ГОСУДАРСТВЕННЫЙ КОМИТЕТ РФ
ПО ВЫСШЕЙ ШКОЛЕ

ТОЛЬЯТТИНСКИЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

СБОРНИК ТЕСТОВ ПО ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКЕ ДЛЯ РЕЙТИНГОВОЙ СИСТЕМЫ ОЦЕНКИ ЗНАНИЙ СТУДЕНТОВ

Учебное пособие

Тольятти, 1994 г.

Н.К. Чернова

В.Г. Шнейдер

СБОРНИК ТЕСТОВ ПО ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКЕ ДЛЯ РЕЙТИНГОВОЙ СИСТЕМЫ ОЦЕНКИ ЗНАНИЙ СТУДЕНТОВ

УДК 378

О.К.Чернова, Е.Г.Шнейдер. Сборник тестов по высшей математике для рейтинговой системы оценки знаний студентов: Учебное пособие.- Тольятти: ТолПИ, 1993. 77 с.

Предложена концепция рейтинговой интенсивной технологии модульного обучения высшей математике, даётся полное методическое обеспечение одного из модулей, образцы входных и выходных тестов, викторинные вопросы по всем остальным модулям.

Предназначено для преподавателей и студентов технических вузов.

Рис. 3. Табл. I. Библиогр.: I6 наимен.

Рецензенты: кафедра "Педагогика" Тольяттинского политехнического института (зав.кафедрой к.п.н. А.Н.Ярыгин); Г.П.Корнев, д.п.н.профессор, декан факультета физико-математических наук ТФСГПИ.

Научный редактор к.ф-м.н. Ю.В.Климевич.

Утверждено редакционно-издательской секцией методического совета института.

ВВЕДЕНИЕ

Целью пособия является построение курса высшей математики на сочетании принципов модульности, интегративности и рейтинговой системы оценки знаний студентов. Отношение к студенту не только как к объекту, но и активному субъекту обучения, заложенное при проектировании модульной технологии, содействует решению задач опережающего, развивающего обучения. Использование индивидуальных домашних заданий [I-13] с проверкой их самими студентами по эталонам решений развивает у них самостоятельность и индивидуальные творческие способности в среде деятельностных задач с учётом потенциальных возможностей и мотивации. Рейтинговая система контроля, помимо обеспечения регулярности учебных занятий путём систематического контроля, повышения уровня остаточных знаний и т.п., позволяет провести дифференциацию студентов, необходимую при формировании контингента на каждой ступени образования. В разд.2 даётся полное методическое обеспечение одного модуля. Оно содержит: граф темы, таблицу учебных элементов, диагностично поставленные цели обучения, 8 вариантов входных тестов для стартового рейтинга с эталонами решений и ответами, технологии к четырём практическим занятиям с вариантом экспресс-контроля в конце каждого, образец варианта индивидуального домашнего задания с матрицей ответов, опорную схему основных теоретических положений, викторинные вопросы с ответами, 25 вариантов выходных тестов для определения качества усвоения модуля с матрицей ответов для быстрой проверки. По аналогии с этим модулем можно спроектировать и все остальные модули высшей математики, показанные на рис.I.

В разд.3 даются образцы входных и выходных тестов, а также викторинные вопросы к другим модулям высшей математики. Количество баллов за каждый тест определено по количеству единичных деятельностных актов - операций в предлагаемых заданиях. Каждый преподаватель должен самостоятельно разработать принципы, методы и формы организации контроля знаний, форму отчётности, систему подсчёта рейтинга по каждому виду занятий в целом по модулю и по их совокупности, правило выведения итоговой оценки. Чётко определять сроки выполнения всех видов работ, порядок и сроки контроля и отчётности, ответственность за уровень знаний и качество выполнения работ.

Один из вариантов определения рейтинга по модулю предлагается в [14,с.57] . Специально для студентов первого курса предназначено методическое пособие [15]. Цель этого пособия - оказать помощь студентам в освоении теоретических положений высшей математики, развитии логического и алгоритмического мышления, овладении методами решения прикладных задач, научить студентов осуществлять самоконтроль своих знаний.

I. ПОСТРОЕНИЕ МОДУЛЬНОЙ ТЕХНОЛОГИИ С РЕЙТИНГОВОЙ СИСТЕМОЙ ОЦЕНКИ ЗНАНИЙ ПО ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКЕ

Процесс обучения представляет собой совокупную деятельность многих его участников. Координация и объединение их усилий требует постоянного взаимодействия между ними, что может быть достигнуто посредством рассмотрения процесса обучения как разновидности технологии. Педагогическая технология (ПТ) как процесс управления познавательной деятельностью включает в себя следующие этапы: целеполагание, информация, прогнозирование, принятие решений, организация исполнения, контроль и коррекция. Ведущим и системообразующим из них является целеполагание [14].

Цель обучения формирует информационную основу, служит основанием для прогнозирования возможных технологических результатов, выступает в качестве критерия принятия педагогических решений, служит эталоном для контроля и оценки результатов на разных этапах обучения, позволяет проектировать корригирующие и новые ПТ. Поэтому важным при определении целей ПТ является их диагностичность. Цели достигаются в условиях различных ограничений и изменчивых внешних условий. В связи с этим всегда возникает задача определе-

ния реальных результатов, причин и степени отклонения от поставленных целей, устранения этих отклонений и предупреждения появления
их в будущем.

Решение этих задач достигается путём регулярного и систематического контроля учебного процесса, который должен не только помогать преподавателю управлять психическим развитием обучаемых, но
и воспитывать у обучаемых самостоятельность и готовность к самообразованию, формировать у них умение опережающего представления
целей и планируемых результатов познавательной деятельности.

Одним из способов организации эффективной обратной связи в ПТ
является модульное построение курсов с рейтинговой системой оценки
знаний. Модульная организация дисциплин позволяет осуществить целесообразную компоновку учебного материала, сохраняя цельность изложения, преемственность в изучении отдельных модулей, обеспечивая
требуемую со стороны смежных дисциплин и запросов специальности
гибкость образования. Учебно-методические комплексы-модули способствуют углубленной естественно-научной, технической и гуманитарной подготовке студентов и легко адаптируются для различных условий в кратчайшие сроки. Они позволяют создать максимально благоприятные условия для самостоятельной работы студентов. Методическое
обеспечение модуля строится в соответствии с диагностичными целями
на основе системного подхода.

Содержание обучения в модулях должно быть построено на высоком уровне обобщения материала с выделением инвариантов и базисных
учебных элементов. Наглядное предъявление информации оформляется
в виде логических схем, структур, алгоритмов и мнемоник, которые
повышают информационную ёмкость учебного материала и поднимают уровень его понимания. Особое место отводится вводной части содержания модуля, своеобразному "погружению" обучаемых в науку. В самом
начале выделяется предмет изучения со всеми связями, показывается
объективная сложность овладения новым модулем и его роль в общей
модели инженерной деятельности. Организации успешной самостоятельной работы способствует тесное сближение во времени всех видов познавательной деятельности, чёткая система ориентиров и указателей,
индивидуализация и дифференциация учебного материала, а также создание в группах атмосферы творческой состязательности.

Каждый учебный модуль содержит:

1. Входной тест - нулевой цикл для начала изучения материала модуля, позволяющий зафиксировать исходный уровень индивидуальной подготовки студента и уточнить систему педагогического воздействия.

2. Психолого-педагогически обоснованные технологии индивидуального обучения на практических занятиях.

3. Индивидуальные домашние задания по теме модуля для самостоятельного устранения недостатков в подготовке студентов с эталонами решений.

4. Дидактические материалы для пооперационной текущей оперативной проверки знаний и умений студентов.

5. Опорную схему или симптоматичную таблицу основных теоретических положений модуля.

6. Набор викторинных вопросов для углубленного понимания основных понятий.

7. Выходной тест для определения уровня компетентности студентов по изученному материалу и определения рейтинга.

8. Методическое пособие для самостоятельного изучения модуля, ликвидации пробелов в занятиях по наиболее важным разделам высшей математики. Структура курса высшей математики представлена на рис.1.

Учебных модулей в курсе высшей математики 12. Кроме того, имеется ещё нулевой модуль, содержащий материалы психолого-педагогического содержания для преподавателей, а также варианты курсовых работ, типовых расчётов и выходных семестровых тестов, ответы к ним и эталоны решений.

Одна из главных целей обучения состоит в переводе обучаемых из объекта в субъект управления своей познавательной деятельностью. Ведущей характеристикой человека как субъекта деятельности является его активность, проявляющая себя в инициативном, самостоятельном, творческом и преобразующем отношении к внешней действительности, к другим людям и к самому себе. Качественная, содержательная сторона активности раскрывается в системе действующих потребностей, мотивов, установок, интересов, обусловливающих совершение познавательных действий. Поэтому при проектировании содержания модуля, кроме уровня профессиональной направленности, должно быть

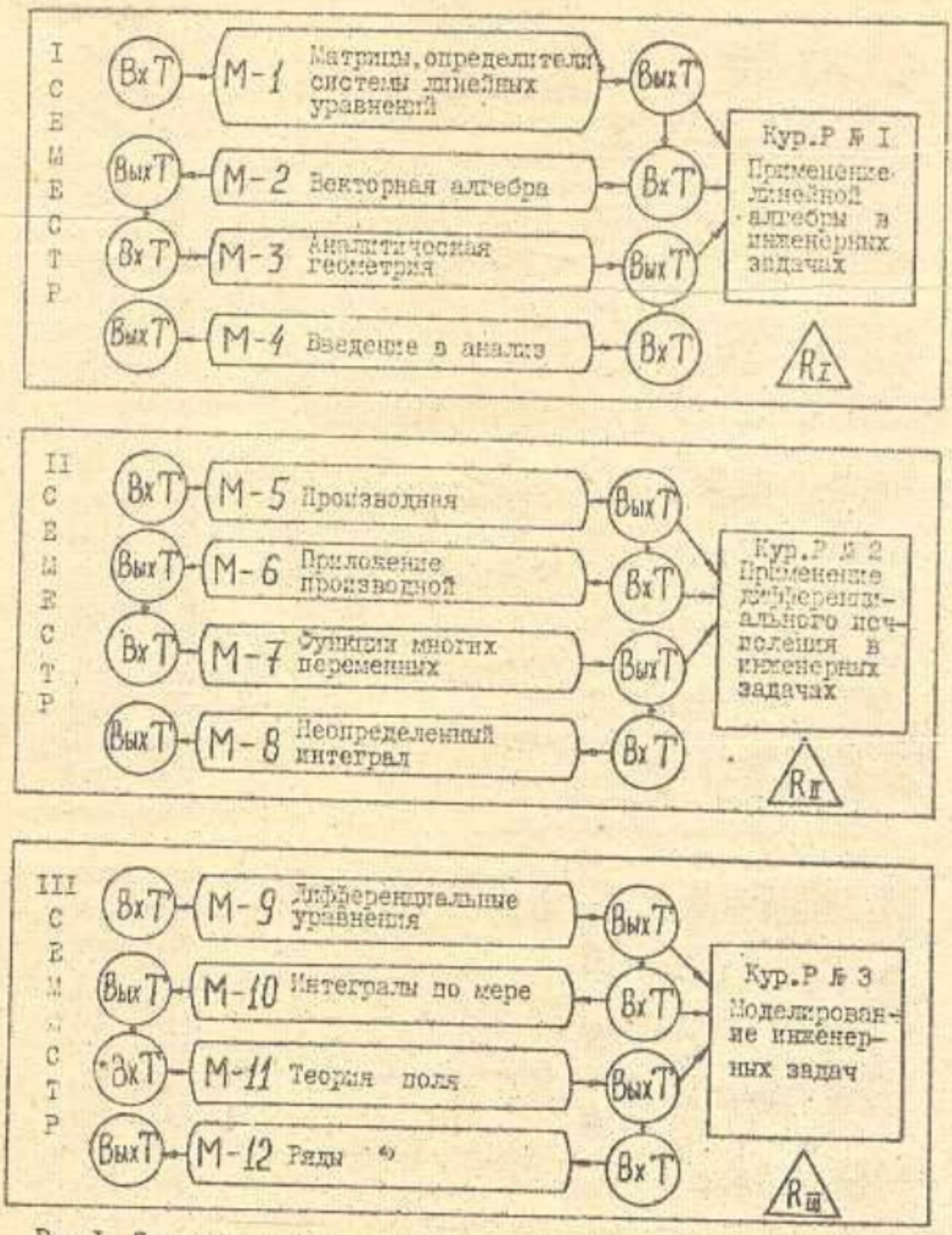


Рис.I. Структура модульного построения курса высшей математики: *ВхТ* – входной тест; *ВыхТ* – выходной тест; М – модуль; R – рейтинг; Кур.Р – курсовая работа предусмотрено формирование мотивационно-целевой основы учения. Не бывает деятельности немотивированной. Мотивационное обеспечение учебного процесса (один из новых принципов обучения) является тем рычагом управления, который позволит добиться высшего модуса активности и самостоятельности учащихся – их саморегуляции, а точнее самоуправление, при котором реализуется активность субъекта, его актуальные и потенциальные возможности не только в организации и преобразовании окружения, но в организации и управлении своими действиями и поведением.

Важным аспектом организации модульного обучения является готовность студентов к изучению модулей и самооценка их готовности к контролю знаний. Эти проблемы решаются при помощи рейтинговой системы оценки знаний. Она базируется на широко распространенной в лучших школах и университетах Европы и США так называемой системе "POINT RATING", в которой используется набираемый во время обучения индивидуальный кумулятивный индекс (ИКИ), называемый рейтингом. Технология изучения модуля с рейтинговой оценкой знаний студентов представлена на рис.2.

В основе проектирования технологии лежат следующие принципы:

разбиение курса дисциплины на блоки (модули), составляющие логически завершённые части курса; содержание модуля включает в себя понятийный аппарат (ключевые и вспомогательные понятия), обучающую программу, вопросы для самостоятельного изучения, материалы для творческой работы;

диагностично поставленные цели обучения;

система контрольных заданий, сопровождающая модульную разбивку курса (коллоквиумы, индивидуальные домашние задания, курсовые работы, контрольные работы, входные и выходные тесты и т.д.), в баллах с условиями и сроками их сдачи, что позволяет преподавателю и, что особенно важно, студенту в любой момент изучения курса чётко представить картину усвоения предмета;

существенная перестройка структуры курса с упором на самостоятельную работу и индивидуализацию обучения;

разработка механизма мотивации.

Основная задача преподавателя - создать максимально благоприятные условия для самостоятельной работы студентов, обеспечить свободный доступ к учебным материалам и методическим пособиям, удобный режим консультаций и т.д. и организовать максимально объективный и тщательный контроль. Смещение акцента в учебной деятельности студента на самостоятельную работу требует полного обеспечения учебного процесса комплектами действительно необходимых современных учебных пособий, сборников задач и других видов учебных материалов.

Под дидактическим модулем понимается логически завершённый раздел курса со специально разработанным комплексом методических пособий, включающий в себя информационную часть, логические схемы или графы, виды учебной деятельности и контроль.

Структурирование содержания курса высшей математики по модульному принципу обеспечивает системное представление о дисциплине в целом и является естественной основой для различных форм контроля. Входной контроль связывает в единое целое развитие и совершенствование учебного процесса. Сложнейшим этапом в разработке системы рейтинга является разработка курсовых работ по высшей математике, требующих от обучаемых синтеза целой группы полученных знаний и среди проблемных ситуаций и задач, поиска и самое главное - принятия решения [15].

Применение рейтинга с его балльной системой оценок всех видов деятельности даёт возможность не только чётко организовать дело обучения, но и открывает новые возможности индивидуализации учебного процесса, позволяет перейти к более дифференцированному определению места студента по каждому виду деятельности. При балльной оценке идёт выстраивание в "затылок", а это - процесс, задевающий самолюбие. Каждый студент сравнивает себя не с какой-то обширной группой "отличников" или "хорошистов", а с конкретными лицами. Положительное воздействие оказывает не только абсолютное значение его суммы баллов, но и всевозможные результаты статистической обработки данных рейтинга. Средний балл позволяет оценить уровень усвоения группы в целом и соотнести каждому студенту свой рейтинг с этой величиной. Доведение до сведения студентов их результатов вызывает стремление поднять свой рейтинг. Они начинают обращаться к преподавателю за дополнительными заданиями, принимают участие в предметных конференциях, пишут рефераты и т.д., т.е. самостоятельно углубляют свои знания и тем самым увеличивают за счёт премиальных баллов суммарный рейтинг.

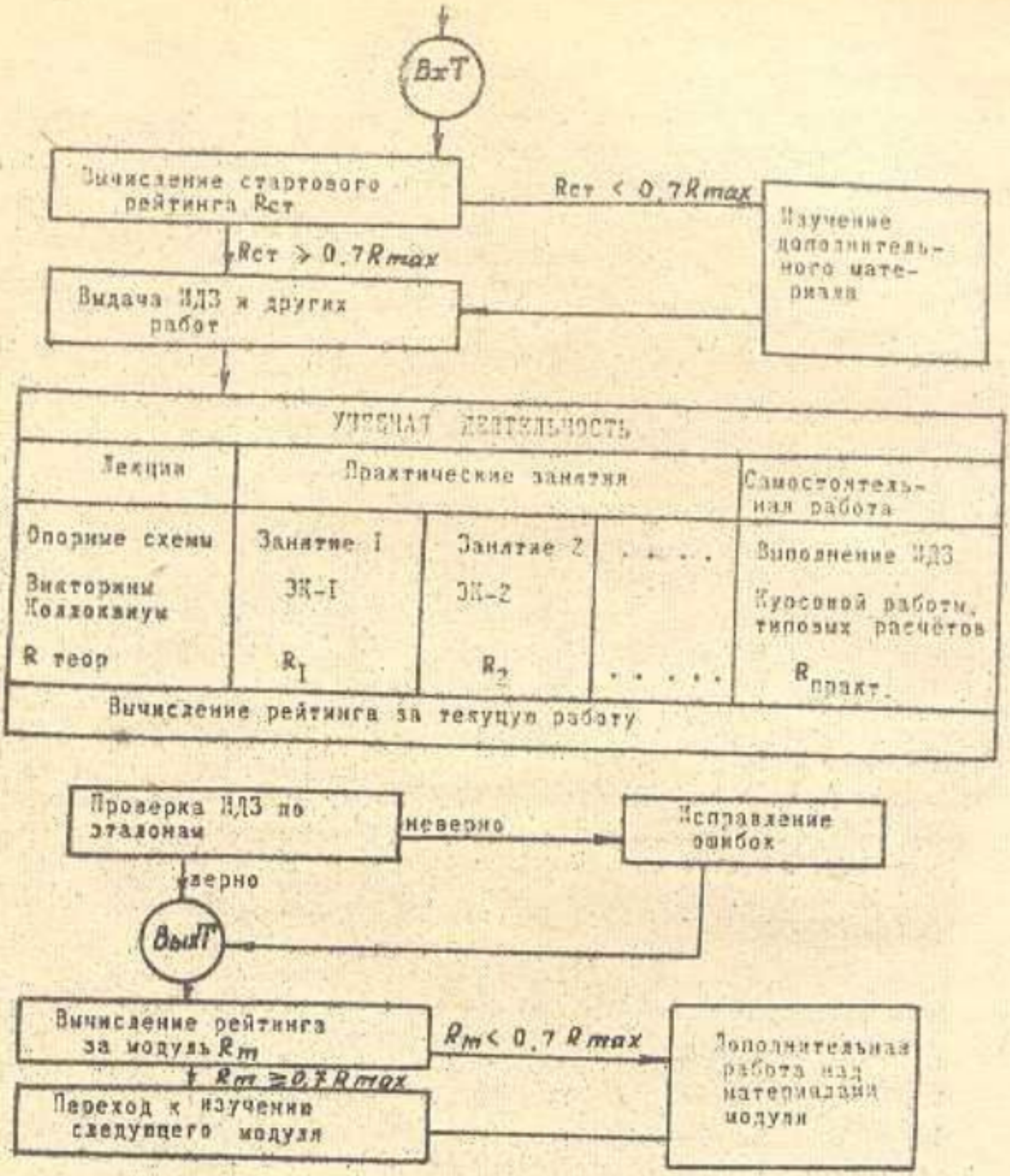


Рис.2. Технология изучения модуля: Вх Т – входной тест; Вых Т – выходной тест; Rст – стартовый рейтинг; R_{max} – максимально возможный рейтинг; ЭК – экспресс-контроль; ИДЗ – индивидуальное домашнее задание; R_m – рейтинг за модуль

При изучении высшей математики наиболее продуктивным является такой подход к обучению, который заключает в себе как мотивационные, так и познавательные структуры. Это достигается методами проблемного обучения и адаптации изучаемого материала к задачам будущей специальности. Проблемно-адаптивная технология внедрена для специальности 1204. В этой технологии предметно-содержательная интерпретация курса высшей математики, вытекающая из информационно-онтологического моделирования специалиста по обработке металлов давлением, подчиняется её организационно-деятельностной представленности в сложной ткани субъ т-субъективных взаимоотношений. Модульный метод обучения позволяет отсечь, сжать учебный материал до необходимого минимума и осуществить максимальную индивидуализацию продвижения студента в обучении, наиболее полно реализовать на практике известную теорию деятельности, разработанную отечественными психологами Л.С.Выготским, А.Н.Леонтьевым, Н.Ф.Талызиной и др.

Основу механизма, стимулирующего регулярную работу студентов в течение семестра, составляет сама идея рейтинга. Гарантированная система стимулов, основанная на рейтинге, включает в себя проходной балл на новую ступень обучения, создание в студенческой среде нового технологического климата здоровой состязательности, основанной на информации о личных успехах студента в учебе. К сожалению, пока не созданы механизмы мотивации интенсивного труда преподавателя, что существенно тормозит внедрение рейтинговой системы на всех специальностях вуза.

Преимущества данной технологии перед традиционной:

модульное изучение курса высшей математики стимулирует самостоятельную работу студентов;

появляется возможность индивидуального подхода к обучению;

после сдачи очередного модуля каждый студент занимает определенное место среди студентов группы и курса;

рейтинговая система оценки знаний оперативно выявляет наиболее и наименее подготовленных студентов;

имея объём необходимых знаний, студенты могут досрочно сдать экзамен или зачёт;

повышается активность студентов.

Результаты трёхлетней работы по этой технологии показали её эффективность.

2. МЕТОДИЧЕСКОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ МОДУЛЯ
(на примере раздела "Функции многих переменных")

2.1. Дидактические цели и особенности оценки качества изучения модуля "Функции многих переменных"

Обучение в педагогической технологии должно подчиняться общим закономерностям технологического процесса и начинаться с постановки диагностичных целей. При изучении любого модуля необходимо планировать усвоение студентами на заданном уровне некоторой совокупности учебных элементов (УЭ). Важнейшей характеристикой изучаемого материала является уровень его усвоения α, отображающий развитие опыта учащегося в изучении темы. Таких уровней, предложенных В.П.Беспалько, четыре: узнавание (α = 1), воспроизведение (α = 2), применение (α = 3), творчество (α = 4).

В процессе изложения материала каждый УЭ можно преподнести на разной ступени обобщенности или фундаментальности (β). При этом, если УЭ излагается на описанном феноменологическом уровне, то β = 1, на качественном аналитико-синтетическом уровне β = 2, на уровне установления количественных соотношений, т.е. аналитико-прогностическом уровне β = 3, на аксиоматическом уровне β = 4.

Для того, чтобы цели были диагностичными, каждому УЭ модуля должны быть поставлены в соответствие планируемые уровень усвоения α и ступень фундаментальности β , которые определяются исходя из квалификационной характеристики с учётом графа темы (рис.3). Все УЭ модуля записываются в таблицу, в которой указываются начальный и конечный уровни значения α и β (табл.1).

Модуль "Функции многих переменных" является важным для становления инженера, так как с его помощью решаются задачи оптимизации процессов и явлений. Для изучения этого модуля студентам необходимо знать геометрический и физический смысл производной и её использование в решении экстремальных задач, умение строить графики функций, области и поверхности, решать системы уравнений и оперировать с векторами. Входной тест содержит 4 задания на этот материал и оценен в 18 баллов. Принцип оценки каждой задачи пооперационный. Если студент наберёт меньше 70% баллов на стартовом рейтинге, то это должно стать для него сигналом повторения соответствующих разделов

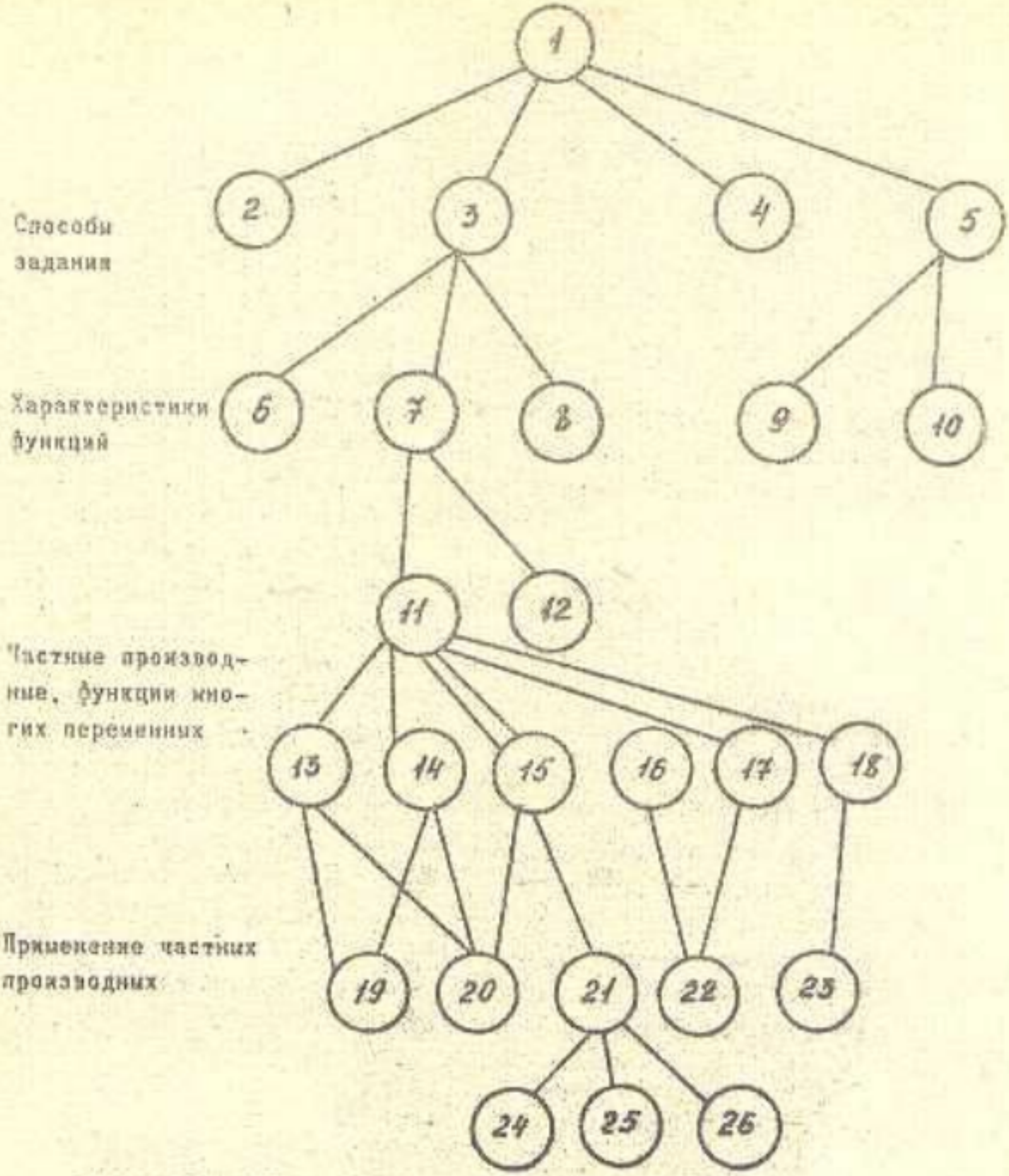


Рис.3. Граф УЭ модуля "Функции многих переменных"

Таблица I

ᴺᴺ	Название учебных элементов темы "Функции многих переменных"	$\alpha_{нач}$	$\alpha_{кон}$	$\beta_{нач}$	$\beta_{кон}$
I.	Функции многих переменных (ФМП)	-	2	-	2
2.	Табличный способ задания	I	I	I	I
3.	Аналитический способ задания	I	I	I	I
4.	Графический способ задания	I	I	I	I
5.	Скалярное поле	-	2	-	I
6.	Предел ФМП	-	I	-	I
7.	Непрерывность	-	I	-	I
8.	Точки, линии и поверхности разрыва	-	I	-	2
9.	Линии уровня	-	2	-	2
I0.	Поверхности уровня	-	2	-	2
II.	Частные производные	-	3	-	2
I2.	Теоремы существования	-	2	-	2
I3.	Производные сложных функций	-	3	-	2
I4.	Производные неявных функций	-	3	-	2
I5.	Производная по направлению	-	3	-	2
I6.	Частные дифференциалы	-	2	-	2
I7.	Производные высших порядков	-	3	-	2
I8.	Полный дифференциал	-	2	-	2
I9.	Касательная и нормаль к поверхности	I	2	I	2
20.	Градиент	-	3	-	3
2I.	Экстремум	I	3	I	3
22.	Приближённое вычисление функции	I	2	I	2
23.	Формула Тейлора	I	-	I	2
24.	Глобальный экстремум	-	3	-	3
25.	Условный экстремум	-	2	-	3
26.	Наибольшее и наименьшее значения функции в замкнутой области	I	2	I	3

математики. Входной тест рассчитан на 45 минут и проводится на первом занятии изучаемого модуля.

После изучения модуля "Функции многих переменных" студент должен уметь дифференцировать сложные и неявные функции, находить дифференциалы этих функций, применять частные производные к нахождению производных по направлению, градиентов, касательных плоскостей и нормалей, исследовать функции многих переменных на экстремумы. Задания первого уровня выходного теста имеют номера 1-5 и оценены в 20 баллов.

На втором уровне студент должен уметь решать задачи и на условный экстремум, находить наименьшее и наибольшее значения функций в замкнутой области, решать нестандартные задачи практического содержания. Эти задания в выходном тесте включены под номером 6 и оценены в 15 баллов.

Выходной тест рассчитан на 2 часа и предлагается студентам в часы самостоятельной работы под руководством преподавателя.

Индивидуальное домашнее задание по теме "Функции многих переменных" состоит из 13 заданий, из которых 12-е и 13-е относятся к II уровню, а остальные к I.

Материал данного модуля применяется в инженерных задачах. С помощью частных производных и экстремумов можно описывать напряженное и деформированное состояния сплошной среды, проверять совместность деформации, определять относительное изменение объема при деформациях. На этом материале основана курсовая работа "Применение дифференциального исчисления в моделировании инженерных задач", условия и требования которой выглядят следующим образом.

КУРСОВАЯ РАБОТА (2 семестр)

Тема "Функции многих переменных и их приложения в инженерных задачах"

Условия и требования курсовой работы 2

Для заданного векторного поля перемещений

$$\bar{u} = P(x,y,z)\,\bar{i} + Q(x,y,z)\,\bar{j} + R(x,y,z)\,\bar{k}.$$

необходимо:

1. Выразить длину и направление поля в точке $M(x,y,z)$.
2. Найти тензор дисторсии $\left[\frac{d\bar{u}}{d\bar{r}}\right]$.
3. Найти $grad\,\bar{u}$.
4. Разложить тензор дисторсии на симметричную и антисимметричную части.
5. Записать тензор деформации в произвольной форме $M(x,y,z)$.
6. Указать механический смысл компонентов тензора деформации.
7. Проверить условия совместности деформации.
8. Вычислить тензор деформации в точке $M_0(1,1,1)$. Определить его инварианты и записать уравнение поверхности деформации.
9. Определить главные удлинения и главные оси деформации.
10. Записать тензор деформации в главных осях, определить его инварианты и построить поверхность деформации.
11. В точке $N(1,1,?)$, принадлежащей эллипсоиду деформации записать уравнение касательной плоскости и нормали.
12. Выразить z из уравнения тензорного эллипсоида и исследовать эту функцию на экстремум.
13. Определить интенсивность деформации Γ и относительное изменение объёма $\frac{\Delta V}{V}$.
14. Определить вектор условного поворота сплошной среды в точке M_0.

2.2. Входные тесты к модулю "Функции многих переменных"
(восемь вариантов с матрицей ответов)

Вариант № 1

I. Движение задано зависимостью

$$S(t) = t^3 - 3t^2 + 1;$$

а) найти скорость в конце 2-й с; (2б)

б) исследовать $S(t)$ на экстремум; (4б)

в) сделать эскиз графика $S(t)$; (1б)

г) записать выражение для дифференциала; (1б)

д) составить уравнение касательной и нормали к графику $S(t)$ при $t = 1$. (2б)

2. Построить поверхность $z = 1 - x^2 - y^2$. (3б)

3. Определить направляющие косинусы вектора $\bar{n} = 2\bar{i} + 4\bar{j} - \bar{k}$. (2б)

4. Решить систему уравнений и сделать проверку (3б)

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ x^2 + xy + y^2 = 3. \end{cases}$$

Итого 18 баллов

Вариант № 2

I. Движение задано зависимостью

$$S(t) = t^4 - 6t + 4;$$

а) найти скорость в конце 2-й с; (2б)

б) исследовать $S(t)$ на экстремум; (4б)

в) сделать эскиз графика $S(t)$; (1б)

г) записать выражение для дифференциала; (1б)

д) составить уравнение касательной и нормали к графику $S(t)$ при $t = 1$. (2б)

2. Построить поверхность $\frac{x^2}{1} + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{1} = 1$. (3б)

3. Определить направляющие косинусы вектора $\bar{n} = \bar{i} - 2\bar{j} + \bar{k}$. (2б)

3. Решить систему уравнений и сделать проверку (3б)

$$\begin{cases} x + y = 2 \\ x^2 - xy + y^2 = 1. \end{cases}$$

Итого 18 баллов

Вариант № 3

I. Движение задано зависимостью
$$S(t)=t^3+6t^2+12t+4;$$

а) найти скорость в конце 2-й с; (2б)
б) исследовать $S(t)$ на экстремум; (4б)
в) сделать эскиз графика $S(t)$; (1б)
г) записать выражение для дифференциала; (1б)
д) составить уравнение касательной и нормали к графику $S(t)$ при $t=1$. (2б)

2. Построить поверхность $\frac{x^2}{1}+\frac{y^2}{4}-\frac{z^2}{1}=1$. (3б)

3. Определить направляющие косинусы вектора $\bar{n}=3\bar{i}-2\bar{j}+\bar{k}$. (2б)

4. Решить систему уравнений и сделать проверку
$$\begin{cases} x+y=0, \\ x^2+xy+y^2=1. \end{cases}$$ (3б)

Итого 18 баллов

Вариант № 4

I. Движение задано зависимостью
$$S(t)=-t^4+2t^2+3;$$

а) найти скорость в конце 2-й с; (2б)
б) исследовать на экстремум $S(t)$; (4б)
в) сделать эскиз графика $S(t)$; (1б)
г) записать выражение для дифференциала; (1б)
д) составить уравнение касательной и нормали к графику $S(t)$ при $t=1$. (2б)

д) Построить поверхность $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{1}=z^2$. (3б)

3. Определить направляющие косинусы вектора $\bar{n}=-2\bar{i}+3\bar{j}+\bar{k}$. (2б)

4. Решить систему уравнений и сделать проверку
$$\begin{cases} x-y=0, \\ x^2+xy+y^2=3. \end{cases}$$ (3б)

Итого 18 баллов

Вариант № 5

1. Движение задано зависимостью

$$S(t)=t^3-3t^2+3t+2;$$

а) найти скорость в конце 2-й с ; (2б)
б) исследовать $S(t)$ на экстремум; (4б)
в) сделать эскиз графика $S(t)$; (1б)
г) записать выражение для дифференциала $S(t)$; (1б)
д) составить уравнение касательной и нормали к графику $S(t)$ при $t=1$. (2б)

2. Построить поверхность (3б)

$$y = 2 - x^2 - z^2.$$

3. Определить направляющие косинусы вектора $\bar{n}=\bar{i}-2\bar{j}+2\bar{k}$. (2б)

4. Решить систему уравнений и сделать проверку (3б)

$$\begin{cases} x-y=1 \\ x^2-y^2=9. \end{cases}$$

Итого 18 баллов

Вариант № 6

1. Движение задано зависимостью

$$S(t)=3t^4+4t^3+1;$$

а) найти скорость в конце 2-й с ; (2б)
б) исследовать на экстремум $S(t)$; (4б)
в) сделать эскиз графика $S(t)$; (1б)
г) записать выражение для дифференциала $S(t)$; (1б)
д) составить уравнение касательной и нормали к графику $S(t)$ при $t=1$; (2б)

2. Построить поверхность (3б)

$$x^2 + z^2 = y^2;$$

3. Определить направляющие косинусы вектора $\bar{n}=2\bar{i}-\bar{j}+2\bar{k}$. (2б)

4. Решить систему уравнений и сделать проверку (3б)

$$\begin{cases} x+y=9 \\ x^2-y^2=9. \end{cases}$$

Итого 18 баллов

Вариант № 7

I. Движение задано зависимостью

$$S(t) = 2t^3 + 3t^2 - 1;$$

а) найти скорость в конце 2-й с; (2б)
б) исследовать на экстремум $S(t)$; (4б)
в) сделать эскиз графика $S(t)$; (1б)
г) записать выражение для дифференциала; (1б)
д) составить уравнение касательной и нормали к графику $S(t)$ при $t=1$. (2б)

2. Построить поверхность $\frac{y^2}{4} - \frac{x^2}{1} - \frac{z^2}{2} = 1$. (3б)

3. Определить направляющие косинусы вектора $\bar{n} = 3\bar{i} + 2\bar{j} - \sqrt{3}\,\bar{k}$. (2б)

4. Решить систему уравнений и сделать проверку (3б)

$$\begin{cases} x + y = 3 \\ x^2 + y^2 = 5. \end{cases}$$

Итого 18 баллов.

Вариант № 8

I. Движение задано зависимостью

$$S(t) = 0{,}5t^4 - 4t^2$$

а) найти скорость в конце 2-й с; (2б)
б) исследовать $S(t)$ на экстремум; (4б)
в) сделать эскиз графика $S(t)$; (1б)
г) записать выражение для дифференциала; (1б)
д) составить уравнение касательной и нормали к графику $S(t)$ при $t=1$. (2б)

2. Построить поверхность $\frac{x^2}{1} + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{9} = 1$. (3б)

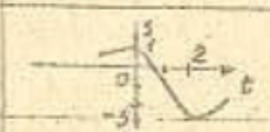
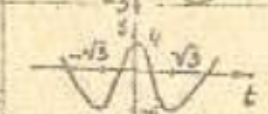
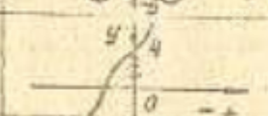
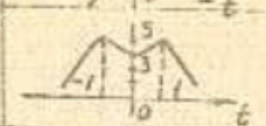
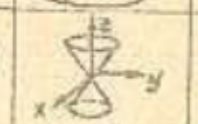
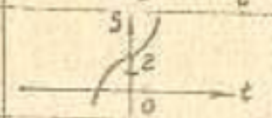
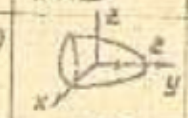
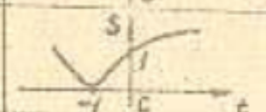
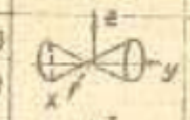
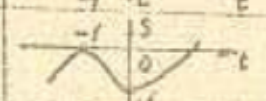
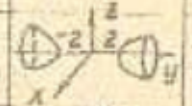
3. Определить направляющие косинусы вектора $\bar{n} = 2\bar{i} + 3\bar{j} + \sqrt{3}\,\bar{k}$. (2б)

4. Решить систему уравнений и сделать проверку (3б)

$$\begin{cases} x - y = 1 \\ x^2 - y^2 = 3. \end{cases}$$

Итого 18 баллов

МАТРИЦА ОТВЕТОВ К ВХОДНОМУ ТЕСТУ МОДУЛЯ "ФУНКЦИИ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ"

	v			ds			$\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$	
1	0	$t_1=0\ t_2=2$ $S_{max}(0)=1$ $S_{min}(2)=-3$		$(3t^2-6t)dt$	$S+1=-3(t-1)$ $S+1=\frac{1}{3}(t-1)$		$\frac{2}{\sqrt{21}}; \frac{4}{\sqrt{21}}; \frac{1}{\sqrt{21}}$	(2,−1) (−1,2)
2	8	$t_1=0\ t_{2,3}=\pm\sqrt{3}$ $S_{max}(0)=4$ $S_{min}(\pm\sqrt{3})=-5$		$(4t^3-12t)dt$	$S+1=-8(t-1)$ $S+1=\frac{1}{8}(t-1)$		$\frac{1}{\sqrt{6}}; \frac{2}{\sqrt{6}}; \frac{1}{\sqrt{6}}$	(1,1)
3	48			$3(t+2)^2dt$	$S-23=27(t-1)$ $S-23=-\frac{1}{27}(t-1)$		$\frac{3}{\sqrt{14}}; \frac{2}{\sqrt{14}}; \frac{1}{\sqrt{14}}$	(1,−1) (−1,1)
4	24	$t_1=0\ t_{2,3}=\pm1$ $S_{min}(0)=3$ $S_{max}(\pm1)=4$		$(4t-4t^3)dt$	$S-4=0\ (t-1)$ $S=4\quad t=1$		$\frac{2}{\sqrt{14}}; \frac{3}{\sqrt{14}}; \frac{1}{\sqrt{14}}$	(1,1) (−1,−1)
5	3			$3(t-1)^2dt$	$S-5=0\ (t-1)$ $S=5\quad t=1$		$\frac{1}{3}; \frac{2}{3}; \frac{2}{3}$	(5,4)
6	144	$t_1=-1\ t_2=0$ $S_{min}(-1)=0$		$12(t^3+t^2)dt$	$S-8=24(t-1)$ $S-8=-\frac{1}{24}(t-1)$		$\frac{2}{3}; \frac{1}{3}; \frac{2}{3}$	(5,4)
7	30	$t_1=0\ t_2=-1$ $S_{max}(-1)=0$ $S_{min}(0)=-1$		$6(t^3+t)dt$	$S-4=12(t-1)$ $S-4=-\frac{1}{12}(t-1)$		$\frac{3}{4}; \frac{2}{4}; \frac{\sqrt{3}}{4}$	(2,1) (1,2)
8	0	$t_1=0\ t_{2,3}=\pm2$ $S_{max}(0)=0$ $S_{min}(\pm2)=-8$		$2(t^3-4t)dt$	$S+3,5=-6(t-1)$ $S+3,5=\frac{1}{6}(t-1)$		$\frac{2}{4}; \frac{3}{4}; \frac{\sqrt{3}}{4}$	(2,1)

2.3. Технологии практических занятий модуля "Функции многих переменных" с экспресс-контролем

ЗАНЯТИЕ 1

Тема – функции многих переменных.

Цель – усвоить основные понятия функции многих переменных.

1. Теоретический опрос (работа с опорными схемами).
2. Учебная деятельность.

Задание I. Составить алгоритм исследования и построения графиков функции многих переменных.

Задание 2. Найти области определения функций: а) $z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}$;
б) $z=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2-R^2}}$; в) $z=\ln(x-y)$; г) $z=\arcsin\dfrac{x}{y^2}$; д) $u=\sqrt{x^2+y^2+z^2-R^2}$;
е) $u=\arcsin\dfrac{\sqrt{x^2+y^2}}{z}$.

Задание 3. Вычислить пределы:

а) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{xy}{3-\sqrt{xy+9}}$; б) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{\sin xy}{xy}$; в) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{\sin xy}{y}$; г) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}(1+x^2+y^2)^{1/(x^2+y^2)}$

Ответы: а) -6; б) 1; в) 0, г) e.

Задание 4. Найти точки разрыва следующих функций:

а) $z=\dfrac{1}{(x-1)^2+(y+1)^2}$; б) $z=\dfrac{1}{\sin^2 x\pi+\sin^2\pi y}$; в) $z=\dfrac{1}{\sin x\cos y}$;
г) $u=\dfrac{1}{xyz}$; д) $u=\dfrac{1}{\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}-1}$.

Задание 5. Найти частные производные и дифференциалы 1-го и 2-го порядков от заданных функций: а) $z=x^5+y^5-5x^3y^3$;
б) $z=xy+\dfrac{y}{x}$; в) $z=xe^{-xy}$; г) $z=y^x$ д) $z=\ln(x^2+y^2)$;
е) $u=e^{xyz}$.

Задание 6. Показать, что функция $u=A\sin\lambda x\cos a\lambda t$ удовлетворяет уравнению колебания струны $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$.

Задание 7. Показать, что функция $u=\dfrac{1}{2a\sqrt{\pi t}}e^{\frac{-(x-x_0)^2}{4a^2t}}$ удовлетворяет уравнению теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

Задание 8. В несжимаемой среде потенциал скорости пространственного источника с интенсивностью q, расположенного в точке M_0 (x_0, y_0, z_0), определяется по формуле

$$\varphi(x,y,z) = \frac{-q}{4\pi\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}}$$

Найти области определения функции $\varphi(x, y, z)$ и частные производные I-го порядка.

Задание 9. При измерении температуры реальных тел пирометр показывает так называемую оптическую (яркостную) температуру T_0, которая связана с истинной температурой T_u выражением $T_u = \left(\frac{1}{T_0} - \frac{\lambda}{c_0}\ln\frac{1}{\varepsilon}\right)^{-1}$, где λ - длина волны пирометра, м; c_0 – const. Найти частные производные T_u по $T_0, \lambda, \varepsilon$.

3. Задание на дом: ИДЗ (I.2.3).
4. Экспресс-контроль (10 минут).

Экспресс-контроль к занятию I

Вариант I	Вариант 2	Вариант 3	Вариант 4
1. Найти область определения функции			
$z = \arcsin\frac{x^2}{y}$	$z = \ln(y - x^2)$	$z = \frac{1}{\sqrt{4-x^2-y^2}}$	$z = \ln(4 - x^2 y^2)$
2. Найти линии уровня			
$z = 2x^2 + y^2$	$z = 2x^2 - y^2$	$z = \frac{y}{x}$	$z = y - 2x^2$
3. Найти частные производные			
$u = x^2 y^2 z^2$	$u = x^3 y^3 z^3$	$u = x^2 y^3 z^4$	$u = x^3 y z^2$

ЗАНЯТИЕ 2

Тема – приложения частных производных и дифференциалов.

Цель – научиться применять частные производные и частные дифференциалы.

1. Теоретический опрос (работа с опорными схемами).
2. Учебная деятельность.

Задание 1. Составить алгоритм применения дифференциалов.

Задание 2. Найти полное приращение и дифференциал функций:

а) $z = x^2 - xy + y^2$; б) $z = \lg(x^2 + y^2)$.

от $x = 2$ до $x = 2,1$; от $x = 2$ до $x = 2,1$;

от $y = 1$ до $y = 1,2$; от $y = 1$ до $y = 0,5$

Ответы: а) $\Delta z = 0,33$, $dz = 0,3$; б) $\Delta z = 0,0187$, $dz = 0,0174$.

Задание 3. Вычислить приближенно:

а) $(2,01)^{3,05}$; б) $\sqrt{(1,02)^3 + (1,97)^3}$ в) $\sin 28^\circ \cos 61^\circ$.

Ответы: а) 8,29; б) 2,95; в) 0,227.

Задание 4. Цилиндрический стакан имеет внутренний радиус $R = 2,5$ м, высоту $H = 4$ м и толщину стенок $\ell = 0,1$ м. Найти приближенно объём материала, затраченного на изготовление стакана.

Ответ: 8,2 м³.

Задание 5. Найти частные производные 1-го порядка сложных функций: а) $z = \frac{x}{y}$, где $x = e^t$, $y = \ln t$; б) $z = \operatorname{arctg}\frac{x}{y}$ $x = u\sin v$, $y = u\cos v$; в) $z = \ln(x^2 + y^2)$ $x = u^2 + v^2$, $y = e^{uv}$.

Задание 6. Найти частные производные 1-го порядка неявных функций: а) $x^3 + 2y^3 + z^3 - 3xyz - 2y + 3 = 0$; б) $x^2 + y^2 - z^2 - xy = 0$ в) $x\cos y + y\cos z + z\cos x = 1$.

Задание 7. Тензор напряжений в системе координат XOY имеет следующие компоненты $\tau_{xy} = \tau_{yx} = (C_1 e^{mx} + C_2 e^{-mx})(Ae^{my} + Be^{-my})$, $\sigma_x = -(C_1 e^{mx} - C_2 e^{-mx})(Ae^{my} - Be^{-my}) + C + \nu K$, $\sigma_y = -(C_1 e^{mx} - C_2 e^{-mx})(Ae^{my} - Be^{-my}) + C$.

Показать, что он удовлетворяет основным уравнениям идеально пластичного материала:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0; \quad \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} = 0, \quad \sigma_x - \sigma_y = \nu K.$$

Задание 8. Неравномерно нагретая плоская заготовка толщиной ℓ в момент времени $t = 0$ помещена между двумя плитами штампа. Распределение температуры U по толщине заготовки в любой момент времени t удовлетворяет уравнению $\frac{\partial U}{\partial t} = \omega \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}$ $(0 < x < \ell, \quad t = 0)$.
Показать, что функция $u(x,t) = c \exp\left[-\omega\left(\frac{\pi n}{\ell}\right)^2 t\right] \sin\frac{\pi n}{\ell} x$ может быть решением этой задачи.

3. Задание на дом: ИДЗ (4,5,7,8). Скалярное поле.

4. Экспресс-контроль (10 минут).

Экспресс-контроль к занятию 2

Вариант I	Вариант 2	Вариант 3	Вариант 4
1 $\ln(0{,}08^3+0{,}99^3)$	$1{,}01^{4{,}02}$	$\sqrt[3]{0{,}99^2+0{,}05^3}$	$\sqrt[5]{1{,}02^2+0{,}05^2}$
2 $z=\ln\frac{u}{v}$, $u=x\sin y$, $v=y\cos x$	$z=\operatorname{arctg}\frac{u}{v}$, $u=x\ln y$, $v=y\ln x$	$z=\arcsin\frac{u}{v}$, $u=x\operatorname{tg} y$, $v=y\sin x$	$z=\sin\frac{u}{v}$, $u=y^x$, $v=xy$
3 $xyz=e^{\frac{xy}{z}}$	$xyz=\sin\frac{xy}{z}$	$xyz=\ln\frac{xy}{z}$	$xyz=\operatorname{arctg}\frac{xz}{y}$
Необходимо в примере I вычислить приближённо и найти частные производные I-го порядка в примерах 2 и 3.			

ЗАНЯТИЕ 3

Тема – элементы теории поля.

Цель – научиться применять частные производные при решении задач.

I. Теоретический опрос (работа с опорными схемами).

2. Учебная деятельность.

Задание I. Составить алгоритм изучения скалярных и векторных полей.

Задание 2. Для заданных скалярных полей $u = f(x,y,z)$ определить и построить поверхности уровня, найти производную $\frac{\partial u}{\partial \bar{e}}$ и построить градиент в точке Мо (x_0, y_0, z_0):

а) $u = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$, б) $u = \arcsin \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}$, в) $u = \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{8}$,

г) $u = x^2+y^2-z$, $\bar{e} = \bar{i}+2\bar{j}+3\bar{k}$, $M_0(3,2,1)$; $\bar{e} = \bar{i}+\bar{j}+\bar{k}$, $M_0(3,4,0)$;
$\bar{e} = 3\bar{i}+4\bar{j}$, $M_0(1,2,3)$ $\bar{e} = \bar{j}+\bar{k}$, $M_0(1,0,2)$.

Задание 3. Найти направление и величину наибольшего возрастания температурного поля в точке Мо(1,0,0), создаваемого точечным непрерывнодействующим источником интенсивности q кал/с в неограниченном теле, если температура описывается формулой $u = \frac{q}{4\pi\lambda\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$, где λ – температуропроводность материала.

Задание 4. Найти производную векторного поля $\bar{a}$ по векторному аргументу $\bar{r} = x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k}$. Записать ответ в виде тензора. Найти $grad\,\bar{a}$:

а) $\bar{a} = xyz\bar{i} + (x^2+y^2+z^2)\bar{j} + (x+y+z)\bar{k}$;

б) $\bar{a} = x\bar{i} + xy\bar{j} + xyz\bar{k}$.

Ответы: а)
$$\left[\frac{d\bar{a}}{d\bar{r}}\right] = \begin{pmatrix} yz & xz & yz \\ 2x & 2y & 2z \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}; \qquad \text{б)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ y & x & 0 \\ yz & xz & xy \end{pmatrix}.$$

Задание 5. Для поля напряжений $\bar{E} = x\bar{i} + xy\bar{j} + xz^2\bar{k}$ вычислить градиент $\overline{grad\,\bar{E}}$ в точке Мо(1,1,1).

Указание: $\overline{grad\,\bar{E}} = \left[\frac{d\bar{E}}{d\bar{r}}\right]^T$.

Ответ:
$$\overline{grad\,\bar{E}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Задание 5. Для поля перемещений $\bar{u} = \alpha(x^2\bar{i} + (x+y)\bar{j} + xz\bar{k})$, $\alpha > 0$, $\alpha \le 1$ определить тензор малой деформации в точке М(1,1,0).

Указание. Тензор малой деформации есть симметричная часть тензора $\left[\frac{d\bar{u}}{d\bar{r}}\right]$.

Ответ:
$$T_q = \alpha \begin{pmatrix} 2 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Задание 7. Для поверхностей уровня скалярных полей задания I, соответствующих $C = 1$, составить уравнения касательной плоскости и нормали в точке $M_0\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, ?\right)$.

Задание 8. Составить выражение для напряженности $\overline{E}$ поля, если

$$u = K \ln\sqrt{\cos^2\frac{\pi x}{a} + pk^2\frac{\pi y}{a}} \quad \text{и} \quad \overline{E} = -\overline{\operatorname{grad} u}.$$

3. Задание на дом: ИДЗ (9,10). Экстремум.
4. Экспресс-контроль (10 минут).

Экспресс-контроль к занятию 3

Вариант I	Вариант 2	Вариант 3	Вариант 4
$u = \ln\frac{xy}{z}$	$u = \operatorname{arctg}\frac{xz}{y}$	$u = e^{\frac{xz}{y}}$	$u = \operatorname{tg}\frac{yz}{x}$
$M(1,1,1)$ $N(3,3,1)$	$M(1,1,1)$ $N(1,3,3)$	$M(1,1,1)$ $N(3,1,3)$	$M(1,1,1)$ $N(1,2,3)$
$z = x^2y^2$	$z = xy^3$	$z = x^2y$	$z = x^3y$

Для скалярного поля u определить поверхности уровня, производную по направлению вектора $\overline{MN}$ и градиент $\overline{\operatorname{grad} u}$ в точке N. Для функции z записать уравнение касательной плоскости и нормали в точке N.

ЗАНЯТИЕ 4

Тема - экстремум.

Цель - научиться применять частные производные в задачах оптимизации.

1. Теоретический опрос (работа с опорными схемами).
2. Учебная деятельность.

Задание I. Составить алгоритм исследования $z=f(x,y)$ на экстремум.

Задание 2. Найти экстремумы следующих функций:

а) $z=x^2+xy+y^2-3x-6y$; б) $z=xy^2(1-x-y)$ $x>0, y>0$;

в) $z=3x^2-x^3+3y^2+4y$; г) $z=(2x^2+y^2)e^{-(x^2+y^2)}$.

Ответы: а) $z_{min}=-9$, $x=0, y=3$; б) $z_{max}=\frac{1}{64}$, $x=\frac{1}{4}, y=\frac{1}{2}$;

в) $z_{min}=-\frac{4}{3}$, $x=0, y=-\frac{2}{3}$; г) $z_{min}=0$, $x=0$, $y=0$,

в точке $(2, -\frac{2}{3})$ экстремума нет: $z_{max}=\frac{2}{e}$, $x=\pm 1, y=0$

в т. (0 ± 1) экстремума нет.

Задание 3. Найти наибольшее M и наименьшее m значения функции $z=f(x,y)$ в следующих областях: а) $z=x^2+y^2-xy-x-y$ при $x \geq 0, y \geq 0, x+y \leq 3$ б) $z=xy$, $x^2+y^2 \leq 1$.

Ответы: а) $M=6$ в точках (3.0) и (0,3), $m=-1$ в точке (1,1);

б) $M=\frac{1}{2}$, $x=y=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$, $m=-\frac{1}{2}$, $x=-y=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Задание 4. Определить наружные размеры закрытого ящика с заданной толщиной стенок δ и внутренней ёмкостью V, чтобы на его изготовление было затрачено наименьшее количество материала.

Ответ: $x=y=z=\sqrt[3]{V}+2\delta$.

Задание 5. Вектор напряжения $\bar{\sigma}_n=\sigma_1\bar{i}+\sigma_2\bar{j}+\sigma_3\bar{k}$, приложенный в точке к наклонной плоскости с нормальным вектором $\bar{n}_0=\cos\alpha\,\bar{i}+\cos\beta\,\bar{j}+\cos\gamma\,\bar{k}$, раскладывается на нормальное и касательное напряжение, причём квадрат величины касательной составляющей $\tau^2=\sigma_1^2\cos^2\alpha+\sigma_2^2\cos^2\beta+\sigma_3^2\cos^2\gamma$ определит такое направление $\bar{n}$, чтобы касательное напряжение было максимальным.

Задание 6. Годовой расход предприятия на управленческие и амортизационные затраты выражается формулой $z=a+b(x+y)+\frac{c}{x+y}+\frac{c_1}{x}+\frac{c_2}{y}$. Определить оптимальные условия хозяйствования предприятия.

Ответ: $x=\sqrt{\frac{c_1}{b}\left(1+\frac{c}{(\sqrt{c_1}+\sqrt{c_2})^2}\right)}$, $y=\sqrt{\frac{c_2}{b}\left(1+\frac{c}{(\sqrt{c_1}+\sqrt{c_2})^2}\right)}$.

Задание 7. Найти условные экстремумы:

а) $z=x^2+y^2-xy+x+y-4$ при $x+y+3=0$; б) $z=xy^2$ при $x+2y=1$;

в) $z=2x+y$ при $x^2+y^2=1$.

Ответы: а) $z_{min}=-\frac{10}{4}$ при $x=y=-\frac{3}{2}$. б) $z_{min}=0$ при $x=1,\ y=0,$

$$z_{max}=\frac{1}{27},\ x=y=\frac{1}{3}.$$

в) $z_{min}=-\sqrt{5}$ при $x=-2/\sqrt{5},\ y=-1/\sqrt{5}$, $z_{max}=\sqrt{5}$ при $x=2/\sqrt{5},\ y=\frac{1}{\sqrt{5}}$.

Указания:

$$\mathcal{L}(x,y,\lambda)=z(x,y)+\lambda\varphi(x,y)$$

$$\begin{cases}\mathcal{L}'_x=0\\ \mathcal{L}'_y=0\\ \mathcal{L}'_x=0\end{cases}\qquad \Delta=-\begin{vmatrix}0 & \varphi'_x(P) & \varphi'_y(P)\\ \varphi'_x(P) & \mathcal{L}''_{xx} & \mathcal{L}''_{xy}\\ \varphi'_y(P) & \mathcal{L}''_{xy} & \mathcal{L}''_{yy}\end{vmatrix}=\begin{cases}<0 & max\\ >0 & min\\ =0 & ?\end{cases}$$

3. Задание на дом: закончить выполнение ИДЗ (11,12,13). Подготовиться к защите.
4. Экспресс-контроль (10 минут).

Экспресс-контроль к занятию 4

Вариант 1	Вариант 2	Вариант 3	Вариант 4
$z=x^2-xy+y^2+$ $+9x-6y+20$	$z=x^3+8y^3-6xy+1$	$z=3x+6y-x^2-$ $-xy-y^2$	$z=2x^3-xy^2+5x^2+y^2$
Найти экстремумы функции z			

2.4. Образец варианта ИДЗ к модулю "Функции многих переменных"

Задание 1. Найти $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$:

$$а)\ z=\sqrt[3]{2xy-y+10};\quad б)\ z=\sin^2\sqrt{xy};\quad в)\ z=(x^2-y^2)\arccos\frac{y}{x}.$$

Задание 2. Найти $\frac{\partial^3 z}{\partial y\partial x^2}$ для

$$z=\ln(x^2-5y).$$

Задание 3. Проверить, удовлетворяет ли функция $z=\sqrt{\frac{x}{y}}$ данному уравнению

$$x^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-\frac{\partial}{\partial y}\left(y^2\frac{\partial z}{\partial y}\right)=0.$$

Задание 4. Найти $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$ для функции, заданной неявно

$$e^{x^2+y^2+z^2}-xz-yz=0.$$

Задание 5. Найти $\frac{dz}{dt}$, если

$$z=\cos(x^2+y^2),\ \text{где}\ x=2\sqrt{t},\ y=\frac{3}{2}\sqrt[3]{t^2}.$$

Задание 6. Найти $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$, если

$$z=\mathrm{ctg}(2u+3v),\qquad u=\ln(x-y),\ v=\frac{1}{x-y}.$$

Задание 7. Вычислить dz и d^2z от функции $z=x^2+y^2+x+y$ в точке $M_1(0,0)$ при переходе к точке $M_2(-0,1;\ 0,2)$.

Задание 8. Вычислить приближённо с помощью дифференциала выражение

$$\ln\left(\sqrt[3]{0,99}+\sqrt[3]{1,04}-1\right).$$

Задание 9. Написать уравнение касательной плоскости и нормали к поверхности $\frac{(x-1)^2}{1}+\frac{(y-2)^2}{9}-\frac{(z-3)^2}{9}=1$, в точке $M_0(1,5,3)$.

Задание 10. Вычислить производную функции $z=\frac{2x-y}{x+4y}$ в точке $A(-3,1)$ в направлении к точке $B(0;5)$. В каком направлении при переходе через точку A скорость возрастания функции наибольшая? Найти эту скорость.

Задание 11. Найти экстремум функции

$$z=-x^2-y^3+6x+12y-24.$$

Задание 12. Найти экстремум функции $z=x+4y$

при условии $4y^2-4x^2=\frac{15}{16}$.

Задание 13. Найти наибольшее и наименьшее значения функции

$$z=\sqrt{49-x^2-y^2+2x-2y}$$

в треугольнике с вершинами A(0,0); B(3,0); C(0,3).

МАТРИЦЫ ОТВЕТОВ К ИДЗ "ФУНКЦИИ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ"

№ задания	Промежуточные результаты	Ответ
1.	а) $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{4xy}{5\sqrt[3]{(2x^2y-y+10)^2}}$ $\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{2x^2-1}{5\sqrt[3]{(2x^2y-y+10)^2}}$ б) $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{y}{2\sqrt{xy}}\sin 2\sqrt{xy}$ $\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{x}{2\sqrt{xy}}\sin 2\sqrt{xy}$	в) $\frac{\partial z}{\partial x}=2x\arccos\frac{y}{x}+\frac{y}{x}\sqrt{x^2-y^2}$ $\frac{\partial z}{\partial y}=2y\arccos\frac{y}{x}\sqrt{x^2-y^2}$
2.	$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{-5}{x^2-5y}$ $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{-25}{(x^2-5y)^2}$	$\frac{\partial^3 z}{\partial y^2\partial x}=\frac{100x}{(x^2-5y)^3}$
3.	$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=-\frac{1}{4\sqrt{yx^3}}$ $\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{x}{y^3}}$ $\frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{1}{2}\sqrt{xy}\right)=-\frac{1}{4}\sqrt{\frac{x}{y}}$	да
4	$F'_x=2xy^2e^{x^2y^2-z^2}+y$, $F_y=2x^2ye^{x^2y^2-z}+x$ $F'_z=-2ze^{x^2y^2-z}-1.$	$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{2xy^2-e^{x^2y^2-z}}{2ze^{x^2y^2-z^2}+1}$ $\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{2x^2ye^{x^2y^2-z^2}+x}{2ze^{x^2y^2-z^2}+1}$
5.	$\frac{dz}{dt}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt}=$ $=-2x\sin(x^2+y^2)\frac{1}{\sqrt{t}}-2y\sin(x^2+y)\frac{1}{\sqrt[3]{t^6}}$	$\frac{-2(x\sqrt{t}+y\sqrt[3]{t^2})}{t}\sin(x^2+y^2)$

№ задания	Промежуточные результаты	Ответ
6	$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}$; $\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}$	$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{-2y\cos xy+6x\sin x^2}{\sin^2(2u+3v)}$, $\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{-2x\cos xy}{\sin^2(2u+3v)}$
7	$dz=(2x+1)\,dx+(2y+1)\,dy$ $d^2z=2dx^2+2dy^2$	$dz=0,1$ $d^2z=0,1$
8	$z=\ln(\sqrt[4]{x}+\sqrt[3]{y}-1)$ $x_0=1$ $y_0=1$ $z_0=0$ $z'_x=\frac{1}{\sqrt[4]{x}+\sqrt[3]{y}-1}\cdot\frac{1}{4\sqrt[4]{x^3}}$; $z'_y=\frac{1}{\sqrt[4]{x}+\sqrt[3]{y}-1}\cdot\frac{1}{3\sqrt[3]{y^2}}$; $\Delta x=-0,01$ $\Delta y=0,04$	$0,01083$
9	$F'_x=2(x-1)\Big\vert_{M_0}=0$; $F'_y=\frac{2(y-2)}{9}\Big\vert_{M_0}=\frac{2}{3}$; $F'_z=\frac{2(z-3)}{9}\Big\vert_{M_0}=0$	$y-5=0$ $\frac{x-1}{0}=\frac{y-5}{2}=\frac{z-3}{0}$
10	$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{9y}{(x+4y)^2}\Big\vert_A=$ $=9$ $\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{-9x}{(x+4y)^2}\Big\vert_A=27$ $\cos\alpha=\frac{3}{5}$ $\cos\beta=\frac{4}{5}$	$\frac{\partial z}{\partial l}=27$ $\text{grad}\,z=9i+27j$ $v_{max}=9\sqrt{10}$
11	$\begin{cases}x-3=0\\ y^2-4=0\end{cases}$ $M_1(3;2)$ $M_2(3;-2)$ $\Delta=12y$	$M_1(3,2)$ – max; $z_{max}=1$ $M_2(3,-2)$ – нет
12	$M_1(1;-1)$; $O(0;0)$; $M_2(1;0)$ $A(3,0)$; $M_3(\frac{3}{2};-\frac{1}{2})$ $\sqrt{51}$ 7 $\sqrt{50}$ $\sqrt{46}$ $\frac{\sqrt{202}}{2}$ 7,14 7 7,07 6,78 7,11 $B(0,-3)$ $M_4(0;-1)$ $\sqrt{46}$ $\sqrt{50}$ 6,78 7,07	$z_{наим.}=z(A)=z(B)=\sqrt{46}$ $z_{наиб.}=z(M_1)=\sqrt{51}$
13	$\begin{cases}1-8\lambda x=0\\ 2+2\lambda y=0\\ 4y^2-4x^2=\frac{15}{16}\end{cases}$ $\lambda=\pm1$ $M_1(\frac{1}{8};-\frac{1}{2})$ $M_2(-\frac{1}{8};\frac{1}{2})$	$M_1(\frac{1}{8};-\frac{1}{2})$ – max $=-\frac{5}{2}$ $M_2(-\frac{1}{8};\frac{1}{2})$ – min $z=\frac{5}{2}$

2.5. Опорная схема основных теоретических положений модуля "Функции многих переменных"

$y = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $z=f(x,y)$ - функция 2-х переменных

Частные и полное приращения

$$\Delta_x z = f(x+\Delta x, y) - f(x,y), \quad \Delta_y z = f(x, y+\Delta y) - f(x,y),$$
$$\Delta z = f=(x+\Delta x,\ y+\Delta y) - f(x,y).$$

Частные производные и дифференциалы

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x} \qquad dz = \frac{\partial z}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial z}{\partial y}\Delta y$$
$$\frac{\partial z}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta_y z}{\Delta y} \qquad d^2 z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}dx^2 + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}dx\,dy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}dy^2$$

Производная сложной функции:

$u = f(x,y,z)$, где $x = x(t,v)$, $y = y(t,v)$, $z = z(t,v)$.

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial t}, \quad \frac{\partial u}{\partial v} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial v}.$$

Производная неявной функции:

$$F(x,y)=0, \quad y'_x = -\frac{F'_x}{F'_y}; \quad F(x,y,z)=0, \quad \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F'_x}{F'_z}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F'_y}{F'_z}.$$

Производная скалярного поля $u = f(x,y,z)$ по направлению вектора $\bar{\ell}(\ell_x, \ell_y, \ell_z)$.

$$\frac{\partial u}{\partial \ell} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma, \text{ где } \cos\alpha = \frac{\ell_x}{|\bar{\ell}|}, \cos\beta = \frac{\ell_y}{|\bar{\ell}|}, \cos\gamma = \frac{\ell_z}{|\bar{\ell}|}$$

Градиент скалярного поля

$$\overline{\mathrm{grad}\, u} = \frac{\partial u}{\partial x}\bar{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\bar{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\bar{k}, \quad \frac{\partial u}{\partial \ell} = \overline{\mathrm{grad}\, u} \cdot \bar{\ell}_0 = |\overline{\mathrm{grad}\, u}| \cos\varphi$$

$\max \frac{\partial u}{\partial \ell}$ достигается при $\varphi = 0$, т.е. $\bar{\ell}_0 \parallel \overline{\mathrm{grad}\, u}$.

Поверхности уровня скалярного поля $U = f(x,y,z)$ $f(x,y,z)=c$.

Касательная плоскость к поверхности $F(x,y,z)=0$ в точке $M_0(x_0,y_0,z_0)$

$$F'_x(M_0)(x-x_0)+F'_y(M_0)(y-y_0)+F'_z(z-z_0)=0$$

Нормаль к поверхности

$$\frac{x-x_0}{F'_x(M_0)} = \frac{y-y_0}{F'_y(M_0)} = \frac{z-z_0}{F'_z(M_0)}.$$

ЭКСТРЕМУМ ФУНКЦИИ ДВУХ ПЕРЕМЕННЫХ

Необходимые условия $\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial x}=0 \\ \dfrac{\partial z}{\partial y}=0 \end{cases}$ или не существует. Решения этой системы дают стационарные точки $P_i(x_i,y_i)$.

Достаточные условия $\left\{A=\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}\Big|_{P_i},\ B=\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\Big|_{P_i},\ C=\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}\Big|_{P_i}\right.$ $\Delta=\begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} = \begin{cases} >0 & \text{max при } A<0,\ \text{min при } A>0 \\ <0 & \text{экстрем. нет} \\ =0 & \text{вопрос откр.} \end{cases}$

Условный экстремум

Функция $U=f(M)$ при условиях $\varphi_k(M)=0,\ k=1,2,\dots m,\ M(x_1,x_2,\dots,x_n)$.

Лагранжа

$$\mathcal{L}=f(x_1,x_2,\dots,x_n)+\sum_{k=1}^{m}\lambda_k\varphi_k(x_1,x_2,\dots,x_n).$$

Необходимые условия экстремума $\begin{cases} \dfrac{\partial\mathcal{L}}{\partial x_i}\ 0,\ i=1,2,\dots,n \\ \varphi_k(M)=0,\ k=1,2,\dots,m. \end{cases}$ Решение системы дают критические точки $P(x_1,x_2,\dots x_n,\lambda_1,\lambda_2,\dots\lambda_k)$.

Достаточные условия экстремума: $d^2\mathcal{L}>0$, условный min; $d^2\mathcal{L}<0$, условный max.

Наибольшее M и наименьшее m функции $z=f(x,y)$ достигается либо в точках экстремума, либо на границах области задания функции z.

Векторное поле

$$\bar a(\bar r) = P(x,y,z)\bar i+Q(x,y,z)\bar j+R(x,y,z)\bar k;$$

$$\overline{grad\bar a} = \left[\frac{d\bar a}{d\bar r}\right]^T.$$

$$\frac{d\bar a}{d\bar r} = \begin{pmatrix} P'_x & P'_y & P'_z \\ Q'_x & Q'_y & Q'_z \\ R'_x & R'_y & R'_z \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \bar i \\ \bar j \\ \bar k \end{pmatrix} = \left[\frac{d\bar a}{d\bar r}\right];$$

тензор векторного поля.

2.6. Викторинные вопросы модуля "Функция многих переменных"

1. Верно ли, что если существуют частные производные функции нескольких переменных, то эта функция дифференцируема ?
2. Верно ли, что если функция нескольких переменных дифференцируема, то существуют её частные производные ?
3. Верно ли, что если функция нескольких переменных непрерывна в точке, то она дифференцируема в этой точке ?
4. Верно ли, что если функция нескольких переменных имеет непрерывные частные производные в точке, то она дифференцируема в этой точке ?
5. Верно ли, что производная по направлению $\frac{\partial u}{\partial \ell} = \text{Пр}_{\bar{\ell}}\, \text{grad}\, u$?
6. Верно ли утверждение, что $\text{grad}\, u$ есть вектор ?
7. Верно ли, что $\text{grad}\, u$ направлен по нормали к поверхности уровня $u(x,y,z)=0$?
8. Верно ли, что если неявно заданная функция $F(x,y)=0$ имеет частные производные $\frac{\partial F}{\partial x}$ и $\frac{\partial F}{\partial y}$, то существует и производная $\frac{\partial y}{\partial x}$?
9. Верно ли, что если все частные производные функции нескольких переменных равны нулю в некоторой точке, то эта точка будет точкой экстремума ?
10. Верно ли, что если в стационарной точке M_0 функции $u(x_1,\dots,x_n)$ выполняется условие $d^2u<0$ при всех Δx_i, $i=\overline{1,n}$, то в точке M_0 будет максимум ?
11. Верно ли, что частные производные высших порядков зависят от порядка дифференцирования ?
12. Верно ли, что дифференциал второго порядка функции можно записать по формуле

$$d^2z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}dx^2 + \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}dx\,dy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}dy^2 \,?$$

Ответы на викторинные вопросы модуля "Функции многих переменных"

1. Сомневаюсь: если частные производные и непрерывны.
2. Да, существуют.

3. Сомневаюсь: если к тому же частные производные функции в точке непрерывны.
4. Да, верно.
5. Да.
6. Да.
7. Да.
8. Сомневаюсь: если $\dfrac{\partial F}{\partial y} \neq 0$.
9. Необязательно. Только если выполняется и достаточные условия существования экстремума.
10. Верно.
11. Нет.
12. Нет, т.к. во втором слагаемом пропущен множитель.

2.7. Выходные тесты к модулю "Функции многих переменных" (24 варианта с матрицей ответов)

Вариант № I

I. Найти производные первого порядка U'_x, U'_y, U'_z и U''_{xx} для функции $U = \ln\sqrt{1 + xyz}$. (4б)

2. Определить градиент функции U в точке $M(1, 1, 0)$. (2б)

3. Найти наибольшую скорость возрастания функции U в той же точке M. (3б)

4. Исследовать на экстремум функцию (7б)

$$z = \frac{1}{3}x^3 + 2y^3 - xy - 1.$$

5. Составить уравнение касательной плоскости и нормали к поверхности z п.4 при (4б) $x_0 = 1$, $y_0 = 1$.

6. Дана функция $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$, необходимо:

а) найти наименьшее и наибольшее значения функции в замкнутой области (6б)

$$x \le 1, y \ge 0, y \le x;$$

б) определить экстремум при условии (5б)

$$x + y = 2;$$

в) дать геометрическую иллюстрацию результатов, полученных в пп. а) и б). (4б)

Итого 35 баллов

Вариант № 2

I. Найти производные первого порядка U'_x, U'_y, U'_z и U''_{yy} для функции $U = \mathrm{arctg}(xyz)$. (4б)

2. Определить градиент функции U в точке $M(1, 1, 1)$. (2б)

3. Найти наибольшую скорость возрастания функции U в той же точке M. (3б)

4. Исследовать на экстремум функцию (7б)

$$z = x^2 + 5y^2 + 4xy - 6x - 14y + 10.$$

5. Составить уравнение касательной плоскости и нормали к поверхности z п.4 при (4б) $x_0 = 0$, $y_0 = 1$.

6. Дана функция $z = x^2 + y^2 + 1$, необходимо:

а) найти наименьшее и наибольшее значения функции в замкнутой области $x \ge 0$, (6б)

$$y \ge x, y \le 2;$$

б) определить экстремум при условии (5б)

$$x - y = 1;$$

в) дать геометрическую иллюстрацию результатов, полученных в пп. а) и б). (4б)

Итого 35 баллов

Вариант № 3

1. Найти производные первого порядка и U''_{yy} для функции $U = \arcsin(xyz)$. (4б)
2. Определить градиент функции U в точке M(1,0,1). (2б)
3. Найти наибольшую скорость возрастания функции U в той же точке M. (3б)
4. Исследовать на экстремум функцию

$$z = 2x^3 + 3y^2 - 6x - 12y - 8. \quad (7б)$$

5. Составить уравнение касательной плоскости и нормали к поверхности z п.4 при $x_0 = 1,\ y_0 = 1$. (4б)
6. Дана функция $z = 1 - x^2 - y^2$, необходимо:

а) найти наименьшее и наибольшее значения функции в замкнутой области $x - y \le 1$; $x \le 0$; $y \ge 0$; (6б)

б) определить экстремум при условии $x + y = 1$; (5б)

в) дать геометрическую иллюстрацию результатов, полученных в пп. а) и б). (4б)

Итого 35 баллов

Вариант № 4

1. Найти производные первого порядка и U''_{zz} для функции $U = e^{x^2+y^2+z^2}$. (4б)
2. Определить градиент функции U в точке M(1,1,0). (2б)
3. Найти наибольшую скорость возрастания функции U в той же точке M. (3б)
4. Исследовать на экстремум функцию

$$z = x^3 + 2y^2 - 27x + 4y - 10. \quad (7б)$$

5. Составить уравнение касательной плоскости и нормали к поверхности z п.4 при $x_0 = 1,\ y_0 = 1$. (4б)
6. Дана функция $z = \frac{1}{4}x^2 + y^2 - 1$, необходимо:

а) найти наименьшее и наибольшее значения функции в замкнутой области $x \ge 0, y \ge 0, \frac{x}{2} + y \le 1$; (6б)

б) определить экстремум при условии $x + y = 0$; (5б)

в) дать геометрическую иллюстрацию результатов, полученных в пп. а) и б). (4б)

Итого 35 баллов

Вариант № 5

1. Найти производную первого порядка и U''_{xy} для функции $U = \operatorname{arctg}(xyz)$. (4б)
2. Определить градиент функции U в точке $M(1,1,0)$. (2б)
3. Найти наибольшую скорость возрастания функции U в той же точке M. (3б)
4. Исследовать на экстремум функцию

$$z = -3x^2 - 2y^2 + 12x + 6y + 4. \quad (7б)$$

5. Составить уравнение касательной плоскости и нормали к поверхности z п.4 при $x_0 = 1$, $y_0 = 1$. (4б)
6. Дана функция $z = \sqrt{1 - \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9}}$, необходимо:

а) найти наименьшее и наибольшее значения функции в замкнутой области $x^2 + y^2 \leq 1$; (5б)

б) определить экстремум при условии $x + \frac{y}{2} = 1$; (5б)

в) дать геометрическую иллюстрацию результатов, полученных в пп. а) и б). (4б)

Итого 35 баллов

Вариант № 6

1. Найти производную первого порядка и U'_{xz} для функции $U = \ln(1 + xyz)$. (4б)
2. Определить градиент функции U в точке $M(1,1,1)$. (2б)
3. Найти наибольшую скорость возрастания функции U в той же точке M. (3б)
4. Исследовать на экстремум функцию

$$z = y^3 + \frac{3}{2}x^2 - 3xy + 1. \quad (7б)$$

5. Составить уравнение касательной плоскости и нормали к поверхности z п.4 при $x_0 = 1$, $y_0 = 1$. (4б)
6. Дана функция $z = \sqrt{1 + \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9}}$, необходимо:

а) найти наименьшее и наибольшее значения функции в замкнутой области $x^2 + y^2 \leq 1$; (5б)

б) определить экстремум при условии (5б)

$$x + y = 0;$$

в) дать геометрическую иллюстрацию результатов, полученных в пп. а) и б). (4б)

Итого 35 баллов

Вариант № 7

1. Найти производные первого порядка и U''_{yz} для функции $U = tg\, xyz$. (4б)
2. Определить градиент функции U в точке М(1,1,0). (2б)
3. Найти наибольшую скорость возрастания функции U в той же точке М. (3б)
4. Исследовать на экстремум функцию

$$z = 4x^2 + 3y^3 - 6x - 36y + 2. \quad (7б)$$

5. Составить уравнение касательной плоскости и нормали к поверхности z п.4 при $x_0 = 1$, $y_0 = 1$. (4б)
6. Дана функция $z = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$, необходимо:

а) найти наименьшее и наибольшее значения функции в замкнутой области $x \leq 0$, $y \leq 0$, $x + y \geq -1$; (6б)

б) определить экстремум при условии $x + y = 2$; (5б)

в) дать геометрическую иллюстрацию результатов, полученных в пп. а) и б). (4б)

Итого 35 баллов

Вариант № 8

1. Найти производные первого порядка и U''_{xz} для функции $U = \ln \sin(x + y^2 + z^3)$. (4б)
2. Определить градиент функции U в точке $(\frac{\pi}{4}, 0, 0)$. (2б)
3. Найти наибольшую скорость возрастания функции U в той же точке М. (3б)
4. Исследовать на экстремум функцию

$$z = 4x^2 - 2y^3 + 12x + 24y + 3. \quad (7б)$$

5. Составить уравнение касательной плоскости и нормали к поверхности z п.4 при $x_0 = 1$, $y_0 = 1$. (4б)
6. Дана функция $z = 2 + x^2 + y^2$, необходимо:

а) найти наименьшее и наибольшее значения функции в замкнутой области $x \geq 0$, $y \geq 0$, $x + y \leq 1$; (5б)

б) определить экстремум при условии $x - y = 2$; (5б)

в) дать геометрическую иллюстрацию результатов, полученных в пп. а) и б). (4б)

Итого 35 баллов

Вариант № 9

1. Найти производные первого порядка и U''_{xz} для функции $U = e^{x+y^2+z^3}$. (4б)
2. Определить градиент функции U в точке М(1,1,0). (2б)
3. Найти наибольшую скорость возрастания функции U в той же точке М (3б)
4. Исследовать на экстремум функцию

   $z = -x^2 - y^2 + 4x + 12y + 1$. (7б)
5. Составить уравнение касательной плоскости и нормали к поверхности z п.4 при $x_0 = 1$, $y_0 = 1$. (4б)
6. Дана функция $z = 2 - x^2 - y^2$, необходимо:

а) найти наименьшее и наибольшее значения функции в замкнутой области $x \geq 0$, $y \leq 0$, $x - y \leq 1$; (6б)

б) определить экстремум при условии $x + y = \sqrt{2}$; (5б)

в) дать геометрическую иллюстрацию результатов, полученных в пп.а) и б). (4б)

Итого 35 баллов

Вариант № 10

1. Найти производные первого порядка и U''_{zx} для функции e^{xyz}. (4б)
2. Определить градиент функции U в точке М(1,1,0). (2б)
3. Найти наибольшую скорость возрастания функции U в той же точке М. (3б)
4. Исследовать на экстремум функцию

   $z = 3x^2 - 6yz - 12y^2 + 3$. (7б)
5. Составить уравнение касательной плоскости и нормали к поверхности z п.4 при $x_0 = 1$, $y_0 = 1$. (4б)
6. Дана функция $z = x^2 + y^2 - 2$, необходимо:

а) найти наименьшее и наибольшее значения функции в замкнутой области $x \geq 0$, $y \geq 0$, $x + y \leq 1$; (6б)

б) определить экстремум при условии $x + y = \sqrt{2}$. (5б)

в) дать геометрическую иллюстрацию результатов, полученных в пп.а) и б). (4б)

Итого 35 баллов

Вариант № II

I. Найти производные первого порядка и U''_{xy} для функции $U = \ln\sqrt{x^2+y^2+z^2}$. (4б)

2. Определить градиент функции U в точке $M(I,I,0)$. (2б)

3. Найти наибольшую скорость возрастания функции U в той же точке M. (3б)

4. Исследовать на экстремум функцию

$$z = 3x^3+4y^2+8y-36x-8.$$ (7б)

5. Составить уравнение касательной плоскости и нормали к поверхности z п.4 при $x_0 = I$, $y_0 = I$. (4б)

6. Дана функция $z = \sqrt{1-\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{9}}$; необходимо:

а) найти наименьшее и наибольшее значения функции в замкнутой области $x^2+y^2 \leq 2$; (6б)

б) определить экстремум при условии $\frac{x}{2}+\frac{y}{3}=1$; (5б)

в) дать геометрическую иллюстрацию результатов, полученных в пп. а) и б). (4б)

Итого 35 баллов

Вариант № I2

I. Найти производные первого порядка и U'_{xx} для функции $U = \operatorname{arctg}\frac{xz}{y}$. (4б)

2. Определить градиент функции U в точке $M(I,I,0)$ (2б)

3. Найти наибольшую скорость возрастания функции U в той же точке M. (3б)

4. Исследовать на экстремум функцию

$$z = x^3+12y^2-12x-48y+8.$$ (7б)

5. Составить уравнение касательной плоскости и нормали к поверхности z п.4 при $x_0 = I$, $y_0 = I$ (4б)

6. Дана функция $z = \sqrt{1+\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}}$, необходимо:

а) найти наименьшее и наибольшее значения функции в замкнутой области $x^2+y^2 \leq 2$; (6б)

б) определить экстремум при условии $\frac{x}{2}+\frac{y}{3}=1$, (5б)

в) дать геометрическую иллюстрацию результатов, полученных в пп. а) и б).

Итого 35 баллов

Вариант № 13

1. Найти производные первого порядка и U''_{xy} для функции $U = \ln \frac{xy}{z}$. (4б)
2. Определить градиент функции U в точке M(I,I,I). (2б)
3. Найти наибольшую скорость возрастания функции U в той же точке M. (3б)
4. Исследовать на экстремум функцию

$$z = \frac{1}{3}x^3 + 4y^2 - 4x - 8y + 10.$$ (7б)

5. Составить уравнение касательной плоскости и нормали к поверхности z п.4 при $x_0 = I$, $y_0 = I$. (4б)
6. Дана функция $z = 3 + x^2 + y^2$, необходимо:

а) найти наименьшее и наибольшее значения функции в замкнутой области $x \geq 0$, $y \leq I$, $x \leq y$; (6б)

б) определить экстремум при условии $x - y = I$; (5б)

в) дать геометрическую иллюстрацию результатов, полученных в пп. а) и б). (4б)

Итого 35 баллов

Вариант № 14

I. Найти производные первого порядка и U''_{zy} для функции $U = \ln(x^3 + y^2 + z)$. (4б)
2. Определить градиент функции U в точке M(I,I,I). (2б)
3. Найти наибольшую скорость возрастания функции U в той же точке M. (3б)
4. Исследовать на экстремум функцию

$$z = x^3 + 3y^2 - 48x + 6y + 10.$$ (7б)

5. Составить уравнение касательной плоскости и нормали к поверхности z п.4 при $x_0 = I$, $y_0 = I$. (4б)
6. Дана функция $z = x^2 + y^2 - 3$, необходимо:

а) найти наименьшее и наибольшее значения функции в замкнутой области $x \geq 0$, $y \leq I$, $x \leq y$; (6б)

б) определить экстремум при условии $x - y = \sqrt{2}$; (5б)

в) дать геометрическую иллюстрацию результатов, полученных в пп. а) и б). (4б)

Итого 35 баллов

Вариант № 15

1. Найти производные первого порядка и U'_{zz} для функции $U = \arccos xyz$. (4б)
2. Определить градиент функции U в точке $M(1, 1, =0)$. (2б)
3. Найти наибольшую скорость возрастания функции U в той же точке M (3б)
4. Исследовать на экстремум функцию
$$z = x^3 + \frac{3}{2}y^2 - 3xy + 3. \qquad (7б)$$
5. Составить уравнение касательной плоскости и нормали к поверхности z п.4 при $x_0 = 1$, $y_0 = 1$. (4б)
6. Дана функция $z = 3 - x^2 - y^2$, необходимо:

а) найти наименьшее и наибольшее значения функции в замкнутой области $x \geq 0$, $y \leq 1$; $y \geq x$; (6б)

б) определить экстремум при условии $x - y = 1$; (5б)

в) дать геометрическую иллюстрацию результатов, полученных в пп. а) и б). (4б)

Итого 35 баллов

Вариант № 16

1. Найти производные первого порядка и U''_{xx} для функции $U = \arccos \frac{xy}{z}$. (4б)
2. Определить градиент функции U в точке $M(1, 1, 0)$. (2б)
3. Найти наибольшую скорость возрастания функции U в той же точке M. (3б)
4. Исследовать на экстремум функцию
$$z = x^3 - y^3 - 3xy + 1. \qquad (7б)$$
5. Составить уравнение касательной плоскости и нормали к поверхности z п.4 при $x_0 = 1$, $y_0 = 1$ (4б)
6. Дана функция $z = -\sqrt{1 - x^2 - y^2}$, необходимо:

а) найти наименьшее и наибольшее значения функции в замкнутой области $x \geq 0$, $y \geq 0$, $x + y \leq 1$; (6б)

б) определить экстремум при условии $x - y = \sqrt{2}$; (5б)

в) дать геометрическую иллюстрацию результатов, полученных в пп. а) и б). (4б)

Итого 35 баллов

Вариант № 17

1. Найти производные первого порядка и U''_{xz} для функции $U = \ln\cos(x+y+z)$. (4б)
2. Определить градиент функции U в точке $M(\frac{\pi}{4}, 0, 0)$. (2б)
3. Найти наибольшую скорость возрастания функции U в той же точке M. (3б)
4. Исследовать на экстремум функцию $z = x^3 + y^3 - 6xy + 1$. (7б)
5. Составить уравнение касательной плоскости и нормали к поверхности z п.4 при $x_0 = 1$, $y_0 = 1$. (4б)
6. Дана функция $z = -\sqrt{1 - \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9}}$, необходимо:

а) найти наименьшее и наибольшее значения функции в замкнутой области $x^2 + y^2 \leq 1$; (6б)

б) определить экстремум при условии $x + \frac{y}{2} = 1$; (5б)

в) дать геометрическую иллюстрацию результатов, полученных в пп. а) и б). (4б)

Итого 35 баллов

Вариант № 18

1. Найти производные первого порядка и U''_{xy} для функции $U = \cos^2(x+y+z^2)$. (4б)
2. Определить градиент функции U в точке $M(\frac{\pi}{4}, 0, 0)$. (2б)
3. Найти наибольшую скорость возрастания функции U в той же точке M. (3б)
4. Исследовать на экстремум функцию $z = 2x^2 - \frac{1}{3}y^3 + 4x - 4y - 9$. (7б)
5. Составить уравнение касательной плоскости и нормали к поверхности z п.4 при $x_0 = 1$, $y_0 = 1$. (4б)
6. Дана функция $z = -\sqrt{1 + \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9}}$, необходимо:

а) найти наименьшее и наибольшее значения функции в замкнутой области $x^2 + y^2 \leq 1$; (6б)

б) определить экстремум при условии $x + y = 0$; (5б)

в) дать геометрическую иллюстрацию результатов, полученных в пп. а) и б). (4б)

Итого 35 баллов

Вариант № 19

1. Найти производные первого порядка и U''_{zy} для функции $U=\sin^2(x+y^2+z)$. (4б)
2. Определить градиент функции U в точке $M(\frac{\pi}{4},0,0)$. (2б)
3. Найти наибольшую скорость возрастания функции U в той же точке M. (3б)
4. Исследовать на экстремум функцию
$$z=3x^2+y^3+6x-3y+10.$$ (7б)
5. Составить уравнение касательной плоскости и нормали к поверхности z п.4 при $x_0=1$, $y_0=1$. (4б)
6. Дана функция $z=-1-x^2-y^2$, необходимо:
а) найти наименьшее и наибольшее значения функции в замкнутой области $x\geq0, y\geq x, y\leq2$; (6б)
б) определить экстремум при условии $x-y=1$; (5б)
в) дать геометрическую иллюстрацию результатов, полученных в пп. а) и б). (4б)

Итого 35 баллов

Вариант № 20

1. Найти производные первого порядка и U''_{xx} для функции $U=\ln \operatorname{tg} xyz$. (4б)
2. Определить градиент функции U в точке $M(1,1,\frac{\pi}{4})$. (2б)
3. Найти наибольшую скорость возрастания функции U в той же точке M. (3б)
4. Исследовать на экстремум функцию
$$z=y^3+6y^2-3x^2+6x-2.$$ (7б)
5. Составить уравнение касательной плоскости и нормали к поверхности п.4 при $x_0=1$, $y_0=1$. (4б)
6. Дана функция $z=x^2+y^2-1$, необходимо:
а) найти наименьшее и наибольшее значения функции в замкнутой области $x-y\leq1$, $x\leq0$, $y\geq0$; (6б)
б) определить экстремум при условии $x+y=1$; (5б)
в) дать геометрическую иллюстрацию результатов, полученных в пп. а) и б). (4б)

Итого 35 баллов

Вариант № 21

1. Найти производные первого порядка и U''_{yy} для функции $U = \ln \operatorname{ctg} xyz$. (4б)
2. Определить градиент функции U в точке $M(\frac{\pi}{4}, 1, 1)$. (2б)
3. Найти наибольшую скорость возрастания функции U в той же точке M. (3б)
4. Исследовать на экстремум функцию

$$z = 2x^2 + 2x^2y - 2y + 4;$$ (7б)

5. Составить уравнение касательной плоскости и нормали к поверхности z п.4 при $x_0 = 1,\ y_0 = 1$. (4б)
6. Дана функция $z = -\sqrt{1 - \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9}}$, необходимо:

а) найти наименьшее и наибольшее значения функции в замкнутой области $x^2 + y^2 \leq 2$; (6б)

б) определить экстремум при условии

$$\frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 1;$$ (5б)

в) дать геометрическую иллюстрацию результатов, полученных в пп. а) и б). (4б)

Итого 35 баллов

Вариант № 22

I. Найти производные первого порядка и U''_{zy} для функции $U = \ln\sqrt{xyz}$. (4б)
2. Определить градиент функции U в точке $M(1, 1, 1)$. (2б)
3. Найти наибольшую скорость возрастания функции U в той же точке M. (3б)
5. Исследовать на экстремум функцию

$$z = x^2 - y^2x + y^2 + 1.$$ (7б)

5. Составить уравнение касательной плоскости и нормали к поверхности z п.4 при $x_0 = 1,\ y_0 = 1$. (4б)
6. Дана функция $z = -\sqrt{1 + \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{4}}$, необходимо:

а) найти наименьшее и наибольшее значения функции в замкнутой области $x^2 + y^2 \leq 2$; (6б)

б) определить экстремум при условии

$$\frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 1;$$ (5б)

в) дать геометрическую иллюстрацию результатов, полученных в пп. а) и б). (4б)

Итого 35 баллов

Вариант № 23

1. Найти производные первого порядка и U''_{zz} для функции $U = \arccos(x^2yz)$. (4б)
2. Определить градиент функции U в точке М(1,1,0). (2б)
3. Найти наибольшую скорость возрастания функции U в той же точке М. (3б)
4. Исследовать на экстремум функции
$$z = y^2 - xy^2 + x - 3.$$ (7б)
5. Составить уравнение касательной плоскости и нормали к поверхности z п.4 при $x_0 = 1,\ y_0 = 1.$ (4б)
6. Дана функция $z = \sqrt{x^2+y^2}$, необходимо:

а) найти наименьшее и наибольшее значения функции в замкнутой области
$$x \geq 0;\ y \leq x,\ y \leq 2;$$ (6б)

б) определить экстремум при условии $x-y=1$; (5б)

в) дать геометрическую иллюстрацию результатов, полученных в пп. а) и б). (4б)

Итого 35 баллов

Вариант № 24

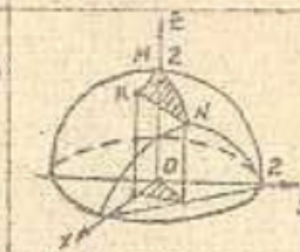
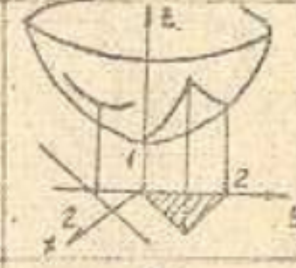
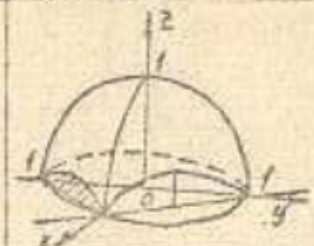
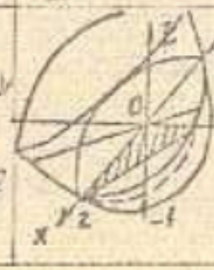
1. Найти производные первого порядка и U''_{xy} для функции $U = 2^{x^2+y^2+z^2}$. (4б)
2. Определить градиент функции U в точке М(1,1,0). (2б)
3. Найти наибольшую скорость возрастания функции U в той же точке М. (3б)
4. Исследовать на экстремум функцию
$$z = \frac{2}{3}x^3 - y^2 - 6x + 4y - 6.$$ (7б)
5. Составить уравнение касательной плоскости и нормали к поверхности z п.4 при $x_0 = 1,\ y_0 = 1.$ (4б)
6. Дана функция $z = -\sqrt{x^2+y^2}$, необходимо:

а) найти наименьшее и наибольшее значения функции в замкнутой области
$$x \geq 0,\ y \leq x,\ y \leq 2;$$ (6б)

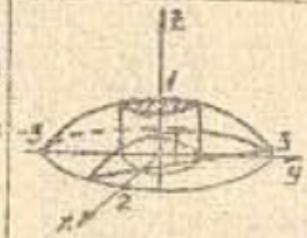
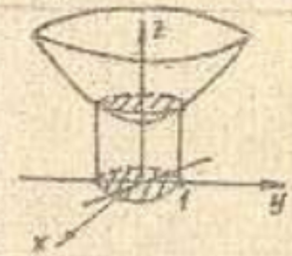
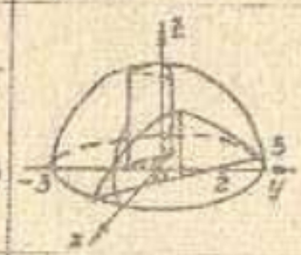
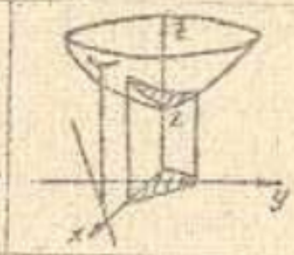
б) определить экстремум при условии $x-y=1$; (5б)

в) дать геометрическую иллюстрацию результатов, полученных в пп. а) и б). (4б)

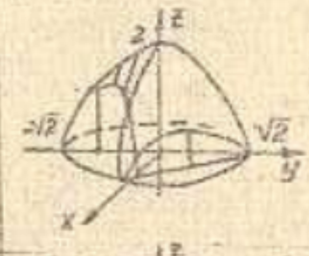
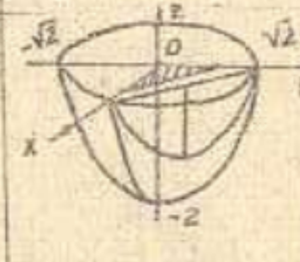
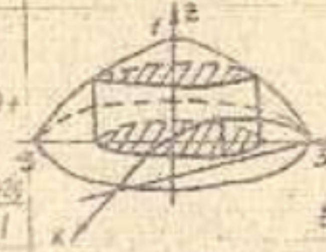
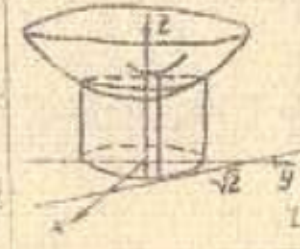
Итого 35 баллов

№ вар.	Частные производные	grad	$V_{наиб}$	Экстремумы	Касат. плоск. и нормаль	Задание 6	
1	$u'_x = \frac{0,5yz}{1+xyz}$; $u'_y = \frac{0,5xy}{1+xyz}$; $u'_y = \frac{0,5xz}{1+xyz}$; $u''_{xx} = \frac{-0,5y^2z^2}{(1+xyz)^2}$	$\frac{1}{2}\bar{k}$	$\frac{1}{2}$	$M_1(0;0)$ $M_2(\frac{1}{4};\frac{1}{16})$ $z_{min} = -1,003$ при $x=\frac{1}{4}$, $y=\frac{1}{16}$	$z_0=\frac{1}{3}$ $z-\frac{1}{3}=3(y-1)$ $\frac{x-1}{0}=\frac{y-1}{3}=\frac{z-\frac{1}{3}}{-1}$		$z_{наиб}=2$ при $x=0$, $y=0$; $z_{наим}=\sqrt{2}$ при $x=1$, $y=1$; Условный max $z=\sqrt{2}$ при $x=1$, $y=1$
2	$u'_x = \frac{yz}{1+x^2y^2z^2}$; $u'_z = \frac{xy}{1+x^2y^2z^2}$; $u'_y = \frac{xz}{1+x^2y^2z^2}$; $u''_{zz} = \frac{-2x^3y^3z}{(1+x^2y^2z^2)^2}$	$\frac{1}{2}\bar{i}+\frac{1}{2}\bar{j}+\frac{1}{2}\bar{k}$	$\frac{\sqrt{3}}{4}$	$M(1,1)$ $z_{min}=0$ при $x=1$, $y=1$	$z_0=1$ $z-1=-2(x-0)-10(y-1)$ $\frac{x-1}{-2}=\frac{y-1}{-10}=\frac{z-1}{2}$		$z_{наиб}=9$ при $x=2$, $y=2$; $z_{наим}=1$ при $x=0$, $y=0$; Условн. min $z=1,5$ при $x=\frac{1}{2}$, $y=-\frac{1}{2}$
3	$u'_x = \frac{yz}{\sqrt{1-x^2y^2z^2}}$; $u'_z = \frac{xy}{\sqrt{1-x^2y^2z^2}}$; $u'_y = \frac{xz}{\sqrt{1-x^2y^2z^2}}$; $u''_{yx} = \frac{x^3yz^3}{\sqrt{(1-x^2y^2z^2)^3}}$	$\bar{j}$	1	$M_1(-1,-2)$, $M_2(1,-2)$, $z_{min}=-24$ при $x=1$, $y=-2$	$z_0=-21$ $z+21=0(x-1)+18(y-1)$ $\frac{x-1}{0}=\frac{y-1}{18}=\frac{z+21}{-1}$		$z_{наиб}=1$ при $x=0$, $y=0$; $z_{наим}=0$ при $x=0$, $y=-1$; Условн. max $z=\frac{1}{2}$ при $x=y=\frac{1}{2}$
4	$u'_x = 2xe^{x^2+y^2+z^2}$ $u'_y = 2ye^{x^2+y^2+z^2}$ $u'_z = 2ze^{x^2+y^2+z^2}$ $u''_{zz} = (2+4z^2)e^{x^2+y^2+z^2}$	$2e^2(\bar{i}+\bar{j})$	$\sqrt{2}$	$M_1=(-3,-1)$ $M_2=(3,-1)$ $z_{min}=-66$ при $x=3$, $y=-1$	$z_0=-30$ $z+30=-24(x-1)+8(y-1)$ $\frac{x-1}{-24}=\frac{y-1}{8}=\frac{z+30}{-1}$		$z_{наиб}=0$ при $x=0$, $y=1$ и $x=2$, $y=0$; $z_{наим}=-1$ при $x=0$, $y=0$; Условн. min $z=-1$ при $x=y=0$

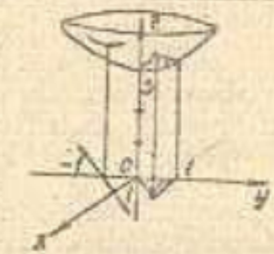
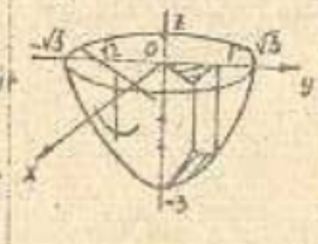
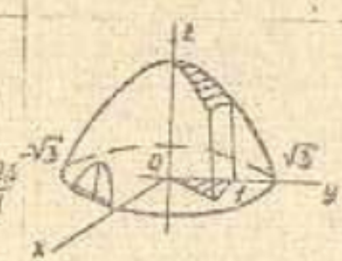
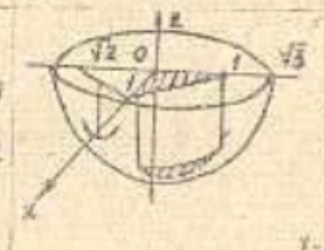
Матрица ответов к выходному тесту "Функция многих переменных"

№ вар	Частные производные	grad	Γ_{max}	Экстремумы	Касат. плоск. и нормаль	Задание 6	
5	$u'_x=\frac{-yz}{1+x^2y^2z^2}$; $u'_z=\frac{-xy}{1+x^2y^2z^2}$; $u'_y=\frac{-xz}{1+x^2y^2z^2}$; $u'_{xy}=\frac{x^2z^2z^3-z}{(1+x^2y^2z^2)^2}$	$-\frac{1}{2}\bar{j}$	$-\frac{1}{2}$	$M_1(2;-1)$ $M_2(2,1)$ $z_{max}=20$ при $x=2$ $y=1$	$z_0=17$ $z-17=6(x-1)$ $\frac{x-1}{6}=\frac{y-1}{0}=\frac{z-17}{-1}$		$z_{наиб}=1$ при $x=y=0$ $z_{наим}=\frac{\sqrt{3}}{2}$ при $y=0, x=\pm1$ Условн max $z=0{,}2\sqrt{21}$ при $x=\frac{16}{25}, y=\frac{18}{25}$
6	$u'_x=\frac{yz}{1+xyz}$; $u'_z=\frac{xy}{1+xyz}$; $u'_y=\frac{xz}{1+xyz}$; $u''_{xz}=\frac{y}{(1+xyz)^2}$	$\frac{1}{2}\bar{i}+\frac{1}{2}\bar{j}+\frac{1}{2}\bar{k}$	$\frac{\sqrt{3}}{4}$	$M_1(0,0)$ $M_2(1,1)$ $z_{max}=-1{,}5$ при $x=1$ $y=1$	$z_0=-\frac{3}{2}$ $z+\frac{3}{2}=0$ $\frac{x-1}{0}=\frac{y-1}{0}=\frac{z+\frac{3}{2}}{-1}$.		$z_{наим}=\frac{\sqrt{2}}{2}$ при $y=0, x=\pm1$ $z_{наиб}=1$ при $x=y=0$ Условн min $z=1$ при $x=y=0$
7	$u'_x=\frac{yz}{\cos^2xyz}$; $u'_y=\frac{xz}{\cos^2xyz}$; $u'_z=\frac{xy}{\cos^2xyz}$; $u''_{yz}=\frac{x\cos^2xyz+x^2yz\sin 2xyz}{\cos^4xyz}$	$\bar{k}$	1	$M_1(\frac{3}{4},-2)$ $M_2(\frac{3}{4},2)$ $z_{min}=-\frac{133}{4}$ при $x=\frac{3}{4}$ $y=2$	$z_0=-33$ $z+33=2(x-1)-27(y-1)$ $\frac{x-1}{2}=\frac{y-1}{-27}=\frac{z+33}{-1}$		$z_{наиб}=3$ при $x=y=0$ $z_{наим}=\sqrt{2}$ при $x=0, y=-1$ и $x=-1, y=0$ Условн min $z=\sqrt{7}$ при $x=y=1$
8	$u'_x=ctg(x+y^2+z^3)$; $u'_z=3z^2ctg(x+y^2+z^3)$; $u'_y=2y\,ctg(x+y^2+z^3)$; $u''_{xx}=\frac{-1}{\sin^2(x+y^2+z^3)}$.	$\bar{i}$	1	$M_1(-\frac{3}{2},-2)$ $M_2(-\frac{3}{2},2)$ $z_{min}=-38$ при $x=-\frac{3}{2}$ $y=-2$	$z_0=41$ $z-41=20(x-1)+18(y-1)$ $\frac{x-1}{20}=\frac{y-1}{18}=\frac{z-41}{-1}$		$z_{наиб}=3$ при $x=0$ $y=\pm1$ и $x=\pm1$, $y=0$ $z_{наим}=2$ при $x=y=0$ Условн min $z=4$ при $x=1, y=-1$

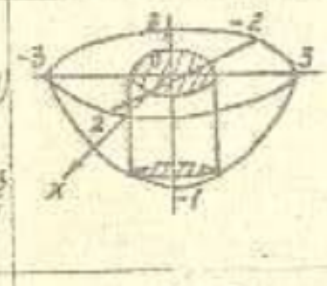
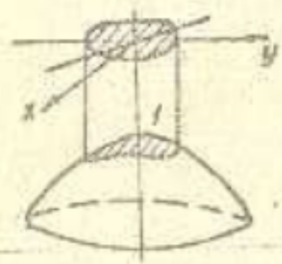
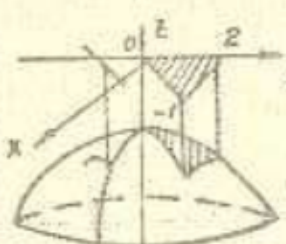
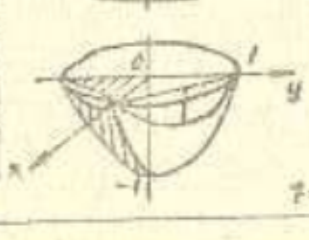
Матрица ответов к выходному тесту "Функции многих переменных"

№ вар	Частные производные	grad	$V_{наиб}$	Экстремум	Касат. плоск. и нормаль	Задание 6
9	$u'_x = e^{x+y^2+z^3}$; $u'_z = 3z^2 e^{x+y^2+z^3}$; $u'_y = 2y e^{x+y^2+z^3}$; $u''_{xz} = e^{x+y^2+z^3}\cdot 3z^2$	$e^2(\bar i+\bar j)$	$\sqrt{5}$	$M_1(2,-2)$ $M_2(2,2)$ $z_{max}=21$ при $x=2$ $y=2$	$z_0=15$ $z-15=2(x-1)+9(y-1)$ $\frac{x-1}{2}=\frac{y-1}{9}=\frac{z-15}{-1}$	 z наиб $=2$ при $x=y=0$ z наим $=1$ при $x=1, y=0$ и $x=0, y=-1$ Условн max $z=1$ при $x=y=\frac{\sqrt{2}}{2}$
10	$u'_x = yz e^{xyz}$; $u'_z = xy e^{xyz}$; $u'_y = xz e^{xyz}$; $u''_{zx} = e^{xyz}(z+yz^2)$	$\bar k$	1	$M(0,0)$ экстремума нет	$z_0=-12$ $z+12=0$ $\frac{x-1}{0}=\frac{y-1}{0}=\frac{z+12}{-1}$	 z наим $=-2$ при $x=y=0$ z наиб $=-1$ при $x=1, y=0$; $x=0, y=1$ Условн max $z=-1$ при $x=y=\frac{\sqrt{2}}{2}$
11	$u'_x = \frac{x}{x^2+y^2+z^2}$; $u'_z = \frac{z}{x^2+y^2+z^2}$; $u'_y = \frac{y}{x^2+y^2+z^2}$; $u''_{xy} = \frac{-2xy}{(x^2+y^2+z^2)^2}$	$\frac{1}{2}(\bar i+\bar j)$	$\sqrt{2}$	$M_1(-2,-1)$ $M_2(2,-1)$ $z_{min}=-60$ при $x=2$ $y=-1$	$z_0=-29$ $z+29=-27(x-1)+16(y-1)$ $\frac{x-1}{-27}=\frac{y-1}{16}=\frac{z+29}{-1}$	 z наиб $=1$ при $x=y=0$ z наим $=\frac{\sqrt{2}}{2}$ при $x=\pm\sqrt{2}, y=0$ Условн max $z=\frac{\sqrt{2}}{2}$ при $x=1, y=\frac{1}{2}$
12	$u'_x = \frac{yz}{y^2+x^2z^2}$; $u'_z = \frac{yx}{y^2+x^2z^2}$; $u'_y = \frac{-xz}{y^2+x^2z^2}$; $u''_{xx} = \frac{-2xyz^3}{(y^2+x^2z^2)^2}$	$\bar k$	1	$M_1(-2,2)$ $M_2(2,2)$ $z_{min}=-56$ при $x=2$ $y=2$	$z_0=-39$ $z+39=-9(x-1)-12(y-1)$ $\frac{x-1}{-9}=\frac{y-1}{-12}=\frac{z+39}{-1}$	 z наиб $=\frac{\sqrt{3}}{2}$ при $x=\pm\sqrt{2}, y=0$ z наим $=1$ при $x=y=0$ Условн min $z=\frac{\sqrt{3}}{2}$ при $x=1, y=\frac{1}{2}$

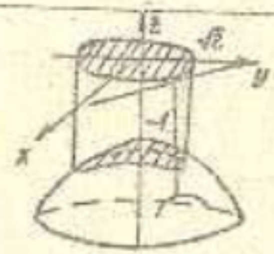
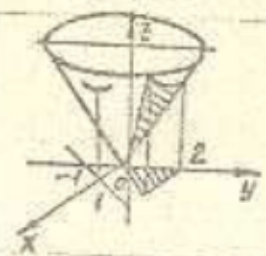
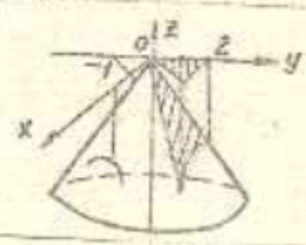
Матрица ответов к выходному тесту "Функции многих переменных"

N вар	Частные производные	grad	$U_{наиб}$	Экстремум	Кас. плоск. пл. и нор. пр.	Задание 6	
13	$U'_x = \frac{1}{x}$; $U'_z = -\frac{1}{z}$; $U'_y = \frac{1}{y}$; $U''_{xy} = 0$	$\bar i + \bar j - \bar k$	$\sqrt{3}$	$M_1(1,1)$ $M_2(2,-1)$ $z_{min} = \frac{2}{3}$ при $x=2$, $y=1$	$z_0 = \frac{1}{3}$ $z - \frac{1}{3} = -3(x-1)$ $\frac{x-1}{-3} = \frac{y-1}{0} = \frac{z-\frac{1}{3}}{-1}$		$z_{наиб} = 5$ при $x=y=1$ $z_{наим} = 3$ при $x=y=0$ Условн. extr. $z=6$ при $x=1$, $y=-1$
14	$U'_x = \frac{3x^2}{x^3+y^2+z}$; $U'_z = \frac{1}{x^3+y^2+z}$; $U'_y = \frac{2y}{x^3+y^2+z}$; $U''_{zy} = \frac{-2y}{(x^3+y^2+z)^2}$	$\bar i + \frac{2}{3}\bar j + \frac{1}{6}\bar k$	$\frac{\sqrt{14}}{3}$	$M_1(4,-1)$ $M_2(-4,-1)$ $z_{min} = -121$ при $x=4$, $y=-1$	$z_0 = -28$ $z+28 = -45(x-1) + 12(y-1)$ $\frac{x-1}{-45} = \frac{y-1}{12} = \frac{z+28}{-1}$		$z_{наим} = -3$ при $x=y=0$ $z_{наиб} = -1$ при $x=y=1$ Условн. min $z = -2{,}5$ при $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $y = -\frac{\sqrt{2}}{2}$
15	$U'_x = \frac{-yz}{\sqrt{1+x^2y^2z^2}}$; $U'_y = \frac{-xz}{\sqrt{1+x^2y^2z^2}}$; $U'_z = \frac{-xy}{\sqrt{1+x^2y^2z^2}}$; $U''_{zz} = \frac{2zx^3y^3}{2(\sqrt{1+x^2y^2z^2})^3}$	$-\bar k$	1	$M_1(0,0)$ $M_2(1,1)$ $z_{max} = 2{,}5$ при $x=1$, $y=1$	$z_0 = 2{,}5$ $z - 2{,}5 = 0$ $\frac{x-1}{0} = \frac{y-1}{0} = \frac{z-2{,}5}{-1}$		$z_{наиб} = 3$ при $x=y=0$ $z_{наим} = 1$ при $x=y=1$ Условн. max $z = 2{,}5$ при $x = \frac{1}{2}$, $y = -\frac{1}{2}$
16	$U'_x = \frac{-y}{\sqrt{z^2+x^2y^2}}$; $U'_y = \frac{-x}{\sqrt{z^2+x^2y^2}}$; $U'_z = \frac{z}{\sqrt{z^2+x^2y^2}}$; $U''_{xx} = \frac{xy^3}{\sqrt{(z^2+x^2y^2)^3}}$	$-\bar i - \bar j$	$\sqrt{2}$	$M_1(0,0)$ $M_2(-1,1)$ $z_{max} = 2$ при $x=-1$, $y=1$	$z_0 = -2$ $z+2 = -6(y-1)$ $\frac{x-1}{0} = \frac{y-1}{-6} = \frac{z+2}{-1}$		$z_{наим} = -\sqrt{3}$ при $x=y=0$ $z_{наиб} = -\sqrt{2}$ при $x=0$, $y=1$; $x=1$, $y=0$ Условн. min $z = -\sqrt{2{,}5}$ при $x = \frac{\sqrt{5}}{2}$, $y = -\frac{\sqrt{5}}{2}$

Матрица ответов к выходному тесту "Функции многих переменных"

№ вар	Частные производные	grad	$V_{наиб}$	Экстремумы	Касат. пл. и нормаль	Задание 6	
17	$U'_x=-tg(x+y^2+z^2)$; $U'_y=-2y\,tg(x+y^2+z^2)$ $U'_z=-2z\,tg(x+y^2+z^2)$; $U''_{xz}=-\dfrac{2z}{\cos^2(x+y^2+z^2)}$	$-\bar{i}$	1	$M_1(0,0)$ $M_2(6,18)$ $z_{min}=-107$ при $x=6$ $y=18$	$z_0=-3$ $z+3=-3(x-1)-4(y-1)$ $\dfrac{x-1}{-3}=\dfrac{y-1}{-4}=\dfrac{z+3}{-1}$		$z_{наим}=-1$ при $x=y=0$ $z_{наиб}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$ при $x=\pm1, y=0$ Условн. min $z=-0{,}2\sqrt{21}$ при $x=\frac{16}{25}$ $y=\frac{18}{25}$
18	$u'_x=-\sin 2(x+y+z^2)$; $u'_y=-\sin 2(x+y+z^2)$ $u'_z=-2z\sin(2x+2y+2z^2)$; $u''_{xy}=-2\cos 2(x+y+z^2)$	$-\bar{i}-\bar{j}$	$\sqrt{2}$	$M_1(-1,2)$ $M_2(-1,-2)$ $z_{min}=-\frac{49}{3}$ при $x=-1$ $y=2$	$z_0=-\frac{20}{3}$ $z+\frac{20}{3}=8(x-1)-3(y-1)$ $\dfrac{x-1}{8}=\dfrac{y-1}{-3}=\dfrac{z+\frac{20}{3}}{-1}$		$z_{наим}=-1$ при $x=y=0$ $z_{наиб}=-\frac{15}{2}$ при $x=\pm1, y=0$ Условн. min $z=-1$ при $x=y=0$
19	$U'_x=\sin 2(x+y^2+z)$; $U'_y=2y\sin 2(x+y^2+z)$ $U'_z=\sin 2(x+y^2+z)$; $U''_{zy}=4y\cos 2(x+y^2+z)$	$\bar{i}+\bar{j}$	$\sqrt{2}$	$M_1(-1,1)$ $M_2(-1,-1)$ $z_{min}=-5$ при $x=-1$ $y=1$	$z_0=3$ $z+3=12(x-1)$ $\dfrac{x-1}{12}=\dfrac{y-1}{0}=\dfrac{z+3}{-1}$		$z_{наиб}=-1$ при $x=y=0$ $z_{наим}=-9$ при $x=y=2$ Условн. max $z=-\frac{3}{2}$ при $x=\frac{1}{2}, y=\frac{1}{2}$
20	$U'_x=\dfrac{2yz}{\sin 2xyz}$; $U'_y=\dfrac{2xz}{\sin 2xyz}$ $U'_z=\dfrac{2xy}{\sin 2xyz}$; $U''_{yy}=\dfrac{-4y^2z^2\cos 2xyz}{\sin^2 2xyz}$	$\frac{\pi}{2}\bar{i}+\frac{\pi}{2}\bar{j}+2\bar{k}$	$\sqrt{\frac{\pi^2+8}{2}}$	$M_1(1,0)$ $M_2(1,-4)$ $z_{max}=33$ при $x=1$ $y=-4$	$z_0=8$ $z-8=15(y-1)$ $\dfrac{x-1}{0}=\dfrac{y-1}{15}=\dfrac{z-8}{-1}$		$z_{наим}=-1$ при $x=y=0$ $z_{наиб}=0$ при $x=0, y=-1$ $x=1, y=0$ Условн. max $z=-\frac{1}{2}$ при $x=y=\frac{1}{2}$

Матрица ответов к выходному тесту "Функции многих переменных"

№ вар	Частные производные	grad	Uнаиб	Экстремум	Касат. пл. и нормаль	Задание 6	
21	$u'_x=\frac{-2yz}{\sin 2xyz}$; $u'_y=\frac{-2xz}{\sin 2xyz}$; $u'_z=\frac{-2xy}{\sin 2xyz}$; $u''_{yy}=\frac{-4x^2z^2\cos 2xyz}{\sin^2 2xyz}$	$-2\bar{i}-\frac{\pi}{2}\bar{j}-\frac{\pi}{2}\bar{k}$	$\sqrt{\frac{\pi^2+8}{2}}$	$M_1(1,-1)$ $M_2(-1,-1)$ экстремума нет	$z_0=6$ $z-6=8(x-1)$ $\frac{x-1}{8}=\frac{y-1}{0}=\frac{z-6}{-1}$		$z_{наим}=-1$ при $x=y=0$ $z_{наиб}=-\frac{\sqrt2}{2}$ при $x=\pm\sqrt2, y=0$ Условн. min $z=-\frac{\sqrt2}{2}$ при $x=1$, $y=\frac32$
22	$u'_x=\frac{1}{2x}$; $u'_y=\frac{1}{2y}$; $u'_z=\frac{1}{2z}$; $u''_{zy}=0$	$\frac12\bar{i}+\frac12\bar{j}+\frac12\bar{k}$	$\frac{\sqrt3}{4}$	$M_1(0,0)$ $M_2(1,\sqrt2)$ $z_{min}=1$ при $x=0$, $y=0$	$z_0=2$ $z-2=(x-1)$ $\frac{x-1}{1}=\frac{y-1}{0}=\frac{z-2}{-1}$		$z_{наим}=-\frac{\sqrt2}{2}$ при $x=\pm\sqrt2, y=0$ $z_{наиб}=-1$ при $x=y=0$ Условн. max $z=-\frac{\sqrt7}{2}$, $x=1$, $y=\frac32$
23	$u'_x=\frac{-2xyz}{\sqrt{1-x^4y^2z^2}}$; $u'_y=\frac{-x^2z}{\sqrt{1-x^4y^2z^2}}$; $u'_z=\frac{-x^2y}{\sqrt{1-x^4y^2z^2}}$; $u''_{zz}=\frac{-2x^6y^3z}{2\sqrt{(1-x^4y^2z^2)^3}}$	$-\bar{k}$	1	$M_1(1,1)$ $M_2(1,-1)$ экстремума нет	$z=-2$ $z+2=0$ $\frac{x-1}{0}=\frac{y-1}{0}=\frac{z+2}{-1}$		$z_{наим}=0$ при $x=y=0$ $z_{наиб}=2\sqrt2$ при $x=y=2$ Условн. min $z=\frac{\sqrt2}{2}$ $x=0{,}5$ $y=-0{,}5$
24	$u'_x=2\ln2\cdot x2^{x^2y^2z^2}$; $u'_y=2\ln2\cdot y2^{x^2y^2z^2}$; $u'_z=2\ln2\cdot z2^{x^2y^2z^2}$; $u''_{xy}=4\ln^2 2\cdot xy2^{x^2y^2+z^2}$	$8\ln2\,\bar{i}+8\ln2\,\bar{j}$	$\sqrt2$	$M_1(\sqrt3,2)$ $M_2(-\sqrt3,2)$ $z_{max}=4\sqrt3-2$ при $x=-\sqrt3$, $y=2$	$z_0=-\frac{2\sqrt5}{3}$ $z+\frac{2\sqrt5}{3}=-4(x-1)+2(y-1)$ $\frac{x-1}{-4}=\frac{y-1}{2}=\frac{z+\frac{2\sqrt5}{3}}{-1}$		$z_{наиб}=0$ при $x=y=0$ $z_{наим}=-2\sqrt2$ при $x=y=2$ Условн. max $z=-\frac{\sqrt2}{2}$ при $x=0{,}5$, $y=-0{,}5$

3. ОБРАЗЦЫ ВХОДНЫХ И ВЫХОДНЫХ ТЕСТОВ ДЛЯ РЕЙТИНГОВОЙ ТЕХНОЛОГИИ МОДУЛЬНОГО ОБУЧЕНИЯ

Модуль N I "Матрицы, определители, системы линейных уравнений"

Входной тест N I

Заполните, пожалуйста, таблицы. За каждый правильно заполненный блок Вы получаете I балл. В дальнейшем эти таблицы можно вложить в свой личный справочник.

$a^2-b^2=$ $(a\pm b)^2=$ $(a\pm b)^3=$ $a^3\pm b^3=$	$a^0=$ $\quad a^x\cdot a^y=$ $\dfrac{a^x}{a^y}=$ $\quad (a^x)^y=$ $(ab)^x=$ $\quad \left(\dfrac{a}{b}\right)^x=$ $a^{-x}=$ $\quad \sqrt[n]{a^k}=$
$\log_a x+\log_a y=$ $\log_a x-\log_a y=$ $k\log_a x=$	$\sin^2 x+\cos^2 x=$ $tg\,x\cdot ctg\,x=$ $1+tg^2 x=$ $1+ctg^2 x=$
$\dfrac{1}{\log_x a}=$ $a^{\log_a x}=$ $\log_a a=$ $\log_a 1=$	$2\sin x\cos x=$ $\cos^2 x-\sin^2 x=$ $1+\cos 2x=$ $1-\cos 2x=$ $\dfrac{2\,tg\,x}{1-tg^2 x}=$
$\sin x+\sin y=$ $\sin x-\sin y=$ $\cos x+\cos y=$ $cox-\cos y=$	$\sin x\cos y=$ $\cos x\cdot\cos y=$ $\sin x\cdot\sin y=$

α / u	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$	π	$3\pi/2$	2π
	0°	30°	45°	60°	90°	180°	270°	360°
$\sin\alpha$								
$\cos\alpha$								
$tg\,\alpha$								
$ctg\,\alpha$								

u	$-\alpha$	$\pi-\alpha$	$\pi+\alpha$	$\frac{\pi}{2}-\alpha$	$\frac{\pi}{2}+\alpha$	$\frac{3\pi}{2}-\alpha$	$\frac{3\pi}{2}+\alpha$
$\sin$							
$\cos$							
tg							
ctg							

Выходной тест № I

I Перемножить матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \\ 0 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}. \qquad \text{(3 балла)}$$

2. Найти A^{-1}. Сделать проверку.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & -4 \end{pmatrix}. \qquad \text{(4 балла)}$$

3. Решить по формулам Крамера и матричным способом

$$\begin{cases} 3x-4y+6z=5 \\ x+2y+3z=6 \\ 2x-4z=-2. \end{cases} \qquad \text{(7 баллов)}$$

4. Сколько решений имеет система

$$\begin{cases} x-2y+z=0 \\ 3x+4y-z=0 \\ 6x-2y+2z=0 \end{cases} \qquad \text{(2 балла)}$$

Итого: (16 баллов)

Викторинные вопросы № I

I. Можно ли перемножить матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} ?$$

2. Верно ли, что если главный определитель неоднородной системы линейных уравнений равен нулю, то система решений не имеет?
3. Верно ли, что если главный определитель однородной системы линейных уравнений равен нулю, то система имеет решение?
4. Верно ли, что при умножении матрицы на число каждый её элемент умножается на это число ?
5. Верно ли, что при умножении определителя на число каждый его элемент умножается на это число ?
6. Совместна ли система линейных уравнений, у которой число уравнений больше числа неизвестных ?
7. Совместна ли система линейных уравнений, у которой число неизвестных больше числа уравнений ?
8. Верно ли, что всякая квадратная матрица имеет обратную ?
9. Верно ли, что всегда $AB \neq BA$?
I0. Верно ли, что $\Delta \sum_{i=1}^{n} a_{ik} M_{ik}$, где M_{ik} - минор элемента ?
II. Будет ли равна нулю матрица, у которой все элементы равны нулю ?
I2. Можно ли складывать определители разных порядков?

Модуль № 2 "Векторная алгебра"

Входной тест № 2

I. Решить систему по формулам Крамера

$$\begin{cases} 3x - 4y - 2 = 0 \\ 2x + 5y - 1 = 0 \end{cases}$$ (2 балла)

2. Построить тетраэдр на векторах $\bar{a} = 2\bar{i} - \bar{j} + 3\bar{k}$, $\bar{b} = \bar{i} + 2\bar{j} + 4\bar{k}$, $\bar{c} = 4\bar{i} + 5\bar{j} + 3\bar{k}$. (2 балла)

3. Вычислить определитель

$$\begin{vmatrix} 3 & 5 & -1 \\ 2 & 0 & -3 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix}$$ (2 балла)

4. Построить векторы $(\bar{a}+2\bar{b})/2$ и $\frac{\bar{a}}{2}-\bar{b}$,

если $|\bar{a}|=2$, $|\bar{b}|=3$, $(\bar{a}\,\hat{,}\,\bar{b})=\pi/3$. (2 балла)

5. Найти длину вектора $\bar{c}=\{2;-1;1\}$ и косинусы углов, которые вектор c составляет с осями координат. (2 балла)

Итого: 10 баллов

Выходной тест N 2

1. Разложить геометрически и аналитически вектор $\bar{c}=3\bar{i}+\bar{j}$ по базису $\bar{a}=-\bar{i}-\bar{j}$ и $\bar{b}=-\bar{i}-\bar{j}$. (6 баллов)
2. Найти проекцию вектора $\overline{AB}$ на направление вектора $\overline{AC}$, если $A(-1;2;1)$, $B(1;3;0)$, $C(-4;2;3)$. (2 балла)
3. Найти объём тетраэдра АВСД, если $A(-2;1;1)$, $B(1;-2;3)$, $C(2;1;-1)$, $Д(-2;2;2)$. (2 балла)
4. Найти площадь треугольника, построенного на векторах $\bar{a}=3\bar{i}+\bar{k}$ и $\bar{b}=\bar{i}+\bar{j}-3\bar{k}$. (2 балла)
5. Найти длину вектора $\bar{c}=\bar{a}-2\bar{b}$, если $|\bar{a}|=2$, $|\bar{b}|=1$, $(\bar{a}\,\hat{,}\,\bar{b})=\pi/6$. (3 балла)
6. Найти площадь параллелограмма, построенного на векторах $\bar{a}=\bar{m}+\bar{n}$ и $\bar{b}=\bar{m}-3\bar{n}$, если $|\bar{m}|=2$, $|\bar{n}|=1$, $(\bar{m}\,\hat{,}\,\bar{n})=\pi/6$. (3 балла)

Итого: 18 баллов

Викторинные вопросы к теме N 2

1. Верно ли, что размерность линейного пространства совпадает с числом линейно независимых векторов ?
2. Верно ли, что система векторов, содержащая подсистему линейно зависимых векторов, всегда линейно зависима ?
3. Всегда ли линейно зависимы ($n+1$) векторов в n-мерном пространстве ?
4. Верно ли равенство $[\bar{a}+\bar{b},\bar{a}-\bar{b}]=\bar{a}^2-\bar{b}^2$?

5. Вектор составляет с осями координат в пространстве R^3 одинаковые углы. Верно ли, что этот угол равен 45^0 ?
6. Верно ли, что $[\bar{a}, \bar{b}]\,\bar{c} = \bar{a}\,[\bar{b}, \bar{c}]$?
7. Верно ли, что $[\bar{a}, (\bar{b}, \bar{c})]$?
8. Верно ли, что взаимно ортогональные ненулевые векторы линейно независимы ?
9. Верно ли, что $[\bar{a}, \bar{b}]$ есть площадь параллелограмма, построенного на векторах $\bar{a}$ и $\bar{b}$?
10. Верно ли, что множество всех векторов, выходящих из начала координат, концы которых лежат на фиксированной прямой, образует линейное пространство ?
11. Верно ли, что если векторы компланарны, то векторное произведение любой пары этих векторов равно нулю ?
12. Верно ли, что смешанное произведение векторов не изменится при циклической перестановке множителей ?

Модуль N 3 "Аналитическая геометрия"

Входной тест N 3

1. Найти точку пересечения прямых $3x - y = 7$ и $x + 2y = 4$ (1 балл)
2. Будут ли параллельны прямые $x - 2y + 3 = 0$ и $y = 0,5x + 5$? (1 балл)
3. Найти вектор, перпендикулярный векторам $\bar{a} = 2\bar{i} - 4\bar{j} + \bar{k}$ и $\bar{b} = \bar{i} - 2\bar{j}$. (2 балла)
4. Проверить ортогональность векторов $\bar{a} = 2\bar{i} - \bar{j} + 2\bar{k}$ и $\bar{b} = 0,5\bar{i} + 3\bar{j} + \bar{k}$. (1 балл)
5. Проверить параллельность векторов $\bar{c} = \bar{a} - \bar{b}$ и $\bar{d} = \bar{a} + 2\bar{b}$, если $a = \{1;2;-1\}$, $\bar{b} = \{3;0;1\}$. (2 балла)

Итого: 7 баллов

Выходной тест № 3

I. Найти угол между прямыми

$$\frac{x+1}{2} = \frac{y}{-1} = \frac{z+4}{5} \quad и \quad \begin{cases} 3x - 2y + z - 4 = 0 \\ x + y + z = 0 \end{cases}$$

(4 балла)

2. Даны вершины треугольника: $A(-1;0)$, $B(2;2)$, $C(2;-3)$. Написать уравнение прямой, проходящей через вершину B параллельно медиане AM.

(4 балла)

3. Построить кривую $x^2 + 2y^2 + 3x - 4y + 4 = 0$. (3 балла)

4. Построить поверхности:

а) $2z^2 = 1 + y^2$; (2 балла)

б) $x^2 = y^2 + 2z$. (2 балла)

Итого 15 баллов

Викторинные вопросы № 3

I. Верно ли, что уравнение $x^2 + y^2 + 5x - 4 = 0$ задаёт на плоскости окружность ?

2. Верно ли, что уравнение $x^2 + y^2 = 4 - 3z^2$ определяет эллипсоид в R^3 ?

3. Верно ли, что уравнение $2x + y^2 - 4y = 1$ определяет параболу ?

4. Верно ли, что плоскость $2x + y + z - 4 = 0$ и прямая $\frac{x-1}{1}=\frac{y-2}{1}=\frac{z}{-3}$ параллельны ?

5. Верно ли, что уравнение $F(x,z) = 0$ определяет цилиндрическую поверхность в R^3 ?

6. Верно ли, что уравнение $x^2 + z^2 = a^2$ задаёт сферическую поверхность ?

7. Пересекаются ли линии, задаваемые уравнениями

$x + y = 2$, $x^2 + y^2 = a^2$?

8. Верно ли, что если прямая $\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}$ и плоскость $Ax + By + Cz + D = 0$ перпендикулярны, то $\frac{m}{A}=\frac{n}{B}=\frac{p}{C}$?

9. Верно ли, что система уравнений $Ax + By + Cz + D = 0$, $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ определяет в пространстве прямую ?

10. Верно ли, что собственные векторы, отвечающие различным собственным значениям, ортогональны друг другу ?

11. Верно ли, что у симметрической матрицы все собственные значения вещественные ?

12. Верно ли, что матрица квадратичной формы имеет только вещественные собственные числа ?

Модуль N 4 "Введение в анализ"

1. Преобразовать

а) $\dfrac{x^3-2x^2+x+4}{x+1}$ (1 балл)

б) $\dfrac{5x^4-5x^2-2}{x^2-2}$ (2 балла)

2. Найти область определения функции

$$y = \arccos(7x-4) + \frac{5x-6}{7|x|-4}.$$ (2 балла)

3. Исследовать на чётность или нечётность функции

а) $y = sh\,x = \dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$;

б) $y = ch\,x = \dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$. (1 балл)

4. Построить графики функций:

а) $y = \sin\left(\frac{x}{2}-1\right)$; б) $y = -\cos 2x + 1$;

в) $y = e^{-(x+2)}$; г) $y = \ln|-2|$;

д) $y = -3x^2 + 8|x| + 3$. (10 баллов)

Итого 15 баллов

Выходной тест N 4

1. Перейти в уравнениях

$x = 3$; $x^2 + y^2 = 7$; $x^2 + y^2 = 2y$ (4 балла)

к полярным координатам и построить кривые.

2. Вычислить пределы:

а) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1+x-5x^2}{x^2-4}$; (1 балл) б) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{3x^2-8x-3}{\sqrt{13+x}-4}$; (3 балла)

в) $\lim\limits_{x\to\infty} (\sqrt{3x^2-x}-x)$; (2 балла)

г) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{\operatorname{arctg}^2 2x}{x \arcsin 3x}\right)^{1/x}$; (3 балла)

д) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{3x-4}{3x+5}\right)^{x}$. (3 балла)

3. Исследовать на непрерывность функцию и построить эскиз графика

$$y=\begin{cases} e^{-x}, & -\infty < x \le 0 \\ x+1, & 0 < x \le 2 \\ 3-2x, & 2 < x < \infty. \end{cases}$$ (4 балла)

Итого 20 баллов

Викторинные вопросы № 4

1. Верно ли, что области определения функций $y=\lg(x^2-8x+9)$ и $y=\dfrac{1}{\sqrt{|x-3|}}$ совпадают ?
2. Верно ли, что функция $y=\sin^2 x^2$ является элементарной ?
3. Верно ли, что функция $y=\sqrt{\sin x}$ периодическая ?
4. Верно ли, что функция $y=\sqrt{\sin x}$ нечётная ?
5. Верно ли, что $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(3x-4)}{3x-4}$ есть первый замечательный предел ?
6. Верно ли, что $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n^2-4}{n^2+3}\right)^{2n}$ сводится ко второму замечательному пределу ?
7. Верно ли, что $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n-4}{3n+1}\right)^{n}$ сводится ко второму замечательному пределу ?
8. Верно ли, что произведение бесконечно малой величины на бесконечно большую есть величина бесконечно малая ?
9. Верно ли, что всякая величина, имеющая предел, ограничена на соответствующем множестве ?
10. Верно ли, что ограниченная величина имеет предел ?

II. Верно ли, что функция, для которой $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x)$, непрерывна в точке x_0 ?

I2. Верно ли, что функция непрерывна в точке $x = 2$?
$$y = \begin{cases} \dfrac{x-2}{x^2-4}, & x \neq 2 \\ 1/4, & x = 2. \end{cases}$$

Модуль № 5 "Дифференциальное исчисление функций одной переменной"

Входной тест № 5

I. Решить неравенство $y > 2$, если
$$\frac{3x+5y}{2} = 7x - 4y.$$
(2 балла)

2. Решить уравнение $x^{\lg x} = 10^{[illegible]}$. (3 балла)

3. Вычислить пределы:

а) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x - \sin 3x}{5x}$; (I балл)

б) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{3x+4} - 2}{2x}$. (I балл)

4. Найти производные функций
$$y = x \cdot \sin 3x; \quad y = 2^{x-1} / \sin x; \quad y = (6x+5)^4.$$
(3 балла)

5. Написать уравнения касательной и нормали к кривой $y = x^2 + 5x + 1$ в точке с абсциссой $x = 1$. (4 балла)

Итого I4 баллов

Выходной тест № 5

I. Найти скорость точки в произвольный момент времени, если закон её прямолинейного движения имеет вид $x = x(t)$:

а) $x = \ln^2 \sin\sqrt{t^2+4}$; (2 балла)

б) $x = \ln t \, \mathrm{tg}\, \dfrac{3x+4}{5}$; (2 балла)

в) $\dfrac{t}{x} + \mathrm{arctg}\, x = 5t$. (2 балла)

2. Найти ускорение точки в момент времени $t = 2$с, если закон прямолинейного движения $x = x(t)$ задан параметрически с параметром u:

$$\begin{cases} t = (1-u^2)^5 \\ x = \arcsin u^2. \end{cases}$$

(2 балла)

3. Найти пределы:

а) $\lim\limits_{x \to \infty} (x^2)^{1/x}$; (3 балла)

б) $\lim\limits_{x \to 2} (2-x)\,tg\,\frac{\pi x}{4}$; (2 балла)

в) $\lim\limits_{x \to 1} \left(\frac{1}{x-1} - \ln x\right)$. (3 балла)

4. Вычислить приближённо при $x = 0{,}99$ $y = \sqrt{\frac{3x+6}{5x-4}}$. (4 балла)

Итого 20 баллов

Викторинные вопросы № 5

1. Верно ли, что если функция одной переменной имеет производную, то она дифференцируема ?
2. Верно ли, что непрерывная в точке функция, дифференцируема в этой точке ?
3. Верно ли, что дифференцируемая в точке функция, непрерывна в этой точке ?
4. Верно ли, что для независимой переменной выполняется равенство

$$dx = \Delta x?$$

5. Верно ли, что дифференциал функции в точке равен приращению функции в этой точке ?
6. Верно ли, что для функции $y = y(x)$.

$$\Delta y = dy + \alpha \cdot \Delta x, \text{ где } \alpha \to 0 \text{ при } \Delta x \to 0?$$

7. Верно ли, что функция $y = |x|$ дифференцируема и имеет в точке $x = 0$ производную ?
8. Верно ли, что функция $y = \ln|x|$ дифференцируема при $x \neq 0$?

9. Верно ли, что для параметрически заданной функции $x=t^2, y=t^3+1$

$$y''_{xx}=\left(\frac{3t^2}{2t}\right)'=\left(\frac{3}{2}t\right)'=3/2 ?$$

10. Верно ли, что для функции $y=f(u),\ u=\varphi(x)$, выполняется равенство $dy=f'_u\,du$?
11. Верно ли, что для функции $y=f(u);\ u=\varphi(x)$ выполняется равенство $d^2y=f''_{uu}(du)^2$?
12. Верно ли, что функция $y=\frac{x}{\sqrt{25-x^2}}$ на отрезке $[-2;2]$ удовлетворяет условиям теоремы Лагранжа ?

Модуль № 6 "Исследование функций. Комплексные числа"

Викторинные вопросы № 6

1. Верно ли, что если наименьший порядок производной, отличной от нуля в критической точке, является нечётным, то эта точка будет точкой перегиба ?
2. Верно ли, что если в точке x_0 max, то $y'(x_0)=0$?
3. Верно ли, что если $y''(x_0)>0$, то в точке $x_0 - min$?
4. Верно ли, что точка x_0 будет точкой перегиба, если $y''(x_0)=0$?
5. Верно ли, что если $\lim\limits_{x\to x_0} y(x)=\infty$, то прямая $x=x_0$ - асимптота ?
6. Верно ли, что если $\lim\limits_{x\to\infty} y(x)=\infty$, то функция будет иметь асимптоту ?
7. Можно ли к функции $y(x)=\frac{8-x^2}{x^2}$ на отрезке $[-1;1]$ применить теорему Ролля ?
8. Верно ли, что произведение комплексных чисел $(1-3i)(1+3i)=10$?
9. Верно ли, что выражение a^2+b^2 не раскладывается на множители ?
10. Верно ли, что выражение $-1=e^{i\pi}$?
11. Верно ли, что если многочлен с действительными коэффициентами имеет комплексный корень $a+ib$, то он имеет и сопряжённый корень $a-ib$?

12. Верно ли, что многочлен нечётной степени с действительными коэффициентами имеет хотя бы один действительный корень ?

Выходной тест № 6

1. Исследовать функцию и построить график $y=\dfrac{x^2}{\sqrt[3]{x^3-8}}$. (10 баллов)
2. Комплексное число $z=\dfrac{1}{\sqrt{3}+i}$ записать в алгебраической, тригонометрической и показательной формах и построить его. Вычислить $\sqrt[3]{z}$. (5 баллов)

Итого 15 баллов

Входной тест № 6

Построить графики следующих функций

1. $y = x^2 + 5x + 6$ (2 балла)
2. $y = 3\sin(4x + \pi)$ (2 балла)
3. $y = \ln(x - 1)$ (1 балл)
4. $y = e^x + 2$ (1 балл)
5. $y = 2x - 5$ (1 балл)
6. $\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{3} = 1$ (3 балла)

Итого 10 баллов

Модуль № 8 "Неопределенный интеграл"

Входной тест № 8

1. Разложить на множители:
   а) $5x^3 - 11x + 2$ (1 балл)
   б) $3x^4 - 5x^2 - 2$. (2 балла)
2. Выделить полный квадрат $7 + 3x - 2x^2$ (2 балла)
3. Выделить целую часть $\dfrac{x^3}{x+2}$. (2 балла)
4. Вычислить:
   а) $d(\ln^2 3x)$; (2 балла)
   б) $d(\arcsin\sqrt{3x-1})$. (2 балла)

5. Заполнить:

а) $d(\ldots) = 2\cos 2x$; (1 балл)

б) $d(\ldots) = \dfrac{2dx}{1+4x^2}$. (1 балл)

Итого 13 баллов

Выходной тест № 8

Вычислить:

1. $\int \dfrac{\sin e^{-x}}{e^{x}}\,dx$ (2 балла)

2. $\int \dfrac{x\,dx}{\sqrt{5+x^4}}$ (2 балла)

3. $\int \dfrac{x\,dx}{\sqrt{5+x^2}}$ (2 балла)

4. $\int \dfrac{\ln^2 x}{x}\,dx$ (2 балла)

5. $\int \dfrac{x\,dx}{x^2+6x-3}$ (4 балла)

6. $\int x^2 \ln x\,dx$ (3 балла)

7. $\int \dfrac{\sqrt{x^2-4}}{x}\,dx$ (5 баллов)

8. $\int \dfrac{dx}{3\cos x + 4\sin x}$ (4 балла)

9. $\int \dfrac{x^3-2x^2-5}{x^4+5x^2}\,dx$ (4 балла)

10. $\int \dfrac{dx}{8-3\sqrt{2x-5}}$. (4 балла)

Итого 28 баллов

Викторинные вопросы № 8

1. Верно ли, что $d\int f(x)\,dx = f(x)\,dx$?

2. Верно ли, что $\int d f(x) = f(x)$?

3. Верно ли, что $\int (f(x) + \varphi(x) dx = \int \varphi(x) dx + \int f(x) dx$?

4. Верно ли, что $\int f(x) \cdot \varphi(x)\, dx = \int f(x)\, dx \cdot \int \varphi(x)\, dx$?

5. Верно ли, что дробь $\dfrac{x^3+5}{y(x^2-x+1)}$ правильная?

6. Верно ли, что для всякой непрерывной на некотором отрезке функции существует неопределённый интеграл ?

7. Можно ли вычислить $\int \dfrac{e^x}{x} dx$ по частям ?

8. Верно ли, что $\int f(x)\, dx = \int f(x) \dfrac{dU(x)}{U'(x}$?

9. Верно ли, что $\dfrac{x^2+1}{x^2(x^2+4)} = \dfrac{A}{x^2} + \dfrac{Bx+C}{x^2+4} + \dfrac{E}{x}$?

10. Верно ли, что $\dfrac{x^4-5}{(x^2+1)^2} = \dfrac{Ax+B}{(x^2+1)^2} + \dfrac{Cx+E}{x^2+1}$?

11. Верно ли, что $\int \dfrac{x^2\, dx}{\sqrt{4+x^2}}$ можно решить подстановкой $x = tg\, t$?

12. Верно ли, что $\int \dfrac{dx}{\sin^2 x + \cos x}$ можно вычислить подстановкой $tg \frac{x}{2} = t$?

Модуль N 9 "Дифференциальные уравнения"

Входной тест N 9

1. Найти все корни уравнения $x^4 - 4 = 0$. (1 балл)
2. Вычислить:
   а) $\int \dfrac{dx}{x^2-6x+9}$; (1 балл)
   б) $\int xe^{3x} dx$; (1 балл)
   в) $\int xe^{x^2} dx$. (1 балл)

3. Построить семейство интегральных кривых для уравнения
$$y' = 3(x - 1)^2.$$ (2 балла)

4. Разделить переменные
$$\frac{y + xy}{2^{xy}} = (xy)^2.$$ (2 балла)

5. Найти собственные числа и собственные векторы матрицы
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}.$$ (3 балла)

Итого 11 баллов

Выходной тест N 9

1. Решить уравнения:

а) $y' = \dfrac{5x + y}{3x - 1}$; (5 баллов)

б) $2yy'' + 2y^2 - (y')^2 = 0$ если даны начальные условия $y'(0) = y(0) = 1$; (5 баллов)

в) $y'' + 2y' + y = 3e^{-x}$; (5 баллов)

г) $y'' + 4y = 4/\cos 2x$. (7 баллов)

2. Найти вид частного решения неоднородного уравнения (без отыскания коэффициентов) $y'' + 3y = xe^{-3x} + x\sin\sqrt{3}\,x + x^2$. (4 балла)

Итого 27 баллов

Викторинные вопросы N 9

1. Верно ли утверждение, что общее решение дифференциального уравнения n-го порядка содержит n произвольных констант ?
2. Верно ли, что для уравнения $y' = f(x, y)$ интегральные кривые не пересекаются ?
3. Будет ли уравнение $(y^2 + 1)y' = e^{5x+y}$ с разделяющими переменными ?
4. Является ли условие $\dfrac{\partial Q}{\partial y} = \dfrac{\partial P}{\partial x}$ достаточным для того, чтобы дифференциальное уравнение $P(x,y)dy + Q(x,y)dx = 0$ было уравнением в полных дифференциалах ?

5. Верно ли, что уравнение $\frac{xy'}{5x^2+y\sin x} = 1$ линейно ?

6. Верно ли, что уравнение $xy''' + x^2y'' = 1$ допускает понижение порядка ?

7. Верно ли, что функции $\sin x$ и $\sin 2x$ линейно независимы на отрезке $[0,\pi]$?

8. Верно ли, что два частных решения линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка определяют общее решение этого уравнения ?

9. Можно ли решить уравнение $y'' - 5y' + xy = \sin x$ методом вариации произвольных постоянных?

10. Можно ли решить уравнение $y'' - 5y' + xy = \sin x$ методом неопределённых коэффициентов ?

11. Верно ли, что частное решение уравнения $y''+4y=\cos 2x$ следует искать в виде $y^* A\cos 2x$?

12. Верно ли, что частное решение уравнения $y''-2y'+y=xe^x$ имеет вид $y^*=(Ax+B)xe^x$?

Модуль М.10 "Интегралы по мере. Кратные интегралы"

Входной тест М 10

1. Построить фигуру, ограниченную поверхностями

$$z=4-x^2-y^2, \quad z=\sqrt{x^2+y^2}. \qquad \text{(2 балла)}$$

2. Перейти к полярной системе координат в уравнении

$$x^2+y^2=9x \qquad \text{(2 балла)}$$

и построить кривую.

3. Вычислить интегралы:

а) $\int 2xe^{x^2}dx$; (1 балл)

б) $\int x^2e^{2x}dx$. (2 балла)

4. Даны функции $x=(u^2-1)v$, $y=uv-\ln\frac{u}{vz}$, $z=3t$.
Вычислить определитель

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial t} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial t} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial t} \end{vmatrix}$$ (5 баллов)

Итого 12 баллов

Выходной тест № 10

Даны условия, задающие фигуру V:

$$x=\sqrt{y^2+z^2-4}, \quad y^2+z^2=5x^2, \quad y\geq 0, \quad z\geq 0; \quad x=0.$$

и плотность распределения масс $\gamma = 1/\sqrt{2+x^2}$.

Требуется построить фигуру и для неё. (1 балл)

1. Расставить пределы интегрирования в полярной и декартовой системах координат по проекции фигуры на плоскость $y = 0$ в интеграле $\iint\limits_D f(x,z)\,dx\,dz$. (4 балла)
2. Найти объём фигуры. (4 балла)
3. Найти массу линии пересечения поверхностей, ограничивающих фигуру, с плоскостью $y = 0$. (5 баллов)
4. Найти массу поверхности $y^2+z^2=5x^2$. (4 балла)

Итого 18 баллов

Викторинные вопросы № 10 "Интегралы по мере"

1. Верно ли, что интеграл $\int_a^x f(t)\,dt$ с переменным верхним пределом есть первообразная функции $f(x)$?
2. Верно ли, что если имеет место равенство
$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx,$$
то $c\in[a,b]$?
3. Верно ли, что у определенного интеграла нижний предел интегрирования меньше верхнего ?
4. Является ли интеграл $\int_0^3 \frac{dx}{x-1}$ определенным ?

5. Верно ли, что интеграл $\int_a^{\infty} f(x)dx$ сходится, если функция монотонно убывает и непрерывна на $[a, \infty)$?
6. Верно ли, что интегральная сумма, составленная для функции на множестве Ω, есть величина переменная ?
7. Верно ли, что интеграл $\int\limits_{(\Omega)} f(P)d\Omega$, где Ω – мера, есть конечное число ?
8. Верно ли, что в теореме об оценке интеграла по фигуре

$$m\Omega \leq \int\limits_{(\Omega)} f(P)d\Omega \leq M\Omega$$

m и M – соответственно, наименьшее и наибольшее значения функции $f(P)$ на Ω ?
9. Можно ли найти среднее значение функции на множестве Ω по формуле

$$f_{cp} = \frac{\int\limits_{(\Omega)} f(P)d\Omega}{\Omega} ?$$

10. Верно ли, что интеграл $\int\limits_{(\Omega)} f(P)d\Omega$ зависит от способа составления интегральной суммы на Ω ?
11. Верно ли, что интеграл $\int\limits_{\Omega} f(P)d\Omega$ численно равен массе фигуры Ω?
12. Верно ли, что у криволинейного интеграла по длине дуги при его вычислении всегда нижний предел интегрирования меньше верхнего?

Модуль N II "Теория поля"

Входной тест N II

1. Дана функция $z(x;y)=x^3-3x^2y+y^3$ и точка $A(-1;1)$. Требуется найти:
   а) $\overline{grad}\, z$ в точке A; (1 балл)
   б) производную $\frac{\partial z}{\partial \ell}$ по направлению $\bar{\ell} = \overline{AB}$, где $B(3;0)$; (2 балла)
в) а) угол между касательной плоскостью к поверхности $z=z(x;y)$ в точке A и плоскостью xOy. (5 баллов)

2. Даны: сила $\overline{F} = 3\overline{i} - \overline{k}$ и точки A(-2;1;0), B(0;0;3).

Требуется найти:

а) работу силы $\overline{F}$ при перемещении точки её приложения из положения A в положение B; (2 балла)

б) момент силы $\overline{F}$, приложенной в точке A относительно точки B. (3 балла)

Итого 13 баллов

Выходной тест N II

Даны векторное поле $\overline{F}=2x\overline{i}+y\overline{j}-z\overline{k}$

и фигура, ограниченная поверхностями $y^2+z^2=Rx;\ x=R$.

Требуется найти:

а) $div\,\overline{F}$; $rot\,\overline{F}$, определить тип поля; (3 балла)

б) работу силы $\overline{F}$ вдоль перемещения по кривой пересечения поверхностей $y^2+z^2=Rx,\ y=0;$ (4 балла)

в) поток вектора $\overline{F}$ в отрицательном направлении оси OX через поверхность части параболоида $y\le 0,\ z\le 0;$ (9 баллов)

г) циркуляцию вектора $\overline{F}$ вдоль границы основания параболоида (5 баллов)

Итого 21 балл

Викторинные вопросы N II

1. Векторное поле в каждой точке определяется вектором $\overline{a}=\overline{a}(x,y,z)$. Верно ли, что поле стационарно ?
2. Верно ли, что если P(x,y) и Q(x,y) непрерывны в замкнутой области с границей Г, то имеет место формула Грина

$$\iint\limits_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy=\int\limits_\Gamma P\,dx+Q\,dy\ ?$$

3. Верно ли, что криволинейный интеграл по замкнутому контуру равен нулю ?
4. Верно ли, что криволинейный интеграл от полного дифференциала не зависит от формы кривой, по которой ведётся интегрирование ?

5. Верно ли, что дивергенция определена на скалярном поле ?
6. Можно ли по значению дивергенции в точке судить о наличии источников и стоков векторного поля в окрестности этой точки ?
7. Верно ли, что формула Остроградского устанавливает связь между дивергенцией векторного поля в некотором объёме и потоком вектора через поверхность, ограничивающую этот объём ?
8. Верно ли, что поток вектора через поверхность не зависит от ориентации поверхности относительно линий тока ?
9. Верно ли, что если поток вектора через замкнутую поверхность равен нулю, то внутри поверхности нет источников и стоков ?
10. Верно ли, что формула Стокса устанавливает связь между потоком вектора через поверхность и циркуляцией этого вектора вдоль контура поверхности ?
11. Верно ли, что векторное поле, образованное вектором $rot\,\bar{a}$, соленоидально ?
12. Верно ли, что в потенциальном поле циркуляция вектора всегда равна нулю ?

Модуль N 12 "Ряды"

Входной тест N 12

1. Найти пределы:

а) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3n-4}{6+7n}$; (1 балл)

б) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{arctg\,5n}{n}$; (1 балл)

в) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{n+4}{n-1}\right)$; (2 балла)

г) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{n^2+4}{n-1}\right)^{2n}$; (1 балл)

д) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n}$, если $u_n = \dfrac{n!}{n\cdot 2^n}$. (2 балла)

2. Вычислить:

а) $\int_{-1}^{1} x\sin(x\pi)\,dx$; (2 балла)

б) $\int_{1}^{\infty} \frac{dx}{1+4x^2}$. (1 балл)

Итого 12 баллов

Выходной тест № 12

1. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{arctg}^n \frac{1}{2^n}$. (2 балла)
2. Найти интервал сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^2}{n\cdot 3^n}$. (3 балла)
3. Разложить в ряд Тейлора функцию $y=\sin 4x$ по степеням $(x-\frac{\pi}{3})$. (4 балла)
4. Найти первые 4 отличных от нуля члена разложения в степенной ряд решения дифференциального уравнения

$$y''=x^2y+xy',\quad y(1)=2,\ y'(1)=1.$$ (3 балла)

5. Разложить в ряд Фурье по косинусам функцию $f(x)=2-x$ на отрезке $[0,2]$. (4 балла)

Итого 16 баллов

Викторинные вопросы № 12

1. Верно ли, что из абсолютной сходимости степенного ряда на одном конце интервала сходимости следует абсолютная сходимость на другом ?
2. Верно ли, что знакопеременный ряд, абсолютно расходящийся по признаку Даламбера, может сходиться условно ?
3. Верно ли, что если для знакопеременного ряда

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1,$$

то ряд расходится ?

4. Верно ли, что система тригонометрических функций $\sin x; \sin 2x, \sin 3x, \dots$ ортогональна на $[0, \pi]$?

5. Верно ли, что система тригонометрических функций $1, \cos x; \sin x; \cos 2x; \sin 2x, \dots$ ортогональна на $[0, \pi]$?

6. Верно ли, что если для знакоположительного ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$, то ряд сходится ?

7. Верно ли, что при выполнении неравенства $0 < u_n \leq |v_n|$ и расходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ следует расходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} |v_n|$?

8. Верно ли, что при выполнении условия $\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = 0$ и сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ всегда следует сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$?

9. Можно ли почленно дифференцировать ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n^4 x}{n^2}$?

10. Можно ли почленно интегрировать ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n^4 x}{n^2}$?

11. Верно ли, что функция, представленная рядом Фурье

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi x}{\ell},$$

является нечетной на отрезке $[-\ell, \ell]$?

12. Можно ли разложить в ряд Фурье непериодическую функцию, заданную на отрезке $[a, b]$?

ЛИТЕРАТУРА

1. Чернова Н.К. Матрицы, определители и системы линейных уравнений: Индивидуальное домашнее задание.- Тольятти: ТолПИ, 1985. 34 с.
2. Африна Е.И., Чернова Н.К. Векторная алгебра: Индивидуальные домашние задания.- Тольятти: ТолПИ, 1986. 33 с. .
3. Полякова Е.Н., Шнейдер Е.Г. Аналитическая геометрия: Индивидуальные домашние задания.- Тольятти: ТолПИ, 1986. 42с.
4. Петрова Т.И. Введение в анализ: Индивидуальные домашние задания.- Тольятти: ТолПИ, 1985. 4334с.
5. Шнейдер Е.Г. Производная: Индивидуальные домашние задания.- Тольятти: ТолПИ, 1990. 34с.
6. Чернова Н.К. Приложение производной: Индивидуальные домашние задания.- Тольятти: ТолПИ, 1985. 35с.
7. Петрова Т.И. Функции многих переменных: Индивидуальные домашние задания.- Тольятти: ТолПИ, 1987. 25с.
8. Петрова Т.И. Неопределенный интеграл: Индивидуальные домашние задания.- Тольятти: ТолПИ, 1989. 36 с.
9. Петрова Т.И. Определенный интеграл: Индивидуальные домашние задания.- Тольятти: ТолПИ, 1989. 35с.
10. Петрова Т.И. Дифференциальные уравнения: Индивидуальные домашние задания.- Тольятти: ТолПИ, 1985. 45с.
11. Москалёва Н.И. Кратные интегралы: Индивидуальные домашние задания.- Тольятти: ТолПИ, 1991. 35с.
12. Перевезенцева Н.В., Климова Т.В. Криволинейные и поверхностные интегралы: Индивидуальные домашние задания.- Тольятти: ТолПИ, 1990. 35с.
13. Клюкова О.Н. Ряды: Индивидуальные домашние задания.- Тольятти: ТолПИ, 1991. 32с.
14. Чернова Н.К. Основы проектирования педагогических технологий в техническом вузе: Учебное пособие.- Тольятти: ТолПИ, 1992. 122с
15. Чернова Н.К. Курсовые работы по высшей математике для технолого-машиностроительных специальностей: Учебное пособие.- Тольятти: ТолПИ, 1993. 56с.
16. Чернова Н.К., Шнейдер Е.Г. Высшая математика: Метод.указания. Тольятти: ТолПИ, 1991. 45с.

СОДЕРЖАНИЕ

Св.план 1993г. поз.391

Юлия Константиновна Чернова

Елена Георгиевна Шнейдер

СБОРНИК ТЕСТОВ ПО ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКЕ ДЛЯ РЕЙТИНГОВОЙ СИСТЕМЫ ОЦЕНКИ ЗНАНИЙ СТУДЕНТОВ

Учебное пособие

Редактор Н.Г.Батырева

Корректор Т.Г.Садовская

ЛР № 020673 09.12.92. Подписано в печать 2.11.93г.

Формат 60х84/16. Печать оперативная. Усл.п.л. 4,7.

Уч-изд.л. 4,4. Тираж 500 экз. Заказ № 1967.

Тольяттинский политехнический институт,Тольятти,Белорусская,14