МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Тольяттинский государственный университет»

Институт математики, физики и информационных технологий
(наименование института полностью)
Кафедра «Высшая математика и математическое образование»
(наименование кафедры)

44.04.01 «Педагогическое образование»
(код и наименование направления подготовки)
«Математическое образование»
(направленность (профиль))

МАГИСТЕРСКАЯ ДИССЕРТАЦИЯ

на тему **«МЕТОДИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ОБУЧЕНИЯ СТАРШЕКЛАССНИКОВ РЕШЕНИЮ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ЗАДАЧ НА ДОКАЗАТЕЛЬСТВО»**

Студент А.Н. Давыдов ____________
(И.О. Фамилия) (личная подпись)
Научный
руководитель С.Н. Дорофеев ____________
(И.О. Фамилия) (личная подпись)

Руководитель программы д.п.н., профессор, Р.А. Утеева ____________
(ученая степень, звание, И.О. Фамилия) (личная подпись)
«____»__________2019 г.

Допустить к защите

Заведующий кафедрой д.п.н., профессор, Р.А. Утеева ____________
(ученая степень, звание, И.О. Фамилия) (личная подпись)
«____»__________2019 г.

Тольятти 2019

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Актуальность исследования. Важнейшей задачей методики обучения геометрии является формирование умений решения разнообразных типов геометрических задач. Геометрические задачи являются необходимым средством усвоения и закрепления учебного материала. Существенное значение для интеллектуального развития учащихся представляют геометрические задачи на доказательство, которые позволяют формировать как творческие способности, так и раскрывать индивидуальность обучаемых. Геометрические задачи на доказательство развивают навыки, которые необходимы в практической деятельности. Процесс решения геометрических задач на доказательство определяет уровень математических знаний, включая умения и навыки учащихся. Систематическое включение в план построения урока геометрических задач на доказательство, с одной стороны, рассматривается как развитие интеллектуальных способностей учащихся, с другой стороны, как активизация мыслительных процессов [15, с. 27 – 29].

Процесс доказательства представляет последовательное рассуждение, которое влияет на логические особенности учащихся, то есть умение выполнять исследование на основе анализа, синтеза, сравнения, аналогии, обобщения.

Геометрические задачи на доказательство представляют сложный этап обучения геометрии, поэтому, умение решать геометрические задачи на доказательство рассматривается как высокий уровень математического развития. Геометрия, как учебная дисциплина, выполняет методическую функцию, направленную на формирование умений доказывать геометрические задачи. Обучение геометрии невозможно представить без доказательства теорем, свойств или признаков. Геометрические задачи на доказательство являются основным методическим компонентом в обучении геометрии, поэтому, главным направлением методики обучения решения геометрических задач на доказательство – найти совокупность методов или подходов к решению геометрических задач на доказательство. Практика показала, что не существует универсального метода доказательства геометрических задач, кроме того, отсутствует единый алгоритмический метод, позволяющий поэтапно решить задачу на доказательство.

Таким образом, **актуальность** темы исследования обусловлена:

1) необходимостью формировать умения решать задачи на доказательство;
2) необходимостью формировать подход к доказательству задачи;
3) необходимостью формировать поиск доказательства задачи;
4) необходимостью найти методику обучения решения геометрических задач на доказательство.

Проблема диссертационного исследования заключается в отсутствии единого метода обучения решению геометрических задач на доказательство, таким образом, появляется предпосылка для разработки частной методики обучения, либо технологии обучения.

Объект исследования: обучение школьников решению геометрических задач в курсе геометрии 10 – 11 классов.

Предмет исследования: методика обучения старшеклассников решению геометрических задач на доказательство в курсе геометрии 10 – 11 классов на основе изучения темы «*Векторы в пространстве*» в 10 классе и темы «*Метод координат в пространстве»* в 11 классе по УМК авторов Л.С. Атанасяна, В.Ф. Бутузова, С.Б. Кадомцева, Л.С. Киселёвой, Э.Г. Позняка.

Цель исследования: разработать методические рекомендации обучения решению геометрических задач на доказательство с применением технологического подхода.

В соответствии с целью исследования поставлены следующие **задачи**:

1) изучить научную, психолого-педагогическую, учебно-методическую литературу по теме исследования;
2) разработать методические рекомендации для обучения решению

геометрических задач на доказательство на основе технологического подхода при изучении темы «*Векторы в пространстве*» в 10 классе и темы «*Метод координат в пространстве*» в 11 классе;

3) описать педагогический эксперимент, реализующий технологию обучения решения геометрических задач на доказательство.

Применялись такие методы исследования как анализ, обобщение, наблюдение, беседа, тестирование, диалог и т. д., которые обнаружили и выявили проблемы в методике обучения:

во-первых, большинство учащихся не умеют решать геометрические задачи на доказательство и часто игнорируют подобный тип геометрических задач;

во-вторых, учащиеся испытывают трудности при построении доказательства;

в-третьих, учащиеся не владеют методами доказательства.

Базовый метод исследования – анализ собственной методики обучения на основе опыта работы в школе (гимназии).

Метод сплошного наблюдения в образовательной среде школы, который фиксировал и обобщал результаты учебной деятельности старшеклассников.

Анализ результатов учебной деятельности старшеклассников на основе устных рассуждений и письменных решений геометрических задач на доказательство, включая пробные задания ЕГЭ.

Диалоги, беседы с учителями, дискуссии по проблемам обучения.

Анализ психолого-педагогической, научной и учебно-методической литературы, обзор научных статей в журналах «*Математика в школе*» и «*Математика для школьников*», «*Квант*», «*Педагогика*».

Направляющий метод исследования – педагогический эксперимент по внедрению технологии обучения и обработка результатов эксперимента.

Констатирующий эксперимент рассматривался, как определяющий метод исследования с целью установления сформированности умений доказывать геометрические задачи.

Теоретико-методическая основа исследования включала:

1) научные направления и теоретические исследования по технологии обучения математике П.Я Гальперина, Н.Ф. Талызиной, М.Б. Воловича, Р.Г. Хазанкина, Т.А. Ивановой, А.А. Окунева, Л.В. Занкова;

2) материалы исследований на основе диссертаций [4, 13, 22, 30, 39,54];

3) публикации в научных журналах: «*Математика в школе*», «*Математика для школьников*», «*Педагогика*», «*Квант*» [2, 6, 7, 19, 23, 26, 31, 32, 40, 44, 46, 47, 49, 51, 53, 58];

4) научно-методические работы по теме исследования [3, 5, 8, 9, 11, 17, 18, 27 – 29, 33 – 38, 41, 45, 48, 55, 56].

Основные этапы исследования:

1 семестр, 2016 – 2017 учебный год: анализ ранее проводимых исследований по теме диссертации, анализ УМК по геометрии 10 – 11 классов, изучение нормативных документов: образовательный стандарт, учебных программа, профессиональный стандарт «*Педагог*», закон «*Об образовании*»; Концепция развития математического образования в Российской Федерации; анализ опыты работы учителей.

2 семестр, 2016 – 2017 учебный год: определение теоретических и методический направлений по теме диссертации, выработка собственной стратегии и подходов к проблеме исследования, формулировка методики обучения.

3 семестр, 2017 – 2018 учебный год: разработка методики обучения на основе технологического подхода, формулировка методики обучения как «*технология наводящих вопросов*», определение целей методики обучения, задач методики обучения, составление содержания методики обучения, подборка материала для составления элективного курса «*Геометрические задачи на доказательство векторным методом*».

4 семестр, 2017 – 2018 учебный год: доработка в окончательном варианте методики обучения на основе технологического подхода, внедрение технологии обучения в учебный процесс, проведение констатирующего эксперимента.

5 семестр, 2018 – 2019 учебный год: оформление и корректировка материалов диссертации, описание результатов эксперимента, формулировка выводов.

Новизна исследования: разработаны методические рекомендации обучения решению геометрических задач на доказательство в старших классах на основе «*технологии наводящих вопросов*».

Практическая значимость исследования:

1) проведена классификация геометрических задач на доказательство;

2) предложены методические рекомендации для решения геометрических задач на доказательство на основе технологического подхода при изучении темы «*Векторы в пространстве*» в 10 классе и темы «*Метод координат в пространстве*» в 11 классе;

3) предложены критерии, определяющие уровень сформированности умений решать задачи на доказательство;

4) разработан элективный курс «*Геометрические задачи на доказательство векторным методом*».

На защиту выносятся методические рекомендации для методики обучения решению геометрических задач на доказательство на основе «*технологии наводящих вопросов*».

Апробация результатов исследования: публикация результатов в научных журналах «Вестник магистратуры № 9» статья «*Методика обучения решению геометрических задач на доказательство по технологии наводящих вопросов*», 2018 *г.*; научный журнал «Мир и наука № 9» статья «*Почему важно решать задачи на доказательство*?», 2018 *г.*

Экспериментальная проверка методических рекомендаций осуществлялась в период педагогической практики на базе кафедры «Высшей математики и математического образования» ТГУ; в период работы учителем математики на базе Чапаевского губернского колледжа имени О. Колычева в структурном подразделении – «Гимназия».

Магистерская диссертация состоит из введения, двух глав, заключения, список используемой литературы и приложения.

Первая глава состоит из четырёх параграфов, в ней рассматриваются теоретические основы методики обучения решению геометрических задач. Раскрываются понятия и типологии геометрических задач на доказательство, основные методы решения геометрических задач на доказательство, анализируется опыт обучения решению задач на доказательство, рассматривается технологический подход обучения решению задач на доказательство.

Вторая глава состоит из пяти параграфов, в ней рассматриваются содержательно-методические особенности обучения решению геометрических задач на доказательство.

Представлены и сформулированы цели и задачи обучения решению задач на доказательство, анализируются подходы к обучению решения задач на доказательство. На основе изученных материалов проведён анализ подходов к обучению решению задач на доказательство в различных учебниках геометрии 10 – 11 классов. Предложены методические рекомендации по формированию умений решать геометрические задачи на доказательство на основе технологии наводящих вопросов, разработан элективный курс «*Геометрические задачи на доказательство векторным способом*».

В **заключении** сделаны выводы по теме исследования.

Список использованной литературы включает 63 источника.

ГЛАВА I. ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ МЕТОДИКИ ОБУЧЕНИЯ РЕШЕНИЮ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ЗАДАЧ

§1. Понятие и типология школьных геометрических задач на доказательство

Термин «***математическая задача***» является обобщённой категорией, в которую входит понятие «***геометрическая задача***».

Рассмотрим категорию «***математическая задача***».

Методика обучения рассматривает математические задачи как необходимый компонент обучения, который формирует умения учащихся и направляет усилия учащихся на достижение результатов учебной деятельности. Если понятие «***математическая задача***» рассматривать с позиции обучения решению геометрических задач, то математическая задача формулирует условие (факт), которое является основанием для построения доказательства или решения.

Решение математической задачи осуществляется с помощью познавательно-мыслительных операций, таких, как анализ, синтез, аналогия, сравнение, вывод, а также распознавание, получение следствий, актуализация и выбор знаний.

В качестве ведущего определения «***математическая задача***» рассмотрим следующее утверждение, итак, ***математическая задача*** – это формулировка начального условия с помощью математических объектов и отношений между объектами, которое требует:

а) построить математический объект или получить (описать) процесс получения решения;

б) установить форму взаимоотношения математических объектов;

в) показать способ получения математических отношений или взаимосвязей посредством определённых правил или законов.

Рассмотрим понятие «***геометрическая задача на доказательство***».

Геометрические задачи подразделяют на несколько типов: задачи на вычисление, задачи на построение, задачи на *доказательство*.

Геометрическая задача на доказательство предполагает решение, результатом которого является ***ответ*** в форме умозаключения, то есть логический вывод на основе истинных суждений. Процесс решения задачи представляет доказательство, таким образом, доказательство – это форма решения [11; 18; 29; 34 – 36; 45; 48].

Введём определение: ***геометрическая задача на доказательство***.

Определение 1. ***Геометрическая задача на доказательство*** – это математическая задача, формулирующая вопрос как требование, которое необходимо подтвердить истинными суждениями.

Определение 2. ***Геометрическая задача на доказательство*** – это математическая задача, формулирующая требование, которое необходимо доказать на основе истинных суждений.

В теории обучения математики, особенно геометрии, не сформирована классификация геометрических задач на доказательство. Рассмотрим классификацию геометрических задач на доказательство на основе различных подходов и определим существенный признак.

Первый подход. Задача на доказательство формирует интеллектуальную деятельность учащихся, побуждая к размышлению, через активизацию основных мыслительных операций: анализ, синтез, сравнение, сопоставление, обобщение и вывод. Таким образом, задача на доказательство рассматривается как фактор, влияющий на развитие интеллектуальных способностей [9 – 11; 23; 29; 34 – 36; 41; 42; 45; 52; 55; 56; 59 – 63]. Существенный признак задачи на доказательство: формирование интеллектуальных способностей, тогда геометрические задачи на доказательство классифицируются по характеру сложности – ***простые*** и ***комбинированные***.

Простая задача на доказательство – это геометрическая задача, которая строит доказательство на основе одной истины. Процесс решения активизирует только одну из основных мыслительных операций: анализ, синтез, сравнение, сопоставление, обобщение.

Структура решения имеет следующие схемы: анализ $\Rightarrow$ вывод; синтез $\Rightarrow$ вывод; сравнение $\Rightarrow$ вывод; сопоставление $\Rightarrow$ вывод; обобщение $\Rightarrow$ вывод. Простая задача на доказательство предполагает прямое решение и не предполагает косвенное.

Комбинированная задача на доказательство – это геометрическая задача, которая строит доказательство на основе нескольких истин. Процесс решения активизирует две и более мыслительные операции.

Структура решения имеет различные схемы, например, анализ + синтез $\Rightarrow$ вывод; синтез + сравнение$\Rightarrow$ вывод; анализ + синтез + сопоставление $\Rightarrow$ вывод; сравнение + сопоставление $\Rightarrow$ вывод; анализ + синтез + обобщение $\Rightarrow$ вывод и т. п.

Второй подход. Задача на доказательство формирует творческую деятельность учащихся. Таким образом, задача на доказательство рассматривается как фактор, влияющий на развитие творческих способностей [1; 5; 8 – 11; 17; 18; 26; 29; 34 – 36; 41; 42; 45; 49; 52; 55; 56; 59 – 63]. Существенный признак задачи на доказательство: формирование творческих способностей, тогда геометрические задачи на доказательство классифицируются – ***стандартные*** (***типовые***) и ***нестандартные*** (***нетиповые***).

Стандартная задача на доказательство – это геометрическая задача, которая предназначена для отработки и закрепления навыков доказательства.

Стандартные задачи являются типовыми, которые подчиняются алгоритму решения. Алгоритм позволяет привести типовую геометрическую задачу к аналогичной задаче.

Нестандартная задача на доказательство – это геометрическая задача, которая предполагает оригинальное, индивидуальное построение доказательства.

Третий подход. Задача на доказательство формирует исследовательскую деятельность учащихся, побуждая к открытиям, к обнаружению и установлению новых свойств или признаков геометрических объектов. Таким образом, задача на доказательство рассматривается как фактор, влияющий на развитие исследовательских способностей [1; 5; 8 – 11; 16 – 18; 26; 29; 34 – 36; 41; 42; 45; 49; 52; 55; 56; 59 – 63]. Существенный признак задачи на доказательство: формирование исследовательский способностей, тогда геометрическая задача на доказательство с элементом исследования характеризуется как ***эвристическая***.

Эвристическая задача на доказательство – это геометрическая задача, которая предполагает доказательство на основе нахождения и обнаружения нового знания.

Четвёртый подход. Задача на доказательство обусловлена методом установления истины, то есть, *каким методом доказывать задачу*? Таким образом, задача на доказательство классифицируется по методу доказательства. Существенный признак задачи на доказательство по выбору метода доказательства является на начальном этапе трудноопределимый, только в процессе доказательства определяется метод доказательства [1; 5; 8 – 11; 16 – 18; 26; 29; 34 – 36; 41; 42; 45; 49; 52; 55; 56; 59; 61; 63].

Таким образом, установили четыре подхода классификации геометрических задач на доказательство.

Геометрические задачи на доказательство являются средством обучения, которые способствуют достижению ***целей обучения***: воспитательных, образовательных и развивающих.

Все геометрические задачи имеют ***содержание*** – основную суть изложения: тема задачи; исходные данные задачи; геометрический объект рассмотрения [1; 5; 8 – 11; 16 – 18; 26; 29; 34 – 36; 41; 42; 45; 49; 52; 55; 56; 60; 62].

Все геометрические задачи формулируют требование в форме ***доказательства*** [1; 5; 8 – 11; 16 – 18; 26; 29; 34 – 36; 41; 42; 45; 49; 52; 55; 56].

Все геометрические задачи реализуют ***функцию обучения***: дидактическая задача на доказательство; познавательная задача на доказательство; развивающая задача на доказательство [1; 5; 8 – 11; 16 – 18; 26; 29; 34 – 36; 41; 42; 45; 49; 52; 55; 56].

Геометрическая задача на доказательство с дидактической функцией предназначена для закрепления, контроля и отработки изучаемых теоретических сведений. Дидактическая задача рассматривается, как непосредственное применение учебного материала для формирования умений решать задачи на доказательство.

Геометрическая задача на доказательство с познавательной функцией предназначена для расширения знаний и приложение знаний в практическое применение.

Геометрическая задача на доказательство с развивающей функцией предназначена, с одной стороны, для формирования познавательных психических процессов и свойств личности учащихся как внимание, память, мышление, активность и самостоятельность; с другой стороны, для формирования логических приёмов мыслительной деятельности как анализ, синтез, сравнение, сопоставление, обобщение, абстрагирование и т. п.

Таким образом, обучение решению геометрических задач на доказательство на начальном этапе зависит от типологической классификации задачи на доказательство. Учащийся, прежде чем начать доказывать задачу, должен понять и определить тип задачи на доказательство. В зависимости от типологической классификации задачи выстраивать стратегию доказательства. Учителю, в качестве методической рекомендации, следует выстраивать технологию обучения с учётом типологической особенности задачи на доказательство.

§2. Основные методы решения геометрических задач на доказательство

Методика обучения решению геометрических задач на доказательство направлена на формирование умений доказывать задачи. В основном формирование умений решать задачи на доказательство осуществляется на примерах. В школьном курсе геометрии рассматриваются различные методы доказательства. Методов доказательства достаточно, но не избыточно [8; 10; 11; 18; 20; 25; 27; 29; 41; 43; 46, с. 41 – 45; 48; 49, с. 28 – 34; 51, с. 41 – 44; 53, с. 73 – 80; 55; 56].

Доказательство задачи представляет индивидуальный способ достижения истины. Учащиеся понимают структуру доказательства и логическую последовательность построения доказательства на основе решённых задач [8; 10; 11; 18; 20; 25; 27; 29; 41; 43; 46, с. 41 – 45; 48; 49, с. 28 – 34; 51, с. 41 – 44; 53, с. 73 – 80; 55; 56].

Обучение решению задач на доказательство можно разделить на три группы методов:

первая группа методов основана на двух подходах:

индуктивный подход к доказательству, то есть от частного к общему;

дедуктивный подход к доказательству, то есть от общего к частному;

вторая группа методов основана на двух подходах: ***анализ*** и ***синтез***;

третья группа рассматривает метод доказательства по ***аналогии***.

Рассмотрим **первую** группу методов доказательства [8; 10; 11; 18; 20; 25; 27; 29; 41; 43; 46, с. 41 – 45; 48; 49, с. 28 – 34; 51, с. 41 – 44; 53, с. 73 – 80; 55; 56].

Индуктивный подход к доказательству предполагает существование закономерности, которая устанавливается на основе наблюдения. Индуктивный подход к доказательству геометрических задач формирует творческие и эвристические способности учащихся. Учащийся на основе наблюдений делает "*открытие*", обосновывает гипотезу. Таким образом, учащийся, рассматривая отношения между геометрическими объектами, выявляет существенное (общее) свойство, которое является основанием для логического вывода.

Дедуктивный подход предполагает уточнение выводов, обоснование истинности или формулировку общего умозаключения. Дедуктивный вывод основан на использовании аксиом и доказанных теорем.

Дедуктивный метод – это способ исследования, при котором частные положения логически выводятся из общих положений: определений, аксиом, теорем или свойств.

Дедуктивный метод применяется при доказательстве теорем и представляет последовательность истинных суждений или предложений, то есть умозаключений. В геометрии используется простейшая и распространённая форма заключения – это силлогизм (логическое умозаключение), в котором из двух данных суждений (посылок) получается третье суждение (вывод).

Между индукцией и дедукцией установлена взаимосвязь. В основе дедукции или дедуктивного метода существует общее суждение, являющееся выводом, который получен индуктивным методом. Таким образом, индукция и дедукция не противопоставляются. Индукция создаёт общее суждение (положение, основание), которое становится предметом исследования дедукции.

Рассмотрим **вторую** группу методов доказательства [8; 10; 11; 18; 20; 25; 27; 29; 41; 43; 46, с. 41 – 45; 48; 49, с. 28 – 34; 51, с. 41 – 44; 53, с. 73 – 80; 55; 56].

Анализ и синтез применяются при обучении решению задач на доказательство.

Анализ заключается в расчленении понятия или суждения на составляющие. Анализ предполагает процесс доказательства от неизвестного (целого или общего), к известному (части целого или общего). Анализ изучает данные, параметры, чертёж задачи. Сложные задачи расчленяет на простые составные части. Анализ позволяет исследовать доказательство задачи, устанавливать допустимые параметры, рассматривать особые случаи.

Синтез – это способ изучения объекта в целом, в единстве и взаимной связи элементов (частей). Синтез предполагает процесс доказательства от известного, то есть части целого, к неизвестному, то есть целому (общему). Синтез устанавливает связь между геометрическими объектами в единое отношение и обосновывает полученные выводы (следствия).

Анализ и синтез не исключают друг друга, более того, дополняют и сопутствуют процессу доказательства. Методы доказательства, основанные на применении анализа и синтеза, называют аналитико-синтетитеческие.

В основном доказательство представляет дедуктивный процесс, который проводится синтетически: от общего известного положения совершается переход к частному неизвестному положению, то есть к следствию, к заключению, к выводу.

Применяются следующие виды аналитико-синтетичекого подхода к доказательству: аналитический метод; синтетический метод; метод вспомогательных построений и преобразований.

Аналитический метод доказательства – это процесс доказательства на основе преобразований искомых параметров. Аналитический метод применяется как восходящий анализ, несовершенный нисходящий анализ, метод доказательства от противного, алгебраический метод.

Восходящий анализ – это метод доказательства, основанный на анализе достаточных истинных признаков, которые приводят к истинности заключения. Если достаточные признаки найдены, то доказательство завершено. Если достаточные признаки не обнаружены, то необходимо отыскать промежуточные признаки, истинность которых не вызывает сомнений, и на основе истинности промежуточных признаков установить истинность заключения. Если промежуточные достаточные признаки не найдены, то отыскиваются доставочные основания до тех пор, пока не найдутся достаточные истинные признаки (свойства).

Восходящий анализ доказательства представляется в виде обратной последовательной логической цепочки рассуждений. Если данные задачи – истинные математические предложения – суть a, заключение – суть x, промежуточные достаточные основания – суть y_i ($i = 1, n \quad n \in \mathbf{N}$), то рассуждения представляют восходящую цепь последовательных умозаключений: $x \Leftarrow y_1 \Leftarrow y_i \Leftarrow y_{i+1} \Leftarrow \ldots \Leftarrow a$.

Восходящий анализ доказательства имеет ряд положительных моментов: формирует логическое мышление; формирует самостоятельный поиск учащихся отыскивать достаточные признаки или свойства; формирует способности учащихся анализировать каждый этап доказательства.

Восходящий анализ доказательства является наиболее доступным для большинства учащихся, так как имеет простую схему доказательства, которая основывается на двух вопросах: "*что требуется доказать*?" и "*что достаточно доказать*?".

Следует отметить существенный недостаток восходящего анализа: доказательство на основе восходящего анализа имеет ограниченное применение для большинства геометрических задач.

Методика обучения доказательству использует восходящий анализ, особенно, на этапе начального обучения.

Несовершенный нисходящий анализ (анализ Евклида) – это метод доказательства, основанный на анализе необходимых истинных признаков, которые приводят к истинности заключения.

Поиск и выведение необходимых условий продолжают до тех пор, пока не найдутся необходимые признаки, истинность которых не вызывает сомнений. Сущность нисходящего анализа доказательства заключается в следующем: начальное условие – суть x, то есть известное; используя условие x и данные задачи – a, выводятся следствия – y_i ($i = 1, n \quad n \in \mathbf{N}$). Следствия y_i являются необходимыми основаниями. Процесс доказательства представляет преобразование исходной задачи во вспомогательную задачу. Если вспомогательная задача не имеет решение, то получают следствия из исходных данных. Продолжается поиск следствий до тех пор, пока не получат истинное следствие, либо выполняют последовательное преобразование, которое приводит к абсурдности (противоречию), что является признаком неверности исходного положения – x.

Особенность нисходящего анализа заключается в следующем: полученный верный вывод не является доказательством, потому что необходимость не влечёт достаточность, поэтому, получив верный вывод, следует убедиться, что необходимые условия являются достаточными.

Нисходящий анализ доказательства имеет ряд положительных моментов: формирует логическое мышление; формирует самостоятельный поиск учащихся отыскивать достаточные признаки; формирует способности учащихся анализировать каждый этап доказательства.

Нисходящий анализ доказательства является наиболее доступным для большинства учащихся, однако имеет характерную особенность. Если получено не противоречивое следствие, то необходимо сформулировать обратное рассуждение. Если не получается сформулировать обратное рассуждение, то истинность следствия является сомнительной.

Следующий недостаток нисходящего анализа доказательства: необходимо находить вспомогательные задачи и преобразовывать исходные данные. Процесс постоянного поиска многозначен и комбинирован, потому что не каждое преобразование влечёт к истине. Если не получается преобразование, то необходимо находить вспомогательную задачу.

Однако методика обучения доказательству не пренебрегает нисходящим анализом доказательства. Нисходящий анализ применяется при решении геометрических задач на построение и отыскании геометрического метода точек, при составлении плана доказательства теорем и опровержения неверных утверждений.

Метод доказательства от противного называют метод косвенного доказательства или метод приведения к абсурду.

Доказательство "*от противного*" рассматривается как метод доказательства утверждений через опровержения суждения. Доказательство утверждения A осуществляется следующим образом. Сначала предполагается, что утверждение A неверно, и ложно утверждение-допущение – B. Затем доказывают: если неверно A, то верно утверждение B. Полученное противоречие показывает, что неверно исходное предположение B, поэтому, верно утверждение A.

Сущность метода доказательства от противного состоит в том, что исходным моментом доказательства задачи является заключение – x. Заключение x не является истинным, напротив, чтобы доказать истинность заключения x, допускают, что по условию задачи – a, суждение x – ложно, тогда верно утверждение – x'.

Схема рассуждений доказательства методом от противного следующая: x – ложно; x' – верно, тогда $x' \Rightarrow y_1 \Rightarrow y_i \Rightarrow y_{i+1} \Rightarrow \ldots \Rightarrow b$, где b противоречит условию задачи – a, следовательно, x' – ложно, x – верно.

Метод доказательства "*от противного*" имеет ряд положительных моментов: формирует логическое мышление; формирует способность учащихся опровергать на основе ложных суждений; большинство теорем учащиеся доказывают методом "*от противного*"; если невозможно найти прямое доказательство или трудно, то применяется косвенное доказательство методом "*от противного*".

Существенным недостатком метода доказательства "*от противного*" является различная направленность выбора следствий, принимающих за истинное суждение. Если выбор следствия неправильный, то необходимо строить новую цепь умозаключений.

Методика обучения доказательству применяет метод доказательства "*от противного*" для решения геометрических задач и доказательства обратных теорем. Рассуждение приводится к противоречию на основе прямой теоремы. Более того, единственность суждений доказывают методом "*от противного*".

Алгебраический метод доказательства – это форма аналитического метода, устанавливающая связи между искомыми и данными с помощью уравнения или системы уравнений.

Сущность алгебраического метода доказательства рассматривают как процесс равносильных преобразований уравнений вспомогательной задачи. Решение последней вспомогательной задачи является решением основной задачи, результатом которого является доказательство условия. Алгебраический метод можно разделить на несколько последовательных преобразований, представляющих особенности доказательства.

Значение для доказательства имеет ***начальный этап***, который предусматривает первое преобразование условия задачи, то есть переложение задачи на язык алгебры. Составленная формула или уравнение является первой вспомогательной задачей – y. Далее переходят к анализу величин, входящих в уравнение, то есть устанавливают известные величины, и величины, которые необходимо определить или вычислить. На основе данных составляют новое уравнение – z для определения и вычисления промежуточных неизвестных. Таким образом, первая вспомогательная задача – y преобразуется во вторую вспомогательную задачу – y_i, решение которой обеспечивает задача – y. Алгебраические преобразования продолжают до тех пор, пока не придут к задаче y_{i+1}, решение которой выполняется на основе данных вспомогательных задач.

Доказательство алгебраическим методом основано на цепочке равносильных преобразований, поэтому, не требуется доказывать истинность полученного решения для основного условия задачи. Если некоторые равносильные преобразования вызывают сомнение, то необходимо проверить справедливость решения, то есть осуществить обратный и возвратный переход между смежными вспомогательными задачами.

Положительным моментом алгебраического метода доказательства является многообразие путей решения для задачи на доказательство. Схема доказательства легко воспринимается учащимися. Процесс доказательства представляет последовательное равносильное преобразование неизвестных величин в искомые известные величины.

Методика обучения доказательству использует алгебраический метод как основной, однако алгебраический метод не принят в качестве универсального метода. Характерной особенностью метода является составление формул и уравнений. Однако существуют трудности при доказательстве задачи на основе равносильных преобразований. Алгебраические преобразования требуют составления сложных формул, что не всегда могут быть построены учащимися, поэтому, алгебраический метод доказательства изучается на уроках геометрии при решении задач на вычисление и построение. Учащиеся овладевают и приобретают практические навыки равносильных преобразований, в случае, когда формулировка доказательства задачи выражена формулой.

Метод "***переменного движения***" – это метод доказательства, основанный на периодическом использовании аналитического и синтетического методов. Доказательство представляет комбинацию аналитического и синтетического методов. Если задача имеет несколько достаточных условий, то применение метода "*переменного движения*" является единственно возможным.

Метод "*переменного движения*" представляет процесс доказательства как последовательность преобразования исходных данных и искомых задачи. Данные задачи определяют следствия как необходимые условия, из которых получают искомые. Такой метод доказательства является синтетическим. Полученное искомое преобразуется в новое искомое, справедливость которого не вызывает сомнений, – это аналитический метод доказательства.

Процесс преобразований данных и искомых является попеременным. Анализ и синтез доказательства не могут существовать раздельно: анализ порождает синтез; синтез является основанием для анализа полученных искомых величин. Процесс доказательства движется с противоположных сторон, так происходит до тех пор, пока не встретят общее заключение, истинность которого не вызывает сомнений.

Методика обучения доказательству применяет метод "*переменного движения*" при решении трудных геометрических задач на доказательство.

Синтетический метод доказательства – это процесс доказательства задачи на основе преобразования исходных данных в равносильные данные.

Сущность синтетического метода доказательства состоит в том, чтобы отыскать необходимые истинные условия, которые служат переходным звеном к искомым значениям. Синтетический метод доказательства выводит искомое как логическое следствие на основе известных данных или на основе аксиомы, определения, теоремы или следствия. Если равносильными преобразованиями исходные данные не преобразуются в искомые данные, то приходят к промежуточному следствию. Если следствие является искомым, то задача доказана, иначе используют промежуточное следствие. Синтетический метод доказательства можно представить в виде последовательной логической цепочки рассуждений. Истинные математические предложения – это данные задачи – суть a, искомое – это суть x, промежуточные следствия – это суть y_i ($i = 1,n \;\; n \in \mathbf{N}$). Логический переход от данных к искомым представляет цепь связанных последовательных умозаключений: $a \Rightarrow y_1 \Rightarrow \ldots \Rightarrow y_i \Rightarrow y_{i+1} \Rightarrow x$, то есть из справедливости суждения a следует справедливость суждения y. Синтетический метод доказательства основан на принципе необходимости: чтобы правильно выбрать необходимые условия или следствия, следует обращаться к основному требованию доказательства задачи. Синтетический метод приводит к истинному заключению, если все умозаключения строятся на основе истинных исходных данных и полученных искомых следствий. Синтетический метод как способ доказательства теоремы характеризуется уникальной особенностью. Если доказывается истинность логических следствий и полученный вывод противоречит заключению, то теорема отвергается.

Синтетический метод имеет ряд недостатков.

Первый. Учащиеся воспринимают доказательство теоремы или задачи как шаблон доказательства и не понимают логическую цепь рассуждений, приводящую к отысканию искомого.
Второй. Учащимся трудно выбрать следствия из исходных данных. Трудность осложняется, если задача содержит несколько данных, то получаются несколько различных следствий. Поэтому, синтетический метод не является эффективным методом доказательства. Однако методика обучения доказательству не игнорирует и не пренебрегает синтетическим методом. Синтетический метод применяется для формирования интуиции учащихся.

Положительные стороны синтетического метода: метод помогает выстраивать цепочку логических суждений; метод применяется как аналогия при доказательстве трудных геометрических задач; метод используется как способ опровержения ложных заключений или следствий.

Метод вспомогательных построений (преобразований) для доказательства геометрической задачи является целесообразным и необходимым. Вспомогательные (дополнительные) построения определяют поиск доказательства. Геометрические признаки, свойства или отношения объектов указываются в формулировке условия задачи. Например, фразу "*расстояние от точки до плоскости*" следует понимать как перпендикуляр, опущенный из данной точки на плоскость; перпендикуляр – это расстояние между двумя геометрическими объектами: точка и плоскость. Вспомогательные построения помогают правильно построить доказательство. Методика обучения доказательству использует приёмы вспомогательных (дополнительных) построений при решении задач на доказательство совместно с другими методами доказательства.

Метод аналогии как метод доказательства является единственным представителем **третьей** группы [8; 10; 11; 18; 20; 25; 27; 29; 41; 43; 46, с. 41 – 45; 48; 49, с. 28 – 34; 51, с. 41 – 44; 53, с. 73 – 80; 55; 56].

Метод аналогии применяется как алгоритмический подход обучения решению задач на доказательство. Сущность метода аналогии заключается в следующем: если два объекта A и B имеют один или несколько общих признаков и объект A имеет дополнительный признак a, то объект B может иметь дополнительный признак a. Доказательство задачи методом аналогии требует дополнительной проверки, потому что допущение аналогичного признака может быть как истинным, так и ложным. Методика обучения доказательству методом аналогии применяется на этапах закрепления теоретических знаний и формирования навыков доказательства.

§3. Анализ опыта обучения решению геометрических задач на доказательство

Проанализируем опыт обучения решению геометрических задач на доказательство [1; 5; 8 – 10; 12; 16 – 21; 27; 29; 32, с. 21 – 33; 33 – 36; 40, с. 25 – 30; 41; 42; 44, с. 40 – 48; 47, с. 46 – 53; 48; 51, с. 41 – 44; 53, с. 73 – 80; 55].

Обучение доказательству в школьном курсе геометрии осуществляется путём решения геометрических задач на доказательство, которое включает следующие стадии:

1) подготовка к решению задач на доказательство (пропедевтический подход);
2) изучение готовых доказательств;
3) поиск доказательства;
4) подход к доказательству.

Все перечисленные стадии применяются на любой ступени обучения и имеют систематический, постоянный характер.

Методика обучения доказательству на стадии подготовительной работы является необходимым условием для дальнейшего обучения и предполагает целенаправленные действия [18; 19]: находить и выявлять закономерности; понимать необходимость доказательства; выделять условие и заключение в утверждениях; понимать высказывание, суждение, рассуждения; применять контрпример; выполнять и читать геометрические чертежи; выводить следствия.

Обучение решению геометрических задач по *готовым доказательствам* осуществляется на основе изучения доказательства теорем. Изучение доказательства теоремы предопределяет самостоятельную работу при решении задачи на доказательство. Учащийся наблюдает структуру доказательства теоремы. На этой стадии учащиеся воспроизводят доказательство изучаемых теорем, рассматривают конкретные доказательства, приобретают навыки построения доказательства.

Разбор доказательства теоремы рассматривается как обучение решению задач по готовым доказательствам и предполагает: уяснение исходных положений (данных) и требований теоремы; понимание основного тезиса (суждения); понимание метода, которым осуществляется доказательство; выделение основных этапов доказательства; понимание посылок (аргументов доказательства).

Учащиеся записывают структуру доказательства в кратком изложении в символической форме; обосновывают каждый шаг доказательства, составляя таблицу доказательства. Таблица имеет левый столбец, в который записывают последовательность утверждений, то есть изложение доказательства, в правом столбце – обоснование каждого утверждения [12; 16 – 21; 27; 29; 41; 42; 44].

Работа с доказательствами определяется двумя подходами: *догматический* и *генетический* [34 – 36]. Оба подхода применяются в процессе обучения.

Догматический подход предполагает готовое суждение (тезис, умозаключение), которое не обосновывается. Догматический подход при обучении геометрии используется, если необходимо кратко изложить материал, либо изучить тему.

Догматический подход имеет недостатки: не формирует интерес к геометрии; не показывает логические связи с источниками; не активизирует познавательную деятельность.

Генетический метод предполагает суждение (тезис, умозаключение), которое обосновывается с позиции происхождения.

Генетический подход имеет достоинства: формирует познавательную активность; показывает логические связи, как с источником происхождения, так и внутренние логические связи.

Методика обучения геометрии рассматривает доказательство теорем как необходимое условие для формирования умений доказывать геометрические задачи.

Рассмотрим *подходы* к доказательству теорем (задач), которые применяются в методике преподавания геометрии [8 – 10; 18; 27; 29; 33; 41; 55; 56].

Первый. Обучение доказательству теоремы (задачи) реализуется взаимосвязанными этапами: мотивация доказательства теоремы; ознакомление с теоремой; усвоение содержания теоремы; запоминание формулировки теоремы; выбор способа или способов доказательства; доказательство теоремы на основе теоретического материала: аксиомы, теоремы, свойства и признаки; связь теоремы с другими теоремами.

Второй. Обучение доказательству на основе опорных (базовых) упражнений, где выделяют условие и заключение теоремы; выполняют чертеж, моделирующий условие и заключение теоремы. Применяется технология разбивки теоремы на смысловые части, если формулировка теоремы объёмистая. Обучают учащихся запоминать содержание теоремы поэлементно [45 – 49].

Третий. Используется метод укрупнения при доказательстве теорем. Синхронно рассматривают прямую и обратную теоремы, для этого используют на уроках геометрии взаимосвязанные задачи. Такой подход применяется в методике обучения, так как развивает логическое мышление учащихся. Обучение дополняется графическими рисунками, которые делают процесс доказательства очевидным и взаимосвязанным [2, с. 52 – 59; 7; 11; 20; 21, с. 3 – 8; 24; 40, с. 25 – 30; 44, с. 40 – 48; 47, с. 46 – 53; 51, с. 41 – 44; 57; 58, с. 47].

Четвёртый. Изучают доказательства теорем с помощью плана. Учитель показывает примеры составления плана и параллельно учить составлять план прочитанного теоретического материала. Сначала учащиеся составляют план коллективно, в последующем самостоятельно. Такой подход в обучении приводит к лучшему пониманию и запоминанию текста или задачи [10; 11; 18].

Рассмотрим методики обучения доказательству на основе *поиска* и *подхода.*

Формирование умения осуществлять *поиск доказательства* является центральным направлением для обучения решению задач на доказательство. Обучение поиску доказательства осуществляется на основе общего плана [9; 10; 27; 32, с. 21 – 33; 41; 45; 48; 55; 56].

Сущность плана поиска доказательства заключается в следующем: понять задачу; найти путь от неизвестного к данным; если необходимо, то рассмотреть промежуточные задачи; реализовать идею решения; проверить решение; оценить решение.

Поиск доказательства основан на умении учащихся понимать (осмысливать) суждения, умозаключения, утверждения. Осмысливание формулировку доказательства задачи учащиеся определяют путь построения доказательства.

На уроках геометрии применяются методические приёмы для построения доказательства.

Использование разных конструкций доказательства. Разные доказательства теоремы показывают существование всевозможных путей установления истины. Учащийся строит конструкцию доказательства на основе подбора истинных суждений, которые логически взаимосвязаны. Учащийся доказывает задачу способом, отличным от предложенного в учебнике, тем самым, учащийся показывает высокий уровень владения теоретическим материалом [10; 12; 18; 25; 41; 42; 46, с. 41 – 45; 48; 55; 56].

Использование разных чертежей. Доказательство сопровождается чертежом. Разнообразные чертежи, иллюстрирующие процесс доказательства, формируют наглядное представление об истинности рассуждений. Сопровождение доказательства чертежами позволяет рассматривать доказательство с различных сторон, формируя, таким образом, подходы к доказательству [21, с. 3 – 8; 24; 25; 41; 44, с. 40 – 48; 47, с. 46 – 53; 57; 58, с. 47 – 51].

Использование «аналогичного доказательства». Аналогия помогает разбирать доказательство, если учащийся слабо владеет навыками рассуждений. Доказательство использует аналогичные рассуждения (конструкции). Использование в процессе доказательства аналогий-конструкций активизирует работу учащихся, побуждая начинать доказательство. Доказательство на основе «*аналогичных доказательств*» формирует умение решать задачи на доказательство [8; 9; 18; 20; 29; 41; 48; 55; 56].

Ссылки на утверждения, применяемые при доказательстве. Приём заключается в следующем: учащимся предлагают ознакомиться с готовым доказательством, затем происходит детальный разбор доказательства. Учитель ставит цель – обосновать каждый шаг доказательства. Учащиеся должны привести ссылки на утверждения, аксиомы или теоремы [8; 9; 18; 20; 29; 41; 48; 55; 56].

Формирование умения опровергать и подвергать сомнению находит применение в методике обучения доказательству. Цель обучения – научить учащихся опровергать предложенные суждения, утверждения, доказательства. Умение опровергать означает обосновывать ложность суждения или рассуждения. На уроках геометрии формирование умения опровергать осуществляется с помощью специально подобранных задач.

Применяются методы обучения, которые формируют умение опровергать:

а) приёмы опровержения тезиса: предложить контрпример; предложить рассуждение; предложить проверку числовыми значениями; предложить доказательство истинности несовместного положения; выделить из тезиса ложное следствие;

б) приёмы опровержения аргументов: проверить истинность, обоснованность, достаточность и независимость аргументов;

в) приёмы опровержения демонстрации: проверить полноту доказательства; проверить выполнение логических правил и законов.

Рассмотрим опыт обучения решению геометрических задач на основе *самостоятельного поиска и выполнения доказательства*.

Самостоятельное доказательство геометрических задач, которое выполняет учащийся, представляет высокую ступень формирования умений решать задачи на доказательство [8; 9; 18; 20; 29; 32, с. 21 – 33; 41; 48; 55; 56]. На уроках решают геометрические задачи на доказательство на основе инструкций, наставлений, разъяснений, указаний.

Например:

1) разбери условие и заключение теоремы (задачи): *что дано*? *что требуется доказать*?;

2) сделай чертеж (модель) и введи буквенное обозначение;

3) сделай объяснения чертежа;

4) убедись, что применение теоремы является достаточным или необходимым основанием для доказательства; какие рассуждения позволяют ссылаться на теорему? и т.п.;

5) сопровождай рассуждения дополнительными чертежами;

6) применяй теорему; используй определение, признаки, либо свойства геометрических объектов;

7) запиши условие и заключение теоремы в математической форме;

8) если определение термина имеет неясно выраженную форму, то используй наиболее подходящую формулировку;

9) подумай, что охватывает теорема и т. п.

Учителя-методисты строят обучение, пытаясь найти эффективные схемы для учащихся, доказывающих теорему или задачу, и предлагают следующую схему поиска доказательства [8; 9; 18; 20; 29; 32, с. 21 – 33; 41; 48; 55; 56].

1. Выделить данные в условии; указать, что требуется доказать.

2. Предварительно выполнить рисунок и сделать обозначения.

3. Записать условие и заключение задачи (теоремы) в символической форме.

4. Назвать существенные признаки для доказательства.

5. Используй высказывания «*необходимо и достаточно*».

6. Сделать выводы из данных и условия.

7. Сопоставить признак с условием и следствиями. Выбрать признак, удобный для доказательства.

8. Если не удаётся выбрать необходимый признак, подумай, какие признаки нужны для доказательства.

9. Если доказательство затрудняется, то обратись к данным, либо выведи следствия из данных.

Процесс обучения доказательства осуществляют как доказательство математических утверждений. Доказательство математических утверждений происходит на основе правил [34 – 36].

1. Условие теоремы преобразуется с целью сближения с заключением (при синтетическом методе доказательства).

2. Заключение теоремы преобразуется с целью сближения с условием (при аналитических методах доказательства или поиска пути доказательства).

3. Определяемое понятие, содержащееся в условии или заключении теоремы, либо появляющееся в доказательстве, заменяется определением.

4. Если несколько эквивалентных определений понятия, то используют короткое определение, которое сокращает путь рассуждений.

5. Вместо определения понятия применяется признак.

6. Условие теоремы надо использовать полностью.

Методика обучения М.Б. Воловича рассматривает процесс построения доказательства на основе: «*разворачивание*» условия; «*разворачивание*» заключения; получение цепочки выводов от условия до заключения.

Актуальное значение имеет методика Г.Л. Муравьёвой – методика обучения учащихся самостоятельному поиску доказательства задачи (теоремы) с помощью системы подобных (аналогичных) задач [8; 9; 18; 20; 29; 41; 48; 55; 56]. Согласно методике Г.Л. Муравьёвой процесс обучения поиску доказательства включает: решение учениками системы задач; актуализация «*старых*» знаний, умений, необходимых для самостоятельного «*открытия*» теоремы и способа доказательства; определение круга недостающих знаний; формулировка гипотезы; самостоятельный поиск путей и способов доказательства гипотезы; обсуждение результатов, подведение итогов.

Самостоятельный поиск доказательства задачи рассматривается педагогами как активизация познавательной деятельности учащихся.

Актуальное значение имеет методика обучения доказательства на основе «*подготовленного плана*». Учителя при решении задачи используют готовый план доказательства [8; 9; 18; 20; 29; 41; 45 – 49; 55; 56].

Приведём особенности доказательства по готовым планам.

Во-первых, разбивается задача на элементарные части, такие, которые учащиеся могут самостоятельно доказать.

Во-вторых, план доказательства помогает организовать самостоятельный поиск.

В-третьих, план охватывает доказательство в целом, что позволяет учащимся понять выстраивание доказательства.

Особое значение при обучении решению задач на доказательство имеют специальные или нестандартные задачи, которые позволяют учащимся открыть способ доказательства задачи (теоремы) в процессе решения. Такой подход в обучении имеет место при рассмотрении частных случаев [5; 10; 16; 17; 35; 42; 49, с. 28 – 34].

§4. Технологии обучения решению геометрических задач на доказательство

В основе педагогической технологии обучения лежит программированное обучение.

Проблемами программированного обучения занимался П.Я. Гальперин, создавший теорию «*поэтапного формирования умственных действий*», на основе теоретических исследований Н.Ф. Талызиной. Программированное обучение развивалось по двум направлениям:

первое направление – разработка содержания обучения, то есть *что должно быть*?;

второе направление – разработка программы обучения, то есть, *как делать*?

Программированное обучение не решило основные педагогические проблемы, связанные с различными способностями учащихся, и не позволило окончательно сформировать умения решать задачи на доказательство. Положительным моментом обучения можно считать только отработка навыка или практического действия по заранее подготовленной программе. Выявленные недостатки программированного обучения, такие, как направленность на репродуктивное обучение и отсутствие развития творческих способностей, явились причиной снижения к данному виду обучения. Однако технология обучения как направление методики имеет ряд особенностей, которые необходимо учесть при создании собственной методики.

Перечислим особенности технологии обучения:

1) подчинённость поставленной цели обучения;
2) последовательность обучения;
3) коррекция процесса и результатов обучения;
4) диагностика обучения.

Выбор технологии обучения или разработка собственной технологии обучения основывается на научных исследованиях. Базой научных исследований служат закономерности развития личности в педагогическом процессе. Задача методики обучения заключается в следующем – *найти эффективный способ усвоения учебного материала*? Такая задача решается на основе применения методики обучения. Существуют разнообразные методики обучения, и учитель постоянно выбирает подходящую методику, которая эффективно и результативно решает проблему обучения. В настоящий момент актуализировалось направление в методике обучения математики – это технология обучения [52, с. 246 – 253; с. 260 – 261]. Технология обучения решению геометрических задач на доказательство входит в структуру технологии обучения математики.

Технологии обучения математики разрабатывали М.Б. Волович, Р.Г. Хазанкин, П.М. Эрдниев, Т.А. Иванова, технология педагогических мастерских А.А. Окунева, который строил систему обучения на основе педагогической технологии Л.В. Занкова [52, с. 246 – 253; с. 260 – 261].

Технология обучения – это совокупность средств и методов, которые используются в процессе обучения, позволяющие эффективно реализовывать поставленные образовательные цели. Основной вопрос технологии обучения математике – *как учить математике*?

Рассмотрим педагогические технологии, которые применяются в обучении.

Педагогическая технология М.Б. Воловича.

Педагогическая технология М.Б. Воловича нацелена на успешное обучение математике и прочное усвоение школьниками определений и доказательств теорем. Технология включат два подхода к обучению: *дифференциация* и *индивидуализация*.

Дифференциация – это форма организации учебной деятельности, учитывающая склонности, интересы и способности учащихся. Дифференциация в процессе обучения создает возможности для развития творческой целенаправленной личности, осознающей конечную цель и задачи обучения; для повышения активности и усиления мотивации; формирует прогрессивные педагогические мышления.

Индивидуализация – это форма организации учебной деятельности, учитывающая в процессе обучения индивидуальные особенности учащихся во всех формах и методах. Индивидуализация обучения предполагает дифференциацию учебного материала, разработку систем заданий различного уровня трудности и объема, разработку системы мероприятий по организации процесса обучения в конкретных учебных группах. Индивидуализация обучения учитывает персональные особенности каждого учащегося.

Важной составляющей индивидуализации и дифференциации в обучении является ***учет психологических особенностей*** учащихся.

Целью индивидуализации и дифференциации является сохранение и дальнейшее развитие индивидуальности ученика как формирование уникальной личности.

Реализуя индивидуализированный и дифференцированный подход в обучении, учитель, наблюдая динамику роста ученика, учитывает результаты в дальнейшей педагогической работе. Отслеживание изменений учитель наблюдает по диагностическим картам.

Организация дифференцированного подхода в обучении включает несколько этапов.

1. Проведение диагностики.
2. Распределение учащихся по группам с учетом диагностики.
3. Определение способов дифференциации.
4. Разработка дифференцированных заданий.
5. Реализация дифференцированного подхода к учащимся на различных этапах урока.
6. Диагностический контроль результатов обучения как основной критерий педагогической технологии.

Ожидаемый результат применения технологии обучения М.Б.Воловича заключается в следующем: каждый ребенок должен существенно измениться; каждый ребенок должен показать качественные и количественные изменения. Таким образом, педагогическая технология М.Б. Воловича учитывает психологические особенности учащихся в реализации индивидуализации и дифференциации обучении.

Технология обучения математике Р.Г. Хазанкина.

Основная идея обучения математике Р.Г. Хазанкина – это совершенствование форм и методов обучения и оптимальное сочетание различных видов учебных занятий. Творческий подход к процессу обучения математике является главной целью обучения. Учитель выступает в роли новатора, который побуждает ученика к активизации, к самостоятельному творчеству, к раскрытию личных возможностей [52, с. 246 – 253; с. 260 – 261].

Достижение целей обучения основано на реализации восьми типов уроков: урок-лекция; урок решения ключевых задач; урок обобщающих задач; урок-консультация; урок-зачёт; урок-анализ результатов зачёта; контрольная работа; урок-анализ и коррекция результатов контрольной работы.

Р.Г. Хазанкин формулирует основные принципы системы обучения.

1. Теоретические знания учащихся должны быть более глубокими, должны понимать взаимосвязи изучаемого предмета, знать методы решения задач и уметь применять методы для решения задач.

2. Связывать изучение математики с другими учебными предметами.

3. Использовать теоретические знания при решении задач.

4. Накапливать и систематизировать учебный материал.

5. Учиться догадываться.

6. Анализировать решённую задачу.

7. Учиться видеть красоту математики и в процесс решения, и в достижении результата.

8. Составлять задачи самостоятельно.

9. Работать с учебной, научно-популярной и научной литературой.

10. Организовать «математическое» общение на уроке и после уроков.

Таким образом, педагогическая технология Р.Г. Хазанкина основывается на творческом подходе в обучении математике.

Технология педагогических мастерских А.А. Окунева.

Система обучения А.А. Окунева – это развивающее обучение на основе педагогической технологии Л.В. Занкова, имеющее некоторые особенности:

а) темп обучения математике: по сложности; по новизне;

б) учащиеся учатся: анализировать учебную задачу или ситуацию; контролировать учебную деятельность; формулировать проблему и задачу, ставить вопросы; делать сообщения; алгоритмизировать учебный материал; запоминать учебный материал; воспроизводить учебный материал.

Технология развивающего обучения математике Т.А. Ивановой.

Технология развивающего обучения Т.А. Ивановой основывается на теоретических исследованиях Л.С. Выготского, которые изучал «*зону ближайшего развития*» обучаемого. Л.С. Выготский, разрабатывая собственную теорию, ссылался на исследования Б. Блума «о таксономии целей обучения». Таксономия целей обучения представляет систему уровней освоения учебного материала «*знание*», «*понимание*», «*применение*», «*анализ*», «*синтез*» и «*оценка*».

Л.С. Выготский рассматривал «зону ближайшего развития» учащегося как диагностируемые учебные цели, например, на уровне «*применение правил*» цель считается достигнутой, если ученик:

– выполняет действия по правилу;
– применяет правило к решению конкретного цикла упражнений, соответствующих принципу полноты;
– обнаруживает ошибки в упражнениях с «*ловушками*»;
– составляет краткий справочник с возможными ошибками.

Таким образом, педагогическая технология Т.А. Ивановой – технология развивающего обучения – это обучение, которое развивает познавательные способности учащихся, включая в процесс обучения индивидуальные возможности каждого учащегося.

К технологии обучения предъявляются следующие требования, гарантирующие результат обучения:

1) разработка технологии обучения опирается на результаты научных исследований;

2) разработка технологии обучения должна согласовываться с целью обучения;

3) технология обучения реализуется через последовательность конкретных этапов при соблюдении следующего условия: каждый этап определяется результатом, то есть основание для дальнейшей реализации технологии;

4) выполнить диагностику после каждого этапа, то есть сравнить с ожидаемыми результатами; если необходимо, то выполнить коррекцию;

5) существование обратной связи: «*учитель – ученик*»;

6) формулировать результат достижения.

Значение имеют критерии, которые оценивают эффективность применения технологии обучения [3; 5; 8; 14, с. 8 – 12; 15, с. 27 – 29; 18; 28; 29; 31, с. 65 – 72; 37; 55]. Оценка эффективности применения технологии происходит на основе анализа:

1) анализ полученных результатов обучения;
2) анализ содержания технологи обучения;
3) анализ этапов усвоения учебного материала;
4) анализ взаимодействия на каждом этапе участников учебного процесса;
5) допустимые отступления (отклонения);
6) эффект от применения информационных технологий.

На основе вышеперечисленных технологий обучения математике сформулируем технологию обучения решению геометрических задач на доказательство. Во-первых, сущность технологии обучения доказательству заключается во взаимодействии и совместной работе учителя и ученика: учит

– учитель и учиться – ученик. Во-вторых, ведущая и направляющая роль в процессе обучения возложена на учителя как необходимое условие результативности обучения. В-третьих, взаимодействие между учителем и учеником строится на активной позиции при условии, что учитель вовлекает учащихся в процесс построения доказательства. В-четвёртых, необходимое условие для обучения доказательству заключается в следующем требовании: учащийся должен знать и владеть фундаментальной системой базовых знаний, которая имеет накопительный характер.

Технология обучения рассматривается как метод педагогического воздействия, направленный на повышение эффективности учебного процесса и достижения результатов обучения. Таким образом, *технология обучения решению геометрических задач на доказательство* ориентирована на формирование умений выполнять доказательство.

Сформулируем определение «*технология обучения решению геометрических задач на доказательство*».

Технология обучения решению геометрических задач на доказательство – это способ обучения, направленный на формирование умений доказывать геометрические задачи.

Предметом рассмотрения технологии обучения является доказательство как логическая форма построения истины. Таким образом, целевая задача технологии обучения решению геометрических задач на доказательство заключается – научить учащихся строить логическую форму доказательства.

Определим основные умения, которые формируются на основе технологии обучения решению геометрических задач на доказательство.

Итак, формирование умений:

1) анализировать формулировку утверждения: выделить условие и заключение;

2) делать выводы на основании исходных данных;

3) строить чертёж по условию; вносить дополнительные построения и преобразования, либо изменения;

4) определять метод доказательства: логический как последовательность истинных умозаключений или математический, основанный на преобразованиях;

5) строить последовательность умозаключений.

Технология обучения опирается на взаимосвязанные категории, такие как «*умение решать задачу на доказательство*» и «*умение доказывать*». Данные категории близки по значению, но имеют некоторые отличительные особенности. Рассмотрим определения вышеназванных категорий.

Умение решать задачу на доказательство, значит, обдумывать вопрос или проблему в поисках истинного ответа, вырабатывая план действий.

Умение решать задачу на доказательство предполагает владение методами доказательства.

Умение доказывать, значит, подтверждать логическую последовательность суждений истинными аргументами, фактами или умозаключениями.

Умение доказывать предполагает знания теоретического материала.

В обоих случаях умение формируется на основе упражнений и задач. Технология обучения рассматривает задачи на доказательство как необходимый компонент для формирования умений решать задачу на доказательство. Поэтому разработка технологии обучения реализуется через решение задачи на доказательство.

Выводы по первой главе

Теоретические основы методики обучения решению геометрических задач выявили следующее:

1. Геометрические задачи на доказательство являются математическими задачами, формулирующие утверждение, которое необходимо доказать. Геометрические задачи на доказательство включены в

структуру классификации математических задач, однако геометрические задачи на доказательство не имеют типологическую классификацию.

2. Обучение решению задач на доказательство осуществляется на основе методов, образующие три направляющие группы: **первая** группа методов реализует ***индуктивный*** подход к доказательству и ***дедуктивный*** подход к доказательству; **вторая** группа методов применяет ***анализ*** и ***синтез***; **третья** группа методов основана на ***аналогии***.

3. Основными методами доказательства являются: индуктивный и дедуктивный методы; аналитические методы; синтетические метод; аналитико-синтетический; метод вспомогательных построений и преобразований; алгоритмический метод.

4. Обучение доказательству осуществляется путём решения геометрических задач на доказательство, которое включает следующие стадии: подготовка к решению задач на доказательство (пропедевтика); изучение готовых доказательств; поиск доказательства и подход к доказательству.

5. Технология обучения решению геометрических задач на доказательство входит в структуру технологии обучения математики. Сущность технологии обучения доказательству заключается во взаимодействии и совместной работе учителя и ученика. **Технология обучения** – это совокупность средств и методов, которые используются в процессе обучения, позволяющие эффективно реализовывать поставленные образовательные цели.

6. Технология обучения предполагает содержание обучения и способ достижения результата обучения; требования к технологии обучения, а также критерии, которые оценивают эффективность применения технологии.

ГЛАВА II. СОДЕРЖАТЕЛЬНО-МЕТОДИЧЕСКИЕ ОСОБЕННОСТИ ОБУЧЕНИЯ СТАРШЕКЛАССНИКОВ РЕШЕНИЮ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ЗАДАЧ НА ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

§5. Основные цели и задачи обучения решению геометрических задач на доказательство в общеобразовательной школе

В общеобразовательной школе формирование умений доказывать геометрические задачи является целью обучения, поэтому, учащихся необходимо учить решать задачи на доказательство, так как ученики приобретают способность к решению любых геометрических задач [5; 8; 10; 17; 18; 26, с. 46 – 57; 40, с. 25 – 30; 41; 48; 55; 56].

Методика обучения геометрии рассматривает решение задач на доказательство с различных подходов [5; 8; 10; 17; 18; 26, 40; 41; 48; 55; 56].

Первый. Доказательство представляет процесс, который приводит к истине, противоречию или опровержению. Учащийся приходит к истине, преодолевая трудности, связанные с процессом построения доказательства. Трудности построения доказательства сопровождаются ошибками, заблуждениями, ложными аргументами, не знанием теоретического материала, не владением методами доказательства [18; 20; 48].

Второй. Доказательство задачи рассматривается как закрепление теоретического знания и как проверка знания на практике [5; 8; 10; 17; 18; 26, 40; 41; 48; 55; 56].

Третий. Доказательство задачи – это способ осмыслить и понять теорему, свойство или признак геометрического объекта [5; 8; 10; 17; 18; 26, 40; 41; 48; 55; 56].

Четвёртый. Доказательство задачи – это путь интеллектуального развития личности. Процесс доказательства создаёт условие для интеллектуального развития ученика. Умение доказывать задачу влечёт развитие творческих способностей. Процесс решения задачи на доказательство зависит от владения необходимыми теоретическими знаниями учебного материала и способности применять знания на практике. Аксиомы, теоремы, признаки и свойства геометрических объектов – это инструменты, которые помогают доказывать [5; 8; 15, с. 27 – 29; 16; 35].

На основе вышеизложенного сформулируем ***цель обучения***.

Итак, ***цель обучения решению геометрических задач на доказательство*** – развить навыки самостоятельной работы учащихся на основе подхода к доказательству и поиска доказательства, применяя педагогическую технологию обучения – «*технология наводящих вопросов*».

Определим понятия: «*подход к доказательству*» и «*поиск доказательства*».

Содержание понятия «***подход к доказательству***» включает идею, концепцию, точку зрения или позицию, совокупность принципов, которые обусловливают процесс построения доказательства.

Подход к доказательству – это способ воздействия на процесс построения доказательства задачи.

Примером подхода к доказательству может быть ***технология*** «*наводящих вопросов*», которая помогает выстраивать процесс доказательства.

Поиск доказательства – это совокупность действий, направленных на нахождение и применение теоретических знаний, таких как аксиомы, определения, теоремы, свойства, признаки, а также методы доказательства для установления истины утверждения.

Цели обучения решению геометрических задач на доказательство предполагают:

– образовательное направление;
– развивающее направление;
– воспитательное направление;

Рассмотрим каждое целевое направление.

Образовательная цель обучения решению геометрических задач на доказательство – это овладение учащимися методами доказательства, умениями и навыками построения доказательства.

Требование к образовательной цели обучения: активное участие учащегося в процессе обучения.

Воспитательная цель обучения решению геометрических задач на доказательство – это формирование активной, самостоятельной, индивидуальной, творческой личности.

Требование к воспитательной цели обучения: вовлечение учащегося в процесс обучения.

Развивающая цель обучения решению геометрических задач на доказательство – это формирование научного мировоззрения, логического мышления, эвристической составляющей мышления, развитие пространственного воображения.

Требование к развивающей цели обучения: способствовать формированию интеллекта учащегося, формировать систему взглядов через математическую составляющую.

Рассмотрим вопрос: ***задачи обучения***.

Задача на доказательство формулирует вопрос в виде утверждения, которое необходимо доказать. Доказать утверждение, значит, установить истинность или ложность, с этой целью учащийся выстраивает последовательность рассуждений. Рассуждения представляют процесс доказательства и учащийся, решая задачу на доказательство, должен уметь выстраивать логически верные суждения, которые приведут к результату. Под результатом, учащийся должен понимать, факт установления истинности утверждения, либо ложность.

Задача на доказательство как математическая задача состоит из главных частей: предпосылка (гипотеза) и заключение (вывод), которое требуется доказать или опровергнуть.

Например, известно, что $\overrightarrow{AO} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$. ***Докажите***, ***что*** точки A и B симметричны относительно точки O. Точки A и B лежат на сфере с центром $O \notin AB$, а точка M лежит на отрезке AB. ***Докажите***, ***что*** если M – середина отрезка AB, то $OM \perp AB$.

В данных задачах формулируется утверждение, которое требуется доказать. Чтобы доказать утверждение в задаче, ученик должен:

знать необходимый теоретический материал, который определяется условием задачи, таким образом, тема «***Векторы***»;

уметь выполнять действия над векторами;

иметь навык решения задач на вычисления и построения векторов.

Учитель, планируя урок геометрии решения задач на доказательство, формулирует ряд вопросов, а именно: *какой уровень базовых знаний учеников необходим для решения задачи на доказательство*? *как представить процесс доказательства, чтобы учащиеся были вовлечены*? *как показать путь доказательства, который приведёт к истине*? и т.п.

На основании вышеизложенного сформулируем ***задачу обучения*** как совокупность *знаний, умений и навыков*.

Для того чтобы решать задачи на доказательство, учащимся необходимо:

знать: теоретические основы геометрии (*понятия*, *определения*, *аксиомы*, *теоремы* и *следствия* из теорем, *свойства* и *признаки* геометрических объектов); методы доказательства; логические операции (*анализ*, *синтез*, *аналогия*, *сравнение*, *сопоставление*, *обобщение* и т. п.);

уметь: выполнять геометрический чертёж; применять теоретические знания для обоснования рассуждений и утверждений; применять методы доказательства; применять логические операции;

навыки: геометрических построений и преобразований; распознавать на чертежах геометрические фигуры.

В окончательном виде сформулируем ***основные цели и задачи обучения*** решению геометрических задач на доказательство.

1. Формировать навык самостоятельного поиска доказательства, что согласуется с целями обучения.
2. Мотивировать учащихся, формируя стремление доказывать.
3. Создавать ситуацию, которая возбуждала потребность к решению задачи на доказательства.
4. Преодолевать трудности психологического характера, которые препятствуют решению задачи на доказательство.
5. Воспитывать волю и настойчивость в достижении истины на основе решения задач на доказательство.

§6. Анализ подходов к обучению решению задач на доказательство в учебниках геометрии 10 – 11 классов

В Российской Федерации существует перечень учебников (далее – **Перечень**), который утвержден приказом Министерства просвещения Российской Федерации от 28 декабря 2018 года № 345 «*О федеральном перечне учебников, рекомендуемых к использованию при реализации имеющих государственную аккредитацию образовательных программ начального общего, основного общего, среднего общего образования* (далее – **Перечень**)».

В соответствии с положениями **Перечня** на текущий момент рекомендовано к преподаванию геометрии следующий список учебников:

Александров А.Д., Вернер А.Л., Рыжик В.И. Геометрия (базовый и профильный уровни). 10 – 11 классы. – М.: Просвещение.

Атанасян Л.С., Бутузов В.Ф., Кадомцев С.Б. и др. Геометрия (базовый и профильный уровни). 10 – 11 классы. – М.: Просвещение.

Погорелов А.В. Геометрия (базовый и профильный уровни). 10 – 11 классы. – М.: Просвещение.

Потоскуев Е.В., Звавич Л.И. Геометрия (профильный уровень). 10 – 11 классы. – М.: Дрофа.

Потоскуев Е.В., Звавич Л.И. Геометрия (профильный уровень). 11 класс. – М.: Дрофа.

Смирнова И.М. Геометрия (базовый уровень). 10 – 11 классы. – М.: Мнемозина.

Смирнова И.М., Смирнов В.А. Геометрия (базовый и профильный уровни). 10 – 11 классы. – М.: Мнемозина.

Шарыгин И.Ф. Геометрия (базовый уровень). 10 – 11 классы. – М.: Дрофа.

Авторы учебников геометрии сформулировали главную задачу обучения, которая заключается в следующем:

во-первых, учащийся должен понимать необходимость доказательства; понимать значение доказательства в геометрии; строить доказательство на основе рассуждений;

во-вторых, учащийся должен самостоятельно находить способ решения задачи, либо доказать утверждение, которое сформулировано в условии задачи.

Авторы учебников по геометрии рассматривают и применяют различные методы доказательства, которые изучаются при доказательстве теорем и решении задач на доказательство.

Теоретический материал авторы учебников геометрии излагают таким образом, чтобы формировались умения доказывать задачи. Обучение доказательству в учебниках геометрии включает: подготовительный этап, в основе которого лежит дедуктивный метод; доказательство, основанное на аналогии, анализе и синтезе; поиск доказательства как самостоятельный процесс логических рассуждений.

Авторы учебников придерживаются логического построения теоретического материала, то есть изученная тема обязательно используется в последующем; доказательство представляет логическую последовательность суждений, истинность которых установлена на ранее изученных темах.

Рассмотрим подходы к обучению решению задач на доказательство в учебниках геометрии 10 – 11 классов.

Учебник геометрии для 10 – 11 классов (базовый и профильный уровни) под редакцией *Л.С. Атанасяна*. Изложение теоретического материала строгое, последовательное. Основные теоретические факты изучаются с опорой на геометрические тела, что повышает доступность материала и результативность обучения. Содержание теоретической части в некоторых случаях краткое, но доступное для понимания. Геометрические задачи разного уровня сложности, рассмотрены решения наиболее важных задач. Имеются дополнительные задачи, предназначенные для закрепления и отработки навыков решения. Решение задач нацелено на развития пространственного воображения, практическое понимание и логическое мышление.

Учебник под редакцией *Л.С. Атанасяна* имеет принципиальное отличие. Теоретические вопросы предложены в виде задач, которые надо доказать; некоторые теоремы появляются поздно, что делает процесс обучения для учителя затруднённым. Учитель предлагает другой способ доказательства. Такой подход имеет положительный эффект, потому что предлагает вариативный подход к доказательству задачи.

Аксиомы введены и выделены в тексте, подробно описаны, разъясняются в приложении. Теоремы выделены и обозначены как отдельные единицы. Доказательство в краткой и понятной формах. Приводятся ссылки на предыдущие теоремы. Задачи на доказательство формулируются понятно. Сложные задачи сопровождаются развёрнутым решением. Методы доказательства: индуктивный, дедуктивный; анализ и синтез; аналогии.

Учебник геометрии для 10 – 11 классов (базовый и углубленный уровни) авторы *Александров А.Д., Вернер А.Л., Рыжик В.И.* Авторами сформирована концепция преподавания математики в школе, которая отличается от других учебников. Авторы отказались от деления математики на несколько дисциплин: арифметику, алгебру, геометрию, тригонометрию, основы анализа. Все направления математики изучают в общем курсе. Такое единство математики определяет как математическую науку и рассматривается с позиции взаимосвязи между научными направлениями внутри самой математики. Теоретический материал имеет чёткую структуру и научность; изложение учебного материала понятное, ясное и доступное. Достоинством учебника является простота и краткость.

Авторы представляют геометрию как науку, тесно связанную с окружающим и реальным миром. Абстрактные понятия объясняются и аргументируются с позиции окружающей системы миропонимания. Учебники ориентированы на соединение планиметрии и стереометрии. Уделено внимание на практическое применение геометрии и показана связь с искусством и архитектурой. Геометрия представлена как развивающаяся наука, которая начинает свою историю от Древнего Египта и Древней Греции. Теоретический материал сопровождается заданиями для самоконтроля, имеются задачи, которые важны для решения других задач.

Каждый параграф завершается набором текстовых задач, которые включают основные задачи, т. е. обязательные для изучения и закрепления учебного материала. В основных задачах авторы заложили принцип развивающего обучения. Теоретический материал сопровождается заданиями для самоконтроля; имеются задачи, которые важны для решения других задач.

Аксиомы выделены в отдельный массив как система фундаментальных знаний, подробно поясняются. Теоремы и доказательства сформулированы корректно и точно. Доказательство представлено в широкой форме, понятно. Подкрепляется текстовыми примерами, ссылаются на реальные ситуации.
Задачи на доказательство формулируется кратко и понятно. Сложные задачи сопровождаются развёрнутым решением. Методы доказательства: индуктивный и дедуктивный; анализ и синтез; аналогии.

Учебник геометрии для 10 – 11 классов автор *А.В. Погорелов*. Учебник представляет классический вариант изложения курса геометрии, в котором реализован аксиоматический подход. Все суждения, теоремы выводятся из аксиом. Теоретический материал изложен чётко и ясно, реализуется принцип «*от простого к сложному*». Учебный материал имеет последовательную структуру. Научное изложение и построение аксиом, определений, теорем и доказательства теорем, свойства геометрических фигур и объектов, включая формулы. Текстовые задачи составлены для усвоения и закрепления изученного материала. Задачи разделены по уровню сложности, то есть задачи обычного уровня сложности и задачи повышенной сложности.

Аксиомы выделены как система фундаментальных знаний, являются единственными доказательными единицами. Теоремы и доказательства сформулированы корректно, точно, строго. Доказательство полностью основано на аксиомах. Формулировка задач на доказательство краткая, понятная. Сложные задачи поясняются. Методы доказательства: индуктивный и дедуктивный; анализ и синтез; аналогии.

Учебник геометрии для 10 – 11 классов (профильный уровень) авторы *Е.В. Потоскуев, Л.И. Звавич*. Авторы предлагают концепцию формирования и развития конструктивно-пространственного воображения, формирование логического мышления, способность к освоению новой информации. Теоретический материал выстроен как упорядоченная логическая система, которая включает аксиомы, определения и теоремы. Геометрические термины объясняются по происхождение. Изучаемая теория строится как абстрактная дедуктивная геометрическая система. Особенности учебника не строгое научное аксиоматическое построение стереометрии, авторы рассматривают интуитивное построение реальности.

В учебнике содержится систематизированный задачный материал, поэтому, авторы делают акцент на развитие умения применять основные методы геометрии для решения задач: метод проектирования, метод преобразования, векторно-координатный метод. Задачи разделены на классические и авторские (оригинальные), задачи на построение сечений, склеивание моделей геометрических фигур, задачи повышенной трудности, включая проектные и исследовательские задачи, таким образом, авторы предлагают возможность учителю организовать индивидуальную работу с учениками, проявляющими особый интерес к геометрии, развить и повысить интерес к математике.

Теоретический материал изложен доступно, чётко и наглядно. Доказательства теорем имеют иллюстрации, рисунки снабжены подписями, позволяющими ученику разобраться в доказательстве теоремы, переходя от рисунка к рисунку. В структуру содержания включены слайды, показывающие прообразы геометрических понятий.

Аксиомы выделены в отдельный массив как система фундаментальных знаний, подробно поясняются. Теоремы и доказательства сформулированы корректно, точно. Доказательство представлено в широкой форме, понятно.

Подкрепляется текстовыми примерами, ссылаются на реальные ситуации. Задачи на доказательство формулируются понятно. Сложные задачи сопровождаются развёрнутым решением. Методы доказательства: индуктивный и дедуктивный; анализ и синтез; аналогии.

Учебник геометрии для 10 – 11 классов (базовый и профильный уровни) авторы *И.М. Смирнова, В.А. Смирнов*. Учебник содержит объёмный и интересный дидактический материал: упражнения для повторения, задания в тестовой форме. Предусмотрены уровневая дифференциация, дополнительные материалы, позволяющие формировать познавательный интерес к предмету. В учебник включен материал научно-популярного и прикладного характера. Предлагаются нестандартные и исследовательские задачи; исторические сведения и средства наглядности.

Аксиомы выделены в отдельный массив как система фундаментальных знаний, подробно поясняются. Теоремы и доказательства сформулированы корректно, точно. Доказательство представлено в широкой форме, понятно. Подкрепляется текстовыми примерами, ссылаются на реальные ситуации. Задачи на доказательство формулируются интересно и понятно. Сложные задачи сопровождаются решением. Методы доказательства: индуктивный и дедуктивный; анализ и синтез; аналогии.

Учебник геометрии для 10 – 11 классов (базовый уровень) автор *И.Ф. Шарыгин*. Особенность учебника И.Ф. Шарыгина заключается в отказе от аксиоматического подхода. В учебнике уменьшено значение формально-логических рассуждений, больше внимания уделено методам решения задач. Учебник реализует наглядно-эмпирическую концепцию построения курса стереометрии. Наглядное построение курса геометрии позволяет решать содержательные, интересные и красивые задачи. Планиметрические задачи рассматриваются на пространственных объектах, что даёт возможность формированию пространственного (трехмерного) видения геометрических объектов, пространственного мышления учащихся. Теоремы в учебнике нацелены на создание необходимого запаса знаний для решения задач. Особое внимание уделяется методам решения задач. Доказательство теорем рассматривается с позиции «поучительного наставления» и владение теоремами позволяет решать трудные задачи.

Автор реализует дифференцированное изложение учебного материала: материал для углублённой подготовки; геометрические задачи: важные; полезные; трудные задачи.

Аксиомы предложены как историческая справка, формулировка в краткой форме. Теоремы сформулированы корректно, кратко, имеют прикладной характер. Доказательство представлено в широкой форме, понятно. Подкрепляется текстовыми примерами, ссылаются на реальные ситуации. Задачи на доказательство формулируются понятно. Сложные задачи сопровождаются решением. Методы доказательства: индуктивный и дедуктивный; анализ и синтез; аналогии.

Таким образом, авторы учебников геометрии едины во мнении, что процесс доказательства необходимый компонент обучения геометрии. Авторы формулируют общий подход к обучению решению задач на доказательство, который заключается в следующем:

1) выделить в условии задачи: *что дано?* и *что требуется доказать?*;
2) сделать чертёж или графические зарисовки-пояснения, которые сопровождают весь процесс доказательства;
3) объяснить стратегию доказательства;
4) обсудить аргументы (предпосылки) для построения доказательства;
5) осмыслить построение доказательства;
6) фиксировать (отмечать) основной этап доказательства;
7) делать вывод после каждого этапа доказательства;
8) ссылаться на предыдущие умозаключения, полученные в процессе доказательства.

§7. Методические рекомендации по формированию умений решать геометрические задачи на доказательство в старших классах

Формирование умений решать геометрические задачи на доказательство заключается во взаимодействии и совместной работе учителя и ученика. Безусловно, ведущая и направляющая роль в процессе обучения отведена учителю, однако важнейшим условием успешного обучения заключается в активной деятельности учащегося, а именно: учащийся должен владеть необходимыми теоретическими знаниями. Кроме того, взаимодействие между учителем и учеником строится на основе диалоговой и творческой активности [3; 17; 18; 27; 28; 35; 37; 38].

Обучение доказательству можно рассматривать как инструмент, который позволяет, с одной стороны, раскрыть творческие способности учащихся, с другой стороны, формировать умение решать задачи на доказательство. Тогда, каким образом решить проблему формирования умений? Решением проблемы может быть педагогическая технология – обучение на основе наводящих вопросов. Обучение строится как взаимодействие между учащимися и учителем; либо рассматривается индивидуальный случай между учащимся и учителем. Сущность обучения заключается в следующем, чтобы достичь цели обучения – доказать задачу – учитель формулирует наводящие вопросы или предпосылки, которые позволяют продвигать процесс доказательства [28; 35; 37; 38].

Деятельность учителя, направленная на формирование умений решать задачи на доказательство, предполагает: планирование урока; организация процесса обучения; контроль процесса обучения; анализ результатов обучения.

Планируя урок геометрии, учитель формулирует ряд вопросов, а именно: *какой уровень базовых знаний имеют учащиеся*? *каким образом представить новые знания*? *каким путём добраться до истины*? и т.п.

Роль учителя при реализации технологии обучения на основе наводящих вопросов заключается в том, чтобы, взаимодействуя с учащимися, управлять и влиять на процесс доказательства [28].

Управленческие и влияющие функции учителя можно назвать – ролевой акт.

Приведём некоторые ролевые акты учителя, например:

– нацеливать учащихся к рассуждению;

– побуждать учащихся к поиску необходимых и достаточных оснований: теорема, признак, свойство и т.п.;

– указывать учащимся, *что сделать*, *чтобы…*;

– обращать внимание учащихся на что-либо;

– корректировать процесс доказательства, и т.п.

Технология наводящих вопросов, как методика обучения доказательству, имеет содержательную сторону. Предложим методические рекомендации по формированию умений решать геометрические задачи на доказательство в старших классах.

Рассмотрим содержательное наполнение технологии.

Первый содержательный компонент. ***Представление*** (***первое знакомство с задачей***).

Задача на доказательство формулирует вопрос в форме требования, что необходимо доказать. Задача на доказательство состоит из условия (исходные данные, посылки) и требования. Решить задачу, значит, доказать утверждение. Задача на доказательство, по сути, сформулированная модель проблемы. Центральным элементом проблемы является геометрический объект или объекты: числа, фигуры, отношения [8; 11; 18; 29; 33 – 36; 45; 48; 55].

Задача ученика по освоению содержания:

– ученик должен понять условие задачи;

– ученик должен разобрать условие задачи;

– ученик должен осмыслить формулировку утверждения, что необходимо доказать.

Второй содержательный компонент. ***Геометрические характеристики.***

Задача на доказательство включает геометрический объект, который характеризуется качественными (существенными) свойствами и количественным значением. Геометрическая характеристика объекта – это элементарный истинный признак или свойство, которые при доказательстве задачи играют роль посылки. Геометрические характеристики определяют чертёж задачи [8; 11; 18; 21, с. 3 – 8; 24; 29; 33 – 36; 45; 47, с. 46 – 53; 48; 55; 57].

Задача ученика по освоению содержания:

– ученик должен выполнить чертёж задачи;
– ученик должен разобрать задачу на геометрические объекты;
– ученик должен установит отношения между геометрическими объектами;
– ученик должен определить существенные свойства и признаки геометрических объектов.

Третий содержательный компонент. ***Строение формулировки доказательства***.

Геометрическая задача формулирует вопрос как утверждение, которое необходимо доказать. Формулировка утверждения имеет начальную структуру: «*доказать, что* … ». Далее приводится описательная характеристика, которая включает геометрический объект [8; 11; 18; 24; 29; 33 – 36; 45; 48; 55; 57].

Формулировка доказательства подразделяется на следующие виды:

– качественная характеристика геометрического объекта;
– количественная характеристика геометрического объекта;
– алгебраическая форма геометрического объекта;

– графическая форма геометрического объекта.

Особенности формулировки утверждения зависят от количества геометрических объектов в задаче:

если задача имеет один объект, то указывается качественная или количественная характеристика;

если задача имеет два или более объектов, то указывается отношение между объектами.

Задача ученика по освоению содержания:

– ученик должен разобрать структуру формулировки утверждения.

Четвёртый содержательный компонент. *Теоретические знания.*

Геометрическая задача ориентирована на некоторую область теоретических знаний. Задача затрагивает определенную тематику. Теоретический материал является основой для построения доказательства, таким образом, является посылкой для доказательства [8; 11; 18; 24; 29; 33 – 36; 45; 48; 55; 57].

Задача ученика по освоению содержания:

– ученик должен владеть необходимыми и достаточными теоретическими знаниями.

Пятый содержательный компонент. *Построение стратегии доказательства*.

Стратегия доказательства – это последовательность математических определений, аксиом, теорем, правил, формул, образующих теоретическую базу задачи. Построение доказательства, значит, последовательное изложение суждений, которые основываются на истинных положениях. Задача на доказательство предполагает решение, которое направлено на достижение цели – доказать утверждение, либо опровергнуть. Стратегия доказательства предусматривает организованные действия ученика: то есть вырабатывать (формулировать) вопросы, которые предполагают ответ [8; 11; 18; 24; 29; 33 – 36; 45; 48; 55; 57].

Задача ученика по освоению содержания:

– ученик должен владеть методами доказательства.

Шестой содержательный компонент. *Процесс доказательства*.

Исполнение стратегии доказательства, то есть тактика решения.

Доказательство – это процесс установления истины, логическая операция обоснования истинности утверждения на основе доказанных истин или суждений. Процесс доказательства строиться при помощи логических операций: анализ, синтез, сравнение, сопоставление и т.п.

Доказательство характеризуется структурой, которая включает следующие положения: *тезис* – это утверждение, которое надо доказать; *аргументы* – это истинные суждения, которые применяются при доказательстве тезиса.

Форма доказательства – это способ, показывающий обоснованность логической связи между тезисом и аргументами [8; 11; 18; 24; 29; 33 – 36; 45; 48; 55; 57].

Задача ученика по освоению содержания:

– ученик должен владеть основными логическими операциями.

Рассмотрим реализацию методики обучения решению геометрических задач на доказательство на основе «технологии наводящих вопросов» на примере ключевых задач.

Задача 1. (Задача 328. *Атанасян Л.С., Бутузов В.Ф., Кадомцев С.Б. и др.* Геометрия 10 –11 классы.) Дан тетраэдр *ABCD*. Докажите, что $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CD}$.

Дано: *ABCD* – тетраэдр. Доказать: $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CD}$.

Доказательство.

1 этап

Ролевые действия учителя: *какой геометрический объект в условии задачи*?

Требования к знаниям ученика: должен знать определения: *тетраэдр*.

Ожидаемые действия ученика: геометрический объект – тетраэдр.

2 этап

Ролевые действия учителя: активизация знаний: сформулировать определение – *тетраэдр*.

Требования к знаниям ученика: должен знать определения: *тетраэдр*.

Ожидаемые действия ученика: тетраэдр – это поверхность, составленная из четырёх треугольников.

3 этап

Ролевые действия учителя:

пояснение: тетраэдр по условию произвольный (неправильный);

указание: выполнить чертёж.

Требования к знаниям/умениям ученика: выполнять геометрические построения.

Ожидаемые действия ученика: выполнение чертежа (рис. 1).

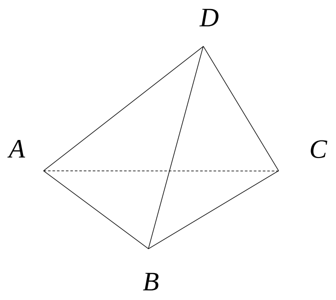

Рис. 1

4 этап

Ролевые действия учителя: разбор формулировки (требования) доказательства. *В каком виде представлена формулировка доказательства*?

Ожидаемые действия ученика: доказательство формулируется как алгебраическое выражение (векторное равенство; сумма векторов, векторное выражение).

5 этап

Ролевые действия учителя: *тогда, какие объекты в условии задачи определены*?

Требования к знаниям ученика: должен знать определение – *вектор*.

Ожидаемые действия ученика: множество векторов $\left\{\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{BD}; \overrightarrow{AC}; \overrightarrow{CD}\right\}$.

6 этап.

Ролевые действия учителя: активизация знаний: *сформулируем определение вектора*.

Требования к знаниям ученика: должен знать определение – *вектор*.

Ожидаемые действия ученика: вектор как направленный отрезок.

7 этап

Ролевые действия учителя: указание: *выполнить дополнительное построение*.

Требования к знаниям/умениям ученика: выполнять геометрические построения.

Ожидаемые действия ученика: выполнение чертежа (рис. 2).

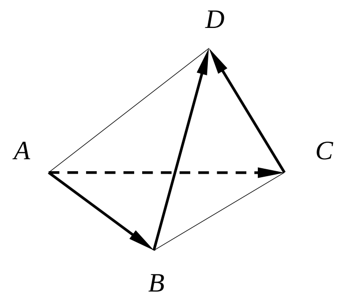

Рис. 2

8 этап

Ролевые действия учителя: *если векторное выражение представлено как сумма векторов, то какой вывод по формулировки доказательства следует сделать*?

Ожидаемые действия ученика: доказать равенство суммы двух векторов.

9 этап

Ролевые действия учителя: *тогда, что называют сумой двух векторов*?

Требования к знаниям ученика: должен знать определение – *суммы двух векторов*.

Ожидаемые действия ученика: сумма двух векторов – это вектор, который проведён из начала первого вектора к концу второго вектора.

10 этап

Ролевые действия учителя: таким образом, *доказательство сводится к нахождению вектора суммы*. Тогда, *найдите на чертеже вектор, который является суммой* $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}$ *и* $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CD}$.

Требования к знаниям ученика: должен знать определение – *суммы двух векторов*.

Ожидаемые действия ученика: работает с чертежом (рис. 3).

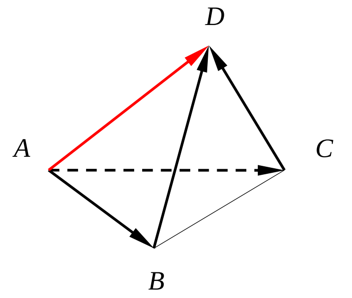

Рис. 3

$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AD}$

$\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AD}$, тогда $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CD}$, что требовалось доказать.

11 этап

Ролевые действия учителя: рассмотрим альтернативный подход к доказательству. Обратим внимание на алгебраическую форму векторного равенства: $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CD}$, *какая особенность*? *Какое значение точки B для вектора* $\overrightarrow{AB}$? *Какое значение точки B для вектора* $\overrightarrow{BD}$? *Что следует из суммы двух векторов* $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}$?

Требования к знаниям ученика: должен знать определение – *суммы двух векторов*.

Ожидаемые действия ученика: точка *B* – это конец вектора $\overrightarrow{AB}$ и начало вектора $\overrightarrow{BD}$, тогда, $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AD}$.

12 этап

Ролевые действия учителя: указание – рассмотреть векторное равенство $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CD}$.

Требования к знаниям ученика: должен знать определение – *суммы двух векторов*.

Ожидаемые действия ученика: $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AD}$, что требовалось доказать.

Задача 2 [Задача 331. *Атанасян Л.С., Бутузов В.Ф., Кадомцев С.Б. и др.* Геометрия 10 –11 классы].

Пусть *ABCD* – параллелограмм, *O* – произвольная точка пространства. Докажите, что $\overline{OB}-\overline{OA}=\overline{OC}-\overline{OD}$.

Доказательство.

1 этап

Ролевые действия учителя: *какие геометрические объекты в условии задачи*?

Требования к знаниям ученика: должен знать определение – *параллелограмм*; понятие принадлежности точки.

Ожидаемые действия ученика: геометрические объекты – параллелограмм; произвольная точка в пространстве.

2 этап

Ролевые действия учителя: активизация знаний: сформулируем определение параллелограмма.

Требования к знаниям ученика: должен знать определение – *параллелограмм*.

Ожидаемые действия ученика: параллелограмм – это четырёхугольник, у которого противоположные стороны попарно параллельны.

3 этап

Ролевые действия учителя: указание – выполнить чертёж.

Требования к знаниям/умениям ученика: выполнять построения.

Ожидаемые действия ученика: выполнение чертежа (рис. 4).

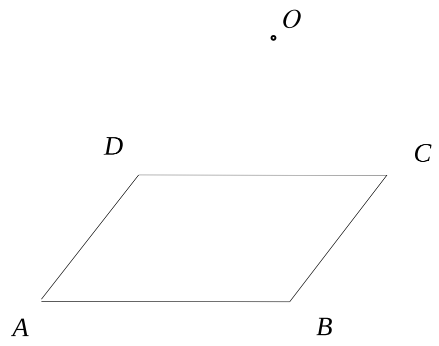

Рис. 4

4 этап

Ролевые действия учителя: разбор формулировки доказательства.

В каком виде представлена формулировка доказательства?

Ожидаемые действия ученика: доказательство формулируется как алгебраическое выражение (векторное равенство, разность векторов, векторное выражение).

5 этап

Ролевые действия учителя: *тогда, какие объекты в условии задачи определены*? Активизация знаний: сформулируем определения вектора.

Требования к знаниям ученика: должен знать определение – *вектор*.

Ожидаемые действия ученика: множество векторов $\left\{\overrightarrow{OB}; \overrightarrow{OA}; \overrightarrow{OC}; \overrightarrow{OD}\right\}$.

6 этап

Ролевые действия учителя: указание – выполнить дополнительное построение.

Требования к знаниям/умениям ученика: выполнять построения.

Ожидаемые действия ученика: выполнение чертежа (рис. 5).

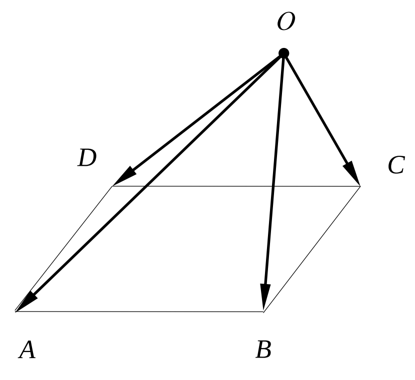

Рис. 5

7 этап

Ролевые действия учителя: *если векторное выражение представлено как разность векторов, то какой вывод по формулировки доказательства следует сделать*?

Ожидаемые действия ученика: доказать, равенство разности двух векторов. $\overline{OB}-\overline{OA}=\overline{OC}-\overline{OD}$.

8 этап

Ролевые действия учителя: *что называют разностью двух векторов*?

Требования к знаниям ученика: знать определение *разности векторов*.

Ожидаемые действия ученика: разностью векторов $\bar{a}-\bar{b}$ называется такой вектор $\bar{c}$, что $\bar{c}+\bar{b}=\bar{a}$.

9 этап

Ролевые действия учителя: *таким образом, доказательство сводится к нахождению вектора разности. Тогда, найдите на чертеже вектор, который является разностью векторов* $\overline{OB}-\overline{OA}$ и $\overline{OC}-\overline{OD}$.

Требования к знаниям ученика: знать определение *разности векторов*.

Ожидаемые действия ученика: $\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{DC}$ (рис. 6).

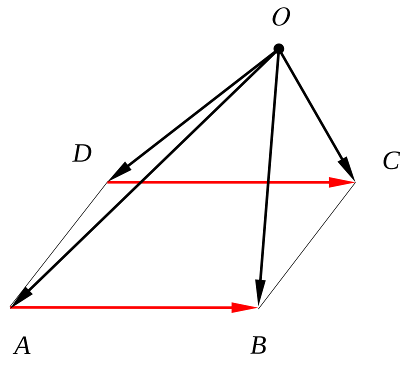

Рис. 6

10 этап

Ролевые действия учителя: *что представляют вектора* $\overrightarrow{AB}$ *и* $\overrightarrow{CD}$?

Какой вывод можно сделать?

Ожидаемые действия ученика: вектора являются сторонами параллелограмма. Стороны параллелограмма противоположны, следовательно, параллельны и равны.

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$, тогда $\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OD} = \overrightarrow{DC}$, следовательно, $\overline{OB} - \overline{OA} = \overline{OC} - \overline{OD}$, что требовалось доказать.

Задача 3 [50, с. 14].

Равенство $|\vec{a} - \vec{b}| = |\vec{a} + \vec{b}|$ справедливо для двух векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ находящихся в пространстве. Докажите, что $\vec{a} \perp \vec{b}$.

Доказательство.

1 этап

Ролевые действия учителя: *какие геометрические объекты в условии задачи*?

Требования к знаниям ученика: должен знать определение – *вектор*.

Ожидаемые действия ученика: геометрические объекты – векторы: $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

2 этап

Ролевые действия учителя: активизация знаний: *что называют вектором?*

Ожидаемые действия ученика: вектор – это направленный отрезок, имеющий начало и конец.

3 этап

Ролевые действия учителя: *что известно из условия задачи относительно векторов*?

Ожидаемые действия ученика: векторы находятся в пространстве, и векторы связаны равенством: $|\vec{a} - \vec{b}| = |\vec{a} + \vec{b}|$.

4 этап

Ролевые действия учителя: *как можно понимать выражение* $|\vec{a} - \vec{b}|$ и $|\vec{a} + \vec{b}|$, *и что значит модуль вектора*?

Указание: рассмотреть модуль разности $\left|\vec{a}-\vec{b}\right|$ и модуль суммы $\left|\vec{a}+\vec{b}\right|$.

Активизация знаний: вспомнить свойства модуля.

Требования к знаниям ученика: должен знать понятие – *модуль вектора*.

Ожидаемые действия ученика: выражения $\left|\vec{a}-\vec{b}\right|$ и $\left|\vec{a}+\vec{b}\right|$– это разность и сумма векторов. Модуль вектора как расстояние (длина).

Если $\left|\vec{a}-\vec{b}\right|=\sqrt{\left(\vec{a}-\vec{b}\right)^2}$, тогда $\left|\vec{a}-\vec{b}\right|^2=\left(\vec{a}-\vec{b}\right)^2$; если $\left|\vec{a}+\vec{b}\right|=\sqrt{\left(\vec{a}+\vec{b}\right)^2}$, тогда $\left|\vec{a}+\vec{b}\right|^2=\left(\vec{a}+\vec{b}\right)^2$.

5 этап

Ролевые действия учителя: указание – выполнить подстановку в условие задачи.

Ожидаемые действия ученика: $\left|\vec{a}-\vec{b}\right|=\left|\vec{a}+\vec{b}\right|\Leftrightarrow\left(\vec{a}-\vec{b}\right)^2=\left(\vec{a}+\vec{b}\right)^2$.

6 этап

Ролевые действия учителя.

Указание: разбор формулировку доказательства.

В каком виде представлена формулировка доказательства?

Ожидаемые действия ученика: доказательство формулируется как математическая модель в форме символов, то есть векторы перпендикулярны.

7 этап

Ролевые действия учителя: *если векторы перпендикулярны, то какой угол образован между векторами*?

Ожидаемые действия ученика: между векторами угол 90°.

8 этап

Ролевые действия учителя: активизация знаний: с одной стороны, два вектора и угол между векторами 90° и, с другой стороны, векторы перпендикулярны – *каким образом можно связать два аргумента*?

Требования к знаниям ученика: должен знать скалярное произведение двух векторов и свойства скалярного произведения: если $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$, то $\vec{a}\perp\vec{b}$.

Ожидаемые действия ученика: векторы перпендикулярны, если скалярное произведение равно нулю.

9 этап

Ролевые действия учителя: указание – переформулировать доказательство.

Ожидаемые действия ученика: доказать, что скалярное произведение векторов равно нулю.

10 этап

Ролевые действия учителя: таким образом, *доказательство сводится к нахождению значения скалярного произведения векторов*. Тогда, *выполните равносильные преобразования векторного выражения*.

Требования к знаниям/умениям ученика: должен выполнять преобразование выражений.

Ожидаемые действия ученика: $\left|\vec{a}-\vec{b}\right| = \left|\vec{a}+\vec{b}\right| \Leftrightarrow \left(\vec{a}-\vec{b}\right)^2 = \left(\vec{a}+\vec{b}\right)^2 \left(\vec{a}-\vec{b}\right)^2 = \left(\vec{a}+\vec{b}\right)^2$,

тогда $\vec{a}^2 - 2\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}^2 = \vec{a}^2 + 2\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}^2$, получим $-2\vec{a}\cdot\vec{b} = 2\vec{a}\cdot\vec{b} - 4\vec{a}\cdot\vec{b} = 0$

$\Rightarrow \vec{a}\cdot\vec{b} = 0$, тогда $\vec{a} \perp \vec{b}$, что требовалось доказать.

Задача 4.

Трапеция, основания которой равны *a* и *b*, боковая сторона *l*, описана окружностью (рис. 7).

Докажите, что радиус окружности равен $R = l\cdot\sqrt{\dfrac{l^2+ab}{4l^2-(a-b)^2}}$.

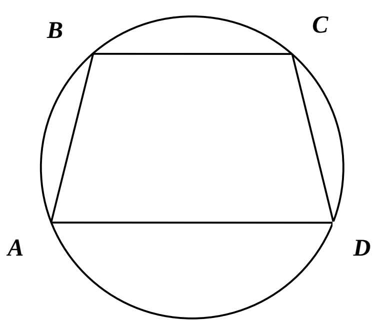

Рис. 7

Дано: *ABCD* – трапеция; *AD* = *a*, *BC* = *b*, *CD* = *l*.

Доказать: $R = l \cdot \sqrt{\dfrac{l^2 + ab}{4l^2 - (a-b)^2}}$.

Доказательство.

1 этап

Ролевые действия учителя: *какие геометрические объекты в условии задачи*? *Какая форма отношений между объектами*?

Требования к знаниям ученика: должен знать определения: *трапеция*; *окружность, описанная около четырёхугольника*.

Ожидаемые действия ученика: геометрические объекты: трапеция, окружность описана около четырёхугольника.

2 этап

Ролевые действия учителя: активизация знаний: *если окружность описана около трапеции, то трапеция является … .*

Требования к знаниям ученика: должен знать определение *равнобедренная трапеция*.

Ожидаемые действия ученика: … трапеция является ***равнобедренной***.

3 этап

Ролевые действия учителя: указание – дополнительное построение в трапеции – проведите диагональ AC. Рассмотрите треугольники: ABC и ACD. Активизация знаний: *какая существует связь между окружностью и треугольниками?*

Требования к знаниям ученика: должен знать определения: *окружность, описанная треугольника*.

Ожидаемые действия ученика: выполнение дополнительного построения (рис. 8). Треугольники являются описанными (окружность описывает треугольники).

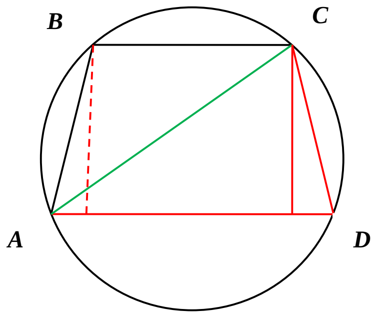

Рис. 8

4 этап

Ролевые действия учителя: активизация знаний: *если окружность описывает треугольник, то* ***радиус*** *окружности …* .

Требования к знаниям ученика: должен знать формулу, которая связывает радиус окружности треугольника и площади описанного треугольника, то есть $R = \frac{abc}{4S}$.

Ожидаемые действия ученика: … радиус окружности – это радиус, описанной около треугольника ABC или ACD.

5 этап

Ролевые действия учителя: актуализация знаний – *какая формула позволяет вычислить радиус окружности, описанной около треугольника*?

Требования к знаниям ученика: должен знать формулу $R = \frac{abc}{4S}$.

Ожидаемые действия ученика: … радиус вычисляется по формуле $R = \frac{abc}{4S}$.

6 этап

Ролевые действия учителя: активизация знаний – разбор формулы $R = \frac{abc}{4S}$.

Чтобы вычислить радиус, необходимо найти площадь одного из треугольников и стороны.

Указание:

1) выполнить дополнительные построения, которые помогут построить доказательство;

2) проведите высоты и сделайте предположения: *как можно найти AC*; *через какие геометрические фигуры можно найти AH*;

3) предположите, что $AK = DH = x$, тогда *какие отношения можно получить*?

Требования к знаниям/умениям ученика: должен выполнить анализ чертежа, определить дальнейший путь доказательства, следуя указаниям; должен решать уравнения с параметром, выполняя алгебраические преобразования.

Ожидаемые действия ученика: рассмотрим Δ ACD: $AD = a$, $CD = l$, $BC = b$ (рис. 9).

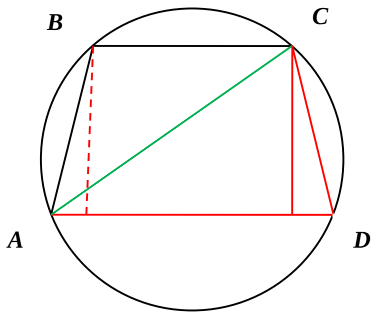

Рис. 9

Чтобы узнать все стороны, надо найти AC. Проведём $CH \perp AD$ и $BK \perp AD$.

AC можно найти из прямоугольного ΔACH, то есть $AC = \sqrt{AH^2 + CH^2}$,

тогда CH найти в ΔCHD; $AH = KH + AK$.

$AK = DH = x$, тогда $AK + DH + KH = AD$ при $KH = BC$, получим $x + x + b = a$;

$2x + b = a$; $x = \dfrac{a-b}{2}$, тогда $AH = KH + AK$, получим $AH = b + \dfrac{a-b}{2} =$

$= \dfrac{2b + a - b}{2} = \dfrac{a+b}{2}$, тогда $AH = \dfrac{a+b}{2}$ и $DH = \dfrac{a-b}{2}$ $CH = \sqrt{l^2 - HD^2}$

$CH = \sqrt{l^2 - \left(\dfrac{a-b}{2}\right)^2}$, $AC = \sqrt{AH^2 + CH^2}$, $AC = \sqrt{\left(\dfrac{a+b}{2}\right)^2 + l^2 - \left(\dfrac{a-b}{2}\right)^2}$,

$\sqrt{l^2 + \left(\dfrac{a+b}{2}\right)^2 - \left(\dfrac{a-b}{2}\right)^2}$, $\sqrt{l^2 + \left(\dfrac{a+b-a+b}{4}\right)\left(\dfrac{a+b+a-b}{4}\right)}$,

$\sqrt{l^2 + \left(\dfrac{2b}{4}\right)\left(\dfrac{2a}{4}\right)} = \sqrt{l^2 + ab}$, тогда $AC = \sqrt{l^2 + ab}$.

7 этап

Ролевые действия учителя: подведём промежуточный итог – *какие параметры известны*?

Требования к знаниям/умениям ученика: должен решать уравнения с параметром, выполняя алгебраические преобразования.

Ожидаемые действия ученика: $AC = \sqrt{l^2 + ab}$; $CH = \sqrt{l^2 - \left(\frac{a-b}{2}\right)^2}$.

8 этап

Ролевые действия учителя: *какой параметр необходимо вычислить*?

Ожидаемые действия ученика: площадь $S_{ACD} = \frac{1}{2} AD \cdot CH$,

тогда $S_{ACD} = \frac{1}{2} a \sqrt{l^2 - \left(\frac{a-b}{2}\right)^2}$.

9 этап

Ролевые действия учителя: *достаточно ли оснований для доказательства задачи*?

Ожидаемые действия ученика: оснований достаточно; необходимо сделать подстановку в формулу $R = \frac{abc}{4S}$ и выполнить преобразования.

Получим, $R = \dfrac{al \cdot \sqrt{l^2 + ab}c}{4 \cdot \frac{1}{2} a \sqrt{l^2 - \left(\frac{a-b}{2}\right)^2}} = \dfrac{l \cdot \sqrt{l^2 + ab}c}{2\sqrt{\left(\frac{2l-a+b}{2}\right) \cdot \left(\frac{2l+a-b}{2}\right)}} =$

$= \dfrac{l \cdot \sqrt{l^2 + ab}c}{\sqrt{(2l-a+b) \cdot (2l+a-b)}} = \dfrac{l \cdot \sqrt{l^2 + ab}c}{\sqrt{4l^2 - (a-b)^2}}$ *ч.т.д.*

§8. Элективный курс «Геометрические задачи на доказательство векторным методом»

Программа элективного курса «**Геометрические задачи на доказательство векторным методом**» предназначена для учащихся 10 – 11 профильных классов и направлена на углубление, обобщение знаний и умений учащихся по математике. Программа элективного курса предлагает методы решения стереометрических задач, основанные на применении векторов и метода координат. Программа элективного курса расширит знания в области стереометрии и предложит решение стереометрических задач координатно-векторным способом.

Актуальность программы элективного курса заключается в том, что математика является профилирующим предметом в вузах инженерно-технического профиля; углубленное изучение математики в старших классах; векторный метод решения геометрических задач применяется на экзамене по математике в форме ЕГЭ.

Предметом элективного курса является сложный раздел школьной программы – геометрия, в частности, решение задач векторно-координатным способом. Геометрические задачи на доказательство вызывают затруднения при сдаче ЕГЭ по математике.

Педагогическая целесообразность программы элективного курса основывается на итогах ежегодного ЕГЭ, которые показывают, что учащиеся слабо справляются с заданиями или вообще не приступают к решению.

Недостатки при обучении учащихся 10 – 11 классов:

– формальное усвоение теоретического содержания курса геометрии;
– не применяют изученный материал при решении задач;
– игнорируют геометрические задачи, отличающиеся нестандартной постановкой.

Успешное выполнение вышеперечисленных педагогических задач требует прочные знания в области векторного и координатного методов решения задач. Изучение математики в старших классах на профильном уровне направлено на систематизацию знаний, полученных в основной школе; изучение общих методов и приемов решения геометрических задач; умение решать геометрические задачи; закрепление навыков решения геометрических задач. Поэтому, следует дополнительно овладевать теоретическими знаниями, совершенствовать умения при решении сложных и нестандартных геометрических задач.

Цель элективного курса – сформировать теоретические знания на основе методов решения задач для развития логического анализа учащихся и применение методов решения задач.

Задачи программы элективного курса.

1. Формирование наглядного изображения пространственных фигур на плоскости.
2. Развитие пространственного воображения: представлять геометрический объект.
3. Формирование умений аргументировать утверждения, возникающие в процессе решения геометрической задачи.
4. Изучение векторно-координатного способа решения геометрических задач.
5. Совершенствование навыков решения задач.

Отличительные особенности элективного курса: тематика задач, предлагаемых при изучении элективного курса, выходит за рамки основного курса.

Изучение геометрии предлагает учащимся приобрести навыки дедуктивных рассуждений, сформировать умение решать задачи на доказательство. Поэтому, в профильном (углубленном) обучении математики элективный курс имеет учебно-методическое значение, так как расширяется содержательная составляющая геометрии.

Включение избранных теорем геометрии, а также решение нестандартных задач различными методами, способствует формированию умений решать задачи на доказательство векторным методом.

Новизна программы элективного курса заключается в следующем: рассматриваются задачи, соответствующие требованиям ЕГЭ и задачи повышенной сложности.

Содержание программы представлено несколькими разделами. Элективный курс излагает методы решения стереометрических задач, основанные на применении векторов и метода координат. Задачи подобного типа включены в варианты вступительных экзаменов в различные вузы, учебники для профильной школы и классов с углубленным изучением математики. Элективный курс позволит приобрести дополнительные знания, сформировать умения и навыки поисково-исследовательской деятельности при решении задач. Программа элективного курса рассчитана 17 часов. Форма занятия: групповая и индивидуальная.

Ожидаемые результаты:

– правильно употреблять новые термины, связанные с основными понятиями векторно-координатного метода;

– знать основные теоремы, признаки и свойства векторов в пространстве;

– правильно анализировать условия задач;

– уметь выполнять чертеж к задаче;

– уметь исследовать поставленную задачу;

– уметь логически строить рассуждения;

– решать геометрические задачи векторным способом;

– применять полученные знания при решении задач доказательство и вычисления;

– использовать символический язык для записи решений геометрических задач.

Формы проведения элективного курса: лекции, практические занятия под руководством учителя, самостоятельная работа – решение домашних задач.

Форма контроля: промежуточные контрольные работы.

Отслеживание результатов: накопление оценок в процессе обучения на уроке; оценки за выполнение практических работ; оценки за домашние задания.

Элективный курс предлагает выполнить исследовательский проект на тему: «*Где встречаются вектора?*», «*Векторы и физика?*», «*Векторы в технике! Как это понимать?*». Проект выполняется в форме краткого сообщения и оформляется на листах формата А4. Проект выполняет каждый учащийся.

Предметная направленность проекта: математика, физика, техника. Цель проекта: развитие поисковых навыков обучающихся в процессе исследовательской деятельности.

Задачи проекта.

1. Развитие навыков поисковой деятельности.
2. Формирование информационной и коммуникативной активности.
3. Совершенствование творческой направленности.

Метапредметные задачи: понимание связи геометрии с физикой и техникой.

Предметные задачи: практические умения по теме «***Векторы***», расширение знаний по данной теме; умение осуществлять поиск и анализировать различные источники информации, в том числе в сети Интернет.

Содержание

Тема 1. Понятия, определения, теоремы связанные с векторами (1 час).

Цель: напомнить основные определения, свойства и теоремы необходимые для решения задач векторно-координатным способом.

Вектор. Координаты вектора. Длина вектора. Линейные операции над векторами. Угол между векторами. Скалярное произведение векторов.

Ожидаемые результаты: применять теоретические знания решения геометрических задач на доказательство.

Задания.

Задача 1. В пространстве даны векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$, такие, что $\left|\vec{a}-\vec{b}\right|=\left|\vec{a}+\vec{b}\right|$. Доказать, что $\vec{a} \perp \vec{b}$.

Задача 2. Точки *P* и *K* делят отрезки *AB* и *CD* в отношении $\frac{AP}{PB}=\frac{CK}{NK}=\frac{m}{n}$. Доказать, что $\overrightarrow{MN}=\frac{n}{m+n}\cdot\overrightarrow{AC}+\frac{m}{m+n}\cdot\overrightarrow{BD}$.

Задача 3. Докажите, что равенство $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=0$ верно, если *M* – точка пересечения медиан треугольника *ABC*.

Тема 2. Разложение вектора по трём данным некомпланарным векторам (2 часа).

Цель: сформировать подход к доказательству задач, применяя операцию разложения вектора по трём некомпланарным векторам.

Базис вектора. Некомпланарные векторы, коэффициенты разложения, запись разложения вектора.

Ожидаемые результаты: применять теоретические знания решения геометрических задач на доказательство.

Задания.

Задача 1. Точка *N* принадлежит плоскости треугольника *ABC*, точка *L* находится вне плоскости треугольника.

Докажите, что $\overrightarrow{LN}=x\overrightarrow{LA}+y\overrightarrow{LB}+z\overrightarrow{LC}$, где $x+y+z=1$.

Задача 2. Докажите, что для любых четырёх точек пространства *A, B, C, D* верно $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{BD}=0$.

Задача 3. Докажите, что $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=0$, если точка *M* – это точка пространства медиан треугольника *ABC*.

Тема 3. Расстояние от точки до прямой в пространстве (2 часа).

Цель: научиться применять формулу векторного нахождения расстояния для решения задач: вычисления объёма фигуры; вычисления площади поверхностей; задачи на доказательство.

Координаты точек. Ортогональная проекция. Формула расстояния между точками.

Ожидаемые результаты: применять теоретические знания решения геометрических задач на доказательство и вычисления.

Задания.

Задача 1.Даны точки $M(0;\ 1;\ 3)$, $N(0;\ -1;\ 2)$, $P(2;\ 2;\ 2)$. Вычислить расстояние от точки P до прямой MN.

Задача 2.В правильной треугольной пирамиде $SABC$ $SA = 4$.
Точка $D \in SC$ и $CD = 3$. Расстояние от точки A до прямой BD равно 2. Вычислить объём пирамиды.

Задача 3. В правильной треугольной пирамиде плоский угол равен α. Перпендикуляр, опущенный из основания высоты пирамиды на боковое ребро, равен p. Вычислить объём и площадь боковой поверхности пирамиды.

Тема 4. Расстояние от точки и прямой до плоскости (2 часа).

Цель: научиться применять формулу расстояния для решения задач: вычисления объёма фигуры; вычисления расстояний.

Координаты точек. Ортогональная проекция. Формула расстояния между точками.

Ожидаемые результаты: применять теоретические знания решения геометрических задач на вычисления.

Задания.

Задача 1. Точки с координатами (3; 5; 0), (– 4; 0; 2), (2; 2; 3) принадлежат плоскости γ. Вычислить расстояние от точки (2; – 2; 1) до плоскости.

Задача 2. Плоскость γ имеет базис $\vec{a}$, $\vec{b}$. Вычислить расстояние от точки L до плоскости γ, если $N \in \gamma$ и $L \notin \gamma$.

Задача 3. Сторона основания правильной треугольной призмы равна a, боковое ребро – b. Вычислить расстояние от точки M до плоскости $A_1C_1F_1$, если M – середина ребра BC, N – середина ребра BB_1.

Контрольная работа 1 (1 час).

Задача 1. Докажите, что равенство $\overrightarrow{KA}+\overrightarrow{KB}+\overrightarrow{KC}=0$ верно, если K – это точка пересечения высот треугольника ABC.

Задача 2. Сторона куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равна n. Вывести формулу расстояния между плоскостями ABC_1 и A_1DC_1, если $n = 3$.

Тема 5. Угол между прямой и плоскостью (2 часа).

Цель: научиться вычислять угол между прямой и плоскостью для решения задач: вычисления угла между элементами объёмной фигуры.

Угол между прямой и плоскостью. Базис плоскости. угол между вектором нормали.

Ожидаемые результаты: применять теоретические знания решения геометрических задач на вычисления.

Задания.

Задача 1. Ребро SD перпендикулярно плоскости ABC пирамиды $SABCD$. Основание $ABCD$ – прямоугольник. Точка N – середина ребра SC, $\frac{AB}{CD}=\sqrt{3}$. Вычислить угол между прямой ND и плоскостью SBC.

Задача 2. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$, $AB=\sqrt{3}$, $AA_1=\sqrt{2}$, $BC = 1$. Точка $N \in AB$ и $\frac{AN}{NB}=\frac{1}{2}$. Вычислить угол между прямой A_1N и плоскостью AA_1C_1.

Тема 6. Задачи на отношение отрезков (3 часа).

Цель: научиться вычислять отношения отрезков, если плоскость пересекает отрезок в данной точке.

Уравнение плоскости. Секущая плоскость. Коэффициент отношения в условиях компланарности. Коэффициенты разложения. Базисный вектор.

Ожидаемые результаты: применять теоретические знания для решения геометрических задач на вычисления отношение; на доказательство.

Задания.

Задача 1. Точка $N \in N_1N_2$ и $\overrightarrow{N_1N} = \lambda\overrightarrow{NN_2}$. Докажите, что $\overrightarrow{ON} = \dfrac{\overrightarrow{ON_1} + \lambda\overrightarrow{ON_2}}{1+\lambda}$ при условии, что точка O является произвольной точкой плоскости.

Задача 2. В системе координат даны точки (x_1,y_1) и (x_2,y_2). Число $\lambda = a$. Вычислить (x,y) координаты точки.

Задача 3. К основанию равнобедренного треугольника проведена медиана равная 140 *см*, основание треугольника равно 60 *см*.

Вычислить медианы треугольника.

Задача 4. Диагонали ромба $ABCD$ равны $2a$ и $2b$.

Запишите множество точек N, такое, что для каждой выполняется равенство $AN^2 + DN^2 = BN^2 + CN^2$.

Задача 5. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Точки M, N, P лежат на серединах рёбер AB, CC_1, A_1D_1 куба. Пересекает или не пересекает прямая BD_1 плоскость MNP? В каком отношении точка пересечения делит диагональ BD_1, если прямая пересекает плоскость?

Задача 6. Точки K, P, M, T принадлежат рёбрам SA, AB, BC, CS треугольной пирамиды $SABC$. Доказать, что точки принадлежат одной плоскости в случае, когда $\dfrac{SK}{KA}\cdot\dfrac{AP}{PB}\cdot\dfrac{BM}{MC}\cdot\dfrac{CT}{TC}=1$.

Тема 7. Угол между скрещивающимися прямыми. Расстояние между скрещивающимися прямыми (2 часа).

Цель: научиться вычислять угол между геометрическими объектами.

Угол между прямой и плоскостью, угол между прямыми. Угол между двумя векторами.

Ожидаемые результаты: применять теоретические знания для решения геометрических задач на доказательство.

Задания.

Задача 1. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$, $A \in AA_1$ и $\frac{FA}{FA_1} = 2$, $P \in CC_1$ и $\frac{CP}{PC_1} = \frac{2}{3}$, $M \in AB$ и $AM = AB$, $N \in D_1C_1$ и $\frac{D_1N}{NC_1} = \frac{1}{3}$. Доказать, что прямые MP и FP скрещивающиеся.

Задача 2. Ребро AD треугольной пирамиды $DABC$ перпендикулярно плоскости основания ABC. $DA = \sqrt{3}$, $AB = 2$, $BC = 3$, $AC = \sqrt{13}$. Точки P, $К$ середины рёбер DC и BC. Вычислить угол между прямыми AK и BP.

Задача 3. Вычислить расстояние между скрещивающимися диагоналями двух соседних граней куба, если длина ребра куба равна $a\sqrt{2}$.

Тема 8. Угол между плоскостями (2 часа).

Цель: научиться вычислять угол между плоскостями.

Угол между плоскостями. Теорема об угле между двумя плоскостями.

Ожидаемые результаты: применять теоретические знания для решения геометрических задач на вычисление.

Задания.

Задача 1. В основании пирамиды $SABCD$ лежит прямоугольник со сторонами $CB = a$ и $AD = a\sqrt{3}$. Высота пирамиды равна $2a$ и проходит через вершину C основания. Через вершину A и середину M ребра SC проведена плоскость γ, параллельная диагонали BD.

Вычислить: площадь сечения; угол между плоскостью γ и основанием; угол и расстояние диагональю BD и линией AM.

Задача 2. Угол при вершине осевого сечения конуса равен 150°. Через вершину конуса проведено сечение, являющееся прямоугольным треугольником. Вычислить угол между плоскостями сечения и основания.

Тема 9. Использование метода координат в решении задач (2 часа).

Цель: научиться применять метод координат в решении задач на вычисление и доказательство.

Вектор, координаты вектора. Расстояние между точками. Деление отрезка в данном отношении. Уравнения плоскости. Общее уравнение прямой.

Точка пересечения прямых, координаты точки пересечения. Угол между плоскостями. Теорема об угле между двумя плоскостями.

Ожидаемые результаты: применять теоретические знания для решения геометрических задач на вычисление и доказательство.

Задания.

Задача 1. Найти множество точек пространства, если сумма квадратов расстояний каждой точки до данных точек (2; 3; – 1) и (1; – 1; 3) равна m^2.

Задача 2. Ребро куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равно $2a$. Вычислить радиус сферы, проходящей через середины рёбер AA_1, BB_1 и вершины A и C_1.

Задача 3. В правильной прямой треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ со стороной основания a и высотой b через ребро A_1C_1 и середину ребра BB_1 проведено сечение. Вычислить расстояние от середины ребра BC до сечения.

Контрольная работа 2 (1 час).

Задача 1. Равносторонний треугольник ABC, сторона которого $4\sqrt{2}$, является основанием пирамиды $SABC$. Боковое ребро SC, равное 2, перпендикулярно плоскости основания. Точки E и D середины ребёр BC и AB. Вычислить угол и расстояние между рёбрами SE и CD.

Задача 2. Вычислить радиус сферы, проходящей через точки C, D и середины рёбер AB и AC в тетраэдре $ABCD$, ребро которого равно $a\sqrt{2}$.

Задачи для самостоятельного решения.

1. Вычислить координаты фокусов эллипса и гиперболы: $a = 13$, $b = 5$.
2. Составить канонические уравнения эллипса и гиперболы, которые

проходят через точки с координатами (5, 6) и (– 8, 7).

3. Составить уравнение касательной к гиперболе в точке, координата

которой $x = 11$ и $y < 0$, если действительная полуось равна 8, мнимая полуось равна 4.

4. Координаты вершин четырехугольника $ABCD$: $A(– 6; 1)$, $B(0; 5)$,

$C(6;\ -4)$, $D(0; -8)$. Докажите, что $ABCD$ является прямоугольником и найдите координаты точки пересечения диагоналей.

5. Уравнение $(x-1)^2 + y^2 = 9$ является окружностью. Составить уравнения прямых, которые проходят через центр окружности и параллельны координатным осям. Найдите уравнение касательной к окружности, которая параллельна оси абсцисс, и максимально близко расположена к началу координат.

6. Координаты вершин треугольника равны $A(-3; -6)$, $B(-8; 6)$, $C(4; -10)$. Вычислить длину средней линии треугольника, которая параллельна стороне AB.

7. Точка A лежит на окружности радиуса r, через которую проведены всевозможные хорды. Найти геометрическое место точек, которые делят хорды пополам.

8. Высота треугольника делит сторону на отрезки равные 10 *см* и 4 *см*. Введите систему координат. Вычислите координаты вершин треугольника, если угол при вершине равен 45°.

9. Определите геометрическое место точек плоскости, удовлетворяющие условию: расстояния от каждой точки до концов отрезка относятся как 2:3.

10. Найдите уравнение прямой, которая проходит через точку (2; 4) и перпендикулярна прямой $4x - 9y = 0$. В каких точках прямая пересекает координатные оси?

11. Прямая проходит через середину отрезка AB и пересекает отрезок AC в точке M, так, что $AM = 3MC$. Составить параметрические, каноническое, общее уравнения прямой, если $A(8; 0)$, $B(-4; 8)$, $C(12; 16)$.

12. Основанием прямой призмы $ABCA_1B_1C_1$ является прямоугольный

треугольник, катеты $AB = 4$ и $BC = 6$. Высота призмы равна 10. Вычислить объем пирамиды, если вершины находятся в точке C_1 и серединах BC, BB_1, A_1B_1.

13. Прямоугольный параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$, в котором $AD = 6$, $AB = 5$, $AA_1 = 9$. Вычислить объем пирамиды EB_1C_1F, если $E \in AA_1$ и $AE = 6$, $F \in CD$ и $CF = 4$.

§9. Результаты экспериментальной работы

Экспериментальная работа по исследуемой проблеме осуществлялась в Чапаевском губернском колледже имени О. Колычева в структурном подразделении – «Гимназия» г.о. Чапаевск, Самарской области.

Цель констатирующего этапа эксперимента – проанализировать методику обучения решению геометрических задач на доказательство в 11 классе, в течение сентября и октября 2018 года по теме «*Метод координат в пространстве*». Основание для эксперимента являлась разработка методики решения геометрических задач на доказательство векторным способом, кроме того, тема «*Метод координат в пространстве*» является логическим продолжением темы «*Векторы в пространстве*», которая изучалась в 10 классе во втором полугодии.

Методы исследования экспериментальной работы включали:

1) наблюдение учащихся 11 класса в процессе решения задач на доказательство; цель наблюдения – определить умение решать задачи на доказательство и способность доказывать;

2) анкетирование в форме тестовых заданий для учащихся 11 класса.

Анкетирование учащихся 11 класса проводилось с целью установления уровня обученности решения геометрических задач на доказательство.

Анкетирование проводилось в несколько этапов.

Поисковый этап эксперимента в 2017 – 2018 и начало 2018 – 2019 годов с учащимися 10 и 11 классов направлен на установление и обнаружении трудностей, которые учащиеся испытывают при решении задачи на доказательство. Поисковый этап характеризовал проверку методики обучения решению геометрических задач на доказательство, изложенную в диссертации.

Экспериментальная работа по выявлению проблем в методике обучения будет продолжена в процессе педагогической работы с учащимися 10 – 11 классов.

Анализ поискового этапа экспериментальной работы выявил следующий результат: учащиеся могут решать задачи на доказательство, *если* решали подобные, типовые задачи, то есть аналогичные; *если* указан метод доказательства.

Учащиеся в качестве предложения обозначили важность и значимость направляющей роли учителя при решении задач на доказательство.

Анкетирование состояло из нескольких этапов.

Первый этап направлен на установления первого содержательного компонента методики обучения «*Первое знакомство с задачей на доказательство*». Учащимся предлагалась геометрическая задача на доказательство и перечень вопросов, на которые должны ответить.

Задача 1. В пространстве для двух векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ справедливо равенство $|\vec{a}+\vec{b}|=|\vec{a}-\vec{b}|$. Доказать, что $\vec{a} \perp \vec{b}$.

Перечень вопросов:

1. Какой геометрический объект является исходным (данным)?
2. Определить отношения между геометрическими объектами.
3. Каким утверждением формулируется вопрос задачи? Что требуется доказать?
4. Представьте геометрическую задачу в форме чертежа.
5. Какие требуются в задаче дополнительные или вспомогательные построения? Выполните построения на чертеже.

Таблица 1

Результаты

Выявление умения	**Количество учащихся**	**%**
Определяют геометрический объект задачи.	19	100
Определяют отношения между геометрическими объектами.	18	94
Определяют формулировку утверждения доказательства задачи.	19	100
Выполняют чертеж, дополнительные построения.	17	89

Второй этап направлен на установления геометрических характеристик задачи на доказательство; цель проверки – выяснить корректность установления существенного свойства или признака геометрического объекта, которое может предопределить доказательство задачи или дать импульс к поиску доказательства.

Учащимся предлагалась геометрическая задача на доказательство и перечень вопросов, на которые должны ответить.

Задача 2. Докажите справедливость равенства $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{BD}=0$ для четырёх точек A, B, C, D.

Перечень вопросов:

1. Сформулируйте существенную характеристику, свойство или признак геометрического объекта.
2. Определите связи или отношения между объектами, либо в объекте.
3. Сделайте попытку преобразовать исходные данные, либо получить следствия, либо установить признаки.

Таблица 2

Результаты

Выявление умения	**Количество учащихся**	**%**
Формулируют существенное свойство, признак геометрического объекта.	14	73
Определяют связи/отношения между объектами (в объекте).	9	47
Делают попытку преобразовать исходные данные, получить следствия, установить признаки.	8	42

Третий этап предполагал выявление умений (навыков) учащихся разбирать структуру геометрической задачи.

Задача 3. Точка M является точкой пространства медиан треугольника ABC. Докажите, что $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=0$.

Предложенный перечень вопросов, на которые отвечали учащиеся, следующие:

1. Какой геометрический объект определён начальным условием задачи?

Перечислите исходные данные задачи.

2. Какие отношения и связи существуют между геометрическими объектами?

3. Какие свойства или признаки можно перечислить, для построения доказательства задачи?

Таблица 3

Результаты

Выявление умения	**Количество учащихся**	**%**
Определяют начальные условия геометрического объекта и задачи.	19	100
Определяют отношения между геометрическими объектами, устанавливают связи.	11	57
Находят свойства, признаки, применяют теоремы, которые влияют на процесс доказательства задачи.	10	52

Четвёртый этап предполагал выявление умений учащихся разбирать формулировку доказательства.

Учащимся предлагалось в трёх задачах выделить формулировку доказательства.

Задача 1. Точка M принадлежит прямой M_1M_2, такая, что $\overrightarrow{M_1M} = \lambda\overrightarrow{MM_2}$.

O – произвольная точка плоскости. Докажите, что $\overrightarrow{OM} = \dfrac{\overrightarrow{OM_1} + \lambda\overrightarrow{OM_2}}{1+\lambda}$.

Задача 2. На рёбрах SA, AB, BC, CS треугольной пирамиды $SABC$ взяты точки K, P, M, T соответственно. Доказать, что точки принадлежат одной плоскости, если $\dfrac{SK}{KA}\cdot\dfrac{AP}{PB}\cdot\dfrac{BM}{MC}\cdot\dfrac{CT}{TC}=1$.

Задача 3. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Точка A принадлежит AA_1 и $FA : FA_1 = 2:1$; точка P принадлежит CC_1 и $CP : PC_1 = 2:3$; точка M принадлежит AB и $AM = AB$; точка N принадлежит D_1C_1 и $D_1N : NC_1 = 1:3$. Доказать, что прямые MP и FP скрещивающиеся.

Учащиеся должны были:

1. Записать формулировку задачи. Записать формулировку

доказательства, используя язык математических символов.

2. Заменить формулировку задачи простой или понятной в любой задаче.

3. Переформулировать доказательство в любой задаче.

4. Рассмотреть возможность доказательства: через дополнительные построения; через геометрические преобразования.

Таблица 4

Результаты

Выявление умения	**Количество учащихся**	**%**
Записывают формулировку задачи и доказательство, используя язык математических символов.	17	89
Заменяют формулировку доказательство понятной, простой, другой.	9	47
Выполняют дополнительные построения, геометрические преобразования для доказательства.	8	42

Итоговым этапом тестирования была контрольная работа, которая включала геометрическую задачу на доказательство векторным способом.

Цель контрольной работы – установить уровень сформированности умений доказывать задачу.

Результаты контрольной работы показали, что решение геометрических задач на доказательство по наводящим вопросам эффективно: с задачей справились 12 учащихся, что составляет 63%. Задачу не доказали, но структуру задачи разобрали 2 учащихся, что составляет 10%. Задачу доказали некорректно, не имея достаточных основания для доказательства; применили набор свойств и следствий, не влияющих на доказательство, 5 учащихся, что составляет 26%. Анализ контрольной работы представлен в таблице 5.

Таблица 5

Результаты контрольной работы

Название уровня	**Характеристика**
Низкий	Задача не доказана. Умение не сформировано.
Слабо-уверенный	Задача не доказана, но учащийся делает попытки, испытывает затруднения при обосновании, запутанность в суждениях. Умения на стадии формирования.

Продолжение таблицы 5.

Достаточно-уверенный	Задача доказана, но процесс доказательства имеет недостаточные обоснования. Учащийся применяет смелые и находчивые аргументы. Учащийся применил истинные рассуждения, которые не являются достаточными для доказательства. Умения формируются в процессе (в развитии).
	Задача не доказана, но процесс доказательства правильный, поясняет ход решения, возможны неверные шаги, применяет верные рассуждения, но приводящие в логический тупик, допускает ошибки в расчётах, приводящие к неверному ответу. Умения недостаточно сформированы.
Высоко-уверенный	Задача доказана, на основе логических умозаключений, на основе аксиом, теорем, свойств и признаков, которые являются необходимыми и достаточными обоснованиями для доказательства. Умения сформированы.

Таблица 6

Сформированность умений по уровням

Название уровня	Количество	%	Вывод
Низкий	2	10	Умения не сформированы.
Слабо-уверенный	–	–	Умения на стадии формирования.
Достаточно-уверенный	–	–	Умения в процессе (в развитии) формирования.
	5	26	Умения недостаточно сформированы.
Высоко-уверенный	12	63	Умения сформированы.

Главный вывод констатирующего эксперимента:

1) методика обучения решению геометрических задач на доказательство, реализующаяся методику «технология наводящих вопросов», является эффективной; результативность обучения более 50%;

2) ролевая деятельность учителя усиливает процесс методики обучения и является ведущей;

3) учащиеся формируют индивидуальный стиль доказательства задачи на основе подхода и поиска доказательства, применяя наводящие вопросы.

Выводы по второй главе

Содержательно-методические особенности обучения решению геометрических задач на доказательство выявили следующее:

1. Формирование умений решать геометрические задачи на доказательство основывается на взаимодействии и совместной работе учителя и ученика при условии активной позиции обучаемого.
2. ***Основные цели и задачи обучения*** решению геометрических задач на доказательство в общеобразовательной школе можно реализовать через методику обучения «технология наводящих вопросов».
3. Технология обучения на основе наводящих вопросов предполагает:

– формирование навыка самостоятельного поиска доказательства;

– формирование мотивации учащихся доказывать задачи;

– формирование стремления решать задачи на доказательства;

– создание учебно-познавательной ситуации для решения задачи на доказательство;

– преодоление трудностей психологического характера, препятствующие решать задачи на доказательство;

– воспитание воли и настойчивости в достижении истины при построении доказательства.

4. «Технология наводящих вопросов» является методикой обучения решения геометрических задач на доказательство.
5. Роль учителя при реализации методики «технология наводящих вопросов» заключается в том, чтобы выполнять управление процессом обучения.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В результате выполнения магистерской диссертации раскрыты методические особенности обучения решению геометрических задач на доказательство.

Результаты исследования:

1. Составлена классификация геометрических задач на доказательство.
2. Рассмотрена методика обучения решения геометрических задач на доказательство на основе «*технологии наводящих вопросов*».
3. Сформулировано определение «*технология наводящих вопросов*» как методика обучения решению геометрических задач, направленная на формирование умений выстраивать процесс доказательства.
4. Разработаны учебные цели и задачи обучения, используя «*технологию наводящих вопросов*».
5. Разработаны содержательные компоненты методики обучения.
6. Составлены критерии, оценивающие эффективность применения методики обучения.
7. Предложены методические указания для обучения решению геометрических задач на доказательство, реализующие обучение через ролевое влияние учителя и активную позицию ученика.
8. Разработан элективный курс «*Геометрические задачи на доказательство векторным способом*», реализующий методику обучения через «*технологию наводящих вопросов*».

СПИСОК ИСПОЛЬЗУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Автономова, Т.В. Практикум по методике преподавания математики в средней школе: учеб. пособие / Т.В. Автономова и др.; под ред. В.И. Мишина. – М.: Просвещение, 1993. – 287 с.

2. Анциферова, А.В. Использование «Живой геометрии» на урока математики / А. В. Анциферова, С. В. Ларин //Математика в школе. – 2008. – № 8. – С. 52 – 59.

3. Беспалко, В. П. Слагаемые педагогической технологии. – М.: Просвещение, 1999. – 137 с.

4. Березин, В.Н. Методические функции наглядности в обучении математике : автореф. дисс. … канд. пед. наук. М., 1975. – 17 с.

5. Боженкова, Л.И. Методика формирования универсальных учебных действий при обучении геометрии. – М.: Бином, 2013. – С. 185.

6. Болтянский, В.Г. Использование логических символов в работе с определениями // Математика в школе. – 1973. – № 5.

7. Болтянский, В.Г. Как устроена теорема // Математика в школе. – 1973. – № 1.

8. Василевский, А.Б. Обучение решению задач по математике. – Минск: Вышейшая школа, 1998. – 221 с.

9. Виноградова, Л.В. Методика преподавания математики в средней школе. – Ростов-на-Дону: Феникс, 2005. – 197 с.

10. Габович, И.Г. Алгоритмический подход к решению геометрических задач: кн. для уч-ся. – М.: Просвещение, 1996. – 87 с.

11. Груденов, Я. И. Изучения определений, аксиом, теорем. – М.: Просвещение, 1984. – 62 с.

12. Гусев, А.В. Векторы в школьном курсе геометрии / В.А. Гусев, Ю.М. Колягин, Г.Л. Луканкин. – М.: Просвещение, 1976. – 84 с.

13. Гончаров, В.С. Психологические особенности связи поиска решения задач с типом мышления : автореф. дисс. … канд. псих. наук. М., 1981. – 16 с.

14. Давыдов, А.Н. Методика обучения решению геометрических задач на доказательство по технологии наводящих вопросов // Вестник магистратуры. – 2018. – № 9 – 1(84). С. 8 – 12.

15. Давыдов, А.Н. Почему важно решать задачи на доказательство?// Наука и мир. – 2018. – № 9(61). Т.2. – С. 27 – 29.

16. Давыдов, В.В. Теория развивающего обучения. – М., 1998. – 157 с.

17. Давыдов, В.В. Содержание и структура учебной деятельности учащихся. Формирование учебной деятельности школьников. – М., 1982. – 119 с.

18. Далингер, В.А. Обучение учащихся доказательству теорем: учеб. пособие. – Омск: Изд. ОмГПИ, 2002. – 132 с.

19. Далингер, В.А. Об аналогах в планиметрии и стереометрии // Математика в школе. – 1995. – № 6. – С. 16.

20. Дубнов, Я.С. Ошибки в геометрических доказательствах. – М., 1969. – 54 с.

21. Дышинский, Е. А. Практическое руководство к выполнению чертежей в стереометрии // Вопросы прикладной математики и методики. – Пермь, 1974. – С. 3 – 68.

22. Ерохина, М.Н. Формирование эвристической деятельности старшеклассников при изучении углубленного курса геометрии : дис. … канд. пед. наук. М., 1999. – 237 с.

23. Игошин, В. И. О применении математической логики при доказательстве обратных теорем // Математика в школе. – 2002. – № 10. – С. 26 – 28.

24. Карасёв, П. А. Элементы наглядной геометрии в школе. – М., 1955. – 64 с.

25. Клековкин, Г.А. Решение геометрических задач векторным методом: учебное пособие для учащихся 10 – 11 классов / Г.А. Клековкин. – Самара: СФ ГАОУ ВО МГПУ, 2016. – 180 с.

26. Коржачкина, О.М. Решение задач как вид мыслительной деятельности: общие методы (на примере предметной области «математика») // Математика в школе. – 2018. – № 4. – С. 46 – 57.

27. Костицин, В.Н. Моделирование на уроках геометрии. Теория и методические рекомендации. – М.: ВЛАДОС, 2000. – 131 с.

28. Котова, И.Б. Педагогическое взаимодействие /И.Б. Котова, Е.Н. Шиянов. – Ростов-на-Дону: Феникс, 2005. – 195 с.

29. Кукушкин, В.С. Теория и методика преподавания. – Ростов-на-Дону: Феникс, 2005. – 324 с.

30. Куценок, В.Е. Обучение методам геометрических задач, основанным на использовании вспомогательной окружности: дис. … канд. пед. наук. М., 1992. – 156 с.

31. Левитес, Д.Г. Личность и технологии в обучении // Педагогика. – 2016. – № 2. – С. 65 – 72.

32. Лейкин, С.В., Рыжик, В.И. Сколько же способов решения задачи? // Математика в школе. – 2018. – № 3. – С. 21 – 33.

33. Манвелов, С.Г. Конструирование современного урока математики: кн. для учителя. – М.: Просвещение, 2002. – 127 с.

34. Метельский, Н.В. Дидактика математики: лекции по общим вопросам. – Минск: Изд. БГУ, 1975. – 258 с.

35. Метельский, Н.В. Пути совершенствования обучения математике. Проблемы современной методики математики. – Минск: Университетское изд. 1989. – 206 с.

36. Метельский, Н.В. Дидактика математики: лекции по общим вопросам. – Минск: Изд. БГУ, 1975. – 258 с.

37. Неудахина, Н.А. Основы педагогического мастерства: учеб.-метод. пособие. – Барнаул: АлтГТУ, 2002. – 236 с.

38. Новик, И.А. Формирование методической культуры учителяматематики в педвузе. – Минск: БГПУ им М. Танк, 2002. – 137 с.

39. Огурцова, О.К. Частные эвристики как условие включения учащихся в поисковую деятельность на уроках стереометрии : автореф. дис. … канд. пед. наук. Саранск, 2002. – 18 с.

40. Перельман, Я.И. Как сделать изучение геометрии интересным и жизненным? // Математика в школе. – 2016. – № 1. – С. 25 – 30.

41. Пойя, Д. Как решать задачу. – М.: Квантор, 1991. – 124 с.

42. Полонский, В.Б.Учимся решать задачи по геометрии: учеб.-метод. пособие /В.Б. Полонский, Е.М. Рабинович, М.С. Якир. – Киев: Магистр-S, 1996. – 96 с.

43. Потоскуев, Е.В. Векторы и координаты как аппарат решения геометрических задач: учеб пособие. – М.: Дрофа, 2008. –166 с.

44. Потоскуев, Е.В. О содружестве наглядности и логики рассуждений при решении геометрических задач // Математика в школе. – 2018. – № 3. – С. 40 – 48.

45. Саранцев, Г.И. Методика обучения математики в средней школе: учеб. пособие. – М.: Просвещение, 2002. – 257 с.

46. Саранцев, Г.И. Перед встречей с доказательством // Математика в школе. – 2004. – № 9. – С. 41 – 45.

47. Саранцев, Г.И. Рисунок в школьном курсе геометрии // Математика в школе. – 2010. – № 5. – С. 46 – 53.

48. Саранцев, Г.И. Обучение математическим доказательствам и опровержениям. – М.: ВЛАДОС, 2005. – 196 с.

49. Саранцев, Г.И. Эвристики в школьной геометрии // Математика в школе. – 2008. – № 4. – С. 28 – 34.

50. Севрюков, П.Ф. Векторы и координаты в решении школьного курса стереометрии: учеб. пособие / П.Ф. Севрюков, А.Н. Смоляков. – М.: Илекса; НИИ Школьных технологий; Ставрополь: Сервисшкола, 2008. – 164 с. – (Серия «Изучение сложных тем школьного курса математики»).

51. Сефибеков, С.Р. Из опыта начального обучения решению геометрических задач на доказательство // Математика в школе. – 2007. – № 6. – С. 41 – 44.

52. Темербекова, А.А. Методика преподавания математики: учеб. пособие/ А.А. Темербекова, И.В. Чугунова, Г.А. Байгонакова. – Горно-Алтайск: РИО ГАГУ, 2011. – 355 с.

53. Тимофеева, И.Л. Как устроено доказательство? // Математика в школе. – 2004. – № 8. – С. 73 – 80.

54. Туркина, В.М. Формирование общих приемов поиска доказательства математических утверждений: автореф. дис. … канд. пед. наук. Д., 1984.– 19 с.

55. Фетисова, А.И. Методика преподавания геометрии в старших классах средней школы. – М.: Просвещение, 1967. – 297 с.

56. Фридман, Л.В. Как научиться решать задачи: пособие для учащихся/ Л.М. Фридман, Е.Н. Турецкий. – М.: Просвещение, 1984. – 95 с.

57. Чугунова, И.В. Графическая культура как условие эффективного обучения: учеб.-метод. пособие. – Горно-Алтайск: РИО ГАГУ, 2006. – 112 с.

58. Шарыгин, И.Ф. Чертёж в стереометрических задачах // Квант. – 1991. – № 5. – С. 47 – 51.

59. Baron, Lois M. Do the math! Decorate with Geometry // Math Horizons. 2018. V. 26. P. 14 – 15.

60. Berendonk, S. Proof without words: sums of squares in a thin rectangle // The College Mathematics Journal. 2018. V. 49. P.180.

61. Brenton, L. A Bigger Altar: Geometry and Ritual // Math Horizons. 2017. V. 25. P. 8 – 11.

62. Edwin, O’Shea. Proofs are like love songs // Math Horizons. 2018. V. 26. P. 34.

63. Marion, C. Proof without words: filling in Pythagorean Gaps // Mathematics Magazine. 2018. V. 91. P. 260 – 261.