Найти сумму всех четных двузначных чисел. Ответ: п = 45, 2430.

10. Первый член арифметической прогрессии равен 1, а сумма первых девяти членов равна 369. Первый и девятый члены геометрической прогрессии совпадают с первым и девятым членами арифметической. Найти седьмой член этой геометрической прогрессии. Ответ: $в_7 = 27$» [64].

Наибольшую трудность у учащихся вызвали задачи на геометрическую и смешанную прогрессии (по результатам выполнения ИДЗ) [64].

Наибольший интерес вызвали задачи на поиск закономерностей в составлении числовой последовательности, старинные задачи на прогрессии, задачи из «Занимательной алгебры» Я.И. Перельмана [38]: Древнейшая прогрессия. Поливка огорода. Кормление кур. Бригада землекопов. Яблоки. Покупка лошади. Вознаграждение воина.

Итоги поискового эксперимента свидетельствуют о том, что: олимпиадные задачи на последовательности способствует формированию познавательного интереса и мотивации к математике, развитию творческих способностей учащихся, развивают навыки самостоятельной работы.

Выводы по второй главе

Итак, в первой главе представлено содержание и методические особенности проектирования технологии обучения В.М. Монахова по теме «Последовательности и прогрессии в курсе алгебры общеобразовательной школы.

1. Выделены основные цели и задачи обучения теме «Последовательности и прогрессии» в курсе алгебры общеобразовательной школы.

2. Спроектировано содержания темы «Арифметическая и геометрическая прогрессии» в рамках технологии В.М. Монахова.

3. Разработан элективный курс «Задачи на прогрессии» как дополнение содержания базового уровня в 9 классах.

4. Разработана система задач по теме для подготовки учащихся к итоговой аттестации (ОГЭ и ЕГЭ).

5. Приведены результаты констатирующего и поискового этапов педагогического эксперимента.

Заключение

1. Установлено, что одной из актуальных задач Концепции развития математического образования в Российской Федерации является задача обеспечения отсутствия пробелов в базовых знаниях для каждого обучающегося, которая может быть решена за счет применения учителем в процессе обучения математике различных технологий и методик обучения.

2. Определены особенности технологии обучения математике В.М. Монахова.

3. Раскрыта сущность методики уровневой дифференциации обучения математике как основы реализации технологии В.М. Монахова.

4. Определены основные цели и задачи обучения теме «Последовательности и прогрессии» в курсе алгебры общеобразовательной школы, представлен анализ теоретического и задачного материала на прогрессии в учебниках алгебры 9 классов.

5. Обоснована и спроектирована педагогическая технология В.М. Монахова по теме «Последовательности и прогрессии» на основе которой реализуется уровневая дифференциация обучения математике.

6. Разработана программа элективного курса «Задачи на прогрессии» как дополнение содержания базового уровня знаний, предназначенная для учащихся 9 классов общеобразовательной школы

7. Представлена система задач на арифметическую и геометрическую прогрессии для подготовки к итоговой аттестации учащихся.

8. Проведен педагогический эксперимент, в ходе которого апробирована технология развивающего обучения решению олимпиадных задач по теме «Последовательности и прогрессии». Результаты эксперимента показали, что олимпиадные задачи на последовательности способствует формированию познавательного интереса и мотивации к математике, развитию творческих способностей учащихся, развивают навыки самостоятельной работы.

Список используемой литературы

1. Агаханов Н.Х. Всероссийские олимпиады школьников по математике 1993–2006: Окружной и финальный этапы. -М.:МЦНМО, 2007. - 472 с.

2. Алфутова Н.Б. Алгебра и теория чисел. Сборник задач для математических школ. / Н.Б Алфутова, А.В. Устинов. – М.: МЦНМО, 2002. – 264 с.

3.Балаян, Э.Н. 1001 олимпиадная и занимательная задачи по математике / Э.Н. Балаян. – 3-е изд. – Ростов н/Д : Феникс, 2008. – 364 с.

4. Бахусова Е. В. Технология проектирования учебного процесса: подготовительный и проектировочный этапы / Е.В. Бахусова // Проблемы современного образования. –2011. –№2. – С. 111-122.

5. Безрукова В.С. Педагогика. Проективная педагогика: учебник для индустриально-педагог. техникумов и для студентов инженерно-педагогических специальностей. – Екатеринбург: Деловая книга, 1999. – 329 с.

6. Бен И. Продуктивное обучение, слагаемое системы / И. Бен, И. Шнайдер // Школьные технологии. – 2000. – № 3. – С. 59.

7. Беспалько В.П. Слагаемые педагогические технологии / В.П. Беспалько. – М.: Педагогика. – 1989. – 192 с.

8. Боголюбов В.И. Педагогическая технология: эволюция понятия / В.И. Боголюбов // Советская педагогика. – 1991. – №9. – С. 123–128.

9. Болотюк Л.А. Графовое моделирование как средство уровневой дифференциации текстовых задач в курсе алгебры 8-9 классов: автореферат дис. … канд. пед. наук: 13.00.02/ Моск. гос. гуманитарный ун-т им. М.А. Шолохова.− М, 2002.−22 с.

10. Брадис В.М. Методика преподавания математики в средней школе / под ред. А.И. Маркушевича. – 3-е изд. – М.: Учпедгиз. – 504 с.

11. Бурмистрова Т.А. Алгебра. Сборник рабочих программ. 7–9 классы : пособие для учителей общеобразоват. организаций / Т.А. Бурмистрова. – 2-е изд., доп. – М.: Просвещение, 2014. – 96 с.

12. Воробьев Н.Н. Числа Фибоначчи / Н.Н. Воробьёв. – 5-е изд. – М.: Наука, 1984. – 144 с.

13. Дорофеев Г.В. Алгебра. 9 класс : учеб. для общеобразоват. учреждений / под ред. Г. В. Дорофеева. – 5-е изд. – М.: Просвещение, 2010. – 304 с.

14. Ивлев Б.М. Задачи повышенной трудности / Б.М. Ивлев и др. – М: Просвещение, 1990. – 250 с.

15.Интернет-проект «Задачи». [Электронный ресурс]. – Режим доступа: https://problems.ru/view_by_subject_new.php?parent=152&start=30 (дата обращения 10.04.2021)

16. Кларин М.В. Педагогическая технология в учебном процессе. Анализ зарубежного опыта / Кларин М.В. – М.: Знание, 1989. – 80 с.

17. Колягин Ю.М. Алгебра. 9 класс : учеб. для общеобразоват. организаций / Ю.М.Колягин, М. В. Ткачёва, Н. Е. Фёдорова, М. И. Шабунин. – М.: Просвещение, 2014. – 304 с.

18. Колягин Ю.М. Алгебра. Методические рекомендации. 9 класс: учеб. пособие для общеобразоват. организаций / Ю.М. Колягин, М.В. Ткачёва, Н.Е. Фёдорова, М. И. Шабунин. – 2-е изд. – М.: Просвещение, 2017. 159с.

19. Коменский Я.А. Педагогическое наследие / В.М. Кларин, А.Н. Джуринский. – М.: Педагогика, 1989. – 416 с.

20. Концепция развития математического образования в Российской Федерации(утв. распор. Правительства РФ от 24 декабря 2013 г. N 2506-р) [Электронный ресурс]. – Режим доступа: https://www.garant.ru/products/ipo/prime/doc/70452506/(дата обращения 21.02.2021)

21. Косино О.А. Методические особенности алгебраической подготовки школьников посредством использования интеграции педагогических и информационных технологий: автореферат дис. … канд. пед. наук: 13.00.02/ Моск. гос. гуманитарный ун-т им. М.А. Шолохова.− М, 2009.−22 с.

22. Кукушина В.С. Педагогические технологии: Учебное пособие для студентов педагогических специальностей / Под обшей редакцией В.С. Кукушина. – М.: ИКЦ «МарТ»: – Ростов н/Д: «МарТ», 2006. – 336 с.

23. Куланин, Е.Д. 3000 конкурсных задач по математике. / Е.Д. Куланин [и др.] – 5-е изд., испр. – М.: Айрис-пресс, 2003. – 624 с.

24. Лысенко Ф.Ф. Математика. 9-й класс. Подготовка к ОГЭ-2021. 40 тренировочных вариантов по демоверсии 2021 года / учебно-методическое пособие / под ред. Ф.Ф. Лысенко, С.О. Иванова. – Ростов н/Д: Легион, 2020. - 384 с.

25. Макарычев Ю.Н. Алгебра. 9 класс : учеб. для общеобразоват. организаций / Ю.Н. Макарычев, Н.Г. Миндюк, К.И. Нешков, С.Б. Суворова; под ред. С.А. Теляковского. – 21-е изд. – М.: Просвещение, 2014. – 271 с.

26. Макарычев Ю.Н. Изучение алгебры в 7–9 классах : пособие для учителей/ Ю.Н. Макарычев, Н.Г. Миндюк, С.Б. Суворова, И.С. Шлыкова. – 4-е изд. – М.: Просвещение, 2011. – 304 с.

27. Материалы вступительных экзаменов в ВУЗы // Математика в школе. 1989, №2; 1991, №2, №4; 1997, №1; 2000, №10; 2001, №2, №7; 2002, №2; 2003, №1 и др.

28. Мерзляк А.Г. Алгебра : учеб. для 9 кл. общеобразоват. учеб. заведений с обуч. на рус. яз. : пер. с укр. / А.Г. Мерзляк, В.Б. Полонский, М.С. Якир. –Х.: Гимназия, 2017. – 272 с.

29. Методика и технология обучения математике. Курс лекций: пособие для вузов / под науч. ред. Н.Л. Стефановой, Н.С. Походовой. – М.: Дрофа, 2005. – 416 с.

30. Монахов В.М. Аксиоматический подход к проектированию педагогической технологии // Педагогика. 1997. - № 6. – С. 26 – 31.

31. Монахов В.М. Технологические основы проектирования и конструирования учебного процесса: Монография / В.М. Монахов. – Волгоград: Перемена. – 1995. – 152 с.

32. Мордкович А. Г. Алгебра. 9 класс. В 2 ч. Ч. 1. Учебник для учащихся общеобразовательных учреждений / А. Г. Мордкович, П. В. Семенов. – 12-е изд., стер. – М.: Мнемозина, 2010. – 224 с.

33. Морозов И.Н. Арифметическая прогрессия в итоговой аттестации по математике в основной школе // Вестник магистратуры. - 2021. - № 4.

34. Морозов И.Н. Использование технологии проектирования образовательного процесса академика В.М. Монахова при изучении темы «Последовательности и прогрессии» в курсе алгебры 9 класса // «Молодежь. Наука. Общество»: Всероссийская студенческая научно-практическая междисциплинарная конференция (Тольятти, декабрь 2020 года): сборник студенческих работ / отв. за вып. С.Х. Петерайтис. – Тольятти: ТГУ, 2021.

35. Морозов И.Н. Элективный курс «Всюду прогрессии» для учащихся 9 классов основной школы// Материалы Регион. научно-практич. конф. студентов и аспирантов вузов Могилевской области «Молодая наука – 2021» (апрель 2021 г., Могилевский государственный университет им. А.А. Кулешова).

36. Назарова Т.С. Педагогические технологии: новый этап эволюции? / Т.С. Назарова // Педагогика. − 1997. – №3. – С. 20–27.

37. Никольский С.М. Алгебра. 9 класс: учеб. для общеобразоват. организации / С. М. Никольский, М. К. Потапов, Н. Н. Решетников, А. В. Шевкин. – М.: Просвещение, 2014. – 335 с.

38. Перельман Я.И. Живая математика. Математические рассказы и головоломки. - М.: Просвещение, 2007.

39. Петраков И.С. Математические кружки. – М.: Просвещение, 1987.

40. Петренко И. А. Ретроспективный анализ понятия «Педагогическая технология» в отечественной и зарубежной педагогике XX – начала XXI вв. // Сибирский педагогический журнал. – 2007. – №11. - С. 221-232.

41. Пидкасистый П.И. Педагогика. Учебное пособие для студентов педагогических вузов и педагогических колледжей / Под ред. П.И. Пидкасистого. – М: Педагогическое общество России, 1998. – 640 с.

42. Пионтковский В.В. Педагогическая технология в системе научной классификации / В.В. Пионтковский // Вестник Ярославского государственного университета. – 2005. – Том 2. – №4. – С. 32-37.

43. Потапов М.К. Алгебра. Методические рекомендации. 9 класс : пособие для учителей общеобразоват. организаций / М.К. Потапов, А.В. Шевкин. – М. : Просвещение, 2015. – 191 с.

44. Примерная основная образовательная программа основного общего образования / М-во образования и науки РФ. – М.: Просвещение, 2015. – 560 с. [Электронный ресурс]. – Режим доступа: https://mosmetod.ru/files/dokumenty/primernaja-osnovnaja-obrazovatelnaja-programma-osnovogo-obshchego-obrazovanija.pdf(дата обращения 25.01.2021)

45. Савин А.П. Занимательные математические задачи /Художник А.В. Кардашук, М.В. Колденкова, А.Н. Савельев. – М.: АСТ, 1995. -176 с.

46. Селевко Г.К. Современные образовательные технологии: Учебное пособие / Г.К. Селевко. – М.: Народное образование. – 1998. – 256 с.

47. Семенов А.В. Математика. Основной государственный экзамен. Готовимся к итоговой аттестации: [учебное пособие] / под ред. И. В. Ященко; МЦНМО. – М.: Издательство «Интеллект-Центр», 2021. – 296 с.

48. Симоненко В.Д. Педагогические теории, системы, технологии: Учеб. пособие для пед. работников и студентов педвузов / В.Д. Симоненко, А.М. Воронин. – 2. изд., доп. и перераб. – Брянск: БГПУ, 1998. – 190 с.

49. Сканави М.И. Сборник задач по математике для поступающих во ВТУЗы. / под ред. М.И. Сканави. – М: Высшая школа, 1988.

50. Сластенин В.А. Педагогика. – М.: Школа-Пресс. – 1997. – 512 с.

51. Смирнов С.А. Педагогика: теории, системы, технологии: учебник для студ. высш. и сред учеб, заведений / С.А.Смирнов, И.Б. Котова, Е.Н. Шиннов и др. – 6-е изд., перераб. – М: «Академия», 2006. – 512 с.

52. Советский энциклопедический словарь / А.М. Прохоров. – 4-е изд., испр. и доп. – М.: Советская энциклопедия, 1989. – 1633 с.

53. Современные образовательные технологии: учебное пособие / под ред. Н.В. Бордовской. – М.: КНОРУС, 2010. – 432 с.

57. Соловьев И.О. Практикум по решению олимпиадных задач по математике: Учебное пособие. – Псков: ПГПУ, 2010. – 96 с.

58. Терешин Н.А. Прикладная направленность школьного курса математики / Н.А. Терешин – М. Просвещение, 1990. – 224 с.

59. Ткачёва М.В. Алгебра. Дидактические материалы. 9 класс: учеб, пособие для общеобразоват. организаций / М.В. Ткачёва, Н.Е. Фёдорова, М.И. Шабунин. – 2-е изд. – М.: Просвещение, 2016. – 127 с.

60. Ткачёва М.В.Алгебра. Дидактические материалы. 9 класс: учеб, пособие для общеобразоват. организаций / М.В. Ткачёва, Н.Е. Фёдорова, М.И. Шабунин. – 2-е изд. – М.: Просвещение, 2016. – 127 с.

61. Турнир Городов [Электронный ресурс]. – Режим доступа: https://www.turgor.ru (дата обращения 14.04.2021)

62. Турнир имени М.В. Ломоносова. [Электронный ресурс]. – Режим доступа: https://turlom.olimpiada.ru/ (дата обращения 14.04.2021)

63.Утеева Р.А. Теоретические основы организации учебной деятельности учащихся при дифференцированном обучении математике в средней школе: Монография / Р.А. Утеева. – М.: Прометей, 1997. – 230 с.

64. Утеева Р.А. Из опыта организации школы математического развития и образования // В сб.: Актуальные проблемы естественнонаучного и математического образования. Материалы XXI Всеросс. (IX с Международным участием) научно-практич. конф. − Самара: СГСПУ, 2018. - С. 319-323.

65. Федеральный государственный образовательный стандарт основного общего образования [Электронный ресурс]. – Режим доступа: https://fgos.ru/LMS/wm/wm_fgos.php?id=osnov (дата обращения 10.09.2020).

66. Фридман Л.М. Психолого-педагогические основы обучения математике в школе: Учителю математики о педагогической психологии. – М.: Просвещение, 1980. – 160 с.

67. Цыпкин А.Г. Справочник по математике. – М.: Наука, 1981. – 480 с.

68. Черных М.В. Технологический подход к проектированию учебного процесса по курсу «Алгебра 8 класс»: автореферат дис. … канд. пед. наук: 13.00.02/ Моск.гос. открытый пед. ун-т.− М, 2000. − 22 с.

69. Шапиро И.М. Использование задач с практическим содержанием в преподавании математики / И.М. Шапиро. – М.: Просвещение 1990. – 96 с.

70. Ященко И.В.ОГЭ. Математика: типовые экзаменационные варианты: 0-39 36 вариантов / под ред. И. В. Ященко. – М.: Национальное образование, 2021. – 224 с.

71. Association of Mathematics Teacher Educator (AMTE). 2006 Preparing-teacherstousetechnologytoenhancethelearningofmathematics: A position of the Association of Mathematics Teacher Educators.

72. Baker, J. W. (2000). The "Classroom Flip": Using web course management tools to become the guide by the side. Selected Papers from the 11th International Conference on College Teaching and Learning (pp. 9–17).

73. Doering A, Veletsianos G, Scharber C, and Miller C. 2009 Using the technological, pedagogical, and content knowledge framework to design online learning environments and professional development Journal of Educational Computing Research 41 319.

74. Jimoyiannis A. 2010 Designing and implementing an integrated technological pedagogical science knowledge framework for science teacher professional development Computer & Education55 1259.

75. Wang, Zeyu et al. "Pedagogical Readiness of Mathematics Teachers to Implement Innovative Forms of Educational Activities". Eurasia Journal of Mathematics, Science and Technology Education, vol. 14, no. 1, 2018, pp. 543-552.

Приложение А

Анкета для учителей

1. Что Вы понимаете под технологией обучения?

2. Напишите, какие виды технологий Вы применяете на уроках алгебры.

3. Как часто на уроках алгебры Вы используете дифференцирование и дозирование домашнего задания?

а) всегда;

б) иногда при изучении определённой темы;

в) никогда.

4. Считаете ли Вы целесообразным использование дифференцированных домашних заданий при изучении темы «Последовательности и прогрессии»?

а) да; б) нет.

6. Используете ли вы при обучении теме «Последовательности и прогрессии» информационные технологии?

а) да, всегда; б) да, иногда; в) нет.

5. Считаете ли Вы, что использование различных видов и форм работы на уроках алгебры повышает качество усвоения учащимися учебного материала?

а) да; б) нет.

6. Что Вы знаете о технологии В.М. Монахова?